UNIVERSITETET
I OSLO

Masteroppgåve

Mangelfull algebrakompetanse som hinder for utvikling av matematisk forståing

Ein kvalitativ studie av R2-elevar sin algebrakompetanse

Anna Harestad

MDID4009 – Masteroppgave i matematikkdidaktikk
30 studiepoeng

Institutt for lærerutdanning og skoleforskning
Det utdanningsvitenskapelige fakultet

Våren 2022

Mangelfull algebrakompetanse som hinder for utvikling av matematisk forståing

Ein kvalitativ studie av R2-elevar sin algebrakompetanse

Anna Harestad

MDID4009 – Masteroppgave i matematikkdidaktikk
30 studiepoeng

Institutt for lærerutdanning og skoleforskning
Det utdanningsvitenskapelige fakultet

Universitetet i Oslo

2022

«Mangelfull algebrakompetanse som hinder for utvikling av matematisk forståing.»

http://www.duo.uio.no

Trykk: Grafisk senter, Universitetet i Oslo

Samandrag

Tidlegare forsking tyder på at elevar i Noreg har utfordringar tilknytt algebra (Grønmo, Hole, et al., 2017; Mullis et al., 2016a, 2016b). Til dømes viser resultat frå TIMSS Advanced at elevar i matematikk R2 skårar dårlegare i fagområdet algebra enn i andre matematiske områder (Mullis et al., 2016b). Resultata seier mindre om korleis algebrakompetansen påverkar elevane i utvikling av matematikkforståing. Med bakgrunn i dette har eg i denne studien studert følgjande problemstilling: «*Korleis kan algebrakompetansen til elevar i matematikk R2 påverka deira mogelegheiter til å utvikla matematisk forståing?».* Problemstillinga vert svara på gjennom tre forskingsspørsmål som omhandlar 1) elevane si forståing for algebraisk symbolbruk, 2) elevane si forståing for transformativ algebra og 3) følgjer av elevane si algebraforståing i møte med bevis.

Tilnærminga til studien er kvalitativ, og datamaterialet bestod av eit skrifteleg elevarbeid og djupneintervju med artefaktar. Det skriftelege elevarbeidet var svar på eit oppgåvesett, og 16 elevar i matematikk R2 svara på dette. Djupneintervjua vart gjennomført med 4 av desse elevane, der oppgåvesettet og svaret på det var brukt som artefaktar.

I denne studien fann eg fleire indikasjonar på at informantane hadde mangelfull forståing for bruken av variablar, parameterar og konstantar. I tillegg fann eg fleire indikasjonar på mangelfull og instrumentell forståing for transformativ algebra. Vidare kunne det sjå ut som at forskingsdeltakarane si mangelfulle forståing kunne hindra dei i å forstå bevis. Ut frå de nemnde funna, teori og tidlegare forsking svara eg på problemstillinga. Resultata tyda på at mangelfull algebrakompetanse kan hindra elevar til å utvikla forståing for matematiske tema i matematikk R2. Vidare kan desse resultata ha ein overføringsverdi, men fordi utvalet ikkje er representativt kan ikkje funna generaliserast (Gleiss & Sæther, 2021, s. 207; Thagaard, 2018, s. 181-182).

Forord

Denne masteravhandlinga markerer slutten på fem år som student på Lektorutdanninga ved Universitetet i Oslo. Eg har vore svært heldig som har hatt veldig mange fine folk rundt meg. Mange fortenar ein stor takk. Takk til familien og vennar som framleis tek telefonen når eg ringer for å få ut frustrasjon. Dykk har lyst opp kvardagen min, og stundvis fått meg ut av masterbobla. Takk til medstudentar for lange lunsjpausar og gode samtalar. Ein særleg stor takk vil eg retta mot Arne Hole. Takk for god og konstruktiv rettleiing, det har vore til stor hjelp. Tusen takk.

Tenk at fem år på Blindern er over. Tida har vore fin og lærerik, men òg til tider hektisk og utfordrande. Eg er takksam for denne tida. Likevel skal det bli fint med eit liv med litt mindre knekkebrød og havregraut.

Oslo, mai 2022

Anna Harestad

Innhaldsliste

1 Innleiing

Saman med tal og talrekning, kan algebra verta sett på som matematikken sin motor, då desse fagområda vert rekna som dei mest fundamentale innanfor matematikk i skulesamanheng (Grønmo, 2017, s. 54). Grunnleggande kunnskapar om tal, talrekning og algebra kan difor vera naudsynt for å læra andre matematiske fagområde (Grønmo, 2017, s. 52-54). Vidare kan algebra verta sett på som matematikken sitt språk, og på same måte som at ein treng grunnleggande kunnskapar i eit visst språk for å lukkast i eit land, treng ein grunnleggjande kunnskapar i algebra for å lukkast i matematikk (Grønmo, 2017, s. 54).

Fag i Kunnskapsløftet (LK06) er strukturert rundt ulike hovudområde, og ut frå desse er kompetansemåla formulert (Utdanningsdirektoratet, 2006b, s. 2). I LK06 er algebra inkludert som ein del av hovudområda i alle matematiske fellesfag frå og med mellomtrinnet og opp til vidaregåande, og i tillegg i 2P, S1, S2, R1 og R2, dømevis «*Tall og algebra*» og «*algebra*» (Utdanningsdirektoratet, 2006a, s. 2; 2006b, s. 3; 2006c, s. 2; 2006d, s. 2). Dette indikerer at algebra har spelt og spelar ei sentral rolle i LK06, og då òg det norske utdanningssystemet. Likevel viser forsking at norske elevar skårar lågt i algebra på både ungdomsskulen og vidaregåande (Mullis et al., 2016a; Mullis et al., 2016b).

1.1 Tidlegare forsking og grunngjeving for studien

I den internasjonale undersøkinga TIMSS Advanced 2015 vert fagområda algebra, kalkulus og geometri testa (Mullis et al., 2016b). Av dei tre fagområda, viser studien at elevar som tek matematikk R2 i Noreg skårar dårlegast i algebra (Mullis et al., 2016b). I tillegg viser resultata at dersom ein samanliknar det generelle prestasjonsnivået i landa i undersøkinga med algebraprestasjonane i landa, har Norge det største negative avviket (Mullis et al., 2016b). Norske R2-elevar gjer det med andre ord dårlegare i algebra enn matematikk generelt. Vidare legg Stedøy et al. (2017, s. 202) fram at resultat frå TIMSS Advanced tyder på at elevar i Noreg har utfordringar tilknytt lesing, forståing og bruk av abstrakte symbol, og at dei slit med å skilja mellom variablar og parameterar.

Også på andre klassetrinn presterer elevar i Noreg svakt. Resultat i over 20 år viser at samanlikna med andre land, presterer norske elevar svakare i algebra (Grønmo, Hole, et al., 2017, s. 258). Til dømes viser resultat frå TIMSS 2015 at dersom ein samanliknar det generelle prestasjonsnivået med prestasjonsnivået i dei forskjellige matematiske fagområda i dei ulike landa, kan ein sjå at den største skilnaden i heile undersøkinga er norske elevar på 8. trinn sitt avvik på emneområdet algebra, og dette er i disfavør av algebra (Grønmo, Hole, et al., 2017, s. 259; Mullis et al., 2016a). Forsking viser altså at Noreg presterer dårleg i algebra på fleire klassetrinn, og at «*det store problemet man har i norsk skolematematikk, er at elevene, på alle nivåer, presterer svakt i algebra*» (Grønmo, Hole, et al., 2017, s. 267).

Vidare kan studentar, i starten av matematikkurs på høgare utdanning, ha utfordringar tilknytt grunnleggande algebra. Til dømes hevdar Nortvedt og Siqveland (2019, s. 327-339) at begynnarstudentar, på ingeniør- og kalkulusprogram, kan mangla grunnleggjande algebrakunnskapar. Dei skriv at dersom elevar har mangelfull forståing og dårleg flyt ved bruk av det algebraiske språket, kan det truleg vera eit hinder for studentar ved høgare utdanning. Med andre ord kan studentar med låge algebrakunnskapar antakeleg oppleva overgangen mellom vidaregåande og høgare utdanning som utfordrande. Hole et al. (2020, s. 1-2) har undersøkt utfordringar for studentar med karakteren F (Ikkje greidd) på begynnarkurset MAT1100 på Universitetet i Oslo. Resultat i studien viser at studentane skåra betre på nye tema i kurset, enn på grunnleggjande algebra, som er dekt av læreplanen det fyrste året i norsk vidaregåande skule.

I fleire studiar kjem det med andre ord tydeleg fram at norske elevar slit med algebra. I forlenging av dette og dei førre avsnitta kan det vera interessant å undersøkja korleis R2-elevar sin algebrakompetanse påverkar deira forståingsutvikling. Særleg då grunnleggande kunnskapar i matematikk kan vera naudsynt for å læra andre matematiske fagområde (Grønmo, 2017, s. 52-54).

For å seie noko om elevane sin algebrakompetanse, slik den kjem til uttrykk i datamaterialet, vil eg i denne studien sjå på algebraforståinga deira. Dette gjer eg då algebraforståing kan bli sett på som ein del av algebrakompetanse (Niss & Højgaard, 2019, s. 20-21). Vidare, fordi elevar kan oppnå forståing gjennom arbeid med bevis, og ettersom matematiske bevis har ei sentral rolle i skulematematikken (Dickerson & Doerr, 2014; Hanna, 2000; Rav, 1999), kan moglegheitene elevane har til å forstå bevis vera både hensiktsmessig og interessant å undersøkja.

For å sjå på korleis algebrakompetansen påverkar elevar, vil eg i denne studien studere R2-elevar. Som tidlegare skrive finnes det forsking på at norske R2-elevar gjer det dårleg i algebra (Mullis et al., 2016b), men resultata seier mindre om korleis algebrakompetansen til elevane påverkar utvikling av matematisk forståing. I tillegg har elevar i matematikk R2 truleg fått algebraundervisning lengre enn elevar på lågare trinn (Utdanningsdirektoratet, 2006c), og det kan tenkjast at resultata i denne studien vert meir slåande av denne grunn. Det kan difor vera interessant å forska på dette gjennom R2-elevar.

Vidare hevdar Skaalvik og Skaalvik (2018, s. 81) at djupnelæring kan fremja forståing. I den nye læreplanen (LK20) vert djupnelæring vektlagt, og fokuset på dette er større i LK20 enn LK06 (Kunnskapsdepartementet, 2018; Meld. St. 28 (2015–2016), s. 16). Deltakarane i denne studien følgjer LK06, og det treng ikkje å vera ein ulempe. Dette er fordi eg ikkje er ute etter å evaluera LK20, men er interessert i å studera korleis elevar sin algebrakompetanse påverkar deira forståingsutvikling. Tvert i mot kan forsking på dette interesseområdet, gjennom elevar som følgjer ein læreplan med mindre fokus på djupnelæring, verta sett på som interessant, då djupnelæring kan fremja forståing (Skaalvik & Skaalvik, 2018, s. 81). I tillegg vert matematikk R2 undervist med utgangspunkt i LK06 for siste gong i skuleåret 2021/2022, og dette vil difor avgrensa mogelegheitene for seinare forsking på denne gruppa. Det er av denne grunn særleg interessant å gjennomføra denne studien akkurat no.

1.2 Problemstilling og avgrensingar

I denne studien ynskjer eg å undersøkja korleis algebrakompetansen til elevar som tek matematikk R2 (MAT3-01) påverkar forståingsutviklinga deira. Eg har difor formulert følgjande problemstilling:

> *Korleis kan algebrakompetansen til elevar i matematikk R2 påverka deira mogelegheiter til å utvikla matematisk forståing?*

For å undersøkja problemstillinga har eg valt ei kvalitativ tilnærming. Det innsamla datamaterialet er elevsvar frå eit oppgåvesett som elevar i ein R2-klasse svara på, og i tillegg fire djupneintervju. For å avgrensa og svara på problemstillinga, har eg valt å formulera tre forskingsspørsmål:

1) Kva slags forståing for bruken av variablar, parameterar og konstantar tyder datamaterialet på at R2-elevane i denne studien har?
2) Kva slags forståing for transformativ algebra tyder datamaterialet på at R2-elevane i denne studien har?
3) Korleis kan eit utval R2-elevar si forståing for bruken av variablar, parameterar, konstantar, og forståing for transformativ algebra, påverke deira moglegheiter til å forstå matematiske bevis i skulesamanheng?

I denne oppgåva brukar eg Hiebert og Carpenter (1992, s. 67) sin definisjon av forståing (sjå kapittel 2). For å avgrense og undersøkja det fyrste forskingsspørsmålet ser eg på om elevane viser teikn til konseptuell eller mangelfull konseptuell kunnskap for bruken av symbolklassane variablar, parametrar og konstantar. For å undersøkja det andre forskingsspørsmålet ser eg på om elevane viser teikn til relasjonell, instrumentell eller mangelfull forståing for transformativ algebra. Vidare undersøkjer eg korleis forståinga for symbolbruken og transformativ algebra påverkar deira mogelegheiter til å forstå matematiske bevis i skulesamanheng.

Hensikta med denne masteravhandlinga er ikkje å finna eit fullstendig svar på problemstillinga, men å adressera den. Vidare er målet med dei to fyrste forskingsspørsmåla å få informasjon om elevane si algebraforståing. Fordi problemstillinga spør om R2-elevar sin algebrakompetanse, og algebraforståing kan bli sett på som ein del av algebrakompetanse (Niss & Højgaard, 2019, s. 20-21), kan desse to forskingsspørsmåla relaterast til kompetansedelen i problemstillinga. Utvikling av matematisk forståing kan relaterast til det siste forskingsspørsmålet, då det omhandlar korleis forståing, og då kompetanse (Niss & Højgaard, 2019, s. 20-21), påverkar forståing av bevis, som vidare kan ha betydning for forståingsutvikling (Dickerson & Doerr, 2014; Hanna, 2000; Rav, 1999). Eg vil difor argumentere for at dei tre forskingsspørsmåla kan adressera problemstillinga. Vidare kan resultata i denne studien ha ein mogeleg overføringsverdi, men ein kan ikkje generalisere funna då utvalet ikkje er representativt (Gleiss & Sæther, 2021, s. 207; Thagaard, 2018, s. 181-182).

1.3 Oppbygginga til oppgåva

Denne masteravhandlinga inneheld seks kapittel. Etter innleiinga i dette kapittelet har eg i kapittel 2 lagt fram teori og tidlegare forsking som er relevant for problemstillinga. Kapittel 3 tek for seg metoden som vart brukt i studien. Kapittel 4 omfattar analysen av datamaterialet, diskutert i lys av tidlegare forsking og teori. I kapittel 5 vert hovudfunna drøfta. Avslutningsvis vil eg i kapittel 6 summera opp hovudfunna, og leggja fram didaktiske implikasjonar, studien sine avgrensingar og forslag til vidare forsking.

2 Teori og tidlegare forsking

I dette kapittelet vil eg presentera relevant teori for å svara på problemstillinga. Undervegs vil eg òg inkludera tidlegare forsking.

2.1 Kva er algebra?

Star og Rittle-Johnson (2009) legg fram at ulike forskingsmiljø kan sjå på algebra på forskjellege måtar. Nokre forskarar kan meina at det mest fundamentale er å manipulera symbolske uttrykk og likningar, og å få ein flyt i arbeid med symbolske prosedyrar. Dei ser med andre ord på algebra frå eit nytteperspektiv, som eit reiskap. Star og Rittle-Johnson (2009) legg vidare fram at andre meiner at det sentrale er å utforska og representera funksjonar, og at algebra i hovudsak omhandlar forholdet mellom variablar. Eit tredje syn betraktar algebraisk resonnering som det viktigaste i algebra.

Fordi det finnes ulike syn, kan det vera vanskeleg å lage ein dekkjande definisjon av algebra. Dette er noko Wheeler (1996, s. 319) bekreftar, ved å skriva at det som regel vil finnast nokon som meiner at ein definisjon på algebra har manglar, og dermed ikkje er komplett. I forlenging av dette hevdar han at algebra kan verta sett på som eit symbolsystem, då nokre kan meina at i det eit symbol eller fleire er til stades for å representera eit objekt eller ein situasjon, vil det vera algebra. Han er ikkje einig i dette, og skriv at algebra er meir enn eit symbolsystem. Vidare skriv Wheeler (1996, s. 319) at algebra er kalkulus, då algebra sine elementære bruksområde omhandlar berekning av numeriske løysingar, men at algebra er meir enn kalkulus. Han skriv også at algebra er eit representasjonssystem, då algebra normalt har ei stor rolle i matematisering av ulike situasjonar, men at algebra likevel er meir enn eit representasjonssystem. Som det kjem fram her, kan ein sjå på algebra som eit relativt vidt omgrep.

Sjølv om algebra kan vera vanskeleg å definera, har Sfard (1995, s. 18) likevel funne ein likskap mellom korleis ulike forfattarar, med forskjellige syn på algebra, skildra algebra. Ut frå det ho fann, kan det sjå ut til at alle forfattarane er einige om at *algebra er vitskapen om generaliserte berekningar*. Ho argumenterer vidare med at grunna denne einigheita, vil skilnadane liggja i midlane som vert brukt for å implementera algebraiske metodar. Til dømes meiner nokre at algebra i hovudsak omhandlar symbolbruk, medan andre kan bruka algebra utan å kjenne til den symbolske notasjonen.

I samsvar med Sfard (1995, s. 18), vil algebra i denne oppgåva vera definert som vitskapen om generaliserte berekningar, der definisjonen ikkje eksklusivt gjeld symbolbruk. Vidare vil denne definisjonen av algebra vera i samsvar med at eit objekt eller ein situasjon ikkje treng å vera algebra sjølv om symbol representerer det (Wheeler, 1996, s. 319). Til dømes kan ein i typologi representera område med symbol utan å utføre berekningar. Dette vil ikkje bli rekna som algebra, då det ikkje omhandlar berekningar.

2.2 Algebra i skulen

Det er skilnad på korleis algebra har blitt brukt og utvikla av matematikarar, og korleis algebra har blitt undervist i skulen (Drijvers et al., 2011, s. 8). Drijvers et al. (2011, s. 8) legg fram at algebra i skulesituasjonar omhandlar arbeid med formlar som inneheld bokstaver, men at skulealgebra også kan relaterast til meir enn dette. Dei skriv at algebra i skulen kan relaterast til verb som løysa, abstrahera, formalisera, manipulera, strukturera, og generalisera. Dei skriv at fokuset i skulealgebra ofte ligg på aktiviteten, og at algebraisk aktivitet vert karakterisert som arbeid med tal eller talstrukturar. Dette kan relaterast til algebraisk tenking. Kort fortalt definerer Kieran (2004, s. 149) dette som tenking innanfor aktivitetar der ein *kan* bruka symbolsk algebra som verktøy. Algebraisk tenking inkluderer difor det algebra inneheld, men òg tankeprosessar som ikkje omhandlar symbolsk algebra. Algebraiske aktivitetar i skulen treng med andre ord ikkje å involvera algebraiske symbol. Eg vil difor inkludera algebraisk tenking i definisjonen av algebra.

2.2.1 Transformativ algebra

Kieran (2007, s. 713-714) viser til GTG-modellen ho sjølv utvikla i 1996. Modellen forklarar kva ein algebraisk aktivitet er i skulen, og i modellen vert aktivitetar som inneheld skulealgebra inndelt i tre typar: genererande, transformerande og aktivitetar på globalt/meta-nivå (generational, transformational and global/meta-level, eigen omsetjing). Eg vil fyrst skildra den fyrstnemnde og sistnemnde aktiviteten kort, før eg går litt nærmare inn på transformerande aktivitetar, då eit av fokusområda i denne masteravhandlinga ligg på denne aktiviteten. Kieran (2007, s. 713-714) legg fram at *genererande aktivitetar* omhandlar forming av uttrykk og likningar, og representasjon av blant anna mønster, relasjonar og situasjonar. I *aktivitetar på globalt/meta-nivå* vert algebra brukt som eit verktøy, men aktiviteten trenger likevel ikkje krevja bruk av algebra.

Transformerande aktivitetar, eller *transformativ algebra* kan bli skildra som:

> *the Transformational activities (referred to, by some, as the rule-based activities) - includes for instance, collecting like terms, factoring, expanding, substituting one expression for another, adding and multiplying polynomial expressions, exponentiation with polynomials, solving equations and inequalities, simplifying expressions, substituting numerical values into expressions, working with equivalent expressions and equations, and so on. A great deal of thes type of activity is concerned with changing the symbolic from of an expression or equation in order to maintain equivalence. (Kieran, 2007, s. 714)*

I transformerande aktivitetar vert difor uttrykk eller likningar ofte manipulert eller endra til ein ekvivalent form, ved til dømes faktorisering og substitusjon, og slike aktivitetar kan bli gjort med bruk av reglar. Vidare kan forståing for algebraiske symbol/objekt spela ei sentral rolle i transformerande aktivitetar (Lagrange, 2002, s. 163, sitert og omset i Kieran, 2007, s. 714).

Pedersen (2014) studerte i sin doktorgradsavhandling algebrakompetansen til norske R2-elevar. Resultat i hennar studie tyder på at elevane presterte svakt dersom det vart stilt høge krav til symbolmanipulering (Pedersen, 2014, s. 66-67). Ifølgje Kieran (2007, s. 714) vil dette omhandla transformerande aktivitetar, og tidlegare forsking tyder difor på at R2-elevar kan ha utfordringar tilknytt transformativ algebra.

2.2.2 Algebra i R2

I den nye læreplanen, LK20, er ikkje kompetansemål strukturert ut frå hovudområde, slik som i LK06, som er læreplanen som vart brukt i R2 då mitt datamateriale vart innsamla (Utdanningsdirektoratet, 2006c, 2020). I R2 er desse hovudområda geometri, algebra, funksjonar og differensial-likningar (Utdanningsdirektoratet, 2006c, s. 2). Det kan på grunnlag av dette sjå ut til at algebra har ei sentral rolle i skulematematikken, og vidare R2. Både ettersom algebra er eit av hovudområda, men òg fordi grunnleggjande kunnskapar i algebra kan vera naudsynt for at elevar skal utvikla kompetanse i andre matematiske område (Grønmo, 2017, s. 52-54).

I læreplanen for matematikk R2 handlar hovudområdet algebra om å «*analysere og regne på tallmønstre og på endelige og uendelige summer av tall. Grunnleggende teknikker i hovedområdet er rekursjon og induksjon. Videre dreier det seg om rekker, konvergens og induksjonsbevis*» (Utdanningsdirektoratet, 2006c, s. 7). Det kan sjå ut til at transformativ algebra er nødvendig i R2, til dømes då elevar kan trenge transformativ algebra i arbeid med talmønster, rekker, konvergens og induksjonsbevis (Kieran, 2007, s. 714).

Som tidlegare skrive vert algebrakunnskapane til R2-elevar testa i TIMSS Advanced (Mullis et al., 2016b). Ifølgje TIMSS Advanced sitt rammeverk, som har tatt utgangspunkt i kunnskap og ferdigheiter utvikla på lågare klassetrinn enn det som vert testa i undersøkinga, omhandlar algebradomenet: uttrykk, operasjonar, likningar, ulikheiter og funksjonar (Grønmo et al., 2014, s. 10). Arbeid med desse domena er ifølgje Kieran (2007, s. 714) transformativ algebra. I forlenging av dette, og fordi eg ville testa forståinga elevane hadde for transformativ algebra, valte eg å bruka to oppgåver frå TIMSS Advanced i oppgåvesettet elevane skulle gjennomføra (sjå kapittel 3).

Derivasjonsoppgåver er òg eit døme på kvar elevar kan bruka algebra. Mange funksjonar som skal deriverast kan innehalda bokstavar i form av algebraiske symbol, som variablar, parameterar og konstantar. Det er forskjell på korleis ein skal betrakta variablar og parameterar i derivasjonsoppgåver, og det kan difor vera naudsynt å forstå skilnaden mellom symbola for å derivera riktig. Derivasjonsoppgåver kan difor truleg krevja forståing for algebraisk symbolbruk. Kompetansemål i R1 dreiar seg blant anna om derivasjon, og i R2 er både integrasjon og derivasjon tema (Utdanningsdirektoratet, 2006c, s. 4-6). Ettersom elevar i matematikk R2 skal ha vore innom derivasjon i R1, og fordi integrasjon spelar på derivasjon, vil eg teste algebrakompetansen til deltakarane i studien gjennom derivasjon, då derivasjonsoppgåver kan krevja algebrakunnskapar.

2.2.3 Algebraisk språk og symbolbruk i skulen

Generelt kan eit språk skildrast som forskjellege system av teikn eller symbol, og slik engelsk og fransk kan definerast som språk, kan også algebra bli definert som språk, då algebra kan bli sett på som eit system av symbol (Drouhard & Teppo, 2004, s. 230-232). For å skildra det algebraiske språket kan ein blant anna bruka syntaks og semantikk (Drouhard & Teppo, 2004, s. 231). Ein generell definisjon av syntaks og semantikk kan finnast i bøker om matematisk logikk (sjå til dømes Shoenfield, 1967). Kort fortalt omhandlar *syntaks* oppbygginga av språket, og syntaktiske element i det algebraiske språket er til dømes variablar, relasjonssymbol og hjelpesymbol. *Semantikk* dreiar seg om tolkinga, eller meininga av syntaksen. Omgrep som sant og usant er ein del av semantikken.

Niss og Jensen (2002) utvikla eit rammeverk som skildra matematisk kompetanse. Dei hevdar at matematisk kompetanse består av åtte nøkkelkompetansar, og ein av nøkkelkompetansane kallar dei for Symbol- og formalismekompetanse («*Symbol- og formalismekompetence*», eigen omsetjing) (Niss & Jensen, 2002, s. 44-46). Niss og Jensen (2002, s. 58) uttrykkjer at denne nøkkelkompetansen omhandlar evna til å omsetja mellom det naturlege språket og det matematiske symbolspråket, å bruka og arbeide med symbolske uttrykk og utsegn, og å få innsikt i formelle matematiske system.

Ein generell definisjon på konstantar, variablar og parameterar i matematisk språk kan òg finnast i Shoenfield (1967). Kort forklart er konstantar, variablar og parameterar syntaktiske einingar. Ein konstant er eit symbol med bestemte verdiar som 1, 5, π, e. Variablar varierer over ulike typar mengder, som mengder av funksjonar, mengder av matriser og mengder av reelle tal. Parameterar er òg variablar. Forskjellen på variablar og parametrar skildrar Gray et al. (2007, s. 5) gjennom eit døme. Dei skriv at i funksjonen $y = mx + b$, der x er argumentet, vil y og x vera variablar som varierer avhengig av kvarandre. Vidare er m og b parameterar som representerer spesifikke ukjente. Den matematiske definisjonen for ulike algebraiske symbol kan vera relativt vanskeleg å forstå med tanke på R2-nivå. I denne studien vil eg difor berre undersøkja forståinga for den algebraiske symbolbruken, då dette, som tidlegare skrive, kan vera nødvendig kunnskap på R2-nivå. For å gjera dette vil eg både sjå på korleis elevane brukar algebraiske symbol, og på korleis dei forstår andre sin bruk av algebraiske symbol.

Dei algebraiske symbola og språket gjev mogelegheit til å behandla og uttrykkja det generelle (Mason et al., 2005/2011, s. 15). Österholm (2006, s. 343) peikar på at ein av dei største styrkane med matematikken er bruken av symbolspråket, men om elevar ikkje skjønar symbolbruken kan det hindra dei frå å utnytte denne potensielle styrken. Vidare hevdar Naalsund (2012, s. 33), Hiebert og Lefevre (1986, s. 10) og English og Warren (1998, s. 166) at forståing for bokstavar, i form av algebraiske objekt, er avgjerande for algebraisk kompetanse. At elevar har forståing for bruken av algebraiske symbol, kan difor bli sett på som viktig for utvikling av algebrakompetanse.

Høines (2020, s. 122-134) legg fram at språk kan vera av 1. og 2. orden. Ho skriv at ein elev på barneskulen kan danna eit automatisk bilete og/eller assosiasjon av talet sju om ein held opp sju fingrar. Dette kan då vera kategorisert som språk av 1. orden, då språk av 1. orden inneberer direkte kontakt med meiningsinnhaldet. På den andre sida skriv ho at det kan tenkjast at eleven ikkje har direkte kontakt med meiningsinnhaldet for teiknet 7, teiknet må difor omsetjast, og dette vil då vera kategorisert som språk av 2. orden. Sju fingrar er noko konkret som eleven kan relatere seg til, medan teiknet 7 kan vera vanskelegare å ha ein konkret assosiasjon til.

Sjølv om Høines (2020, 126) skildrar språk av 1. orden ved å bruka døme frå barneskulen, meiner ho at dette også kan vera viktig når elevar skal lære matematikk på eit seinare tidspunkt. I tilknyting til denne oppgåva kan det difor tenkjast at R2-elevar òg kan ha språk av 1. og 2. orden. Vidare legg Høines (2020, s. 127-128) fram at omsetjing av språk av 2. orden ofte krevjar språk av 1. orden, og som eit tenkjereiskap vil eit språk av 2. orden fungere dårleg. Vidare legg ho fram at å «tenkja vanskeleg» føreset at språket som vert brukt er godt å tenkja med, og at det fungerer som eit språk av 1. orden.

