

UiO : Matematisk institutt

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Freake krefter på sylinder bak en grunne

Karen Samseth

Masteroppgave, våren 2022



Denne masteroppgaven er levert inn som en del av programspesialiseringen *Mekanikk* under *Lektorprogrammet* ved Universitetet i Oslo. Oppgaven er normert til 30 studiepoeng.

Forsiden viser et utsnitt av rotsystemet til den eksepsjonelle liegruppen E_8 , projisert ned i planet. Liegrupper ble oppfunnet av den norske matematikeren Sophus Lie (1842–1899) for å uttrykke symmetriene til differensiallikninger og spiller i dag en sentral rolle i flere deler av matematikken.

Sammendrag

Statens Vegvesen har fremmet bruk av en type rørbru kalt Submerged Floating Tube Bridge (STFB) som middel for å krysse fjorder. En slik er planlagt plassert i en fjord rett bak en forhøyning i fjordbunnen. Ved slike posisjoner har det tidligere blitt funnet økt sannsynlighet for freake hastigheter, det vil si hastigheter som er store og plutselige i forhold til vanlig. Inspirert av dette, gikk vi derfor videre til å måle kreftene på en sylinder plassert på tvers i nedoverbakken bak en grunne, der kreftene er indusert av bølger som propagerer over grunna og opprinnelig er generert fra Pierson-Moskowitz-spektrumet. Ved eksperimenter i bølgetank og statistisk analyse ved skjevhet, kurtose og sannsynlighetsfordeling fant vi en signifikant økning i sannsynligheten for ekstreme krefter når bølger propagerer over en grunne sammenlignet med bølger over flat bunn. Dette betyr at man bør ta høyde for økt sannsynlighet for freake krefter når man beregner last på rørbruer som plasseres på slike steder.

The Norwegian Public Roads Administration has proposed Submerged Floating Tube Bridge (STFB) as a possibility for cars to cross fjords. In one of the fjords, they have planned on placing one such tube bridge behind a heightening in the bottom topography. Earlier, there have been found increased probability for freak velocities at such positions, that is, velocities that are bigger and unforeseen compared to the normal sea. Inspired by this, we went on to do force measurements on a cylinder placed at the lee-side of a shoal, where the forces were induced by waves propagating over the shoal that were originally generated from the Pierson-Moskowitz spectrum. By experiments in a wave tank and statistical analysis by the skewness, kurtosis and probability density function, we found a significant increase in the probability for extreme forces when waves propagate over a shoal compared to waves over flat bottom topography. This means that increased probability for freak waves should be taken into account when calculating load on STFB placed at such positions.

Anerkjennelse

Jeg vil rette en stor takk til min veileder Karsten Trulsen for god veiledning og oppfølging, og et engasjement som har smittet over. Havbølger har vist seg å være mye mer interessant enn jeg hadde trodd for to år siden!

Eva Charlotte Berner skal ha tusen takk for alle gode diskusjoner og samtaler. Det har vært uvurderlig for motivasjon, forståelse og trivsel.

I det hydrodynamiske laboratoriet har Olav Gundersen vært til stor hjelp i forbindelse med eksperimentene. Takk!

Og så kommer jeg ikke utenom å nevne Lektorkroken, som har vært med meg gjennom alle disse årene på lektorstudiet og gjort hverdagen til en fest! Spesielt har gjengen på 902 vært god støtte og inspirasjon under masterskrivingen.

Ellers, takk til familie og venner, som gir meg glede i hverdagen! Og takk til Jesus, sånn generelt.

*Karen Samseth
Oslo, 15. mai 2022*

Innhold

Sammendrag	i
Anerkjennelse	ii
Innhold	iii
1 Introduksjon	1
1.1 Litteraturoversikt	2
1.2 Problemstilling	5
1.3 Disposisjon	5
2 Teori	6
2.1 Stokastisk teori	6
2.2 Spektrum	10
2.3 Bølgebeskrivelse	11
2.4 Konvergenstrakt	14
2.5 Krefter på sylinder nedsenket i vann	14
3 Metode	16
3.1 Eksperimentelt oppsett	16
3.2 Kalibrering av kraftmålere	20
3.3 Genererte bølger	22
3.4 Gjennomføring av eksperimentene	26
3.5 Postprosessering	28
3.6 Analysering av dataene	30
4 Resultater	32
4.1 Overflatemålinger	32
4.2 Kraftmålinger	34
4.3 Sammenligning av kraft- og overflatemålinger	37
4.4 Sannsynlighetsfordeling	41
5 Diskusjon	51
5.1 Målinger uten grunne	51
5.2 Målinger med grunne	52
5.3 Videre arbeid	56

6	Konklusjon	58
	Appendices	59
A	Programmeringskoder	60
A.1	Postprosessering av overflatemålingene	60
A.2	Postprosessering av kraftmålingene	61
A.3	Andre programmer/funksjoner	64
B	Sannsynlighetsfordelingen til kreftene på sylinder	65
B.1	Teoretiske beregninger	65
B.2	Metode	70
B.3	Resultater og diskusjon	70
	Figurer	72
	Tabeller	75
	Bibliografi	76

KAPITTEL 1

Introduksjon

Tenk deg at du kjører en bil gjennom en tunell, men denne tunellen ligger som et rør 50 meter under vannoverflaten i en fjord. En slags tunell gjennom vann istedenfor stein, altså. Du kjører inn i rørbrua og tenker på hvor fantastisk det er å slippe lange omveier rundt fjorden eller ferge som bare går få ganger i timen. Du tenker på hvor fint rørbrua må være for naturen over vann, som slipper støy og utslipp fra de mange bilene som skal til den andre siden av fjorden. Og foredraget du hørte på om hvor god løsning dette var, gjorde deg overbevist om at rørbrua skulle tåle alt av vind og vær. Du er overbevist, helt til du får beskjed over radioen at rørbrua lekker. Men det skulle jo ikke være mulig? Den var jo testet for de type bølger som kommer i dette området vanligvis!

Det er her poenget kommer: den er testet for sjøen slik den til vanlig oppfører seg. Hva da med freake bølger, det vil si bølger som er uvanlig store og ikke kan forutsies? Hva om det plutselig kommer en freak bølge innover fjorden og ødelegger rørbrua? Vi vet fra hendelser som Andrea-bølgen ved Ekofisk-feltet [20], Nyttårsbølgen ved Draupner-plattformen i Nordsjøen [13] og bølgen ved COSL-riggen på Troll-feltet i Nordsjøen [1] at freake bølger kan føre til fatale konsekvenser for mennesker og konstruksjoner på sjøen.

Den type bru som jeg har beskrevet overfor, kalt Submerged Floating Tube Bridge (SFTB), har blitt diskutert i mange år. Statens vegvesen, med Arianna Minoretti i front, har fremmet bruk av SFTB som krysningmiddel over fjorder som en realiserbar løsning [27]. De har gjort beregninger på lasten som rørbrua må tåle ved vanlig sjø, slik at de kan sikre at rørbrua er trygg. Når vi ser ut over en vanlig sjø, ser vi med en gang at den ikke kan beskrives deterministisk, men er irregulær og må derfor beskrives ved statistisk teori. Havbunnen er ikke alltid flat, så det store spørsmålet i statistisk analyse er hvordan sannsynlighetsfordelingen til overflatehevningen til bølgene endrer seg ved ulike bunngeometrier. Et av forslagene til Statens Vegvesen er nemlig å bruke en SFTB for å krysse Sognefjorden rett etter en forhøyning i bunngeometrien, la oss kalle det en grunne [28]. Rett over nettopp slike typer grunner har flere forskere funnet en forstørret sannsynlighet for freake overflatebølger, noe vi skal se gjennom litteraturoversikten i [Avsnitt 1.1](#). Rørbrua ligger riktignok litt under overflaten og i nedoverbakken bak plataet til grunna, og man kunne tenke at eventuelle freake bølger ved overflaten ikke skulle kunne påvirke rørbrua særlig, men også hastighetsfelt har blitt målt. I lektorstudent Stian Jorde sin masteroppgave [16] ble det vist forhøyet risiko for freake hastigheter i området rett bak grunna. De viktigste resultatene angående dette fra hans masteroppgave

er presentert i artikkelen til Trulsen, Raustøl, Jorde og Rye [32]. Forekomsten av freake hastigheter har også blitt bekreftet ved simuleringer av Lawrence, Trulsen og Gramstad [18]. Spørsmålet er videre om det også kan forekomme freake krefter ved samme område, som dermed vil påvirke hvor mye last en slik rørbru bør kunne tåle. For å kunne undersøke dette, trenger vi først å få oversikt over forskningen som er gjort fra før.

1.1 Litteraturoversikt

De siste årene har det blitt fokusert stadig mer på hva som skjer når bølger forplanter seg over en grunne. I denne seksjonen vil jeg presentere det mest relevante innen denne forskningen. For forklaring av begreper, se [Kapittel 2](#).

Trulsen, Zeng og Gramstad [31] undersøkte eksperimentelle data fra Marin i Nederland [4] ved å se på konfidensintervall for estimert varians, skjevhet, kurtose og overskridelsessannsynlighet. Eksperimentet besto av målinger av langkammede irregulære bølger som forplantet seg over tre ulike typer endring i vann dybden fra dypt til grunnere. De fant at nær enden av oppoverbakken forekom det et lokalt maksimum i skjevhet og kurtose. På samme sted fant de også størst sannsynlighet for store amplituder.

Ved numerisk simulering basert på en-dimensjonale Boussinesq-likninger, som beskriver svakt ikke-lineære og svakt dispersive bølger over grunt vann, gikk Gramstad et al. [10] videre med å se på skjevhet, kurtose og sannsynligheten for freake bølger når langkammede bølger forplanter seg over ulike bunnformer. De reproduserte resultatene til Trulsen et al. [31] om at skjevhet og kurtose ville ha maksimum nær enden av oppoverbakken. I tillegg var det enkelte av bunnformene som produserte et lite lokalt minimum i nedoverbakken. De fant også at den forstørrede sannsynligheten for freake bølger over grunna holdt seg oppe et stykke inn på grunna før den sank og stabiliserte seg. Hvor stor denne sannsynligheten var, var avhengig av hvor bratt bakken var og hvor grunt vannet var over plataet. Hvis vannet var dypt nok over grunna, ville maksimumet forsvinne.

Ma, Dong og Ma [19] gjorde eksperimenter med grunne som hadde oppoverbakke, plata og nedoverbakke. De genererte bølger etter JONSWAP-spektrumet (se [Likning \(2.34\)](#)) med ulike verdier for γ . Ut fra dette fant de at $\gamma = 3,3$ ga størst sannsynlighet for freake bølger, og at maksimum for denne sannsynligheten var nær den grunneste delen av oppoverbakken. I tillegg fant de at dette samme stedet ga maksimum skjevhet og kurtose. De undersøkte også forholdet mellom kurtose og skjevhet, og fant at for oppover- og nedoverbakken fulgte dette en parabel som Mori og Kobayashi hadde utledet, mens de måtte endre litt på konstantleddet i uttrykket for at det skulle passe til forholdstallene over plataet.

Trulsen et al. [32] undersøkte også bølger over en grunne ved eksperimenter. De observerte at overflatehevning og hastighetsfelt hadde maksimum kurtose på ulike steder, der overflatehevning hadde maksimum på starten av plataet, mens hastighetsfeltet hadde maksimum i nedoverbakken. De antydte også at den dimensjonsløse dybden til grunna måtte være $kh \leq 1,3$ for at det skulle bli observert statistikk som skiller seg fra den gaussiske, der k er bølgetallet. Den satte grensen for dybden kunne riktignok være påvirket av steilheten og båndbredden til bølgene.

Ved teoretiske beregninger og sammenligning med felt-data, undersøkte Bitner [3] ikke-lineære effekter ved vindbølger over grunt vann. Hun antok at bølgene var så godt som gaussiske, og at Gram-Charlier-rekken av formen som Edgeworth har utviklet, derfor kan beskrive sannsynlighetsfordelingen til overflatebølgene. I tillegg antok hun at prosessen er ergodisk, stasjonær og homogen. Hun kom fram til blant annet at ikke-lineære effekter påvirket den gjennomsnittlige bølgehøyden og -perioden og fordelingene deres, i forhold til den lineære teorien. Ut ifra sammenligningen mellom felt-dataene og den teoretiske Gram-Charlier-rekken, fant hun at disse stemte godt overens. Fra dette ble det også synlig at skjevhet og kurtose var avhengig av hvilket stadium vindbølgene var i, med maksimum nær stadiet der bølgene bryter.

Ved sammenligning med felt-data fra kysten av Bulgaria, undersøkte Cherneva et al. [5] hvordan ulike sannsynlighetsfordelinger beskrev vindbølgene, spesielt kammene, bukene og bølgehøyden. De tre teoretiske fordelingene de sjekket, underestimerte sannsynligheten for høye kammer og bølgehøyder. I tillegg fant de at to andre teoretiske fordelinger de undersøkte for kam og buk ikke fungerte som fordelinger for bølger over grunne områder, fordi de fikk negative verdier når kurtose og skjevhet hadde høye verdier.

Gjennom forsøk med JONSWAP-spektrum og smalbandet spektrum, undersøkte Beji og Battjes [2] tidsserien og spektrumet til bølger når de forplanter seg over en grunne. Grunna inkluderte en oppoverbakke, et platå og en nedoverbakke som var brattere enn oppoverbakken. De fant at brytende bølger ikke hadde særlig innvirkning på formen på spektrumet til bølgene, selv om total energi ble lavere. Spektrumene viste også et tydelig skille mellom frekvensene til de genererte bølgene og frekvensene på grunn av ikke-lineære interaksjoner. Tidsserien av bølgene viste i tillegg at monokromatiske bølger med lang bølgelengde utviklet seg til å få en sagtann-form uten symmetrien de startet med, med høyere ordens harmoniske frekvenser. Over platået observerte de trippel resonans, før bølgene ble dekomponert til bølger med mindre amplitude med nær harmonisk frekvens når de forplantet seg mot dypere vann, slik at energien kunne re-distribueres og gå mot en ny likevektsdistribusjon. Det smalbandede spektrumet utviklet seg til å bli bredbandet. For korte bølgelengder ble ikke endringen i formen på bølgene like stor, noe som også speilet seg i spektrumet til disse bølgene.

Grue [11] gjorde forsøk i en bølgetank der det ble plassert inn enten en sirkulær eller rektangulær grunne, og sammenlignet dette med ikke-lineær teori. Bølgene som ble generert hadde stor bølgelengde i forhold til dybden over grunna. Grue fant ved deterministisk analyse at den sirkulære grunna resulterte i høyere harmoniske frie amplituder av andre grad på le-siden av grunna. Mengden andregrads harmoniske i forhold til størrelsen på den genererte amplituden steg lineært fram til en viss amplitude som ga bølgebrytning. Samtidig sank førstegrads harmoniske. Hvor mye de ulike harmoniske endret seg i forhold til den genererte amplituden, ble større for større radius og høyere sylindere. Opp mot 25% av energifluksen til de genererte bølgene kunne gå over til høyere harmoniske. Andre ordens ikke-lineær teori stemte godt med endringen i mengden andregrads harmoniske i forhold til generert amplitude. For den rektangulære grunna ble det også observert tredjegrads harmoniske amplituder. Til sammenligning ble det ikke observert særlig med høyere harmoniske bølger på lo-siden av grunna. Resultatene stemte godt med den teoretiske modelleringen basert på Boussinesq-likningene, og viste at ikke-linearitet og dispersjon påvirket

ved grunna, mens dispersjon var viktigst langt vekk fra grunna.

Janssen, Herbers og Battjes [14] utviklet en stokastisk modell for bølger over en sirkulær eller oval vertikal sylinder. De så spesielt på den retningsbestemte utviklingen av bølgene etter grunna. Ved å sammenligne modellen med analytisk løsning og eksperimentelle data, fant de at den stemte godt for to-dimensjonal bunngeometri, og at den gjenskapte kombinasjonen av vidvinkel refraksjon og diffraksjon fra bunngeometrien nøyaktig.

Janssen og Herbers [15] undersøkte om sakte endrende bunngeometri eller strømminger kan endre hvordan bølgene oppfører seg. De fant en modell for frekvens opp mot vinkel, og undersøkte videre ved simulering hvordan fokusering av bølgeenergi kan endre sannsynligheten for ekstreme bølger. Da fant de en forstørret sannsynlighet for ekstreme bølger når fokuseringen av energi var stor nok til at bølgene gikk over i et ustabilisert stadium. Sammen med ikke-linearitet førte dette til stort avvik fra gaussisk statistikk.

Sergeeva, Pelinovsky og Talipova [26] undersøkte irregulære bølger over ulike bunngeometrier ved Korteweg-de Vries-modell og numerisk simulering. Korteweg-de Vries-modell antar svakt ikke-lineære og svakt ikke-dispersible bølger. De fant større avvik fra gaussisk statistikk ved mindre dybde og større steilhet hos de genererte bølgene.

Gjennom numerisk simulering ved Euler-likningene, undersøkte Viotti og Dias [35] bølger over ulike bunngeometrier. De reproduserte resultatene fra Trulsen et al. [31] om at kurtose og skjevhet har maksimum nær starten av plataået, før det stabiliserer seg over plataået. Ut fra sannsynlighetsfordeling observerte de at skjevheten ble større dess grunnere et plataå var, med stor «hale». Over plataået minket halen, mens sannsynlighetsfordelingen holdt seg skjev. Fra spektrumet til bølgene fant de en tydelig endring i formen rundt starten av plataået, med mer av de høyere frekvensene. Formen på spektrumet på starten av plataået stemte godt overens med Phillips ω^{-5} -potenslov [24] for de største endringene i dybde. Viotti og Dias konkluderte med at resultatene viste en økt intensitet av ekstreme bølger ved betydelige endringer i dybde.

