



UiO • Universitetet i Oslo

Elevers strategibruk under arbeid med problemløsningsoppgaver

En kvalitativ studie av elevers problemløsningsprosess med fokus på strategibruk

Ashanth Sivagnanam

MDID4009 – Masteroppgave i matematikdidaktikk
30 studiepoeng

Institutt for lærerutdanning og skoleforskning
Det utdanningsvitenskapelige fakultet

Våren 2022

Elevers strategibruk under arbeid med problemløsningsoppgaver

En kvalitativ studie av elevers
problemløsningsprosess med fokus på strategibruk

Masteroppgave ved ILS, Institutt for lærerutdanning og skoleforskning
Ashanth Sivagnanam

© Ashanth Sivagnanam

2022

Elevers strategibruk under arbeid med problemløsningsoppgaver: En kvalitativ studie
av elevers problemløsningsprosess med fokus på strategibruk

Ashanth Sivagnanam

<http://www.duo.uio.no/>

Trykk: Reprosentralen, Universitetet i Oslo

Sammendrag

Problemløsningsoppgaver er oppgaver som kan løses på mange forskjellige måter. Når man forsøker å løse problemløsningsoppgaver pleier man å bruke minst én eller flere strategier. Slike strategier bruker også elever i møte med problemløsningsoppgaver. Som en lærer vil det være en fordel å kunne forstå seg på hvordan elevene arbeider med problemløsningsoppgaver. Derfor skal jeg i denne oppgaven beskrive hvordan elever på 9.trinn arbeider med problemløsningsoppgaver med fokus på hvilke heuristiske strategier som tas i bruk. For å finne ut av dette, har jeg delt målet inn i to mindre forskningsspørsmål.

1. Hvilke typer heuristiske strategier benytter elevene seg av under problemløsning?
2. I hvilke ulike faser bruker elevene disse heuristiske strategiene?

Studien har en kvalitativ tilnærming med intervju som primærkilde til data. Intervjuene er oppgavebaserte intervju av elevene utføre problemløsningsoppgaver. Intervjuene ble utført individuelt og var semistrukturerte. Dataene ble analysert ut ifra rammeverkene som har blitt utarbeidet fra tidligere forskning.

Studien kommer frem til at 9.trinns elever arbeider med problemløsningsoppgaver på en ikke-kronologisk måte, altså de går frem og tilbake mellom ulike faser. Dette skjer ofte når de sitter fast eller oppdager en feil. De heuristiske strategiene som er mest brukt av elevene er gjett, sjekk og revidering, og illustrasjon/konkretisering, men vi ser også tegn til andre strategier som at elevene prøver å dele opp problemet og utfører tilfeldige beregninger. Strategien tilfeldig beregning blir i hovedsak brukt når elevene ønsker å prøve seg frem eller ikke helt vet hvordan problemet skal løses, noe som ofte resulterer i at de går tilbake og starter løsningsprosessen på nytt med en annen heuristisk strategi. Vi ser også noen deler hvor elevene benytter seg av flere strategier samtidig, men dette skjer svært sjeldent.

Forord

Da var lektorutdanningen på UiO plutselig ferdig. Jeg trodde jeg aldri skulle komme så langt. Å skrive master virket uvirkelig, men i dag er jeg ferdig. Årene på lektorprogrammet har vært svært lærerikt, og nå er jeg klar til å bruke min lærdom til å undervise andre elever.

Jeg ønsker først og fremst å takke min veileder Lovisa Sumpter og biveileder Guri Nortvedt. Takk for at dere har veiledet meg med masteroppgaven og gitt gode råd underveis. Jeg vil også takke min familie som har støttet meg gjennom prosessen. Takk for at dere har vært oppmuntrende og alltid heiet på meg. Til slutt vil jeg takke mine medstudenter og venner. Takk til mange gode samtaler og hyggelige lunsjer. Dere har holdt motivasjonen min oppe og sørget for at det har vært hyggelig å sitte på campus med masteroppgaven.

Oslo, 30. mai 2022

Ashanth Sivagnanam

Innholdsfortegnelse

1	Introduksjon	13
1.1	Oppgavens oppbygging	15
2	Teori	16
2.1	Problemløsning	16
2.2	Problemløsningskompetanse	17
2.3	Modeller av problemløsningsprosessen	18
2.3.1	De ulike fasene i de normative modellene	20
2.3.3	Min problemløsningsmodell	23
2.4	Heuristisk løsningsstrategi	24
2.4.1	Valg av heuristiske strategier	25
2.4.2	Ulike heuristiske strategier	27
2.6	Historisk perspektiv på problemløsning	29
2.7	Problemløsning i den norske læreplan	33
3	Metode	35
3.1	Valg av metode	35
3.1.1	Semistrukturert intervju	35
3.1.2	Oppgavebasert intervju	36
3.2	Problemløsningsoppgaver	37
3.2.1	Oppgave 1 - Bonden og hans dyr	38
3.2.2	Oppgave 2 - Gressplenen	38
3.2.3	Oppfølgingsspørsmål	38
3.3	Elevutvalg	40
3.4	Datainnsamling	41
3.4.1	Pilotering	41
3.4.2	Gjennomføring av selve intervjuene	41
3.5	Analyse av datamateriale	43
3.5.1	Transkripsjon av intervju	43
3.5.2	Hvilken problemløsningsfase	45
3.5.3	Identifisering av ulike heuristiske strategier	47
3.5.4	Sammenheng	49
3.6	Etikk	50
3.7	Studiens kvalitet	51
3.7.1	Troverdighet	51
3.7.2	Pålitelighet	53

3.7.3 Overførbarhet	53
3.7.4 Bekreftbarhet	54
4 Resultater	55
4.1 Oppgave 1	55
4.2 Oppgave 2	61
4.3 Oppsummering av resultater - hovedfunn	65
5 Diskusjon	67
5.1 Løsningsprosessen	67
5.2 Strategier i de ulike fasene	69
5.3 Verifisering	73
5.4 Begrensninger	74
6 Konklusjoner og implikasjoner	75
7 Litteraturliste	78
8 Vedlegg	84
8.1 Vedlegg 1 – Intervjuguide	84
8.2 Vedlegg 2 - Samtykkeskjema	86

1 Introduksjon

For å løse problemløsningsoppgaver i matematikken må man bruke minst én eller flere heuristiske strategier (Mason et al., 2010; Novotná et al., 2014; Pólya, 1945; Schoenfeld, 1985). Heuristiske løsningsstrategier er strategier som brukes for å løse en rekke ikke-rutinemessige problemer (Pólya, 1962). Dette betyr at heuristiske strategier er viktige og spiller en sentral rolle i problemløsningen (Mousoulides & Sriraman, 2020). Slike strategier kan benyttes i forskjellige deler av problemløsningsprosessen, blant annet til å forstå, løse og validere problemet (Pólya, 1945). Ved å bruke heuristiske strategier i løsningsprosessen kan man forenkle komplekse problemer og lettere se løsninger til problemet man holder på med (Gigerenzer & Gaissmaier, 2011; Mousoulides & Sriraman, 2020; Schoenfeld, 1985).

Schoenfelds (1979) studie kom frem til at når heuristiske strategier innenfor problemløsningen ble identifisert og lært, så ville det ha en stor påvirkning på elevenes problemløsningsprestasjon. Videre foreslår han at spesifikke heuristiske strategier burde bli navngitt eksplisitt og deres bruk burde bli forklart i lik grad som andre matematiske strategier og prosedyrer (Schoenfeld, 1979). Heuristiske strategier kan hjelpe deg med å få en idé eller en innfallsvinkel for hvordan ulike problemer muligens kan løses (Pólya, 1945). Heuristiske strategier anses som såpass viktige at noen land har skrevet dem eksplisitt i sin læreplan i matematikkfaget, blant annet Singapore (MOE, Singapore, 2020).

Ikke alle problemløsningsoppgaver er like. Ulike problemer vil kreve bruk av ulike heuristiske strategier (Novotná et al, 2014; Pólya, 1945; Schoenfeld, 1985). Dette betyr at jo flere ulike heuristiske strategier man kan, desto lettere kan problemet være å løse. Én heuristisk strategi kan ikke brukes på alle problemløsningsoppgaver, noe som fører til at det lønner seg å kunne flere heuristiske strategier (Gorodetsky & Klavir, 2003; Schoenfeld, 1985). Når man skal løse et problem er problemløseren nødt til å tilpasse sin løsningsmetode og strategi i henhold til problemet (Pólya, 1945). I mange tilfeller kan flere strategier være egnet for å løse problemet, da vil det være gunstig å benytte seg av den strategien som er mest effektiv for å løse det aktuelle problemet. Det kan også være tilfeller hvor det lønner seg å kombinere flere strategier for å løse et problem

(Mousoulides & Sriraman, 2020). Av alle disse grunnene lønner det seg som en problemløser å kunne mange ulike strategier slik at man kan tilpasse seg situasjonen, bruke den strategien som er mest effektiv, eller kombinere flere strategier for å løse problemet.

I møte med problemløsningsoppgaver er det ikke kun de heuristiske strategiene som er viktige, men også selve løsningsprosessen. Prosessen av å løse et problem kan deles inn i ulike faser (Mason et al., 1982; Pólya, 1945; Schoenfeld, 1985; Yimer & Ellerton, 2010). Prosessen vil være ulik fra menneske til menneske, og vil være avhengig av hva slags problem man møter på (Rott et al., 2020). Ved å forstå seg på hvordan prosessen foregår, vil man kunne få en dypere forståelse i hvordan mennesker løser problemløsningsoppgaver. I hovedsak kan man tenke seg at de ulike delene eller elementene av problemløsingen består av fem faser. Først å forstå hva problemet handler om, så finne ut av hvordan det kan løses, deretter prøve å løse problemet, for å så sjekke om man har klart å løse det korrekt, og til slutt reflektere over hvordan prosessen har foregått (Pólya, 1945; Mason et al., 1982; Schoenfeld, 1985; Yimer & Ellerton, 2010). Det vil da være aktuelt med en modell som kan representere løsningsprosessen til enhver problemløser.

I Høst 2020 ble det innført en ny læreplan i den norske skolen, LK20, som også kalles for fagfornyelsen (Utdanningsdirektoratet, 2020). I denne læreplanen er det et kjerneelement som heter «Utforsking og problemløsning» som fokuserer på at elever skal kunne bruke sin matematiske kunnskap til å løse ukjente problemer og andre aktuelle problemstillinger de kan møte på (utdanningsdirektoratet, 2019). Å vite hvordan elever arbeider med problemløsningsoppgaver, spesielt vite hvilke strategier de benytter seg av vil være en stor fordel for læreren, siden læreren kan ta hensyn til deres arbeidsmåte og strategibruk i matematikkfaget. På den måten kan læreren tilrettelegge undervisningen etter elevenes tidligere erfaringer og behov innenfor problemløsingen. Av den grunn har jeg valgt å forske innenfor temaet problemløsning i matematikken, og som nevnt tidligere er heuristiske strategier en viktig del av problemløsningen. Derfor skal jeg i denne oppgaven beskrive hvordan elever på 9.trinn arbeider med problemløsningsoppgaver med fokus på hvilke heuristiske strategier som tas i bruk. For å finne ut av dette, har jeg delt målet inn i to mindre forskningsspørsmål.

1. Hvilke typer heuristiske strategier benytter elevene seg av under problemløsning?
2. I hvilke ulike faser bruker elevene disse heuristiske strategiene?

1.1 Oppgavens oppbygging

Denne masteroppgaven handler om hvordan elever løser problemløsningsoppgaver og hvilke heuristiske strategier som blir brukt i denne løsningen. Oppgaven er inndelt i seks kapitler; Introduksjon, Teori, Metode, Resultater, Diskusjon, og Konklusjon og implikasjoner. I første kapittel presenterer jeg tekstens tema og relevans, og forklarer målet til teksten og problemstillingen. I andre kapittel presenterer jeg teorien som ligger i grunn, altså hvordan begrepet problemløsning defineres, hvilke problemløsningsmodeller som finnes, ulike heuristiske strategier, historisk perspektiv på problemløsning og problemløsning i den norske læreplanen. I det tredje kapitlet, Metode, begrunner jeg hvorfor jeg har valgt å bruke oppgavebasert intervju som datainnsamlingsmetode, hvilke oppgaver jeg har brukt og elevutvalget. I tillegg beskriver jeg hvordan jeg har samlet inn datamaterialet og analysert det, og hvilke etiske hensyn som har blitt tatt hensyn til. Til slutt presenterer jeg fire overordnede temaer som tar for seg studiens kvalitet. I resultatdelen blir resultatene presentert. Her blir først resultatene fra første oppgave presentert, så resultatene fra den andre oppgaven. Til slutt blir resultatene fra begge oppgavene oppsummert sammen. Disse resultatene blir så analysert og diskutert i neste kapittel. I diskusjonskapittel blir resultatene analysert og diskutert sammen med tidligere forskning for å belyse mine forskningsspørsmål. Aller sist kommer kapitlet konklusjoner og implikasjoner. Her oppsummerer jeg teksten, kommer frem til en konklusjon, diskuterer implikasjonene for videre forskning og hva som kunne ha blitt gjort annerledes i forskningen min.

2 Teori

I kapittel 2 presenterer jeg teorien som står til grunn for å kunne undersøke hvordan elever på 9.trinn arbeider med problemløsningsoppgaver med fokus på hvilke heuristiske strategier som tas i bruk.

2.1 Problemløsning

Schoenfeld (2016) sier at et matematisk problem har hatt ulike betydninger gjennom årene. Det kan ofte kalles for problemløsning i matematikken og problemløsning kan defineres på ulike måter. Det finnes vide og vage definisjoner, samt definisjoner som er mer konkrete (Rott et al., 2021). Det finnes også definisjoner som er i konflikt med hverandre (Schoenfeld, 2016).

Det er to ulike definisjoner som blir mest brukt i dag. Den ene definisjonen er at problemløsning skal være et problem for den som prøver å løse oppgaven (Schoenfeld 2016; Lesh & Zawojewski, 2007). Her er det fokus på løseren av problemet og at vedkommende ikke er kjent med problemet. Som sagt er slike problemer relativ til personen som prøver å løse den, altså er det kun en problemløsningsoppgave dersom løseren ikke vet nøyaktig hvilken fremgangsmåte som skal brukes (Solvang, 1992). I mange tilfeller kan disse type problemer også kalles for rike oppgaver. Et eksempel på en oppgave kan være: $3250 \text{ ganger } 4$. Dette vil for en fjerdeklassing være et matematisk problem, som bør bli knyttet til en sammenheng før fjerdeklassingen klarer å starte. For en niendeklassing vil dette ikke være en problemløsningsoppgave, men en rutineoppgave hvor niendeklassingen bruker en bestemt algoritme for å løse oppgaven. Det vil da bety at når løseren ikke kjenner til noen formler, standardalgoritmer eller rutine ferdigheter som kan brukes for å løse problemet, så vil det være en problemløsningsoppgave (Lesh & Zawojewski, 2007). En formel vil være en matematisk likning med flere ukjente, hvor vi setter inn de verdiene som er kjente for oss i et gitt tilfelle, og en algoritme er som en oppskrift, altså en fremgangsmåte for å løse oppgaver ved å følge noen gitte instruksjoner (Solvang, 1992).

Den andre måten å definere problemløsning i matematikken på er med fokus på oppgaven. I det tilfellet vil oppgaven være åpen og ha muligheten til å løses med bruk av ulike metoder (Lesh & Zawojewski, 2007; Lester, 1994, 2013). Forskjellen mellom

disse to måtene å definere problemløsning på er at den ene har fokus på selve løseren mens den andre definisjonen setter fokuset på oppgaven eller problemet. I denne oppgaven skal jeg bruke følgende definisjon for begrepet problemløsning: Problemløsning er oppgaver kan løses på ulike måter, samtidig som at det ikke er en tydelig fremgangsmåte for løseren.

2.2 Problemløsningskompetanse

For å finne ut av hvor viktig problemløsning er i matematikken kan vi bryte ned faget i mindre deler. De mindre delene kan vi kalle kompetanser i matematikken, og til sammen vil de utgjøre den helhetlige matematiske kompetansen. Matematisk kompetanse har blitt et sentralt begrep for å kategorisere de ulike aspektene ved faget, de ulike matematiske delkompetansene som blir definert sørger for at man kan kategorisere matematikken og forstå hva det egentlig vil si å være dyktig i faget (Botten, 2016). Vi har to hoved kompetanserammeverk i matematikken, det ene er Niss sitt og det andre er Kilpatrick sitt. Niss deler matematikken inn i åtte ulike kompetanser (Niss & Jensen, 2002), imens Kilpatrick velger å dele det inn i fem ulike kompetanser (Kilpatrick et al., 2001). Begge er enige i at de ulike kompetansene ikke står alene, men går i hverandre. Niss sitt rammeverk viser dette i en blomst hvor de åtte kompetansene overlapper med hverandre, imens Kilpatrick sitt rammeverk viser dette ofte som en flette av de fem kompetansene sammen (Kilpatrick et al., 2001; Niss & Jensen, 2002).

Blant de ulike kompetansene finner vi problembehandlingskompetansen i Niss' rammeverk. Denne kompetansen går ut på at man skal kunne finne og formulere problemstillinger, samt løse ulike matematiske problemer, gjerne på ulike måter (Botten, 2016). I Kilpatrick et al. (2001) sitt rammeverk kommer ikke denne type kompetanse like tydelig frem, men den er der. Den heter anvendelse, ofte kalt strategisk tenking og går ut på mye av det samme (Kilpatrick et al., 2001). Her trekkes det frem evnen til å kunne finne, formulere, representere, løse og vurdere løsningen av matematiske problemer, som del av den strategiske kompetansen (Botten, 2016).

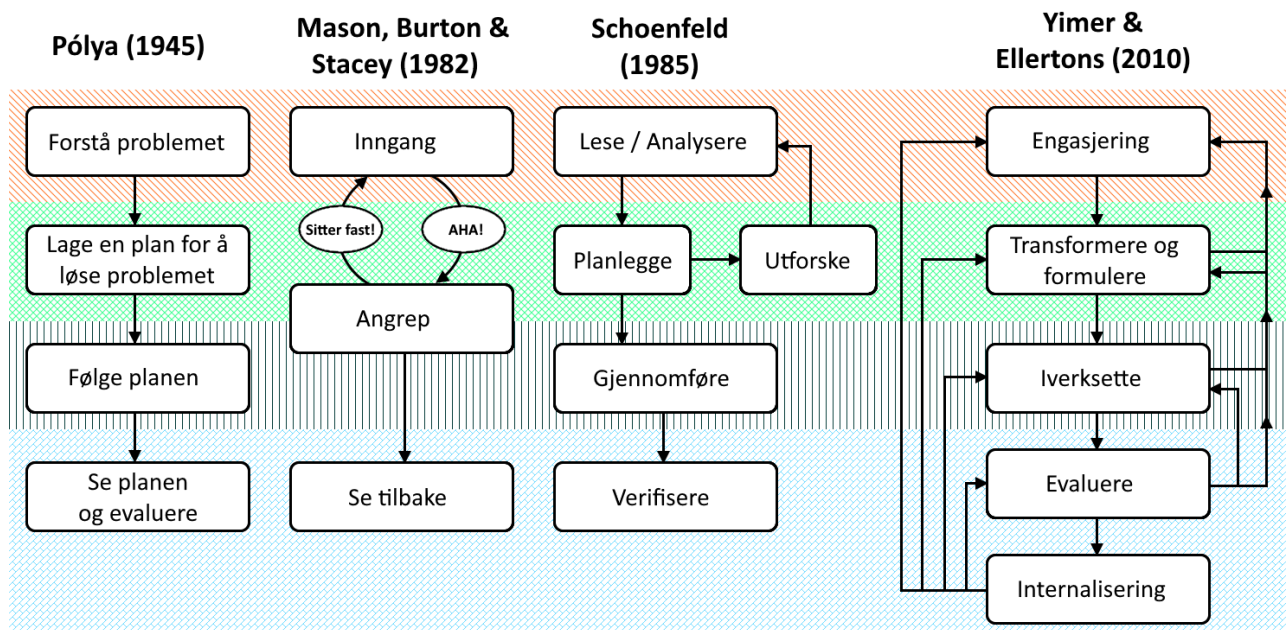
2.3 Modeller av problemløsningsprosessen

Det finnes mange ulike modeller av problemløsningsprosessen. Fra matematikken, matematikkundervisningen og psykologien har vi modeller som baserer seg i hovedsak på faser, som løseren befinner seg i under problemløsningsprosessen. Blant de ulike modellene er det to typer fase modeller for problemløsningsprosessen: den intuitive og kreative typen, og den normative typen (Neuhaus, 2013).

Den intuitive og kreative typen har opphav fra Pontcarès (1908) introspektive refleksjon på sin egen løsningsprosess. Fra hans tanker har matematikeren Hadamard (1945) og psykologen Wallas (1926) beskrevet problemløsningsprosessen med fokus på underbevisste aktiviteter. Dette kan summeres i fire faser: (i) Jobbe med et problem i en lengre periode uten å finne en løsning (forberedelse), (ii) løseren tenker på forskjellige ting (inkubasjon). (iii) Etter en lengre tid, så dukker det opp en idé (belysning) og (iv) kontrollering av ideen (verifisering).