Sfard (1995, s. 25-26) uttrykkjer at ein må ha forståing for større talfamiliar for å forstå kva ein variabel er, og å oppnå ei slik forståing kan vera tidkrevjande. Hole et al. (2020, s. 5-7) skriv at den omfattande bruken av variablar er ein stor del av det matematiske språket, særleg på vidaregåande og universitetsnivå, men at studentar ved høgare utdanning i Noreg kan ha utfordringar tilknytt parameterar og variablar. Dei hevdar at sjølv om det kan vera teknisk enklare å rekna med koeffisientar representert med variablar, kan studentar oppleva oppgåver som enklare om koeffisientane er bestemte. Hole et al. (2020, s. 7) legg òg fram at begynnarstudentar i Noreg kan synast det er lettare å integrera $\int xe^{ax}dx$ om a er byta ut med eit bestemt tal som 3 eller 7, enn om a er ein parameter. Dei hevdar at dette kan vera tilfelle fordi studentane kan ha utfordringar tilknytt syntaktisk abstraksjonsnivå. I tillegg hevdar Österholm (2006) i sin studie at elevar på vidaregåande og studentar på universitet kan oppleva tekstar utan matematiske symbol som lettare å forstå enn tekstar med matematiske symbol, sjølv om tekstane har same innhald. Med andre ord indikerer forsking at symbolbruken i algebra kan vera ein utfordring for studentar.

2.2.4 Bevis i skulen

I denne oppgåva vert bevis i skulen, i samsvar med Stylianides (2007, s. 291) sett på som eit matematisk argument, i form av ein samanhengande sekvens av påstandar for eller mot ein matematisk påstand, og som har følgjande tre eigenskapar: 1) alle utsegn vert akseptert som sanne og tilgjengelege for elevane, 2) resonnement som vert brukt er kjent og gyldige, eller mogeleg å forstå for elevane, og 3) uttrykksformane som vert brukt skal vera kjente eller mogeleg å forstå for elevane.

Ifølgje Niss og Jensen (2002, s. 44-54) er det å forstå bevis ein del av det dei kallar resonneringskompetanse (ræsonnementskompetence, eigen omsetjing). Dei legg fram at resonneringskompetanse er ein av dei åtte nøkkelkompetansane omtala over, og omhandlar å følgja og døme matematiske resonnement, som vil seie ei kjede av argument uttala av andre for å støtte opp ein påstand. Dei skriv at denne kompetansen innebere å vite og forstå kva tid eit resonnement vert eit bevis, og i tillegg inneberer den å tenkja ut og gjennomføra resonnement, og konstruera gyldige bevis ut frå heuristiske resonnement. Vidare indikerer forsking på barn at ein elev ikkje kan vise resonneringsevne om eleven ikkje har tilstrekkeleg kunnskap (Alexander et al., 1997, s. 124). Kilpatrick et al. (2001, s. 130, 146) hevdar at det er grunn til å tru at dette resultatet også gjeld meir generelt. I forlenging av dette kan tilstrekkeleg kunnskap truleg vera nødvendig for å kunna resonnera og vidare forstå bevis.

Vidare kan det tyda på at bevis i skulen kan vera eit verktøy som fremjar forståing. Rav (1999) uttrykkjer at bevis bør føra til forståing. Han hevdar at hjarta i mattematikk er bevis, då bevis er viktig for å fremja vekst og fordi det er eit viktig analytisk verktøy. Hanna (2000, s. 5-6) hevdar at nøkkelrolla til bevis i klasserommet er å fremja forståing, og Dickerson og Doerr (2014) uttrykkjer at fleire er einige om at å fremja forståing er eit viktig formål med bruken av bevis i skulesamanheng. Vidare legg Hanna (2000, s. 7) fram at eit bevis, som er leid ut på ein gyldig formell måte, berre kan vera overtydande og legitimt for ein matematikar om det fører til forståing. Men det å utvikla forståing kan vera vanskeleg om ein manglar grunnleggande kompetanse, då det å utvikla forståing for mange matematiske konsept kan krevja eit visst ferdigheitsnivå (Kilpatrick et al., 2001, s. 122).

Litteratur indikerer med andre ord at bevis har ei sentral rolle i skulematematikken, og i denne oppgåva vil eg difor sjå på korleis algebraforståinga påverkar dei. Over lang tid har det vært forskjellege meiningar om kva som kan godkjennast som eit akseptabelt bevis (Hanna, 2000, s. 6). Det kan vera forskjell på kva som vert godtatt som eit matematisk bevis i skulesamanheng og for matematikarar. Vidare er det også ulike oppfatningar om kva som vert akseptert som eit gyldig bevis i skulesamanheng (Dickerson & Doerr, 2014). I denne oppgåva vil eg undersøkja bevis i skulesamanheng, og bevisa treng då ikkje å vera godkjent som eit gyldig matematisk bevis, men likevel bli sett på som eit gyldig bevis i skulen.

2.3 Matematisk kompetanse

Niss og Jensen (2002, s. 43) legg fram at matematisk kompetanse omhandlar å ha innsikt, kunna forstå, utøva, anvenda og ta stilling til matematikk og matematikkverksemd i ein rekke samanhengar der matematikk inngår, eller kan inngå. Ifølgje Kilpatrick et al. (2001, s. 116) kan matematisk kompetanse (mathematical proficiency) delast inn i fem komponentar (eigen omsetjing): konseptuell forståing (conceptual understanding), prosedyreflyt (procedural fluency), strategisk kompetanse (strategic competence), fleksibel resonnering (adaptive reasoning) og produktiv haldning (productive disposition). Det kan nemnast at «*mathematical proficiency*» òg kan omsetjast til matematisk dugleik, men eg har i denne masteravhandlinga valt å bruka omgrepet matematisk kompetanse.

Kort fortalt legg Kilpatrick et al. (2001, s. 116) fram at *konseptuell forståing* omhandlar matematisk forståing av konsept, operasjonar og relasjonar. Dei skildrar *prosedyreflyt* som evna til å gjennomføra prosedyrar fleksibelt, effektivt, nøyaktig og hensiktsmessig. *Strategisk kompetanse* omtalar dei som det å formulera, representera og løysa matematiske problem. Dei *skildrar fleksibel resonnering* som evne til å reflektera, grunngje, forklara og tenkja logisk. Den siste komponenten, *produktiv haldning*, omhandlar evna til å sjå nytten, verdien og fornufta i matematikken, og å ha tru på eigen effektivitet og arbeid. Dei legg fram at desse fem komponentane representerer forskjellege delar, og at dei til saman utgjer matematisk kompetanse. Komponentane er veva saman og avhengige av kvarandre, og for å utvikla matematisk kompetanse vil det difor vera viktig at ein ikkje berre fokuserer på ein eller to av komponentane (Kilpatrick et al., 2001, s. 116).

2.3.1 Algebraisk kompetanse

I samsvar med definisjonen av algebra for denne studien og kva matematisk kompetanse kan vera definert som, vil eg i denne oppgåva sjå på algebrakompetanse som ein del av matematisk kompetanse, der generaliserte berekningar inngår eller kan inngå, anten med eller utan symbolsk algebra (Kilpatrick et al., 2001, s. 116; Niss & Jensen, 2002, s. 43; Sfard, 1995, s. 18).

Ludvigsenutvalet har vurdert faga i grunnskuleopplæringa i Noreg opp mot krav til kompetanse i samfunns- og arbeidslivet i framtida (NOU 2015: 8). For å skildra matematisk kompetanse brukar utvalet Kilpatrick et al. (2001) sitt rammeverk. Meir spesifikt ser dei på korleis engasjement (produktiv haldning) kan verta uttrykt i temaet algebra (NOU 2015: 8, s. 57). For å vidare skildra viktige sider ved algebrakompetanse vil eg no, på tilsvarande måte som ludvigsenutvalet, kopla Kilpatrick et al. (2001) sitt rammeverk saman med algebra.

Alle dei fem komponentane kan vera viktige for å oppnå algebraisk kompetanse. Til dømes kan konseptuell forståing vera viktig for algebraisk forståing av omgrep, operasjonar og relasjonar, og prosedyreflyt kan vera viktig i møte med transformativ algebra (Kieran, 2007, s. 714; Kilpatrick et al., 2001, s. 116). Strategisk kompetanse kan vera viktig for å formulera, representera og løysa algebraiske problem (Kilpatrick et al., 2001, s. 116). Produktiv haldning kan blant anna vera viktig fordi fleire undersøkingar tyder på at elevar kan verta meir motiverte og yta meir innsats om dei ser verdien av skulematematikk (Kilpatrick et al., 2001, s. 116; Skaalvik & Skaalvik, 2018, s. 187-188). Vidare legg Kieran (2007, s. 714) fram at i aktivitetar på globalt/meta-nivå vert algebra brukt som eit verktøy. Algebra i skulen inneber blant anna å manipulera, strukturera, og generalisera, og det kan tenkjast at dette kan verta brukt som verktøy i fleksibel resonnering, for å reflektera, grunngje, forklara og tenkja logisk (Drijvers et al., 2011, s. 8; Kilpatrick et al., 2001, s. 116).

Niss og Højgaard (2019) har skrive ein artikkel om rammeverket sitt (Niss & Jensen, 2002), der dei reviderte og oppdaterte rammene og terminologien til dagens førestilling om matematisk kompetanse. I denne artikkelen peikar Niss og Højgaard (2019, s. 20-21) på at dei oppfattar matematikkforståing som ein delmengde av matematisk kompetanse. Eg vil difor i denne avhandlinga betrakta matematisk forståing som ein del av matematisk kompetanse, og i forlenging av dette vil er òg betrakta algebraforståing som ein del av algebrekompetanse.

2.4 Forståing

Matematisk forståing kan bli definert på denne måten:

> […] the mathematics is understood if its mental representation is part of a network of representations. The degree of understanding is determined by the number and the strength of the connections. A mathematical idea, procedure, or fact is understood thoroughly if it is linked to existing network with stronger or more numerous connections. (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 67)

Ifølgje dette vil matematikkforståing vera matematisk kunnskap som er strukturert i nettverk, og jo fleire og sterkare forbindingar det er, altså jo rikare nettverket er, desto større forståing har ein. For å utvikla forståing må ein ifølgje Hiebert og Carpenter

(1992, s. 69) anten kopla ny kunnskap til gamal, eller konstruera nye relasjonar mellom etablert kunnskap, som ikkje allereie er forbunde.

Vidare peikar Hiebert og Carpenter (1992, s. 74-77) på fleire fordelar med forståing. For det fyrste legg dei fram at *forståing kan generere meir forståing*. Dei skriv at når elevar lærer, tek dei ikkje direkte opp forståinga til læraren eller læreboka. Elevane konstruerer si eiga forståing, og dei kan konstruera ukorrekt forståing. Dei legg fram at dersom elevar har kunnskapen forbunde i rike nettverk, vil det redusera sjansen for mangelfull eller ukorrekt kunnskap, samanlikna med om eleven har isolerte kunnskapsbitar og dermed ikkje forståing. I tillegg hevdar dei at sjansen for å utvikla forståing vil vera større, desto rikare nettverket er. For elevar med rike nettverk vil det vera fleire mogelege forbindelsar mellom ny og gamal kunnskap, og dei meiner difor at det vil vera lettare å kopla ny kunnskap til gamal.

For det andre hevdar Hiebert og Carpenter (1992, s. 74-75) at ein *hugsar betre med forståing*. Dei skriv at det er vanskelegare å hugsa eit heilt nettverk feil, enn ein isolert kunnskapsbit. I tillegg legg dei fram at det også er lettare å henta opp kunnskap frå eit rikt nettverk, då det er fleire vegar å henta informasjonen frå.

For det tredje uttrykkjer Hiebert og Carpenter (1992, s. 75) at *mengda ein må hugsa vert redusert med forståing*. Dei forklarar dette med at jo fleire relasjonar eller tilkoplingar eit kunnskapsnettverk har, jo færre deler av nettverket treng ein å hugsa separat. Om ein har forståing og hugsar ein del av eit nettverk, vil ein automatisk hugsa resten av nettverket, og talet på delar som må hugsast vert då redusert. I tillegg legg dei fram at med forståing kan ein bruka ein hovudprosedyre og tilpassa den til fleire situasjonar, medan utan forståing vil ein ofte berre bruka ein lært prosedyre for tilfelle som er lik situasjonen prosedyren vart innlært i. Ein treng difor færre prosedyrar om ein har forståing for prosedyrane, enn utan forståing.

For det fjerde hevdar Hiebert og Carpenter (1992, s. 75-76) at *forståing aukar sjansen for overføring*. Dei skriv at dette er viktig då det stadig oppstår nye problem i matematikken, og då det vil vera umogeleg å bli kompetent om ein treng ein ny strategi for kvart problem. Det kan difor sjå ut til at matematisk forståing kan vera fordelaktig.

2.4.1 Konseptuell og prosedural kunnskap

For å undersøkje algebraforståinga til elevane i denne masteravhandlinga, vil eg blant anna ha fokus på konseptuell kunnskap, som kan koplast til det eg tidlegare omtala som konseptuell forståing. Hiebert og Carpenter (1992, s. 77-79) skil mellom det dei kallar konseptuell og prosedural kunnskap (conceptual and procedural knowledge, eigen omsetjing). Konseptuell kunnskap kan identifiserast med slik matematisk forståing vart definert over, og kan difor ha dei tilsvarande fordelane (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 67-78). Konseptuell kunnskap omhandlar kunnskap som har tilkoplingar, som er forbunde i nettverk og der kunnskapen difor ikkje er isolerte bitar (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3-4). På den andre sida kan prosedural kunnskap vera isolerte kunnskapsbitar, der kunnskapen ikkje har tilkoplingar (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 8). Prosedural kunnskap kan bli sett på som ein sekvens av handlingar, og består av kunnskap om det formelle matematiske språket, og kunnskap om algoritmar eller reglar for å løysa matematiske oppgåver (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 78; Hiebert & Lefevre, 1986, s. 6).

Sjølv om denne oppgåva fokuserer på konseptuell kunnskap eller mangelfull konseptuell kunnskap, vil eg òg peika på at prosedural kunnskap er viktig. Både konseptuell og prosedural kunnskap er nødvendig for matematisk kompetanse, og matematisk kompetanse inkluderer relasjon mellom desse (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 78; Hiebert & Lefevre, 1986, s. 9). Vidare er det også fordelar med prosedural kunnskap. Prosedyrar kan fremja ein effektiv gjennomføring av matematiske oppgåver, og memorerte prosedyrar kan bli gjennomført raskt og med lite mental kapasitet (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 78). Automatiserte prosedyrar, som memorerte algoritmar, kan frigjera belastninga på arbeidsminnet (Merriënboer & Sweller, 2005, s. 149). Arbeidsminnet omhandlar evna til å arbeide med informasjon samtidig, og kapasiteten på dette minnet er avgrensa (Romberg, 1992, s. 62). Når ein til dømes skal behandla fleire idear samtidig i problemløysing, kan den avgrensa arbeidsminnekapasiteten vera problematisk (Schoenfeld, 1992, s. 351). Ved å bruka automatiserte prosedyrar, kan prosedural kunnskap difor potensielt redusera den kognitive belastninga på arbeidsminnet, og ein kan då bruka arbeidsminnet til meir avansert problemløysing (Merriënboer & Sweller, 2005, s. 149).

Verda i dag vert meir og meir teknologisk og digitalisert, og matematikken vert i aukande grad gjort i samband med maskinar (Gravemeijer et al., 2017, s. 105-106). I forlenging av dette peikar Gravemeijer et al. (2017) på viktigheita av at elevar utviklar kunnskap som er nyttig i utdanning og arbeid, og at fokuset i skulematematikken ligg på kompetanse som kompletterer i staden for å konkurrere med teknologien. Med komplementær kompetanse meiner dei kompetanse ein treng sjølv om verda vert meir teknologisk. Dei hevdar vidare at for å utvikla komplementær kompetanse bør ein blant anna fokusera på matematisk forståing, slik at ein kan sjå matematikken i maskinane. Gravemeijer et al. (2017, s. 114) legg i forlenging av dette fram at noko prosedural kunnskap vil vera viktig i skulen, men at fokuset likevel bør liggja på utvikling av konseptuell kunnskap.

2.4.2 Relasjonell og instrumentell forståing

Skemp (1976, s. 20) hevdar at forståing kan nyttast i to ulike tydingar: instrumentell forståing og relasjonell forståing. Han skriv at elevar har *relasjonell forståing* om dei både veit kva ein skal gjera og kvifor ein skal gjera det, medan *instrumentell forståing* inneber å kunna bruka ein regel utan å forstå kvifor ein brukar den. Denne inndelinga vart Skemp fyrst merksam på i samtale med Mellin-Olsen. Mellin-Olsen (1981, s. 351) hevdar at relasjonell og instrumentell forståing er motsetningar. Han legg òg fram at relasjonell forståing og matematisk forståing normalt vert assosiert med kvarandre i matematikkundervisninga.

Fordelane og ulempene med relasjonell og instrumentell forståing kan likna på fordelane og ulempene med konseptuell og prosedural kunnskap. Skemp (1976, s. 23-24) skriv at relasjonell forståing er lettare å tilpassa til nye oppgåver. Då ein elev med relasjonell forståing kan relatera ein metode til eit problem, og tilpassa metoden til nye problem. Med instrumentell forståing må ein memorera kva problem ein metode fungerer for, og i tillegg lære ein annan metode for kvar problemklasse som er annleis. Vidare peikar han på at relasjonell forståing kan vera meir varig i eit langtidsperspektiv, då det kan vera lettare å hugsa slik forståing. Skemp hevdar med andre ord at relasjonell forståing har tydelege fordelar, men viser òg til fordelar for instrumentell forståing.

Skemp (1976, s. 23) legg fram at instrumentell forståing kan vera lettare å lære, og at ein kan få raskare riktige svar. Ein annan fordel han trekk fram er at løna av instrumentell forståing er tydelegare og meir augeblikkeleg. Til dømes kan ei side med riktige svar gje elevane sjølvtillit, og dette kan skje raskare enn ved relasjonell forståing. I forlenging av dette kan det sjå ut til at både instrumentell og relasjonell forståing har fordelar, men at relasjonell forståing kan verke meir hensiktsmessig i eit langtidsperspektiv.

2.4.3 Algebraforståing

Sidan eg i denne oppgåva brukar Hiebert og Carpenter (1992, s. 67) sin definisjon av forståing, vil eg òg definera algebraforståing på tilsvarande måte: algebraforståing er algebrakunnskap som er strukturert i nettverk, og jo fleire og sterkare forbindingar det er, desto større forståing har ein.

Det finnes tallaust mange algebraoppgåver som kan løysast med prosedyrar, og for å løysa oppgåvene riktig og på ein rask måte, kan prosedural kunnskap og instrumentell forståing vera hensiktsmessig (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 78; Skemp, 1976, s. 23). På den andre sida, kan ein formulera aktivitetar eller oppgåver på ein ukonvensjonell måte, som gjer at ein kanskje må arbeide utanfor den «vanlege prosedyren». Det kan då vera viktig med konseptuell kunnskap eller relasjonell forståing, då dette kan vera nødvendig for å skjøna korleis ein kan tilpassa ein regel til ein ny situasjon (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 75; Skemp, 1976, s. 23). Fordi det finnes tallaust mange algebraoppgåver, kan det òg vera nyttig med relasjonell forståing og konseptuell kunnskap, då det kan gjera at ein hugsar betre og treng å hugsa mindre (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 74-75; Skemp, 1976, s. 23-24). I tillegg kan det tenkjast at når elevar ikkje har forståing for kvifor ein kan bruka ein regel, kan eleven ha lettare for å overgeneralisera, som vil seie at ein brukar spesifikk kunnskap på ein situasjon der kunnskapen ikkje lenger gjeld (Brekke, 2002, s. 10). Dette kan hindra eleven, då overgeneralisering ofte kan resultera i misoppfatningar, som vil seie at eleven dannar ein ukorrekt, bestemt og noko konsekvent tankegang (Brekke, 2002, s. 10).

På grunnlag av dette kan det sjå ut til at forståing er særleg viktig i algebraisk samanheng, då det finnes svært mange forskjellege algebraoppgåver. Vidare vil det antakeleg vera viktig å ha forståing for transformerande aktivitetar, då det kan tenkjast at kunnskap om transformerande aktivitetar kan vera viktig for å løysa mange oppgåver (Kieran, 2007, s. 714). I forlenging av dette kan forståing for transformerande aktivitetar truleg bli sett på som ein viktig del av algebraisk kompetanse.

2.5 Djupnelæring og overflatelæring

Ein kan skilja mellom djupnelæring og overflatelæring. Skaalvik og Skaalvik (2018, s. 78-80) legg fram at djupnelæring fremjar djupnekunnskap, og at overflatelæring fremjar overflatekunnskap. Dei definerer *djupnekunnskap* som kunnskap organisert i strukturar, der kunnskapsstrukturane er bunde i nettverk, og skriv at djupnelæring kan fremja forståing. *Overflatekunnskap* skildrar dei på den andre sida som spesifikk kunnskap, der forskjellege kunnskapsbitar ikkje vert sett i samanheng.

Vidare er eit av måla med fagfornyinga at den faglege forståinga til elevane skal styrkjast, og at ein skal leggja til rette for djupnelæring (Kunnskapsdepartementet, 2018; Meld. St. 28 (2015–2016), s. 16). For å fremja elevar si utvikling av forståing for sentrale samanhengar og element, skal skulen difor fremja djupnelæring (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 11).

3 Metode

I dette kapittelet vil eg gjera greie for metodiske val og vurderingar som er gjort i førebuinga, gjennomføringa, etterarbeidet og analysen av datamaterialet. I tillegg vil eg skildra min vitskaplege tilnærmingsmåte, og gå inn på truverda i studien og etiske retningslinjer. I kapittelet kastar eg lys over delar av forskinga som eg ser på som gode, men òg delar som kunne blitt gjort på ein betre måte. Med ei slik framstilling håpar eg å gje eit heilskapleg bilete av forskingsprosessen.

3.1 Forskingsdesign

Aubert (1965/1985, s. 196) legg fram at ein metode kan skildrast som ein framgangsmåte for å utvikla ny kunnskap eller løysa problem. Metoden eg brukar skal difor vera til hjelp for å svara på problemstillinga. Vidare står ein forskar ovanfor ei rekkje metodiske val, og desse vala vil påverka forskingsprosessen og kunnskapsutviklinga (Gleiss & Sæther, 2021, s. 194). Dei metodiske vala eg har gjort vil med andre ord ha tyding for korleis eg belyser problemstillinga.

For å svara på problemstillinga treng eg informasjon om algebraforståinga og algebrakompetansen til R2-elevar, og korleis dette påverkar mogelegheitene deira til å utvikla forståing. Fordi kvalitative metodar kan brukast til å innhenta informasjon om fenomen tilknytt enkeltpersonar (Dalen, 2011, s. 15), har eg valt ein kvalitativ tilnærming i denne studien.

Datainnsamlinga vart gjennomført i oktober 2021, og bestod av blant anna 16 elevsvar på eit oppgåvesett, sjå vedlegg 3. Gjennom desse svara kunne eg innhenta informasjon om elevane sine kunnskapar og eventuelt mangelfulle kunnskapar (Kleven, 2011, s. 45), og det kan tenkjast at dette kunne gje innblikk i elevane si forståing. Vidare vart oppgåvesettet og elevane sine svar på dette brukt som artefaktar i djupneintervju som føregjekk dagen etter. Intervju som metode i kvalitativ forsking kan gje informasjon om livsverda til informanten, om korleis tema vert forstått ut frå informantane sine perspektiv (Kvale & Brinkmann, 2014/2015, s. 46). I djupneintervju ynskjer ein å skaffa slik informasjon i ein relativt fri samtale, der informanten bør få mogelegheit til å gå i djupna (Tjora, 2021, s. 127-128). Vidare kan samtale om oppgåver gje informasjon om den eksisterande kunnskapen til informantar (Maher &

Sigley, 2020, s. 821). I forlenging av dette er det rimeleg å tru at djupneintervju kan gje innsikt i algebraforståinga, og dermed algebrakompetansen til elevane.

3.2 Vitskapleg tilnærming og refleksivitet

Forskarar har ei linsa som ein ser gjennom når ein forskar, og denne linsa kan prega datamaterialet, bruken av materialet og korleis ein ser på truverda i studien (Creswell & Miller, 2000, s. 125; Patton, 1999, s. 1199). Ein kan skilja mellom ulike paradigme, der dei forskjellege paradigma kan ha ulike oppfatningar om korleis kunnskap vert skapt og korleis alt heng saman (Postholm, 2010, s. 20-21). I denne masteravhandlinga vil eg ha ein konstruktivistisk tilnærming. I det konstruktivistiske paradigme eller tradisjonen, vert kunnskap oppfatta som ein konstruksjon av meining og forståing, skapt av menneske i sosiale og kulturelle samanhengar (Postholm, 2010, s. 21; Postholm & Moen, 2009, s. 21). Kunnskap i dette paradigmet er difor i stadig fornying og endring (Postholm, 2010, s. 21). Fordi forskarar innanfor dette paradigmet har ein oppfatning om at forskaren sin subjektivitet vil påverka forskinga (Postholm, 2010, s. 22), vil eg ikkje streva etter objektivitet i denne studien.

Sidan denne studien er skrive med ein oppfatning om at kunnskap vert påverka av forskaren, kan det vera naudsynt å peika på mine eigne oppfatningar og hypotesar tilknytt problemstillinga. Dette peikar Creswell og Miller (2000, s. 127) på som viktig. Dei legg fram av *forskaren sin refleksivitet* handlar om at forskaren fortel om eigne verdiar, oppfatningar og føresetnadar som mogeleg kan forme undersøkinga, og at ein kan fremja truverda i studiar ved å vera open om dette.

Ideen for problemstillinga er laga med bakgrunn i ei oppfatning eller hypotese eg har hatt om at mange elevar slit med algebra, særleg på grunn av mangelfull forståing, og at elevar kan bli hindra av dette. Det kan tenkjast at denne oppfatninga kan ha påverka studien. Vidare har eg lese teori tilknytt problemstillinga, og dette kan òg ha påverka studien.

3.3 Førebuing til datainnsamling

I dette delkapittelet vil eg leggja fram førebuingar eg gjorde før datainnsamlinga.

3.3.1 Rekruttering og utval

For å svara på problemstillinga som omhandlar R2-elevar, såg eg på eit utval av R2-elevar som naturleg. Utvalet kan karakteriserast som strategisk, då eg valte det basert på eit kriterium som var relevant for problemstillinga (Thagaard, 2018, s. 54). Grunna kjennskap til ein vidaregåande skule valte eg ein klasse på denne skulen. Utvalet kan difor også karakteriserast som eit tilgjengelegheitsutval, då utvalet vart valt ettersom det var enklast og mest tilgjengeleg (Gleiss & Sæther, 2021, s. 40-41).

Ofte vert kvalitative studiar kjenneteikna ved eit avgrensa tal på personar i utvalet (Thagaard, 2018, s. 54). Klassen eg fekk mogelegheit til å bruka bestod av 16 elevar. Fordi eg såg det som overkomeleg å analysera 16 elevsvar, og for å få eit datamateriale som best mogeleg kunne svara på problemstillinga, ynskja eg at alle elevane i klassen skulle svara på oppgåvesettet. Alle elevane samtykka, og dei 16 R2-elevane er difor utvalet som gjennomførte oppgåvesettet. For å skilja desse elevane frå elevane som vart intervjua, vil eg vidare i denne avhandlinga meina *alle elevane som svara på oppgåvesettet* når eg skriv *oppgåvesettdeltakarane*, og meina *elevane som vart intervjua* når eg skriv *informantane*.

Med tanke på omfanget av masteravhandlinga, valte eg å intervjua fire elevar, då det er rimeleg å tru at fire informantar og svara på oppgåvesetta er nok til å belysa problemstillinga (Everett & Furseth, 2012, s. 134). I studiar med få deltakarar er det spesielt viktig at utveljingsprosessen er hensiktsmessig med tanke på problemstillinga, slik at analysen kan gje ei forståing for de studerte fenomena (Thagaard, 2018, s. 54). Alle informantane i studien gjekk i same R2-klasse, og dei kan difor bli sett på som ei homogen gruppe (Johannessen et al., 2016, s. 118). Likevel var det ein viss grad av variasjon i gruppa, og fordi eg ville innhenta eit datamaterialet som best mogeleg kunne spegla den faktiske situasjonen, ynskja eg å få fram nokre av desse variasjonane.

I forlenging av dette ville eg bruka to av dei elevsvara som indikerte mest teikn til algebraforståing, og to av dei elevsvara som indikerte minst teikn til algebraforståing. Som ein kan sjå i Tabell 4.1 var to av dei elevane som gav samtykke til intervju og som fekk minst riktig på oppgåvesettet elev 1 og 2, medan elev 6 og 14 var dei som fekk mest riktig. Ettersom oppgåvesettet truleg kan gje informasjon om elevane sine kunnskapar, eventuelt mangelfulle kunnskapar (Kleven, 2011, s. 45), og då det kan tenkjast at dette mogeleg kan gje informasjon om elevane si algebraforståing, såg eg på dette som ein indikasjon på kven som hadde mest og minst algebraforståing. Verdt å merkja kan ein ikkje konstatere at det var desse elevane som faktisk hadde mest og minst forståing, men fordi eg berre hadde ein ettermiddag på å velja informantar til intervjuet brukte eg denne indikasjonen som eit mål på dette.

Alle dei fire informantane eg intervjua var gutar. Dette handlar om at det berre var ei jente som gav samtykke til intervju, og ho fekk verken mest eller minst rett på oppgåvesettet. Vidare i avhandlinga har eg valt å gje informantane fiktive namn: Isak (elev 1), Kjetil (elev 2), Karl (elev 6) og Tom (elev 14).