Kashima, Hirayama og Mori [17] brukte eksperimenter og numerisk simulering ved Boussinesq-likningene, til å undersøke bølger som forplanter seg over en endring i dybde fra dypt til grunnere vann. De så på ulike bunngeometrier, og kjørte JONSWAP-bølger med varierende bølgehøyde og verdi for γ . De observerte et skille i oppførselen av bølgene når vannedybden var $k_p h = 1,363$. Skjevheten og kurtosen endret seg raskere ved $k_p h < 1,363$ enn ved $k_p h > 1,363$, og skjevheten endret seg med kurtosen for $k_p h < 1,363$. For flat bunn var kurtosen avhengig av bølgehøyden, og økte med avstanden fra padla for $\gamma > 1$, noe som ikke gjaldt skjevheten i like stor grad. De konkluderte også med at simuleringene ved Boussinesq-likningene ikke reproduserte forekomsten av freake bølger godt nok i forhold til hva eksperimentene viste, på grunn av at Boussinesq-likningene ikke tar for seg tredje ordens ikke-lineære effekter, noe som de mente var noe av årsaken til økning av kurtose ved $k_p h < 1,363$.

Zeng og Trulsen [39] brukte numerisk modell basert på de ikke-lineære Schrödinger-likningene til å undersøke skjevhet og kurtose over en sakte endrende bunn. De simulerte svakt ikke-lineære irregulære bølger, og bunnen gikk fra ikke-dimensjonell dybde på $kh = 10$ over til en grunnere dybde som de varierte, med kh mellom 1,2 og 4,003. De varierte også Benjamin-Feir-indeksen (BFI). Ved dette fant de at skjevhet og kurtose hadde et lokalt minimum nær den grunneste delen av oppoverbakken, før det stabiliserte seg til en likevektsverdi.

Spesielt fant de at det gikk et skille ved $kh = 1,363$, ved at ved $kh < 1,363$ med lavest BFI fikk man høyest kurtose, mens ved $kh > 1,363$ trengtes høyest BFI for å få høyest kurtose.

Gjennom simuleringer undersøkte Lawrence, Trulsen og Gramstad [18] statistiske egenskaper ved overflatehevning og hastighet for irregulære bølger som forplanter seg over en grunne. Bølgene var basert på JONSWAP-spektrumet. De varierte lengden på oppover- og nedoverbakken, bølgehøyde, peak-periode og dybden på grunna. De fant et maksimum for skjevhet og kurtose for overflatehevning nær slutten av oppoverbakken, og maksimum for skjevhet for hastighet samme sted. Maksimum kurtose for hastighet ble observert i nedoverbakken. Ved slakere bakker ble maksimumsverdiene mindre. Resultatene stemte godt overens med resultatene til Zeng og Trulsen [39] og Trulsen et al. [32].

1.2 Problemstilling

Ut ifra motivasjonen med hvor mye last en rørbru plassert bak en grunne må tåle, og litteraturen om beskrivelse av bølger og hastigheter ved en slik plassering, ønsker vi nå å undersøke *Hvordan er forekomsten av freake bølge-induserte krefter på en sylinder bak en grunne, sammenlignet med kreftene over flat bunn?* Gjennom denne masteroppgaven blir dette undersøkt ved eksperimenter i en bølgetank, der vi måler overflatehevning for bølgene over grunna og kraft på sylindere bak grunna.

1.3 Disposisjon

I de kommende kapitlene vil dette bli presentert og diskutert:

Kapittel 2 presenterer relevant teori angående beskrivelse av bølger, stokastisk teori, ulike typer spektrum, konvergenstrakt for sample-kurtose og krefter på sylinder.

Kapittel 3 forklarer oppsettet for eksperimentet, inkludert en forklaring av instrumentene som ble brukt, hvilke bølger som ble generert, hvordan kraftmålerne ble kalibrert, hva postprosesseringen av dataene besto av og hvordan analyseringen videre er gjort.

Kapittel 4 presenterer resultatene fra eksperimentene etter postprosessering, for kraftmålingene og overflatemålingene. Her sees det spesielt på skjevhet, kurtose og sannsynlighetsfordeling, i tillegg til varians, dimensjonsløs karakteristisk amplitude, dimensjonsløs dybde og Ursell-tall.

Kapittel 5 legger frem ulike interessante sider ved resultatene i lys av relevant teori. Det vil diskuteres hvilke deler av resultatene som bekrefter tidligere forskning, og hvilke deler som viser nye fenomener.

Kapittel 6 oppsummerer oppgaven og trekker konklusjon ut ifra dette.

KAPITTEL 2

Teori

2.1 Stokastisk teori

Havbølger kan ikke forutsees deterministisk, det vil si at de oppfører seg ikke likt uavhengig av tidspunkt eller posisjon hvor man observerer dem. Man må derfor ty til stokastisk analyse av bølgene. Under presenteres noen viktige begreper som vil brukes videre i oppgaven for å beskrive situasjonen i vårt eksperiment.

Stokastisk variabel og stokastisk prosess

Overflatehevningen til havbølger kan sees på som en stokastisk prosess, som har ulike mulige utfall selv med like værforhold og omgivelser. Et ensemble er en samling av utfall. En stokastisk variabel X gir en verdi $^j x$ for hvert utfall j , mens en stokastisk prosess gir en funksjon $^j x(t)$ for hvert utfall j . Det vil si at den kan bestå av en stokastisk variabel for hvert tidspunkt,

$$X(t) = \{X(t_1), X(t_2), X(t_3), \dots\},$$

eller en stokastisk variabel for hver posisjon, der ensemblet består av en funksjon med hensyn på tid, $^j x(t)$, for hvert utfall j [30].

Middelverdi

Middelverdien eller forventningen til en stokastisk variabel X er gitt ved

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx, \quad (2.1)$$

der $f(x)$ er sannsynlighetsfordelingen til den stokastiske variabelen. For en stokastisk prosess $X(t)$ kan man midle på to ulike måter: midle over ensemble for gitt tid, eller over tid i et gitt ensemble. Ensemble-middel for en stokastisk prosess $X(t)$ finnes ved

$$\mu(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, t) dx, \quad (2.2)$$

der $f(x, t)$ er sannsynlighetsfordelingen til $X(t)$ for hver gitt tid t , mens tidsmidling kan gjøres ved

$$\bar{\mu} = \langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt, \quad (2.3)$$

der T er tiden man midler over. Dersom disse middelveiene blir like, sier vi at prosessen er ergodisk for middelveien, og vi ser at ensemble-middelet må være konstant og uavhengig av tid. I våre eksperimenter kommer vi til å anta at overflatehevingen og kraftmålingene er ergodiske, og derfor gjøre tidsmidling av tidsseriene for å finne middelveien [30].

Standardavvik

Standardavviket til en stokastisk variabel X sier noe om hvor mye verdiene til variabelen kan variere fra middelveien μ . Den beregnes ved kvadratroten av variansen $V(X)$ til variabelen,

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E[(X - \mu)^2]}. \quad (2.4)$$

Standardavviket må være uavhengig av tid, så ved en stokastisk prosess kan man beregne standardavviket ut fra autokorrelasjonsfunksjonen, med krav om at prosessen er svakt stasjonær (se senere avnitt om **Autokorrelasjonsfunksjonen**) [30].

Skjevhet

For en stokastisk variabel X med middelvei μ og standardavvik σ kan vi definere skjevhet som

$$\gamma = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3}. \quad (2.5)$$

Dette beskriver hvordan de ulike utfallene er fordelt i sannsynlighetsfordelingen til den stokastiske variabelen, med en «hale» mot den ene siden av middelveien og mer «tyngde» mot den andre siden. Hvis en stokastisk variabel har positiv skjevhet, vil sannsynlighetsfordelingen til variabelen bestå av flere ulike høye verdier, men lite sannsynlighet for hver av dem, samtidig som det er større sannsynlighet for noen få verdier som er lavere enn middelveien. Tilsvarende omvendt for negativ skjevhet. Hvis skjevheten er null, vil fordelingen være symmetrisk om middelveien [30].

Kurtose

Kurtosen til en stokastisk variabel X defineres som

$$\kappa = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4}, \quad (2.6)$$

der μ er middelvei og σ er standardavvik. Dersom $\kappa < 3$ sier vi at variabelen er platykurtisk, dersom $\kappa = 3$ sier vi at variabelen er mesokurtisk, og dersom $\kappa > 3$ sier vi at variabelen er leptokurtisk. Kurtose sier noe om hvor mange høye og lave frekvenser som det er vesentlig sannsynlighet for å få som utfall ved et eksperiment, det vil si hvor store «haler» sannsynlighetsfordelingen har [30].

Gaussisk variabel

En gaussisk fordelt stokastisk variabel X har sannsynlighetsfordeling

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-(x-\mu_X)^2/2\sigma_X^2}. \quad (2.7)$$

I så fall er skjevheten $\gamma = 0$ og kurtosen $\kappa = 3$. Den karakteristiske fordelingen til variabelen blir

$$\phi_X(k) = E[e^{ikX}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx} dx = e^{i\mu_X k - \sigma_X^2 k^2/2}. \quad (2.8)$$

Her er $i = \sqrt{-1}$ [30].

Multivariat gaussiske fordelte variable

For multivariat gaussisk fordelte stokastiske variabler er karakteristisk funksjon

$$\phi(\mathbf{k}) = E \left[e^{i \sum_{j=1}^N k_j X_j} \right] = e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N k_j c_{j,l} k_l + i \sum_{j=1}^N k_j \mu_j}, \quad (2.9)$$

der

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_N \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,N} \\ c_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ c_{N,1} & \cdots & & c_{N,N} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Her er

$$c_{j,l} = \text{Cov}[X_j, X_l] = E[(X_j - \mu_j)(X_l - \mu_l)] \quad (2.12)$$

kovariansen mellom X_j og X_l med forventning henholdsvis μ_j og μ_l [30].

Gaussisk prosess

En stokastisk prosess $X(t)$ er gaussisk hvis hvert endelige utvalg av tider $\{X(t_n)\}$ er multivariat gaussisk fordelt. Dette er ekvivalent med at $Y = \sum_{j=1}^n \lambda_j X(t_j)$ er univariat gaussisk fordelt, der λ_j er vilkårlige konstanter.

Det er vanlig å anta at overflatehevningen til havbølger er gaussisk fordelt [30].

Summen av to bivariat gaussisk fordelte variabler

Videre kommer vi til å trenge et resultat som sier noe om fordelingen til summen av to bivariat gaussisk fordelte, stokastisk avhengige variabler. La $Z = X + Y$, der X og Y er to bivariat gaussisk fordelte stokastiske variabler med henholdsvis forventning μ_X og μ_Y og standardavvik σ_X og σ_Y . Gaussisk fordeling for X og for Y er da gitt ved [Likning \(2.7\)](#), som gir karakteristisk funksjon som i [Likning \(2.8\)](#). Siden X og Y er bivariat gaussisk fordelte stokastiske variabler, har de karakteristisk funksjon som i [Likning \(2.9\)](#) der vi antar at $k_X = k_Y = k$. Da får vi at

$$\phi(\mathbf{k}) = E \left[e^{i \sum_{j=1}^N k_j X_j} \right] \quad (2.13)$$

$$= E \left[e^{i(kX+kY)} \right] \quad (2.14)$$

$$= E \left[e^{ik(X+Y)} \right] \quad (2.15)$$

$$= E \left[e^{ikZ} \right] \quad (2.16)$$

$$= \phi_Z(k) \quad (2.17)$$

Vi kan altså bruke formelen for karakteristisk funksjon for multivariat gaussisk fordelte stokastiske variabler til å finne karakteristisk funksjon til summen av variablene, hvis $k_1 = k_2 = \dots = k_N = k$. For bivariat gaussisk fordelt variabel $\mathbf{X} = (X, Y)$ får vi dermed

$$\phi_{\mathbf{X}}(k) = E[e^{i(kX+kY)}] \quad (2.18)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(k^2 c_{XX} + k^2 c_{YY} + 2k^2 c_{XY}) + i(k\mu_X + k\mu_Y)} \quad (2.19)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(k^2 \sigma_X^2 + 2k^2 \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y + k^2 \sigma_Y^2) + ik(\mu_X + \mu_Y)} \quad (2.20)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}k^2(\sigma_X^2 + 2\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y^2) + ik(\mu_X + \mu_Y)}, \quad (2.21)$$

der

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[XY] - \mu_X \mu_Y}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.22)$$

er korrelasjonskoeffisienten mellom X og Y . Siden karakteristisk funksjon er entydig, får vi ut ifra formen på den karakteristiske funksjonen for en gaussisk fordelt variabel at $Z = X + Y$ er gaussisk fordelt med forventning $\mu_Z = \mu_X + \mu_Y$ og varians $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y$.

Autokorrelasjonsfunksjon

Autokorrelasjonsfunksjonen til en stokastisk prosess finner forventningsverdien til produktet av den stokastiske prosessen ved to ulike tidspunkt t_1 og t_2 :

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X^*(t_2)] \quad (2.23)$$

der «*» markerer kompleks konjugert. For en reell stokastisk prosess blir dette

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X(t_2)] = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2, \quad (2.24)$$

eller

$$R(\tau + t, t) = E[X(\tau + t)X(t)], \quad (2.25)$$

der $\tau = t_1 - t_2$.

En stokastisk prosess kalles svakt stasjonær dersom middelveien er konstant og autokorrelasjonsfunksjonen kun avhenger av τ . I så fall får man en sammenheng mellom autokorrelasjon for $\tau = 0$ og standardavviket til $X(t)$ ved

$$R(0) = E[X^2] = \sigma_X^2 \quad (2.26)$$

dersom X har middelvei $\mu_X = 0$ [30].

Wiener-Khintchines relasjon

Anta at $X(t)$ er en svakt stasjonær prosess. Da sier Wiener-Khintchines relasjon at effektspektrumet kan finnes ved Fourier-transformen til autokorrelasjonsfunksjonen:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (2.27)$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (2.28)$$

der normaliseringsbetingelsen må være oppfylt,

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (2.29)$$

[30].

2.2 Spektrum

Ved målinger og simuleringer er det funnet ulike effektspektrum $S(\omega)$ som beskriver ulike situasjoner. Vi kommer til å bruke definisjon av spektrum ut fra Wiener-Khintchine-relasjonen, der normaliseringsbetingelsen må være oppfylt, som forklart i forrige avsnitt. Under vil spektrum knyttet til havbølger presenteres.

Pierson-Moskowitz-spektrum

At en vindgenerert sjø er fullt utviklet, vil si at bølgene har nådd den største høyden som de kan holde før de bryter. En slik sjø vil inneholde et spenn av frekvenser kalt likevektsspennet, som er slik at sjøen holder seg fullt utviklet med likevekt i mengde energi som går over i andre former i forhold til den energien som blir tilført bølgene fra vinden [24]. Pierson Jr. og Moskowitz [25] utviklet en formel for spektrumet til vindgenerert sjø som er fullt utviklet, basert på data fra eksperimenter av Moskowitz med vindfart på mellom 10,29 og 20,58 m/s, og Kitaigorodskiis idé om at spektrumet burde ha samme form uavhengig av vindfart, for fullt utviklet sjø. De endte med et spektrum for overflatehevning som følgende:

$$S(\omega) d\omega = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} e^{-\beta(\omega_0/\omega)^4} d\omega. \quad (2.30)$$

Her er ω frekvensen til overflatehevningen til bølgene, $\alpha = 8,10 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 0,74$, og $\omega_0 = g/U$, der g er gravitasjonsakselerasjonen og U er vindhastigheten. Ved å bruke definisjon av moden for vinkelfrekvens, $\omega_m = 0,87g/U$, og sammenhengen mellom ω_m med signifikant bølgehøyde H_s , kom Ochi [23] fram til at formelen for spektrumet også kan skrives som

$$S(\omega) = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} e^{-\frac{5}{4}(\omega/\omega_m)^4}. \quad (2.31)$$

Vi kommer til å bruke dette spektrumet til å generere overflatebølger i hoveddelen av eksperimentene i denne oppgaven.

JONSWAP-spektrum

The Joint North Sea Wave Project (JONSWAP) var et eksperiment der det ble samlet inn data fra 13 stasjoner spredt utover en avstand på 160 km fra Sylt-øya utenfor kysten av Tyskland og utover mot Nordsjøen. Ut ifra disse målingene ble det dannet frekvens-effekt-spektrum, i tillegg til retningsbestemt fordeling fra 6 av stasjonene. Dette resulterte i JONSWAP-spektromet, som beskrives ved

$$S(f) = \alpha g^2 (2\pi)^{-4} f^{-5} \exp\left(-\frac{5}{4} \left(\frac{f}{f_m}\right)^{-4}\right) \gamma^{\exp\left(\frac{-(f-f_m)^2}{2\sigma^2 f_m^2}\right)}, \quad (2.32)$$

hvor α er en amplitdefaktor som korresponderer til Phillips' konstant, f_m er frekvensen som tilsvare maksimumet til spektromet, g er gravitasjonsakselerasjon, σ beskriver bredden til spektrum-peaken, med

$$\sigma = \begin{cases} 0,07 & \text{hvis } \omega \leq \omega_m \\ 0,09 & \text{hvis } \omega > \omega_m, \end{cases} \quad (2.33)$$

og γ er forholdet mellom maksimum spektralenergi og maksimumet i Pierson-Moskowitz' spektrum, med verdi 3,3 [12].