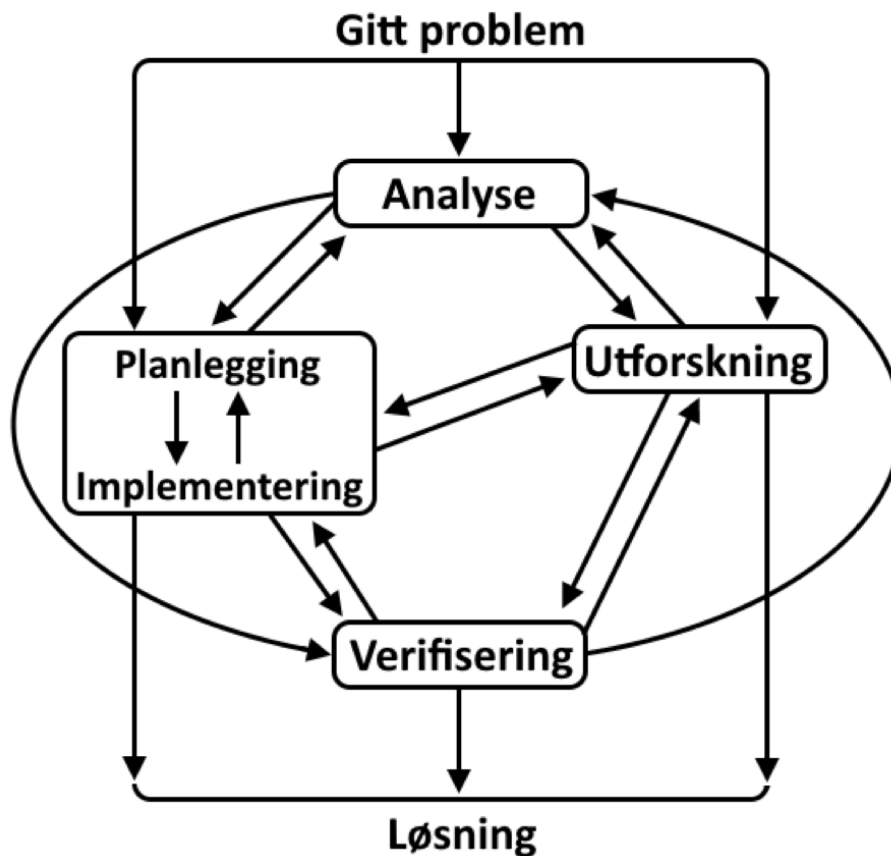
Den normative modellen ble introdusert fra Dewey (1910) og består av fem ulike faser: (i) møte med problemet, (ii) spesifisering av problemets natur, (iii) nærme seg mulige løsninger, (iv) utvikle logiske konsekvenser av tilnærmingen, og (v) akseptere eller avvise ideen ved eksperimentering. I motsetning til den intuitive og kreative modellen så blir ikke underbevisste aktiviteter beskrevet i Deweys modell. Pólyas (1945) berømte problemløsningsmodell bestående av fire faser: (i) forstå problemet, (ii) utforme en plan, (iii) gjennomføre planen, og (iv) se tilbake, er ifølge Neuhaus (2013) bygget på Deweys arbeid.

I matematikkundervisning og matematikdidaktisk forskning er fokuset til problemløsningsprosessen i hovedsak basert på den normative modellen, siden problemløsningsprosesser av den intuitive og kreative typen kan ta opptil flere uker med tenking. Dette er ikke aktuelt i skolesammenheng, fordi problemløsning i forbindelse med skolegangen er ofte kortere. Av den grunn vil det være fokus på de normative modellene. Under er fire ulike normative modeller illustrert, se Figur 1.



Figur 1: Illustrasjon av de ulike problemløsningsprosessene. De ulike problemløsningsprosessene er laget av Pólya (1945), Mason et al., (1982), Schoenfeld (1985) og Yimer & Ellertons (2010). Denne illustrasjonen er hentet fra Rott et al. (2020), med noen modifikasjoner for å tilpasse denne studien.

I illustrasjonen blir fire ulike modeller for problemløsningsprosessen presentert. En av de mest kjente innenfor problemløsningsverdenen er matematikeren Gerard Pólya. De ulike modellene i illustrasjonen bygger videre på Pólyas modell og hans forskning om hvordan et problem løses. På den andre siden har Rott et al. (2020) i sin studie forsøkt å lage en deskriptiv modell, se Figur 2. Rott et al. (2020) har i sin studie sett på ulike normative modeller og sammenliknet disse modellene, for å så forsøke å lage sin egen deskriptiv modell. Dette gjør de fordi de synes at problemløsningsprosessen består av flere sykluser med prøving og feiling, enn de normative modellene. De normative modellene blir i hovedsak brukt til å fremstille den ideelle formen for å løse problemløsningsoppgaver (Rott et al., 2020). Imens den deskriptive modellen skal være en modell som heller fokuserer på hvordan elevene utfører problemløsning. En illustrasjon av den deskriptive modellen er gitt under (se Figur 2). Det som er viktig å poengtere er at en modell vil kun være en modell, altså det er en forenklet representasjon av virkeligheten som ikke vil kunne ta for seg alle aspekter identisk med den virkelige situasjonen, og vil ha begrenset gyldighet (Giere, 2004). I virkeligheten kan løsningsprosessen være mye mer komplisert, men en modell kan hjelpe oss med å forstå virkeligheten.



Figur 2: Illustrasjon av den deskriptive modellen til Rott et al. (2020). Denne illustrasjonen er hentet fra Rott et al. (2020), men laget på nytt og oversatt til norsk.

2.3.1 De ulike fasene i de normative modellene

I Figur 1 ser vi de ulike normative modellene. Disse modellene har tre, fire eller fem ulike faser, men det ikke antallet faser som er viktig, heller hvilke aktiviteter som inngår i disse fasene. I tillegg er det interessant å se hvordan de ulike modellene ligner på Pólyas modell og hvilke ulikheter de har med ideene fra Pólyas modell. I Figur 1 har jeg indikert Pólyas fire faser med ulike farger og mønstre i bakgrunnen.

Forstå problemet er den første fasen i Pólyas løsningsmodell. Den første fasen er i det man møter problemet. Her vil man begynne å lese problemet, muligens flere ganger og deretter prøve å forstå hva som faktisk er problemet. Mason et al. (1982) og Yimer & Ellerton (2010) har en lik første fase som modellen til Pólya. I denne fasen skal man forstå hvilke opplysninger man har fått, hvilke betingelser som gjelder og hvilke avgrensninger oppgaven har. Schoenfeld (1985) bygger litt videre på idéene til Pólya.

Schoenfelds modell går ut på at man leser og tilegner seg informasjon om problemet og hva som skal løses. Deretter gjør man en del analyser av situasjonen (Schoenfeld, 2016). Sammen kan disse to fasene tolkes som forståelses fasen fra Pólyas løsningsprosess.

Når man har forstått problemet går man videre over til den neste fasen, som ifølge Pólya (1945) er å lage en plan for å løse problemet. Likt som navnet til fasen, så går denne fasen ut på å lage en plan for hvordan man ønsker å løse problemet. Denne planen blir laget ut ifra det man vet, og hva man ønsker å finne ut av. Man bruker ofte tidligere erfaringer, samt informasjon fra oppgaven for å lage en slik plan. I denne fasen er man nødt til å tenke seg om den planen man lager gir oss en løsning for problemet (Schoenfeld, 1987). Strategiene som kan hjelpe i dette tilfellet er å forstå hva som er relevant og irrelevant informasjon og å tenke på tidligere oppgaver man har løst og erfaringer man har fra dem (Pólya, 1945). Schoenfeld (1985) velger å splitte Pólyas andre fase i to deler. Den ene er å planlegge, som er likt Pólyas løsningsmodell, og den andre er utforske. Mason et al. (1982) derimot har kombinert Pólyas andre og tredje fase, og kalt dette for angrepsfasen, siden det ikke alltid er mulig å skille mellom disse fasene. Angrepsfasen går ut på å arbeide med problemet, enten ved å lage ulike planer, utforske eller å prøve å løse problemet.

Den tredje fasen er å følge planen som man lagde i fase to (Pólya, 2014). Her handler det om å bruke sin prosedyrekompetanse til følge alle prosedyrene korrekt. Man må kunne bruke formler, følge algoritmer og utføre beregninger korrekt for å kunne følge planen riktig. Schoenfeld (1985) og Yimer & Ellerton (2010) sine modeller følger modellen til Pólya tett på og er like, i motsetning til Mason et al. (1982).

Til slutt kommer man til den siste delen hvor man ser tilbake på det man har gjort og evaluerer løsningen sin. Å evaluere løsningen vil si at man prøver å se om løsningen er korrekt. Dette kan gjøres på mange ulike måter, f.eks. å se på utregningene sine eller ved å sjekke om svaret gir mening for problemet man først møtte på. Her kan man også vurdere om oppgaven kan løses annerledes, følge stegene baklengs og reflektere over prosessen (Pólya, 2014). Det vil også være mulig å vurdere om denne løsningsmetoden kan brukes i flere tilfeller slik at man tar lærdom med seg videre. Dette er likt i Mason et al. (1982) og Schoenfeld (1985) sine modeller, hvor begge har en med en form for verifisering av løsningen. Yimer & Ellerton (2010) derimot velger å

dele den siste delen inn i to ulike faser: evaluere og internalisering. Evaluering går da ut på å sjekke resultatene og se tilbake på hvordan problemet ble løst for å verifisere om det var korrekt. Internalisering går ut på å reflektere over løsningen og metoden som ble brukt. Denne fasen har fokus på hva som har blitt lært av å løse dette problemet og ser frem til å kunne bruke denne lærdommen for å løse fremtidige problemer.

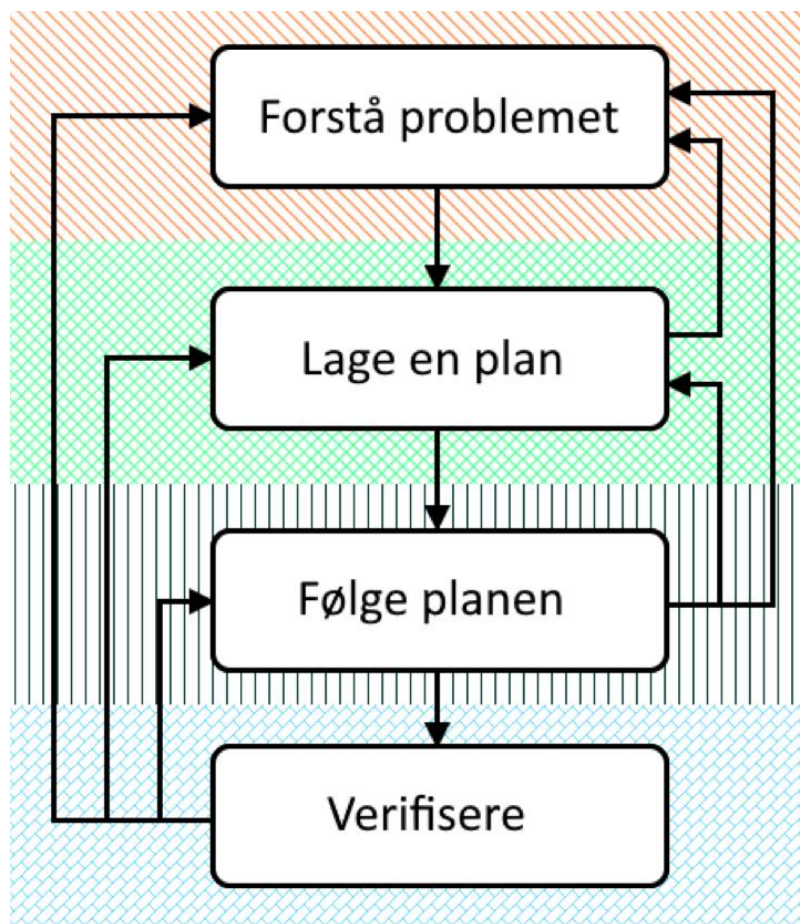
2.3.2 Sekvensering av fasene: lineær eller ikke-lineær prosess

Et annet viktig aspekt med de ulike problemløsningsmodellene er overgangene mellom fasene. Illustrasjonen er ikke kun en indikering på de ulike fasene, men også overgangene mellom fasene. Overgangene mellom de ulike fasene er illustrert med piler i figuren (se Figur 1).

Hvis vi ser på overgangene mellom de ulike fasene i modellen til Pólya (1945), så ser vi at det er en streng lineær modell som starter med fase en, å forstå problemet, og kronologisk har overganger til fase to, så til fase tre og til slutt til fase fire. Mason et al. (1982) og Schoenfeld (1985) sine modeller derimot er ikke streng lineære. I disse modellene er det inkludert overganger som går forover, men også overganger som går bakover. Disse overgangene er mellom fasene lese/analysere, planlegge og utforske i Schoenfelds modell (1985), eller mellom inngang og angrep i Mason et al. (1982). Deretter går deres modeller lineært mot den siste fasen. Yimer & Ellerton (2010) derimot har en mer dynamisk og syklisk modell som representasjon av problemløsningsprosessen. Dette kommer frem ved at de har inkludert overgang mellom alle de ulike fasene, selv etter den siste fasen. Dette ser vi mye av i virkeligheten; når man jobber med et problem (det trenger ikke nødvendigvis å være matematikk), så jobber man mye frem og tilbake, og ofte i sirkulære eller rotete prosesser. Det er svært sjeldent at man jobber i en lineær prosess, slike prosesser er ofte ikke realistiske (Rott et al, 2021).

2.3.3 Min problemløsningsmodell

Til å undersøke hvordan elever på 9.trinn arbeider med problemløsningsoppgaver med fokus på heuristiske strategier som tas i bruk, har jeg valgt å ta utgangspunktet i Pólyas (1945) løsningsmodell. I tillegg har jeg tatt inspirasjon fra de andre modellene og dannet meg mitt eget rammeverk for bruk i denne oppgaven. Denne modellen vil bestå av fire faser, lik Pólyas modell. Disse er fase en, å forstå problemet, fase to, å lage en plan, fase tre, å utføre planen, og fase fire, å verifisere. I tillegg til å ha disse fasene har jeg valgt å inkludere overganger mellom alle de ulike fasene, likt med Yimer & Ellertons (2010) modell. Følgende illustrasjon illustrerer problemløsningsmodellen, se Figur 3 under:



Figur 3: Illustrasjon av problemløsningsmodellen jeg skal bruke i denne studien.

I figuren over ser vi fire ulike faser. Tabellen under viser en oversikt over de ulike fasene og kjennetegnene til hver av fasene (se Tabell 1).

Problemløsningsfase	Kjennetegn til fasen
Fase en: Å forstå problemet	<ul style="list-style-type: none"> - Lese oppgaven - Registrere og systematisere opplysninger: Identifisere hva som er kjent, ukjent og hva oppgaven spør om - Skrive ned nøkkelinformasjon - Tegne figur for å forstå bedre - Omformulere problemet til egne ord - Vurdere om det er tilstrekkelig med informasjon for å løse oppgaven
Fase to: Å lage en plan	<ul style="list-style-type: none"> - Tegne hjelpefigur for å lage en plan - Tenke på hvordan oppgaven kan løses - Skrive ned i boka ulike måter å løse oppgaven på - Eliminere ulike planer eller fremgangsmåter
Fase tre: Å utføre planen	<ul style="list-style-type: none"> - Utføre beregning, tegning eller lignende metode for å finne løsningen - Skrivning i boka, hvor eleven forsøker å løse oppgaven - Utførelse av plan fra fase to
Fase fire: Å verifisere	<ul style="list-style-type: none"> - Sjekke løsningen ved å utføre ytterligere beregninger - Gjennomgang av sin fremgangsmåte - Sjekke beregningsfeil eller annen feil i fremgangsmåten - Utføre logiske argumenter (reflektere), for å sjekke om løsningen gir mening til konteksten som er representert

Tabell 1: tabellen viser oversikt over de ulike fasene og deres kjennetegn.

2.4 Heuristisk løsningsstrategi

Begrepet heuristikk kommer fra det greske ordet “Evriskein” som betyr “å oppdage” (Mousoulides & Sriraman, 2020). Dette begrepet brukes tett på løsningsstrategier i problemløsningen. I henhold til definisjonen som ble laget av Pólya i 1945, er heuristikk

studien av midler og metoder for problemløsning, og viser til erfaringsbaserte teknikker for problemløsning, læring og oppdagelse som vil styrke ens evne til å løse problemer (Pólya, 1945). Heuristiske løsningsstrategier er strategier som brukes for å løse en rekke ikke-rutinemessige problemer. Ulike heuristiske løsningsstrategier kan være å tenke på et liknende problem, tegne bilder eller diagrammer, tenke baklengs eller å gjette og sjekke. De ulike heuristiske løsningsstrategiene har ulike formål som å hjelpe problemløseren med å forstå problemet, reformulere eller forenkle problemet, identifisere likheter og ulikheter med andre liknende problemer, og identifisere mulige løsninger. Disse heuristikkene, ofte brukt i kombinasjoner, kan brukes til å løse ulike typer problemer, selv om det ikke er noen garanti for at det å bruke disse heuristikkene vil være vellykket. Pólyas fire stegs problemløsnings modell (Pólya, 1945), kan tolkes som en strategi på hvordan problemløsning i matematikken burde foregå. Derimot, som Schoenfeld (1989) foreslår, i selve problemløsningen vil spesifikke heuristiske strategier være mer praktiske å kunne, siden det direkte vil hjelpe i problemløsningen. Schoenfelds (1979) studie kom frem til at når heuristiske strategier innenfor problemløsningen ble identifisert og lært, så ville det ha en stor påvirkning på elevens problemløsning prestasjon. Videre foreslår han at spesifikke heuristiske strategier burde bli navngitt eksplisitt og deres bruk burde bli forklart i lik grad som andre matematiske strategier og prosedyrer.

2.4.1 Valg av heuristiske strategier

Gjennom denne løsningsprosessen så velger man seg en eller flere heuristiske strategier. I den matematiske verden betyr strategier det samme som fremgangsmåter som benyttes for å løse et problem eller øke forståelsen av problemet. I skolegangen lærer man seg mange matematiske prosedyrer. Som elev blir man nødt til å huske mange matematiske prosedyrer, men det er ikke nødvendigvis slik at man har forståelse for hvorfor disse prosedyrene fungerer (Lithner, 2008). For eksempel en elev som lærer seg pluss, minus, gange og deling, men ikke vet når disse prosedyrene eller algoritmene skal brukes i henhold til ulike situasjoner. Når man ikke vet i hvilken situasjon slike algoritmer skal brukes, så mister man hensikten til å kunne selve algoritmen, noe som kan tyde på at man kun har en imitativ forståelse (Lithner, 2008). Dermed er det også viktig at elever lærer seg hensikten bak de ulike prosedyrene i

matematikken, slik at de klarer å overføre disse som strategier til nye situasjoner de møter på.

Det finnes et hav av strategier som brukes innenfor et tema i matematikken, som for eksempel geometri. Selv om disse strategiene i hovedsak brukes for å løse oppgaver innenfor geometrien kan de utvides til å gjelde andre områder av faget. Slike strategier vil være svært nyttig å lære seg, slik at strategiene man kan ikke kun er begrenset til ett område (Novotná et al, 2014). Eksempel på slike strategier kan være å konkretisere eller tegne en illustrasjon som beskriver problemet, denne type strategi kan brukes på flere områder i matematikken. Det er noen studier om hvilke strategier elever bruker når de løser problemløsningsoppgaver, men med disse har man ikke klart å finne en konkret måte på hvordan undervisningen i matematikken bør foregå. Vi ser heller tegn på at ved ulike problemer så varierer problemløsningsstrategiene for ulike elever (Begle, 1979, referert i Schoenfeld, 2016). For at man skal velge en god strategi å benytte seg av er man nødt til å forstå hva problemet går ut på. Hvis man ikke helt vet hva som skal gjøres, så vil mange velge å gi opp (Pólya, 1945; Schoenfeld, 1985). Det er enklere å fortsette å løse en oppgave, dersom man antar at løsningen nærmer seg. Hvis man opplever at løsningen ligger langt unna og at man ikke kommer noen vei, så er det større sjans for at man mister viljen til å løse problemet (Pólya, 1945; Schoenfeld, 1985).

Undervisningen har en stor påvirkning på hvordan elever benytter seg av problemløsningsstrategier. Dersom man blir undervist at man skal bruke bestemte prosedyrer og algoritmer, så vil man bli for opptatt av å kun bruke de prosedyrene og algoritmene. Derimot om man lærer seg at man kan bruke alle de strategiene man kan, så lenge det fungerer på oppgaven, så blir man mer opptatt av å resonnerer over hvilke strategier man bruker (Novotná et al, 2014). Dette vil føre til lettere strategivalg og høyere grad av resonnering under oppgaveløsningen. Her spiller det en stor rolle om man kan mange ulike løsningsstrategier, slik at man kan velge mellom disse under problemløsningen. I mange tilfeller er man nødt til å bruke eller teste ut ulike strategier for å komme frem til løsningen i problemløsning situasjoner

Hvis jeg gjennom min erfaring og tidligere forskning skulle dannet meg en oversikt over elevers grunnlag for valg av strategi, så ville jeg først og fremst sagt at det første som påvirket deres valg av strategi er komfort. Elevene velger operasjon ut ifra hva som er

mest komfortabelt og/eller det de har jobbet med nylig i timene (Schoenfeld, 1985). Deretter er det mange som enten velger å gjette på hvilken operasjon de skal bruke, eller velger operasjon ved å se på hvilke verdier og størrelser som er oppgitt i oppgaven (Sowder, 1989). Det er også elever som prøver ut ulike matematiske operasjoner uten en konkret grunn for å bruke akkurat den type operasjon (Novotná & Sarrazy, 2005). Mange velger også å se etter noen nøkkelord i teksten og deretter velge operasjon ut ifra det, f.eks. ord som «alle sammen» kan føre til at elevene adderer sammen verdiene som er opplyst i oppgaven (Sowder, 1989). Andre grunnlag for valg av strategier kan være å bestemme hva svaret bør være, og deretter finne en operasjon som gir omtrentlig likt svar eller velge operasjon ut ifra det teksten handler om

2.4.2 Ulike heuristiske strategier

Det kan ligge til grunn mange ulike årsaker for valg av løsningsstrategi (Sowder, 1989). Under er det forklaring om de mest vanlige heuristiske strategiene som blir brukt under problemløsningen. Disse strategiene går ut på hvordan ulike personer nærmer seg problemløsningsoppgaver på en kreativ måte. Ofte brukes slike strategier i et møte med rike oppgaver, som har muligheten til å løses på mange forskjellige måter (Mousoulides & Sriraman, 2020; Pólya, 1945). Jeg vil i min forskning bruke denne operasjonaliseringen av de ulike heuristiske strategiene.

Analogi strategien: Analogi er en strategi hvor man ser etter likhet i andre problemer eller oppgaver. I en slik strategi tar vi løsningen fra et lignende problem eller kunnskap fra det problemet for å finne ut hvordan man løser problemet man har møtt på (Novotná et al, 2014). I mange tilfeller ser man elever prøve å huske tilbake på hva de har gjort i timene eller gjort når de løser et lignende problem, istedenfor å prøve å resonnerer selv. På den måten trenger de ikke å tenke på hvilken strategi som er best å benytte seg av, men heller bruke strategien de har brukt tidligere. En slik strategi kan fungere i mange tilfeller, oftest i de mindre kompliserte tilfellene. Elever i skolen kan ofte gjøre oppgaver i læreboka ved å se på de tidligere eksemplene som blir vist.