3.3.2 Pilotintervju

Pilotintervju skjer på tilsvarande måte som vanlege intervju, men med andre intervjuobjekt enn informantane for det faktiske prosjektet (Krumsvik, 2019, s. 167). Krumsvik (2019, s. 167-169) uttrykkjer at det kan vera fordelaktig å gjennomføra pilotintervju, då dei kan gje informasjon om gjennomføringa av intervjusituasjonen, som om intervjuspørsmåla fungerte og om tempoet i intervjuet var passe. Han legg fram at dette òg kan gje intervjuaren mogelegheit til å teste intervjuferdighetane sine.

Pilotintervjua vart gjennomført med to lektorstudentar i realfag. Som uerfaren forskar opplevde eg pilotintervjua som ei nyttig trening. Dei gav innsikt i korleis eg betre kunne gjennomføra intervjua. Til dømes fekk eg tilbakemelding om at den eine pilotinformanten kunne føla seg usikker når eg stilte mange spørsmål om nokre oppgåver, og ingen om andre. Larsen (2017, s. 102) hevdar at det er viktig at informanten kjennar seg trygg i intervjusituasjonen. I forsøk på å tryggja informantane, forklarte eg før dei faktiske intervjua at fordi noko er meir interessant for forskinga enn anna, kom eg til å stilla mange spørsmål om nokre oppgåver, medan ingen om andre.

3.4 Kvalitativ metode

I dette delkapittelet vil eg leggja fram korleis eg innsamla datamaterialet for studien.

3.4.1 Oppgåvesettet

Som tidlegare skrive består datamaterialet i denne studien delvis av 16 elevsvar på eit oppgåvesett. Oppgåvesettet utforma eg basert på mine oppfatningar om temaet og faglitteratur. I oppgåvesettet brukte eg to oppgåver frå TIMSS Advanced 2015, oppgitt av Grønmo, Stedøy, et al. (2017), då oppgåver frå TIMSS Advanced er gjennomarbeida, og blant anna laga med eit formål om å måla trendar i blant anna algebra (Martin et al., 2016). Eg brukte også tidlegare etablerte oppgåver framstilt i ulik faglitteratur (Krauss et al., 2008, s. 235; Küchemann, 1981, s. 111), og inspirasjon frå læreboka forskingsdeltakarane brukte då dei gjekk i R1 til å utvikla nye oppgåver (Oldervoll et al., 2013).

Grunna praktiske årsaker, som lengda på skuletimen, skulle oppgåvesettdeltakarane arbeida med oppgåvesettet i 45 minutt. Alle deltakarane arbeida individuelt med det same oppgåvesettet og skreiv på papir. Etter at oppgåvesettet vart utgitt fekk elevane verken hjelp frå meg eller læraren, og med unntak av tre derivasjonsreglar som var oppgitt i settet, var ingen hjelpemiddel tillat.

For å nytta tida eg hadde til rådigheit, hadde eg ikkje eit ynskje om at oppgåvesettdeltakarane skulle verta ferdige med oppgåvene lenge før tida. Eg laga difor litt fleire oppgåver enn det eg trudde dei fleste elevane kom til å rekkje. For at elevane skulle rekkje å gjer dei viktigaste oppgåvene, plasserte eg desse oppgåvene fyrst, medan dei mindre viktige på slutten. Elevane fekk difor informasjon om at det var viktigast å prøve å løysa dei fyrste oppgåvene.

Før arbeidet med oppgåvesettet informerte eg òg elevane om at dei ikkje skulle skunde seg gjennom oppgåvene, og at det ikkje var negativt om dei svara på få oppgåver. Dette vart gjort for å fjerne tidspress. Om elevar har lite tid på å tenkja, vil svara dei gir truleg ikkje vera ein reell refleksjon av deira noverande forståing (Lee, 2006, s. 30). Hensikten med å fjerne tidspress var difor å fremja ein reell refleksjon av deira forståing.

Arbeidet med oppgåvesettet kan likna på ein prøvesituasjon der elevane kan vera karakterfokuserte, og ha eit mål om å klara flest mogeleg oppgåver i staden for å bruka mykje tid på nokre av oppgåvene (Black & Wiliam, 2010, s. 85). Dette var kanskje tilfelle for nokre av oppgåvesettdeltakarane, og det kan tenkjast at dei difor kunne skunda seg gjennom oppgåvene, sjølv om eg presiserte at dei ikkje skulle gjera det. I tillegg opplevde eg at dei siste oppgåvene i mindre grad gav relevant informasjon med tanke på problemstillinga for studien, og som eg seinare peikar på valte eg å ha mest fokus på dei fyrste oppgåvene i analysen. Det kan difor henda at metoden hadde blitt styrkja med færre oppgåver i oppgåvesettet. På den andre sida intervjua eg nokre av elevane om oppgåvesettet dagen etter, og dei fekk då mogelegheit til å rette opp i feil dei gjorde eller utdjupe tankar frå oppgåvesettet. Dette kan ha redusert den mogelege negative påverkinga av mange oppgåver.

Oppgåvene

Som tidlegare skrive, kan konseptuell kunnskap eller relasjonell forståing vera nødvendig for at ein elev skal skjøna korleis ein regel kan tilpassast til nye situasjonar (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 75; Skemp, 1976, s. 23). For å få innblikk i algebraforståinga til elevane forsøkte eg difor å laga fleire av oppgåvene med ein vri, då dette kunne føre til at elevane måtte tenkja på ein annleis måte enn det dei vanlegvis gjorde, og dermed tilpassa kunnskap til nye situasjonar. Til dømes brukte eg ikkje alltid dei mest konvensjonelle symbola i skulematematikken. Det er eit kjent problem at elevar har utfordringar tilknytt algebraiske symbol (Hole et al., 2020, s. 7; Stedøy et al., 2017, s. 202; Österholm, 2006), og med andre ord forsøkte eg å få innblikk i elevane si algebraforståing ved å trykkja på nokre ømme punkter.

Oppgåve 1

Oppgåve 1 handlar om å finna nullpunkta til andregradspolynomet $f(a) = 2a^2 - 3ab + b^2$. Svaret på oppgåva er $a = b \vee a = \frac{1}{2}b$.

For at oppgåva ikkje berre skulle vera ei rutineoppgåve, og for å få innblikk i elevane si forståing for bruken av variablar og parameterar, formulerte eg polynomet på ein noko ukonvensjonell måte. Andregradspolynom i skulematematikken kan ofte bruka x

som variabel i polynom (sjå dømevis kapittel 1, 7 og 8 i Oldervoll et al., 2013). Eg ville difor sjå om elevane var avhengige av x som variabel for å klara oppgåva, og brukte difor variabelen a i staden for x. Eg la òg til ein parameter b i polynomet. Det var blant anna for å sjå om elevane forstod at a var variabelen og at b var ein parameter. Vidare kan abc-formelen brukast for å finna nullpunkta i denne oppgåva. Fordi både polynomet og abc-formelen inneheld symbola a og b, ynskja eg å finna ut om symbolbruken forvirra elevane.

For å finna nullpunkta, med til dømes abc-formelen, kan transformativ algebra bli brukt. I denne oppgåva ynska eg difor å innhenta informasjon om forståinga for transformerande rekneoperasjonar. Vidare kan det merkjast at i LK06 vert det å finna nullpunkt dekt av kompetansemål i 1T (Utdanningsdirektoratet, 2006b, s. 9-10).

Oppgåve 2 og 3

I oppgåve 2 og 3 skulle elevane derivera uttrykk. Som eg skreiv i kapittel 2 kan forståing for algebraisk symbolbruk vera naudsynt for å klara ulike derivasjonsoppgåver. Målet med desse oppgåvene var difor å undersøkja korleis elevane brukte og forstod variablar, parameterar og konstantar. Vidare kan transformativ algebra bli brukt i derivasjonsoppgåver, som i forenkling av uttrykk, og generelt sett ville eg i desse oppgåvene òg innhenta informasjon om elevane si forståing for desse operasjonane.

Oppgåve 2a og 2b var kontrolloppgåver for å testa elevane sine derivasjonskunnskapar. I oppgåve 2c, 2d, 3a og 3b var målet å testa variabel-, parameter- og konstantforståinga til elevane. Til dømes ville eg sjå om elevane skjønte at dei skulle derivera med omsyn på variabelen λ i oppgåve 3a, og sjå om elevane klarte å bruka dei ulike symbola riktig i oppgåve 3b.

Som tidlegare skrive var to ulike bevis brukt for å undersøkja det tredje forskingsspørsmålet i denne avhandlinga. I begge desse bevisa vart premiss føresett, til dømes vart dette gjort i beviset for produktregelen ved å skriva at «*Vi forutsetter nå at $f = u \cdot v$, der u og v er deriverbare funksjoner*» (Oldervoll et al., 2013, s. 329). For å forstå bevis kan det difor tenkjast at det er nødvendig å skjøne det ein har lagt til føresetjing. I oppgåve 2d og 3a ville eg òg sjå om elevane vart forvirra av føresetnadane $a \neq 0$ og $\theta \neq 0$.

I oppgåvesettet var òg tre derivasjonsformlar oppgitt. Formlane var uttrykt algebraisk, og inneheldt ulike symbol. Eit anna mål med oppgåve 2 og 3 var difor å sjå om elevane klarte å forstå og bruka desse reglane riktig.

Oppgåve 4

Oppgåve 4 er henta frå Grønmo, Stedøy, et al. (2017, s. 142-143). I oppgåva skulle elevane finna dei to x-verdiane der to grafar skjærer kvarandre, og for å finna begge løysningane, $x = 0$ og $x = 10^{12}a$, måtte elevane kunna manipulera algebraiske uttrykk, og ha tilstrekkeleg abstrakt algebraisk forståing (Grønmo, Stedøy, et al., 2017, s. 142-143). Målet med denne oppgåva var difor å få innblikk i elevane si forståing for transformativ algebra, som i manipulasjon av uttrykka, men òg å få innformasjon om forståinga for bruken av parameterar og variablar. Grønmo, Stedøy, et al. (2017, s. 142-143) legg fram at TIMSS Advanced 2015 ikkje har informasjon om løysingsmetodane elevane brukte i denne oppgåva, men at dei likevel trur at løysinga $x = 0$ fall ut fordi elevane mogeleg gløymde at ein mistar ei løysinga når ein delar på x. Ettersom eg innhenta informasjon om løysingsmetoden, hadde eg òg som mål undersøkja dette.

Oppgåve 5

Oppgåve 5 er henta frå Grønmo, Stedøy, et al. (2017, s. 136-137). Dei legg fram at oppgåva kan løysast ved abstrakt resonnering og mønstergjenkjenning i den alternerande algebraiske følga $x - 2x + 3x - 4x + \ldots + 99x - 100x$. I tillegg skriv dei at dei ikkje har tilgang til korleis elevane løyste oppgåva. Det er difor igjen interessant å innhenta informasjon om dette. Oppgåva kan løysast med å skriva ut uttrykket og vidare addera, eller subtrahera, eit etter eit ledd, men dette er ein lite effektiv måte å løysa oppgåva på. Det kan difor tenkjast at elevane berre løyser oppgåva slik om dei ikkje klarar å løysa oppgåva på ein meir effektiv måte, som ved å finna eit mønster i følga. Gjennom denne oppgåva ynskja eg difor å innhenta informasjon om elevane kunne bruka kompetanse om algebraiske symbol som ein ressurs.

Oppgåve 6

Oppgåve 6 er laga med bakgrunn i Krauss et al. (2008, s. 235), og er inkludert i oppgåvesettet for å få informasjon om elevane klarte å bruka algebra som verktøy for å løysa oppgåva, då dette mogeleg kunne gje informasjon om korleis elevane forstod variablar.

Oppgåve 7

Oppgåve 7 er henta og oversett frå Küchemann (1981, s. 111). I samsvar med Küchemann (1981, s. 111) sitt poeng med denne oppgåva, var målet med å bruka denne oppgåva å få innblikk i om elevane såg at den relative størrelsen på uttrykka $2n$ og $n + 2$ varierte med n. Denne oppgåva kunne kanskje blitt gitt på eit lågare nivå, noko Küchemann (1981, s. 111) gjer, men fordi eg ville undersøkja korleis elevane forstod algebraisk symbolbruk, kunne det mogeleg vera interessant å sjå om elevane mangla grunnleggjande algebrakompetanse.

3.4.2 Intervjuet

Som tidlegare skrive, brukte eg òg djupneintervju som metode, då slike intervju truleg kan gje informasjon om elevane si livsverd, og vidare forståing og kompetanse (Kvale & Brinkmann, 2014/2015, s. 46; Tjora, 2021, s. 127-128). Intervjua vart gjennomført på eit stille og lite grupperom på skulen til elevane. Det var berre eg og intervjuobjektet til stades under intervjusituasjonen, og ingen av intervjua vart avbrote. Intervjua varte mellom 33 og 35 minutt.

I intervjua brukte eg oppgåvearket og informanten sitt svar på dette som artefaktar, då artefaktar kan fremja ein meir naturleg samtale og gjera intervju meir konkret (Bahn & Barratt-Pugh, 2011, s. 189, 194). Sidan eg intervjua elevane om eit relativt abstrakt tema, altså algebraforståing, såg eg på bruken av artefaktar som eit godt metodisk grep, då det kan tenkjast at dette bidrog til at datamaterialet var relevant for problemstillinga.

Intervjuguidar kan vera til hjelp for å innhenta informasjon om dei sentrale temaa for studien (Thagaard, 2018, s. 95). Eg nytta difor ein intervjuguide, sjå vedlegg 6, i forsøk på å innhenta relevant informasjon for problemstillinga. Likevel var eg open for innvendingar, og dermed open for å avvike frå strukturen og spørsmåla i intervjuguiden. Retninga på intervjuet kunne difor bli påverka av meg som intervjuar og tema informantane tok opp. På bakgrunn av dette kan intervjua kategoriserast som delvis strukturerte (Thagaard, 2018, s. 91).

Ein fordel med delvis strukturerte intervju er at ein kan stilla oppfølgingsspørsmål og byggja vidare på tema som ikkje står i intervjuguiden. Dette kan få informantane til å konkretisera, utdjupa og utfylla svar (Larsen, 2017, s. 29, 99), som vidare kan gje ei betre forståing for datamaterialet. Fordi retninga av semistrukturerte intervju kan bli påverka, kan ein ulempe med denne metoden vera at samtalen vert styrt i ei retning som ikkje er hensiktsmessig med tanke på problemstillinga. Eg hadde maksimalt 35 minutt til rådigheit per intervju, og det var difor særleg viktig å styra samtalen på ein måte som sikra at eg fekk innhenta den informasjonen eg trong for å svara på problemstillinga (Larsen, 2017, s. 99-100).

Vidare ynskja eg eit kort tidsintervall mellom arbeidet med oppgåvesettet og gjennomføringa av intervjua. Eg ville at informantane skulle hugsa godt kva dei tenkte i arbeidet med oppgåvesettet, og i denne samanhengen kan eit kort tidsintervall vera nyttig (Grønmo, 2016, s. 199). Vidare bad eg elevane om å ikkje snakka om eller arbeide med oppgåvesettet i tida mellom dei svara på oppgåvesettet og til alle intervjua var ferdige. Som eg seinare vil peika på, kan det vera vanskeleg å skilja mellom forståing og memorert kunnskap, og eg ville difor ikkje at dei skulle memorera kunnskap før intervjua. Fordi det kan krevja mindre av elevane å ikkje snakka eller jobba med oppgåvesettet om perioden er kort, ynskja eg eit kort tidsintervall.

I tillegg til å innhenta informasjon om elevane si algebraforståing, ynskja eg å innhenta informasjon om korleis algebraforståinga til elevane påverka mogelegheitene deira til å forstå bevis i skulesamanheng. Eg intervjua elevane difor òg om to bevis.

Det fyrste beviset, beviset for produktregelen, vart henta frå pensumboka informantane brukte i R1 (Oldervoll et al., 2013, s. 329), sjå vedlegg 4. Dette beviset vart brukt for å innhenta informasjon om korleis algebraforståinga prega elevane når beviset inneheldt relativt mange symbol. Til dømes vert det same lagt til og trekt frå i beviset:

$-u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x)$. Før eg gjennomførte datainnsamlinga undra eg difor over om elevane klarte å sjå dette. Det andre beviset, beviset for avstanden mellom punkt og plan, var henta frå elevane si R2-bok (Oldervoll et al., 2015, s. 212-213), sjå vedlegg 5. Dei hadde hatt prøve om dette kapittelet veka før datainnsamlinga, og temaet i kapittelet var truleg friskt i elevane sitt minne. Om elevane hugsa reglar frå kapittelet, kan det tenkjast at det ville gjera det lettare for elevane å snakke om beviset, då det mogeleg frigjorde arbeidsminnekapasitet (Merriënboer & Sweller, 2005, s. 149).

I den delen av intervjua som omhandla beviset for produktregelen, skulle informantane starta øvst i beviset, og prøve å forklare kva som skjedde nedover. For beviset for avstanden mellom punkt og plan vart tre delar valt ut, grunna tidsramma i intervjua. Likevel opplevde eg tidspress då eg skulle intervjua elevane om dette beviset, og av dei to bevisa eg brukte, vart difor minst tid brukt på beviset for avstanden mellom punkt og plan. Av denne grunn er det mindre fokus på dette beviset i masteravhandlinga. I tillegg førte det til at eg fekk lite informasjon om den siste delen av dette beviset, og eg valte difor å ikkje bruka denne delen i analysen. For å forbetre metoden, kunne eg difor planlagt tidsbruken i intervjua betre.

Før datainnsamlinga vurderte eg òg om intervjua skulle gjennomførast med diktafon eller videoopptak. Fordelen med videoopptak er at ein både får inn lyd, kroppsspråk og rørsle, medan ein berre tek opp lyd med diktafon (Johannessen et al., 2016, s. 141, 155). Eg valte å bruke diktafon i intervjua, då videoopptak kan verke meir skremmande for informantane enn berre opptak av lyd (Johannessen et al., 2016, s. 141, 157), og då eg ikkje såg på nytten av videoopptak som essensiell for å kunna svara på problemstillinga. Opptaka gjorde det mogeleg å ivareta svara og utsegna i intervjua (Dalen, 2011, s. 28), og det var dette som eg såg på som viktigast med tanke på ivaretaking av datamaterialet. I tillegg gav opptaka meg mogelegheit til å vera meir til stades under sjølve intervjusituasjonen (Kvale & Brinkmann, 2014/2015, s. 205-206), og dette kan truleg ha trygga informantane (Larsen, 2017, s. 102).

3.4.3 Intervjuguide

Spørsmåla i intervjuguiden er basert på litteratur om fagfeltet, intervju og intervjuguidar, og eigne oppfatningar om temaet. Til dømes er intervjuguiden basert på «*traktprinsippet*» (Dalen, 2011, s. 26-27). I dette prinsippet er det viktig at innleiingsspørsmål fremjar informanten sin tryggleik. Innleiingsspørsmålet var difor eit relativt generelt spørsmål om kva informanten syntest om oppgåvesettet. Spørsmåla vidare har fokus på dei mest sentrale temaa for intervjuet (Dalen, 2011, s. 27-27), og desse spørsmåla omhandla difor elevane si forståing for algebra og bevis. Avrundingsspørsmålet skulle vera generelt, då dette står sentralt i dette prinsippet (Dalen, 2011, s. 26-27). Sidan eg forsøkte å få informasjon om elevane si forståing i intervjua, og sidan elevar kan oppleva ubehag om låge prestasjonar vert avslørt (Skaalvik & Skaalvik, 2018, s. 172-173), ser eg på dette prinsippet som godt eigna for dette forskingsprosjektet, då det har fokus på informantane sin tryggleik (Dalen, 2011, s. 26-27).

3.4.4 Transkripsjon

Transkripsjon av bandopptak handlar om å gjera lyd om til tekst, og denne prosedyren gjer at samtalane i intervju vert betre eigna for analyse (Kvale & Brinkmann, 2014/2015, s. 206). Eg transkriberte alle opptaka sjølv, då Tjora (2021, s. 186) hevdar at dette kan fremja gode transkripsjonsnotat.

Det munnlege språket er ulikt frå skriftspråket (Tjora, 2021, s. 186), men for å behalda anonymitet i best mogeleg grad valte eg å omsetja alle opptaka til det nynorske skriftspråket, sjølv om det var visse dialektskilnadar. For å gjera avhandlinga meir oversiktleg skreiv eg òg den munnlege formuleringa av matematiske uttrykk med det algebraiske symbolspråket. Til dømes skreiv eg $\sqrt{6x}$ om informanten sa «*kvadratrota av seks* x».

Likevel var målet å halde transkripsjonane nært opptaket, då transkripsjonar bør verta gjort nøyaktig, og om mogeleg ordrett (Larsen, 2017, s. 110). Eg var difor observant på dialektord som kunne ha spesielle tydingar, då Tjora (2021, s. 186) peikar på dette som eit godt metodisk grep. Eg forsøkte difor å skriva transkripsjonen med informantane sine setningsoppbyggingar, og inkluderte onomatopoetikon som «*eh*». Vidare skreiv eg «*eh*» sjølv om lydane kunne vera noko ulike, som «*hm*» eller «*ehm*», då eg ikkje vurderte forskjellane på lydane som viktige for analysen av datamaterialet. Eg inkluderte også tenkjepausar i transkripsjonen, *(...)* illustrerte tenkjepause på mindre enn 10 sekund i transkripsjonen og *(... ...)* illustrerte tenkjepause på meir enn 10 sekund. Vidare tyda *[tekst]* tilført kontekst.

Vidare kan det merkjast at det var eit visst språkproblem i intervjuet med Tom. Eg forstod ikkje alt denne informanten sa, og for å ikkje transkribere ukorrekt, valte eg å sjå vekk frå små delar av intervjuet. Eg valte likevel å bruka intervjuet vidare i studien, då eg skjøna mesteparten av det han sa, og då eg berre brukte dei delane eg opplevde som nøyaktige transkripsjonar.

3.5 Analyse

Kvalitativ analyse kan skildrast som «*the processing of data in order to answer the reseach questions*» (Boeije, 2009, s. 75). Grønmo (2016, s. 266) legg fram at analyse i kvalitative studiar inneberer å oppdaga typiske eller generelle mønster i datamaterialet. I analysen har eg difor funne mønster som kan gje informasjon om korleis eit utval elevar i matematikk R2 vert prega av deira algebrakompetanse i utvikling av forståing. Eg vil vidare i dette kapittelet gå nærare inn på analyseprosessen i studien.

Med bakgrunn i Hiebert og Carpenter (1992), Hiebert og Lefevre (1986) og Skemp (1976) undersøkte eg forskingsdeltakarane sin algebraforståing ved å identifisere teikn til konseptuell og mangelfull konseptuell kunnskap, og relasjonell, instrumentell og mangelfull forståing. Teikn til konseptuell kunnskap vart, i samsvar med Hiebert og Carpenter (1992, s. 67-78) og Hiebert og Lefevre (1986, s. 3-4) identifisert dersom det såg ut til at elevane klarte å kople kunnskapen til anna kunnskap. Dømevis vart ei slik kopling identifisert om elevane klarte å forklara eit konsept ut frå anna kunnskap, eller å tilpassa ein metode til ein ny situasjon. Motsett vart teikn til mangelfull konseptuell kunnskap identifisert om eleven ikkje såg ut til å kunne forklara eit konsept med anna kunnskap eller tilpassa ein metode. I samsvar med Skemp (1976, s. 20) vart teikn til relasjonell forståing identifisert dersom informantane klarte å bruka ein regel, og i tillegg klarte å forklara kvifor den fungerte. Fordi reglar kan brukast i transformativ algebra, kan dette i visse tilfelle bli sett på som relasjonell forståing for transformativ algebra (Kieran, 2007, s. 714). Dette er til dømes tilfelle om ein brukar ein regel til å gjera om eit uttrykk til ein ekvivalent form. Vidare vart instrumentell forståing identifisert om elevane klarte å bruka ein regel, og då òg mogeleg transformativ algebra, men ikkje klarte å forklara den. Mangelfull forståing vart identifisert om elevane verken klarte å bruka eller forklara ein regel eller transformativ algebra.

Vidare kan det merkjast at sjølv om eit teikn til ein av forståingstypane vart identifisert, vart berre eit teikn identifisert, og det vil difor ikkje skildra den fullstendige forståinga til eleven. Eg vil også påpeika at elevane ikkje trong å gje ei fullverdig matematisk forklaring for at noko skulle verta kategorisert som relasjonell forståing eller konseptuell kunnskap. Til dømes trong dei ikkje å gje ein matematisk riktig definisjon av ein variabel, parameter og konstant, men dei måtte kunne forklara forskjell i bruken på R2-nivå.

3.5.1 Vurdering av det skriftelege elevarbeidet

I vurderinga av det skriftelege elevarbeidet retta eg svara på oppgåvesetta, som vil seie at eg såg på løysingsmetodane som var brukt i dei ulike oppgåvene, og om dei var løyst riktig, delvis riktig eller gale. Eg vurderte alle løysingsmetodane som likeverdige, gitt at dei var matematisk korrekte. I korte trekk vart ei oppgåve kategorisert som «*riktig*», dersom utrekninga og svaret var korrekt. Oppgåver vart kategorisert som «*noko riktig*» dersom mesteparten av løysinga var riktig, men likevel hadde manglar. Oppgåver vart kategorisert som «*riktig svar, men ingen eller feil utrekning*» dersom det endelege svaret var riktig, men utrekninga eller løysingsmetoden vart sett på som stort sett feil, uhensiktsmessig eller mangla. Oppgåver vart kategorisert som «*blankt*» dersom løysinga verken inneheldt utrekning eller svar. Oppgåver som var kategorisert som «*gale*», hadde ikkje riktig svar, og mesteparten av løysinga var feil. Oppgåve 4 vart kategorisert med «*ein av to riktige*» dersom eleven fann ein av to løysingar. Vidare i oppgåva vil eg skrive «*delvis riktig*» som ei fellesnemning for «*noko riktig*», «*riktig, men ingen eller feil utrekning*» og «*ein av to riktige*».

Etter rettinga ville eg få oversikt over oppgåvene, og eg laga då ein tabell der delar av løysingsmetodane vart tematisert. For å få innblikk i dette arbeidet, sjå Tabell 3.1.

Tabell 3.1: Utsnitt av ein tabell som vart laga for å få oversikt over svara på oppgåve 2. Fargekoding er ei tolking. «Oransje» tyder ukorrekt algebraisk rekneoperasjon. «Gul» tyder overgeneralisering. «Lilla» tyder ukorrekt/manglande bruk av regel frå regelboksen. «R» tyder riktig svar. «G» tyder gale svar.

	Oppgåve 2							
Elev	**Rett (R) eller galt (G) svar**				**Kommentar og tolking**			
	a	**b**	**c**	**d**	**a) Deriver funksjonen** $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{6x}}$	**b) Deriver funksjonen** $\boldsymbol{g(x)=2x\cdot(x+3)^{10}}$	**c) Deriver funksjonen** $\boldsymbol{h(x)=e^{ax}}$	**d) Deriver funksjonen** $\boldsymbol{i(x)=(x^2+5)^{-a}}$
1	G	G	G	G	Brukar ikkje kjerneregelen $f'(x)=\frac{1}{2}(6x)^{-\frac{1}{2}}$	Brukar produktregelen feil $g'(x)=2\cdot 10(x+3)^9$	$h'(x)=ax\cdot e^{ax-1}$ Overgeneraliserer	Brukar kjerneregelen feil $i'(x)=\ -a(2x)^{-a-1}$
2	G	G	G	G	Brukar kjerneregelen feil $f'(x)=6^{-0,5}$	Deriverte inni og utanpå. Brukar kjerneregelen og produktregelen feil $g'(x)=2(x^{-1})^9$	$h'(x)=ae^x$ Deriverer feil	$i'(x)=(2x)^{-a-1}$ Brukar kjerneregelen feil
3	G	G	G	G	Flytta 6 ut frå kvadratrota $f(x)=\sqrt{6x}=6x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x)=\frac{1}{2}6x^{-\frac{1}{2}}=3x^{-\frac{1}{2}}$ Brukar algebraisk regel feil	Brukar algebraisk regel feil: $g(x)=2x\cdot(x+3)^{10}$ $=2x^{2^{10}}+6x^{10}$ Deriverer feil: $g'(x)=$ $10\cdot 2x^{2^9}+10\cdot 6x^9$ $=20x^{2^9}+60x^9$	$h'(x)=ax\cdot e^{ax-1}$ Overgeneraliserer	$i'(x)=-a\,(x^2+5)^{-a-1}$ Brukar ikkje kjerneregelen

3.5.2 Analyse av intervjua

Ein fenomenologisk analyse kan gje økt forståing og innsikt i informantar si livsverd, fokuset ligg på meiningsinnhaldet i datamaterialet, og forskaren fortolkar og ynskjer å avdekkja ei djupare meining med informantane sine erfaringar (Johannessen et al., 2016, s. 173). Fordi forskingsspørsmåla i denne studien spør om informantane si forståing, og korleis deira forståing påverkar deira mogelegheiter, vurderte eg fenomenologisk analyse som godt eigna.