Dette kan skrives om til

$$S(\omega) = \alpha g^2 \omega^{-5} \exp\left(-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^4\right) \gamma^{\exp\left(\frac{-(\omega-\omega_m)^2}{2\sigma^2 \omega_m^2}\right)}, \quad (2.34)$$

der $\omega_m = 2\pi f_m$ [23].

2.3 Bølgebeskrivelse

For å kunne beskrive bølgene vi står ovenfor, trenger vi noen begreper og definisjoner. For havbølger, som forskere har funnet at best kan beskrives ved spektrum som beskrevet over, blir det nødvendig å bruke karakteristiske verdier for flere parametre, det vil si de verdiene av parametrene som tilsvare den mest typiske bølgen, eller peaken i spektromet. Blant annet disse begrepene vil beskrives nøyere i denne seksjonen.

Signifikant bølgehøyde

Bølgehøyde for overflatehevning er vertikal avstand mellom kam (toppen på bølgen) og buk (bunnen på bølgen). For hastighet og kraft kan vi beskrive bølgehøyde ved maks forskjell mellom utslag i positiv og negativ retning. Signifikant bølgehøyde H_s er omtrent lik $H_{1/3}$ for gaussisk sjø, der $H_{1/3}$ beskrives som gjennomsnittlig bølgehøyde for de 1/3 største bølgene. En mer moderne definisjon for signifikant bølgehøyde, er

$$H_s = 4\sigma, \quad (2.35)$$

der σ er standardavviket beskrevet av Likning (2.4) [30].

Karakteristisk amplitude a_c

For en irregulær bølge kan vi ikke snakke om at den har kun én fast amplitude, så vi må se på en karakteristisk amplitude. Vi ønsker at den karakteristiske amplituden a_c til en bølge skal være slik at den karakteristiske amplituden for en cosinus-bølge skal være lik dens faktiske amplitude, $a = a_c$. La oss derfor nå se på en bølge $X(t) = a \cos(\omega t + \theta)$, der θ er en stokastisk uniformt fordelt variabel. Autokorrelasjonsfunksjonen gir da

$$R(t, \tau) = E[X(t + \tau)X(t)] \quad (2.36)$$

$$= E[(a \cos(\omega(t + \tau) + \theta)) \cdot (a \cos(\omega t + \theta))]. \quad (2.37)$$

Ved

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y), \quad (2.38)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y) \quad (2.39)$$

får vi

$$R(t, \tau) = a^2 E[(\cos(\omega t + \theta) \cos(\omega \tau) - \sin(\omega t + \theta) \sin(\omega \tau)) \cos(\omega t + \theta)] \quad (2.40)$$

$$= a^2 E[\cos^2(\omega t + \theta) \cos(\omega \tau) - \frac{1}{2} \sin(2(\omega t + \theta)) \sin(\omega \tau)] \quad (2.41)$$

$$= \frac{a^2}{2} E[\cos(\omega \tau)] \quad (2.42)$$

$$= \frac{a^2}{2} \cos(\omega \tau). \quad (2.43)$$

Dermed er prosessen svakt stasjonær, og

$$R(0) = \frac{a^2}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2R(0)}. \quad (2.44)$$

Siden vi har ønsket at amplituden til cosinus-bølgen skal angi den karakteristiske amplituden, lar vi [Likning \(2.44\)](#) angi den karakteristiske amplituden til bølgen, a_c . Samtidig har vi for en svakt stasjonær prosess med middelerdi $\mu = 0$ og varians σ^2 at varians har en sammenheng med autokorrelasjon for $\tau = 0$:

$$\sigma^2 = E[X(t)^2] = R(0). \quad (2.45)$$

Dermed får vi at

$$a_c = \sqrt{2\sigma^2} = \sqrt{2}\sigma. \quad (2.46)$$

Dette gjør at vi kan beskrive den karakteristiske amplituden til overflateheving $a_{\eta,c}$ som proporsjonal med kvadratroten til den midlere effekten σ_{η} . Tilsvarende kan vi også beskrive den karakteristiske amplituden til hastighet $a_{U,c}$ og kraft $a_{F,c}$ ved samme formel, men der proporsjonal med henholdsvis σ_U og σ_F .

Peak-periode T_p og peak-bølgetall k_p

For å beskrive en irregulær bølge kan vi anvende peak-periode, som er definert ved at

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}, \quad (2.47)$$

der ω_p er vinkelfrekvensen som gir høyest verdi i effektspektrumet til bølgen. Videre kan vi finne peak-bølgetall k_p fra dispersjonsrelasjonen til gravitasjonsbølger på endelig dyp ved

$$\omega_p^2 = gk_p \tanh(k_p h), \quad (2.48)$$

der g er gravitasjonsakselerasjon og h er vanndybden [9, 30]. Disse beregningene kan vi gjøre tilsvarende for hastighet og kraft, som for overflatehevning.

Freake bølger

En freak, også kalt rogue, bølge er en bølge med bølgehøyde som skiller seg markant fra den signifikante bølgehøyden. For overflatehevning blir det normalt stilt krav om at

$$\frac{H}{H_s} > 2 \text{ eller } \frac{\eta_{kam}}{H_s} > 1,25, \quad (2.49)$$

der H er bølgehøyden til bølgen, H_s er signifikant bølgehøyde og η_{kam} er kamhøyden, det vil si avstand fra gjennomsnittlig overflatehøyde til kam [7]. For hastighet og kraft kan vi definere freake bølger på tilsvarende måte, men vi har ikke noen fastsatte verdier som forholdstallene over må være større enn.

Steilhet, dimensjonsløs karakteristisk amplitude

Steilheten til overflatemålingene kan man beskrive ved amplituden a og bølgetallet k til overflatemålingene ved en tidsserie, ved

$$ak, \quad (2.50)$$

som da er en dimensjonsløs amplitude. For irregulær sjø vil vi se på karakteristisk steilhet ved å sette karakteristisk amplitude for overflatehevning $a_{\eta,c}$ inn for a og peak-bølgetall $k_{\eta,p}$ for overflatehevning for k . For kraftmålinger ved irregulær sjø vil vi her beregne dimensjonsløs karakteristisk amplitude for kraft ved

$$\zeta = \frac{a_{F,c} k_{F,p}^4 T_{F,p}^2}{\rho}, \quad (2.51)$$

der $a_{F,c}$ er karakteristisk amplitude for kraft, $k_{F,p}$ er peak-bølgetall for kraft, $T_{F,p}$ er peak-periode for kraft og ρ er tettheten til vann ved 20°C, altså 998 kg m⁻³ [38].

Stokes-bølge

Taylor-utviklingen av overflatehevningen til en Stokes-bølge opp til andre orden beskrives ved formen

$$\eta = a \cos(kx - \omega t + \theta) + \frac{3 - \tanh^2(kh)}{4 \tanh^3(kh)} ka^2 \cos^2(kx - \omega t + \theta) \quad (2.52)$$

der a er amplitude, k er bølgetall, x er posisjon, ω er vinkelfrekvens, t er tid, h er vanndybde og θ er en faseforskyvning. For at en Taylor-utvikling som dette skal gjelde, det vil si ikke divergere, må de høyereordens leddene være mye

mindre enn de foregående leddene. Hvis vi har en dyptvannsbølge, det vil si $kh \gg 1$, så vil $\tanh(kh) \rightarrow 1$, slik at uttrykket for overflatehevingen blir

$$\eta = a \cos(kx - \omega t + \theta) + \frac{1}{2}ka^2 \cos^2(kx - \omega t + \theta). \quad (2.53)$$

[29].

Ursell-tallet

For at Stokes-rekkeutviklingen opp til andre orden ikke skal divergere, må andre ledd i [Likning \(2.52\)](#) være mye mindre enn det første leddet. For å vite at dette stemmer for gruntvannsbølger, der $\tanh(kh) \approx kh \ll 1$, kan vi sette kravet at forholdet mellom disse leddene skal være mindre enn $4/3$. Dette forholdstallet er Ursell-tallet. Vannoverflatemålinger har da Ursell-tall gitt ved

$$Ur = \frac{ka}{(kh)^3}, \quad (2.54)$$

der k er bølgetall, a er amplitude og h er dybden til vannet [29]. For irregulære bølger anvender vi her de karakteristiske parameterne for bølgetall og amplitude, som beskrevet tidligere.

2.4 Konvergenstrakt

Sample-kurtose er kurtose regnet ut ifra n uavhengige samples fra datamengden. På denne måten kan man se på forholdet mellom sample-kurtose og antall samples, for å vurdere hvor mange samples som er nødvendig for at resultatene skal være troverdige. Man håper altså at formen til grafen for sample-kurtose mot antall samples skal se ut som en trakt, derav navnet konvergenstrakt. For en normalfordelt datamengde av n uavhengige samples, vil variansen være

$$\frac{24n(n-1)^2}{(n-3)(n-2)(n+3)(n+5)} \sim \frac{24}{n} \quad (2.55)$$

Tilsvarende har vi for sample-skjevhet at variansen ved en normalfordelt datamengde av n uavhengige samples er

$$\frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)} \sim \frac{6}{n} \quad (2.56)$$

Ved avhengige samples, vil konvergenstrakten smalne saktere enn dette [8].

2.5 Krefter på sylinder nedsenket i vann

Når et objekt, for eksempel en sylinder, er nedsenket i vann, vil det virke to ulike krefter på den, induisert av bølgene og dermed hastighetsfeltet rundt objektet. Motstanden fra vannet (engelsk: drag force) vil bidra med en kraft som er ikkelineær og proporsjonal med kvadrert hastighet, mens tregheten fra vannet, kalt treghetskraft (engelsk: inertia force) vil bidra med en kraft som er proporsjonal med den deriverte av hastigheten. I følge Morison et al. [21]

2.5. Krefter på sylinder nedsenket i vann

vil den totale kraften på objektet per objektlengde være summen av disse to kreftene,

$$dF = dF_D + dF_I = \frac{1}{2}C_D\rho Au|u| + C_M\rho V \frac{Du}{Dt}, \quad (2.57)$$

der A er arealet av objektet som kreftene virker på, det vil si diameteren til sylindere når vi ser på krefter per sylindrelengde. V er tilsvarende volum, det vil si arealet til tverrsnittet av sylindere. ρ er tettheten til vannet, og u er hastigheten til vannet. C_D er motstandskoeffisient, og C_M er treghetskoeffisient. C_D er avhengig av Reynolds-tallet, definert ved

$$Re = \frac{ud}{\nu}, \quad (2.58)$$

der $\nu = \mu/\rho$ er kinematisk viskositet, μ er dynamisk viskositet, ρ er tetthet, u er hastigheten normalt på sylindereaksen og d er diameteren til sylindere [6]. For en sylindere kan vi anta $C_M = 2$ [6], og vi kan finne C_D ved

$$C_D \approx 1 + \frac{10,0}{Re^{2/3}} \quad (2.59)$$

dersom $Re < 250000$ [38].

KAPITTEL 3

Metode

Dette kapitlet presenterer og diskuterer oppsettet og gjennomføringen av eksperimentene, postprosesseringen og analyseringen.

3.1 Eksperimentelt oppsett

I denne seksjonen vil vi forklare utstyret vi brukte til eksperimentene, og hvordan disse ble satt opp i bølgetanken.

UL-prober

Vi brukte fire ultralydprober av typen Ultralab ULS Advanced for å måle overflatehevning. Vi valgte Range Low, det vil si sensortype USS02/HF og målingsområde 30 – 250 mm, siden våre prober ble satt til 120 mm over vannoverflaten ved stille vann. Dermed burde ikke målingene våre, som vi observerer ved eksperimentene at har maksimum amplitude på rundt 20 mm, gi problematiske utslag. Vi valgte Sample Mode Low, det vil si Sample Rate på 125 Hz. Måleinstrumentet har nøyaktighet på ± 1 mm [34]. Ultralydprober sender ut ultralydsignaler som reflekteres av vannoverflaten og registreres når den når proben. Da vil tiden lyden har brukt tur/retur vannoverflaten brukes til å beregne avstanden til overflaten. Dataene måler altså avstand fra probe til vannoverflate, med positiv retning vertikalt nedover [33].

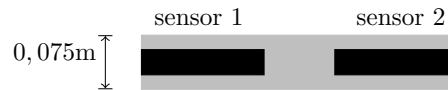
Kraftmålere

Marintek ved Sintef Ocean lagde to kraftmålere til oss, basert på en Wheatstone Bridge, det vil si ei bru av fire resistanser med en måler mellom som måler endring i resistansene på grunn av trykk [22]. Dataene fra måleren har enhet mV/V. Det vil si at dataene angir mengden spenning som måles mellom to punkter midt i brua, i forhold til spenningen som tilføres kretsen. På denne måten angir dataene endring i spenning på grunn av trykk, uavhengig av hvor mye spenning som kreves for at brua skal fungere [37]. Vi festet to slike kraftmålere i en sylinder med diameter 0,075 m, en inn fra hver ende, slik Figur 3.1 viser. Disse var festet slik at de lå stødig i sylinderrøret, med like stor avstand til kanten av røret.

Kraftmålerne ga data fra målinger i to retninger, kalt x- og y-retning. Vi ønsket et koordinatsystem der positiv x-retning var i samme retning som bølgeforplantning, og z-retning var vertikalt oppover i tanken. Siden målerne

lå mot hverandre, ville koordinatsystemet til den ene måleren ha y-retning i motsatt retning av den andre. Derfor måtte vi i postprosesseringen snu dataene fra målerne slik at deres data fra x-retningen ble i samme retning som vårt ønskede koordinatsystem, det vil si samme retning som bølgene forplantet seg, og målerens y-retning tilsvarte vår ønskede z-retning, vertikalt oppover. Dette forklares nærmere i [Avsnitt 3.5](#).

Vi har ikke fått informasjon om måleområdet til kraftmålerne. Dette betyr at dersom våre målinger av kreftene fra bølgene var i nedre sjikt for måleområdet, så ville det ha påvirket utslaget av støy sammenlignet med utslaget fra bølgene. Samtidig har det vist seg gjennom eksperimentene at støyen ikke er signifikant i forhold til utslaget fra bølgene. Vi har heller ikke fått informasjon om usikkerheten i måleinstrumentene fra Marintek. Derfor har vi beregnet usikkerhet ut ifra kalibreringsresultatene, se [Avsnitt 3.2](#).



Figur 3.1: Modell av sylinderen med diameter 0,75m. Sylinderen har en kraftmåler inn fra hver ende.

Oppsett i bølgetanken

Bølgetanken i det hydrodynamiske laboratoriet ved Universitetet i Oslo er 25 m lang, 0,5 m bred og 0,8 m høy. I ene enden er en padle, og andre enden har en strand for å begrense refleksjon av bølger. Vår grunne besto av en oppoverbakke, et platå og en nedoverbakke som var brattere enn oppoverbakken. Dette var plassert slik at enden av platået nærmest padla var 10,160 m fra padla i likevektsposisjon. Her setter vi vårt nullpunkt for koordinatsystemet vi bruker videre i oppgaven. Oppoverbakken startet $-1,600$ m i forhold til dette nullpunktet. Platået var 1,600 m langt og endte i en nedoverbakke som gikk fra 1,600 m til 2,400 m bak nullpunktet, slik [Figur 3.2](#) viser. Vi gjorde også målinger uten grunna i tanken, for å kunne sammenligne resultater fra målinger med og uten grunne.

Sylinderen med kraftmålerne var plassert med sentrum 0,108 m under vannoverflaten ved stille vann, det vil si på 0,413 m dybde, og med varierende posisjon horisontalt. Vi valgte 0,108 m under vannoverflaten for å unngå at bølgene tørrla sylinderen, noe som ble verifisert ved inspeksjon. Samtidig ønsket vi å kunne sammenligne med ADV-målinger gjort rundt 0,060 m under vannoverflaten ved stille vann, noe som ble mulig siden øverste punkt på sylinderen ble 0,070 m under vannoverflaten. Sylinderen ble satt på tvers av tanken, med feste i et stativ, som igjen var festet i en skinne i veggen til tanken. Sylinderen var festet til stativet med fire skruer på hver side, for at det skulle være så stabilt som mulig. Stativet hadde flere hull boret med 0,030 m avstand, slik at vi kunne bytte posisjon horisontalt ved å skru sylinderen fast i hullene som passet med posisjonen. Stativet var festet til skinna i veggen til tanken ved to festepunkter på hver vegg, for at stativet skulle være stødig. Vi startet målingene ved $x = 2,300$ m, fordi det var omtrent her at Lawrence et al. [18] hadde sitt maksimum i kurtose og minimum i skjevhet for hastighet ved deres

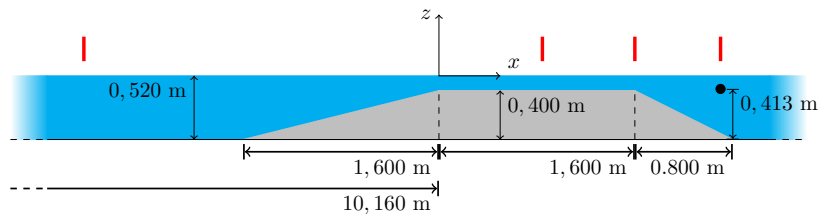
3.1. Eksperimentelt oppsett

JONSWAP-simuleringer med $T_p = 1,1$ s, og vi i utgangspunktet ikke visste hvor mange posisjoner vi kom til å måle.

Videre var ultralydprobene plassert 0,120 m over vannoverflaten ved fire posisjoner, med varierende posisjon horisontalt. UL-proben nærmest padla var alltid plassert på samme sted, $-2,900$ m i forhold til vårt origo. Dette var for å ha et referansepunkt som ikke var påvirket av dybdeendringen på grunn av grunna, og som alltid burde gi like resultater. Bakerste probe, det vil si probe 4, ble plassert rett over sentrum av sylinderen. Avstanden fra probe 1 og 4 til padla ble med Leica lasermåler. Probe 3 var 0,700 m fra probe 4, og probe 2 var 0,755 m fra probe 3. Disse avstandene ble sjekket med linjal. Posisjonene har derfor usikkerhet på ± 1 mm.