Gjett, sjekk og revidering: Denne strategien går ut på at man ut ifra sine forkunnskaper og tidligere erfaringer gjetter på en løsning til problemet. Deretter sjekker man om løsningen stemmer overens med problemet. Dersom nødvendig gjetter man flere

ganger, men med hensyn på sine tidligere gjetninger. Slik fortsetter man frem til man kommer frem til riktig løsning av problemet (Novotná et al, 2014). Dette er en strategi som ofte har stor variasjon i effektivitet. Det kan være svært effektivt i noen tilfeller, mens i andre situasjoner så vil det ikke være effektivt i det hele tatt. Samtidig kommer det an på brukeren av strategien, vedkommende er nødt til å være flink til å sjekke hva gjetningene førte til. Polya (1994) omtaler denne heuristiske strategien som “examine your guess”. Dette går ut på å utforske de gjetningene vi har ut ifra oppgavens opplysninger. Gjetningen din kan være riktig eller gal, men burde undersøkes og ikke fraskrives uten å ha gjort en form for sjekk.

Arbeide bakover: Denne strategien er veldig vanlig i matematikken. Vi antar at det vi er nødt til å finne eller bevise, stemmer, og deretter arbeider vi ut ifra denne antagelsen (Mousoulides & Sriraman, 2020). Denne strategien brukes i hovedsak på deler av oppgaven og er uvanlig å bruke på hele løsningen (Novotná et al, 2014).

Illustrasjon/Konkretisering: Denne strategien går ut på å bruke grafiske fremstillinger, tabeller, illustrasjoner eller annen måte for konkretisering av problemet som et hjelpemiddel til å løse problemet (Mousoulides & Sriraman, 2020; Novotná et al, 2014, Solvang, 1993). Det viktige med denne strategien er at det er ord som blir oversatt til illustrasjonen eller konkretiseringen som blir benyttet. Her kan man for eksempel velge å lage en figur for å lettere forstå oppgaven. Denne strategien er svært brukbar i mange situasjoner. Ved å tegne eller finne en form for konkretisering, så blir det mye lettere å forstå problemet.

Dele opp problemet: Denne strategien går ut på at man deler opp problemet eller oppgaven i mindre deler (Novotná et al, 2014). Da er hensikten å sørge for at hver del er enklere å forstå og løse, meningen er at det skal være lettere å konsentrere seg om en bit om gangen. Etter at hver del er løst, så kan dette settes sammen tilbake til sitt helhetlige problem, slik at man klarer å løse den (Pólya, 1945). Ofte kan dette være lurt, spesielt i de situasjonene hvor man har et stort og komplekst problem. Akkurat som at man ikke kan gjøre alt på en gang eller multitaske, så hjelper det å dele opp et større problem i mindre deler, slik at man kan «angripe» et og et problem av gangen (Novotná et al, 2014).

Se etter mønster: Denne strategien går ut på at man skal prøve å oppdage et mønster i problemet (Fan & Zhu, 2007). Å oppdage mønster kan gjøres på mange forskjellige måter og er avhengig av oppgavene og løseren. Man kan for eksempel se etter om det er noe symmetri til stede, eller om det er et spesielt mønster i tallene eller figurene. Man kan også generalisere mønsteret, slik at man kan bruke formler eller prosedyrer som kan hjelpe til med å løse problemet (Mason et al., 2010).

Tilfeldig beregning: Denne strategien går ut på at man bruker tallene fra oppgaven og utfører de grunnleggende matematiske regneoperasjonene, som addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon (Novotná & Sarrazy, 2005). Disse beregningene er tilfeldige og svært sjeldent korrekte når man arbeider med oppgaver eller problemer på et høyere nivå enn barneskolen.

Løse likning: Denne strategien går på å forstå problemet og deretter omformulere problemet om til en eller flere likninger, som kan ses på som en form for generalisering av problemet (Mason et al., 2010). På den måten kan man løse likningen eller ligningssystemene ved bruk av matematikk og de algebraiske reglene.

Introdusere hjelpeelementer: En annen strategi er å introdusere egne hjelpeelementer som ikke er til stede i oppgaven, eller utføre en antagelse (Mousoulides & Sriraman, 2020). Dette er en snarvei man benytter seg av for å få hjelp til å løse problemet. Denne snarveien er ikke gyldig dersom hjelpeelementer forstyrrer oppgavens kontekst og situasjon, og vil sørge for at løsningen ikke nødvendigvis er korrekt. Ofte brukes denne strategien når løseren ikke klarer å løse problemet med opplysningene som har blitt gitt, og mener at det bør være flere opplysninger i oppgaven. Hjelpeelementet som introduseres kan variere i stor grad, samt sette nye rammer for situasjonen i oppgaven.

2.6 Historisk perspektiv på problemløsning

Som mange andre felt i matematikken har det også vært forsket på problemløsning. Problemløsningen har gjennom årene vært berørt av ulikt syn. På 1970 - tallet var fokuset i problemløsningsforskningen på hvilke aspekter som gjør problemløsning vanskelig for elever (Lester, 1994). I denne studien ble vanskelighetsgraden til problemet eller oppgaven kategorisert ut ifra fire variabler som analysen baserte seg på. De fire variablene var innholdet til oppgavene, hvilken kontekst oppgaven hadde,

hva slags struktur oppgaven hadde, syntaksen til oppgaven og strategibruken i oppgavene (Lester, 1994). Disse variablene gikk da ut på hvordan oppgaven ble presentert, formulert, innhold og hvilke strategier oppgavene satt opp til at man skulle bruke for å løse dem. Gjennom forskningen har de kommet frem til at problemløsning ikke kun er avhengig av oppgaven, men også avhengig av problemløseren som skal løse denne oppgaven (Lester, 1994). På den måten kan man tenke at problemløsning har to hovedfaktorer som påvirker løsingen. Det første vil være oppgaven og den andre vil være problemløseren som løser oppgaven. Dette er i samsvar med dagens forståelse av problemløsning blant ulike matematikere og matematikdidaktikere.

Som en naturlig reaksjon på forskningen til Lester (1994) ble det i senere tid også satt fokus på problemløseren. I 1980-tallet var det et større fokus på problemløseren, ved å i hovedsak prøve å se og forstå hva som skiller gode og dårlige problemløsere fra hverandre. Alan Schoenfeld (1985) var en av forskerne som arbeidet med dette, og han fant ut av fem hovedområder som skilte de gode fra de dårlige problemløserne. Det første funnet var at gode problemløsere ofte kan mer enn dårlige problemløsere, i tillegg til at de gode problemløserne kan dele kunnskapen inn i kognitive skjemaer i hodet. Dette betyr at de elevene som kan mer i matematikk, er de elevene som mest sannsynlig er stand til å løse flere problemløsningsoppgaver. De elevene som kan lite, vil ikke ha kunnskapen til å løse problemløsningsoppgaver, eller eventuelt bruke unødvendig mye tid på å løse problemløsningsoppgaver. Å kunne det matematiske ikke nødvendigvis holder i seg selv, men også at man er i stand til å forstå i hvilke situasjoner de ulike heuristiske strategiene bør brukes (Schoenfeld, 1987).

Det andre funnet var at gode problemløsere fokuserer mer på strukturen som problemløsningsoppgaven har, imens de dårlige problemløserne ser mer overfladisk på strukturen (Schoenfeld, 1985). Dette viser at det er en forskjell om problemløseren er klar over hvordan struktur oppgaven har, noe de gode problemløserne er opptatte av i forhold til de dårlige problemløserne.

Det tredje funnet var at de dårlige problemløserne ikke var noe særlig klar over deres styrker og svakheter, imens de gode problemløserne var mer klar over hvilke styrker og svakheter de hadde (Schoenfeld, 1985). Dette viser at det er viktig å være klar over sine styrker og svakheter, for å løse problemløsningsoppgaver. Ved å være klar over

sine styrker og svakheter har man muligheten til å bruke de strategiene man behersker, samtidig prøve å unngå sine svakheter dersom mulig. Ved å være klar over sine styrker og svakheter vil man også kunne vite hvilket området man kan forbedre seg på, slik at man kan bli en bedre problemløser.

Det fjerde funnet var at gode problemløsere bruker tid og er flinkere til å analysere sin egen problemløsningsprosess, samt at de endrer strategier etter behov, i forhold til de svake problemløserne (Schoenfeld, 1985). Dette betyr at for å løse en problemløsningsoppgave godt, så burde man bruke god tid på å forstå oppgaven og analysere oppgaven. Uten forståelse av oppgaven eller problemet vil man ikke være i stand til å løse det korrekt. Det vil også være en utfordring i å vite hvordan man kan løse problemet og hvilke strategier som kan brukes. Samtidig blir man nødt til å være fleksibel når det gjelder strategier, slik at man kan tilpasse strategiene til oppgaven og eventuelt bruke ulike strategier under problemløsningen for å nå målet man ønsker.

Det femte og aller siste funnet var at gode problemløsere har en tendens til å være mer opptatte av gode løsninger enn det de dårlige problemløserne er (Schoenfeld, 1985). Dette viser at ved å være opptatte av å ha gode løsninger, så kan man også bli en god problemløser. Gode problemløsere er opptatte av å bekrefte at løsningene deres er gode, i motsetning til de dårlige problemløserne som i mange tilfeller kan være tilfredsstillt med å kun få et svar på problemet. Når man kun får et svar på problemet kan det i mange tilfeller hende at disse svarene ikke stemmer overens med den korrekte løsningen til problemet. De gode problemløserne ønsker å kvalitetssikre løsningene sine, noe som vil sørge for at de kan endre sine løsninger dersom de i første omgang ikke får en korrekt løsning.

I Schoenfelds (1985) studie, så har han brukt elever som hadde lite erfaring med problemløsning og matematikere fra universitetsnivå som ble sett på som personer med mye erfaring med problemløsning. I denne studien fikk elevene tilrettelagt undervisning som handlet om oppgaven, noe matematikerne ikke fikk. Til tross for dette kom Schoenfeld frem til at matematikerne var flinkere til å løse problemløsningsoppgavene. I denne studien observerte Schoenfeld at universitets matematikerne hadde flere overganger mellom de ulike fasene enn elevene. Elevene derimot startet med å lese oppgaven og deretter prøve å løse

problemløsningsoppgaven på den måten de mente oppgaven burde løses. Et slikt mønster så han i seks av ti elever. Schoenfeld (1985) resonnerer seg frem til at det som foregikk i løsningsprosessen var at elevene så etter nøkkelinformasjon og ord, slik at de kunne løse problemløsningsoppgaven lik oppgaver de hadde løst før. Dette fører til at elevene starter med å bruke en strategi, og dersom det ikke fungerer, så mister de viljen til å prøve å løse problemløsningsoppgaven. Han oppdaget at hos matematikerne, altså de som var gode til å løse problemløsningsoppgaver, så brukte de god tid på analysen av oppgaven i forhold til elevene. Dette viser at de var mer opptatte av å finne ut av hva oppgaven spurte etter, hvilke informasjon det ga og hvilke rammer som har blitt satt til grunn. Dette førte til at disse matematikerne brukte mindre tid på å løse problemløsningsoppgavene enn elevene.

I 2003 utga Gorodetsky & Klavir en forskningsartikkel hvor de hadde utført en kvalitativ forskningsstudie der de hadde forsket på hva som er forskjellen mellom en alminnelig problemløser og en god problemløser. I forskningen deres så brukte de elever fra mellomtrinnet, som løste problemløsningsoppgaver før de lærte problemløsningsstrategier og etter de lærte problemløsningsstrategier. I forskningen kom Gorodetsky & Klavir (2003) til at de gode problemløserne brukte i hovedsak de samme eller like problemløsningsstrategier før som etter læringen av strategiene. De alminnelige problemløserne derimot byttet på strategiene som ble brukt før læringen og etter læringen. Hvis vi sammenlikner de alminnelige problemløserne med de gode så kan vi se at de alminnelige fokuserer på det de lærte, imens de gode problemløserne fokuserte heller på hva problemet var og hvilke strategier som ville fungere for å løse problemløsningsoppgaven (Gorodetsky & Klavir, 2003). Dette er i samsvar med det andre funnet til Schoenfeld, om at de gode problemløserne fokuserte mer på hva slags struktur oppgaven hadde i forhold til de dårlige problemløserne (Gorodetsky & Klavir, 2003; Schoenfeld, 1985).

Problemløsningsforskningen har pågått i lang tid, og i det siste har hovedfokusert vært på læreren som underviser problemløsning og hvordan klasserommet er. Fra analysen til Hattie (2009) kommer det frem at læreren har en påvirkning på elevenes læring. Det har også i nyere tid vært fokus på hvordan problemløsning skal læres. I tidligere forskning har det vært slik at selve matematikken skal læres først, og at man deretter fokuserer på heuristiske strategier for å løse problemer (Pólya, 1945). Ved å kunne

matematikken kan man så bruke den til å løse ulike problemet og lære seg ulike strategier som kan være nyttig i løsingen. Nå tenker man at dette kan gå motsatt vei, altså at man tilegner seg matematiske kunnskaper ved hjelp av problemløsning, dette heter problembasert læring.

I problembasert læring bruker elevene problemløsningsoppgaven, case-en eller scenarioet til å definere sine egne læringsmål. Deretter gjør de uavhengige, selvstyrte studier, før de returnerer til gruppen sin for å diskutere og forbedre kunnskapen de har fått. Problembasert læring handler altså ikke om problemløsning i seg selv, men bruker egnede problemer for å øke kunnskap og forståelse. Prosessen er klart definert, og de mange variasjonene som finnes følger alle lignende prosedyrer i prosessen (Lesh & Zawojewski, 2007; Lester, 2013). Lester (2013) har utført en studie hvor det ble brukt nettopp dette. Studien gikk ut på at elever fra over 40 klasserom prøvde å tilegne seg kunnskap i matematikk ved hjelp av problembasert læring. Fra studien kom det frem at elevene som deltok i problembasert læring gjorde det bedre når det gjaldt problemløsning og andre matematiske oppgaver, enn elevene fra kontrollgruppen (Lester, 2013).

2.7 Problemløsning i den norske læreplan

Problemløsning blir stadig sett på som viktigere i matematikken. Mye av årsaken er at problemløsning blir sett på som kompetanse som trengs mye av for fremtiden. Dette fordi problemløsning ofte bidrar til dybdelæring i de ulike matematiske emnene, som forsterker forståelsen. Her er det viktig at elevene ikke arbeider repetitivt, men kreativt. Problemløsning sørger for at vi blir mer løsningsorientert og klarer å tenke mer utforskende.

Vi ser også at i den norske læreplanen har problemløsning blitt vektlagt gjennom årene. I læreplanen fra 1987 var problemløsning et hovedelement i matematikkfaget (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1987), og skulle hjelpe elevene med å tenke kreativt. Her skulle elevene være i stand til å finne ut av flere måter å løse problemer

på og kunne vurdere om resultatet ga mening (kirke- og undervisningsdepartementet, 1987). I læreplanen fra 1997, altså reform 97 ble problemløsning satt litt mer i det skjulte. Problemløsning ble det fokusert litt mindre på sammenliknet med den tidligere læreplanen. Her skulle problemløsningens oppgave være hverdagslige tilfeller (Nasjonalt-læremiddelsenter, 1996). I neste læreplan, altså kunnskapsløftet LK06 som vi har vært i bruk frem til 2020, har problemløsningskompetansen blitt sett på som en kompetanse som skal brukes for å forstå problemer, omforme problemer, løse dem og vurdere hvor gyldig løsningene er (Utdanningsdirektoratet, 2013). Så kommer vi til den nye læreplanen som kom i 2020, som argumenterer for at problemløsning er svært viktig. Dette ved å ta for seg et kjerneelement som heter Utforsking og problemløsning. Utdanningsdirektoratet (2020b) beskriver kjerneelementet slik:

Utforsking i matematikk handler om at elevene leter etter mønstre, finner sammenhenger og diskuterer seg fram til en felles forståelse. Elevene skal legge mer vekt på strategiene og framgangsmåtene enn på løsningene. Problemløsning i matematikk handler om at elevene utvikler en metode for å løse et problem de ikke kjenner fra før. Algoritmisk tenkning er viktig i prosessen med å utvikle strategier og framgangsmåter for å løse problemer og innebærer å bryte ned et problem i delproblemer som kan løses systematisk. Videre innebærer det å vurdere om delproblemene best kan løses med eller uten digitale verktøy. Problemløsning handler også om å analysere og omforme kjente og ukjente problemer, løse dem og vurdere om løsningene er gyldige.

Dette kjerneelementet er fremtidsrettet, med tanke på at fremtidens arbeidsliv ønsker arbeidere som er i stand til å tenke kritisk og løse problemer på en kreativ måte (Ertzeid, 2022). For at elevene i en fremtid skal kunne løse utfordringene de møter på, er de nødt til å kunne kreativt resonnerer og ha erfaring med å håndtere problemløsning situasjoner. Denne kompetansen skal matematikkfaget kunne tilby og utvikle, slik at elevene har muligheten til å bli flinkere på dette.

3 Metode

Målet med oppgaven er å beskrive hvordan elever på 9.trinn arbeider med problemløsningsoppgaver med fokus på hvilke heuristiske strategier som tas i bruk. For å besvare denne problemstillingen har jeg samlet inn datamateriale. I denne delen skal jeg forklare hvordan jeg har samlet inn data som er relevant for problemstillingen. Deretter skal jeg beskrive hvordan dataen har blitt analysert og hvordan jeg har sørget for god kvalitet på resultatene. Samtidig beskriver jeg ulike etiske hensyn som ble tatt betraktning til under forskningen. Til forskningen har jeg brukt to problemløsningsoppgaver som jeg ville at fire elever på 9.trinn skulle løse. Disse oppgavene ble løst under et oppgavebasert intervju, slik at jeg kunne analysere hvilke heuristiske strategier som ble brukt og i hvilke faser disse heuristiske strategiene ble brukt. Dataen ble tolket og analysert deduktivt med problemstillingen som utgangspunkt.

3.1 Valg av metode

I dette forskningsprosjektet er det elevenes problemløsningsprosess og heuristiske strategier som er i fokus. Mitt mål er å forstå hvordan problemløsningsprosessen foregår, hvilke strategier elevene benytter seg av, og å si noe om normen blant 9.trinns elever når det gjelder løsning av problemløsningsoppgaver. For å gjøre dette ønsker jeg å oppnå dybdekunnskap fra noen utvalgte elever og deres arbeid med problemløsningsoppgaver. Jeg ønsker å fokusere på noe lite og konkret men gå i dybden, istedenfor å ta for meg noe stort og bredt. I tillegg ønsker jeg å undersøke menneskelige prosesser under en konkret setting. For å gjøre dette er kvalitativ forskningsmetode best egnet (Larsen, 2017; Johnson & Christensen, 2014; Moen & Karlsdóttir, 2011, Postholm, 2010).

3.1.1 Semistrukturert intervju

De vanligste kvalitative forskningsmetodene er intervju og observasjon. Både intervju og observasjon er metoder som vil gi meg innsikt i hvordan elevene arbeider med oppgaver og hvordan løsningsprosessen foregår. Ved bruk av observasjon, ville jeg observert elevene arbeide og fått samlet data om hvordan de arbeider med oppgavene og hvilke heuristiske strategier som blir brukt. En av ulempene eller begrensningene ved å bruke observasjon som metode ville vært at det ville vært

utfordringer med å forstå hvorfor elevene tar de ulike valgene og muligheten til å stille spørsmål om hva de tenker (Dalland, & Andersson-Bakken, 2021). Jeg ønsker å trekke frem tankene og refleksjonene til elevene, og få en forståelse for hvordan elevene tenker under løsning av problemløsningsoppgaver og hvordan de faktisk løser disse oppgavene. Med hensyn på det har jeg bestemt meg for en metode som er i stand til å både observere oppgaveløsingen til elevene samtidig som at jeg får muligheten til å intervju dem, altså semistrukturerte intervju (Dalen, 2011; Kvale & Brinkmann, 2009).

Når man bruker intervju som forskningsmetode så er det åpent for hvordan strukturen kan være. Noen intervjuer vil ha fast bestemte spørsmål på forhånd som skal stilles, mens andre intervjuer vil være mer tilpassede til hver situasjon (Johannessen et al., 2016). Det er noen fordeler og ulemper med både strukturerte intervjuer og ustrukturerte intervjuer. Fordelene med å bruke strukturerte intervjuer som forskningsmetode er at det vil bli stilt like spørsmål til alle informanter, som gjør det mye lettere å se sammenhengen mellom intervjuene. Samtidig vil alt være planlagt og selve intervjueren trenger kun å gjennomføre intervjuet ved å stille de spørsmålene som er planlagt. Ulempen er at det ikke gir muligheten til tilpasning underveis og rom for å stille spørsmål som ikke er planlagt. Fordelen med ustrukturerte intervjuer vil være at de er åpne og justerbare til enhver situasjon og gir muligheten til å stille oppfølgingsspørsmål ut fra svarene informantene gir (Dalen, 2011; Johannessen et al., 2016). For min del er det viktig at alle elevene som deltar løser de samme problemløsningsoppgavene, slik at jeg kan sammenlikne løsningsmetodene deres og strategiene deres og se etter større sammenhenger. Samtidig er det viktig at jeg har muligheten til å stille oppfølgingsspørsmål, ha en fleksibilitet og gi muligheten til elevene for å utdype svarene deres. Ved å både kombinere strukturen som trengs for at elevene gjør like oppgaver, og åpne for at elevene og jeg kan prate fritt i henhold til situasjonen, har jeg valgt å bruke en semistrukturert intervjuform. Semistrukturert intervjuform passer godt til å undersøke min problemstilling, men det setter et krav om at jeg er nødt til å lage gode spørsmål under intervjuet (Dalen, 2011).