Johannessen et al. (2016, s. 173-176) har skildra fire fasar som kan brukast for å gjennomføra ein fenomenologisk analyse. I analysen av intervjua har eg tatt utgangspunkt i desse. Eg vil vidare gje eit overordna bilete av fasane, og skildra korleis datamaterialet vart analysert i min studie. Johannessen et al. (2016, s. 173) skriv at i den fyrste fasen prøver forskaren å oppnå eit heilskapleg inntrykk av meiningsinnhaldet ved å gå gjennom heile materialet, og vidare prøve å identifisere sentrale og interessante tema. Dei skriv at denne prosessen kan påverka den endelege tolkinga. I min studie vart denne fasen gjennomført rett etter at kvart intervju hadde blitt transkribert. Dette vart gjort fordi eg i transkripsjonen hadde gått nøye gjennom materialet, og eg opplevde det som eit godt grunnlag for å trekkja ut sentrale tema. Eit døme på tema eg fann i denne fasen er «*elevar har ulike forståingstypar*».

Johannessen et al. (2016, s. 173-176) forklarar at den andre fasen handlar om å finna meiningsberande og relevante element for problemstillinga. Dei skriv at denne fasen inneber systematisk gjennomgang av datamaterialet, der ein gjennomfører koding og kategorisering. Den tredje fasen går ifølgje Johannessen et al. (2016, s. 176) ut på å finna meiningsinnhaldet i dei etablerte kodane, som vil seie at forskaren trekk ut delane av teksten som er koda og finn meininga. Materialet er no redusert, og ein skal ordne det reduserte materialet etter kodane, i til dømes tabellar. Johannessen et al. (2016, s. 176) legg fram at forskaren skal i den siste fasen vurdere om inntrykket stemmer overeins med det som kom fram i materialet forskaren starta med. Dei skriv at dersom det ikkje er samsvar må forskaren gå tilbake i materialet, finna ut kva som gjekk gale og ordne dette.

I fase to tok eg for meg eit og eit intervju. Eg koda heile transkripsjonsmaterialet, og dei delane av materialet eg ikkje såg på som relevante for problemstillinga koda eg som «*anna*». I denne fasen brukte eg òg vurderinga av det skriftelege elevarbeidet aktivt. Gjennom å bruka både data frå oppgåvesettet og intervjua fekk eg informasjon frå to ulike metodar, og på grunn av prinsippet om triangulering kan det tenkjast at dette var til hjelp for å danna kodar og kategoriar som danna eit bilete som i størst mogeleg grad likna den faktiske situasjonen (Patton, 1999, s. 1192-1193). Vidare kan kodinga kategoriserast som abduktiv, då eg veksla mellom ei tilnærming som var induktiv og deduktiv (Thagaard, 2018, s. 184). Nokre kodar laga eg difor ut frå datamaterialet, som «*mangel på forståing for variablar som representerer funksjonar*», medan andre hadde eg bestemt ut frå etablert teori, som «*klarar ikkje å forklara transformativ algebra*».

Etter gjennomført koding, forsøkte eg å finna ein fellesnemnar i kodane og lage kategoriar ut frå desse. For å få oversikt valte eg i fase tre å laga ein tabell for kvar kategori. I den siste fasen såg eg om det var samanheng mellom dei endelege kategoriane og kodane, og det heilskaplege bilete av materialet. Eg måtte fleire gongar gå tilbake til fase to etter å ha kome til fase fire, og ein kan difor betrakta fase to, tre og fire som ein sirkulær prosess.

Då det var samsvar med det heilskaplege bilete og dei endelege kategoriane og kodane, hadde eg enda med kodar som «*usikkerheit*» og «*klarar ikkje å forklara* *transformativ algebra*», og døme på kategoriar eg enda med var «teikn til instrumentell forståing» og «teikn til konseptuell kunnskap». I Tabell 3.2 kan ein sjå eit utklipp av tabellen eg laga for kategorien «teikn til instrumentell forståing».

Tabell 3.2: Eit utklipp av kategorisert datamateriale.

Utsegn	**Kodar**	**Kategori**
Kjetil: Det eg hugsar var at kvadratrot var enten opphøgd i 0,5 eller -0,5, så ja, og så hugsa eg ikkje heilt kva -0,5 var.	Riktig svar, klarar ikkje å forklara transformativ algebra.	Teikn til instrumentell forståing.
Karl: Eh, der skulle, det var litt sånn, eg såg på dei formlane me hadde oppgitt her og sånn, eh, det var eh ganske vilt gjetta.	Usikkerheit.	
Tom: Det er liksom mange av de reglane er liksom meir eller mindre at du må berre pugge.	Riktig svar, klarar ikkje å forklara transformativ algebra.	

Grunna problemstillinga vart mykje av datamaterialet kategorisert som ein type forståing, eller mangelfull forståing. Det meste av denne kategoriseringa vart kategorisert som mangelfull forståing. Dette kan omhandla at eg forsøkte å trykkja på ømme punkt i oppgåvesettet. Det var difor interessant å stilla spørsmål ved feil dei gjorde, for å til dømes finna ut om grunnen for feilen var mangelfull forståing, eller om feilen var tilfeldig og at dei eigentleg forstod det. I etterkant ser eg at eg stilte fleire spørsmål ved oppgåver dei hadde feil på, enn der deltakarane hadde riktig, og datamaterialet kan difor ha vorte påverka av dette. På den andre sida kan det nemnast at det berre var 6 elevsvar på oppgåvesettet som vart kategorisert som riktig av dei 44 elevsvara frå informantane, og det var difor relativt lite som var riktig, sjå Tabell 4.1.

3.6 Truverda til studien

Alle metodar har både sterke og svake sider (Everett & Furseth, 2012, s. 128), og for å vurdera kvaliteten i kvalitativ forsking kan validitet, reliabilitet og overføringsverdi vera egna indikatorar (Thagaard, 2018, s. 181; Tjora, 2018, s. 79). Vidare vil desse tre indikatorane vera utgangspunkt for diskusjonen av truverda i denne studien.

3.6.1 Validitet

I samfunnsvitskap handlar validitet, eller gyldigheit, om i kor stor grad ein metode er eigna til å undersøkja det den skal undersøkja (Johannessen et al., 2016, s. 232; Tjora, 2018, s. 79). I mitt tilfelle handlar difor validitet om graden metoden kan undersøkja problemstillinga for studien. Eit gjennomtenkt metodeval er difor viktig for at datamaterialet skal vera truverdig (Patton, 1999, s. 1190). For å innhenta eit datamateriale som var mest mogeleg eigna til å svara på problemstillinga, førebudde eg meg før innsamlinga ved å vurdere ulike metodiske val for studien og tenkja gjennom korleis eg kunne innhenta det. Til dømes gjennomførte eg to pilotintervju.

Tjora (2018, s. 81) legg fram at validitet kan styrkjast ved å vera tydeleg på korleis forskinga vart utforma og gjennomført med utgangspunkt i problemstillinga, og korleis problemstillinga for studien har oppstått. Tilsvarande legg Creswell og Miller (2000, s. 128-129) fram at *tjukke, rike skildringar* (eigen omsetjing) er ein prosedyre som vil fremja validiteten i kvantitativ forsking. Dei legg fram at med slike skildringar vert ramma, temaet og deltakarane i studien presentert med mange detaljar. Dei skriv at tjukke, rike skildringar kan hjelpa lesaren til å sjå at forskinga er truverdig, fordi truverda vert etablert gjennom lesaren si linse. Av denne grunn har eg i min studie hatt som mål å skildra i detalj metodiske val eg har stått over og gjort, kva forskingsparadigme studien er prega av, plasseringa til studien i feltet, og bakgrunnen for problemstillinga.

Som tidlegare skrive vart problemstillinga undersøkt gjennom skrifteleg elevarbeid og djupneintervju med artefaktar. Ein ulempe med kartlegging gjennom kunnskapstestar er at tilfeldige reknefeil kan få stor innflytelse på resultatet (Kleven, 2011, s. 43). For å hindra slike innflytelsar, intervjua eg fire elevar om oppgåvesettet, i håp om å få ein større forståing for kva elevane faktisk forstod, då det kan tenkjast at intervjua kan utfylla og nyansere svara på oppgåvearket. Det å bruka to metodar i innsamling av data vert i høve til Patton (1999, s. 1192-1193) kalla metodetriangulering (eigen omsetjing). Han peikar på metodetriangulering som eit grep som kan fremja truverda i studien, då det kan gje fleire synsvinklar inn til problemstillinga og dermed gjer studien mindre sårbar for metodiske svakheiter. Det at fleire metodar kan styrkja truverda i forskinga, er også noko Larsen (2017, s. 30) hevdar. Data frå både intervjua og oppgåvesetta kunne difor truleg dekkja problemstillinga i større grad enn berre data frå oppgåvesettet, eventuelt berre intervjua. For å styrkja validiteten i studien var difor hovudtyngda i analysen på dei fire intervjua og det skriftelege elevarbeidet tilknytt informantane.

Sjølv om elevar har riktig svar på ei oppgåve, trenger ikkje det å tyda at dei faktisk forstår det oppgåva er meint å omhandla (Löwing & Kilborn, 2002, s. 263-264). Det kan òg tenkjast at ein elev kan memorera svar utan forståing, og at det kan føre til at ein intervjuar får inntrykk av at eleven har forståing for spørsmål eller konsept sjølv om dette ikkje er tilfelle. Dette kan kanskje gjer det vanskeleg å skilja mellom kva elevane forstår og kva dei ikkje forstår, særleg då eg berre hadde 35 minutt til rådigheit per intervju. Hiebert og Carpenter (1992, s. 74-75) legg fram at elevar utan forståing ofte kan gløyme fortare enn elevar med forståing. Oppgåvene og intervjua vart difor gjennomført ei stund etter at elevane hadde fått undervisning om derivasjon. Med dette som utgangspunkt håpa eg at det skulle vera enklare å skilja mellom kva som var forståing og kva som ikkje var det, og vidare fremja validiteten i studien.

For å innhenta informasjon om elevane si faktiske algebraforståing, og dermed fremja truverda i studien (Johannessen et al., 2016, s. 232; Tjora, 2018, s. 79), gjorde eg òg andre metodiske grep. Eg vil trekkja fram tre slike grep. For det fyrste fekk elevane vita om dei hadde svara rett eller gale på oppgåvene fyrst etter at alle intervjua var gjennomførte, dette var for å hindra at slik informasjon kunne påverka svara til elevane. For det andre forsøkte eg å gje elevane god tid til å svara på spørsmåla eg stilte, då forsking viser at elevar ikkje vil ha mogelegheit til å formulera si forståing om dei ikkje har tid til å tenkja og reflektera over deira idear (Lee, 2006, s. 28). For det tredje forsøkte eg å hindra det Larsen (2017, s. 29-30) kallar kontrolleffekt, som vil seie at metoden eller intervjuaren kan påverka resultatet. Før intervjua fortalte eg difor elevane at eg var ute etter deira algebraforståing. At det difor ikkje var negativt om dei ikkje visste svaret eller gav meg ukorrekte svar, og at eg ikkje ynskja at dei skulle svara det dei tenkte eg ynskja, men kva dei faktisk tenkte og forstod. Med dette håpa eg også på å oppnå ein meir avslappa atmosfære, noko Tjora (2021, s. 132) meiner er ein føresetnad for vellukka djupneintervju.

Vidare kunne studien sin truverd blitt styrkja om eg hadde hatt lengre tid til rådigheit per intervju. Som tidlegare skrive brukte eg mindre tid enn ynskja i den delen av intervjuet som omhandla beviset for avstanden mellom punkt og plan. Dette førte til at eg fekk eit noko snevert datamateriale om dette. Med lengre tid per intervju kunne eg potensielt fått eit anna inntrykk av datamaterialet, og vidare spegla den faktiske forståinga til informantane betre.

3.6.2 Reliabilitet

Reliabilitet, eller pålitelegheit, omhandlar indre logikk eller samanheng gjennom alle delar av prosjektet, som korleis analysen har forgått ut frå empirien (Tjora, 2018, s. 79). Dalen (2011, s. 93) påpeikar at etterprøving av datainnsamlinga og analysen av materialet på nøyaktig same måte, er eit krav for reliabilitet i kvantitative studiar. Ho skriv at eit slikt krav er vanskeleg å tilfredsstilla i kvalitative undersøkingar, blant anna fordi forskaren i slike studiar samspelar med informanten i den gitte situasjonen. Av denne grunn argumenterer ho for at reliabilitet somme gongar vert sett på som eit lite eigna omgrep i kvalitative studiar, og at ein difor bør forstå reliabilitet i kvalitativ forsking på ein anna måte enn i kvantitativ.

Som tidlegare skrive har eg forsøkt å gje ei detaljert skildring av forberedelsen, innsamlinga og arbeidet med materialet, og ifølgje Johannessen et al. (2016, s. 232) vil dette også styrkja reliabiliteten i studien. Dette kan overtyda lesaren om ein indre logikk. Dette grepet kan også fremja ein meir transparent forskingsprosess, som vidare kan gjer at ein annan forskar kan bruka dei same «*forskarbrillene*» ved mogeleg gjennomføring av dette prosjektet (Dalen, 2011, s. 93; Gleiss & Sæther, 2021, s. 204). Det kan vera særleg viktig i denne studien, då forskaren sin subjektivitet vil påverka forskinga i det konstruktivistiske paradigmet (Postholm, 2010, s. 22).

For å fremja ein indre logikk og samanheng mellom empirien og analysen, transkriberte eg intervjua nøye, slik at eg kunne analysera eit materiale som var mest mogeleg likt originalen. Med mål om at stemmene til informantane i studien skulle koma fram, gjekk eg òg gjennom dei transkriberte intervjua fleire gongar. Vidare var eg oppteken av heilskapen i intervjua, og eg analyserte difor ikkje sitat der konteksten var gløymt. Dette var òg eit fokus i oppgåveskrivinga, og sjølv om til dømes utsegn i

Tabell 3.2 står utan kontekst, brukte eg berre sitata om eg var trygg på konteksten. Om konteksten var gløymt, las eg meg opp på den. Dette gjorde eg då Johannessen et al. (2016, s. 175) peikar på viktigheita av at meiningsinnhaldet kjem fram i analysen og at heilskapen i teksten ikkje forsvinn.

3.6.3 Overføringsverdi

Generalisering omhandlar forskinga si relevans utover dei forskingsdeltakarane som faktisk har blitt undersøkt (Tjora, 2018, s. 79). I studien er relativt få informantar involvert, og som tidlegare skrive kan ein sjå på dei som ei homogen gruppe. Med fleire informantar kunne eg kanskje fått eit anna resultat. I denne studien er utvalet basert på strategiske og tilgjengelege faktorar, og fordi utvalet ikkje er representativt kan ein ikkje generalisera resultata (Gleiss & Sæther, 2021, s. 207).

Likevel kan ein vurdere studien sin overføringsverdi, altså om studien kan vera relevant for andre situasjonar (Thagaard, 2018, s. 181-182). Eit argument som støttar at denne studien har overføringsverdi, er at mine resultat samsvarar delvis med tidlegare forsking, til dømes Mullis et al. (2016b), Österholm (2006) og Nortvedt og Siqveland (2019). I tillegg fann eg nokre av dei same funna i fleire av intervjua og svara på oppgåvesettet. Det kan difor sjå ut til at sjølv om eg berre har analysert 4 intervju og 16 oppgåvesett, så kan funna i denne studien gjelda fleire elevar. Studien kan med andre ord difor truleg overførast til andre situasjonar, men ikkje generaliserast.

3.7 Etiske refleksjonar

I forskingsprosjekt må forskaren både forhalde seg til juridiske retningslinjer og etiske prinsipp (Everett & Furseth, 2012, s. 26; Johannessen et al., 2016, s. 83). Retningslinjene og prinsippa skal sørgje for at informantane vert ivaretatt, og for at forskingsprosessen vert gjennomført på ein måte som både er verdig og forsvarleg (Befring, 2015, s. 28; Johannessen et al., 2016, s. 85-87). Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) har utarbeida nasjonale forskingsetiske retningslinjer som blant anna skal fremja forskingsetisk skjønn og refleksjon (NESH, 2021, s. 5-8). Dette gjeld òg mitt prosjekt. Vidare vil eg trekkja fram aspekt tilknytt informert og fritt samtykke, konfidensiell og anonym deltaking, og aktsemd for deltakarrisiko, då Befring (2015, s. 31-33) legg fram at desse områda er sentrale i pedagogisk forsking.

Før datainnsamlinga gjekk eg gjennom eit informasjonsskriv og samtykkeskjema for deltakarane i studien både munnleg og skrifteleg, sjå vedlegg 2. Dette gjorde eg då det er viktig at deltaking i forskingsprosjekt byggjer på eit informert, fritt og forstått samtykke (Befring, 2015, s. 31). Ettersom alle forskingsdeltakarane var over 16 år skreiv dei sjølv under samtykkeskjemaet (Befring, 2015, s. 32).

Vidare har eg gjennom forskingsprosjektet hatt fokus på at det innsamla datamaterialet skal vera anonymiserte, og å behandla personopplysingar konfidensielt (Befring, 2015, s. 32). For å følgja dette prinsippet vart til dømes opptaka kryptert, lagra på ein forsvarleg måte, og gjort med mobilappen *Nettskjema-diktafon*, då denne appen gjev ei sikker løysing for innsamling av lyd med tanke på personvern (UiO, u.å.). Vidare kunne opptak med mobil mogeleg trygga informantane, samanlikna med opptak gjort med anna utstyr, då elevane antakeleg er vane med mobiltelefonar.

For å ta omsyn til aktsemd for deltakarrisiko, hadde eg gjennom heile forskingsprosessen fokus på at forskingsdeltakarane skulle oppleva minst mogeleg belastning, og at dei ikkje skulle kjenna på at forskinga var risikofylt (Befring, 2015, s. 33-34). Av denne grunn forsøkte eg til dømes, som tidlegare skrive, å tryggja forskingsdeltakarane.

Til slutt vil eg merkja at fordi eg i dette forskingsprosjektet innhenta persondata, var eg meldepliktig til Norsk senter for forskningsdata (NSD, u.å.). Prosjektet vart vurdert godkjent, med atterhald om at studien vart gjennomført i samsvar med det eg dokumenterte i meldeskjemaet, sjå vedlegg 1.

4 Resultat og analyse

I dette kapittelet vil eg presentere dei empiriske resultata og analysere dei i lys av tidlegare forsking og teori. Gjennom kapittelet vil fleire elevsvar på oppgåvene vera representerte i form av bilete, og for å gje ei heilskapleg avbilding vert heile løysinga på oppgåva representert. Likevel vil ikkje alle momenta ved løysingane bli kommentert, grunna avgrensingar gjort i studien med omsyn til problemstillinga og omfanget av masteravhandlinga.

Kapittelet er strukturert etter tema relatert til forskingsspørsmåla, som omhandlar elevane si forståing for algebraisk symbolbruk, forståing av transformativ algebra og følgjene av elevane si forståing i møte med bevis (sjå kapittel 1). Likevel vil eg innleiingsvis i dette kapittelet gje ei oversikt over vurderinga på det skriftelege elevarbeidet, då desse går på tvers av temaa og kan gje eit bilete av situasjonen i klassen, som vidare kan vera interessant inn i kapittelet.

Dei 16 oppgåvesettdeltakarane svara på oppgåvesettet som bestod av 11 oppgåver. Til saman innhenta eg difor 176 svar på oppgåver. Resultata frå oppgåvesettet er vist i Tabell 4.1. Ut frå tabellen kan ein sjå at 22 av dei 176 elevsvara på oppgåvene vart kategorisert som riktig, 13 som delvis riktig, 48 som blankt, medan 93 som gale svar.

Tabell 4.1: Tabellen viser resultatet av skåringa av oppgåvesettet. «R» tyder riktig svar. «r» tyder noko riktig svar. «½R» tyder at eleven fann ein av to løysingar. «r(-)» tyder riktig svar, men feil/ingen utrekning. «-» tyder blankt svar. «G» tyder gale svar. «» tyder at eleven samtykka til intervju.*

Elev / Oppgåve		1(I)* Isak	2(I)* Kjetil	3*	4	5	6(I)* Karl	7*	8	9	10*	11*	12	13*	14(I)* Tom	15	16
1		G	G	-	R	-	r	G	G	R	-	G	G	r	G	G	G
2	a	G	G	G	G	-	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G
	b	G	G	G	G	-	R	G	R	G	G	G	G	G	G	G	G
	c	G	G	G	R	-	G	G	G	G	G	G	-	G	R	G	G
	d	G	G	G	R	-	G	G	G	G	R	G	-	R	r	G	-
3	a	G	G	G	R	-	G	G	G	G	G	G	-	r	G	G	G
	b	G	G	G	G	-	G	G	-	G	G	R	-	-	R	G	-
4		-	-	G	-	G	½R	G	-	-	½R	G	-	-	G	G	G
5		G	R	R	-	R	R	G	R	G	-	-	-	-	G	R	G
6		r(-)	G	R	-	r(-)	r(-)	-	r(-)	-	-	-	-	-	-	r(-)	-
7		-	-	-	-	r(-)	R	R	G	-	-	-	r(-)	-	-	R	-

Det kan merkjast at gjennom vurderinga av oppgåvesettet kom det fram indikasjonar på at deltakarane i studien ikkje var veldig trygge på derivasjon. Dette kan ein blant anna sjå i oppgåve 2a og 2b. Desse oppgåvene var, som tidlegare skrive, meint til å testa derivasjonskunnskapen deira. I oppgåve 2a vart 1 svar kategorisert som blankt, medan dei 15 andre svara som gale. I oppgåve 2b var 2 svar kategorisert som riktig, 1 som blankt og 13 som gale. At datamaterialet indikerte mangelfull derivasjonskunnskap var difor noko eg tok omsyn til i analysen.

Som tidlegare nemnt forsøkte eg med dette oppgåvesettet å trykkja på nokre ømme punkt, og å laga oppgåver som var utforma på ein relativt ukonvensjonell måte. Vidare kan ein sjå frå Tabell 4.1 at relativt mange svar vart kategorisert som gale. Borge og Hole (2017, s. 244) hevdar at norske elevar presterer lågt når dei må tenkja på ein annleis måte, enn måten dei har vorte undervist i. Vidare er det som tidlegare skrive grunn til å tru at denne studien har ein viss overføringsverdi, og at resultatet difor ikkje berre gjeld deltakarane i denne klassen (Thagaard, 2018, s. 182). At mange svar vart kategorisert som gale treng difor ikkje å tyda at klassen eg undersøkte var spesielt dårleg. Likevel, er det viktig å ikkje generalisere resultata (Gleiss & Sæther, 2021, s. 207).

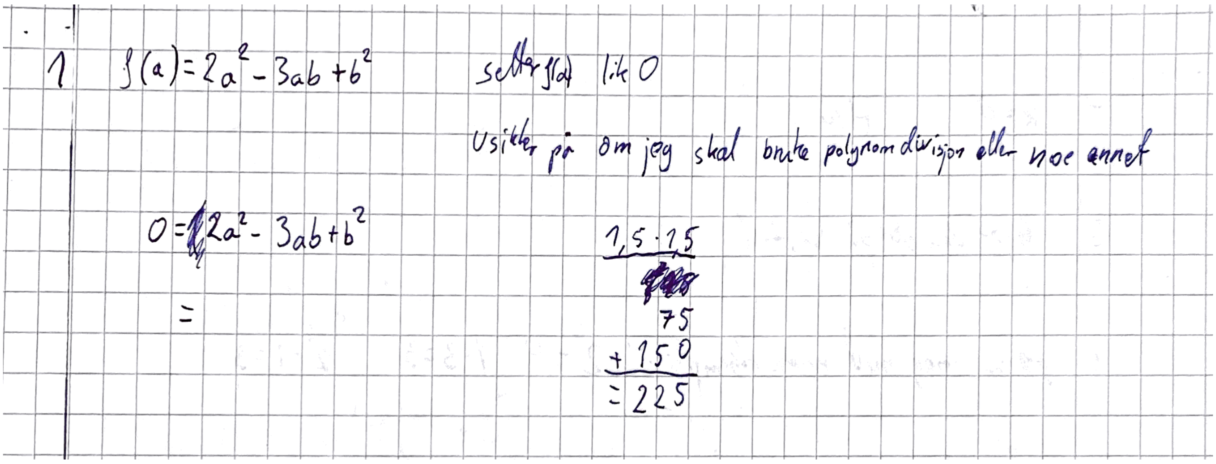
4.1 Forskingsdeltakarane si forståing av algebraisk symbolbruk

I dette delkapittelet vil eg peika på nokre dømer på indikasjonar på kategoriane, *teikn til konseptuell* kunnskap eller *teikn til mangelfull konseptuell kunnskap* for bruken av variablar, parameterar og konstantar, då dette som tidlegare skrive, kan vera nyttig for å svara på problemstillinga. Dette kan særleg bli sett på som viktig, då forståing av algebraisk symbolbruk kan bli sett på som ein del av algebraisk kompetanse (English & Warren, 1998, s. 166; Hiebert & Lefevre, 1986, s. 10; Naalsund, 2012, s. 33). Før eg går inn på dette vil eg igjen merkja at sjølv om eg peikar på ulike teikn, vil ikkje desse teikna definera den fullstendige forståinga til eleven.

I oppgåve 1 var målet å testa elevane si forståing av algebraisk symbolbruk. Dette vart gjort ved å bruka relativt ukonvensjonelle symbol. Variabelen a vart brukt i staden for x, og b var ein parameter i polynomet. På denne oppgåva vart to elevsvar kategorisert som rett, to som delvis riktig, tre som blankt og ni som gale. Ein av elevane som svara rett løyste oppgåva ved å faktorisere uttrykket, medan den andre brukte abc-formelen.

Datamaterialet tyda på at verken Isak, Karl eller Tom såg at ein kunne løysa oppgåva ved bruk av abc-formelen på polynomet som var oppgitt, men på den andre sida såg dei denne løysinga når symbola i polynomet var konvensjonelle. Eg vil forklara dette nærmare.

Isak klarte ikkje oppgåve 1 då han jobba med oppgåvesettet, sjå Figur 4.1.



Figur 4.1: Isak si løysing av oppgåve 1.

Når eg på intervjuet spurde kva Isak tenkte då han jobba med oppgåva fortalte han «*eg veit ikkje kva eg tenkte eigentleg, [ler] eg bestemte meg eigentleg for å gå vidare når eg ikkje heilt fant ut korleis eg skulle gjera det*».

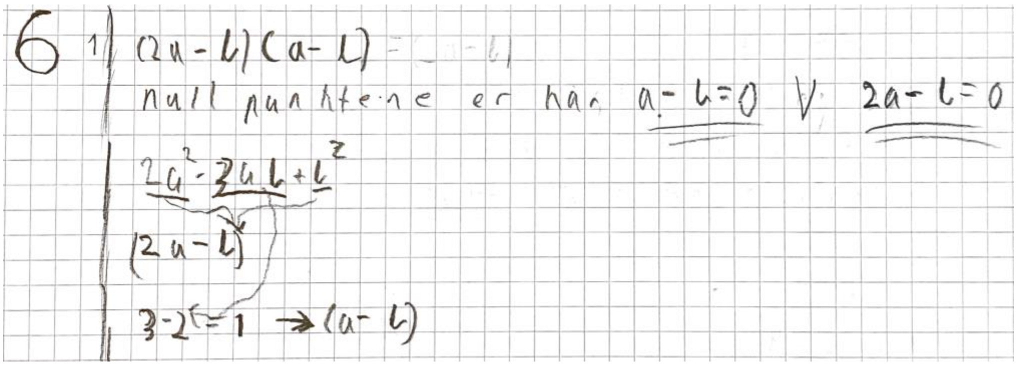
Vidare spurde eg om Isak såg ei løysing av oppgåve 1 om polynomet hadde vore $g(x) = 2x^2 - 3xb + b^2$, der eg altså byta variabelen a med x. Han svara då:

> *Jo, viss ein då berre ser på, eh, 2 og* b *som eit tal, og så ser eg på* x *som ja, veit ikkje, ein faktor eller noko sånt, for då kan ein bruka* abc*-formelen kanskje for å løysa den.*

Eg sat deretter også $b = 2$ slik at polynomet vart $h(x) = 2x^2 - 6x + 4$. Isak fortalte då at han var sikker på at han hadde klart oppgåva ved å bruka abc-formelen dersom polynomet i oppgåvesettet hadde vore $h(x)$. Det kan difor sjå ut til at Isak ikkje klarte oppgåva fordi den vart gitt på ein ukonvensjonell måte. Eg tolkar det slik då han gav uttrykk for at han hadde klart oppgåva om variabelen som representerer argumentet i funksjonen hadde vore x, og dermed oppgitt på ein konvensjonell måte. Dette var tilfelle sjølv om ein i hovudsak kan gjera dei same rekneoperasjonane med polynoma $f(a) = 2a^2 - 3ab + b^2$ og $h(x) = 2x^2 - 6x + 4$. Vidare, i oppgåve 3 skreiv Isak «*At det* *brukes bokstaver fra det greske alfabetet gjør ikke noe med utregningen*». Det kan difor tenkjast at han hadde ein viss kunnskap om at ein kan representera variablar med ulike bokstavar. I forlenging av dette fekk eg intrykk av at han ikkje klarte å forklara oppgåva med bruk av denne kunnskapen, og at han difor ikkje hadde sterke nok koplingar mellom kunnskapen. Dette vart difor sett på som ein indikasjon på teikn til mangelfull konseptuell kunnskap om algebraisk symbolbruk (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3-4).

Måten denne samtalen utvikla seg på var relativt lik hos Karl. I intervjuet kom det fram at han ikkje såg at ein kunne løysa oppgåve 1 med abc-formelen før eg både hadde byta variabelen a med x og sat $b = 2$. Dette vart difor òg sett på som eit teikn til mangelfull konseptuell kunnskap.