Posisjon	Probe 1	Probe 2	Probe 3	Probe 4	Sylinder
1	-3,000	0,435	1,190	1,890	1,890
2	-2,900	0,435	1,190	1,890	1,890
3	-2,900	0,845	1,600	2,300	2,300
4	-2,900	0,805	1,560	2,260	2,270
5	-2,900	0,795	1,550	2,250	2,250
6	-2,900	0,765	1,520	2,220	2,220
7	-2,900	0,735	1,490	2,190	2,190
8	-2,900	0,705	1,460	2,160	2,160
9	-2,900	0,675	1,430	2,130	2,130
10	-2,900	0,645	1,400	2,100	2,100
11	-2,900	0,615	1,370	2,070	2,070
12	-2,900	0,585	1,340	2,040	2,040
13	-2,900	0,555	1,310	2,010	2,010
14	-2,900	0,525	1,280	1,980	1,980
15	-2,900	0,495	1,250	1,950	1,950
16	-2,900	0,465	1,220	1,920	1,920
17	-2,900	0,435	1,190	1,890	1,890

Tabell 3.1: Posisjonene til UL-probene og sentrum av sylinderen, i forhold til origo satt 10,160 m fra padla i midtposisjon. Enheten er meter. Hver rad viser posisjonen til de ulike måleinstrumentene ved samme kjøring.



Figur 3.2: Oppsett for grunna (grå), sylinderen (svart sirkel) og UL-probene (røde streker) i tanken. Koordinatsystemet har origo ved vannoverflaten ved stille vann, over starten av platået.



Figur 3.3: Bilde av at sylinderen med stativ skrues fast i skinna i tanken. Grunna og såvidt UL-probene kan sees til høyre i bildet.

Feilkilder

Det er flere ting som kan ha påvirket resultatene i denne oppgaven. Dette inkluderer både oppsett av måleinstrumenter, måleinstrumentene i seg selv og forstyrrelser fra omgivelsene.

Stativet som sylinderen var festet til og ledningene koblet til kraftsensorene krysset vannoverflaten i områder ved eller litt bak der overflatemålinger og kraftmålinger ble gjort. Dette ga små bølger på overflaten. Disse var små i forhold til vannbølgene vi genererte med padla, så vi anså disse som lite påvirkende for resultatet. Ved posisjon $x = 2,130$ m til $x = 2,270$ m ble kun de to øverste festepunktene mellom stativet og veggen skrudd helt fast, mens de nederste var kun begrenset av skinna, på grunn av begrenset tilgjengelighet til skruene. Ved den siste posisjonen, $x = 1,890$ m, måtte vi kun bruke to skruer for å feste stativet til sylinderen på siden til måler 2, på grunn av vansker med utstyret. Visuell inspeksjon av målingene fra denne posisjonen viser ikke utslag fra dette. Skruene skal ha vært massive og skrudd godt nok til at det ikke kunne være særlig bevegelse mellom sylinderen og stativet. Det var også mulighet for å utvide bredden til sylinderen, noe som gjorde det utfordrende å få satt sylinderen og stativet ned i tanken med akkurat lik bredde som tanken selv. Dette kan ha ført til at det ble spenn i stativet, som igjen kan ha gjort at kraftmålerne opplevde et trykk, eller at vann trenget seg gjennom mellom stativet og veggen til tanken.

Når det gjelder rådataene fra kraftmålingene, kunne vi etterhvert se en

tendens til at de første målingene gjort etter at instrumentet var slått på for dagen, hadde et gjennomsnitt som steg lineært etterhvert som tiden gikk. Dette gjennomsnittet flatet seg ut etter omtrent en time. Kanskje kom dette av at maskinen trengte tid på å komme i gang, eller at sylindere sakte, men sikkert, ble fylt med vann etter at vi hadde plassert den i tanken, og dermed at trykket mot kraftmålerne ble endret. Vi løste dette ved postprosessering, se [Avsnitt 3.5](#) for mer forklaring. Kraftmålerne ga også ekstra utslag på rundt $0,0001 \text{ mV/V}$ hvert tiende sekund. Vi målte også på en annen kraftmåler som ikke var i sylinder og ikke sto i tanken, og fikk samme type utslag, noe som kan tyde på at det ikke var noe med oppsettet i tanken som ga denne effekten. Det kan ha vært noe mekanisk i omgivelsene, eller en feil i måleinstrumentene. Vi vurderte det til at dette utslaget ikke ville påvirke resultatet særlig, siden det lå på under $1/30$ av utslaget de genererte bølgene ga.

Det ble oppdaget problemer med at dataene fra UL-probene ga en type spiss utstikker i bølgebukene, slik [Figur 3.14](#) viser. Dette fant vi særlig i probe 4, men også noe i probe 2. Det viste seg at dette var uavhengig av posisjonen til probene, altså at det var probene i seg selv som var problemet. Utstikkerne var typisk plassert ved steile områder av bølgen når vi så på tidsserien til overflatehevningen. Derfor kan det tenkes at utstikkerne kom fra at signalene UL-probene sendte ut ikke ble returnert rett nok opp til at UL-proben registrerte det returnerte signalet. For å få troverdige statistiske resultater, trengte vi derfor å få vekk utstikkerne, slik at dataene vi brukte for utregning, tilsvarte best mulig den faktiske overflatehevningen. Vi løste dette problemet ved postprosessering av dataene, se [Avsnitt 3.5](#).

Det ligger også en usikkerhet i målingene av avstandene fra prober og sylinder til padle og fra sylinder til vannoverflaten. Probene ble målt i forhold til hverandre, og denne avstanden ble kontrollert hver dag, men den kan likevel ha vært unøyaktig på millimeternivå. Målinger med laser kan ha blitt gjort med litt forskjellig posisjonering av lasermåleren og skrå laserstråle. Samtidig sjekket vi for flere enn en avstandsmåling for hver posisjon.

Mellom dagene da det ble målt på posisjon $x = 2,070 \text{ m}$ og $x = 2,100 \text{ m}$ for sylindere og tilsvarende posisjoner for probene, ble det gjort andre målinger av en annen person, som inkluderte å fylle mer sporingspartikler for ADV-målinger i tanken. Den store mengden sporingspartikler kunne klumpe seg sammen i vannoverflaten over tid og dermed lage en liten forhøyning i overflatemålingene. Dette er likevel en såpass liten forhøyning at det ikke vil ha særlig utslag på resultatene når det sammenlignes med større bølger.

Ellers kan omgivelsene ha påvirket resultatene ved at noen for eksempel kom borti tanken eller oppsettet for probene eller slo med dørene, eller at ledninger og annet gir en frekvens på 50 Hz .

3.2 Kalibrering av kraftmålere

For å vite hvordan kraftmålerne fungerte, trengte vi å gjøre en kalibrering.

Vi startet med å finne omtrentlig forventet kraftutslag for bølgene vi planla å generere i tanken, ved å først gjøre enkle målinger med et 2 kg lodd, og deretter sette sylindere i tanken og måle for samme type bølger som vi skulle bruke i eksperimentet. Målingene med 2 kg lodd viste et utslag på $0,0338 \pm 0,0002 \text{ mV/V}$ på kraftmålerne. Det vil si at 1 kg tilsvarer omtrent $0,0169 \text{ mV/V}$. Test-kjøring

med sylindren i tanken med samme kjørefil som ville bli brukt i eksperimentene senere, ga maks utslag i positiv x-retning, det vil si samme retning som bølgene forplantet seg, til å være $0,0052 \text{ mV/V}$. I z-retning, det vil si vertikalt oppover, ble maks utslag på $0,0048 \pm 0,0004 \text{ mV/V}$. Ser vi så på forholdstallet vi fant om hvor mye utslag på måleinstrumentet 1 kg tilsvarte, finner vi dermed at det største utslaget i bølgetanken tilsvarte omtrent $0,3077 \text{ kg}$ i x-retning og $0,2840 \text{ kg}$ i z-retning.

Til kalibrering av kraftmålerne ble det deretter brukt fire ulike lodd med vekt tilsvarende kraft i området rundt forventet kraft fra bølgene i tanken. Se oversikt i [Tabell 3.2](#). Loddene med vekt under 1 kg ble målt på en vekt med usikkerhet i tredje desimal, mens loddet med vekt rundt 1 kg ble målt på en vekt med usikkerhet i første desimal. Loddene ble hengt opp på sylindren ved hjelp av metalloppheng og eventuelt snor. For å sikre at metallopphenget ikke flyttet seg underveis i målingen, ble det teipet til sylindren med en liten teipbit. Det ble gjort målinger ved tre posisjoner på sylindren: på midten, lengst ut mot kanten av sylindren over kraftmåler 1, og lengst ut mot kanten av sylindren over kraftmåler 2. I tillegg ble det gjort målinger der vertikal retning var ulik i forhold til kraftmålerens koordinatsystemer, slik at vi kunne se om resultatene ble tilsvarende ved måling både i x-retning og z-retning i tanken.

Selve kalibreringsmålingene ble gjort ved å måle 30 sekunder uten lodd, og så henge på loddet i 30 sekunder. Målingene ble gjort med 200 Hz Sample Rate. Deretter ble dataene prosessert ved å beregne differansen mellom utslaget på kraftmålerne med og uten lodd for hvert run, og deretter plote relasjonen mellom vekt og utslag for å se om kraftmålerne virket lineært. Resultatet er vist i [Figur 3.5](#), [Figur 3.6](#) og [Figur 3.7](#).

Ut ifra resultatene fra kalibreringen ser vi at kraftmålerne virker lineært. Dette gjør at vi kan anta at målingene som gir verdier mellom de verdiene våre utvalgte lodd ga, vil tilsvare vekt slik den lineære regresjonsgrafen viser i figurene. Dermed kan vi gjøre om dataene våre fra enhet mV/V til N ved enkel lineær sammenheng, ved Newtons andre lov $F = ma$, der m er masse og a er akselerasjon (se delkapittel under). Det gjør også at det ikke har noe å si hvilken enhet dataene har ved utregning av skjevhet og kurtose, fordi enheten vil skaleres bort gjennom formelen for skjevhet og kurtose uten at svaret endrer verdi. Vi ser også at utslaget på måler 1 og måler 2 er omtrent likt, i tillegg til at differansen mellom utslaget i x- og y-retning på målerne er liten. Videre i analyseringen av dataene har vi brukt dataene fra summen av måler 1 og måler 2, fordi bølgene genereres kun i x-retning, slik at variasjonen mellom måler 1 og måler 2 bør være tilsvarende liten som i kalibreringen.

Standardavvikene markert i [Figur 3.5](#), [Figur 3.6](#) og [Figur 3.7](#) er beregnet ved hjelp av standardavviket til målingene uten lodd og målingene med lodd. La oss anta målingene uten lodd er en stokastisk variabel X og målingene med lodd er en stokastisk variabel Y , der X og Y er bivariat normalfordelte, med middelværdi $\mu = 0$ og standardavvik henholdsvis σ_X og σ_Y . Anta også at X og Y er statistisk uavhengige. Da har vi fra utregningen gjort under **Summen av to bivariat gaussisk fordelte variabler** i [Avsnitt 2.1](#) at netto utslag fra lodd, det vil si differansen mellom utslag med lodd og utslag uten lodd, $Z = X - Y$, er gaussisk fordelt med forventning $\mu_z = 0$ og varians

$$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2, \quad (3.1)$$

slik at standardavviket til netto utslag fra vekt er

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}. \quad (3.2)$$

På denne måten har vi funnet usikkerheten til netto utslag fra loddene. Hvis vi ser på den største usikkerheten mellom de tre målingene gjort ved en posisjon og retning, slik som er listet opp i [Tabell 3.3](#), så ser vi at den største usikkerheten funnet i utslaget er på 0,000312 mV/V, så usikkerheten til dataene ligger i fjerde desimal ved enhet mV/V.

Sammenheng mellom enhet mV/V og N

Når vi skal beregne sannsynlighetsfordelingen til kreftene, trenger vi å gjøre om utslagene fra målingene, som er i mV/V, til antall krefter, med enhet Newton (N). Dette kan vi beregne ved regresjonsgrafene vist i [Figur 3.5](#), [Figur 3.6](#) og [Figur 3.7](#). For summen av kreftene på måler 1 og måler 2, målt i positiv x-retning, får vi da fra regresjonsgrafene at

$$F = 1,7517 \cdot 10^{-2} v \cdot g, \quad (3.3)$$

der v er totalt utslag fra kraftmålerne målt i mV/V, og F er kraft målt i N. g er gravitasjonsakselerasjonen, siden loddet hang rett nedover, så kun en kraft tilsvarende gravitasjonskraft på loddet virket på sylindere, når vi ser på differansen mellom kraft på sylindere med og uten lodd. I negativ x-retning får vi på samme måte at

$$F = -1,7959 \cdot 10^{-2} v \cdot g, \quad (3.4)$$

og positiv y-retning gir

$$F = 1,7071 \cdot 10^{-2} v \cdot g. \quad (3.5)$$

Vi fant ved kalibreringen av kraftmålerne at største usikkerhet var på 0,000312 mV/V. For kraft tilsvarende dette at største usikkerhet er på 0,000054 N, det vil si at usikkerheten til dataene ligger i femte desimal ved enhet N, hvis vi regner om ved [Likning \(3.3\)](#).

Lodd	Vekt
50g lodd med snor (A)	50,089 g
100g lodd med snor (B)	100,107 g
Metallbit (C)	311,772 g
Metalloppheng (D)	3,784 g
1kg lodd med metallsnor (E)	1005,0 g
Teip	0,217 g

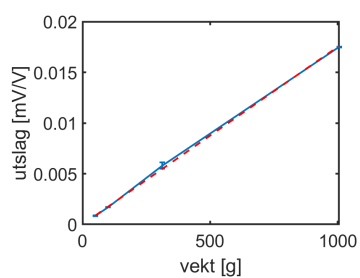
Tabell 3.2: Vekten til loddene og oppheng brukt i kalibrering av kraftmålerne.

3.3 Genererte bølger

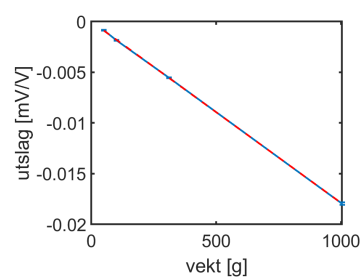
Bølgepadla ble styrt ved WaveLab Software. Vi genererte bølger fra Pierson-Moskowitz-spektrumet (se [Likning \(2.31\)](#)), med amplitudedefaktor $\alpha = 0,006$,



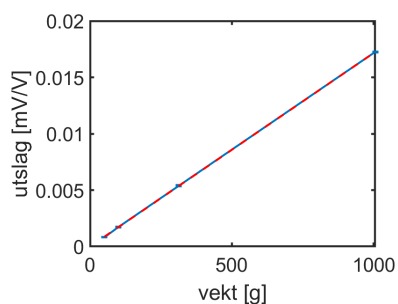
Figur 3.4: Bilde av sylindren på stativet, med lodd som henger på for kalibrering.



(a) Her er kraftmålerens positive x-retning vertikalt oppover.



(b) Her er kraftmålerens negative x-retning vertikalt oppover.

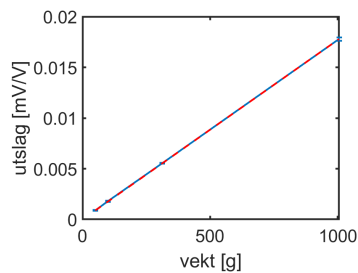


(c) Her er kraftmålerens positive y-retning vertikalt oppover.

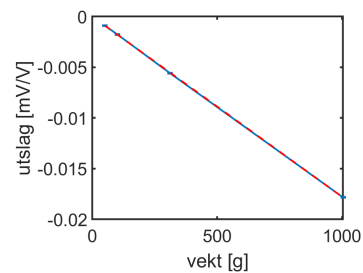
Figur 3.5: Viser forhold mellom vekt og totalt utslag på kraftmålerne, mot lineær regresjonsgraf gjennom punktene. Loddene henger her under måler 1. \pm viser resultatet fra målingene med vektene, med standardavvik. - - - viser resultatet fra lineær regresjon av resultatene (se [Avsnitt 3.2](#) for mer forklaring).

Retning:	Negativ x	Positiv x	Positiv y
Posisjon 1	0,000124	0,000312	0,000054
Posisjon sentrum	0,000142	0,000072	0,000095
Posisjon 2	0,000048	0,000159	0,000096

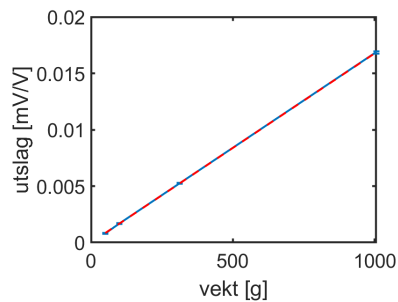
Tabell 3.3: Oversikt over den største usikkerheten målt for hver retning og hver posisjon, når man sammenligner usikkerhetene mellom de ulike loddene. Enhet mV/V.



(a) Her er kraftmålerens positive x-retning vertikalt oppover.

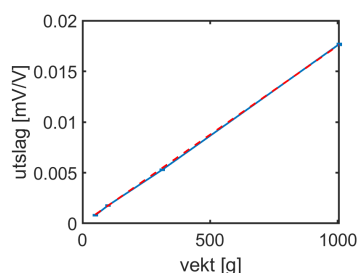


(b) Her er kraftmålerens negative x-retning vertikalt oppover.