3.1.2 Oppgavebasert intervju

Den kvalitative metoden jeg har brukt for datainnsamling er oppgavebasert intervju. Oppgavebasert intervju er en form for intervju der informanten eller også kalt

oppgaveløseren, og intervjueren er i et intervju med et samspill med en eller flere oppgaver til stede (Goldin, 2000). Intervjuet fungerer slik at informanten er i et intervju med intervjueren, hvor informanten både svarer på spørsmål fra intervjueren, men også forholder seg til oppgavene som blir gitt. Hvert enkelt oppgavebasert intervju vil være unik siden interaksjonen mellom intervjueren, informanten og oppgaven, vil være forskjellig hver gang. Oppgavebasert intervju gjør at forskeren kan fokusere mer på hvordan informanten tenker og løser oppgavene, istedenfor å kun sjekke om informanten svarer korrekt eller galt på oppgavene. Dette betyr at intervjueren vil under intervjuet observere, registrere og tolke det informanten sier, gjør, skriver og tenker. Hva intervjueren velger å observere kommer helt an på forskningsspørsmålet og hensikten til intervjuet. Oppgavebasert intervju er relevant for mitt forskningsprosjekt siden jeg har et ønske om å forstå hvilke heuristiske strategier elevene bruker og i hvilke faser vi ser disse heuristiske strategiene. Oppgavebasert intervju vil øke sannsynligheten for at jeg vil få data som vil gi meg den informasjonen jeg trenger (Clarke et al., 2011).

Oppgavebasert intervju har også noen begrensninger (Goldin, 1997). Metoden kan påvirkes av både den sosiale konteksten eleven blir satt i og den psykologiske konteksten. Et intervju er en unaturlig setting som kun foregår for at forskeren skal samle inn data. Når intervjueren er en fremmed person for eleven, kan dette påvirke interaksjonen mellom intervjueren og eleven. Intervju som foregår i skolen kan bli oppfattet som en test av elevens kompetanse, noe intervjuet ikke er. Eleven kan også bli påvirket av eksterne grunner, som humør, om eleven er trøtt, sulten eller muligens distraheret. Det kan også være et ønske om å gjennomføre intervjuet fortrest mulig for å rekke friminutt eller tilbringe tid med venner, men også muligheter for at eleven ønsker å bruke lang tid for å slippe timen og ha en slags pause fra vanlig undervisning. Med videokamera til stede kan det også påvirke eleven, ved at det kan være en uvant setting for eleven.

3.2 Problemløsningsoppgaver

I mitt forskningsprosjekt ønsket jeg å ha gode problemløsningsoppgaver, i dette tilfellet var gode oppgaver, åpne og rike oppgaver. Som forklart tidligere er rike oppgaver er oppgaver som kan løses på mange ulike måter, som ikke nødvendigvis har en klar

fremgangsmåte. Her vil løseren stå fritt til å bestemme seg for fremgangsmåte (Björkqvist, 2003). Samtidig tenkte jeg at å kun ha én oppgave ikke ville gi meg nok dybde i elevens strategivalg, og dermed valgte jeg å ha to ulike oppgaver. Ifølge Goldin (2000) er det lurt å gi oppgaver i en rekkefølge der vanskelighetsgraden er økende. På den måten vil oppgavene føles mer overkommelige, og muligens den siste vil være mer utfordrende. Dette tok jeg i betraktning når jeg bestemte rekkefølgen for disse to oppgavene. Under vil jeg forklare kort hva de ulike oppgavene er.

3.2.1 Oppgave 1 - Bonden og hans dyr

På en gård har bonden kyllinger og kyr (kuer). Til sammen har disse dyrene 12 hoder og 40 bein. Hvor mange av dyrene er kyllinger, og hvor mange er kyr (kuer)? Denne oppgaven kan løses på flere måter, kjente strategier som kan brukes er blant annet illustrasjon/konkretisering ved å lage tegning eller tabell, analogistrategien (sette opp likningssett, dersom du har sett en liknende oppgave før) eller gjett, sjekk og revider. Oppgaven er formulert med lette setninger, slik at elevene ikke skal ha forståelsesproblemer, samt at tallene ikke er alt for høye for å forebygge mot beregningsvansker.

3.2.2 Oppgave 2 - Gressplenen

Hver sommer pleier Jenny og Mona å klippe gressplenen til naboen. Jenny pleier å bruke 2 timer på å klippe denne gressplenen. Venninna til Jenny, Mona, bruker 4 timer på å klippe den samme plenen. Hvor lang tid tar det om Jenny og Mona samarbeider for å klippe plenen? Denne oppgaven er også formulert med lette setninger, slik at elevene ikke skal ha forståelsesproblemer, samt at tallene ikke er alt for høye for å forebygge mot beregningsvansker. Denne oppgaven er lik en oppgave som ble brukt i en annen forskning om rike matematiske problemer (Hedrén et al., 2005).

3.2.3 Oppfølgingsspørsmål

Når elevene løser oppgavene vil det dukke opp noen spørsmål som jeg ønsker å stille, dette er oppfølgingsspørsmål. Etter at oppgavene ble bestemt, var det naturlig å lage en intervjuguide med oppgavene og mulige oppfølgingsspørsmål til elevene. Disse oppfølgingsspørsmålene er spørsmål som jeg kan stille underveis i oppgaveløsingen og etter oppgaveløsingen. Slike spørsmål burde være åpne, slik at elevene selv kan

få utdype det de ønsker å formidle og svare på ulike måter (Hunting, 1997). Eksempler på aktuelle oppfølgingsspørsmål er “Hva tenkte du her?”, “Hvordan kom du frem til dette?”, “Hvorfor valgte du å gjøre det på denne måten?”. Med slike spørsmål blir informanten nødt til å forklare hva de gjorde, hvorfor de valgte å gjøre det, og hvordan de valgte å gjøre det. Dette er spørsmål som ikke er ledende, men som vil hjelpe meg med å forstå løsningsprosessen, hvilke heuristiske strategier som ble brukt, eventuelle andre valg som ble tatt, og årsaken bak valg av strategiene (Goldin 2000).

Goldin (2000) snakker også om oppfølgingsspørsmål som skal gi faglig støtte til elevene dersom de står fast. Dette er spørsmål som har et mål om å hjelpe eleven med å komme seg videre i oppgaveløsingen, dersom vedkommende står fast. Eksempler på spørsmål som dette til mine oppgaver er “Hva betyr 12 hoder?”, “hvor mange dyr vil det være på gården dersom det er 12 hoder?”, “Hvis Jenny og Mona samarbeider, bruker de da kortere eller lengre tid?”. Disse spørsmålene kan i mitt tilfelle kategoriseres sammen med hint, og det er spørsmål og informasjon som lett kan påvirke oppgaveløsingen, i den grad at det forstyrrer elevens naturlige løsningsprosess og kan påvirke deres valg av strategier. Dermed har jeg valgt å unngå slike spørsmål og hint til det høyeste grad, og kun bestemt meg for å bruke slike spørsmål dersom jeg i intervjusituasjonen mener det er den eneste utvei.

Til tross for at jeg hadde bestemt hvilke oppfølgingsspørsmål som skulle stilles og hvilke typer oppfølgingsspørsmål som ikke bør stilles, så må jeg som intervjuer i et semistrukturert intervju være i stand til å også stille andre oppfølgingsspørsmål. Poenget med semistrukturert intervju er å tilpasse intervjuet til informanten og å stille spørsmål ut fra situasjonen. Dermed blir jeg nødt til å lage spørsmål under intervjuet og være fleksibel (Kvale & Brinkmann, 2009). Likevel er det greit å forberede seg for å være klar over hvilke type spørsmål man kan stille og ha noen spørsmål å falle tilbake på, dersom jeg ikke kommer på gode spørsmål under intervjuet. Som en lærer er man veldig vant til å hjelpe elevene, gi gode hint og stille spørsmål som gir faglig støtte. Ved å forberede noen av de mulige oppfølgingsspørsmålene på forhånd, kunne jeg forhindre at jeg gikk inn i lærerrollen under intervjuet.

3.3 Elevutvalg

I dette forskningsprosjektet har jeg valgt å intervju fire elever. Man kan tenke seg at desto flere, desto bedre resultater, men med tidsrammen til prosjektet ville det vært svært krevende med flere å elever å intervju. Samtidig ville færre elever ført til at påliteligheten til studien kan svekkes. Det er ikke bestemt hvor mange informanter som er best i kvalitative studier (Johannessen et al., 2016). I mitt forskningsprosjekt er fire elever en tilstrekkelig mengde elever å intervju for å besvare min problemstilling innenfor tidsrammen jeg ble gitt.

Alle elevene som har blitt intervjuet går på 9.trinn på ungdomskolen i den norske skolen. Dette ble bestemt allerede i starten av forskningsprosjektet, da jeg skulle bestemme meg for utvalget. Jeg ønsket å forske på ungdomsskoleelever, og kom frem til at 10.trinns elever vil være opptatt med eksamener, videregående valg og andre fremtidige relaterte ting. Dette kunne gjort det vanskeligere å finne kandidater som ønsker å delta i mitt prosjekt. Samtidig ville 8.trinnselever vært veldig ferske på ungdomsskolen med lite matematisk grunnlag fra ungdomsskolen. Dermed konkluderte jeg at 9.trinnselever ville være en fin balanse, som treffer bra for mitt forskningsprosjekt. 9.trinnselever vil ha god erfaring fra ungdomsskolen, samt ha tid og energi til å delta i forskningen min ved siden av skolegangen.

Målet var å først ha flest mulig elever som samtykker til å delta i studien, slik at jeg ut fra de elevene kunne bestemme meg for et utvalg av elever som passer til studien. Det er viktig å påpeke at elevene og alle relevante aktører ble informert om at det er frivillig å delta i studien og hva det innebar å delta i studien. For å få flest mulige kandidater til studien gikk jeg til klasserommene deres i skoletiden og presenterte mitt forskningsprosjekt og delte ut samtykkeskjema til alle de interesserte elevene. Dette var altså et bekvemmelighetsutvalg (Johannessen et al., 2016). Resultatene kan ofte påvirkes av elevenes faglige nivå. Det var derfor viktig for meg at jeg trengte elever med et variert faglig nivå for å besvare problemstillingen min. På den måten kunne jeg sørge for at jeg ikke kun undersøkte hvordan enten sterke, svake eller middels presterende elever løste problemløsningsoppgaver.

3.4 Datainnsamling

3.4.1 Pilotering

For å sjekke om oppgavene var gode, valgte jeg å utføre pilotering. Pilotering er en form for prøveintervju som jeg utfører for å forberede meg til de ekte intervjuene, dette er en viktig del av forberedelsene (Johannessen et al., 2016). I kvalitative studier med intervju er det viktig å utføre prøveintervjuer (Dalen, 2011). På den måten kunne jeg prøve meg som intervjuer og få erfaring og tilbakemelding på gjennomføringen, slik at det virkelige intervjuet kan utføres på best mulig måte (Dalen, 2011).

Jeg gjennomførte totalt to piloteringer, hvorav den første var med en medstudent og den andre var med en 9.trinns elev. Etter første pilotering fikk jeg innsikt i min rolle som intervjuer, jeg forsto hvilke spørsmål jeg burde stille underveis og hvilke oppfølgingsspørsmål jeg burde stille. Jeg fikk også erfart hva slags besvarelse jeg kunne forvente av min medstudent. I tillegg fikk jeg gode tilbakemeldinger fra medstudenten om vedkommendes erfaring med intervjuet. Endringene jeg gjorde etter første pilotering var at jeg endret på antall oppgaver fra fire oppgaver til to oppgaver, samt at jeg la til flere oppfølgingsspørsmål og at jeg oftere skulle spørre deltakeren om hva han/hun tenkte, for å få innsikt i hva deltakeren gjorde, tenkte og hvilke strategier som ble brukt. Etter andre pilotering fikk jeg innsikt i hvordan det opplevdes å ha intervju med en 9.trinns elev, som var mer aktuelt for meg siden jeg i forskningen min forsker på 9.trinns elever. Her fikk jeg vite hvordan en 9.trinns elev opplevde intervjuet, vanskelighetsgraden til intervjuet og tidsrammen som burde settes for å gjennomføre et slikt intervju. Eleven oppfylte de samme kriteriene som utvalget, og fungerte også derfor som en generalprøve. Endringene jeg gjorde etter min andre pilotering var at jeg endret på tallene i oppgaveteksten, som skulle forenkle regnestykkene. Gjennom begge piloteringene fikk jeg verdifull informasjon til å forbedre selve intervjuene, slik at jeg kunne få gode data.

3.4.2 Gjennomføring av selve intervjuene

Intervjuene ble gjennomført på skolen til elevene, i et grupperom. Her var det satt opp kamerautstyr, og deltakeren fikk anvist plass slik at kameraet kunne filme det deltakeren skrev ned. Deltakeren fikk en skrivebok, en penn med mulighet til å hviske,

og en kalkulator. Elevene fikk kalkulator fordi deres regneferdigheter ikke skulle være et hinder i løsningsprosessen.

Under intervjuet ble det benyttet av videokamera med lyd for å ta opp intervjuet. På den måten kunne jeg i etterkant se på videoene flere ganger etter behov for analysen. Ved bruk av videofilm kunne jeg se hva elevene skrev og hvisket ut i skriveboka. Samtidig kunne jeg forstå hva de pekte på eller snakket om, dersom de brukte ord som "den", "denne", "her", eller lignende ord. Ved å se hva som ble snakket om eller referert til ble det lettere å forstå og analysere dataene i etterkant. Kameraet ble satt opp slik at det i hovedsak filmet ovenfra, slik at man kunne se noen deler av informanter, deres hender og skriveboken.

Før kameraet ble slått på og intervjuet startet hadde vi en samtale om hva det innebar å delta i forskningsprosjektet, om at dette var frivillig og om hva som skulle skje. Samtidig påpekte jeg nok en gang om at det blir tatt videoopptak, slik at elevene skjønte hva som foregikk. Vi snakket også om hva hensikten med prosjektet og at dette ikke hadde noe med vedkommendes skolegang å gjøre, altså at dette ikke var noen form for vurdering av vedkommendes matematiske kompetanse. Når intervjuet startet fikk deltakerne én oppgave om gangen, og hadde full valgfrihet av løsningsmetode og arbeidsmetode med de hjelpemidlene som var til stede. Oppgaven kunne også bli lest opp for dem så mange ganger de ønsket, slik at lesevansker ikke skulle være et hinder i løsningsprosessen. Elevene ble bedt om å forklare hva de gjorde underveis og jeg som intervjuer spurte flere ganger om hva de tenkte eller gjorde når jeg besluttet at det var nødvendig for å forstå elevens løsningsprosess. Oppgavene hadde ingen tidsbegrensning, men intervjueren hadde på forhånd anslått at hver oppgave skulle ha et tidsrom på 5-20 minutter. Hvert intervju varte i 20-40 minutter.

Elevene skulle under intervjuet løse problemløsningsoppgaver skriftlig på et ark, samtidig som de forklarte sine tanker og begrunnet ulike valg og strategier de tok i bruk. Grunnen til at elevene skulle forklare sine tanker og begrunne valgene er for å la meg få en dypere forståelse i tankeprosessene som foregikk under oppgaveløsingen. Under oppgaveløsingen hadde jeg en observatørrolle, samtidig som at jeg stilte spørsmål dersom eleven gjorde noe uten å forklare det vedkommende gjorde. Da stilte jeg spørsmål som "hva gjorde du nå?", "hvorfor gjorde du det?", "hva tenker du nå?"

og lignende. Noen av elevene trengte bekreftelser underveis og da valgte jeg å bruke ord som “ja” og “mhm” for å danne en god flyt i intervjuprosessen.

Etter oppgaveløsingen så hadde elevene og jeg en samtale igjen. Denne gangen om hva de syntes om oppgavene, hva som var vanskelig og hva som var lett med oppgavene. I tillegg spurte jeg om hva de syntes om intervjuet. Når eleven jeg intervjuet gikk ut av grupperommet, så valgte jeg å skrive refleksjonsnotat umiddelbart for å få ned mine umiddelbare tanker. Ifølge Braun & Clarke (2006) er dette en gunstig metode for å hjelpe med analysen og tolkningen i etterkant.

3.5 Analyse av datamateriale

Jeg skal nå beskrive hvordan analysearbeidet i mitt forskningsprosjekt har foregått, og begrunne alle valg som har blitt tatt. I analysen har jeg først blitt kjent med dataen min ved bruk av transkribering. I tillegg har jeg notert meg ulike interessante øyeblikk som kan være relevant for problemstillingen min. Deretter har jeg strukturert og kodet datamaterialet. Til slutt har jeg sett på struktureringen og kodingen for å forstå hvilke funn jeg har.

3.5.1 Transkripsjon av intervju

Når man transkriberer intervju, så overfører man verbal kommunikasjon, ofte i form av en samtale eller lydopptak til tekst (Mergenthaler & Stinson, 1992). Transkripsjon skal derfor ikke tas lett på, siden transkripsjonen vil danne grunnlag for videre analyse, siden det gir en struktur og synliggjør samtalen som tok sted under intervjuene (Kvale & Brinkmann, 2009). Jeg har utført transkripsjonene ved å først lytte til videoopptakene uten å transkribere, for å få et innblikk i hva som skjer og hva som blir sagt. Deretter transkriberte jeg, hvor jeg skrev det verbale om til tekst. Denne typen overgang kan kalles for en delvis rekonstruksjon av intervjuet (Johannessen et al, 2016). For at slike rekonstruksjoner skal bli gode, er det en fordel at den som transkriberer er den som hadde rollen som intervjuer i intervjuet (Tjora, 2017).

Transkripsjoner kan skje på mange forskjellige måter og det er ingen spesifikk prosedyre for hvordan man skal transkribere, derimot er fokuset på at man skal transkribere på en måte som får frem innholdet og informasjonen som er relevant for

forskningen. På grunn av dette må man selv avgjøre hvilke elementer som er nødvendige å inkludere, som nøling, kroppsspråk, tonefall, volum og så videre (Kvale & Brinkmann, 2009). Jeg har av den grunn forsøkt å ta utgangspunktet i retningslinjene til Mergenthaler & Stinson (1992, s.129-130), som består av syv punkter. Disse punktene er følgende:

- I. Bevar naturligheten av transkripsjon. Den grafiske presentasjonen av ord, formen for kommentarer og bruken av tegnsetting bør være mest mulig lik. I tillegg bør det være lik form som det som er akseptert i skriftlig tekst.
- II. Bevar naturligheten av transkripsjonsstrukturen. Formatet skal være lik det som er generelt akseptert. Teksten skal være tydelig strukturert av diskursmarkører.
- III. Transkripsjonen skal være en eksakt reproduksjon. Tap av informasjon gjennom overføringen av verbal kommunikasjon til tekst skal være minst mulig.
- IV. Transkripsjonsreglene bør være universelle. Reglene for transkripsjon bør i størst mulig grad gjøre utskriftene egnet for både bruk av mennesker og maskiner.
- V. Transkripsjonsreglene skal være fullstendige. Det skal være mulig for transkribereren å utarbeide transkripsjoner kun ved å bruke disse reglene basert på hans eller hennes hverdagsspråklig kompetanse. Spesifikk kunnskap, for eksempel kodinger som stammer fra ulike språklige teorier, bør ikke være nødvendig.
- VI. Transkripsjonsreglene bør være uavhengige. Det skal være mulig transkribere ulike typer terapeutiske diskurser med samme sett med regler. Transkripsjonsstandarder bør være uavhengige av transkribereren, forståelige og anvendelige av andre.
- VII. Transkripsjonsreglene skal være intellektuelt elegante. Transkripsjonsreglene må være begrenset i antall, enkle og enkle å lære.

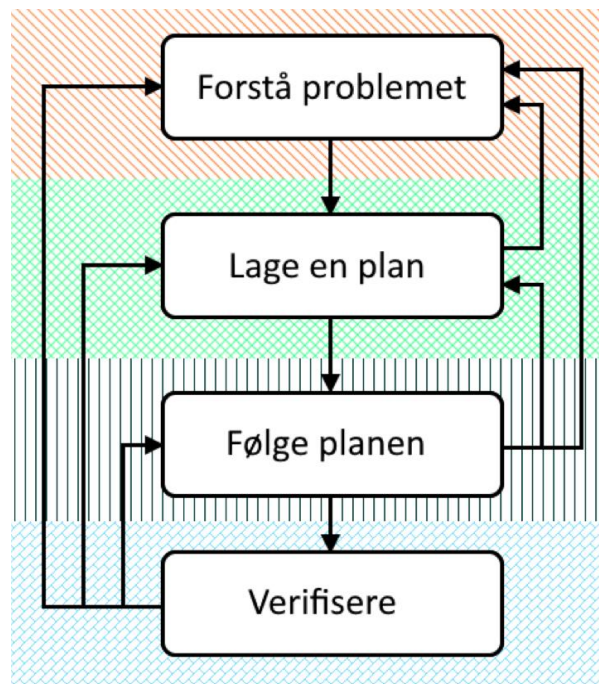
Til tross for at vi har disse syv retningslinjene, så er ikke alle delene av retningslinjene nødvendigvis mulig å oppnå i praksis, dermed er noen kompromisser nødvendige (Mergenthaler & Stinson, 1992). Jeg har i mine transkripsjoner valgt å transkribere alt av det verbale fra intervjuene, utenom irrelevante samtaler i starten og slutten av intervjuet. Jeg har ikke inkludert elementer som elevenes kroppsspråk, tonefall og

volum, men valgt å inkludere når det er stille, for å fremheve når og hvor lenge elevene tenker, eller regner for seg selv. Tenkepauser blir sett på som svært viktig når man arbeider med matematikk under intervju (Goldin, 2000). Elevene blir anonymisert og innhold som kan avsløre deres identitet blir enten anonymisert eller utelatt, elevene blir kalt for Elev A, Elev B, Elev C og Elev D.

I transkripsjonene har jeg brukt noen tegn som har spesifikke betydninger. Disse kalles for transkripsjonsnøkler. Transkripsjonsnøklerne jeg har brukt er [...] for å betegne en naturlig tenkepause opptil 5 sekunder. Dette er pauser som ofte kan oppstå når elevene skal svare på spørsmål eller når de selv prøver å forklare hva de gjør. Transkripsjonsnøkkelen [...] ble brukt når deler av det som ble sagt ble utelatt. Dette kan bli utelatt av ulike årsaker, som for eksempel at det var irrelevant informasjon eller informasjon som kan være personidentifiserbar. Siste transkripsjonsnøkkel som ble brukt er [], som ble brukt for å tilføye en kontekst. Det kan i mange situasjoner når man overfører verbal kommunikasjon til tekst være uforståelig dersom det ikke tilføyes kontekst eller forklares hva som blir sagt. Eksempler på dette kan være for eksempel når eleven sier "Fra den [] får vi at det blir gir 20". I et slikt tilfelle vil jeg i denne transkripsjonsnøkkelen [], skrive hva som er "den" som eleven referer til.