Vidare vart Karl sitt svar på oppgåve 1 kategorisert som noko riktig, sjå Figur 4.2.



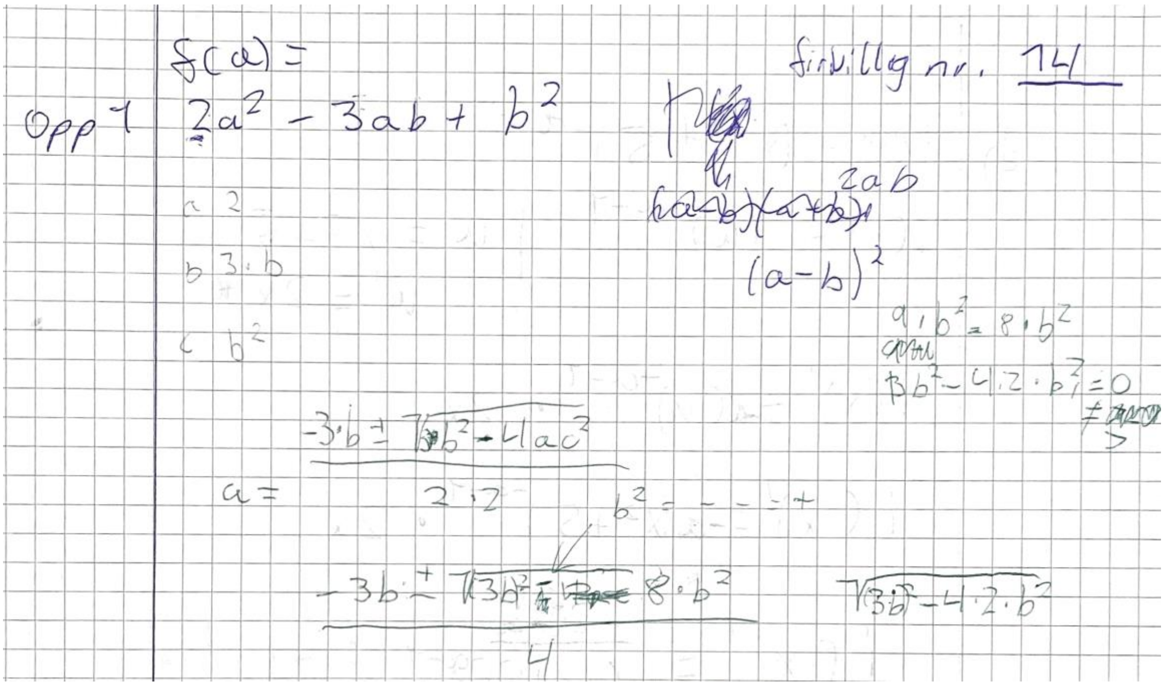
Figur 4.2: Karl si løysing av oppgåve 1.

Om løysinga fortalte Karl:

> *Altså det var (...)* $3ab$*, finna at 3, den lettaste måten å skriva det på er* $2 + 1$*, og så såg eg at* $2a^2$ *hadde 2 i seg, og då visste eg at du måtte ha* $2a$*.* [...] $2a - x$ *(...)* $a - y$*, det var det. Så visste eg at det måtte vera det, og så såg eg at det ikkje var noko forteikn, eller at det ikkje var noko tal framføre* b*-en. Så då fekk, då visste eg då, at då berre putte, bytte eg, visste at* x *og* y*, begge var 1, då fekk eg* $2a - 1$ *og* $a - 1$ *(...), eh,* b*, meinte eg, ikkje 1.*

Dette gjev ein indikasjon på at Karl klarte å kopla kunnskapen han hadde om blant anna faktorisering, og bruken av algebraiske symbol til å løysa oppgåve 1, då han enda med riktige faktorar. Fordi det kan sjå ut til at han kopla saman kunnskap, vart dette sett på som ein indikasjon på teikn til konseptuell kunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3-4). På den andre sida oppgav han svaret som $a - b = 0 \vee 2a - b = 0$. Dette kan vera eit teikn på mangelfull konseptuell kunnskap for algebraisk symbolbruk, då det kan tenkjast at han ikkje forstod rolla til variablane, at han ikkje kunne skilja mellom variablar og parameterar, og at kunnskapsbitane hans difor var isolerte (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3-4). Likevel kan det merkjast at dette også kan vera ein slurvefeil, og det vil då vera vanskeleg å tolke måten han oppgav svaret.

Tom forsøkte å bruka abc-formelen på polynomet $f(a) = 2a^2 - 3ab + b^2$ når han arbeida med oppgåvearket, sjå Figur 4.3.



Figur 4.3: Tom si løysing av oppgåve 1.

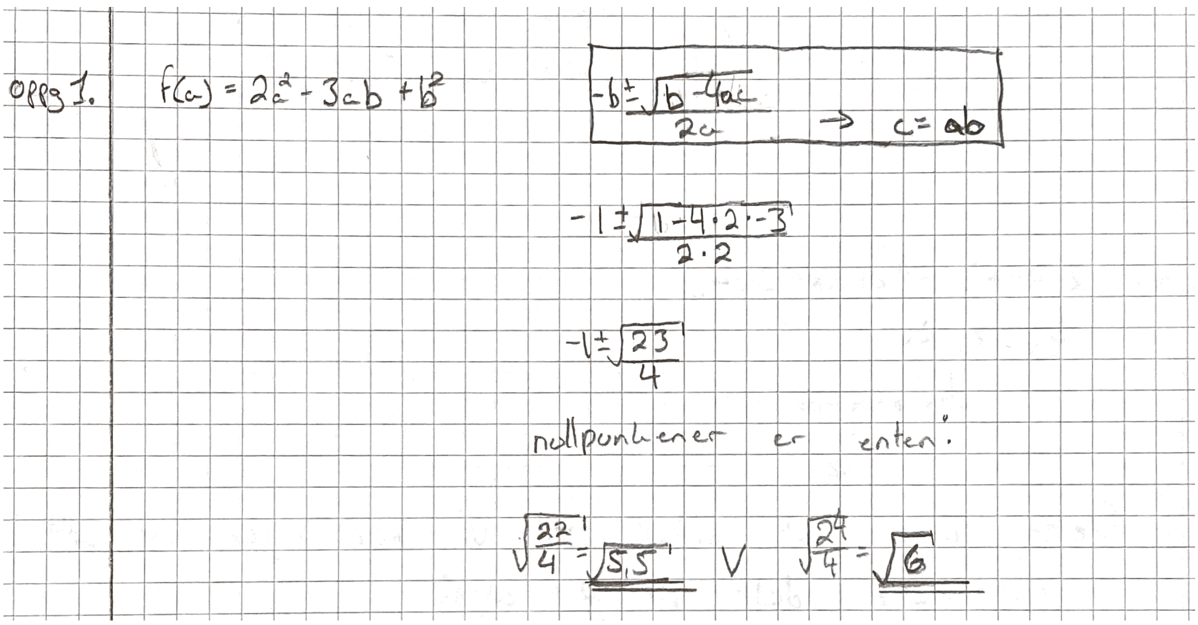
For å bruka abc-formelen riktig på $f(a)$, må ein bruka koeffisientane i $f(a)$ til å finna riktige verdiar på a, b og c, og deretter setja verdiane inn i $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Med unntak av ein forteiknsfeil, sat Tom inn riktige verdiar for a, b og c i abc-formelen, men han forenkla ikkje uttrykket $\frac{-3b\pm\sqrt{(3b)^2-8\cdot b^2}}{4}$. I intervjuet med Tom kom det fram at han meinte ein ikkje kunne finna kvadratrota av uttrykket, og at ein difor ikkje kunne bruka abc-formelen for å finna løysinga på oppgåva:

Eg må ha eit litt ordentleg tal her [peikar på kvadratrota]. Så det er jo ei kvadratrot av jo eit ukjend tal, og eg må finna ein ukjent sånn inni her [peikar på kvadratrota], og ved at det liksom, at det er altså andre ukjente utanfor og eg må ha, ha. Så me har jo to ukjente her, så virka jo ikkje den [peikar på abc*-formelen].*

Her tolkar eg det som at Tom meinte at ein ikkje kunne bruka abc-formelen til å finna svaret på oppgåva, ettersom ein ikkje kunne finna kvadratrota av eit ukjent tal, altså b. Han fortalte også noko om «*andre ukjente utanfor*», det er litt uklart kva han meinte med det, men det verkjer som at problemet var parameteren b. Vidare sat eg $b = 2$ i polynomet i intervjuet. Då uttrykte Tom at ein kunne bruka abc-formelen for å løysa oppgåve 1, ettersom ein ikkje hadde ein ukjent i kvadratrota.

Det kan i forlenging av dette sjå ut til at Tom ikkje klarte å bruka abc-formelen i visse situasjonar, som når det var bokstavar i kvadratrota. Fordi det kan verkja som at han ikkje klarte å bruka ein eventuell kunnskap om parameteren til å tilpassa prosedyren til oppgåva, vart dette sett på som eit teikn til mangelfull konseptuell kunnskap for algebraisk symbolbruk (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 67-76).

Kjetil forsøkte òg å bruka abc-formelen for å løysa oppgåve 1, men sat inn feil verdiar og fekk feil svar, sjå Figur 4.4.

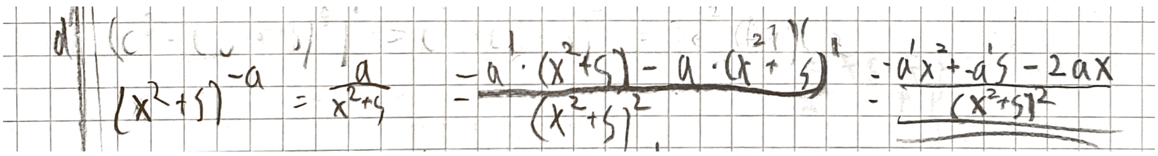


Figur 4.4: Kjetil si løysing av oppgåve 1.

Dei riktige verdiane i denne samanhengen er $a = 2$, $b = -3b$ og $c = b^2$. Ut frå løysinga Kjetil gav på oppgåvesettet, kan det sjå ut til at han fann verdiane $a = 2$, $b = 1$ og $c = -3$.

Kjetil fortalte i intervjuet at dersom polynomet hadde vore $h(x) = 2x^2 - 6x + 4$, ville $a = 2$, $b = 4$ og $c = -6$. Ut frå dette kan det verkja som at Kjetil byta b med c, sidan $b = -6$ og $c = 4$ er dei riktige verdiane for polynomet $h(x)$. Dersom han byta desse, kan det i tillegg tenkjast at Kjetil blanda symbola a og b i polynomet med a og b i abc-formelen. Kjetil sat $b = 1$ inn i abc-formelen når polynomet var $f(a) = 2a^2 - 3ab + b^2$, men dette er ikkje riktig. Det kan henda at Kjetil gjorde dette fordi han brukte eit tilfelle som likna på $i(x) = x^2 + x + 4 \rightarrow a = 1$, og at han difor sat $b = 1$ ut frå b^2. Fordi det kan sjå ut til at Kjetil ikkje hadde danna kunnskapsnettverk som kan hindra slike feil, og sidan parameteren mogeleg fremja problemet, tolkar eg difor dette som ein indikasjon på teikn til mangelfull konseptuell kunnskap om algebraisk symbolbruk (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3-4).

Vidare vart indikasjonar på teikn til mangelfull konseptuell kunnskap om algebraisk symbolbruk òg observert i andre oppgåver, som i oppgåve 2d og 3. Eit av måla med oppgåve 2d var å sjå om elevane klarte å rekna riktig med parameteren a og variabelen x. Karl fekk ikkje rett svar på denne oppgåva, sjå Figur 4.5.



Figur 4.5: Karl si løysing av oppgåve 2d.

Som ein kan sjå i løysinga til Karl, Figur 4.5, skreiv han $(a)' = (a)'$ i staden for å skriva $(a)' = 0$. Dette er ikkje feil i seg sjølv, men sidan oppgåva handla om å derivera uttrykket, undra eg over kvifor han gjorde dette:

> *Karl: Og så har eg berre fortsett å hatt a derivert, for eg visste ikkje kva som skulle skje med den. [...] Eh, når eg ser på det no, er eg ganske sikker på at svaret berre er 1. Fordi det er jo det same som $(x)'$. Det er berre (...), når eg ser*

a eller noko sånt, så tenkjer eg på at det er noko anna enn x, men det er jo det same. [...].

Intervjuar: Viss du ser på, det står jo, her står det $i(x) = (x^2 + 5)^{-a}$ gjev det deg noko? [...] Med tanke på kva a er?

Karl: Eh, a er berre eit tal, er det ikkje? $i(x)$ (...), a er eit tal som ikkje er lik 0.

Intervjuar: Eh, kva hadde det blitt å derivera den då? [...]

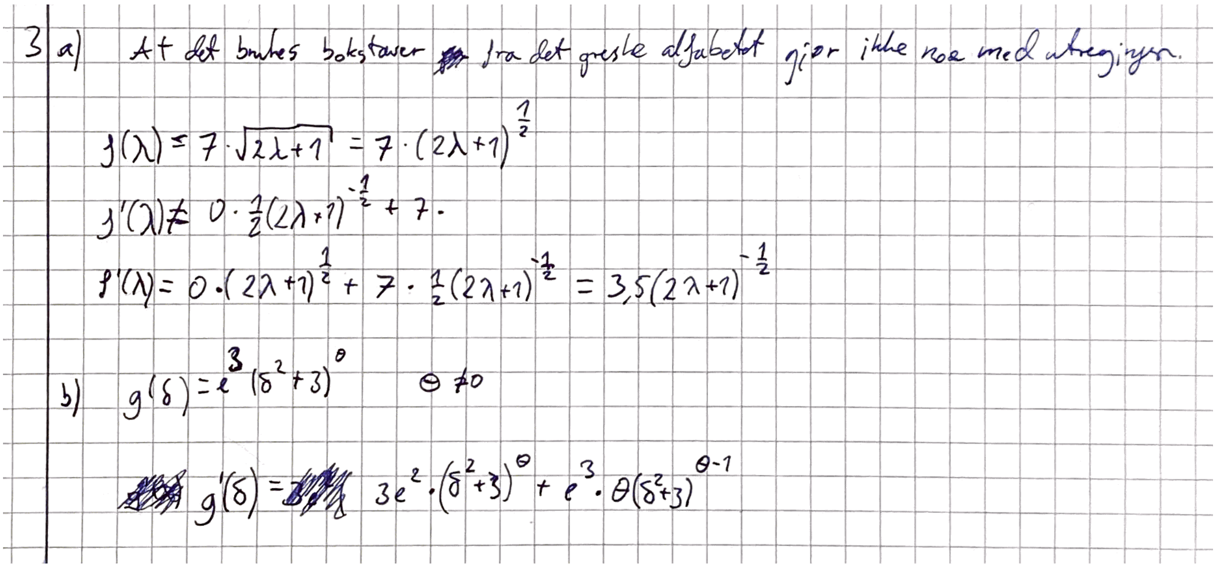
Karl: eh, den a-en der hadde vel blitt 1 sidan, viss du deriverer berre x, så er det [...] $1 \cdot x^0 = 1$.

Då Karl arbeida med oppgåve 2d visste han ikkje kva $(a)'$ vart, men slik eg tolkar det meina han i intervjuet at $(a)' = 1$, då $(a)'$ skulle reknast ut på same måte som $(x)'$, og fordi $(x)' = 1 \cdot x^0 = 1$. Ut frå dette ser det ut til at han betrakta a som ein variabel, sidan han fortalte at a er det same som x. Dette er ganske interessant då han også fortalte at «*a er berre eit tal*». Samanliknar ein med oppgåve 3a skreiv han i løysinga at $(7)' = 0$. Det kjem difor fram at han visste korleis han skulle derivera talet 7.

For å ha konseptuell kunnskap må ein kunne ha koplingar til andre konsept (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3-4). Dersom Karl hadde hatt konseptuell kunnskap om variablar og parameterar kan det tenkjast at han hadde skjønt at løysinga hans var feil. Dette fordi han skreiv $(7)' = 0$ på oppgåvesettet, og deriverte då eit tal til å bli null. På same sett skreiv han òg $(a)' = 1$, sjølv om han hadde sagt at dette berre var eit tal. Det kan difor verkja som at han fortalte to ting som ikkje stemte overeins me kvarandre, at eit tal derivert er 0, medan eit anna tal derivert er 1. Dette gjev indikasjon på at kunnskapsbitane hans var konstruert isolert, og ikkje kopla i nettverk. Dette vart difor sett på som ein indikasjon på teikn til mangelfull konseptuell kunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3-4).

Oppgåve 3 omhandla derivasjon av funksjonane $f(\lambda) = 7 \cdot \sqrt{2\lambda + 1}$ og $g(\delta) = e^3(\delta^2 + 3)^\theta$, der $\theta \neq 0$. Som tidlegare skrive var også denne oppgåva laga for å innhenta informasjon om elevane si forståing av symbolbruk.

Det var på oppgåve 3a at Isak skreiv «*At det brukes bokstaver fra det greske alfabetet gjør ikke noe med utregningen*». I oppgåva brukar Isak symbolet θ i derivasjonen riktig. Det kan difor sjå ut til at Isak koplar derivasjonen til syntaks, som vidare gjev ein indikasjon på teikn til konseptuell kunnskap om algebraisk symbolbruk (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3-4). Likevel vart både løysinga av oppgåve 3a og 3b kategorisert som gale svar, sjå Figur 4.6.



Figur 4.6: Isak si løysing av oppgåve 3.

Ut frå Figur 4.6 kan det sjå ut til at Isak meinte at $(e^3)' = 3e^2$ i $\left(e^3(\delta^2+3)^\theta\right)'$, då han skreiv:

$$g'(\delta) = 3e^2 \cdot (\delta^2+3)^\theta + e^3 \cdot \theta(\delta^2+3)^{\theta-1}.$$

Medan at $(7)' = 0$ i $\left(7 \cdot \sqrt{2\lambda+1}\right)'$, då han skreiv:

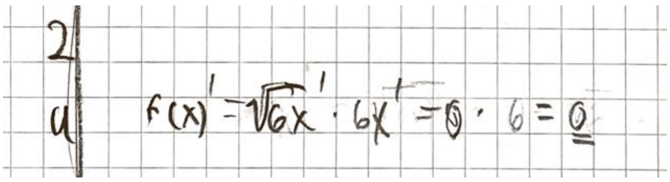
$$f'(\lambda) = 0 \cdot (2\lambda+1)^{\frac{1}{2}} + 7 \cdot \frac{1}{2}(2\lambda+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Sjølv om både 7 og e^3 er konstantar, deriverte Isak dei ulikt. Det kan tenkjast at Isak betrakta eulertalet e som ein variabel, då det kan verkja som at han brukte formelen $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ som gjeld for variablar, til å derivera konstanten e^3. På den andre sida fortalte Isak: «*e-en står for eulertalet. [...]. Eg veit litt av verdien vertfall. [...]. 2,718281828459045, men det er ikkje heile då for det fortsett i endeløysa*». Her kjem det fram at Isak veit kva eulertalet e står for, han nemnar 15 riktig desimalar og forteljar at desimalane fortsett i endeløysa. Sjølv om Isak veit dette, er det likevel noko som sviktar i arbeidet med denne oppgåva.

I eit forsøk på å finna ut kva som svikta, spurde eg om Isak kunne fortelja korleis han hadde derivert funksjonen $h(\delta) = 2^3(\delta^2 + 3)^\theta$. Då svara han: *«Eg er eigentleg litt usikker, men eg hadde vel, eg hadde vel putta 3 framføre, og så, eh, altså sånn at det hadde blitt, eh,* $3 \cdot 2^2$*».*

Dette kan samanliknast med at Isak fortalte at «$(7)'$ *vert berre null*». Det som er interessant her er at Isak, som Karl, ikkje heldt seg konsekvent i behandlinga av konstantane, sjølv om dei eigentleg skulle bli behandla på tilsvarande måtar. Talet 7 i oppgåva vart derivert til null, medan e^3 i $g'(\delta)$ og 2^3 i $h'(\delta)$, som han òg berre meinte var tal, deriverte han truleg med regelen $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$. Det kan òg nemnast at situasjonen var relativt lik for Karl. Han fortalte at e stod for 2,7, og utførte derivasjonane $(e^3)' = 3e^2$ i $g'(\delta)$, $(2^3)' = 3 \cdot 2^2$ i $h'(\delta)$ og $(7)' = 0$ i $f'(\lambda)$. Det er difor tenkjeleg at desse informantane brukte derivasjons- og symbolkunnskap avskilt frå tidlegare kunnskap, som stigningstalet, det grafiske bilete og at $2^3 = 8$. Dette vart difor sett på som teikn til mangelfull konseptuell kunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3-4).

Eit anna døme på teikn til mangelfull konseptuell kunnskap kom fram gjennom samtale om oppgåve 2a med Karl. Oppgåva kunne blant anna blitt løyst ved bruk av kjerneregelen. Karl fortalte at han brukte denne regelen i oppgåva, men likevel kom han fram til feil svar, sjå Figur 4.7.



Figur 4.7: Karl si løysing av oppgåve 2a.

Eg spurde Karl kvifor han fekk 0 som løysing, og han svara «*Ja, det var fordi eg har ikkje noko* x *å derivera utanfor* $\sqrt{6x}$*, når eg tok* $\sqrt{6x} \cdot 6x$ *og begge derivert*». I denne oppgåva er

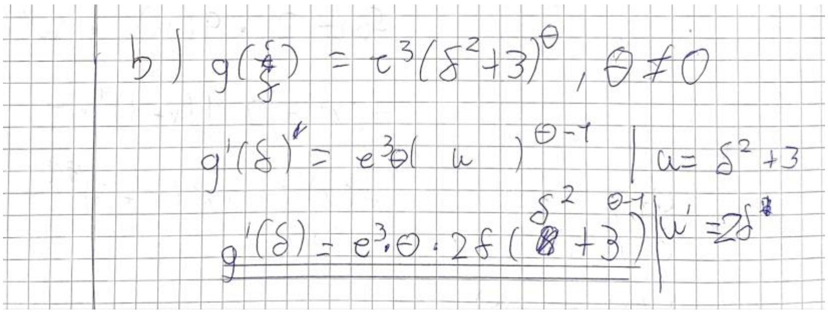
$$f'(x) = g'(u'(x)) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot u'(x) = \frac{1}{2}(6x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6 \text{ , der } u = 6x.$$

Ein skal difor derivera g med omsyn på $u'(x)$. Ut frå sitatet ovanfor kan det tyda på at Karl opplevde det som vanskeleg å tyda $g(u(x))$ i kjerneregelen. Eg tolkar det som at han deriverte g med omsyn på x, og at han løyste oppgåva med bruk av eit tilfelle likt $h(x) = c \rightarrow h'(x) = 0$, der c ikkje avheng av x. Fordi det kan verkja som at Karl ikkje klarte å kople relevant kunnskap om variablar til kjerneregelen, vart dette sett på som ein indikasjon på teikn til mangelfull konseptuell kunnskap for algebraisk symbolbruk (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3-4). Vidare kan det merkjast at det òg såg ut til at andre elevar hadde utfordringar tilknytt $g'(u(x))$ i kjerneregelen.

Datamaterialet i denne studien indikerte fleire teikn til mangelfull konseptuell kunnskap for algebraiske symbol. Likevel vart dette mønsteret somme gongar brote, og nokre delar vart difor sett på som teikn til konseptuell kunnskap. Eg vil trekkja fram to dømer. For det fyrste fekk eg inntrykk av at informantane forstod at det algebraiske språket kunne vera nødvendig for å vise det generelle. Dersom dette er tilfelle, kan det indikera at dei forstod ein sentral del av algebraisk symbolbruk, då det algebraiske språket og symbola blant anna gjev mogelegheit til å uttrykkja og behandla det som er generelt (Mason et al., 2005/2011, s. 15).

Ser ein på oppgåve 6 var det berre eit svar som vart karakterisert som riktig, denne eleven løyste oppgåva ved å bevisa påstanden algebraisk. Fem svar vart karakterisert som r(-), ein elev svara gale, og ni elevar svara blankt. Alle elevsvara som vart karakterisert r(-) sat inn ulike verdiar i formelen, og sjekka at det stemte. Sjølv om elevane ikkje sjekka om påstanden stemte for eit generelt tal n, konkluderte dei med at den stemte, eller at den truleg stemte. I intervjuet ville eg difor finna ut om elevane tenkte at det «*å sjekke for nokre tal*» var nok til å bevisa at påstanden var sann. Eg spurde Karl om løysinga hans av oppgåve 6 viste at påstanden gjeld for alle naturlege tal. Han svara då «*nei*», og at ein då måtte «*gjort det med* n». Ut frå dette kan det sjå ut til at Karl har tilkoplingar mellom det generelle, det algebraiske symbolet n og eigenskapane til n, og dette var difor sett på som ein indikasjon på teikn til konseptuell kunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3-4). Det kan merkjast at situasjonen var relativt lik for Isak.

Det andre dømet er i samanheng med oppgåve 3b. Tom sitt svar på denne oppgåva vart kategorisert som riktig, då det såg ut til at han brukte kjerneregelen riktig og deriverte riktig med omsyn på δ, sjå Figur 4.8.



Figur 4.8: Tom si løysing av oppgåve 3b.

Når eg i intervjuet spurde korleis Tom hadde derivert funksjonen $h(\delta) = 2^3(\delta^2 + 3)^{\theta}$, då svara han: «*Å ja, fyrst ville eg berre tatt den ned med ein gong, og då vert det* $2 \cdot 2 \cdot 2$*, som er ja, 4, 8.*» Av dei fire informantane var Tom den einaste informanten som brukte at $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, og han var òg den einaste som deriverte $h(\delta)$ riktig. Dette kan difor bli sett på som ein indikasjon på teikn til konseptuell kunnskap, då han mogeleg trakk koplingar mellom variablar, konstantar, derivasjon og potensrekning (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3-4).

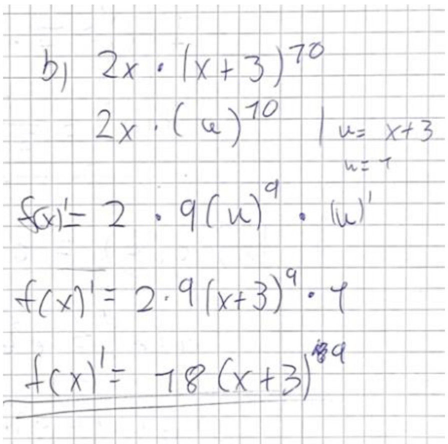
4.2 Forskingsdeltakarane si forståing for transformativ algebra

Som tidlegare skrive kan forståing nyttast i to ulike tydingar: instrumentell forståing og relasjonell forståing (Skemp, 1976, s. 20), og for gi eit innblikk i elevane si forståing for transformativ algebra vil eg peika på nokre dømer på indikasjonar til teikn til mangelfull, instrumentell eller relasjonell forståing. Eg vil i dette kapittelet fyrst peika på teikn til mangelfull forståing, så instrumentell forståing og til slutt relasjonell forståing.

På oppgåve 4 svara ingen av elevane riktig, 2 elevar fann 1 av 2 x-verdiar, 7 elevar svara blankt, og sju elevar svara gale. Sidan ingen av elevane fann begge verdiane, opplevde antakeleg elevane oppgåva som vanskeleg. Grønmo, Stedøy, et al. (2017, s. 142-143) hevdar òg at denne oppgåva såg ut til å vera vanskeleg for norske elevar. På den andre sida kan det merkjast at elevane fekk beskjed om at dei skulle bruka mest tid på dei fyrste oppgåvene, og dette kan vera ein av grunnane for at fleire svara blankt eller gale her.

Eg snakka om denne oppgåva med Kjetil. Under intervjuet forsøkte han å løysa oppgåva, og han delte då på x utan å ta omsyn til $x = 0$. For å sjå om Kjetil berre hadde gløymt å ta omsyn til $x = 0$ spurde eg «*når du deler på x her, er det noko spesielt* *du må tenkja på då?*». Han svara då «*Ja, sei det. Eg er litt usikker*». Dette indikerer at han ikkje skjønte at han mista ei løysing når han delte på x. Situasjonen var òg noko lik for Karl og Tom. Sidan det ikkje såg ut til at Kjetil, Karl eller Tom skjønte at dei mista ei løysing, såg eg på dette som ein indikasjon på mangelfull forståing for transformativ algebra, då desse elevane ikkje klarte å løysa likninga riktig, og då likningsløysing er ein sentral del av transformativ algebra (Kieran, 2007, s. 714).

Vidare vart teikn til mangelfull forståing observert i samanheng med oppgåve 2b. Svaret til Tom på oppgåva er vist i Figur 4.9.



Figur 4.9: Tom si løysing av oppgåve 2b.