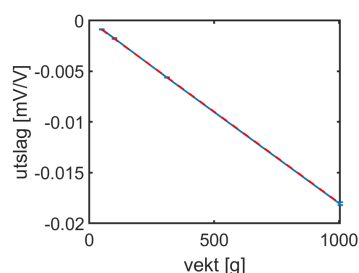


(c) Her er kraftmålerens positive y-retning vertikalt oppover.

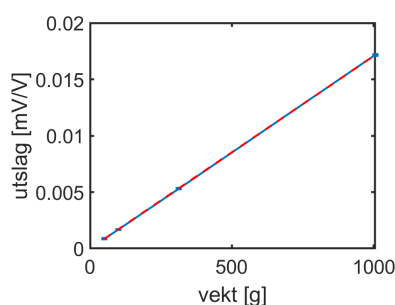
Figur 3.6: Viser forhold mellom vekt og totalt utslag på kraftmålerne, mot lineær regresjonsgraf gjennom punktene. Loddene henger her under måler 2. \pm viser resultatet fra målingene med vektene, med standardavvik. - - - viser resultatet fra lineær regresjon av resultatene (se [Avsnitt 3.2](#) for mer forklaring).



(a) Her er kraftmålerens positive x-retning vertikalt oppover.



(b) Her er kraftmålerens negative x-retning vertikalt oppover.



(c) Her er kraftmålerens positive y-retning vertikalt oppover.

Figur 3.7: Viser forhold mellom vekt og totalt utslag på kraftmålerne, mot lineær regresjonsgraf gjennom punktene. Loddene henger her midt mellom måler 1 og 2. \pm -viser resultatet fra målingene med vektene, med standardavvik. $---$ viser resultatet fra lineær regresjon av resultatene (se [Avsnitt 3.2](#) for mer forklaring).

peak-periode $T_p = 1,1$ s og vinkelfrekvens $\omega_m = 2\pi/T_p$. Disse verdiene ble valgt for senere å ha mulighet til å sammenligne med Eva Charlotte Berner sine data fra hennes masteravhandling, og $\alpha = 0,006$ ble valgt for å kunne se på de mest ekstreme tilfellene uten at bølgene bryter. Bølgene ble testet for brytning ved visuell inspeksjon i tanken. Det kan derfor hende at det fortsatt var mikrobrytninger som vi ikke kunne se med det blotte øye. For å undersøke spektrumet til bølgene, bør likevel bølgebrytninger ha lite å si, i følge Beji og Battjes [2]. Eva Charlotte Berner har i sin masteravhandling validert kjørefilen nærmere (E. C. Berner, personlig kommunikasjon, april 2022). Vi vil videre henvise til dette Pierson-Moskowitz-spektrumet som PM.

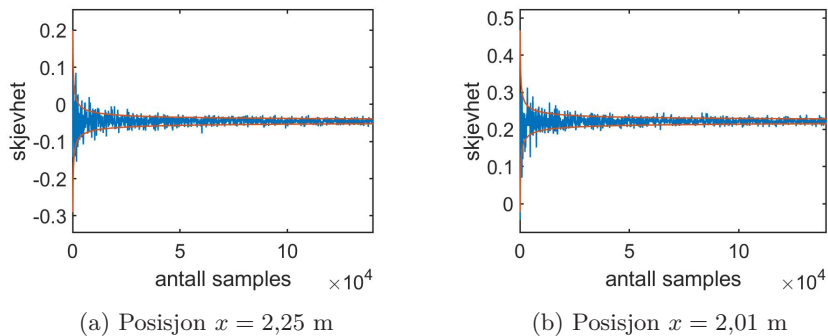
Vi genererte også noen bølger over flat bunn ut ifra JONSWAP-spektrumet (se [Likning \(2.34\)](#)), med peak-periode $T_p = 1,1$ s, amplitudedefaktor $\alpha = 0,003$, $\gamma = 3,3$ og $\omega_m = 2\pi/T_p$. Vi valgte å se på JONSWAP-spektrumet, og med disse valgte verdiene, for å kunne sammenligne med Stian Jorde sine data presentert i Trulsen et al. [32], og for å kunne se om resultatene ville endre seg vesentlig ved endret amplitudedefaktor og dønninger istedenfor vindsjø.

I denne studien var vi ikke interesserte i bølgefronten eller -halen, så vi trigget måleinstrumentene til å måle fra 30 sekunder etter padla hadde startet, til 1230 sekunder, altså 20 minutter. Vi valgte 20 minutters kjøring, fordi

3.4. Gjennomføring av eksperimentene

dette er lengden man vanligvis bruker for observasjon av havbølger, for å unngå at værforhold skal endre seg vesentlig i løpet av måleperioden, samtidig som man får tilstrekkelig antall målepunkter.

Vi beregnet også sample-skjevhet og sample-kurtose for målingene av overflatehevning og kraft, med den hensikt å vurdere om lengden på kjøringene var tilstrekkelig for å vurdere skjevhet og kurtose over grunna sammenlignet med hvordan skjevhet og kurtose ville variere for et normalfordelt bølgetog. Dette gjorde vi ved å velge ut et utvalg med flere og flere tilfeldige målepunkter, beregne skjevhet og kurtose ut ifra dette og plote skjevheten og kurtosen i forhold til hvor stort utvalget av målepunkter var. Resultatet fra dette sammenlignet vi med formelen for variansen ved en normalfordelt datamengde av n uavhengige samples, som beskrevet i [Likning \(2.55\)](#) og [Likning \(2.56\)](#). Ut ifra disse resultatene kunne vi vurdere om våre målinger hadde tilstrekkelig antall sample-punkter. Våre målinger hadde såpass høy sample rate at vi kan anta at våre samples var avhengige, slik at konvergenstrakten burde smalne saktere enn [Likning \(2.55\)](#) og [Likning \(2.56\)](#) anslår. Fra [Figur 3.8](#) til [3.13](#) ser vi at 20 minutters kjøring med 125 Hz sample rate for overflatemålinger og 200 Hz sample rate for kraftmålinger gir tilstrekkelig mange samples til at konvergenstrakten smalner til omtrent like smalt som ved normalfordelt datamengde av n uavhengige samples, selv om våre samples er avhengige. Dette gjør at vi kan anta at vi har tilstrekkelig mange samples for å kunne bruke dette i statistisk analyse, uavhengig av posisjon og kraftmålerretning.



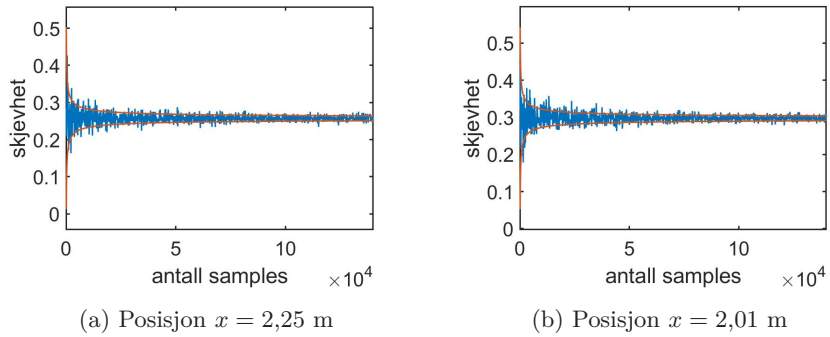
Figur 3.8: Konvergenstrakt for skjevhet med data fra kraftmålerne i x-retning (—), sammenlignet med standardavviket til sample-skjevheten til en normalfordelt sample-mengde (—).

3.4 Gjennomføring av eksperimentene

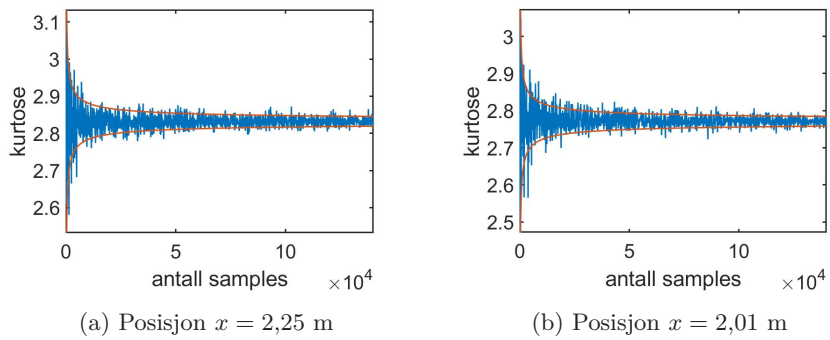
Vi startet med et innledende forsøk, der vi undersøkte kreftene på sylindren når tanken hadde flat bunn. Her kjørte vi først bølgene med Pierson-Moskowitz-spektrumet som beskrevet i [Avsnitt 3.3](#), der posisjonene til UL-probene og sylindren var som beskrevet i [Tabell 3.1](#) posisjon 1. Så kjørte vi bølgene med JONSWAP-spektrumet som tidligere beskrevet, der posisjonene var som beskrevet i [Tabell 3.1](#) posisjon 2.

Deretter satte vi inn grunna som beskrevet i [Avsnitt 3.1](#), og kjørte bølger av det samme Pierson-Moskowitz-spektrumet som over, mens vi varierte

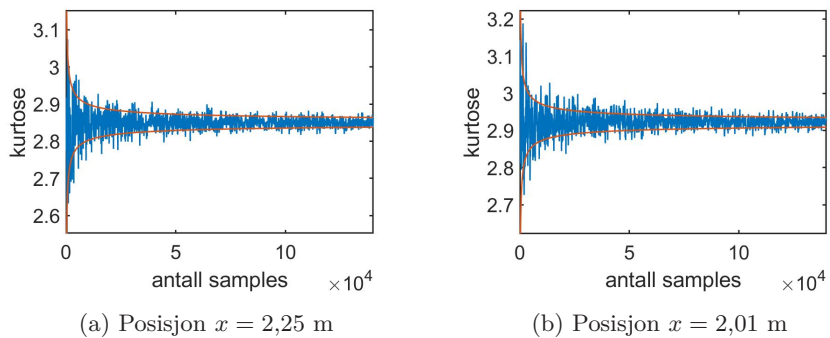
3.4. Gjennomføring av eksperimentene



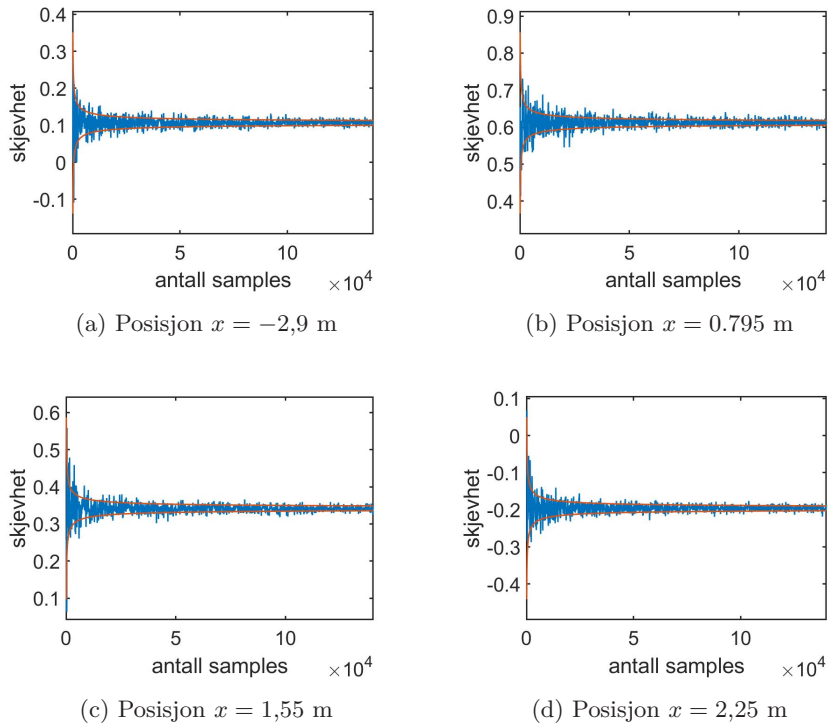
Figur 3.9: Konvergenstrakt for skjevhet med data fra kraftmålerne i z-retning (—), sammenlignet med standardavviket til sample-skjevheten til en normalfordelt sample-mengde (—).



Figur 3.10: Konvergenstrakt for kurtose med data fra kraftmålerne i x-retning (—), sammenlignet med standardavviket til sample-kurtosen til en normalfordelt sample-mengde (—).



Figur 3.11: Konvergenstrakt for kurtose med data fra kraftmålerne i z-retning (—), sammenlignet med standardavviket til sample-kurtosen til en normalfordelt sample-mengde (—).



Figur 3.12: Konvergenstrakt for skjevhet med data fra overflatemålerne (—), sammenlignet med standardavviket til sample-skjevheten til en normalfordelt sample-mengde (—).

posisjonene til UL-probene og sylindren som vist i [Tabell 3.1](#) posisjon 3 til 17.

For alle kjøringene kjørte vi tre ganger per posisjon, for å kunne sammenligne og få større reliabilitet.

3.5 Postprosessering

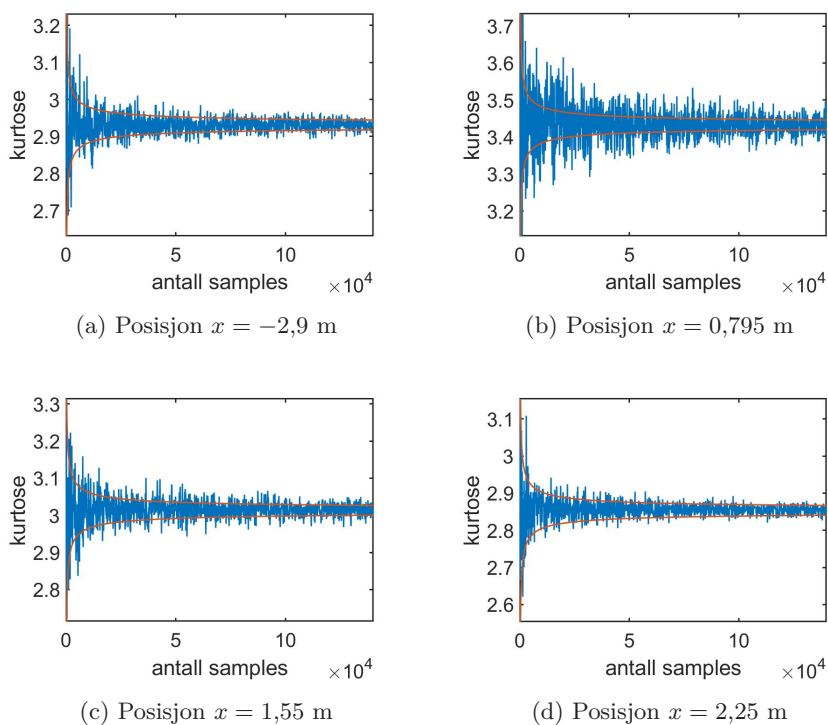
Overflatemålinger

UL-probene vi brukte målte som sagt avstand fra probe til vannoverflate, og ikke avstand fra likevektslinja til bølgene. Derfor bearbeidet vi dataene slik at overflatehevingen ble beregnet i forhold til den gjennomsnittlige vannhøyden, og snudde dataene slik at de ble orientert med positiv retning vertikalt oppover:

$$\eta = -(\eta_{inn} - \eta_{gjennomsnitt}). \quad (3.6)$$

Se [Tillegg A.1](#) for koden `overflatehevning_sentrere` som ble brukt. Denne koden tar inn rådata fra én kjøring, snur og sentrerer overflaten, og lagrer resultatet i en ny fil.

I tillegg viste det seg som sagt at dataene ga spisse utstikkere i bølgebukene, slik [Figur 3.14](#) viser. Dette tok vi vekk ved hjelp av koden `InterpolateSpikes`, som vist i [Tillegg A.1](#). Den opprinnelige koden ble utviklet av blant annet Tore Magnus A. Taklo, Odin Gramstad og Anne Raustøl for filtrering av «spikes»

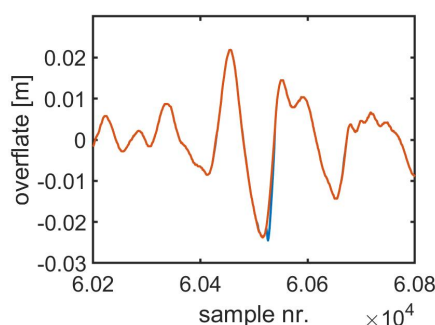


Figur 3.13: Konvergenstrakt for kurtose med data fra overflatemålerne (—), sammenlignet med standardavviket til sample-kurtosen til en normalfordelt sample-mengde (—).

som lignet på de vi hadde, men gikk både retning oppover og nedover. Koden er en funksjon som tar inn data og valg av grense for stigningstall mellom to punkter («threshold»), går gjennom dataene 20 ganger, sjekker om stigningen mellom to datapunkter er mer enn den satte grensen, og endrer eventuelt disse punktene og nabopunktene ved «pchip» interpolering. Vi hadde kun tilsvarende utstikkere retning nedover. Derfor endret vi denne koden slik at den kun ser på verdier under 0, slik at ikke eventuelle steile kammer som ikke er utstikkere skal bli filtrert vekk. Dermed kan vi anta at denne interpoleringen ikke vil påvirke analysen i stor grad, sammenlignet med dersom vi ikke hadde hatt utstikkere i utgangspunktet. Likevel ser vi at overflatehevingen noen ganger blir interpolert der den er for steil selv om det ikke er en utstikker, men i liten grad. Vi valgte «threshold» som 0,009, fordi så godt som alt av utstikkere da ble filtrert vekk.