3.5.2 Hvilken problemløsningsfase

For å svare på mine forskningsspørsmål er jeg først nødt til å strukturere dataene jeg har. Dette har jeg gjort ved å identifisere fasene deltakerne var i under intervjuet. For å gjøre dette har jeg tatt utgangspunkt i rammeverket mitt som er basert på de andre rammeverkene. Det er i hovedsak basert på Pólyas rammeverk, men også tatt inspirasjon fra de andre rammeverkene, også tilpasset til mitt behov. Som nevnt tidligere har jeg tatt utgangspunktet i de tidligere problemløsningsmodellene og laget meg en modell med fire faser. Pólyas (1945) modell gir oss fire distinkte faser, som gjør at det blir lettere å tolke hvilken fase elevene befinner seg i. Disse er å forstå problemet, å lage en plan, å utføre planen, og å verifisere. Ved å inkludere pilene så ligner det mer på Yimer & Ellertons (2010) modell. Helhetlig vil denne modellen ha distinkte faser, men være en deskriptiv modell som skal forklare hvordan elevene arbeider med problemløsningsoppgaver, lik modellen til Rott et al. (2020). Modellen er illustrert under, se Figur 4.



Figur 4: Illustrasjon av problemløsningsmodellen jeg skal bruke i denne studien.

For å identifisere hvilken fase elevene befinner seg til enhver tid, så har jeg analysert transkripsjonene sammen med videomaterialet. Her har jeg gått deduktivt inn i transkripsjonene og sett etter tegn til de ulike fasene. Et eksempel som viser hvordan den deduktive analysen har foregått er fremstilt i Tabell 2. I tabellen ser vi et utdrag av transkripsjonen fra intervjuet med elev C, hvilket kjennetegn dette er og til slutt hvilken kode det har fått fra den deduktive koden.

Transkripsjon	Kjennetegn	Kode
I: Ok, hva gjør du nå?	Eleven sjekker løsningen ved å utføre ytterligere beregninger.	Fase fire: Verifisering
C: Jeg må dobbeltsjekke om det blir riktig med kyllinger og kuer. [Eleven skriver 20sek]. Ja, da blir det 12 dyr, som er hoder. Også blir det til sammen 40 bein.	Eleven spesifiserer at han/hun dobbeltsjekker.	

Tabell 2: Tabellen viser et eksempel på hvordan den deduktive kodingen av hvilken problemløsningsfase eleven befinner seg i.

I mange av situasjonene har jeg spurt elevene om hva de gjorde på det tidspunktet, noe som førte til at elevene eksplisitt forklarte hva de gjorde. I tillegg til dette har jeg brukt skriveboken elevene brukte under problemløsningen altså elevbesvarelsene, som data. Ved hjelp av å bruke ulike typer data kan jeg sørge for å få triangulert dataen,

slik at struktureringen av de ulike fasene blir mest mulig korrekt (Creswell & Miller, 2000; Patton, 1997). I Tabell 3 ser vi de ulike fasene og hva som kjennetegner de ulike fasene.

Problemløsningsfase	Kjennetegn til fasen
Fase en: Å forstå problemet	<ul style="list-style-type: none"> - Lese oppgaven - Registrere og systematisere opplysninger: Identifisere hva som er kjent, ukjent og hva oppgaven spør om - Skrive ned nøkkelinformasjon - Tegne figur for å forstå bedre - Omformulere problemet til egne ord - Vurdere om det er tilstrekkelig med informasjon for å løse oppgaven
Fase to: Å lage en plan	<ul style="list-style-type: none"> - Tegne hjelpefigur for å lage en plan - Tenke på hvordan oppgaven kan løses - Skrive ned i boka ulike måter å løse oppgaven på - Eliminere ulike planer/fremgangsmåter
Fase tre: Å utføre planen	<ul style="list-style-type: none"> - Utføre beregning, tegning eller lignende metode for å finne løsningen - Skrivning i boka, hvor eleven forsøker å løse oppgaven - Utførelse av plan fra fase 2
Fase fire: Å verifisere	<ul style="list-style-type: none"> - Sjekke løsningen ved å utføre ytterligere beregninger - Sjekke sin fremgangsmåte - Sjekke beregningsfeil i fremgangsmåten - Utføre logiske argumenter (reflektere), for å sjekke om løsningen gir mening til kontekst

Tabell 3: tabellen viser oversikt over de ulike fasene og deres kjennetegn.

3.5.3 Identifisering av ulike heuristiske strategier

Som en del av analysen har jeg valgt å identifisere hvilke heuristiske strategier elevene bruker. For å gjøre dette har jeg tatt utgangspunktet i de heuristiske strategiene som er operasjonalisert i kapittel 2.5.1. Under i Tabell 4 ser vi et eksempel fra transkripsjonen som viser hvordan den deduktive kodingen har foregått.

Transkripsjon	Beskrivelse	Kode
<p>A: Ehh.. Hvis jeg tar 6 kyllinger og 6 kuer, da har jeg 12 hoder. Dette blir, ehm, 6 ganger 2 er 12, 6 ganger [mumling 10 sek]. Da har vi kun 36 bein.</p> <p>I: Ja, stemmer.</p>	<p>Eleven prøver først å anta eller sjekke om det er 6 kyllinger og 6 kuer.</p>	
<p>A: Kanskje jeg må prøve å gjøre det på en annen måte. [Stille 20 sek]. Da kan jeg prøve med 5 kyllinger og 7 kuer. [Eleven regner ut i boka 20 sek]. Dette blir 38 bein.</p> <p>I: Mhm, du trenger 40 bein.</p>	<p>Når dette ikke gir riktig antall, altså ikke riktig løsning, så velger eleven å endre sin gjetning.</p>	<p>Gjett, sjekk og revidering (GSR)</p>
<p>A: Ja. [Stille 15 sek]. Jeg tror at, hvis, siden det ble to flere bein. Så kan jeg gjøre det samme igjen, for å få to flere bein igjen. Da er det 4 [kyllinger] og 8 kuer. [Eleven regner ut i boka 30sek]. Da ble det jo 40 bein.</p>	<p>Denne prosessen foregår frem til eleven har fått en korrekt løsning.</p>	

Tabell 4: tabellen viser et eksempel på hvordan den deduktive kodingen av elevenes heuristiske strategier har foregått.

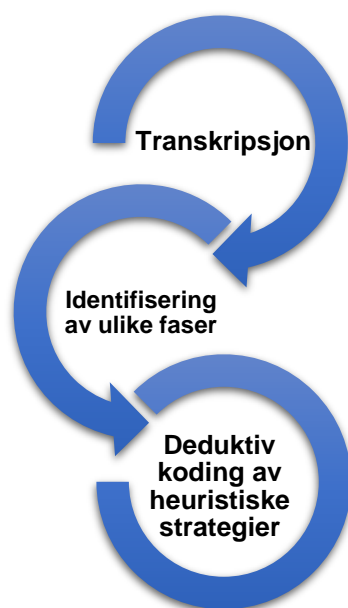
Samtidig som jeg har brukt intervjuene og transkripsjonene, har jeg også sett på elevbesvarelsene fra intervjuet for å triangulere dataen. Dette styrker sannsynligheten for at analysen er korrekt (Creswell & Miller, 2000; Patton, 1997). Dette datamaterialet har jeg deduktivt kodet (Dalen, 2011). Det betyr at jeg på forhånd hadde bestemt meg for kodene, og så etter tegn til disse i transkripsjonene (Nilssen, 2012). Følgende ser vi Tabell 5 som viser en oversikt over kodene til de ulike heuristiske strategiene:

Heuristisk strategi	Kode
Analogi Strategien	AS
Gjett, sjekk og revidering	GSR
Arbeide bakover	AB
Illustrasjon/Konkretisering	I/K
Dele opp problemet	Dele
Se etter mønster	SEM
Tilfeldige beregninger	RN
Løse likning	LL
Introdusere hjelpeelementer	IH

Tabell 5: Oversikt over de ulike heuristiske strategiene og deres kode.

3.5.4 Sammenheng

I analysearbeidet har jeg til slutt satt de ulike fasene og strategiene sammen. På den måten får jeg sett hvilke faser elevene befant seg i og hvilke heuristiske strategier som ble brukt i disse fasene, og sett hvordan elevene løser problemløsningsoppgaver med et fokus på heuristiske strategier. Figuren under fungerer som en oversikt, og illustrerer hvordan analyseprosessen har foregått.



Figur 5: Figuren viser hvordan analyseprosessen av rådata har foregått.

3.6 Etikk

Når det forskes på mennesker så har forskeren et ansvar om å opprettholde etiske og juridiske retningslinjer, slik at deltakerne og datamaterialet brukes på en forsvarlig og verdig måte (Befring, 2015; Johannessen et al., 2016). Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) har utviklet retningslinjer for etiske vurderinger som bør tas når man forsker, dette for å kunne få til en god forskningspraksis (NESH, 2021).

Jeg hadde et ønske om å bruke videoopptak til mitt forskningsprosjekt. Ved bruk av videoopptak stiller det noen krav til meg som forsker å bruke videoopptakene på en etisk riktig og lovlig måte. Først meldte jeg prosjektet til Norsk senter for forskningsdata (NSD). På den måten kunne NSD vurdere mitt prosjekt og ta en avgjørelse på om videoopptak var nødvendig eller ikke. Etter å ha fått godkjent prosjektet og bruk av videoopptak kunne jeg finne deltakere som ønsket å delta i forskningen min.

Det er et krav om at det skal være frivillig samtykke, samt informert samtykke for deltakerne i forskningsprosjektet (NESH, 2021). Dette betyr at deltakerne har fritt valg om å bestemme om de ønsker å delta eller ikke, uten at de kjenner press eller andre ytre faktorer påvirker dem til å delta i forskningsprosjektet. I tillegg skal deltakerne være godt informert om hva forskningsprosjektet baserer seg på, hvilke opplysninger som skal samles. Forskeren er også ansvarlig for at deltakerne har fått informasjonen, og at de har forstått informasjonen som har blitt gitt (Befring, 2015; Dalen, 2011).

For å finne elever som ønsket å delta så ble ingen enkeltindivider spurt direkte om å delta, men det foregikk heller at jeg presenterte forskningen min i klasserommene foran alle. Her delte jeg ut samtykkeskjema til kun de som syntes dette hørtes interessant ut. De fikk så en uke til å tenke og vurdere om de ønsket å delta, for å så levere disse samtykkeskjemaene dersom de ønsket å delta i forskningsprosjektet. Samtykkeskjemaet inkluderte også et informasjonsskriv som tok for seg hva prosjektet gikk ut på. Disse samtykkeskjemaene ble delt ut i form av fysiske ark, som elevene kunne ta med seg hjem og ble levert tilbake fysisk i god tid før intervjuene. For å delta i studien trengte både elev og forelder å underskrive samtykkeskjemaet. Både før og etter

signering av samtykkeskjema og før og etter intervjuet, fikk elevene vite hvilke rettigheter de har som deltakere.

Datamaterialet og informasjonen som samles inn skal behandles på en konfidensiell og trygg måte (NESH, 2021). Når det gjelder personidentifiserbar data, stilles det strenge krav til hvordan dette bør oppbevares. I mange tilfeller er det også et krav om at dataen skal anonymiseres slik at deltakerne ikke kan bli gjenkjent (Befring, 2015; Johannessen et al., 2016). All data i mitt forskningsprosjekt ble behandlet i tråd med GDPR, og i henhold til det som ble meldt til NSD. Videoopptakene ble lagret på et trygt sted i henhold til UiOs lagringsguide for personidentifiserbare data. Men etikk handler også om hvordan jeg som en forsker tolker og behandler dataen. Som en forsker er det etisk viktig at jeg forsøker å være så objektiv så mulig, og ikke krenker menneskene som har deltatt i studien (Kilpatrick, 1993).

3.7 Studiens kvalitet

Kvalitativ forskning kan ha ulik kvalitet. For å vurdere forskningens kvalitet, kan påliteligheten, troverdigheten, overførbarheten og bekreftbarheten evalueres (Johannessen et al., 2016). Andre begreper som brukes for å vurdere studiens kvalitet er validitet og reliabilitet. Validitet er et større begrep som kan knyttes til troverdighet, overførbarhet og bekreftbarhet. Begrepet reliabilitet handler om studiens pålitelighet. Jeg skal derfor i dette delkapittelet diskutere studiens pålitelighet, troverdighet, overførbarhet og bekreftbarhet.

3.7.1 Troverdighet

Troverdighet som nevnt ovenfor knyttes til ordet validitet (Johannessen et al., 2016). Troverdighet handler rett og slett om forskningen faktisk forsker og finner det vi ønsker å finne (Johannessen et al., 2016). Dette kan ses på som sammenhengen mellom problemstilling, datainnsamling, bearbeiding av datamaterialet, og resultater. På den måten kan vi se at troverdighet spiller en rolle i alle deler av forskningen. For å overbevise om at forskningen er gjennomført på en troverdig måte, så har jeg gjennom delkapitlene over forklart grundig hvordan jeg har samlet inn datamaterialet. I tillegg har jeg forklart hvordan jeg har bearbeidet dette materialet, og hvor jeg har de ulike kodene mine fra og hvordan jeg har kodet.

Som forsker er det mulig å manipulere dataene og vinkle dataen slik at man får ønskelig resultat, noe som vil være en validitetstrussel (Cohen et al., 2011). Samtidig har jeg som forsker et ansvar om å ikke la mine meninger og tanker påvirke forskningen på den måten at det påvirker troverdigheten. Under forskningsprosjektet har jeg vært bevisst over min rolle som forsker, og forsøkt å ikke påvirke datainnsamlingen og analysen av mine subjektive meninger og tanker. Til tross for at jeg har forsøkt å ikke påvirke forskningen, så er det mulig at jeg ubevisst har påvirket intervjuet, transkriberingen, og analysen. I kvalitativ forskning vil det være rom for at mine erfaringer og tanker påvirker forskningen uansett hvor nøytral jeg har et ønske om å være. Dermed er det mulig at en annen forsker ville ha tolket dataene på en annen måte enn meg. Jeg som forsker har forsøkt å være kritisk til mine tolkninger og koder gjennom forskningsprosessen. Dette har jeg gjort ved å tolke og kode dataen i flere iterasjoner, slik at jeg kan sammenlikne alle tolkningene og kodene for å sjekke om disse samsvarer. Samtidig har jeg vært opptatt av å være objektiv i mine tolkninger, siden jeg som forsker ikke bør tillate mine egne meninger og ønsker påvirke tolkningene (Kilpatrick, 1993).

Å bruke oppgavebasert intervju som metode kan også påvirke troverdigheten til studien, siden deltakerne er klar over at de blir intervjuet og observert (Cohen et al., 2011). Det kan da påvirke deltakernes måte å løse oppgavene på, hvilke svar som blir gitt og forklaringer som blir sagt. Dette ikke altså er en naturlig setting, og deltakerne kan også føle seg anstrengt eller utrygge. Det var også viktig at elevene var klar over at intervjuet ikke ville påvirke fagkarakteren deres og at læreren ikke får høre eller se opptak fra intervjuet. Ved at jeg som forsker har fått tillatelse fra skolen, rektor og faglærer, så er det mulig å assosiere meg med skolen eller læreren (Kvale & Brinkmann, 2009; Thagaard, 2009). Dette kunne stått i veien for hvor åpne elevene er, og det var derfor viktig at elevene var klar over at det var kun jeg og veilederne mine som hadde tilgang til intervjudataene.

3.7.2 Pålitelighet

Pålitelighet som nevnt over er et annet ord for reliabilitet, og står for hva slags data som blir brukt, hvordan dataen er samlet inn, og hvordan dataene er analysert (Johannessen et al., 2016). Når man bruker en datainnsamlingsmetode som intervju, så kan det være utfordrende å gjøre det på en pålitelig måte. Hvis min forskning ble utført av en annen forsker, så er det mulig å få andre resultater. Dette vil skje på grunn av våre forkunnskaper og erfaringer, samt hvordan vi som forskere tolker det som blir sagt. Hvis intervjuet utføres på nytt, så vil samtalene mellom intervjueren og deltakeren mulig være annerledes. Dette skjer av at forskeren kan påvirke deltaker, ofte på grunn av at det er forskjell i maktforhold mellom intervjuer og deltaker (Kvale & Brinkmann, 2009). Intervjuet mitt som er semistrukturert åpner også opp for at jeg som forsker kan stille spørsmål avhengig av situasjon. Til tross for dette har jeg forsøkt å ha gode rammer i form av at alle oppgavene er like, og mange av spørsmålene var planlagte på forhånd. Det som i hovedsak var forskjellig fra intervju til intervju var avhengig av hva elevene svarte og sa, siden dette la opp til de neste spørsmålene som elevene ble stilt. Ved å bruke transkripsjon i analysearbeidet, har jeg forsøkt å ivareta og presentere dataene fra intervjuene på en mest mulig konkret måte, det vil si uten å tilføye, erstatte eller utelukke informasjon fra intervjuene.

3.7.3 Overførbarhet

I kvalitativ forskning er man også opptatt av om kunnskapen kan overføres til andre like situasjoner (Johannessen et al., 2016). I denne forskningen har jeg tatt bruk av fire 9.trinnselever, som betyr at det ikke kan representere alle 9.trinnselevne. Dette er resultater fra kun disse elevene. Ved å bruke kvalitativ forskning var aldri målet å generalisere funnene, men heller å gå i dybden på et eller to sentrale aspekter og gi en detaljert og rik til redegjørelse av disse aspektene (Johannessen et al, 2016; Johnson & Christensen, 2014). Ved å forklare godt hvordan datainnsamling og bearbeiding av data foregikk, kan andre forskere vurdere om det er mulig å overføre mine resultater til deres forskning. Med rike beskrivelser av metode og analyse, så styrker jeg troverdigheten til mine resultater (Goldin, 2000). Forskningen min finner ut av hvordan problemløsning foregår hos 9.trinns elever, med vekt på heuristiske strategier. Jeg har tro på at mine resultater kan være til hjelp for å forstå seg på temaet,

samt at andre forskere kan bruke samme metode ved at jeg er mest mulig transparent i mine beskrivelser av datainnsamlingsmetode og analyse av data.

3.7.4 Bekreftbarhet

Når det er snakk om bekræftbarheten til kvalitativ forskning, så er det i hovedsak snakk om i hvilken grad andre forskere kan bekrefte forskningen (Johannessen et al., 2016; Thagaard, 2009). For å øke bekræftbarheten til forskningen er det viktig at resultatene ikke er forskerens subjektive meninger. Bekræftbarheten er avhengig av blant annet hvor godt man kan se sammenhengen mellom sin forskning og annen forskning, slik at forskningen kan ses i et større perspektiv. Derfor har jeg i denne studien unngått mine subjektive meninger og brukt empiri fra annen forskning. Samtidig har jeg forklart hvordan forskningen har foregått fra start til slutt, med tanke på metoden jeg har brukt og gjennomført og hvordan analysen av data har foregått. På den måten har jeg forsøkt å ivareta bekræftbarheten.

4 Resultater

Resultatene blir presentert i form av tre deler. Den første delen presenterer resultatene fra første oppgave. Her blir det presentert hvordan elevene arbeidet med den første problemløsningsoppgaven, hvilke faser de befant seg i og hvilke strategier som ble brukt under problemløsningen. Den andre delen tar for seg resultatene fra den andre oppgaven. Her blir det presentert hvordan elevene arbeidet med den andre problemløsningsoppgaven, hvilke faser de befant seg i og hvilke strategier som ble brukt under problemløsningen. I begge de to første delene vil det bli gitt utdrag fra transkripsjonene som viser hvilke faser elevene befant seg i og hvilke heuristiske strategier som blir brukt. Den tredje delen vil få frem det viktigste fra de to andre delene. Altså hovedfunn. Dermed vil den tredje delen virke oppsummerende av alle resultatene som en helhet, istedenfor å ta for seg kun en og en oppgave om gangen.

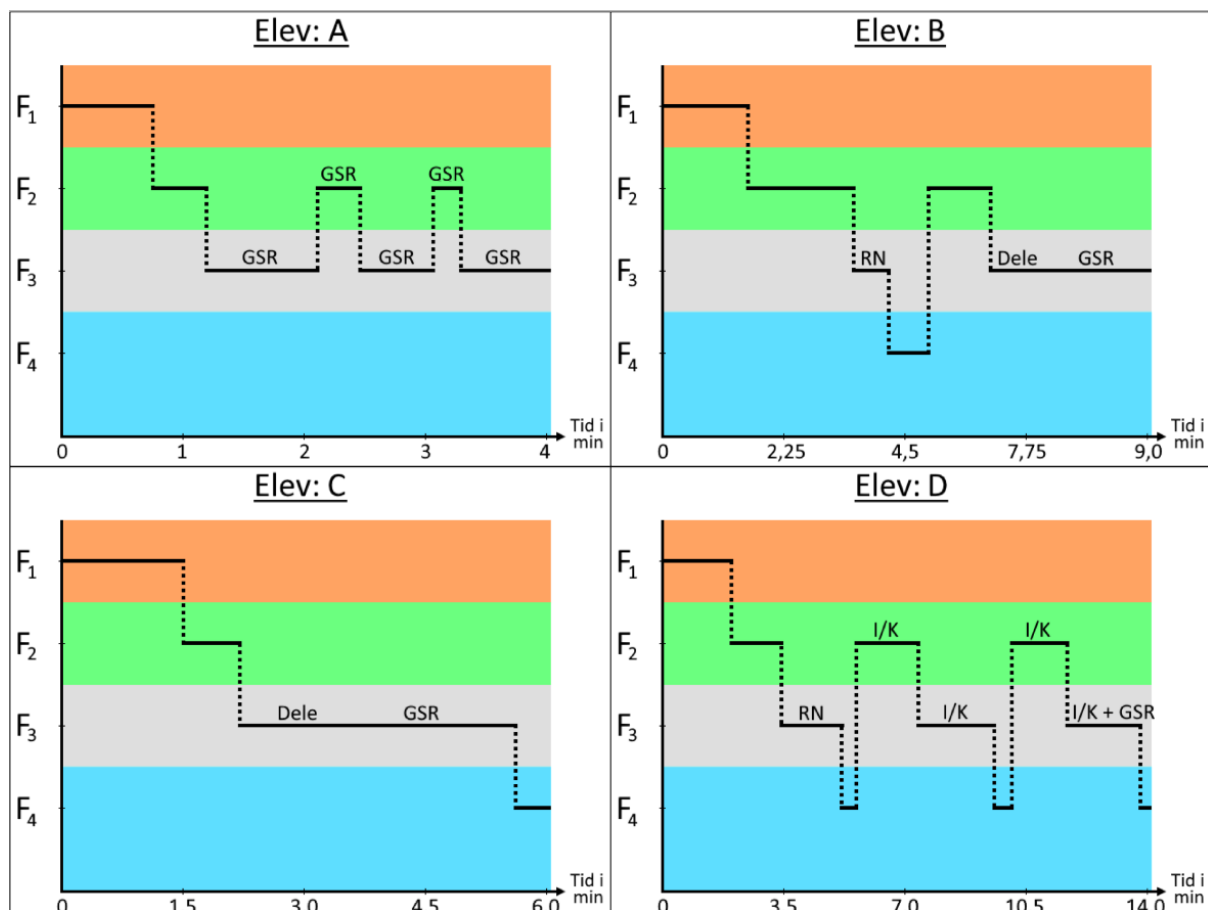
4.1 Oppgave 1

Oppgave 1 er oppgaven hvor elevene skal finne ut antall kyllinger og kyr som befinner seg på gården. De fikk vite at det var 12 hoder og 40 bein på gården. Resultatene fra oppgave 1 er oppsummert i fire ulike grafer (se Figur 6). Vær oppmerksom på at tidslinjen i hver av grafene har ulik tidsskala, altså x-aksen. De fire fasene i problemløsningen er forkortet til F1, F2, F3 og F4. Figuren viser hvilken fase eleven befinner seg i under problemløsningen til enhver tid, her viser fargen oransje fase 1, fargen grønn fase 2, fargen grå fase 3 og fargen blå viser fase 4. Kodene for de ulike heuristiske strategiene som blir brukt i resultatene er følgende:

Kode	Heuristisk strategi
GSR	Gjett, sjekk og revidering
RN	Tilfeldig beregning
Dele	Dele opp problemet
I/K	Illustrasjon/Konkretisering

Tabell 6: tabellen viser en oversikt over hvilken heuristisk strategi de ulike kodene fra resultatkapittelet står for.