Vel å merkja er ikkje løysinga til Tom riktig, men i intervjuet fortalte Tom at det skulle vera $2 \cdot 10(x+3)^9 = 20(x+3)^9$ i staden for $2 \cdot 9(x+3)^9 = 18(x+3)^9$, og han retta difor opp i ein av feilane han gjorde. I forlenging av dette snakka Tom om at han mogleg kunne forenkla svaret gjennom ein rekneoperasjon:

> *Tom: Eg kunne ha gonga inn der, eg hadde tenkt på det, men eg heller berre beheldt så eg ikkje øydelagde [...].* $20x +$ *(...) vent litt då,* $20x$ *+ kva vert* $20 \cdot 3$*? 60, men eg berre sånn, eg let det kanskje vera litt, sidan eg vil ikkje liksom, det er betre å berre behalda dei tala som eg har no [...].*
> *Intervjuar: og så opphøgd i 9-andre, så då hadde du fått dette? [eg skriv* $(20x+60)^9$*]*
> *Tom: Ja, akkurat, viss eg hadde tenkt sånn då, men eg berre let det stå, men sidan eg følte at det vart sånn. Dei tala [*$(20x+60)^9$*] eg har no er kanskje det eg kunne då.*

Tom fortalte her at $20(x+3)^9$ kanskje kunne skrivast som $(20x+60)^9$, men at han var usikker på om dette er riktig. Vidare kan dette gje ein indikasjon på at Tom har mangelfull forståing tilknytt transformativ algebra, då det kan sjå ut til at han verken klarte å bruka eller forklara den transformative rekneoperasjonen (Kieran, 2007, s. 714). Dersom Tom hadde hatt relasjonell forståing kan det tenkjast at han hadde sett at

$$20 \cdot \overbrace{(x+3) \cdot (x+3) \cdot \ldots \cdot (x+3)}^{9\ faktorar} \neq \overbrace{(20x+60) \cdot (20x+60) \cdot \ldots \cdot (20x+60)}^{9\ faktorar}.$$

Vidare kan det hende at Tom lura på om svaret kunne skrivast som $(20x+60)^9$ fordi han overgeneraliserte regelen $a(b+c) = ab + ac$, då det kan sjå ut til at han brukte denne regelen i ein situasjon den ikkje gjaldt i (Brekke, 2002, s. 10).

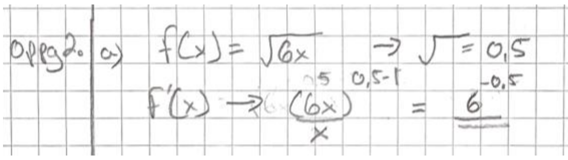
Det siste døme eg vil trekkja fram som teikn til mangelfull forståing for transformativ algebra, kom fram i arbeidet med oppgåve 2d, sjå Figur 4.5. Ut frå denne figuren kan det sjå ut til at Karl forsøkte å bruka regelen $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$, men at han brukte den feil, og sat $x^{-a} = \frac{a}{x}$. Når eg i intervjuet spurde om han kunne forklara framgangsmåten fortalte han:

> *Eg berre, å ja, jo, ja det eg gjorde var at $x^2 + 5$ opp..., eller sånn $x^{-1} = \frac{1}{x}$, viss eg hugsar riktig. Så då tok eg, skreiv eg ut at $(x^2+5)^{-a} = \frac{a}{x^2+5}$.*

Dette sitatet gjev ei stadfesting på at Karl brukte regelen, men at han oppgav den på ein mindre generalisert form. Sidan Karl omgjorde uttrykket til ein ikkje-ekvivalent form, og dermed gjorde den transformative rekneoperasjonen feil, og sidan eg ikkje fekk intrykk av at han forstod dette, vart dette sett på som ein indikasjon på teikn til mangelfull forståing for transformativ algebra (Kieran, 2007, s. 714; Skemp, 1976).

Teikn til instrumentell forståing var òg observert fleire gongar i datamaterialet. Vidare vil eg trekkja fram eit utval dømer som viser teikn til dette, då dette som tidlegare skrive kan gje eit inntrykk av elevane si forståing av algebra. Dersom det var teikn til at elevane klarte å bruka ein regel, men ikkje forstod kvifor ein kunne bruka den, vart delen av datamaterialet, i tråd med Skemp (1976) kategorisert som teikn til instrumentell forståing.

I arbeid med oppgåve 2a såg Kjetil ut til å bruka at $\sqrt{6x} = (6x)^{\frac{1}{2}}$, sjå Figur 4.10.



Figur 4.10: Kjetil si løysing av oppgåve 2a.

I intervjuet dagen etter fortalte Kjetil: «*det eg hugsar var at kvadratrot var enten opphøgd i 0,5 eller -0,5, så ja, og så hugsa eg ikkje heilt kva -0,5 var*». Dette sitatet kan gi ein indikasjon på at Kjetil var usikker på det han gjorde. Sjølv om han klarte å bruka regelen riktig, kan det difor tenkjast at han ikkje forstod denne regelen, eller den transformerande rekneoperasjonen. Dette vart difor sett på som ein indikasjon på teikn til instrumentell forståing for transformativ algebra (Kieran, 2007, s. 714; Skemp, 1976).

Eit anna døme på instrumentell forståing kom til syne gjennom oppgåve 1. For å finne nullpunkta i denne oppgåva kunne ein bruka abc-formelen og då òg transformativ algebra (Kieran, 2007, s. 714). Som tidlegare skrive gav Isak, Karl og Tom uttrykk for at dei ikkje trudde at ein kunne finne nullpunkta til polynomet i oppgåve 1 med abc-formelen, der a var variabeln og b var ein parameter, men at dei trudde at dette var mogeleg når x var variabelen. Fordi det ikkje såg ut til at dei klarte å tilpassa formelen til ein «ny» situasjon, og difor truleg ikkje kunne forklart regelen, men antakeleg hadde klart å bruka den i visse situasjonar, vart dette sett på som eit teikn til instrumentell forståing for transformativ algebra (Skemp, 1976).

For å vidare undersøkja elevane si forståing ville eg sjå korleis dei forstod informasjonen om føresetnadane $a \neq 0$ i oppgåve 2b og $\theta \neq 0$ i oppgåve 3b. I samtale med Kjetil fortalte han at han berre antok at $a \neq 0$ var der for «*å få oppgåva til å gå opp*», noko som i og for seg er sant. Vidare fortalte han om oppgåve 3b at:

> *Det eg tenkte, eller det fyrste eg tenkte på, når eg såg oppgåva var [...], eg skjønte ikkje heilt, og det same gjeld for 2d, eg skjønte ikkje heilt kva man skulle gjera med a, eller $\theta \neq 0$. Så eg berre let det vera.*

For Kjetil såg det difor ikkje ut til at føresetnaden om at $a \neq 0$ eller $\theta \neq 0$ førte til stor forvirring. Samtalen med Karl var relativt lik, og eg fekk difor ikkje inntrykk av at heller han vart forvirra av dette. Vel å merkja, for å få riktig svar på oppgåve 3b trong ikkje elevane å forholda seg til føresetnaden om at $\theta \neq 0$, men sidan eg var interessert i forståinga til elevane vil eg påpeika noko her. Det at dei begge valte å sjå vekk frå $a \neq 0$ og $\theta \neq 0$, kan vitna om at dei har sett slike oppgåver før, og at dei har funne ut at ein ofte kan sjå vekk frå føresetnadane, og dermed mogeleg ikkje forstå oppgåvene, men likevel få riktig. Ingen av desse elevane fekk rett på oppgåvene som inneheldt føresetnadane. Likevel kan det tenkjast at dei har utvikla instrumentell forståing. Dette fordi det er rimeleg å tru at elevane kan få riktig på oppgåver som omhandlar transformativ algebra, sjølv om dei ser vekk frå føresetnadane (Kieran, 2007, s. 714; Skemp, 1976).

Vidare vart Tom sitt svar på oppgåve 3b, som tidlegare skrive, kategorisert som riktig. I spørsmål om denne oppgåva svara Tom:

> *For e-en så berre tenkte at eh, eulertalet då. Når den er derivert så vert den det same, viss eg hugsa 100% på den der. Det er liksom mange av de reglane er liksom meir eller mindre at du må berre pugge, og (...) vel du har R1 og 1T og du må pugge de tinga frå før av, og, og du set ut i R2, så er det veldig vanskeleg å hugsa de alle tinga fortsett då. Så eg, eg måtte berre definera at e måtte vera noko [...] det kan vera at eg også tar feil her. Mest sannsynleg kan det vera at den går ned, men det veit eg ikkje om, det eg på ein måte berre gjettar. Men eg veit noko med at eulertalet vert det same då (...). Så eg berre behald det som står der [ler].*

Eg tolkar dette som at Tom brukte regelen $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$ på e^3, og at han difor fekk rett svar. Denne regelen gjeld ikkje for reine konstantar, men for funksjonen e^x. Av denne grunn er det rimeleg å tru at han ikkje skjønte kvifor han fekk riktig svar, og eg kategoriserte denne delen av datamaterialet difor som teikn til instrumentell forståing (Skemp, 1976). Tom fortalte vidare at han gav uttrykk for at han var usikker på om han gjorde rett. Han fortalte at det var vanskeleg å hugsa alle reglane dei har lært dei siste åra dersom dei berre vert pugga. Her peika Tom på noko av kjernen med instrumentell forståing, og sitatet samsvarar med det både Hiebert og Carpenter (1992, s. 74-75) og Skemp (1976, s. 23-24) peikar på, at det er lettare å hugsa reglar om ein forstår dei enn om ein memorerer dei.

I analysen av relasjonell, instrumentell og mangelfull forståing fann eg minst teikn til relasjonell forståing, og flest teikn til mangelfull og instrumentell forståing for transformativ algebra. På grunn av oppgåva sitt omfang vil eg difor berre leggja fram eit døme på dette.

Då Kjetil gjorde oppgåve 4 fortalte han at ein kunne setja $10^6 ax = \frac{x^2}{10^6}$ fordi «*begge er* y». Med det tolkar eg det som at han skjønte korleis ein kan bruka eit likskapsteikn. I dette tilfellet brukte han dei algebraiske symbola i den transformerande rekneoperasjonen riktig, og i tillegg kan det sjå ut til at han forstod kvifor. Dette vart difor kategorisert som teikn til relasjonell forståing for transformativ algebra (Kieran, 2007, s. 714; Skemp, 1976). Ein kan kanskje tenkja at dette er kunnskapar elevar bør sitje med på dette nivået, då likskapsteiknet allereie vert innført i barneskulen, til dømes i addisjon og subtraksjon (Utdanningsdirektoratet, 2006b). På den andre sida kan studentar som tek høgare utdanning ha utfordringar tilknytt likskapsteiknet (Mevarech & Yitschak, 1983), og teikn til relasjonell forståing i samanheng med likskapsteiknet treng difor ikkje å vera opplagt på dette nivået.

4.3 Korleis algebraforståinga påverkar forståinga av matematiske bevis i skulesamanheng

For å forstå bevis kan resoneringsevne vera viktig, og for å resonnera er tilstrekkeleg kunnskap vera naudsynt (Alexander et al., 1997, s. 124; Kilpatrick et al., 2001, s. 130, 146; Niss & Jensen, 2002, s. 54). I denne studien ville eg difor undersøkja om elevane si algebraforståing var tilstrekkeleg for å forstå bevis. Fordi dei to bevisa eg brukte i denne studien inneheldt relativt mange algebraiske symbol og transformativ algebra, sjå vedlegg 4 og 5, er det rimeleg å tru at elevane måtte bruka forståing for algebraisk symbolbruk og transformativ algebra for å forstå bevisa (Kieran, 2007, s. 714; Lagrange, 2002, s. 163, sitert og omset i Kieran, 2007, s. 714; Niss & Jensen, 2002, s. 54-58). For å svara på det siste forskingsspørsmålet såg eg difor på mogelegheitene elevane hadde til å forstå samanhengen i desse to bevisa. Dette vart òg gjort då eg i denne masteravhandlinga har brukt Stylianides (2007, s. 291) sin definisjon av bevis i skulen, som blant anna fokuserer på at skulebevis er ein samanhengande sekvens av påstandar for eller mot ein påstand. I tillegg brukte eg hovudfunn ein og to som grunnlag i undersøkinga av dette.

4.3.1 Beviset for produktregelen

Beviset for produktregelen, vart henta frå læreboka elevane brukte i R1 (Oldervoll et al., 2013, s. 329), sjå vedlegg 4. For å oppnå best mogeleg forståing av situasjonen til informantane i samhandling med dette beviset, forsøkte eg å innhenta informasjon om elevane si forståing for produktregelen før me såg på den i intervjuet. I denne samanhengen fortalte alle informantane at dei ikkje visste korleis dei kunne forklara kvifor produktregelen fungerte. Til dømes fortalte Kjetil: «*Eg hugsar ikkje heilt (...) kvifor, men eg kunne kanskje tenkja meg om på det igjen, kanskje*». Dette vart lagt til grunnlag for resultata og analysen i dette delkapittelet.

Tidleg i intervjuet med Isak kom det fram at han hadde utfordringar tilknytt beviset, særleg såg det ut som at han hadde utfordringar med å forstå dei ulike symbola. I intervjuet spurde eg om han kunne lese nedover i beviset, forklara dei ulike stega, og eventuelt sei kvar det stoppa opp. Han svara då: «*Eh,* $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ *er forvirrande [...]. Ja, eh, eg trur eg berre i utgangspunktet ser vekk i frå* $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$». I intervjuet kom det ikkje fram kvifor han meinte at $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ var eit forvirrande element, men det kan likevel tenkjast at han ikkje forstod kva $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ tyda, og at han av den grunn såg vekk frå det. Vidare kan det henda at det hindra han i å skjøna heilskapen i beviset, då grenseverdi kan bli sett på som sentralt i derivasjon (sjå til dømes Lindstrøm, 2016).

Isak hadde òg utfordringar med andre delar av beviset, til dømes såg det ikkje ut til at han skjøna kva som skjedde i steget

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Vel å merkja er fargebruken læreboka si (Oldervoll et al., 2013, s. 329). Om denne omgjeringa fortalte Isak:

(... ...) [ca. 30 sek]. Eg syns eigentleg det står mykje av det same to gongar. [...]. Eg tenkjer på ein måte å sjå på dei forskjellege ledda då. Eh, for det, det fyrste, viss ein ser på trinn 2, så er det på ein måte det same, same står jo eh, nei, det gjer det eigentleg ikkje heilt då. Eh. (...). Nesten det same står på starten der, bortsett frå $v(x)$, eh, men det står $v(x + \Delta x)$. [...]. Eh, ja, nei eg veit ikkje heilt, jo, nei, ok, jo, det gjev kanskje meining, at viss ein ser forskjelleg farge, at det er, at de har satt noko på midten der, eh, fordi det som er over brøkstreken på trinn to, alt det står på linje 3 også, men så er det satt noko i midten. Og det i midten er, eh (...), ja, kva er det i midten eigentleg? (...). Nei, eg ser eigentleg ikkje kvifor ein kan skrive det nei.

Her kjem det fram at Isak ikkje såg at dei legg til og trekk frå det same leddet, og at dette er lov ettersom

$$-u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x) = 0.$$

Isak konkluderte med at han syntest beviset var vanskeleg, og fortalde «*det er veldig mange x-er overalt, og eg veit, eg veit eigentleg ikkje kva dei forskjellege tinga tyder. Eg veit ikkje kva v-ane og u-ane er.*» At Isak gav uttrykk for at han ikkje forstod ulike delar av beviset kan dermed vera fordi det var for mange teikn, då han påpeikar at det er mange x-ar, men det kan òg vera fordi han ikkje veit kva dei forskjellege algebraiske symbola tyda, som v*,* u *og* $\lim_{\Delta x \to 0}$. I kapittel 4.1 og 4.2 viste eg at datamaterialet indikerte at Isak hadde mangelfull algebraforståing for algebraisk symbolbruk og instrumentell forståing for transformativ algebra. I forlenging av dette avsnittet kan det difor verkja som at mangelfull symbolforståing hindra han i å forstå den transformative rekneoperasjonen, og at han då òg vart hindra i å forstå beviset.

Kjetil indikerte teikn til forståing for noko av beviset, til dømes såg det ut til at han skjøna omgjeringa i steget under:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Han forklara dette med at:

Ja, eh, viss $f = u$... ja, (...) viss f er lik det same som $u \cdot v$, så gjev det jo meining at det vert det same som eh, f gongar altså den kjernen der, vert det same som u og v gongar den kjernen der.

Dette gav indikasjon på at Kjetil forstod denne delen av beviset, som inneheldt fleire algebraiske symbol og transformativ algebra, då han truleg såg at omgjeringa av uttrykket var riktig fordi $f = u \cdot v$. Ut frå dette kan det tenkjast at Kjetil si forståing av det algebraiske symbolspråket og transformativ algebra var tilstrekkeleg for å kunna resonnera og vidare forstå denne bevisdelen (Alexander et al., 1997, s. 124; Kieran, 2007, s. 714; Kilpatrick et al., 2001, s. 130, 146; Lagrange, 2002, s. 163, sitert og omset i Kieran, 2007, s. 714; Niss & Jensen, 2002, s. 54-58). Vidare er det difor rimeleg å tru at Kjetil si algebraforståing for dette gav han mogelegheit til å skjøne denne delen av beviset.

På den andre sida såg det ut til at algebraforståinga til Kjetil hindra han i å forstå andre delar av beviset. Utan hjelp frå meg klarte ikkje Kjetil, som Isak, å forstå den transformative rekneoperasjonen i (1). Han fortalte at han ikkje forstod beviset, då han hadde utfordringar tilknytt dei ulike ledda:

Kjetil: Eg vil sei at eg ikkje forstår det [...].
Intervjuar: eh, og då er det som stoppar deg at?
Kjetil: at det kjem inn forskjellege (...) ledd, og eg er litt usikker på kvar dei ledda kjem frå eller kva du må gjera for å få dei ledda.

Sidan han ikkje såg kvifor ein kunne gjera omgjeringa i (1), kan det sjå ut til at Kjetil vart hindra i å forstå denne delen av beviset. Etter dette fortalte eg Kjetil at det stod minus framføre $u(x) \cdot v(x + \Delta x)$ og pluss framføre $u(x) \cdot v(x + \Delta x)$. Då skjøna han truleg omgjeringa av uttrykket i (1). Han forklarte at dette var lov «*fordi det vert 0, då er det som å, det er det same som å liksom ta inn* $-1 + 1$». Vidare fortalte han «*eg ville nok skjønt det med ein gong*» dersom det hadde stått $-1 + 1$ i staden for $-u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x)$.

Som tidlegare skrive kan elevar med forståing lettare overføre kunnskap til nye situasjonar (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 75-76). Ut frå avsnitta over kan det verkja som at Kjetil si forståing for blant anna symbolbruk og transformativ algebra ikkje var tilstrekkeleg for overføring til beviset. Dette argumenterer eg for då han ikkje såg ut til å forstå (1) ved bruk av kompetansen han antakeleg hadde om transformativ algebra, at ein kan leggja til og trekkja frå talet 1 i eit uttrykk, og få eit anna ekvivalent uttrykk. Det kan tenkjast at dette hadde samanheng med at uttrykket i beviset inneheldt relativt mange teikn. Kjetil påpeika òg dette i intervjuet, han fortalte: «*eg følar at, ja, det kan ha vært at det var litt mange teikn*». I tillegg, som tidlegare skrive, indikerte Kjetil teikn til mangelfull kunnskap for symbolbruk og mangelfull forståing for transformativ algebra gjennom utsegn i intervjuet. I forlenging av dette kan det difor tyda på at mangelfull forståing for desse to områda hindra han i å forstå beviset (Alexander et al., 1997, s. 124; Kieran, 2007, s. 714; Kilpatrick et al., 2001, s. 130, 146; Lagrange, 2002, s. 163, sitert og omset i Kieran, 2007, s. 714; Niss & Jensen, 2002, s. 54-58).

For Karl såg det ut til at hans algebraforståing var til hjelp for å forstå delar av beviset. Til dømes fortalte han at omgjeringa av uttrykk (2) var lov då «*det er det same sidan det er gang... det to til samen, de to [u og v] gonga saman vert (...), vert f*». Det kan difor tenkjast at Karl hadde tilstrekkeleg forståing for transformativ algebra og symbolbruk for å forstå denne delen av beviset, og at det difor gav han mogelegheiter (Alexander et al., 1997, s. 124; Kieran, 2007, s. 714; Kilpatrick et al., 2001, s. 130, 146; Lagrange, 2002, s. 163, sitert og omset i Kieran, 2007, s. 714; Niss & Jensen, 2002, s. 54-58).

Likevel var det andre delar av beviset som truleg hindra Karl. Han gav uttrykk for at han ikkje forstod omgjeringa av (1), og då eg spurde han «*kvifor trur du det stoppar?*», svara han: «*Eh, fordi det dukkar opp nokre ting, og eg ser, eg kjem ikkje på måten, det berre vert lagt til eit nytt ledd utan at det andre, (...) utan at de andre vert endra*». Det kan tenkjast at Karl hadde mangelfull forståing tilknytt transformativ algebra og symbolbruk, då han ikkje såg kvifor omgjeringa i (1) stemte, og at det hindra han i å forstå denne delen av beviset (Alexander et al., 1997, s. 124; Kieran, 2007, s. 714; Kilpatrick et al., 2001, s. 130, 146; Lagrange, 2002, s. 163, sitert og omset i Kieran, 2007, s. 714; Niss & Jensen, 2002, s. 54-58). Særleg vil dette vera rimeleg å tru då han tidlegare hadde indikert teikn til mangelfull forståing for algebraisk symbolbruk og mangelfull forståing for transformativ algebra.

På den andre sida såg det ut til at Karl på eit seinare tidspunkt i samtalen kunne forklara kvifor (1) stemte. Han fortalte at «*Sidan eg las nedst her. Eg, du la det til, men du la også (...) til sånn motsette forteikn versjonen og sa at det eigentleg var lik null det du la til*». At Karl las på slutten av beviset, førte difor antakeleg til at han klarte å skjøna denne bevisdelen. At han skjøna dette kan vera eit teikn på at informasjonen i beviset og algebraforståinga hans kunne gi han mogelegheit til å forstå denne delen. På den andre sida klarte han ikkje å sjå kvifor det var slik, ved å berre sjå på likninga. I kor stor grad steg i ulike bevis vert forklara, er avhengig av framstillinga, og varierer difor med forskjellige bevis. Kvifor nokre av ledda var skrive i blått vart forklart i dette beviset, men dersom dette ikkje hadde blitt forklart kan det tenkjast at mangelfull forståing for algebraisk symbolbruk og transformativ algebra kunne hindra Karl i å resonnera, og vidare forstå beviset (Alexander et al., 1997, s. 124; Kieran, 2007, s. 714; Kilpatrick et al., 2001, s. 130, 146; Lagrange, 2002, s. 163, sitert og omset i Kieran, 2007, s. 714; Niss & Jensen, 2002, s. 54-58).

Før eg gav hint om (1) og før Karl hadde lese forklaringa i beviset, såg det altså ut til at verken Isak, Kjetil eller Karl skjøna kva som skjedde i (1), og at dei dermed vart hindra i å forstå denne delen av beviset. På den andre sida fekk eg inntrykk av at Tom skjøna dette. Han fortalte: «*Det her vert jo null til slutt. Du berre set inn differanse for at det her er negativt, positivt, som gjer at det er mogeleg å faktorisere den her nede*». Han såg med andre ord at omgjeringa stemte fordi ein la til ledd som til saman vart null. Det kan difor henda at hans forståing for transformativ algebra og algebraisk symbolbruk gjorde at han forstod delar av beviset (Alexander et al., 1997, s. 124; Kieran, 2007, s. 714; Kilpatrick et al., 2001, s. 130, 146; Lagrange, 2002, s. 163, sitert og omset i Kieran, 2007, s. 714; Niss & Jensen, 2002, s. 54-58). Vidare såg det òg ut til at han skjøna at dette vart gjort for å kunna omforma uttrykket i det neste steget. Sjølv om Tom antakeleg forstod dette, fortalte han at det følgjande stoppa han

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(u(x+\Delta x) - u(x)\big) \cdot v(x+\Delta x) + u(x) \cdot \big(v(x+\Delta x) - v(x)\big)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x+\Delta x) + u(x) \cdot \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right).$$

Om dette fortalte Tom at: «*frå her frå, ned hit. Han satt parentes på heile, det var litt langt. Ja, det var den delen eg vart litt forvirra*». Tom vart difor truleg forvirra av at uttrykket var for langt, noko som ikkje var svært overraskande då han hadde indikert teikn til mangelfull forståing for algebraisk symbolbruk og mangelfull forståing for transformativ algebra tidlegare i intervjuet. Igjen kan det difor tenkjast at mangelfull algebraforståing kunne hindra eleven i å forstå ein del av beviset. Til dømes kan ein stilla spørsmål ved om Tom hadde forstått kva som hadde skjedd om det var færre symbol i uttrykket, om det dømevis hadde stått

$$\frac{(a-b)\cdot c+b\cdot(c-d)}{e}=\frac{a-b}{e}\cdot c+b\cdot\frac{c-d}{e}\text{ eller }\frac{(1-2)\cdot 3+2\cdot(3-4)}{5}=\frac{1-2}{5}\cdot 3+2\cdot\frac{3-4}{5}\,.$$

4.3.2 Beviset for formelen for avstanden mellom eit punkt og plan

Det andre beviset er henta frå elevane si noverande R2-lærebok (Oldervoll et al., 2015, s. 212-213), og i beviset skulle ein vise at avstanden h frå eit punkt $P(x, y, z)$ til eit plan α gitt ved $ax + by + cz + d = 0$ er $h = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, sjå vedlegg 5.

Temaet rundt beviset var truleg friskt i minnet då elevane nettopp hadde hatt prøve om kapitelet, og alle informantane fortalte at dei kjente igjen beviset. Eg håpa difor at det ville frigjera arbeidsminnekapasitet, då det kan tenkjast at dei hugsa ein del av reglane frå kapittelet (Merriënboer & Sweller, 2005, s. 149), og at det difor kunne vera lettare for elevane å snakka om, og forstå beviset. Igjen vil eg merkja at dette beviset fekk mindre del av masteravhandlinga enn det andre beviset, både fordi eg brukte mindre tid på det, men òg fordi eg opplevde at truverdet vart svekka på grunn av eit noko snevert datamateriale. Likevel vil eg trekkja fram nokre delar av datamaterialet, då det potensielt kan gje ein viss indikasjon på temaet.

Den fyrste delen av beviset, som eg intervjua elevane om, handla om elevane skjønte kva $\vec{n} = [a, b, c]$ og $P_0(x_0, y_0, z_0)$ var. Då eg spurde informantane om dette fekk eg inntrykk av at dei til ein viss grad skjønte kva symbola tyda. Til dømes fortalte Kjetil «*Ja, altså det, det er det du treng for å då lage eit plan*». Då eg spurde Karl om han visste kva symbolet 0 i punktet $P_0(x_0, y_0, z_0)$ tydde, svara han: «*[...] så har du x_0, y_0, z_0 for å vise at de høyrer til P_0, så kan du gjera det same med P_1, P_2, P_3, berre for å* *vise at det høyrer til det punktet*». Desse sitata gjev indikasjon på at elevane hadde ein viss forståing for kvifor $\vec{n}$ og $P_0(x_0, y_0, z_0)$ var brukt i beviset. Som tidlegare skrive kan forståing for algebraiske symbol vera avgjerande for algebrakompetanse (English & Warren, 1998, s. 166; Hiebert & Lefevre, 1986, s. 10; Naalsund, 2012, s. 33). Vidare er tilstrekkeleg kunnskap nødvendig for å resonnera, og resonnering kan vera viktig for å forstå bevis (Alexander et al., 1997, s. 124; Kilpatrick et al., 2001, s. 130, 146; Niss & Jensen, 2002, s. 54). Det kan difor henda at elevane si forståing av desse symbola gav dei mogelegheit til å forstå beviset.

Vidare vil eg gå inn på den andre delen av beviset. Eg ville då innhenta informasjon om elevane forstod at det var likninga for planet α og punktet $P_0(x_0, y_0, z_0)$ som var brukt i likninga

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0.$$

Isak gav inntrykk av at han forstod kva dette tydde, då han fortalte «*jo, det er, det same som står her oppe då [$ax + by + cz + d = 0$], berre at dei har satt inn*». Det kan difor sjå ut til at hans forståing for transformativ algebra og symbolbruk gav han mogelegheit til å forstå denne delen av beviset (Alexander et al., 1997, s. 124; Kieran, 2007, s. 714; Kilpatrick et al., 2001, s. 130, 146; Lagrange, 2002, s. 163, sitert og omset i Kieran, 2007, s. 714; Niss & Jensen, 2002, s. 54-58). Andre elevar såg ut til å forstå mindre, det er følgande samtale og det påfølgjande sitatet eit døme på:

> *Intervjuar: Forstår du kva dei gjer der [del 2 av beviset]?*
> *Kjetil: Ja, då gongar du inn normalvektoren med punktet, startpunktet*
> *Intervjuar: [...] Kvar får dei d-en frå?*
> *Kjetil: Eh, d-en vert jo det 0 vert då, (...) eller viss du tar, la meg sjå*

Kjetil såg ikkje ut til å skjøne dette, og samtalen gjekk vidare:

> *Intervjuar: Viss du ser heilt øvst her så står det «eit plan α har likninga dette [$ax + by + cz + d = 0$]»*
> *Kjetil: Ja, så skal me finna eit punkt til planet. Ja, det vert, eh, vert det då (...), eh (...) eh (...). Ja, kvar fekk dei d frå? Lat meg sjå, (...) for normalvektoren (...) eh, vert ikkje det då, eg trur d er då (...) sluttpunktet (...) på, eh, vektoren.*

I intervjuet med Tom fortalte han:

> *På grunn av a, b og c er jo sjølve normalvektoren som me har her, den vert satt inn med den, og den d-en må me finna ut av ved, eh, det var den einaste, det var det einaste grunnen til at eg ikkje hugsar den, var at eg veit ikkje korleis dei finn ut d-en.*

Eg opplever det som noko utydeleg kva Kjetil og Tom prøvde å forklara her, men likevel tolkar eg det som at dei ikkje forstod at ein sat inn $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i likninga for planet α. Verken utan hjelp, eller med hint om at dei kunne sjå på likninga for planet α, såg det ut til at desse to elevane skjønte dette. Som nemnt før indikerte begge desse elevane teikn til mangelfull forståing for transformativ algebra og symbolbruk, og det kan difor tenkjast at dette hindra dei i å resonnera og vidare forstå beviset (Alexander et al., 1997, s. 124; Kieran, 2007, s. 714; Kilpatrick et al., 2001, s. 130, 146; Lagrange, 2002, s. 163, sitert og omset i Kieran, 2007, s. 714; Niss & Jensen, 2002, s. 54-58).