Kraftmålinger

Grunnet at sylindren var festet i et stativ som skulle settes fast i tanken, måtte vi noen ganger snu sylindren slik at positiv x-retning og y-retning til kraftmålerne ikke stemte med vårt prefererte koordinatsystem for tanken. Derfor måtte vi snu disse dataene etterpå, slik at koordinatsystemet til kraftmålerne stemte med koordinatsystemet for tanken. [Tillegg A.2](#) viser koden `kraft_snu_koordinatsystem` som vi brukte for å gjøre dette. Det var tre ulike



Figur 3.14: Et typisk eksempel på en spiss utstikker som renses bort med «threshold» 0,009. Originaldata (—) plottet mot rensed data (—) ved posisjon $x = 2,190$ m.

orienteringer av sylindren der vi måtte snu dataene, så koden går gjennom alle kjøringene som gjaldt for hvert av disse tilfellene. Koden tar inn rådata og returnerer en ny fil for hver kjøring.

Som nevnt tidligere, i avsnittet om feilkilder, viste det seg utover i perioden med eksperimenter at de første målingene gjort etter at instrumentet var slått på for dagen, hadde en gjennomgående tendens til å ha et gjennomsnitt som steg lineært etterhvert som tiden gikk. Vi valgte å løse dette ved å ta lineær regresjon av dataene og bruke dette til å sentrere dataene om 0. Dette gjorde vi med alle kraftmålingene for total kraft i x-retning og z-retning. Koden `kraft_vri` i [Tillegg A.2](#) viser hvordan dette ble gjort i MATLAB. Den går gjennom hvert run, med og uten grunne hver for seg, tar inn data som eventuelt har vært snudd ved `kraft_snu_koordinatsystem`, går gjennom både vertikal og horisontal retning og beregner lineær regresjon for dette. Deretter trekkes de lineære punktene fra de opprinnelige datapunktene, og resultatet lagres i en ny fil.

3.6 Analysering av dataene

For å analysere dataene etter post-prosessering ble skjevhet, kurtose, varians, dimensjonsløs karakteristisk amplitude, dimensjonsløst dyp, Ursell-tall (for overflatehevning) og empirisk sannsynlighetsfordeling (for kraft) beregnet ved programmering i MATLAB. Det ble brukt tilsvarende metoder for overflatemålingene og kraftmålingene. For alle utregningene, bortsett fra sannsynlighetsfordeling, ble til slutt gjennomsnittet av resultatene for de tre kjøringene med samme posisjon for måleinstrumentene beregnet.

Skjevhet og kurtose ble beregnet ut ifra sample-kurtose. Vi valgte et større og større utvalg vilkårlige måledata, beregnet skjevhet og kurtose ved MATLAB-funksjonene `skewness` og `kurtosis`, og sjekket hva sample-skjevheten og -kurtosen konvergente mot ved å se på gjennomsnittet av resultatet fra de 50 største utvalgene. Standardavviket til skjevheten og kurtosen ble beregnet fra resultatene fra de samme 50 utvalgene.

Standardavviket til overflatehevning og kraft ble beregnet ved funksjonen `std` i MATLAB, der inndata i funksjonen var data fra hver kjøring. Variansen ble så beregnet ved å kvadrere dette resultatet.

Steilhet for den karakteristiske amplituden til overflatehevningen ble beregnet ut ifra [Likning \(2.50\)](#), og dimensjonsløs karakteristisk amplitude for kraft ved [Likning \(2.51\)](#) for hver kjøring. Her ble den karakteristiske amplituden funnet ved [Likning \(2.46\)](#), der σ er standardavviket til henholdsvis overflatehevning eller kraft for den samme kjøringen. Karakteristisk bølgetall $k_{F,c}$, $k_{\eta,c}$ og karakteristisk periode $T_{F,p}$, $T_{\eta,p}$ for henholdsvis kraft og for overflate ble funnet ved `wparam` (se [Tillegg A.3](#)), som er en funksjon i MATLAB laget av Atle Jensen, der dispersjonsrelasjon for gravitasjonsbølger på endelig dyp (se [Likning \(2.48\)](#)) og relasjon mellom frekvens og periode (se [Likning \(2.47\)](#)) blir brukt for å beregne ulike bølgeparametre, ved å ta inn frekvens og vanndybde. Frekvensen vi hadde som inndata i `wparam` var peak-frekvensen til enten kraftmålingene eller overflatemålingene fra den bestemte kjøringen, det vil si frekvensen som ga topp-punktet i effektspektrumet til overflatehevningen eller kraften. Dette effektspektrumet ble beregnet ved MATLAB-funksjonen `pwelch` med default «window», «noverlap» og «nfft».

Dimensjonsløst dyp $k_p h$ ble beregnet ut ifra resultatet for peak-bølgetall k_p for overflatehevning og kraft fra funksjonen `wparam`.

Ursell-tallet ble beregnet ved [Likning \(2.54\)](#) for overflatehevningen. Her ble a og k funnet ved karakteristisk amplitude og peak-bølgetall på samme måte som forklart over.

Empirisk sannsynlighetsfordeling til kraft ble plottet ved MATLAB-funksjonen `ksdensity`. Denne funksjonen finner sannsynlighetsfordelingen ved kjernefunksjon. Inndataene var data fra målingene etter postprosessering, men gjort om fra enhet mV/V til N ved [Likning \(3.3\)](#) og [Likning \(3.5\)](#). Her har vi lagt alle dataene fra de tre kjøringene med samme posisjon, etter hverandre i en array, slik at sannsynlighetsfordelingen for hver posisjon er et resultat av en tre ganger så lang tidsserie. Antall punkter funksjonen beregner for har vi satt til default, det vil si 100 punkter med lik avstand.

KAPITTEL 4

Resultater

I dette kapitlet vil resultatene fra analyse av måledata presenteres. Dette inkluderer resultater for skjevhet, kurtose, varians, dimensjonsløs karakteristisk amplitude, Ursell-tall og dimensjonsløs dybde for både kraft- og overflatemålinger, og for målinger gjort både med og uten grunne. Bølgene er generert fra PM-spektrumet og JONSWAP-spektrumet. Når vi i dette kapitlet og i [Kapittel 5](#) skriver at bølgene er generert fra en type spektrum, mener vi at padla har blitt satt opp til å generere bølger fra den typen spektrum, før bølgene har forplantet seg nedover tanken.

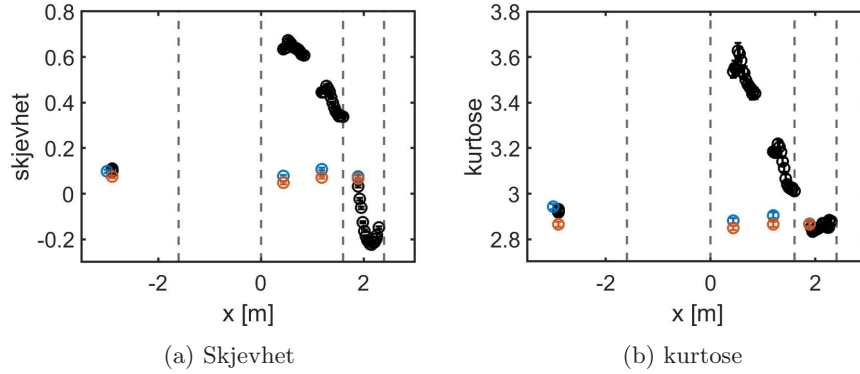
4.1 Overflatemålinger

I denne seksjonen ser vi på resultatene fra analyse av overflatemålinger med og uten grunne. Figurene med avstand fra padla på x-aksen viser de ulike seksjonene av grunna, det vil si oppoverbakke, platå og nedoverbakke, markert med vertikale stiplede linjer. Se [Figur 3.2](#) for modell av grunna. Dataene i punktene er regnet som gjennomsnittet av de tre kjøringene med samme posisjon for proben. I [Figur 4.1](#) viser errorbar gjennomsnittlig standardavvik for de tilsvarende samme tre kjøringene.

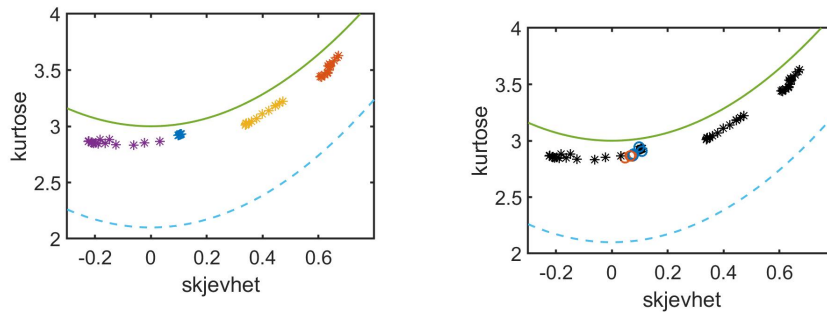
Vi ser i [Figur 4.1](#) at kurtosen og skjevheten for overflatehevningen endrer seg med omtrent samme form, med topp ved $x = 0,525$ m og bunn ved omtrent $x = 2,160$ m. Vi har ikke målinger for akkurat der skjevheten for målinger gjort med grunne krysser skjevheten for målinger gjort uten grunne, men ut ifra tendensen ser det ut til at det vil skje like før $x = 1,890$ m. Til sammenligning ser vi at kurtosen for målinger med grunne er omtrent lik skjevheten for målinger uten grunne ved omtrent $x = 2,130$ m. Kurtose og skjevhet for bølgene generert fra PM-spektrumet uten grunne er konsekvent større enn for bølgene generert fra JONSWAP-spektrumet. Ved $x = 2,900$ m ser vi at målingene gjort med grunne stemmer godt overens med målingene gjort uten grunne med samme genererte spektrum. Ved $x = 0,435$ m til $x = 0,495$ m og $x = 1,190$ m til $x = 1,250$ m er både skjevhet og kurtose litt lavere enn ved de neste posisjonene bak. Disse posisjonene ble kjørt samme dag og ved tilsvarende samme kjøring, der $x = 0,435$ m til $x = 0,495$ m ble målt av probe 2 og $x = 1,190$ m til $x = 1,250$ m ble målt av probe 3.

Relasjonen mellom kurtose og skjevhet i [Figur 4.2](#) viser en ganske tydelig parabel, men litt lavere enn Mori og Kobayashi [19]. Vi ser at målingene fra alle probene ligger på samme parabel uavhengig av hvordan bunnen er ved disse posisjonene, men [Figur 4.2a](#) viser likevel at målingene fra hver probe holder

seg samlet. Figur 4.2b viser at forholdstallet for bølgene generert fra PM- og JONSWAP-spektrumet ligger på den samme parabolen.



Figur 4.1: Skjevhet og kurtose av overflatedataene, med standardavvik mellom de tre runs med samme posisjon. Viser målinger med grunne med bølger generert fra PM-spektrum (\bullet), uten grunne med PM-spektrum (\circ) og uten grunne med JONSWAP-spektrum (\circ).



(a) Målinger gjort med grunne. Probe 1 har posisjon $x = -2,900$ m (*). Probe 2 er $x = 0,435$ m til $x = 0,845$ m (*). Probe 3 er $x = 1,190$ m til $x = 1,600$ m (*). Probe 4 er $x = 1,890$ m til $x = 2,300$ m (*).

(b) Målinger gjort med grunne med bølger generert fra PM-spektrum (*), uten grunne med PM-spektrum (\circ) og uten grunne med JONSWAP-spektrum (\circ).

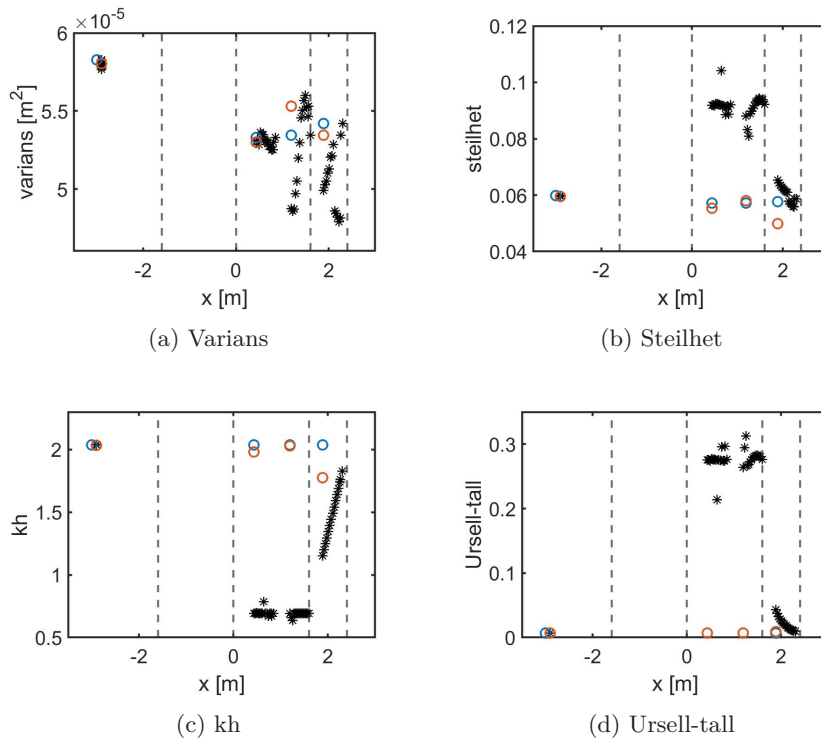
Figur 4.2: Relasjon mellom kurtose og skjevhet for overflatemålinger, mot Mori og Kobayashi (—) og Ma et al. (---) [19] sine teoretiske sammenhenger.

Figur 4.3a viser at variansen for målingene med grunne varierer en del, men holder seg generelt lav, og lavere eller lik variansen til målinger uten grunne.

Steilheten til den dimensjonsløse karakteristiske amplituden til overflatehevingen med grunne er større for posisjoner over plataet, og synker jevnt med nedoverbakken til grunna, slik vi ser i Figur 4.3b. Til sammenligning holder steilheten til målingene uten grunne med bølger generert fra PM-spektrumet seg jevnt på samme nivå. Likevel ser vi at målingen uten grunne med bølger generert fra JONSWAP-spektrumet varierer noe, med lavest verdi i posisjon tilsvarende nedoverbakken til grunna, selv om bunnen hadde konstant dybde over hele tanken.

Vi ser fra Figur 4.3c at dimensjonsløst dyp for målingene med grunne følger dybden til grunna, og målingene uten grunne med bølger generert fra PM-spektrumet holder seg jevnt, men målingene uten grunne med bølger generert fra JONSWAP-spektrumet varierer på tilsvarende måte som ved steilhet. For målingene med grunne har vi $k_p h < 1,363$ over grunna fram til omtrent $x = 2,010$ m fra starten av platået.

Ursell-tallet i Figur 4.3d viser tilsvarende tendens som steilheten. Med grunne gir målingene høyere Ursell-tall over platået, enn målingene uten grunne, og i nedoverbakken synker det gradvis.



Figur 4.3: Ulike resultater for overflatemålingene. Viser målinger gjort med grunne med bølger generert fra PM-spektrumet (*), uten grunne med PM-spektrumet (◊) og uten grunne med JONSWAP-spektrumet (◊).

4.2 Kraftmålinger

Denne seksjonen består av resultatene fra analyser av kraftmålingene. Her presenteres resultater for både x- og z-retning i tanken. Når avstand fra fronten av platået, x , er på x-aksen, viser figuren hele området der grunna har nedoverbakke, det vil si fra $x = 1,600$ m til $x = 2,400$ m. Målingene ble gjort mellom $x = 1,890$ m og $x = 2,300$ m. Figurene 4.6 og 4.7 - 4.9 viser resultater fra målinger gjort både med og uten grunna, der «*» markerer med grunne, og «◊» og «◊» markerer uten grunne. Punktene er beregnet som gjennomsnittet av de tre kjøringene med samme posisjon for sylindere. Vi har også lagt inn en horisontal stiplede linje (--- og ---) gjennom punktene fra målingene uten grunne, fordi

vi forventer at måling gjort uten grunne ikke skal endre seg med avstand fra padla. Errorbarene i [Figur 4.4](#) og [4.5](#) viser gjennomsnittlig standardavvik for de tre kjøringene med samme sylinderposisjon, for både med og uten grunne.

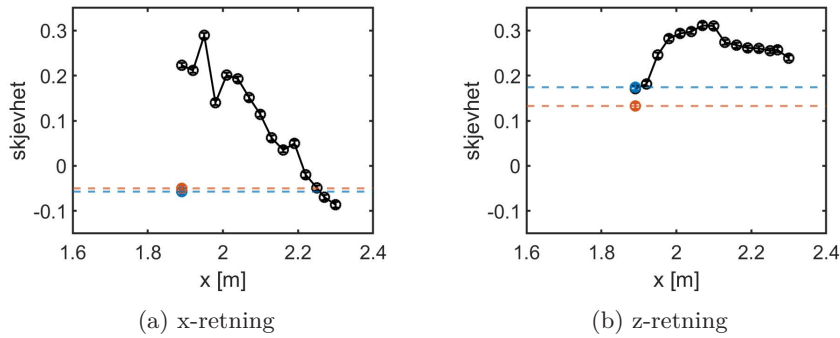
[Figur 4.4a](#) viser at skjevheten til kreftene i x-retning fra målingene med grunne minker jevnt ettersom dybden til vannet blir større. Vi ser også at den synker mot en skjevhet som er litt lavere enn ved målinger gjort uten grunne i vannet. Differansen mellom største og minste skjevhet for målingene med grunne er på 0,203. Forskjellen mellom skjevheten til kraft induisert av bølger generert fra JONSWAP-spektrumet og fra PM-spektrumet uten grunne er liten i forhold til deres standardavvik. Til sammenligning ser vi i [Figur 4.4b](#) at skjevheten i målingene i z-retning med grunne endrer seg fra å være lik målingene uten grunne til å bli noe høyere. Her ser vi også en større forskjell mellom skjevheten til kraft induisert av bølgene generert fra PM-spektrumet versus fra JONSWAP-spektrumet for flat bunn, og at målingene med grunne stemmer godt overens med målingen uten grunne for samme spektrum i samme sylinderposisjon. I tillegg er alle verdiene for skjevhet positive, med ingen nullpunkt, som vil si at det er en stor tyngde av enkelte lave frekvenser, men det er også flere forskjellige høye frekvenser som ikke forekommer like ofte. Differansen mellom største og minste skjevhet for målingene med grunne er på 0,140, altså litt lavere enn for x-retning.