På den måten kan vi se hvordan problemløsningsforløpet ser ut, hvilke faser elevene befinner seg i og overgangen mellom fasene. I tillegg er det i noen steder skrevet koder, som GSR, Dele, RN og I/K. Disse er koder på hvilken heuristisk strategi som blir benyttet av elevene i akkurat den fasen under den tiden. På den måten får vi ut ifra illustrasjonen se et helhetlig bilde av hvordan selve løsningsprosessen foregikk, med hvilke fase de befant seg i og hvilke strategier som blir brukt.



Figur 6: Illustrasjonen viser løsningsforløpet til deltakerne under løsing av oppgave 1. Her ser vi hvilke faser elevene befinner seg i og hvilke heuristiske strategier som brukes i løpet av problemløsningen. Merk at tidsskalaen, x-aksen, er forskjellig for de ulike elevene i figuren.

Vi kan se fra figur 6 at under intervjuet ble det observert at alle elevene startet med å se og lese oppgaven, dette er et tegn på fase 1, som er å forstå problemet. Elev A, B og C var alle stille i begynnelsen og dette ble tolket som at de leste oppgaven, og kodet som fase 1. Dette varte i alt fra 40 til 120 sekunder avhengig av elev. Elev D leser høyt og forklarer at vedkommende ønsker å samle inn opplysninger før han/hun skal prøve å løse problemet. Følgende utdrag fra elev D sitt arbeid kan fungere som et eksempel:

D: På en gård har bonden kyllinger og kyr eller kuer da. Til sammen har disse dyrene 12 hoder og 40 bein. Hvor mange av dyrene er kyllinger, og hvor mange er kyr? [Eleven leser oppgaven høyt]. [eleven skriver i boka 15 sek].

I: Hva er det du tenker, eller hva er det du gjør nå?

D: Nå ikke sant, så samler jeg inn opplysningene fra oppgaven. De viktige infoene jeg har. Med dette kan jeg prøve å finne ut [av] hvordan jeg kan gjøre oppgaven.

I første linje ser vi et tegn på at elev D starter med å lese oppgaveteksten, dette kommer frem når eleven lese oppgaveteksten høyt. Deretter skriver eleven noe ned i boken, som eleven sier at han/hun gjør for å samle inn opplysningene. Her blir det observert at eleven skriver inn nøkkelinformasjon fra oppgaveteksten i boka. Dette kan forstås som at eleven før han/hun skal finne en strategi for å løse problemet, ønsker å forstå hva problemet går ut på og hvilken informasjon vedkommende har fått gitt. Fra analysen kommer det frem at denne handlingen er en del av første fase i problemløsningen, altså å forstå problemet.

Etter å ha lest oppgaven og forstått problemet, så går alle elevene til andre fase, hvor man lager en plan for hvordan man ønsker å løse problemet og deretter prøver de å løse problemet ved å følge planen de har laget, som er den tredje fasen. Under ser vi sitat fra elev C, fra fase 2.

C: Det er 40 hoder og 12 bein, og noen kyllinger og kuer. [Stille i 65 sek, eleven stirrer på oppgaveteksten].

Her ble det oppfattet at elev C tenkte på hvordan han/hun skal løse oppgaven. Tidligere hadde elev C lest oppgaveteksten, og skrevet ned informasjon som antall hoder og antall bein i boken før eleven ble stille igjen. Dette ble da kodet til å være fase 2, på grunn av at eleven tidligere hadde sagt at han/hun hadde forstått oppgaven. I denne fasen prøver eleven å lage en plan for hvordan denne informasjonen kan brukes for å løse oppgaven. Deretter går eleven til fase 3, hvor eleven forsøker å løse oppgaven ved å følge sin plan. Under ser vi et utdrag fra intervjuet som kan illustrere hvordan fase 3 foregikk for denne eleven:

I: Hva tenker du på nå?

C: Hmm.. [stille 5 sek]. Jeg tenker på at det ikke kan være, ikke 10 kuer fordi, fordi da er det to hoder til overs. Det må jo være noen kyllinger også. Men, da tenker jeg på hvor mange bein det blir hvis det er 8 kuer. Så er det da, 32 bein, er det ikke? [00:04:47]

I: Mhm, stemmer [00:04:49]

C: [Stille 25 sek], [Eleven skriver i boka 20 sek]. Hmm, også, da blir det igjen 4 kyllinger og de har da 8 bein, som betyr at det da blir 8 kuer og 4 kyllinger. [00:06:06]

I: Hvordan kom du på tallet 8? [Peker på der eleven har skrevet 8 kuer]

C: Fordi, jeg tenkte at kuene har 4 bein og da tenkte jeg at, først så tenkte jeg på at det er 40 bein, så da blir det jo 10 kuer hvis alle skulle vært kuer. Men det går jo ikke opp i antall hoder. Fordi det er kun 12 hoder. Også tenkte jeg at, da må jeg ta noen kyllinger også, jeg kan ikke ta to kyllinger som er uten bein. Så jeg måtte ta ned antall kuer til mindre enn 10 for å få det til. Men hvis det hadde vært 9 kuer så hadde det vært ganske usannsynlig siden det er et oddetall og siden det bare er partall i regnestykket, så var det mest sannsynlig at det var partall, så sjekka jeg da om 8 fungerer. [00:07:09]

Vi ser her at elev C bestemmer seg for å dele opp problemet i mindre deler, ved å først finne maksgrense for antall kuer. Denne strategien er å dele opp problemet i mindre deler, men det brukes ikke alene. Eleven bruker også gjett, sjekk, revidere, for å videre løse ferdig problemet, altså i fase 3 av løsningsprosessen. Elev A har også brukt gjett, sjekk og revidering. Utdraget under viser hvordan dette foregikk for elev A:

A: Ehh.. Hvis jeg tar 6 kyllinger og 6 kuer, da har jeg 12 hoder. Dette blir, ehm, 6 ganger 2 er 12, 6 ganger [mumling 10 sek]. Da har vi kun 36 bein.

I: Ja, stemmer.

A: Kanskje jeg må prøve å gjøre det på en annen måte. [Stille 20 sek]. Da kan jeg prøve med 5 kyllinger og 7 kuer. [Eleven regner ut i boka 20 sek]. Dette blir 38 bein.

I: Mhm, du trenger 40 bein.

A: Ja. [Stille 15 sek]. Jeg tror at, hvis, siden det ble to flere bein. Så kan jeg gjøre det samme igjen, for å få to flere bein igjen. Da er det 4 [kyllinger] og 8 kuer. [Eleven regner ut i boka 30sek]. Da ble det jo 40 bein.

Her ser vi elev A som bruker gjett, sjekk, revidere strategien i fase 3. Dette ved å gjette på antallet kyllinger og kuer. Eleven gjetter først på 6 kyllinger og 6 kuer, men lykkes ikke. Etter det mener eleven at han/hun må prøve å gjøre det på en annen måte, og prøver å tenke litt. Eleven velger igjen å gjette, men har økt antallet kyllinger. Igjen så tenker eleven, og ser et mønster i utviklingen. Så velger eleven å teste ut 4 kyllinger og 8 kuer, og ender opp med å få korrekt antall bein.

Elev B som ikke har en klar plan og velger å dele på 2, fordi det er to type dyr. I tillegg utfører eleven flere tilfeldige utregninger, med de tallene som er gitt i oppgaven, dette er et tegn på strategien tilfeldig beregning, siden eleven utfører beregninger basert på tallene som er gitt i oppgaven. Elev D gjør noe veldig lignende, hvor eleven også deler på 2 fordi det er to typer dyr. Det blir observert samme strategi av elev D under intervjuet, som elev B. Under ser vi utdrag fra elev D sitt intervju som viser hvordan dette foregikk for elev D:

D: [Eleven skriver i boka 90 sek]

I: Hva er det du gjør nå?

D: Jeg tenkte, siden det var 12 hoder på, liksom til sammen 12 hoder. Så tenkte jeg hvis jeg deler på 2, så kan det liksom være 6 kyllinger og 6 kyr. Så jeg tok 12 delt på 2, som ble 6. Da jeg kom over til bein, kyllinger har jo bare 2 bein og kyr har 4. [Stille 10sek] [Eleven skriver og tegner 100 sek]

Etter bruk av samme strategi som elev B, så velger elev D etter en 10 sekunder stille periode, å begynne å skrive igjen. I dette tilfellet tegner eleven, for å få en bedre

forståelse av situasjonen, og deretter stirrer på tegningen. Her ser vi i tillegg elev D som går tilbake til fase 2 for å planlegge på nytt hvordan dette kan løses.

Elev B, C og D, prøver å sjekke om svaret stemmer, de går altså over fase 4 av løsningsprosessen, verifisering. Elev A derimot gjør ingen verifiseringer som å mulig å oppdage. Under ser vi et utdrag fra en av elevene som viser hvordan en slik verifisering foregikk.

I: Ok, hva gjør du nå?

C: Jeg må dobbeltsjekke om det blir riktig med kyllinger og kuer. [Eleven skriver 20sek]. Ja, da blir det 12 dyr, som er hoder. Også blir det til sammen 40 bein.

Her ser vi elev C som sjekker om svaret stemmer. Dette kommer frem ved at eleven selv bruker ordet “dobbeltsjekke” og at vedkommende regner gjennom det samme regnestykket han/hun nettopp hadde utført. Til slutt verifiserer eleven at det er 12 hoder og 40 bein, nemlig at det stemmer overens med opplysningene gitt i oppgaveteksten.

Oppsummering:

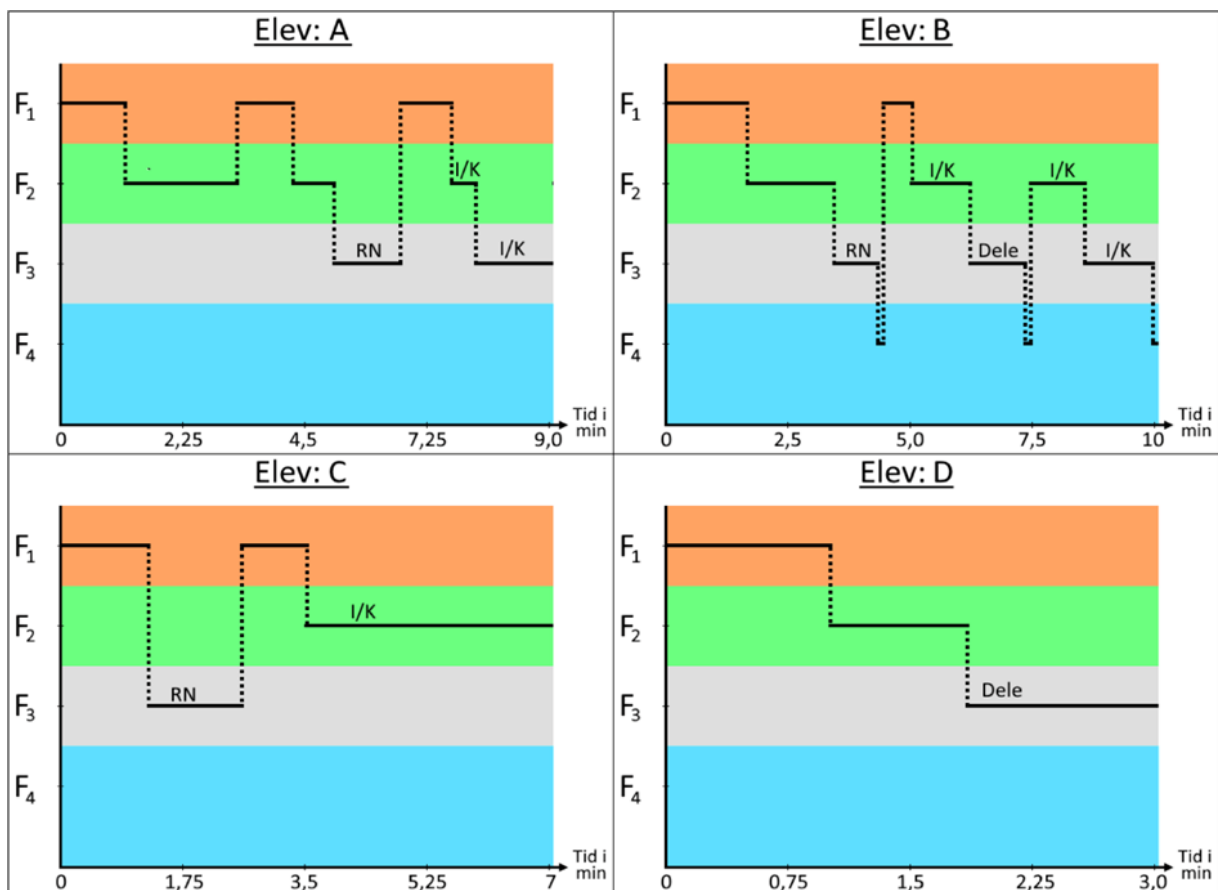
Vi ser at prosessen til elev A, B og D ikke er lineær. En lineær prosess ville vært en løsningsprosess som går fra fase 1 mot fase 4, gjennom fase 2 og 3 i kronologisk rekkefølge. Løsningsprosessen til elev A, B og D kan heller ses på som en rotete prosess, hvor elevene går frem og tilbake mellom fasene. Vi ser også til tross for at elevene går frem og tilbake mellom fasene, så er det ingen elever som går tilbake til fase 1. På den andre siden har vi elev C som faktisk har en lineær løsningsprosess. Her starter eleven i fase 1, går over til fase 2, så til fase 3 og til slutt til fase 4.

Elev B og D har etter å ha fulgt sin plan, prøvd å verifisere eller sjekke om løsningen stemmer etter å ha brukt RN, når den ikke stemmer har de valgt å gå tilbake til å danne en helt ny plan (fase 2), for å så prøve ut den nye planen (fase 3). Vi ser at elev D har gjort det en gang mer enn elev B, siden han/hun ikke fikk ønsket løsning under verifiseringen.

Alle velger å starte med å lese oppgaven for å forstå oppgaven. I tillegg er den strategien som er mest brukt GSR, som blir brukt av alle elevene. I tillegg blir to strategier brukt samtidig av elev D, hvor vedkommende bruker I/K sammen med GSR.

4.2 Oppgave 2

Oppgave 2 er oppgaven der Jenny bruker 2 timer på å klippe plenen og Mona bruker 4 timer på å klippe plenen. Elevene skulle prøve å finne ut hvor lang tid Jenny og Mona bruker, dersom de samarbeider. Resultatene fra oppgave 2 er oppsummert i fire ulike grafer (se Figur 7).



Figur 7: Illustrasjonen viser løsningsforløpet til deltakerne under løsing av oppgave 2. Her ser vi hvilke faser elevene befinner seg i og hvilke heuristiske strategier som brukes i løpet av problemløsningen. Merk at tidsskalaen, x-aksen, er forskjellig for de ulike elevene i figuren.

Fra figuren ser vi problemløsningsforløpet, som hvilke faser elevene befinner seg i og overgangen mellom fasene. I tillegg er det i noen steder skrevet koder, som GSR, Dele, RN og I/K. Disse er koder på hvilken heuristisk strategi som blir benyttet av elevene i akkurat den fasen under den tiden. På den måten får vi ut i fra illustrasjonen se et helhetlig bilde av hvordan selve løsningsprosessen foregikk, med hvilke fase de befant seg i og hvilke strategier som blir brukt. Fasene, kodene for de heuristiske strategiene og elevene er helt lik som i oppgave 1. Eneste endringen er at det er en annen oppgave, altså oppgave 2.

Igjen ser vi at alle starter med å lese oppgaven, forstå oppgaven (fase 1). Men ikke alle som går til fase 2, å planlegge, etter å ha forstått oppgaven. Noe interessant vi ser her er at elev c hopper rett til fase 3, vedkommende lager ikke noe plan om hvordan oppgaven/problemet skal løses, men bare begynner å utføre tilfeldige beregninger. Under ser vi et utdrag som illustrerer dette:

C: [Stille, eleven leser oppgaven 50 sek] Hun Jenny bruker 2 timer og Mona bruker 4 timer. Hvis de tar halvparten hver, så må man jo dele tiden i 2. Da bruker jo bare Jenny 1 og Mona 2, da blir det bare 3 timer. Nei vent ... De bruker bare 2 timer, gjør de ikke? Fordi de starter jo likt og da bruker de 2 timer til sammen. Fordi hun [Jenny] bruker 1 time og hun andre [Mona] bruker 2 timer, og de starter likt. Da er jo hun [Jenny] ferdig når hun [Mona] har 1 time igjen, og da blir det 2 timer, blir det ikke?

Som vi ser fra utdraget, så velger elev C å dele tidsbruken på 2, og deretter addere det. Etterfulgt av addisjonen konkluderer eleven med at det maks vil ta 2 timer, fordi de starter likt. Elev C har valgt å bruke strategien RN uten å ha laget noen form for plan. Deretter går elev C tilbake til den første fasen og leser oppgaven på nytt, og prøver å forstå den.

Noe som er unikt for elev B på denne oppgaven, er at han/hun er den eneste som prøver å verifisere løsningen sin. Dette gjøres ved at eleven sjekker om løsningen gir mening for han/hun. Følgende utdrag fra elev B sitt arbeid kan fungere som et eksempel:

B: Jeg tenker hvis ..., Jenny bruker 2 timer og venninne bruker 4 timer, så må de dele opp tomta. Hvis hun [Jenny] tar halvparten og hun [Mona] tar halvparten. Da tar det halvparten av tiden de bruker kanskje, på en hel plen. Hun [Jenny] bruker sikkert 1 time og hun [Mona] 2 timer, det er 3 timer til sammen. [Eleven tenker 10 sek]. Men det kan det ikke være.

I: Hvorfor kan ikke det være riktig?

B: Det kan være riktig, men to stykker pleier å bruke mindre tid sammen. Jo, da må du halvere 3 timer igjen, nei, dette blir feil. Det blir litt ulogisk at hun [Jenny] bruker lengre tid med en som klipper med henne. Jenny bruker 2 timer alene, da vil det bli mindre timer når Mona hjelper til.

Utdraget tyder på at elev B har forsøkt å verifisere svaret ved å sjekke om løsningen gir mening. Ingen av de andre elevene verifiserte løsningen sin selv. I stedet valgte de andre elevene å prøve å verifisere svaret ved å spørre intervjueren. Under ser vi et utdrag fra intervjuet hvor en av elevene gjør nettopp dette:

C: Altså de bruker jo 6 timer på å klippe 2 plener da. Da vil de bruke 3 timer på én plen. Er det riktig svar?

Fra utdraget over er det mulig å se at elev C velger å spørre intervjueren om løsningen stemmer. Til tross for at denne handlingen er en måte å verifisere svaret på, så utfører ikke eleven i seg selv en aktivitet som kan hjelpe han/hun med å verifisere løsningen selv.

Elev A, B og C hadde ingen klar fremgangsmåte eller plan, imens elev D har en lineær prosess og er fornøyd med svaret. Elev B og elev C startet med å utføre tilfeldig beregninger med tallene, altså heuristiske strategien RN. Imens Elev A bare gjettet på et svar uten å prøve, men valgte å prøve igjen, og da valgte elev A også å gjøre noe med utføre tilfeldige beregninger. Utdraget under er tatt fra intervjuet med elev A, og viser et eksempel på hvordan dette foregikk:

A: Det blir vanskelig å regne ut, det kommer jo an på hvor godt de samarbeider. Jeg vil jo kanskje sagt 1 time, uten å regne ut.

I: Hvordan kom du frem til det da?

A: Eller, hvis jeg regner ut. [Eleven tenker 15 sek]. De bruker 2 timer og 4 timer hver. Men om de samarbeider så kan det ta alt fra, 2 timer delt på 2, som er 1 time, helt til 2 pluss 4, som er 6 timer.

Fra utdraget over ser vi at elev A først gjetter på en løsning og deretter går tilbake til fase 2, hvor han/hun bestemmer seg for å utføre tilfeldige beregninger. Siden eleven ikke lykkes med de tilfeldige beregningene, velger eleven å lese oppgaven på nytt igjen.