5 Drøfting av hovudfunn

I dette kapittelet vil eg trekkja fram fire hovudfunn og drøfta dei. Dei tre fyrste funna har samanheng med forskingsspørsmåla som omhandlar 1) forståing av algebraisk symbolbruk, 2) forståing av transformativ algebra og 3) følgjer av elevane si forståing i møte med bevis. Det siste hovudfunnet svarar på problemstillinga: «*Korleis kan algebrakompetansen til elevar i matematikk R2 påverka deira mogelegheiter til å utvikla matematisk forståing?*». Ettersom forskingsspørsmål ein og to legg grunnlaget for å svara på det tredje forskingsspørsmålet, og fordi det sistnemnde forskingsspørsmålet kan leggja grunnlaget for å svara på problemstillinga, vil dette kapittelet i hovudsak fokusere på funna tilknytt forskingsspørsmål tre og problemstillinga.

Før eg går inn på funna, vil eg igjen merkja at denne studien ikkje gjev eit fullstendig bilete av elevane si forståing for, og kompetanse i algebraisk symbolbruk og transformativ algebra, og heller ikkje eit fullstendig bilete av korleis algebraforståinga og algebrakompetansen påverkar elevane i å forstå bevis. Likevel kan resultata gje ein indikasjon på deira forståing, og med dette som utgangspunkt kan ein adressera problemstillinga.

5.1 Funn 1: Teikn til mangelfull konseptuell kunnskap for algebraisk symbolbruk

I tråd med Hiebert og Lefevre (1986, s. 3-4) og Hiebert og Carpenter (1992, s. 67-78) såg eg etter teikn til konseptuell kunnskap eller mangelfull konseptuell kunnskap for bruk av symbolklassane variablar, parameterar og konstantar for å svara på det fyrste forskingsspørsmålet. Det fyrste funnet eg vil trekkja fram har samanheng med dette forskingsspørsmålet, og omhandlar at utvalet av R2-elevar i denne studien indikerte fleire teikn til mangelfull konseptuell kunnskap for bruken av variablar, parameterar og konstantar.

Dette funnet kom blant anna til syne gjennom teikn til at elevane var avhengige av visse symbol for å klare nokre av oppgåvene. Til dømes gav datamaterialet indikasjon på at elevane hadde fleire utfordringar med å finna nullpunkta til eit polynom med variabelen a og parameteren b, enn for eit polynom med variabelen x. Fordi det kan tenkjast at desse elevane ikkje klarte å tilpasse kompetansen om variabelen x til variablar representert med andre bokstavar, hadde dei mogeleg mangelfullt kunnskapsnettverk, og dette vart difor sett på som teikn til mangelfull konseptuell kunnskap (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 67-76).

Vidare gav datamaterialet indikasjon på mangelfull konseptuell kunnskap grunna utfordringar tilknytt algebraisk symbolbruk i derivasjon og transformerande aktivitetar. Dømevis kom dette fram gjennom utfordringar tilknytt abstraksjonsnivået til variablar, og ukonsekvent og feil bruk av konstantar, parameterar og/eller variablar. Desse indikasjonane stemmer overeins med tidlegare forsking. Stedøy et al. (2017, s. 202) hevdar at elevar kan oppleva det vanskeleg å forstå og bruka abstrakte symbol, som parameterar og variablar, og Hole et al. (2020, s. 1) skriv at når analyse møter algebra, kan studentar oppleva problem tilknytt det matematiske språket. At datamaterialet indikerte mangelfull konseptuell kunnskap for bruken av variablar, parameterar og konstantar var difor ikkje svært overraskande.

På den andre sida kom det i analysen fram indikasjonar på teikn til konseptuell kunnskap for algebraisk symbolbruk. Til dømes fortalte den eine informanten at ein måtte «*gjort det med* n» for at svaret skulle gjelde alle naturlege tal. Fordi det er rimeleg å tru at denne eleven trakk koplingar mellom det generelle, det algebraiske symbolet n og eigenskapane til n, vart dette sett på som teikn til konseptuell kunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3-4). Sjølv om analysen gav flest indikasjonar på mangelfull forståing for algebraisk symbolbruk, fantes det difor òg indikasjonar som braut med dette mønsteret.

5.2 Funn 2: Teikn til mangelfull og instrumentell forståing for transformativ algebra

For å svara på det andre forskingsspørsmålet ville eg, med utgangspunkt i Skemp (1976), sjå på om datamaterialet indikerte teikn til mangelfull, instrumentell eller relasjonell forståing for transformativ algebra. Sjølv om nokre delar frå denne analysen vart sett på som teikn til relasjonell forståing, gav datamaterialet i hovudsak indikasjonar på teikn til mangelfull og instrumentell forståing for transformativ algebra, og det andre funnet omhandlar dette.

Som tidlegare skrive, såg det ut til at elevane kunne utføre transformative rekneoperasjonar riktig, utan å vite kvifor dei fungerte. Til dømes fortalte ein elev at han ikkje visste om $\sqrt{6x}$ var det same som $(6x)^{\frac{1}{2}}$ eller $(6x)^{-\frac{1}{2}}$. Likevel såg det ut som at han brukte den riktige omgjeringa: $\sqrt{6x} = (6x)^{\frac{1}{2}}$. Ifølgje Kieran (2007, s. 714) er dette transformativ algebra, og slike tilfelle vart difor sett på som teikn til instrumentell forståing for transformativ algebra (Skemp, 1976).

Instrumentell forståing kan vera enklare å gløyma enn relasjonell forståing (Skemp, 1976, s. 23-24). Det er difor rimeleg å tru at det er større sannsyn for at elevane gløymer eller dannar misoppfatningar (Brekke, 2002, s. 10), og vidare får mangelfull forståing om dei tidlegare har arbeida instrumentelt, og ikkje relasjonelt. Ein av informantane påpeika òg dette ved å fortelja at han opplevde det som vanskeleg å hugsa alle reglane dei hadde lært dei siste åra når han berre hadde memorert dei.

I forlenging av dette kan det trekkjast fram at datamaterialet gav fleire indikasjonar på teikn til mangelfull forståing for transformativ algebra. Som tidlegare skrive utførte nokre elevar transformative rekneoperasjonar feil, til dømes brukte ein elev at $a(b+c)^n = (ab+ac)^n$, og ein anna elev at $x^{-a} = \frac{a}{x}$. Vel å merkja er dette riktig når $a = 1$, men elevane brukte likskapane i tilfelle der det ikkje stemte. Eg fekk ikkje inntrykk av at desse elevane skjøna at dette var feil, og sidan elevane difor såg ut til å ha utfordringar tilknytt omgjering av uttrykk til ein ekvivalent form, vart dette sett på som ein indikasjon på mangelfull forståing for transformativ algebra (Kieran, 2007, s. 714).

Som tidlegare skrive fann Pedersen (2014, s. 66-67) ein tendens til at R2-elevane i hennar studie presterte svakt om det vart stilt høge krav til symbolmanipulering, og ifølgje Kieran (2007, s. 714) omhandlar dette transformerande aktivitetar. Pedersen (2014, s. 66-67) sitt funn tyder difor på at elevane kunne prestere svakt i transformerande aktivitetar, og dette er delvis samanfallande med mitt funn som omhandlar at elevane hadde mangelfull forståing for transformativ algebra.

5.3 Funn 3: Teikn til at mangelfull algebraforståing hindra elevar i å forstå matematiske bevis i skulesamanheng

Resultat i denne studien gav indikasjon på at elevar si algebraforståing kan gje mogelegheit til å forstå delar av bevis. Til dømes såg det ut til at to av elevane såg at $f = u \cdot v$ vart brukt for å utføre den transformative rekneoperasjonen

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}. \qquad \text{(sjå vedlegg 4)}$$

For å skjøne denne bevisdelen kan det tenkjast at elevane blant anna brukte symbolforståing og transformativ algebra. Det er i forlenging av dette rimeleg å tru at dei hadde tilkoplingar mellom desse to kunnskapsområda, og at dei difor brukte forståing for å skjøne denne bevisdelen (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 67).

Sjølv om datamaterialet gav teikn til mogelegheiter, viste resultata i hovudsak teikn til det motsette. Det tredje funnet eg vil trekkja fram er difor at resultata i denne studien tyda på at mangelfull algebraforståing hindra elevar i å forstå bevis. Med andre ord såg det ut til at forståing for dei to bevisa som vart brukt i studien mogeleg kravde algebraforståing. Dette argumenterer eg for då datamaterialet indikerte teikn til at elevane ikkje forstod delar av bevis som såg ut til å krevja algebraisk forståing. Til dømes, som lagt fram i kapittel 4, såg det ut til at to av elevane ikkje klarte å sjå at punktet $P_0(x_0, y_0, z_0)$ vart sat inn i planet α, i beviset for avstanden mellom punkt og plan, sjå vedlegg 5. Ifølgje Kieran (2007, s. 714) er dette transformativ algebra. I tillegg vart det peika på fleire indikasjonar på mangelfull forståing for transformativ algebra tilknytt desse elevane. Om elevane hadde hatt ei større forståing for dette, kunne antakeleg sannsynet for å forstå denne transformative rekneoperasjonen auka. Det er difor rimeleg å tru at mangelfull forståing for transformativ algebra hindra elevane i å forstå bevis. Vidare vil eg trekkja fram tre element som særleg såg ut til å hindra elevane i å forstå bevis.

For det fyrste tyder det på at dersom transformerande rekneoperasjonar i bevis inneheld relativt mange algebraiske symbol, kan det hindra elevane i å forstå dei. Dette kom til dømes til syne ved at ein elev fortalte at han hadde skjøna den transformerande rekneoperasjon om det hadde stått

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - 1 + 1 - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

i staden for

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} \quad (2)$$

i beviset. Som tidlegare skrive hevdar Hiebert og Carpenter (1992, s. 75-76) at det er umogeleg å bli kompetent i matematikk om ein har behov for ein ny strategi for kvart problem. På den andre sida legg dei fram at forståing kan auka sjansen for at elevar klarar å bruka kunnskap i nye situasjonar. I situasjonen over kan det sjå ut til at eleven hadde utfordringar tilknytt uttrykket med relativt mange algebraiske symbol, men mindre utfordringar tilknytt uttrykket som inneheldt færre symbol. Dette ser ut til å vera tilfelle sjølv om begge dei transformerande rekneoperasjonane kan forklarast med same grunn: omgjeringa er korrekt fordi ein trekkjer frå og legg til det same. I tillegg indikerte datamaterialet òg at denne eleven hadde teikn til mangelfull algebraforståing for symbolbruk og transformativ algebra. Det kan difor verkja som at fordi eleven mogeleg hadde mangelfull algebraforståing for symbolbruk og transformativ algebra, klarte ikkje eleven å bruka kunnskapen han brukte i (1) til å forklara den transformerande rekneoperasjonen i (2), og at det difor hindra han i å forstå denne bevisdelen.

For det andre tyda resultata på at elevane i studien hadde mangelfull forståing for abstraksjonsnivået til algebraiske symbol, og at dette hindra dei i å forstå bevis. Dette kom blant anna til syne ved at ein elev fortalte at han opplevde det eine beviset som vanskeleg fordi han ikkje visste «*kva dei forskjellege tinga tyder. Eg veit ikkje kva v-ane og u-ane er*». Som tidlegare skrive, kan ein kort sagt seie at variablar varierer over ulike typar mengder, som reelle tal, funksjonar og matriser (Shoenfield, 1967). Ein kan seie at variablar har ulike abstraksjonsnivå. I sitatet over viser eleven til variablane u og v som står for deriverbare funksjonar. Desse variablane har eit anna abstraksjonsnivå enn variablar som står for reelle tal. Sidan denne eleven peikte på at han ikkje skjønte kva *v-ane og u-ane* var, kan det vitna om at han sleit med å forstå abstraksjonsnivået for variablane, og at det hindra han i å forstå beviset. Eit anna døme på at elevane hadde utfordingar tilknytt variablar som ikkje varierte over reelle tal, kom til syne ved at fleire av elevane ikkje såg ut til å tolke og bruka $g'(u(x))$ riktig i kjerneregelen.

Vidare må ein i nokre oppgåver behandla konstantar, parameterar og variablar ulikt. Sjølv om desse variablane i nokre tilfelle berre varierer over reelle tal, kan ein òg knytte dette til abstraksjonsnivå, då bruken av dei ulike symbola varierer. I studien tyda det på at elevane òg kunne ha utfordringar tilknytt dette, til dømes i derivasjon. Som tidlegare skrive, er tilstrekkjeleg kunnskap nødvendig for å ressonere, og ressonering kan vera viktig for å forstå bevis (Alexander et al., 1997, s. 124; Kilpatrick et al., 2001, s. 130, 146; Niss & Jensen, 2002, s. 54). I denne studien indikerte informantane teikn til mangelfull konseptuell kunnskap om algebraisk symbolbruk. I tillegg er det ei kjent utfordring at elevar kan ha problem med å forstå og bruka abstrakte symbol (Stedøy et al., 2017, s. 202). I forlenging av dette, og det førre avsnittet er det rimeleg å tru at utfordringar relatert til mangelfull forståing for abstraksjonsnivået til symbol hindra elevane i å forstå bevis.

Det tredje elementet som særleg såg ut til å hindra elevane i studien i å forstå bevis har tilknyting til det Høines (2020, s. 122-134) omtalar som språk av 1. og 2. orden. Datamaterialet i denne studien indikerte at elevane var avhengig av å nytta visse algebraiske symbol, som x som variabel i polynom, for å meistre oppgåver. I tillegg tyda det på at elevane hadde fleire utfordringar tilknytt oppgåver med ukonvensjonell symbolbruk, enn konvensjonell. Det kan ut frå dette tenkjast at elevane hadde språk av 2. orden når notasjon var ukonvensjonell, som ved bruk av a som variabel i oppgåve 1, medan språk av 1. orden når notasjonen var konvensjonell, som ved bruk av x som variabel. Tilsvarande som Høines (2020. s. 127) skriv, kan det sjå ut til at dei trong eit omsetjingsledd frå 1. orden, i dette tilfellet x, for å bruka variabelen a i oppgåva, og at dei med andre ord ikkje hadde direkte kontakt med meiningsinnhaldet til variablar. Det kan difor tyda på at elevane hadde språk av 2. orden.

Som tidlegare peika på kan språk av 2. orden vera uheldig då til dømes «*vanskeleg tenking*» krevjar språk av 1. orden, og vidare kan språk av 2. orden fungere dårleg som eit tenkjereiskap (Høines, 2020, s. 128). Om elevar har språk av 2. orden og i tillegg opplever bevis som kompliserte, er det rimeleg å tru at dei vil få utfordringar med å bruka språket som eit tenkjereiskap, og at dei dermed kan få problem med å skjøna bevis. I kapittel 4 vart fleire indikasjonar på mangelfull forståing for algebraisk symbolbruk peika på. Denne indikasjonen kan ha samanheng med at dei truleg ikkje hadde språk av 1. orden, og at dette vidare hindra dei i å «*tenkja vanskeleg*». Summert opp kan det tyda på at elevar med mangelfull forståing for algebraisk symbolbruk, kan hindrast i å forstå matematiske bevis i skulesamanheng.

5.4 Funn 4: Mangelfull algebrakompetanse kan hindra utvikling av matematisk forståing på R2-nivå

Som framheva i kapittel 2 kan kunnskap utan forståing vera fordelaktig, til dømes kan prosedyrar verta gjennomført raskt og med lite mental kapasitet (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 78). I tillegg kan slik kunnskap frigjere arbeidsminnekapasitet, og den frigjorte kapasiteten kan då brukast til meir avansert problemløysing (Merriënboer & Sweller, 2005, s. 149). På den andre sida kan kunnskap utan forståing gløymast fortare, og fordelane kan difor vara i eit korttidsperspektiv. Ifølgje Hiebert og Carpenter (1992, s. 74-75) kan fordelane med forståing vara i ein lengre periode, då ein kan hugsa betre og då mengda ein må hugsa vert redusert med forståing. I tillegg skriv dei at forståing kan generere meir forståing og auka sjansen for overføring.

R2-elevar som følјer LK06 har fått relativt mykje undervisning i algebra opp gjennom skulegangen, då algebra har vore sentralt i fleire matematikkfag i LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2006b, 2006c). Dersom ein ikkje har forståing, og då ikkje fordelane som kan følgja med, kan ein antakeleg gløyme kunnskapen fortare, ein må kanskje hugsa meir, og det kan vera vanskelegare å overføre kunnskapen til andre situasjonar (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 74-46). Ein kombinasjon av mykje undervisning i algebra og mangelfull forståing kan difor føra til at elevane ikkje klarar å hugsa all kunnskapen. Vidare kan dette mogeleg fremja mangelfull algebrakompetanse, som igjen kan føra til utfordringar. Særleg sidan grunnleggjande kunnskapar i algebra kan vera naudsynt for å lære anna matematikk (Grønmo, 2017, s. 52-54).

Niss og Højgaard (2019, s. 20-21) legg fram at algebraforståing kan bli sett på som ein del av algebrakompetanse. Ein kan ut frå dette seie at datamaterialet i denne studien viste indikasjonar på at elevane hadde mangelfull algebrakompetanse, då indikasjonar på teikn til mangelfull algebraforståing er vist i denne masteravhandlinga. At norske elevar har mangelfull algebrakompetanse vert òg støtta opp av tidlegare forsking (sjå til dømes Grønmo, Hole, et al., 2017 og Mullis et al., 2016a, 2016b).

Denne studien har indikert at elevar si algebraforståing kan gje mogelegheiter til å forstå bevis, men likevel viste resultata i hovudsak indikasjonar på det motsette, at elevane vart hindra i å forstå bevis grunna mangelfull algebraforståing. Vidare kan forståing, som tidlegare skrive, bli sett på som ein del av matematisk kompetanse, og ein måte å oppnå forståing på er gjennom bevis (Dickerson & Doerr, 2014; Hanna, 2000; Rav, 1999; Niss & Højgaard, 2019, s. 20-21). I forlenging av dette og funna i denne studien, *kan det difor tyda på at mangelfull algebrakompetanse kan hindra elevar sine mogelegheiter til å utvikla forståing for matematiske tema i matematikk R2*. Dette hovudfunnet samsvarar delvis med tidlegare forsking. Til dømes hevdar Kilpatrick (et al., 2001, s. 122) at å utvikla forståing for mange matematiske konsept krevjar eit visst ferdighetsnivå.

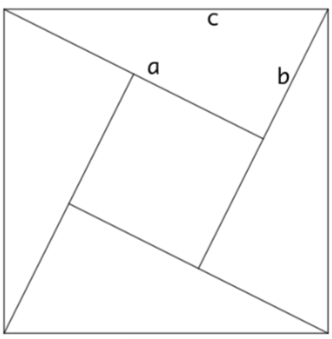
Ut frå dei førre avsnitta er det òg rimeleg å tru at algebrakompetanse, i nokre situasjonar, kan vera ein nødvendig føresetnad for utvikling av matematisk forståing. Likevel er det viktig å merkja at ein ikkje kan betrakta algebrakompetanse som ein tilstrekkeleg føresetnad, då andre faktorar som motivasjon og meistringsforventning kan påverka forståingsutviklinga (Maxwell, 2004; Skaalvik & Skaalvik, 2018, s. 189).

Vidare kan det tenkjast at mangelfull algebrakompetanse kan gje ein sjølvforsterkande effekt, dette vil eg no forklara. Sidan resultata i denne studien tyder på at mangelfull algebrakompetanse kan hindra elevar i å utvikle forståing, kan det henda at mangelfull forståing for symbolbruk kan hindra elevane i å utvikla forståing for transformativ algebra (Niss & Højgaard, 2019, s. 20-21). Å forstå transformativ algebra vil antakeleg vera vanskeleg om elevar hoppar over eit forståingsledd, som den syntaktiske forståinga av symbol. Til dømes, som tidlegare skrive, var det truleg fleire elevar som ikkje såg at ein mista ei løysing når ein delte på x i oppgåve 4 i oppgåvesettet. Dette vart sett på som ein indikasjon på mangelfull forståing for transformativ algebra, då elevane såg ut til å ha utfordringar tilknytt likningsløysing (Kieran, 2007, s. 714). Dei same elevane viste òg primært teikn til mangelfull konseptuell kunnskap for algebraisk symbolbruk. Om elevane i staden hadde indikert flest teikn til konseptuell kunnskap for algebraisk symbolbruk, og hadde danna nettverk som gjorde at dei skjøna at dei måtte ta omsyn til løysinga $x = 0$ når dei delte på x (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3-4), hadde dei truleg hatt større sjanse for å forstå den transformerande rekneoperasjonen.

Motsett kan det tenkjast at dersom elevar har mangelfull kompetanse om transformativ algebra, kan det vera til hinder for å utvikla konseptuell kunnskap om algebraisk symbolbruk. Dette kan vera sannsynleg då misoppfatningar ofte vert danna som eit resultat av overgeneralisering (Brekke, 2002, s. 10). Om elevar har mangelfull kunnskap om transformativ algebra, kan elevane kanskje ha lettare for å overgeneralisera. Dannar elevane då misoppfatningar, kan det henda at det vil vera vanskelegare å konstruera nye korrekte kunnskapsrelasjonar, og dermed vanskelegare å utvikla forståing (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 69). Det kan difor tyda på at mangelfull kompetanse om transformativ algebra kan hindra utviklinga av konseptuell kunnskap for algebraisk symbolbruk.

I forlenging av dette kan mangelfull kompetanse om algebraisk symbolbruk mogeleg hindra elevar i å utvikla relasjonell forståing for transformativ algebra, og at mangelfull kompetanse i transformativ algebra kan hindra utvikling av konseptuell kunnskap for symbolbruk. Det kan difor tenkjast at mangelfull algebrakompetanse kan gje ein sjølvforsterkande effekt, og vidare hindra forståingsutviklinga i større og større grad.

Vidare er det rimeleg å tru at mangelfull algebrakompetanse ikkje vil vera eit veldig stort problem i dei fyrste åra av algebrainnlæringa. Til dømes treng ein mogeleg ikkje mykje algebrakompetanse for å kunna finne arealet av ein trekant ved bruk av formelen $A = \frac{g \cdot h}{2}$. Vidare kan det tenkjast at det vil vera viktigare med algebrakompetanse lenger ut i skuleløpet. Til dømes kan algebrakompetanse vera viktig for å skjøne bevis for Pytagoras setning. Kort fortalt kan ein ut frå eit kvadrat som inneheld fire rettvinkla trekantar og eit mindre kvadrat, sjå Figur 5.1, bevisa Pytagoras setning ved å rekna ut arealet av det minste kvadratet to gongar. Ein kan då bruka algebraiske symbol og transformativ algebra for å vise



Figur 5.1: Hjelpefigur for beviset for Pytagoras setning.

setninga, og for å skjøne dette beviset er det difor rimeleg å tru at det er viktig med algebraisk kompetanse.

Det kan tenkjast at utfordringane tilknytt mangelfull algebrakompetanse kan slå inn frå omtrent 10. trinn. På dette tidspunktet har elevar hatt algebraundervisning i fleire år (Utdanningsdirektoratet, 2006b), og mange resonnement på dette nivået vil truleg basera seg på algebraisk symbolbruk og transformativ algebra. Ettersom fag byggjer på kvarandre, og dermed kan krevja høgare og høgare kompetanse (Utdanningsdirektoratet, 2006b), vil mangelfull kompetanse i algebraisk symbolbruk og transformativ algebra antakeleg hindra elevane meir og meir. Det kan merkjast at Hole et al. (2020, s. 7) peikar på eit liknande funn, dei hevdar at mangelfull evne til å behandla det syntaktiske abstraksjonsnivået til variablar kan hindra elevar i å løysa problem. Vidare vil problemet truleg ikkje stoppa på vidaregåande. Nortvedt og Siqveland (2019) kan delvis bekrefta dette resonnementet, då dei hevdar at mangelfull forståing og dårleg flyt ved bruk av det algebraiske språket kan hindra studentar si læring på høgare utdanning.

Vidare, som tidlegare skrive peikar Gravemeijer et al. (2017) på at verda vert meir og meir teknologisk og digitalisert, og at fokuset i skulematematikken bør liggja på kompetanse som kompletterer i staden for å konkurrere med teknologien. Fordi maskinar i aukande grad vert brukt i samband med matematikk, kan ein diskutere viktigheita av skulealgebra. Til dømes kan ein ved bruk av rekneverktøyet CAS manipulere algebraiske symbol, uttrykk og likningar (Davis & Fonger, 2015, s. 240), og transformativ algebra kan difor bli gjort med hjelp av CAS (Kieran, 2007, s. 714). Ein kan då stilla spørsmål om fokus på transformativ algebra i skulen er viktig i ei teknologisk og digitalisert verd. På den andre sida tyder denne studien på at mangelfull kompetanse i transformativ algebra kan hindra elevar i å utvikla forståing for matematiske tema på R2-nivå. Gravemeijer et al. (2017) peikar på at for å komplettera i staden for å konkurrere med teknologien, bør ein blant anna ha fokus på å forstå matematikken i datamaskinane. Dersom skulen ikkje har fokus på å utvikla kompetanse i transformerande aktivitetar, og elevane difor ikkje får øving i å bruka og forstå transformativ algebra, kan det med bakgrunn i funna i denne studien tenkjast at elevane vert hindra i å forstå sentrale matematiske område, og at dei då òg kan bli hindra i å forstå matematikken i datamaskinane. I forlenging av dette vil eg difor argumentere for at det er viktig å ha eit fokus på transformativ algebra i skulematematikken.

Til slutt i dette kapittelet vil eg merkja at sjølv om denne studien peikar på verdien av algebraisk forståing, i form av konseptuell kunnskap og relasjonell forståing, kan prosedural kunnskap og instrumentell forståing òg vera viktig for å utvikla matematisk kompetanse. Som tidlegare skrive har både prosedural og instrumentell forståing fordelar, og vidare er både konseptuell og prosedural kunnskap naudsynt for å oppnå matematisk kompetanse (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 78; Hiebert & Lefevre, 1986, s. 9; Skemp, 1976).

6 Konklusjon

I denne studien har eg undersøkt korleis algebrakompetansen til elevar påverkar utviklinga av matematisk forståing ved å ta utgangspunkt i følgjande problemstilling:

> *Korleis kan algebrakompetansen til elevar i matematikk R2 påverka deira mogelegheiter til å utvikla matematisk forståing?*

For å undersøkja dette innhenta eg svar på eit oppgåvesett frå 16 elevar i matematikk R2, og 4 av desse elevane vart intervjua. Oppgåvesettet og elevsvara på dei vart brukt som artefaktar i intervjua. Datamaterialet som desse metodane gav vart analysert og diskutert opp mot tidlegare forsking og teori.

I denne studien er fire hovudfunn trekt fram. Det fyrste funnet peikar på at elevane i studien i hovudsak indikerte teikn til mangelfull konseptuell kunnskap for bruken av variablar, parameterar og konstantar. Dette kom blant anna til syne ved at det såg ut til at elevane kunne oppleva utfordringar i oppgåver med noko ukonvensjonell symbolbruk. I tillegg såg det ut til at dei hadde utfordringar tilknytt abstraksjonsnivået til variablar. Det andre funnet omhandla at datamaterialet i hovudsak indikerte teikn til instrumentell og mangelfull forståing for transformativ algebra. Elevane såg ut til å ha utfordringar med å gjera om uttrykk til ein ekvivalent form, og å bruka algebraiske symbol på ein riktig måte i transformative rekneoperasjonar. Det tredje funnet hadde utgangspunkt i dei to fyrste, og indikerte at elevane hadde utfordringar med å forstå bevis på grunn av deira mangelfulle algebraforståing. Særleg kom dette til syne når elevane skulle skjøne transformative rekneoperasjonar med relativt mange symbol, eller når dei ikkje skjøna kva algebraiske symbol tyda eller kvar dei kom frå. Det siste funnet svara på problemstillinga, og hadde bakgrunn i dei tre fyrste funna, tidlegare forsking og teori (sjå dømevis Alexander et al., 1997, s. 124; Dickerson & Doerr, 2014; Hanna, 2000; Kieran, 2007, s. 714; Kilpatrick et al., 2001, s. 130, 146; Lagrange, 2002, s. 163, sitert og omset i Kieran, 2007, s. 714; Niss & Jensen, 2002, s. 54-58; Rav, 1999). Dette funnet indikerte at mangelfull algebrakompetanse kan hindra elevar sine mogelegheiter til å utvikla forståing for matematiske tema i matematikk R2. Vidare i kapittelet vil eg trekkja ut og presentere didaktiske implikasjonar, studien sine avgrensingar og forslag til vidare forsking.

6.1 Didaktiske implikasjonar

Som tidlegare skrive kan ikkje funna i denne studien generaliserast, men likevel kan dei ha ein viss overføringsverdi (Gleiss & Sæther, 2021, s. 207; Thagaard, 2018, s. 181-182). Dette gjev difor didaktiske implikasjonar.