[Figur 4.5a](#) viser en kurtose for kraft som øker mot 3 etterhvert som vanddybden blir større. Her kan det se ut som to områder, der det ene holder seg rundt kurtose 2,75, for $x = 1,890$ m til $x = 2,010$ m, mens det andre holder seg rundt kurtose 2,90, for $x = 2,040$ m til $x = 2,300$ m. Differansen mellom største og minste kurtose for målingene med grunne er på 0,20. Uansett holder kurtosen seg platykurtisk, både for x- og z-retning, der kraftmålinger gjort med flat bunn med bølger generert fra PM-spektrumet ligger i samme område som de laveste kurtosene fra målinger med grunne, mens kraftmålinger med bølger generert fra JONSWAP-spektrumet ligger såvidt under dette. Fra [Figur 4.5b](#) ser vi at kurtosen for eksperimenter med grunne øker fort fra kurtosen for flat bunn, før den synker igjen. Differansen mellom største og minste skjevhet for kraftmålingene med grunne er på 0,101, altså nesten halvparten så mye forskjell som for x-retningen.

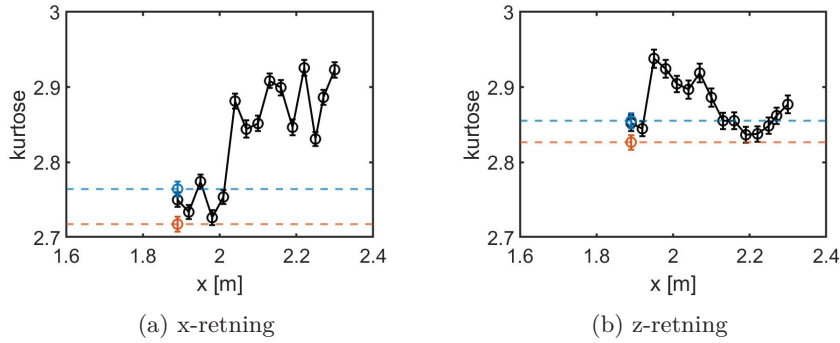
Relasjonen mellom kurtose og skjevhet for kraftmålingene fra x-retning, vist i [Figur 4.6a](#), viser ikke den samme tydelige parabelsammenhengen som er funnet tidligere for denne type relasjon for overflatehevning av Mori og Kobayashi og Ma et al. [19], selv om forholdstallene holder seg i samme område som forventet. I z-retning, [Figur 4.6b](#), følger forholdstallene derimot en mer lignende tendens som parablene uavhengig av om målingene er gjort med eller uten grunne. Likevel gir målingene uten grunne noen av de laveste verdiene på skjevhet i forhold til kurtose. Forholdstallene i z-retning holder seg også mer samlet enn i x-retning.

[Figur 4.7](#) viser at variansen for kraftmålinger med grunne går mot variansen til målinger uten grunne etterhvert som dybden blir større, men i x-retning går variansen fra en noe høyere varians, mens z-retning går fra en lavere varians.

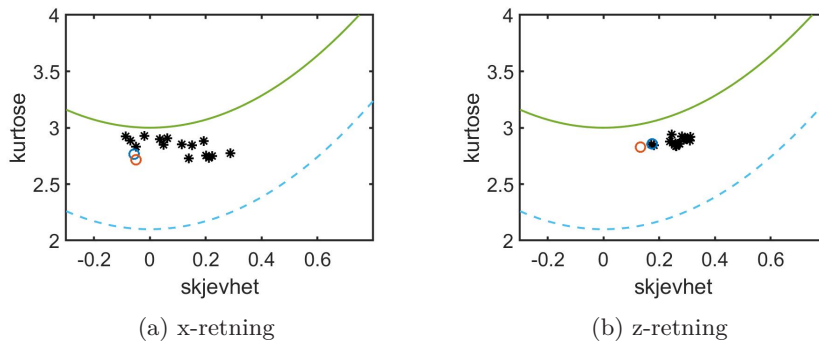
For den dimensjonsløse karakteristiske amplituden til kraft i x-retning med grunne ser vi i [Figur 4.8a](#) at den synker gradvis mot verdien til målingene uten grunne. I z-retning ser vi i [Figur 4.8b](#) at det derimot er mer variert dimensjonsløs karakteristisk amplitude, periodisk, og som regel lavere enn verdien for målinger uten grunne. Vi ser også at forskjellen mellom resultatene fra



Figur 4.4: Skjevhet av kraftdataene, med standardavvik mellom de tre runs med samme posisjon. Viser målinger gjort med grunne med bølger generert fra PM-spektrum (\circ), uten grunne med PM-spektrum (\ominus), og uten grunne med JONSWAP-spektrum (\oplus).



Figur 4.5: Kurtose av kraftdataene, med standardavvik mellom de tre runs med samme posisjon. Viser målinger gjort med grunne med bølger generert fra PM-spektrum (\circ), uten grunne med PM-spektrum (\ominus), og uten grunne med JONSWAP-spektrum (\oplus).

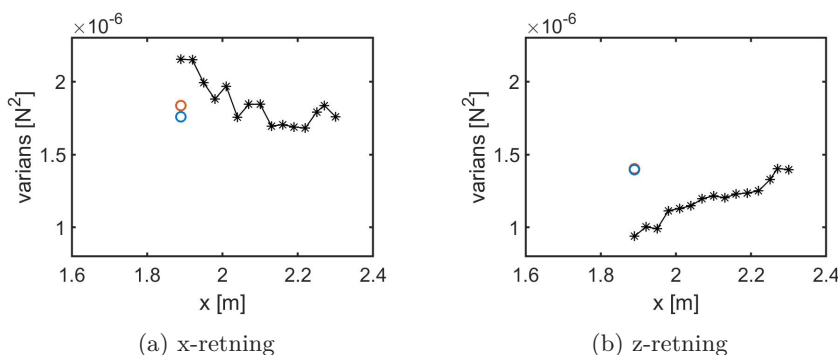


Figur 4.6: Relasjon mellom kurtose og skjevhet for kraftmålinger. Viser målinger gjort med grunne med bølger generert fra PM-spektrum ($*$), uten grunne med PM-spektrum (\circ), og uten grunne med JONSWAP-spektrum (\oplus). Viser også Mori og Kobayashi (—) og Ma et al. (---) [19] sine teoretiske sammenhenger for overflatehevning.

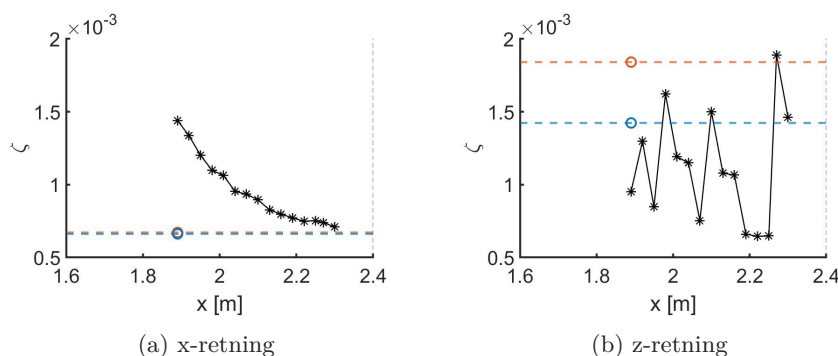
4.3. Sammenligning av kraft- og overflatemålinger

kjøringene med bølger generert fra PM-spektrumet og JONSWAP-spektrumet uten grunne i z-retning er noe større enn for x-retning, og at bølger generert fra PM-spektrumet uten grunne gir lavere verdi enn JONSWAP-spektrumet i z-retning. Den dimensjonsløse karakteristiske amplituden er her beregnet etter [Likning \(2.51\)](#).

Dimensjonsløst dyp øker jevnt for kraftmålingene i x-retning, mens z-retning øker litt mer variert for målingene med grunne, slik vi ser i [Figur 4.9](#). Resultatene fra uten grunne har større forskjell enn i z-retning. Vi ser at $k_p h < 1,363$ fram til og med omtrent $x = 2,010$ m for kraft i x-retning og $x = 1,950$ m for kraft i z-retning.



Figur 4.7: Variansen til kraftmålingene. Viser målinger gjort med grunne med bølger generert fra PM-spektrumet (*), uten grunne med PM-spektrumet (o) og uten grunne med JONSWAP-spektrumet (o).

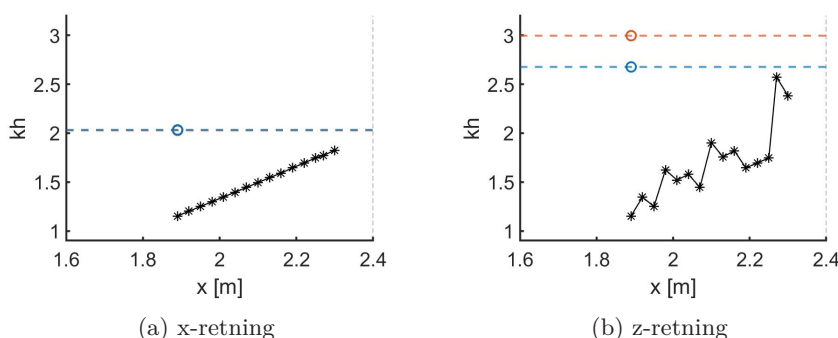


Figur 4.8: Den dimensjonsløse karakteristiske amplituden til kraftmålingene, ζ , beregnet ved [Likning \(2.51\)](#). Viser målinger gjort med grunne med bølger generert fra PM-spektrumet (*), uten grunne med PM-spektrumet (-o-) og uten grunne med JONSWAP-spektrumet (-o-).

4.3 Sammenligning av kraft- og overflatemålinger

I denne seksjonen sammenligner vi resultatene fra overflatemålingene med resultatene fra kraftmålingene ved figurer der resultatene fra kraftmålinger og overflatemålinger er plottet i samme figur.

4.3. Sammenligning av kraft- og overflatemålinger



Figur 4.9: Dimensjonsløst dyp, utregnet ved $k_p h$, for kraftmålingene. Viser målinger gjort med grunne med bølger generert fra PM-spektrumet (*), uten grunne med PM-spektrumet (-○-) og uten grunne med JONSWAP-spektrumet (-○-).

Fra Figur 4.10a ser vi at skjevheten til kraftmålingene i x-retning synker ganske tilsvarende overflatemålingene i samme område, men holder seg på litt høyere verdier og viser ikke noe tydelig bunnpunkt på samme måte som overflatemålingene. Kraftmålingene i z-retning endrer seg derimot i motsatt retning av overflatemålingene, og får en liten topp litt før overflatemålingene får sitt bunnpunkt. Figur 4.10b viser at skjevhet ved bølger generert fra PM-spektrumet skiller seg mer fra skjevhet lik 0 enn ved bølger generert fra JONSWAP-spektrumet, både for overflatemålinger og kraftmålinger i begge retninger.

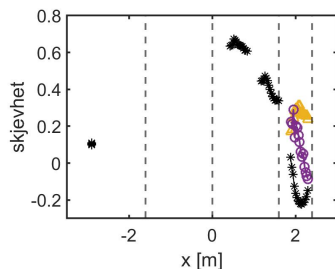
Kurtosen til kraftmålingene holder seg rundt samme verdier som overflatemålingene gir ved de samme posisjonene, det vil si under kurtose 3. De varierer riktignok mer enn overflatemålingene, noe vi ser i Figur 4.11a. Kraftmålingene i z-retning varierer til litt høyere verdier for kurtose enn overflatemålingene, mens kraftmålingene i x-retning varierer fra en del lavere til noe høyere enn overflatemålingene. Gjennom Figur 4.11b finner vi at bølger generert fra PM-spektrumet gir høyere kurtose enn JONSWAP-spektrumet, når vi sammenligner kjøringene gjort uten grunne, både for overflatemålinger og kraftmålinger. Overflatemålingene har høyest verdi, deretter kommer z-retning av kraftmålingene, og til slutt kommer x-retning av kraftmålingene med lavest verdi for kurtose.

Fra Figur 4.12 ser vi at kraftmålingene har lavere og jevnere varians enn overflatemålingene, både for med og uten grunne.

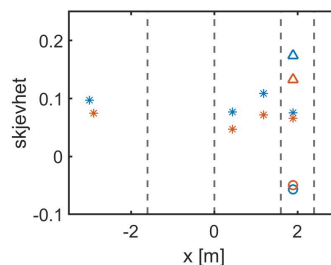
Figur 4.13 viser større steilhet for den dimensjonsløse karakteristiske amplituden til overflatemålingene enn verdien til den dimensjonsløse karakteristiske amplituden til kraftmålingene viser, både med og uten grunne.

Dimensjonsløst dyp stiger ganske likt for kraft- og overflatemålinger, selv om kraftmålingene i z-retning med grunne vist i Figur 4.14a varierer noe mer, og kraftmålingene ved bølger generert fra JONSWAP-spektrumet over flat bunn er høyere enn for overflatemålinger og kraftmålinger ved bølger generert fra PM-spektrumet.

4.3. Sammenligning av kraft- og overflatemålinger

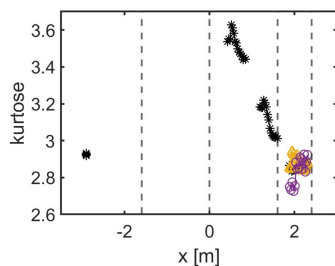


(a) Med grunne og bølger generert fra PM-spektrum. Viser resultat fra overflatehevning (*), kraft i x-retning (○) og kraft i z-retning (△).

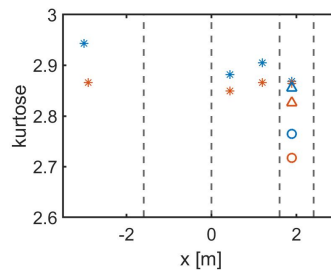


(b) Uten grunne. Viser resultat fra overflatehevning med bølger generert fra PM-spektrum (*), overflatehevning med JONSWAP-spektrum (*), kraft i x-retning med PM-spektrum (○), kraft i z-retning med PM-spektrum (△), kraft i x-retning med JONSWAP-spektrum (○) og kraft i z-retning med JONSWAP-spektrum (△).

Figur 4.10: Skjevhet for kraftmålingene og overflatemålinger.



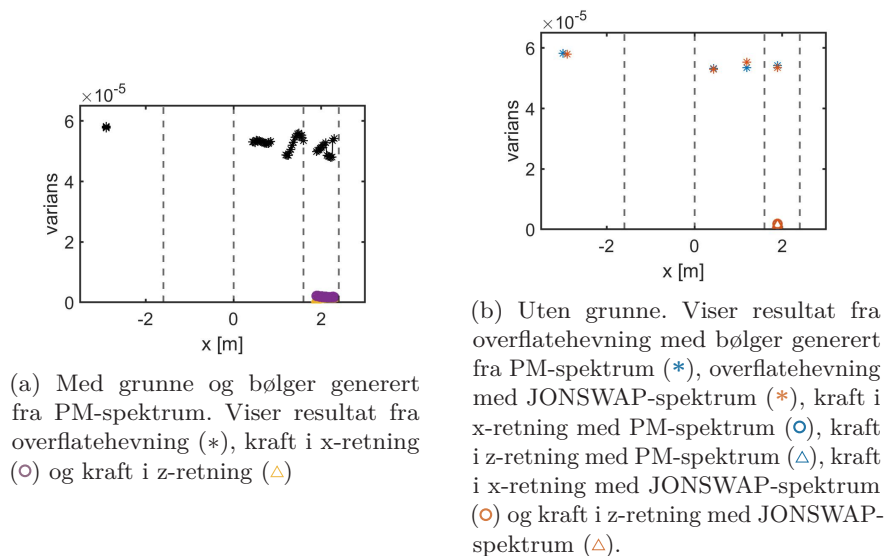
(a) Med grunne og bølger generert fra PM-spektrum. Viser resultat fra overflatehevning (*), kraft i x-retning (○) og kraft i z-retning (△).