Videre valgte de tre elevene, elev A, elev B og elev C, å bruke strategien I/K i fase 2, for å prøve å lage en plan for å løse dette. Elevene tegnet figurer for å prøve å finne ut av hvordan dette kunne løses. Elev C har i dette tilfellet ikke gjort noe videre etter å ha tegnet figuren, mens elev A har valgt å bruke illustrasjonen for å løse problemet. Elev B først valgte å dele opp problemet i mindre deler, men uten å lykkes har også elev B valgt å bruke heuristiske strategien illustrasjon/konkretisering for å løse problemet.

Oppsummering

Alle velger å starte med å lese oppgaven for å forstå oppgaven. Igjen er det kun én elev som har en lineær prosess, altså elev D. De tre andre elevene har en litt rotete prosess, hvor de har flere overganger mellom de ulike fasene.

Den strategien som har blitt mest er Illustrasjon/konkretisering, som har blitt brukt av tre av elevene, elev A, elev B og elev C. Disse elevene har alle også brukt strategien RN, som er å utføre tilfeldige beregninger. Elev D er den eneste som ikke brukte illustrasjon/konkretisering eller utføre tilfeldige beregninger. Vedkommende har valgt å kun bruke heuristiske strategien å dele opp problemet, og ikke brukt noen andre strategier. Imens hos de andre elevene blir det observert flere strategier gjennom løsningsprosessen av oppgave 2.

4.3 Oppsummering av resultater - hovedfunn

Resultatene har nå blitt presentert oppgave for oppgave. Resultatene skal nå presenteres i sin helhet, altså hovedfunnene. Dette er en form for oppsummering av hovedresultatene som ble innsamlet gjennom intervjuene. Tabellen under viser en oversikt over hvilke heuristiske strategier som ble brukt av elevene under arbeid med problemløsningsoppgaver, i henhold til de ulike fasene.

Fase i løsningsprosessen	Heuristisk strategi
Fase en	- Ingen
Fase to	- Gjett, sjekk og revidering - Illustrasjon/konkretisering
Fase tre	- Dele opp problemet - Gjett, sjekk og revidering - Tilfeldig utregning - Illustrasjon/konkretisering
Fase fire	- Ingen

Tabell 7: Tabellen viser en oversikt over de ulike heuristiske strategiene som ble observert i de fire ulike fasene fra problemløsningsmodellen.

Fra resultatene ser vi at alle elevene starter løsningsprosessen fra fase en, men deretter er ikke løsningsprosessen kronologisk, altså elevene går ikke kronologisk fra fase en til fase to, så til fase tre og til slutt til fase fire og fullfører løsningsprosessen. Under oppgaveløsingen til begge oppgavene var det ved 3 av 4 tilfeller en ikke-kronologisk prosess. Prosessen hadde flere overganger mellom de ulike fasene. Av disse overgangene ser vi at under løsingen av oppgave 1 er det ingen elever som går tilbake til fase en, å *forstå problemet*. Under løsingen av oppgave 2 derimot, valgte tre av elevene å gå tilbake til fase 1 for å forstå problemet på nytt.

I de fleste tilfeller ble de heuristiske strategiene observert når elevene var i fase tre, altså når de fulgte planen om å løse problemløsningsoppgaven. I noen færre tilfeller

ble strategiene oppdaget i fase to. De heuristiske strategiene som ble mest brukt var Gjett, sjekk, revidering (GSR) og Illustrasjon/Konkretisering (I/K). Disse strategiene ble brukt av alle elevene, og i begge oppgavene. I tillegg ble begge disse to heuristiske strategiene brukt samtidig av elev D, under løsing av oppgave 1. Andre heuristiske strategier som ble brukt er strategien Tilfeldig utregning (RN). Tilfeldig utregning (RN) ble benyttet i fem tilfeller, og ofte før en annen strategi ble brukt i problemløsningen. Altså gikk elevene tilbake og prøvde på nytt, hvor de endte opp med å benytte seg av en annen heuristisk strategi.

I løpet av løsningsprosessen var det kun én elev som verifiserte løsningen sin under problemløsningsprosessen av oppgave 2. I oppgave 1 derimot var det tre elever som verifiserte løsningen sin. Elevene forsøkte i flere av tilfellene å verifisere løsningen ved å stille spørsmål til intervjueren. De har spurt intervjueren om løsningen deres er korrekt, som et forsøk på verifikasjon.

5 Diskusjon

Målet med oppgaven er å beskrive hvordan elever på 9.trinn arbeider med problemløsningsoppgaver med fokus på hvilke heuristiske strategier som tas i bruk. For å besvare problemstillingen skal jeg i denne delen analysere resultatene og diskutere disse. Her vil jeg ta utgangspunktet i mine hovedfunn. Mitt første funn er at elevene startet i fase 1, altså de prøvde å forstå problemet. Deretter var ikke prosessen kronologisk, men heller en ikke-kronologisk eller rotete prosess. Det andre funnet er hvilke heuristiske strategier som blir brukt i de ulike fasene, og at det i noen faser ikke er noen tegn til bruk av heuristiske strategier. Det tredje funnet er at det er noen heuristiske strategier som blir mest brukt. Disse er Gjett, sjekk og revidering, og Illustrasjon/Konkretisering. I tillegg ser vi at i noen tilfeller blir det ikke brukt noen strategier, imens i andre tilfeller blir det brukt flere strategier samtidig. Det fjerde funnet er at heuristiske strategien Tilfeldig utregning ble brukt i fem tilfeller, og i alle disse tilfellene valgte elevene å endre strategivalget etter bruk av denne heuristiske strategien. Det siste funnet går ut på at i fase fire, verifisering, var det lite forsøk på å verifisere løsningene selv, elevene valgte heller å spørre forskeren om løsningen deres på problemløsningsoppgavene var korrekte.

5.1 Løsningsprosessen

Som nevnt i teorikapittelet finnes det mange modeller for hvordan løsningsprosessen kan foregå i problemløsningen. Jeg har valgt å bruke en modell med fire faser, forstå problemet, lage en plan, følge planen og verifisere. I tillegg har jeg valgt å inkludere overganger mellom alle de ulike fasene. Når vi ser på elevenes løsning av de to problemløsningsoppgavene, så ser vi at prosessen ikke er kronologisk eller lineær. Dette er i stor grad lik modellen til Yimer & Ellerton (2010), men siden deres modell inneholder faser som internalisering, vil ikke det være aktuelt for denne studien. Dette med tanke på at det vil være en utfordring å kunne se internalisering gjennom et oppgavebasert intervju. Elevene starter alle i den første fasen, altså med å forstå problemet. Deretter går de videre til de andre fasene, men i flere tilfeller velger elevene å gå tilbake til en tidligere fase. Noe som ikke samsvarer med modellen til Pólya (1945), siden den er lineær med fire faser. Måten elevene har arbeidet med problemløsning kan minne litt om modellen til Mason et al. (1982) og Schoenfeld (1985). Til tross for at disse modellene tar hensyn til at problemløsningsprosessen ikke er lineær, så viser

modellene at når du først er i fase fire, verifiseringsfasen, så er det ingen vei tilbake til de tidligere fasene. Dermed kan vi tenke oss at den modellen som ble utarbeidet før dette intervjuet med formål om å forstå elevenes problemløsningsprosess, passer meget godt til å beskrive deres problemløsningsprosess. Det som også kunne vært aktuelt er å ta utgangspunktet i Rott et al. (2020) sin deskriptive modell for å avgjøre hvordan elevene arbeider med problemløsning. Denne modellen kunne i større grad hjulpet i arbeidet med å beskrive elevenes problemløsningsprosess, i og med at den er laget for nettopp dette.

Schoenfeld (1985) kommer frem til at gode problemløsere har flere overganger mellom de ulike fasene, dette er noe vi ser hos de fleste 9.trinnselevne som har blitt intervjuet. På den andre siden ser vi i to av åtte tilfeller at elevene stopper å arbeide når de har nådd enden, uavhengig av om løsningen er korrekt eller ikke. Årsaken bak ulikheten i problemløsningsprosessen i mine funn kan skyldes at elevene har ulik grad av problemløsningskompetanse (Schoenfeld, 1985).

Mine funn kan sammenliknes med prosesser i virkeligheten siden mange av prosessene i virkeligheten ikke er lineære. I klasserommet kan det hende at prosessen vil foregå nogen lunde likt, altså at elevene ofte starter med å forstå problemet (fase en) og arbeider seg videre i en kronologisk rekkefølge, og deretter velger å gå tilbake eller hoppe imellom faser av ulike årsaker. et som er viktig å poengtere at en modell vil kun være en modell, altså det er en forenklet representasjon av virkeligheten som ikke vil kunne ta for seg alle aspekter identisk med den virkelige situasjonen, og vil ha begrenset gyldighet (Giere, 2004). I virkeligheten kan løsningsprosessen være mye mer komplisert, men en modell kan hjelpe oss med å forstå virkeligheten.

Ut ifra mine funn kommer jeg frem til at problemløsningsoppgaver løses på en ikke-kronologisk måte. Dette kan skyldes flere årsaker som at de lærer noe nytt mens de løser oppgaven, eller at de oppdager noe under problemløsingen slik at de blir nødt til å gå tilbake til en tidligere fase og endre deres strategi etter behov (Schoenfeld, 1985). Dette sier Schoenfeld (1985) er et tegn på gode problemløsere. De kan for eksempel oppdage en feil de har gjort. Dette kan være feil i antagelser, det kan være feil i forståelse av oppgaven eller feil i beregningene. Da vil de måtte gå tilbake til en tidligere fase eller rette på feilen før de kan fortsette videre med løsningen av

problemløsningsoppgaven (Schoenfeld, 1985). Fra intervjuene kom det ikke frem hvilke årsaker som lå til grunn for at elevene hoppet frem og tilbake mellom fasene. Andre årsaker kan være at de kommer frem til en slutt hvor de ikke lenger vet hva de skal gjøre og ikke har noen mulige løsninger til problemet. Når det ikke er noen vei videre så velger de å gå tilbake og prøve på nytt på en annen måte. Dette står til strid med Schoenfelds (1985) resonnering om at elevene mistet viljen til å løse oppgavene dersom deres initiale strategi ikke fungerte.

5.2 Strategier i de ulike fasene

Fra resultatene ser vi at elevene benytter seg av ulike heuristiske strategier gjennom løsningsprosessen. I den første fasen, hvor elevene skal prøve å forstå problemet blir det ikke benyttet noen heuristiske strategier av elevene. Det blir kun observert at elevene leser og ser på oppgaven, men ikke at elevene eksplisitt bruker noen strategier. Elevene bruker ulik mengde tid for å forstå oppgaven, og vi vet fra Schoenfelds (1985) studie at mengde tid man bruker på å forstå oppgaven kan være avgjørende for hvordan problemløsningen går. Det er viktig å bruke god tid på å forstå og analysere oppgaven slik at man senere kan løse problemet, uten å ha misforstått situasjonen og rammene oppgaven har gitt (Pólya, 1945; Schoenfeld, 1985).

I motsetning til fase en, har vi fase to hvor elevene skal prøve å lage en plan for hvordan de ønsker å løse problemet. Fra funnene ser vi at denne fasen bruker elevene opptil to ulike heuristiske strategier, gjett, sjekk og revidering, og illustrasjon/konkretisering. Den førstnevnte strategien ble brukt i denne fasen ved at elevene etter å ha gjettet, brukte den informasjonen til å lage en ny plan før de arbeidet videre. Dette utgjør revideringsdelen fra gjett, sjekk og revidering (Novotná et al., 2014, Pólya, 1945). De elevene som bruker illustrasjon/konkretisering i fase to, bruker det i hovedsak til å tegne en skisse av situasjonen og bestemme hvordan situasjonen kan løses.

I fase tre ser vi elevene løse problemløsningsoppgavene. Her følger de planen fra fase to, og det har blitt observert bruk av flere heuristiske strategier. I denne delen trenger kun elevene å følge planen de har bestemt seg for (Pólya, 1945; Schoenfeld, 1985, Yimer & Ellerton, 2010), frem til det ikke fungerer. I tabell 5 fra resultatkapittelet ser vi

en oversikt over de heuristiske strategiene elevene har brukt i fase tre, og det er følgende:

- Gjett, sjekk og revidering
- Illustrasjon/konkretisering
- Dele opp problemet
- Tilfeldig utregning

Vi ser også at mange av de heuristiske strategiene som ble beskrevet i teorikapittelet ikke ble benyttet av elevene under problemløsingen. Fra funnene ser vi at de to strategiene som ble mest brukt under løsningsprosessen av de to oppgavene er gjett, sjekk og revidering, og illustrasjon/konkretisering. Det kan være flere årsaker for elevenes valg av strategier (Gigerenzer & Gaissmaier, 2011), for eksempel at elevene ikke er klar over mange av de andre strategiene som ble beskrevet i teorikapittelet. Dette kan føre til at elevene benytter seg av de strategiene som de har mest kjennskap til. Andre årsaker kan være at elevene nylig ble undervist de strategiene som de valgte å bruke, eller at de kun har blitt undervist de strategiene de har valgt å bruke (Gorodetsky & Klavir, 2003).

Måten gjett, sjekk og revidering blir brukt på er et elevene gjetter på løsningen, sjekker om det stemmer og deretter reviderer sin løsning, slik at de kan gjette på nytt eller endre strategi. Denne strategien kan virke utforskende og vil variere i effektivitet ut ifra brukeren og oppgaven (Novotná et al., 2014). Det er mulig å også se det fra et annet perspektiv, altså om hvilke heuristiske strategier som er mulige eller gode til de to oppgavene elevene ble bedt om å løse. I studien til Novotná et al. (2014) skriver de at de fleste oppgavene eller problemene som blir gitt på ungdomskolen, egner seg å løses ved hjelp av noen spesifikke heuristiske strategier. Av de heuristiske strategiene finner vi strategien gjett, sjekk og revidering. Dette samsvarer med resultatene i den grad, at elevene har valgt å bruke strategien gjett, sjekk og revidering. Denne heuristiske strategien ble brukt i hele to ulike faser, altså til å lage en plan og til å følge planen (fase to og tre). Dermed kan man tenke at oppgavene som ble gitt til elevene er godt egnet til å løses ved bruk av den heuristiske strategien gjett, sjekk og revidering (Pólya, 1945; Schoenfeld, 2016).

Strategien Illustrasjon/konkretisering blir brukt av elevene på den måten at de tegner skisser, ulike figurer og situasjonen. I mange av tilfellene er det figurer som inkluderer tall eller ord. Gjennom disse illustrasjonene klarer elevene å telle eller tenke seg frem til løsningen. Strategien inkluderer også bruk av grafer og andre visuelle former å representere en situasjon på, men i de utgitte oppgavene har disse elevene valgt å kun lage illustrasjoner og figurer. I følge Novotná et al. (2014) er bruk av illustrasjoner en strategi som oftest er egnet til problemer gitt på videregående. Noe som ikke er i tråd med resultatene, siden vi så elevene bruke strategien illustrasjon/konkretisering. Elevene har under intervjuet brukt Illustrasjon/Konkretisering i fase to og tre, altså for å lage en plan av hvordan de skal løse problemet, men også for å utføre planen. Dette kan bety at de oppgavene elevene ble bedt om å løse har egnet seg til å løses med den heuristiske strategien Illustrasjon/konkretisering, til tross for at dette er et problem for ungdomsskoleelever (Pólya, 1945; Schoenfeld, 2016).

På den andre siden blir andre heuristiske strategier brukt, som strategien dele opp problemet. Denne strategien bruker elever ved å ta én ting om gangen i oppgaven. For eksempel i oppgave 2, velger elevene å finne ut hvor lang tid Jenny bruker på å klippe plenen og Mona bruker på å klippe plenen, hver for seg, før de setter tidene sammen og sjekker om dette gir mening. Dette er et forsøk på å gjøre problemet enklere ved å angripe små deler av det store problemet (Novotná et al., 2014), slik at de senere kan sette de ulike delene sammen for å løse det store problemet (Pólya, 1945). Denne heuristiske strategien blir også brukt i oppgave 1, men er den strategien som er minst brukt blant de ulike heuristiske strategiene som har blitt observert i intervjuet.

En annen heuristisk strategi som det kan være viktig å legge merke til er RN, altså tilfeldig beregning. Som beskrevet i teorikapittelet går denne strategien ut på at løseren bruker tallene fra oppgaven og utfører tilfeldige beregninger. Disse tilfeldige beregningene er ofte de grunnleggende matematiske regneoperasjonene, som addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon (Novotná & Sarrazy, 2005). Denne strategien ser vi i flere tilfeller, og er den første eller en av de første heuristiske strategiene som blir brukt av elevene før de endrer strategi. Elevene velger å addere og dividere tallene i oppgaveteksten, uten å tenke over kontekst. En slik strategi vil i svært sjelden grad fungere, siden strategien i stor grad blir brukt uten å forstå problemet, eller når man ikke vet hvordan problemet skal løses (Novotná & Sarrazy,

2005). I 1979 var det noen franske forskere som presenterte følgende problem til noen elever: «På et skip er det 26 sauer og 10 geiter. Hva er alderen til kapteinen?» Dette er et problem som nødvendigvis ikke er løselig. Det man så fra elevene var at flere enn tre av fire elever som valgte å bruke addisjon for å løse oppgaven (Novotná & Sarrazy, 2005). I dette tilfelle var det $26 + 10$, som ble 36. Dermed mente elevene at kapteinens alder var 36. Fra resultatene er det nemlig noe lignende vi ser. Vi ser at elevene bare prøver seg frem eller ikke vet helt hvordan problemet skal løses, og i slike tilfeller har de valgt å utføre tilfeldige beregninger med tallene gitt i oppgaven. Dette kan muligens være en strategi som fungerer på mindre avanserte problemer eller oppgaver i barneskolen.

Hvis vi skal trekke dette til klasserommet, så kan vi tenke oss at ungdomsskoleelever i hovedsak ønsker å benytte seg av noen få heuristiske strategier. Disse strategiene utgjør de heuristiske strategiene de nettopp har lært eller er godt kjent med, men det er også mulig at det handler om hvilke strategier som passer best til oppgaven. Fra resultatene kan vi tenke oss at de mest kjente heuristiske strategiene for elever på 9.trinn er gjett, sjekk og revidering, og illustrasjon/konkretisering, men at de er i stand til å bruke andre heuristiske strategier også. Årsaker til at elevene i hovedsak bruker noen få strategier kan være at læreren selv i stor grad bruker disse strategiene, eller at disse strategiene blir mest undervist (Gorodetsky & Klavir, 2003; Hattie, 2009).

Når vi først er inne på de ulike strategiene som ble brukt, kan det være nødvendig å bemerke seg at det ble observert bruk av flere heuristiske strategier brukt samtidig i løsningsprosessen. Vi vet at det kan være tilfeller hvor det lønner seg å kombinere flere strategier for å løse et problem, og for noen elever vil disse oppgavene være slike tilfeller (Mousoulides & Sriraman, 2020). Det finnes oppgaver som muligens ikke kan løses uten å kombinere ulike strategier, i dette tilfellet er ikke disse oppgavene slike. Hvis vi ser på antall tilfeller med bruk av flere heuristiske strategier som brukes samtidig, er det i kun én situasjon. Årsaker for et lavt antall kan være at elever ikke har erfaring med å bruke flere strategier samtidig. Det er også mulig at elevene har blitt undervist en og en strategi om gangen, og dermed ikke tenker at det er praktisk mulig å bruke flere strategier samtidig.

Vi ser også at i noen tilfeller blir det ikke brukt noen heuristiske strategier. Med dette mener jeg at vi kan se fra figurene i resultatkapittelet at det er noen tider det ikke ble observert noen heuristiske strategier fra elevene. Hvis man ønsker å benytte seg av heuristiske strategier kan man for eksempel bruke illustrasjoner eller liknende, for å prøve å få en dypere forståelse av oppgaven (Pólya, 1945). På den måten vil man kunne danne et bedre bilde eller større forståelse av problemet man møter på. På samme måte kan ulike heuristiske strategier bli brukt i de andre fasene, for å hjelpe med å lage en plan, utføre planen og verifisere løsningen (Pólya, 1945).

5.3 Verifisering

I fase fire, altså i verifiseringsfasen blir det ikke observert at elevene bruker noen heuristiske strategier. Fra resultatene ser vi at elevene noen ganger er innom fase fire, altså verifisering. Denne fasen går ut på at elevene prøver å verifisere løsningene sine, altså sjekke om disse er korrekte og ukorrekte (Pólya, 1945; Mason et al., 1982; Schoenfeld, 1985). Elevene har under flere tilfeller forsøkt å verifisere løsningen ved å stille spørsmål til intervjueren. De har spurt intervjueren om løsningen deres er korrekt, som et forsøk på verifikasjon. Dette viser tegn på at de ikke har forsøkt å verifisere løsningen på egenhånd. Det kan være ulike årsaker til at de ikke utfører egne beregninger eller resonneringer for å verifisere løsningen. I forskningen til Rott et al. (2020) skriver de at verifiserings hendelser er sjeldne, noe som også synes i denne studien. En mulig årsak er at de ikke har lært seg noen måter å verifisere løsningen på og dermed har de ingen kunnskap om hvordan det kan gjøres, på grunn av imitativ forståelse i faget (Lithner, 2008). Det er fullt mulig at de ikke tenker det er mulig å utføre ulike beregninger eller resonneringer for å verifisere løsningen.

Dette er noe vi kan ta med til klasserommet og hvordan de ellers oppfører seg når de skal løse problemløsningsoppgaver. Det kan hende at i klasserommet så utfører de heller ingen beregninger eller resonneringer for å verifisere løsningen. Det er mulig å tro at elevene vil spørre læreren i klasserommet, på samme måte som de spurte forskeren i intervjuet. Man kan også tenke seg at elevene sjekker fasit til oppgavene, eller spør andre medelever om hjelp. Disse måtene å verifisere på viser et tegn til verifikasjon gjennom ekstern aktør og ikke verifisering på egenhånd.

5.4 Begrensninger

Som all annen forskning kan man alltid forbedre forskningen. Denne studien har også noen forbedringspunkter, som blant annet at studien kunne hatt flere oppgaver for å få et rikere bilde av de heuristiske strategiene elevene ønsket å bruke. Med kun to oppgaver vil jeg kun se hvilke strategier som blir brukt på de to oppgavene. Dersom de to oppgavene i utgangspunktet kan løses av de samme type heuristiske strategiene så vil elevene mest sannsynlig bruke de samme strategiene. Dette kan da føre til at man muligens ikke kunne observere bruk av flere eller andre heuristiske strategier hos elevene under problemløsningen.