I LK20 vert djupnelæring meir vektlagt enn i LK06 (Kunnskapsdepartementet, 2018; Meld. St. 28 (2015–2016), s. 16). Skaalvik og Skaalvik (2018, s. 79) legg fram at djupnelæring kan fremja forståing. I denne studien tyder funn på at mangelfull algebraforståing kan vera til hinder for elevar, og fokus på djupnelæring kan difor vera viktig for å fremja forståing. Skaalvik og Skaalvik (2018, s. 81-84) peikar på korleis lærarar kan fremja djupnelæring, og eg vil trekkja fram nokre dømer. Dei legg fram at ein kan fremja dette ved å fokusera på fordjuping i lærestoffet over tid, som ved å bruka mange dømer på same fenomen. Dei skriv at lærarar bør ha fokus på aktiv elevdeltaking, at det er viktig at elevane utviklar sjølvregulerande ferdigheiter og at dei lærer å reflektera over eigen læring. I forlenging av dette er det rimeleg å tru at fokus på desse didaktiske praksisane kan fremja algebraforståinga til elevar.

Vidare tyder funn i denne studien på at mangelfull kompetanse for algebraisk symbolbruk og transformativ algebra kan hindra elevar i å utvikla matematisk forståing, og det kan difor vera viktig å heva algebrakompetansen til norske elevar. I denne samanhengen vil eg trekkja fram tre didaktiske implikasjonar.

For det fyrste vil eg trekkja fram behovet for fokus på forståing av, og kompetanse i transformerande algebraiske aktivitetar i skulen. Som eg argumenterte for tidlegare, kan dette vera viktig for å utvikla forståing for matematiske områder, og fokus på dette i skulen bør difor truleg vera sentralt. For det andre kan det vera tidkrevjande for elevar å oppnå forståing for algebraiske symbol (Sfard, 1995, s. 25-26). For å heva algebrakompetansen kan det mogeleg vera viktig at lærarar legg opp undervisninga med blant anna dette som grunnlag. For det tredje kan lærarar ifølgje Høines (2020, s. 122-134) påverka assosiasjonane elevane får til algebraiske symbol, og i forlenging av dette og som tidlegare skrive, kan språk av 2. orden antakeleg hindra elevar i å utvikla matematisk forståing. Det kan difor vera viktig som lærar å tenkja gjennom korleis ein kan hjelpe elevar til å utvikla assosiasjonar til algebraiske symbol, som gjer at deira språk vert av 1. orden.

6.2 Studien sine avgrensingar og forslag til vidare forsking

Som tidlegare skrive har alle forskingsmetodar sterke og svake sider (Everett & Furseth, 2012, s. 128), og denne avhandlinga gjev ikkje svar på alle spørsmål rundt studien sitt tema. Eg vil avslutningsvis leggja fram nokre av avgrensingane til denne studien, og i tillegg peika på forslag til vidare forsking.

I denne studien har eg sett indikasjonar på at mangelfull algebrakompetanse kan hindra elevar i å utvikla forståing, men ikkje hatt fokus på korleis ein kan redusera hindringane. Studiar som set fokus på korleis ein kan arbeide mot dette kan difor vera interessant. Vidare er denne studien gjort med R2-elevar som tek fag tilknytt LK06. R2-elevar skal frå og med hausten 2022 gå over til den nye læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Det kan difor vera interessant å sjå på om R2-elevar som følgjer LK20 sin algebrakompetanse hindrar forståingsutviklinga i matematikk, og eventuelt sjå kva for nokre ulikheitar i læreplanane som kan ha endra resultatet. Til dømes kan ein sjå om fokuset på djupnelæring i LK20 har påverka resultata.

I analysen av denne studien såg eg at datamaterialet indikerte teikn til mangelfull konseptuell kunnskap for symbolbruk, og teikn til instrumentell og mangelfull forståing for transformativ algebra. I tillegg tyda det på at informantane hadde utfordringar tilknytt bevis som mogeleg kravde algebraforståing. Sjølv om datamaterialet gav fleire indikasjonar på at algebraforståinga og då algebrakompetansen hindra elevane i utvikling av forståing (Niss & Højgaard, 2019, s. 20-21), treng ikkje samanhengen å vera kausal. Det kan vera andre bakanforliggjande faktorar i denne kvalitative studien som kan ha påverka samanhengen mellom algebrakompetansen og elevane si utvikling av forståing (Maxwell, 2004). Til dømes kan motivasjon og meistringsforventning vera faktorar som spelar inn (Skaalvik & Skaalvik, 2018, s. 189). Meir omfattande studiar kan difor bli gjort for å få eit sikrare bilete av situasjonen, og vidare auka truverda. Til dømes kunne dette blitt gjort med eigna kvantitative studiar (Johnson, 2013, s. 279-280).

Til slutt vil eg igjen peika på at denne studien berre er gjort med ein klasse, utvalet er ikkje representativt og situasjonen kan ikkje generaliserast (Gleiss & Sæther, 2021, s. 207). Resultata i denne masteravhandlinga gjeld difor berre for dei faktiske informantane i denne studien. For å generalisera resultata kunne det difor vore interessant å undersøka liknande problemstillingar i kvantitative studiar med representative utval. I tillegg, når det gjeld påverkinga av algebraforståing har eg berre sett på bevis og resonnement, og studien er avgrensa av dette. Det kunne òg vore interessant å gjennomføra studiar som undersøkjer påverkinga på andre aspekt i skulematematikken, som til dømes problemløysing eller modellering.

Litteraturliste

Alexander, P. A., White, C. S. & Daugherty, M. (1997). Analogical Reasoning and Early Mathematics Learning. I L. D. English (Red.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images* (s. 117–147). Lawrence Erlbaum Associates.

Aubert, V. (1985). *Det skjulte samfunn* (Rev. av V. Aubert. Overs. av B. Alstad). Pax. (Opprinnelig utgitt 1965).

Bahn, S. & Barratt-Pugh, L. (2011). Getting reticent young male participants to talk: Using artefact-mediated interviews to promote discursive interaction. *Qualitative social work*, *12*(2), 186-199. https://doi.org/10.1177/1473325011420501

Befring, E. (2015). *Forskningsmetoder i utdanningsvitenskap*. Cappelen Damm Akademisk.

Black, P. & Wiliam, D. (2010). Inside the Black Box: Raising Standards through Classroom Assessment. *Phi Delta Kappan*, *92*(1), 81-90. https://doi.org/10.1177/003172171009200119

Boeije, H. (2009). *Analysis in Qualitative Research*. SAGE Publications Ltd.

Borge, I. C. & Hole, A. (2017). Et universitetsperspektiv på matematikk i TIMSS Advanced. I L. S. Grønmo & A. Hole (Red.), *Prioritering og progresjon i skolematematikken: En nøkkel til å lykkes i realfag. Analyser av TIMSS Advanced og andre internasjonale studier* (s. 239-256). Cappelen Damm Akademisk.

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk: Kartlegging av matematikkforståelse*. Utdanningsdirektoratet.

Creswell, J. W. & Miller, D. L. (2000). Determining Validity in Qualitative Inquiry. *Theory Into Practice*, *39*(3), 124-130. https://doi.org/10.1207/s15430421tip3903_2

Dalen, M. (2011). *Intervju som forskningsmetode: En kvalitativ tilnærming* (2. utg.). Universitetsforlaget.

Davis, J. D. & Fonger, N. L. (2015). An analytical framework for categorizing the use of CAS symbolic manipulation in textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 239-258. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9581-z

Dickerson, D. S. & Doerr, H. M. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(4), 711-733. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0091-6

Drijvers, P., Goddijn, A. & Kindt, M. (2011). Algebra education: Exploring topics and themes I P. Drijvers (Red.), *Secondary Algebra Education: Revisiting Topics and Themes and Exploring the Unknown* (s. 5-26). Sense Publishers.

Drouhard, J.-P. & Teppo, A. R. (2004). Symbols and Language. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (s. 227-264). Kluwer Academic Publishers.

English, L. D. & Warren, E. A. (1998). Introducing the Variable through Pattern Exploration. *The Mathematics Teacher*, *91*(2), 166-170. https://www.jstor.org/stable/27970471

Everett, E. L. & Furseth, I. (2012). *Masteroppgaven: Hvordan begynne - og fullføre* (2. utg.). Universitetsforlaget.

Gleiss, M. S. & Sæther, E. (2021). *Forskningsmetode for lærerstudenter: Å utvikle ny kunnskap i forskning og praksis*. Cappelen Damm Akademisk.

Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F.-L. & Ohtani, M. (2017). What Mathematics Education May Prepare Students for the Society of the Future? *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(1), 105-123. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9814-6

Gray, S. S., Loud, B. J. & Sokolowski, C. (2007, Februar). *Calculus Students' Difficulties in Using Variables as Changing Quantities* [Conference Proceeding]. Tenth Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education: Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, San Diego. https://scholarworks.merrimack.edu/mth_facpub/8/

Grønmo, L. S. (2017). Et matematikkdidaktisk perspektiv. I L. S. Grønmo & A. Hole (Red.), *Prioritering og progresjon i skolematematikken: En nøkkel til å lykkes i realfag. Analyser av TIMSS Advanced og andre internasjonale studier* (s. 45-61). Cappelen Damm Akademisk.

Grønmo, L. S., Hole, A. & Borge, I. C. (2017). Oppsummering og drøfting av hovedfunn. I L. S. Grønmo & A. Hole (Red.), *Prioritering og progresjon i skolematematikken: En nøkkel til å lykkes i realfag. Analyser av TIMSS Advanced og andre internasjonale studier* (s. 257-269). Cappelen Damm Akademisk.

Grønmo, L. S., Lindquist, M. & Arora, A. (2014). TIMSS Advanced 2015 Mathematics Framework. I I. V. S. Mullis & O. M. Martin (Red.), *TIMSS Advanced 2015 Assessment Frameworks* (s. 9-15). TIMSS & PIRLS International Study Center. https://timss.bc.edu/timss2015-advanced/downloads/TA15_FW_Chap1.pdf

Grønmo, L. S., Stedøy, I. M. & Hole, A. (2017). Oppgaver i algebra fra TIMSS Advanced 2015. I L. S. Grønmo & A. Hole (Red.), *Prioritering og progresjon i skolematematikken: En nøkkel til å lykkes i realfag. Analyser av TIMSS Advanced og andre internasjonale studier* (s. 117-148). Cappelen Damm Akademisk.

Grønmo, S. (2016). *Samfunnsvitenskapelige metoder* (2. utg.). Fagbokforlaget.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1), 5-23. https://doi.org/10.1023/A:1012737223465

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 65-97). Macmillan Publishing Company.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. I J. Hiebert (Red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* (s. 1-27). Lawrence Erlbaum Associates.

Hole, A., Borge, I. C. & Grønmo, L. S. (2020, 12–19 Juli). *From upper secondary school to university calculus: Language difficulties versus conceptual difficulties*. Paper presented på The 14th International Congress on Mathematical Education, Shanghai.

Høines, M. J. (2020). *Begynneropplæringen: Matematikkdidatktikk - barnetrinnet*. Caspar Forlag.

Johannessen, A., Tufte, P. A. & Christoffersen, L. (2016). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (5. utg.). Abstrakt forlag.

Johnson, R. B. & Christensen, L. (2013). *Educational Research: Quantitative, Qualitative, and Mixed Approaches* (5. utg.). Sage.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151. https://www.researchgate.net/publication/228526202_Algebraic_thinking_in_the_early_grades_What_is_it

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. I F. K. Lester (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 707-762). Information Age Publishing.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. National Academies Press.

Kleven, T. A. (2011). Data og datainnsamlingsmetoder. I T. A. Kleven & F. Hjardemaal (Red.), *Innføring i pedagogisk forskningsmetode: En hjelp til kritisk tolking og vurdering* (2. utg., s. 27-47). Fagbokforlaget.

Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W., Baumert, J., Brunner, M., Kunter, M. & Jordan, A. (2008). Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. *Journal für Mathematik-Didaktik 29*(3), 223–258. https://doi-org.ezproxy.uio.no/10.1007/BF03339063

Krumsvik, R. J. (2019). Kvalitative metodar i lærartdanninga. I R. J. Krumsvik (Red.), *Kvalitativ metode i lærarutdanninga* (s. 151-181). Fagbokforlaget.

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordna del – verdiar og prinsipp for grunnopplæringa*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen/id2570003/

Kunnskapsdepartementet. (2018, 26. juni). *Fornyer innholdet i skolen*.

https://www.regjeringen.no/no/dokumentarkiv/regjeringen-solberg/aktuelt-regjeringen-solberg/kd/pressemeldinger/2018/fornyer-innholdet-i-skolen/id2606028/?expand=factbox2606058

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (T. M. Anderssen & J. Rygge, Overs.; 3. utg.). Gyldendal akademisk. (Opprinnelig utgitt 2014).

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. I K. M. Hart (Red.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16* (s. 102-119). John Murray.

Larsen, A. K. (2017). *En enklere metode: Veiledning i samfunnsvitenskapelig forskningsmetode* (2. utg.). Fagbokforlaget.

Lee, C. (2006). *Language for Learning Mathematics: Assessment for Learning in Practice*. Open University Press.

Lindstrøm, T. (2016). *Kalkulus* (4. utg.). Universitetsforlaget.

Löwing, M. & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik: För skola, hem och samhälle*. Studentlitteratur.

Maher, C. A. & Sigley, R. (2020). Task-Based Interviews in Mathematics Education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 821-824). Springer. https://doi-org.ezproxy.uio.no/10.1007/978-3-030-15789-0_147

Martin, M. O., Mullis, I. V. S. & Hooper, M. R. (Red.) (2016). *Methods and Procedures in TIMSS Advanced 2015.* TIMSS & PIRLS International Study Center http://timss.bc.edu/publications/timss/2015-a-methods.html

Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2011). *Å lære algebraisk tenkning* (J. Lie, Overs.). Caspar forlag. (Opprinnelig utgitt 2005).

Maxwell, J. A. (2004). Causal Explanation, Qualitative Research, and Scientific Inquiry in Education. *Educational researcher*, *33*(2), 3-11. https://doi.org/10.3102/0013189X033002003

Meld. St. 28 (2015–2016). *Fag – Fordypning – Forståelse: En fornyelse av Kunnskapsløftet*. Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/contentassets/e8e1f41732ca4a64b003fca213ae663b/no/pdfs/stm201520160028000dddpdfs.pdf

Mellin-Olsen, S. (1981). Instrumentalism as an Educational Concept. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 351-367. https://doi.org/10.1007/BF00311065

Merriënboer, J. J. G. v. & Sweller, J. (2005). Cognitive Load Theory and Complex Learning: Recent Developments and Future Directions. *Educational Psychology Review*, *17*(2), 147–177. https://doi.org/10.1007/s10648-005-3951-0

Mevarech, Z. R. & Yitschak, D. (1983). Students' misconceptions of the equivalence relationship. I R. Hershkowitz (Red.), *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education; PME, International Group for the Psychology of Mathematics Education, VIIth Conference, Israel, 1983, July 24th-July 29th* (s. 313-318). Weizmann Institute of Science. https://weizmann.esploro.exlibrisgroup.com/esploro/outputs/conferenceProceeding/Proceedings-of-the-Seventh-International-Conference/993333614703596

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P. & Hooper, M. (2016a). *TIMSS 2015 International Results in Mathematics*. TIMSS & PIRLS International Study Center. http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P. & Hooper, M. (2016b). *TIMSS advanced 2015 international results in advanced mathematics and physics*. TIMSS & PIRLS International Study Center. http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/advanced/

NESH. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora* (5. utg.). Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora. https://www.forskningsetikk.no/globalassets/dokumenter/4-publikasjoner-som-pdf/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora.pdf

Niss, M. & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *102*(1), 9-28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriet.

Nortvedt, G. A. & Siqveland, A. (2019). Are beginning calculus and engineering students adequately prepared for higher education? An assessment of students’ basic mathematical knowledge. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(3), 325-343.

https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1501826
NOU 2015: 8. (2015). *Fremtidens skole: Fornyelse av fag og kompetanser*. Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/
NSD. (u.å., 06. april 2022). *Fylle ut meldeskjema for personopplysninger*. https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger
Naalsund, M. (2012). *Why is algebra so difficult?: A study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency.* [Doktoravhandling, Universitetet i Oslo].
Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O. & Hals, S. (2013). *Sinus: Matematikk R1*. (2. utg.). Cappelen Damm.
Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O. & Hals, S. (2015). *Sinus: Matematikk R2*. (2. utg.). Cappelen Damm.
Patton, M. Q. (1999). Enhancing the Quality and Credibility of Qualitative Analysis. *Health Services Research*, *34*(5), 1189-1208. https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1089059/
Pedersen, I. F. (2014). *Insights from TIMSS Advanced on Critical Aspects of the Advanced Mathematics Program in Norwegian Upper Secondary School: Content, Competence and Motivation*. [Doktoravhandling, Universitetet i Oslo].
Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg.). Universitetsforlaget.
Postholm, M. B. & Moen, T. (2009). *Forsknings- og utviklingsarbeid i skolen: En metodebok for lærere, studenter og forskere.* Universitetsforlaget.
Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, *7*(1), 5-41. https://doi.org/10.1093/philmat/7.1.5
Romberg, T. A. (1992). Perspectives on scholarship and research methods. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 49-64). Macmillan Publishing Company.
Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. I D. A. Grouws (Red.),

Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics (s. 334—370). Macmillan Publishing Company.

Sfard, A. (1995). The Development of Algebra: Confronting Historical and Psychological Perspectives. *The Journal of mathematical behavior*, *14*(1), 15-39. https://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90022-5

Shoenfield, J. R. (1967). *Mathematical Logic*. Association for Symbolic Logic.

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, *77*(1), 20-26.

Skaalvik, E. M. & Skaalvik, S. (2018). *Skolen som læringsarena: Selvoppfatning, motivasjon og læring* (3. utg.). Universitetsforlaget.

Star, J. R. & Rittle-Johnson, B. (2009). Making algebra work: Instructional strategies that deepen student understanding, within and between representations. *ERS Spectrum*, *27*(2), 11-18.

Stedøy, I. M., Borge, I. C. & Grønmo, L. S. (2017). Et praksisperspektiv: Bruk av TIMSS Advanced i matematikkundervisningen. I L. S. Grønmo & A. Hole (Red.), *Prioritering og progresjon i skolematematikken: En nøkkel til å lykkes i realfag. Analyser av TIMSS Advanced og andre internasjonale studier* (s. 201-238). Cappelen Damm Akademisk.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289–321. https://www.jstor.org/stable/30034869

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse: En innføring i kvalitative metoder* (5. utg.). Fagbokforlaget.

Tjora, A. (2018). *Viten skapt: Kvalitativ analyse og teoriutvikling*. Cappelen Damm Akademisk.

Tjora, A. (2021). *Kvalitative forskningsmetoder: i praksis* (4. utg.). Gyldendal.

UiO. (u.å., 28. mars 2022). *Nettskjema: Spørreskjema, påmeldinger og bestillinger*. https://nettskjema.no/

Utdanningsdirektoratet. (2006a). *Læreplan i matematikk 2P* (MAT5-03). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2006.

http://data.udir.no/kl06/MAT5-03.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2006b). *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT1-04). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2006. http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2006c). *Læreplan i matematikk for realfag - programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering* (MAT3-01). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2006. http://data.udir.no/kl06/MAT3-01.pdf?lang=http://data.udir.no/kl06/nob

Utdanningsdirektoratet. (2006d). *Læreplan i matematikk for samfunnsfag - programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering* (MAT4-01). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2006. http://data.udir.no/kl06/MAT4-01.pdf?lang=http://data.udir.no/kl06/nob

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk for realfag (matematikk R)* (MAT03-02). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT03-02.pdf?lang=nob

Wheeler, D. (1996). Backwards and forwards: reflections on different approaches to algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 317-325). Kluwer Academic Publishers.

Österholm, M. (2006). Characterizing Reading Comprehension of Mathematical texts. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(3), 325-346. https://doi.org/10.1007/s10649-005-9016-y

Vedlegg 1: Vurdering frå NSD

30.07.2021 - Vurdert
Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 30. juli 2021, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 31. desember 2022.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER NSD
legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos NSD: Njaal H. Neckelmann

Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 2: Informasjons- og samtykkeskriv

Vil du delta i forskningsprosjektet «R2-elevers algebraforståelse»?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke R2-elevers arbeid med algebra. I dette skrivet gir vi deg informasjon om prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Dette er et forskningsprosjekt til en masteroppgave i lærerutdanningen ved Universitetet i Oslo, Institutt for lærerutdanning og skoleforskning. Temaet for prosjektet er R2-elevers arbeid med algebra. Prosjektet gjennomføres skoleåret 2021/2022.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitetet i Oslo er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du er elev i matematikk R2.

Hva innebærer det for deg å delta?
Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du arbeider med en skriftlig kunnskapsprøve om algebra. Det vil ta deg ca. 45 minutter. Du kan også bli spurt om å delta i et intervju (omtrent 30 – 40 minutter) om kunnskapsprøven i etterkant.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke gi deg noen negative konsekvenser hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Å velge å ikke delta vil ikke påvirke ditt forhold til skolen eller læreren. De som velger å ikke delta på kunnskapsprøven, vil få et alternativt opplegg fra klassens lærer.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Kun masterstudent og veileder vil ha tilgang til dine opplysninger. Navnet og kontaktopplysningene dine vil erstattes med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data.

Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjoner basert på dette prosjektet.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er 1. juli 2022. Ved prosjektslutt vil alle personopplysninger og lydopptak slettes.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og

- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Oslo har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Oslo ved Anna Harestad (annaharestad@gmail.com) eller Arne Hole (arne.hole@ils.uio.no).
- Vårt personvernombud: Roger Markgraf-Bye (personvernombud@uio.no)

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Arne Hole (Veileder)	Anna Harestad (Student)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «R2-elevers algebraforståelse», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i kunnskapsprøve om algebra (omtrent 45 minutter)
- ☐ å delta i intervju om kunnskapsprøven i etterkant (omtrent 30 – 40 minutter)

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 3: Oppgåvesett

Oppgaver

Oppgave 1

Finn nullpunktene til polynomet
$f(a) = 2a^2 - 3ab + b^2$

Oppgave 2

Deriver funksjonene gitt ved:

a) $f(x) = \sqrt{6x}$
b) $g(x) = 2x \cdot (x+3)^{10}$
c) $h(x) = e^{ax}$
d) $i(x) = (x^2 + 5)^{-a}$, der $a \neq 0$

Oppgave 3

Deriver funksjonene gitt ved:

a) $f(\lambda) = 7 \cdot \sqrt{2\lambda + 1}$
b) $\mathrm{g}(\delta) = \mathrm{e}^3(\delta^2 + 3)^{\theta}$, der $\theta \neq 0$

Oppgave 4

La a være en konstant ulik 0. Finn de to x-verdiene der grafene til $y = 10^6 ax$ og $y = x^2/10^6$ skjærer hverandre.

Oppgave 5

Finn verdien til det algebraiske uttrykket

$$x - 2x + 3x - 4x + \ldots\ldots + 99x - 100x$$

når $x = 3$

Oppgave 6

Stemmer det at kvadratet til et naturlig tall a ($a \in \mathbb{N}$) alltid er én mer enn produktet av de to naturlige tallene nærmest a?

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

Oppgave 7

La $n \in \mathbb{Z}$, der $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
Hvilket utrykk er størst, $2n$ eller $n + 2$?
Forklar hvordan du tenkte.

Formler du kan bruke:

- $\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ $\quad$ $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\big(v(x)\big)^2}$
- $f(x) = g\big(u(x)\big)$ $\quad$ $f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$

Vedlegg 4: Bevis for formelen $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}'$

Utklippet er henta frå: Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O. & Hals, S. (2013). *Sinus: Matematikk R1*. (2. utg.). Cappelen Damm.

BEVIS FOR FORMELEN $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Vi forutsetter nå at $f = u \cdot v$, der u og v er to deriverbare funksjoner. Funksjonene er da også kontinuerlige.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x) - u(x))\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot (v(x+\Delta x) - v(x))}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x+\Delta x) + u(x) \cdot \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \\
&= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)
\end{aligned}
$$

I den tredje linja trakk vi fra og la til leddet $u(x) \cdot v(x + \Delta x)$ i telleren.

I den nest siste linja brukte vi grenseverdisetninger.

Til slutt brukte vi definisjonen av $u'(x)$ og $v'(x)$ og at v er en kontinuerlig funksjon slik at $\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x + \Delta x) = v(x)$.

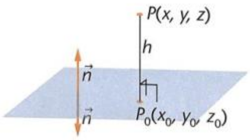
Vedlegg 5: Bevis for avstanden mellom punkt og plan

Utklippet er henta frå: Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O. & Hals, S. (2015). Sinus: Matematikk R2. (2. utg.). Cappelen Damm.

Et plan α har likningen

$$ax + by + cz + d = 0$$

Vi skal nå finne en formel for avstanden h fra et punkt $P(x, y, z)$ til planet α.



En normalvektor for planet er $\vec{n} = [a, b, c]$. La $P_0(x_0, y_0, z_0)$ være fotpunktet for normalen fra P ned på planet. Da er

$$\overrightarrow{P_0P} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0]$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} &= [a, b, c] \cdot [x - x_0, y - y_0, z - z_0] \\ &= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) \\ &= ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 \\ &= ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0)\end{aligned}$$

Ettersom $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ligger på planet α, er

$$\begin{aligned}ax_0 + by_0 + cz_0 + d &= 0 \\ ax_0 + by_0 + cz_0 &= -d\end{aligned}$$

Det gir

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} &= ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) \\ &= ax + by + cz - (-d) \\ &= ax + by + cz + d\end{aligned}$$

La v være vinkelen mellom $\vec{n}$ og $\overrightarrow{P_0P}$. Ettersom både $\vec{n}$ og $\overrightarrow{P_0P}$ står vinkelrett på planet, er v enten 0° eller 180°. Da er $\cos v$ enten 1 eller -1.

Definisjonen av skalarproduktet gir

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{P_0P}| \cdot \cos v$$

$$ax + by + cz + d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot h \cdot (\pm 1)$$

$$h = \pm \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$|\overrightarrow{P_0P}| = h$

Men avstanden h må være et positivt tall. Det gir denne formelen:

> Avstanden h fra punktet $P(x, y, z)$ til planet α med likningen $ax + by + cz + d = 0$ er gitt ved
>
> $$h = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

I formelen for h setter vi inn koordinatene til P i telleren.

Vedlegg 6: Intervjuguide

Intervjuguide til master

Startspørsmål

1) Kva tenkjer du om oppgåvesettet du gjorde i går?

Spørsmål til spesifikke oppgåver:

1) Har du sett eller jobba med ei liknande oppgåve før?
   - Eventuelt: kva er annleis?
2) Korleis tenkte du då du arbeida med denne oppgåva?
3) Kvifor gjer du «dette»?/ Kan du forklare kvifor du kan gjere «dette»?
4) Var deler av denne oppgåva spesielt vanskelige eller enkle?
   - Eventuelt: kva for nokre delar og kvifor?
   - Hadde oppgåva vert enklare dersom ... ?
     - Døme 1: Hadde oppgåva vore enklare om det ikkje stod $a \neq 0$?
     - Døme 2: Hadde oppgåva vore enklare om det stod x i staden for λ?
5) Veit du om andre måtar å løyse denne oppgåva på?
   - Eventuelt: korleis kunne du då løyst den?

Spørsmål til bevis

Bevis: Produktregelen

1) Om nokon hadde spurt deg om du kunne forklart kvifor produktregelen fungerer, kva hadde du svart?
2) Kan du lese nedover og forklare kva som skjer i beviset?
   - Kva er det som eventuelt stopper deg?
3) Om du måtte forklart kvifor produktregelen fungerer, ville du prøvd å bruke dette beviset, eller hadde du prøvd å finne noko anna som kunne forklart regelen?
4) Forklarer dette beviset deg kvifor produktregelen er riktig?
5) Dette beviset er henta frå R1-boka dykkas. Såg du på det då du hadde R1?
   - Kvifor såg du på det?/Kvifor såg du ikkje på det?

Bevis: Bevis for avstanden mellom punkt og plan

1) Me ser på denne delen:

En normalvektor for planet er $\vec{n} = [a, b, c]$. La $P_0(x_0, y_0, z_0)$ være fotpunktet for normalen fra P ned på planet. Da er

Figur 1: Fyrste del av beviset som blir brukt i intervjuet

- Kvifor burkar dei $\vec{n} = [a, b, c]$ og $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i beviset?
    - Kva tydar teikna?
    - Kvar kjem nullane i P_0, x_0, y_0, z_0 frå?

2) Kan du forklare kva som skjer her?

Ettersom $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ligger på planet α, er

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$
$$ax_0 + by_0 + cz_0 = -d$$

Figur 2: Andre del av beviset som blir brukt i intervjuet

3) Kan du forklare kva som skjer her?

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = |\vec{n}| \cdot \left|\overrightarrow{P_0P}\right| \cdot \cos v$$
$$ax + by + cz + d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot h \cdot (\pm 1)$$
$$h = \pm \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$\left|\overrightarrow{P_0P}\right| = h$

Figur 3: Tredje del av beviset som blir brukt i intervjuet

Avrundingsspørsmål

1) Undersøkingar visar at mange norske elevar har problem tilknytt algebra. Kva kunne ein gjort for å forbetre den norske algebraundervisinga?

Figur 1, 2 og 3 er henta frå: Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O. & Hals, S. (2015). Sinus: Matematikk R2. (2. utg.). Cappelen Damm.