I tillegg kunne man hatt flere elever for å få et mer utfyllende resultat. Med kun fire elever så vil man kun se hvilke strategier de fire elevene ønsket å bruke. Dersom de fire elevene i utgangspunktet er vant eller komfortabel med å bruke de samme heuristiske strategiene, da vil man mest sannsynlig ha et resultat hvor det er et stort samsvar i hvilke strategier alle fire elever har brukt. I en større studie med flere elever, vil man kunne ha fått et helhetlig bilde av hvordan flere elever ville ha løst disse problemløsningsoppgavene. Med kun fire elever, kan det hende at konklusjonen som blir trukket ikke er representativ for alle 9.trinnselever i Norge. Når det er snakk om å inkludere flere elever, er det viktig å bruke elever fra ulike skoler. Elevene blir påvirket av det de lærer i timen av lærerne sine, og dermed ville man kunne få et mer rikelig resultat ved bruk av elever fra ulike skoler i landet. I tillegg kunne man også fokusert litt mer på om elevene fikk korrekt eller ukorrekt løsning. Ved å skille mellom hvordan elevene som fikk korrekt og ukorrekt løsning kunne man sett på om det er en forskjell i deres problemløsningsprosess. Ved å ha tatt hensyn til disse begrensningene og utført disse endringene kan man trekke konklusjoner som kan være mer aktuelle for strategibruken til 9.trinnselever i Norge.

6 Konklusjoner og implikasjoner

I denne oppgaven var målet å beskrive hvordan elever på 9.trinn arbeider med problemløsningsoppgaver. Dette med et fokus på de ulike heuristiske strategiene elevene tok i bruk. For å finne ut av det, hadde jeg delt målet inn i to mindre forskningsspørsmål.

1. Hvilke typer heuristiske strategier benytter elevene seg av under problemløsning?
2. I hvilke ulike faser bruker elevene disse heuristiske strategiene?

For å besvare disse forskningsspørsmålene har jeg benyttet meg av kvalitativ forskningsmetode, altså oppgavebasert intervju med videopptak. Dataen ble så analysert og presentert som et resultat. Deretter ble resultatene drøftet i lys av forskningsspørsmålene. Jeg kommer frem til at 9.trinns elever arbeider med problemløsningsoppgaver på en ikke-kronologisk måte, altså de går frem og tilbake mellom ulike faser. Dette skjer ofte når de sitter fast eller oppdager en feil. Når de ikke kommer noen vei, så prøver de på nytt med samme heuristisk strategi, men de kan også bestemme seg for å bruke en annen heuristisk strategi. I noen enkelte tilfeller vil de stoppe å arbeide med problemløsningsoppgaven når de har nådd enden, altså fått en løsning, selv om løsningen er korrekt eller ikke.

Elevene bruker ulike heuristiske strategier i de ulike fasene av problemløsningsprosessen. Mange av strategiene som ble beskrevet i teorikapittelet ble ikke brukt av elevene under arbeid med problemløsningsoppgavene. I første og siste fase blir det ikke observert bruk av noen strategier. Dette kan være på grunn av at elevene ikke har en vane av å bruke heuristiske strategier til disse delene eller at de kommer tydelig frem. I andre fase derimot, blir det observert bruk av følgende heuristiske strategier: Gjett, sjekk og revidering, illustrasjon/konkretisering. I tredje fase blir det observert bruk av alle de fire strategiene som blir observert gjennom alle intervjuene, altså gjett, sjekk og revidering, illustrasjon/konkretisering, dele opp problemet og tilfeldig beregning.

De heuristiske strategiene som er mest brukt av elevene er gjett, sjekk og revidering, og illustrasjon/konkretisering, men vi ser også tegn til andre strategier som at elevene prøver å dele opp problemet og utfører tilfeldige beregninger. Årsaker til hvorfor noen

enkelte heuristiske strategier blir mer brukt enn andre kan være elevenes komfortnivå i bruk av de ulike strategiene, eller at elevene mener at de benyttede strategiene er godt egnet til å løse akkurat de oppgavene elevene møtte på. Strategien tilfeldig beregning blir i hovedsak brukt når elevene ønsker å prøve seg frem eller ikke helt vet hvordan problemet skal løses, noe som ofte resulterer i at de går tilbake og starter løsningsprosessen på nytt med en annen heuristisk strategi. Vi ser også noen deler hvor elevene benytter seg av flere strategier samtidig, men dette skjer svært sjeldent. Samtidig er det i andre perioder ikke observert at elevene bruker noen strategier i det hele tatt. Under problemløsingen forsøker elevene å verifisere løsningen deres. I et ønske om å verifisere løsningen, valgte elevene å høre med forskeren om deres besvarelse er korrekt eller ikke. Dette tyder på at elevene ikke er klar over hvilke måter de selv kan forsøke å verifisere løsningen på egenhånd.

Videre ønsker jeg å trekke inn implikasjoner til videre forskning innenfor dette temaet. Dette basert på resultatene og den påfølgende drøftingen.

1. Elevenes strategibruk kan variere i ulike perioder og over lengre tid. Det kunne vært en mulighet for videre forskning innenfor dette. En mulighet for videre forskning er å se på elever strategibruk over en større tidsperiode for å kartlegge hvordan elevene endrer sitt strategibruk gjennom tiden og med flere problemløsningsoppgaver.

2. I diskusjonen har jeg trukket frem at elevene ikke verifiserer løsningene på egenhånd. Man kan muligens se på hvordan elevene verifiserer løsningene sine når de arbeider med oppgaver i klasserommet, som ikke nødvendigvis er problemløsningsoppgaver. Her man kan i tillegg forske på om elevene er klar over ulike måter de selv kan verifisere på, og om de faktisk benytter seg av de måtene etter at det har blitt undervist til dem.

3. I diskusjonen snakker jeg om hvilke årsaker det kan være bak elevenes strategibruk. Altså om det er avhengig av elevene selv, om det kommer an på oppgavene, eller kombinasjonen av elev og oppgave. Dette kan også være noe man kan forske videre på. I drøftingen og konklusjonen blir det ikke sagt bestemt hva som er årsaken bak strategivalget til elevene. Å vite hva som står bak strategivalgene til elevene vil kunne

gi lærere og forskere innsikt i hvordan elevene tenker når de løser problemløsningsoppgaver.

Forslagene som er trukket frem kan muligens bidra til et bedre innblikk i hvordan elevene arbeider med problemløsningsoppgaver og hva som står bak valgene til elevene. I tillegg kan dette kobles til undervisningen i klasserommet og elevenes matematiske kompetanse.

7 Litteraturliste

Befring, E. (2015). *Forskningsmetoder i utdanningsvitenskap*. Cappelen Damm akademisk.

Björkqvist, O. (2003). Matematisk problemløsning. I B. Grevholm (Red). *Matematikk for skolen* (s.51-70). Fagbokforlaget.

Botten, Geir. (2016). *Matematikk med mening: mening for alle*. Caspar Forlag A/S.

Clarke, D., Roche, A., & Mitchell, A. (2011). One-to-one student interviews provide powerful insights and clear focus for the teaching of fractions in the middle years. I J. Way, & J. Bobis (Red.), *Fractions: Teaching for understanding* (s. 23-31). Australian Association of Mathematics Teachers.

Cohen, L., Manion, L., Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. (7. utg.). Routledge.

Creswell, J. W. & Miller, D. L. (2000). Determining Validity in Qualitative Inquiry. *Theory into Practice*, 39(3), 124–130.
https://doi.org/10.1207/s15430421tip3903_2

Dalen, M. (2011). *Intervju som forskningsmetode* (2. utg.). Universitetsforlaget.

Dalland, & Andersson-Bakken, E. (2021). *Metoder i klasseromsforskning: forskningsdesign, datainnsamling og analyse*. Universitetsforlaget.

Dewey, J. (1910). *How We Think*. D.C. Heath and Company.
<https://doi.org/10.1037/10903-000>

Ertzeid, H. (2022, 08. april). *Disse ferdighetene trenger du i fremtidens arbeidsliv*. Oslomet. Hentet fra:
<https://www.oslomet.no/forskning/forskningsnyheter/disse-ferdighetene-trenger-du-fremtidens-arbeidsliv>

Fan, L. and Zhu, Y. (2007) 'Representation of Problem-Solving Procedures: A Comparative Look at China, Singapore, and US mathematics textbooks', *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 61-75.

Giere, R. N. (2004). How models are used to represent reality. *Philosophy of science*, 71(5), 742-752.

Gigerenzer, G. & Gaissmaier, W. (2011). Heuristic Decision Making. *Annual review of psychology*, 62(1), 451-482.

<https://doi.org/10.1146/annurev-psych-120709-145346>

Goldin, G. A. (1997). Chapter 4: Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, 9, 40–177.

<https://doi.org/10.2307/749946>

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. I Kelly, A. E. & Lesh, R. A. (Red.) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (s. 517-545). Lawrence Erlbaum Associates

Gorodetsky, M., & Klavir, R. (2003). What can we learn from how gifted/average pupils describe their processes of problem solving? *Learning and Instruction*, 13(3), (s. 305-325).

[https://doi.org/10.1016/S0959-4752\(02\)00005-1](https://doi.org/10.1016/S0959-4752(02)00005-1)

Hadamard, J. (1945). *The mathematician's mind: The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton University Press.

Hattie, J. (2009). *Visible learning: a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. Routledge.

Hedrén, R., Taflin, E., og Hagland, K. (2005). *Rika matematiska problem*. Liber AB.

Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(2), 145–165.

Johannessen, A., Tufte P. A. & Kristoffersen, L. (2016). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (5. utgave). Abstrakt forlag.

Johnson, R. B. & Christensen, L. (2014). *Educational research: Quantitative, qualitative and mixed approaches* (5. utg.). SAGE Publications, Inc.

Kilpatrick, J. (1993), 'Beyond Face Value: Assessing Research in Mathematics Education', I Nissen, G. and Blomhøj, M. (Red.), *Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics*, (s.15-34), Roskilde University Denmark.

Kilpatrick, J.; Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. National Academy Press

Kirke- og undervisningsdepartementet. (1987). *Mønsterplan for grunnskolen: M87*. Nasjonalbiblioteket. Hentet fra:
<https://www.nb.no/nbsok/nb/2aef891325a059851965d5b8ac193de5#0>

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Interviews: learning the craft of qualitative research interviewing* (2. utg.). Sage.

Larsen, A. K. (2017). *En enklere metode. Veiledning i samfunnsvitenskapelig metode* (2.utgave). Fagbokforlaget

Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. I: F. K. Lester Jr. (Red.), *Second handbook of research in mathematics teaching and learning* (s. 763–804). IAP.

Lester, F. K. (1994). Musings about Mathematical Problem-Solving Research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 660–675.
<https://doi.org/10.2307/749578>

Lester, F. K. (2013). Thoughts About Research On Mathematical Problem- Solving Instruction. *The Mathematics Enthusiast*. 10(1). Artikkel 12.
<https://doi.org/10.54870/1551-3440.1267>

Lithner, J. (2008) A research framework for creative and imitative reasoning. *Educ Stud Math* 67, (s. 255–276).
<https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2>

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically*. Pearson Education Limited

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Pearson

Mergenthaler, E. & Stinson, C. H. (1992). Psychotherapy transcriptionstandards. *Psychotherapy Research*, 2(2), (s. 125-142)
<https://doi.org/10.1080/10503309212331332904>

Ministry of Education, Singapore (2000). Mathematics syllabus (lower secondary). Curriculum Planning Division.

Moen, T., & Ragnheidur, K. (2011). *Sentrale aspekter ved kvalitativ forskning*. Tapir akademisk.

Mousoulides N., Sriraman B. (2020) Heuristics in Mathematics Education. I Lerman S. (Red.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_172

Nasjonalt-læremiddelsenter. (1996). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen*. Nasjonal biblioteket. Hentet fra:

<https://www.nb.no/nbsok/nb/f4ce6bf9eadeb389172d939275c038bb?lang=no>

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora. (2021, 16. desember). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*. Den nasjonale forskningsetiske komité. Hentet fra:

<https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/>

Neuhaus, K. (2013). Die Rolle des Kreativitätsproblems in der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 23(1), 77-78.

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren*. Universitetsforlaget

Niss, M., & Højgaard J., T. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Uddannelsesministeriet.

Novotná, J., Eisenmann, P., Příbyl, J., Ondrušová, J., & Břehovský, J. (2014). Problem solving in school mathematics based on heuristic strategies. *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science*, 7(1), 1–6.

Novotna, J., & Sarrazy, B. (2006). Model of a professor's didactical action in mathematics education: *professor's variability and students' algorithmic flexibility in solving arithmetical problems*. (s. 696-705).

Patton, M. Q. (1999). Enhancing the quality and credibility of qualitative analysis. *Health Services Research*, 34(5), 1189–1208.

Poincaré, H. (1908). *Science et méthode [Science and method]*. Flammarion

Polya, G. (1945). *How to Solve it?* Princeton University Press.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*. John Wiley.

Postholm, May Britt (2010), *Kvalitativ metode: en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*

Rott, B., Specht, B. & Knipping, C. (2021). A descriptive phase model of problem-solving processes. *ZDM – Mathematics Education*.

<https://doi.org/10.1007/s11858-021-01244-3>

Schoenfeld, A. H. (1979). Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), (s. 173-187).

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press, Inc.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? I Schoenfeld, A.H. (Red.), *Cognitive Schience and Mathematics Education*, (s.189-215). Lawrence Erlbaum Associates

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics (Reprint). *Journal of Education*, 196(2), 1–38. <https://doi.org/10.1177/002205741619600202>

Solvang, R. (1992). *Matematikk = didaktikk*. NKI forlaget

Sowder, L. (1989) Choosing Operations in Solving Routine Story Problems i R. I. Charles og E. A. Silver (red.) *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. National Council of Teachers of Mathematics.

Thagaard, T. (2009). *Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitativ metode*. Fagbokforlaget.

Tjora, A. (2017). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis*. (3. utg.). Gyldendal Akademisk.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. Hentet fra <https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Formaal>

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Kjerneelement, Matematikk 1.-10.trinn*. Hentet fra <https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer>

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Nye læreplaner – grunnskolen og gjennomgående fag vgo*. Hentet fra <https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/Nye-lareplaner-igrunnskolen-og-gjennomgaende-fag-vgo/>

Utdanningsdirektoratet. (2020b). *Kjerneelementer. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020*. Hentet fra <https://www.udir.no/lk20/mat09-01/om-faget/kjerneelementer?lang=nob>

Virginia Braun & Victoria Clarke (2006). *Using thematic analysis in psychology, Qualitative Research in Psychology*, 3:2, (s. 77-101) <https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa>

Wallas, G. (1926). *The art of thought*. Watts & Co

Yimer, A., & Ellerton, N. F. (2010). A five-phase model for mathematical problem solving: Identifying synergies in pre-service-teachers' metacognitive and cognitive actions. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 42, (s. 245–261).

8 Vedlegg

8.1 Vedlegg 1 – Intervjuguide

Intervjuguide for intervju i masterprosjektet: «Elevenes strategier og resonnement under arbeid med problemløsningsoppgaver»

Hva innebærer det for deg å delta?

- Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du deltar på et personlig intervju som blir tatt opp på videoopptak. Dette vil ta omtrent én time.
- I intervjuet vil du bli bedt om å jobbe med problemløsningsoppgaver, imens du tenker høyt. Du blir nødt til å begrunne dine valg og strategier. Og erfaringen med å jobbe med disse oppgavene. Du vil få utdelt hver av oppgavene, kalkulator, skrivesaker og papir.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Hvis du vil trekke deg, kontakter du meg personlig, og jeg vil så slette videoopptak og makulere samtykkebrev. Det vil ikke påvirke ditt forhold til skolen, matematikk læreren din eller meg som forsker om du velger å trekke deg fra prosjektet.

Innledning: informasjon til eleven

Du vil nå få utdelt noen ark med problemløsningsoppgaver, kalkulator, skrivesaker og ark. Vi tar en og en oppgave om gangen. Du skal løse hver av oppgavene imens du forklarer hvordan du tenker, hvilke strategier du velger å bruke og hvordan du kommer deg frem til løsningen. Bruk arket til kladd, slik at jeg får sett på fremgangsmåten, og til å skrive løsningen. I hovedsak er det du som skal løse oppgavene på egenhånd. Det er bare å stille spørsmål når som helst under intervjuet, hvis du lurer på noe eller noe er uklart.

Hoveddel: Oppgaveløsning

Oppgave 1.

På en gård har bonden kyllinger og kyr (kuer). Til sammen har disse dyrene 12 hoder og 40 bein. Hvor mange av dyrene er kyllinger, og hvor mange er kyr (kuer)?

Oppgave 2.

Hver sommer pleier Jenny og Mona å klippe gressplen til naboen. Jenny pleier å bruke 2 timer på å klippe denne gressplen. Venninna til Jenny, Mona, bruker 4 timer på å klippe den samme plen. Hvor lang tid tar det om Jenny og Mona samarbeider for å klippe plen?

Still spørsmål underveis for å forstå prosessen bedre:

Hva tenker du nå?

Hva gjør du nå?

Hvorfor gjør du det?

Annet:

- Ikke gi hints til eleven, siden dette kan påvirke elevens strategibruk
- Ikke verifiser om løsningen er korrekt eller ikke
- Vær så nøytral så mulig
- Fokuser på å være forsker

Etter hver oppgave:

Har du gjort liknende oppgave før?

Forstå du oppgaven?

Hvordan kom du frem til den strategien du valgte å bruke?

Hvordan vet du om du har løst oppgaven korrekt?

8.2 Vedlegg 2 - Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet

«Elevenes strategier og resonnement under arbeid med problemløsningsoppgaver»?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å forstå hvordan elever tenker når de løser problemløsningsoppgaver i matematikken. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Mange elever synes matematikkoppgaver er vanskelige, og spesielt problemløsningsoppgaver. Derfor vil jeg finne ut hvordan du tenker når du ser og løser slike oppgaver. Formålet med dette prosjektet er å forstå hvordan du på ungdomsskolen løser problemløsningsoppgaver. Da ønsker jeg å blant annet finne ut hvordan du tenker, hvilke strategier du bruker, hvor vanskelig du synes oppgavene er. Jeg kan undersøke dette ved at du deltar i et intervju der du løser noen oppgaver og vi snakker sammen om dem.

I dette prosjektet skal jeg svare på følgende problemstilling: *Hvilke strategier og resonnement bruker elever på ungdomstrinnet når de løser problemløsningsoppgaver i matematikk?*

Dette forskningsprosjektet er min masteroppgave på lektorprogrammer ved Universitetet i Oslo. Med masteroppgaven fullfører jeg min utdanning og blir lektor i matematikk og naturfag og blir lærer i ungdomsskolen eller videregående skole.

Funn som er gjort i denne studien kan bli brukt etter endt masterprosjekt til andre formål i pedagogisk- og undervisningssammenheng. Funnene kan for eksempel bli brukt i undervisning, foredrag eller i artikler som blir publisert i tidsskrifter eller på internett. Opplysningene og funnene som blir brukt vil være anonymisert og vil ikke kunne spores tilbake til deg som deltaker eller skolen din.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo er ansvarlig for prosjektet. Jeg heter Ashanth Sivagnanam, er masterstudent i lektorprogrammet ved dette instituttet, og denne oppgaven er mitt masterprosjekt. Jeg har to masterveiledere Lovisa Sumpter og Guri Nortvedt. Vi har ansvar for å ivareta deg som deltaker og ivareta dine rettigheter og personopplysninger.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Du får spørsmål om å delta i denne studien fordi du som er elev på ungdomsskolen har jobbet med matematikk i mange år og har erfaring med problemløsningsoppgaver gjennom

skolegangen din. Du vil være en av fem elever som får være med i studien. Jeg har fått kontaktopplysningene dine framatematikklæreren din.

Hva innebærer det for deg å delta?

Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du blir intervjuet og at jeg tar videoopptak av deg. Det vil ta deg ca. én time (dette kan variere litt fra person til person). På intervjuet vil du bli bedt om å løse noen problemløsningsoppgaver. I tillegg til å løse disse oppgavene vil du blant annet spurt om hva du tenker underveis, hvorfor du valgte din måte å løse oppgavene på og hva du mener svarene betyr.

Dersom det er ønskelig kan du og/eller foreldre dine få tilgang til intervjuguiden som jeg skal bruke ved å ta kontakt med meg, for eksempel for å se hvilke type oppgaver det er snakk om og hvilke spørsmål som blir stilt.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Hvis du vil trekke deg kan du kontakte meg personlig, og jeg vil slette videoopptak og makulere samtykkebrevet.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet.

Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- De som vil ha tilgang på opplysningene er meg, Ashanth Sivagnanam, som forsker og student, og mine masterveiledere Lovisa Sumpter og Guri Nortvedt.
- Det vil være jeg som håndterer videokameraet slik at råmateriale fra intervjuene (videoopptakene) er kun tilgjengelig for meg. Videoopptak vil bli lagret på en kryptert server, der kun jeg har tilgang. Dersom veiledere trenger å se opptak, vil de se dem sammen med meg.
- Samtykkebrev vil bli oppbevart avskilt fra videoopptak, og vil ligge nedlåst utilgjengelig fra andre enn meg og veileder.
- Deltakere vil ikke kunne identifiseres i publikasjoner, da personidentifiserende opplysninger er anonymisert/fjernet.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes og masteroppgaven er sensurert, noe som etter planen er 1. Januar 2023. Videoopptak gjort i intervjuene vil bli slettet. Samtykkebrev vil bli makulert, slik at navn på deltakere ikke kan spores etter endt prosjekt.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,

- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- meg: Ashanth Sivagnanam, Ashanths@student.uv.uio.no, 40054783
- Guri A. Nortvedt, g.a.nortvedt@ils.uio.no, 913 20 460
- Vårt personvernombud: Personvernombud ved UIO

(personvernombud@uio.no) Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig
(Forsker/veileder)
Guri A. Nortvedt

Student
Ashanth

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «*Elevenes strategier og resonnement under arbeid med problemløsningsoppgaver*», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg er klar over at jeg når som helst kan trekke tilbake samtykket mitt og at det ikke vil få negative konsekvenser.

Jeg samtykker til:

- å delta i *Intervju*

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet.

(Deltakerens navn i blokkbokstaver)

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

(Signert av foreldre)