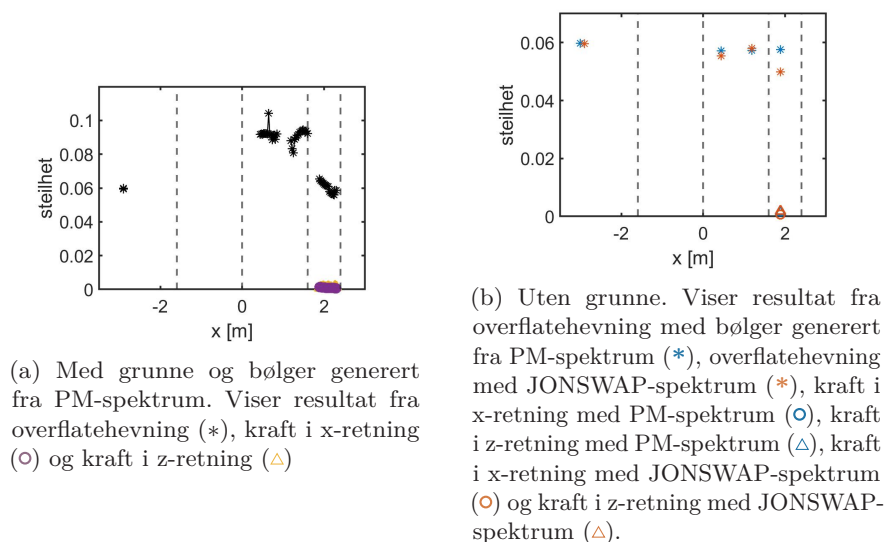
(b) Uten grunne. Viser resultat fra overflatehevning med bølger generert fra PM-spektrum (*), overflatehevning med JONSWAP-spektrum (*), kraft i x-retning med PM-spektrum (○), kraft i z-retning med PM-spektrum (△), kraft i x-retning med JONSWAP-spektrum (○) og kraft i z-retning med JONSWAP-spektrum (△).

Figur 4.11: Kurtose for kraftmålingene og overflatemålinger.

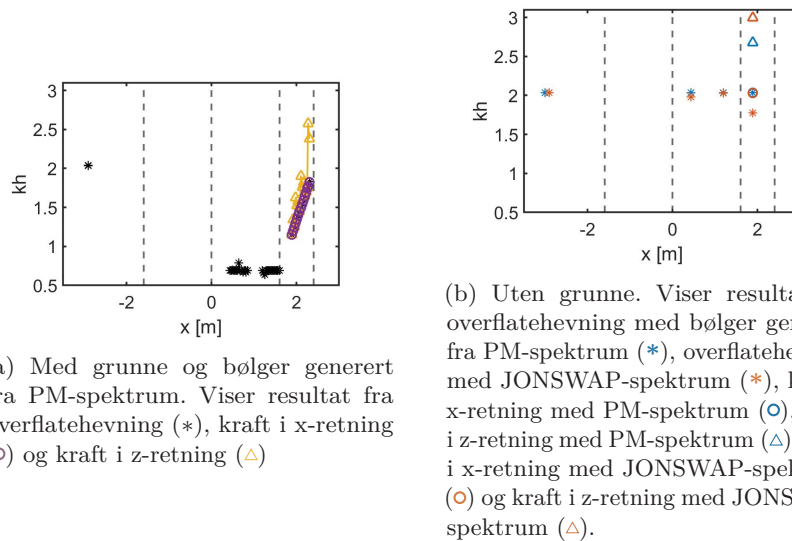
4.3. Sammenligning av kraft- og overflatemålinger



Figur 4.12: Varians for kraftmålingene og overflatemålinger.



Figur 4.13: Verdier for den dimensjonsløse karakteristiske amplituden for kraftmålingene og overflatemålinger.

Figur 4.14: $k_p h$ for kraftmålingene og overflatemålinger.

4.4 Sannsynlighetsfordeling

Denne seksjonen vil presentere resultater fra beregning av sannsynlighetsfordeling for kraftmålinger gjort med og uten grunne.

Figur 4.15 og Figur 4.16 viser en tydelig forskjell mellom sannsynlighetsfordelingene for målingene gjort i x-retning uten grunne og med grunne, og med ulike genererte spektrum fra padla. Bølgene generert av JONSWAP-spektromet gir fordeling med lavere sannsynlighet for de laveste og høyeste kreftene, enn bølgene generert av PM-spektromet gir, men med større sannsynlighet for kreftene nærmere 0 N. I tillegg ser vi at den øvre halen til fordelingen for målingene gjort med grunne er større enn for målingene gjort uten grunne med bølger generert av PM-spektromet, for posisjonene nærmest platået. Dess lenger ned i nedoverbakken vi måler, dess nærmere fordelingen for målingene gjort med bølger generert fra PM-spektromet uten grunne går den øvre halen til fordelingen til målingene gjort med grunne. Dette kan tyde på at i starten av nedoverbakken er det større sannsynlighet for ekstreme krefter i x-retning når bølgene forplanter seg over en grunne sammenlignet med når bølgene forplanter seg over flat bunn.

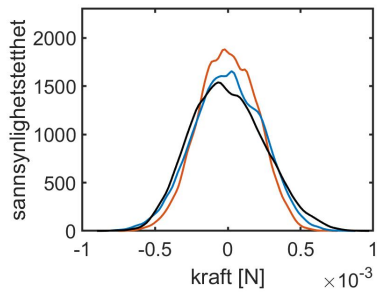
Videre kan vi se i Figur 4.17 og Figur 4.18 at det er sannsynlighet for større krefter for målinger med grunne enn for uten grunne, i positiv x-retning. Igjen gjelder dette for målingene nærmest platået. Generelt ser vi at bølgene generert fra PM-spektromet gir bredere sannsynlighetsfordeling enn bølgene generert fra JONSWAP-spektromet.

For z-retning er sannsynligheten for kraft nær 0 N større enn for x-retning for kraftmålingene med grunne og for uten grunne med bølger generert fra JONSWAP-spektrum, ut ifra det vi ser i Figur 4.19 og Figur 4.20. Det ser ut til at målingene i z-retning med grunne generelt har fordeling likere fordelingen til kreftene induisert av bølger generert fra JONSWAP-spektrum uten grunne, enn fra PM-spektrum uten grunne. Det vil si at både de nedre og de øvre

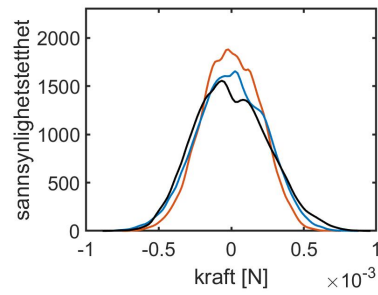
halene til fordelingen til målingene med grunne er lavere enn for målingene uten grunne med bølger generert fra PM-spektrumet. Halene til fordelingen til målingene med grunne blir likevel noe større etterhvert som vi beveger oss ned nedoverbakken, men de forholder seg lavere enn for målingene uten grunne med bølger generert fra PM-spektrumet. Samtidig endrer sannsynligheten for kraft nær 0 N seg mer avhengig av posisjon. For posisjonene nærmest platået er denne sannsynligheten større enn for kraftmålingene gjort med bølger generert fra JONSWAP-spektrumet, før sannsynligheten synker og blir nesten like lav som for PM-spektrumet. Ut fra disse figurene kan vi altså se at det er lavere sannsynlighet for ekstreme krefter i z-retning for målingene med grunne enn uten grunne induisert av bølger generert fra PM-spektrumet.

Når vi ser på [Figur 4.21](#) og [Figur 4.22](#) finner vi at kraftmålingene med grunne gir sannsynlighet for lavere krefter i z-retning enn for målingene uten grunne med bølger generert fra PM-spektrumet, bortsett fra midt på nedoverbakken, der det er sannsynlighet for like store positive krefter for disse to fordelingene. I tillegg ser vi at bølger generert fra PM-spektrumet ga sannsynlighet for både større positive og negative krefter enn bølger generert fra JONSWAP-spektrumet gjorde.

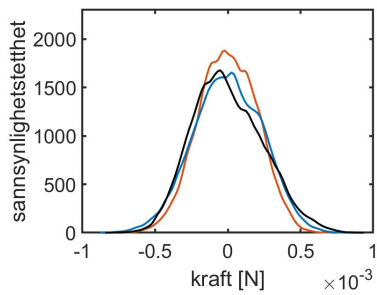
4.4. Sannsynlighetsfordeling



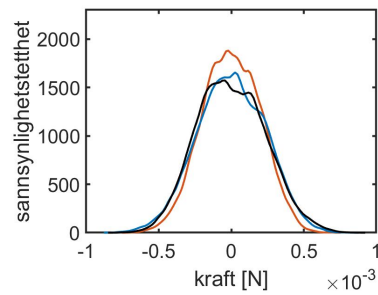
(a) Posisjon $x = 1,890$ m.



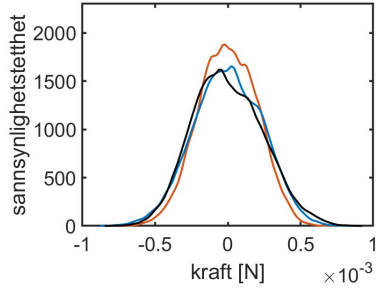
(b) Posisjon $x = 1,920$ m.



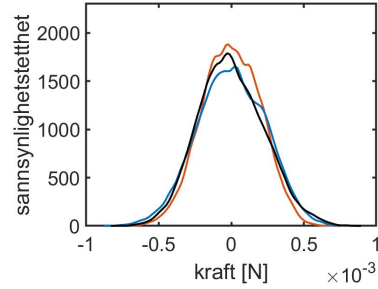
(c) Posisjon $x = 1,950$ m.



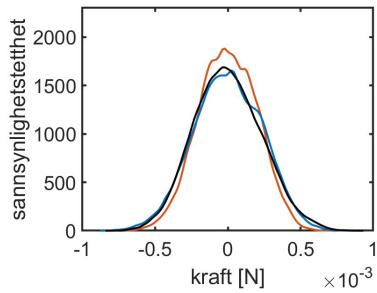
(d) Posisjon $x = 1,980$ m.



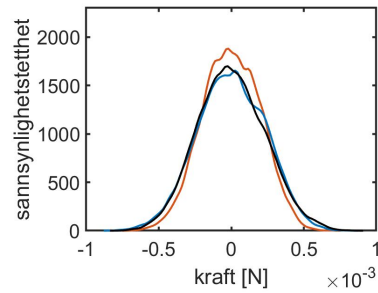
(e) Posisjon $x = 2,010$ m.



(f) Posisjon $x = 2,040$ m.



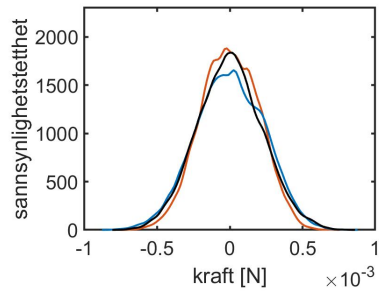
(g) Posisjon $x = 2,070$ m.



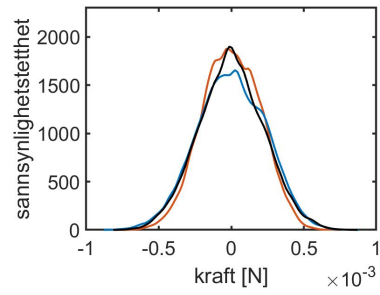
(h) Posisjon $x = 2,100$ m.

Figur 4.15: Sannsynlighetsfordeling for målinger med grunne ved ulike posisjoner (—), satt opp mot sannsynlighetsfordeling for målinger uten grunne med generert PM-spektrum (—) og med generert JONSWAP-spektrum (—). Målinger gjort i x-retning.

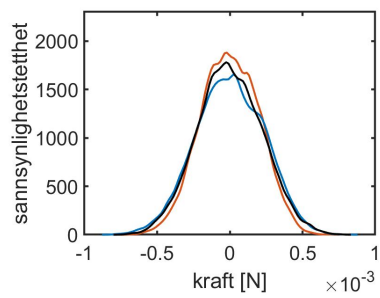
4.4. Sannsynlighetsfordeling



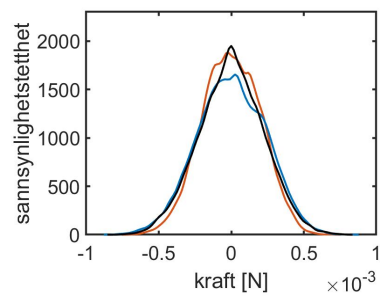
(a) Posisjon $x = 2,130$ m.



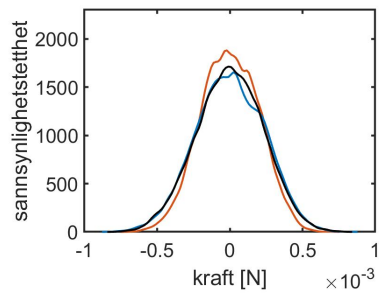
(b) Posisjon $x = 2,160$ m.



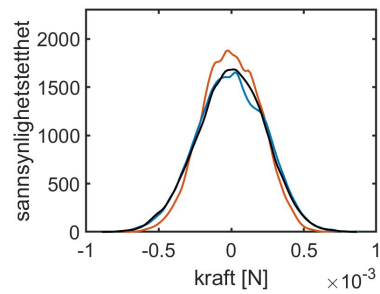
(c) Posisjon $x = 2,190$ m.



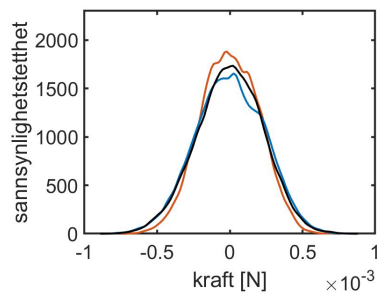
(d) Posisjon $x = 2,220$ m.



(e) Posisjon $x = 2,250$ m.



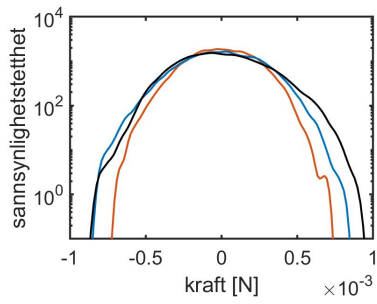
(f) Posisjon $x = 2,270$ m.



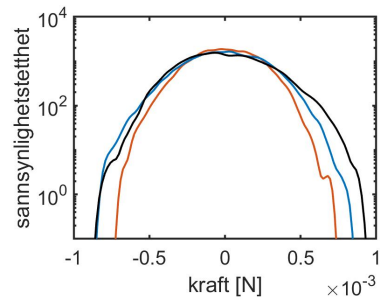
(g) Posisjon $x = 2,300$ m.

Figur 4.16: Samme som Figur 4.15.

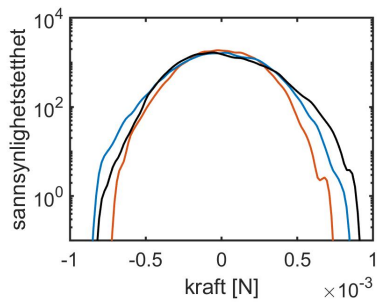
4.4. Sannsynlighetsfordeling



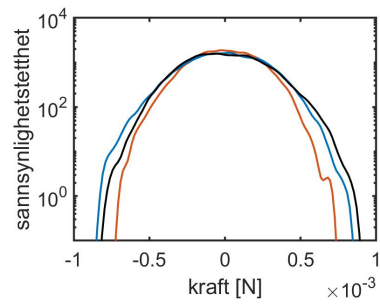
(a) Posisjon $x = 1,890$ m.



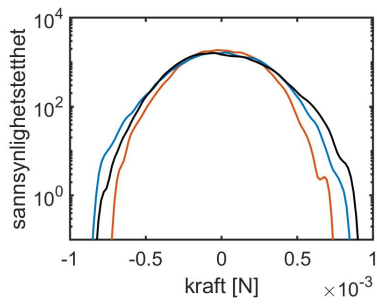
(b) Posisjon $x = 1,920$ m.



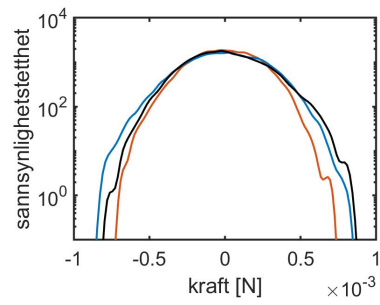
(c) Posisjon $x = 1,950$ m.



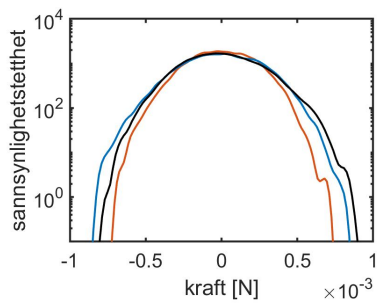
(d) Posisjon $x = 1,980$ m.



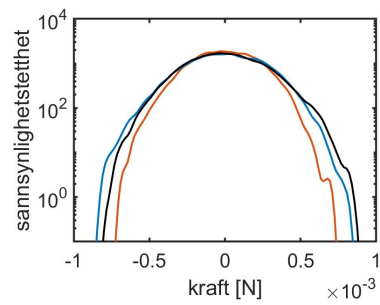
(e) Posisjon $x = 2,010$ m.



(f) Posisjon $x = 2,040$ m.



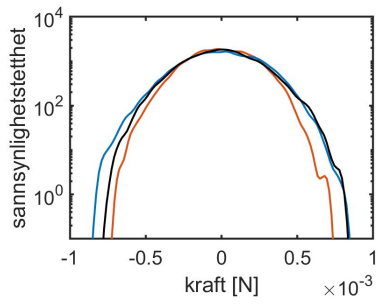
(g) Posisjon $x = 2,070$ m.



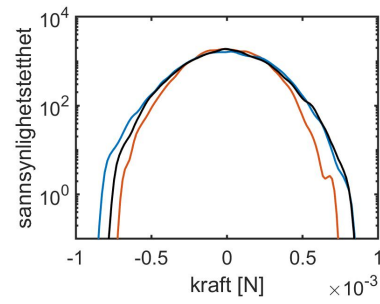
(h) Posisjon $x = 2,100$ m.

Figur 4.17: Tilsvarende grafer som i Figur 4.15, men her vist ved logaritmisk andreakse. Målinger gjort i x-retning.

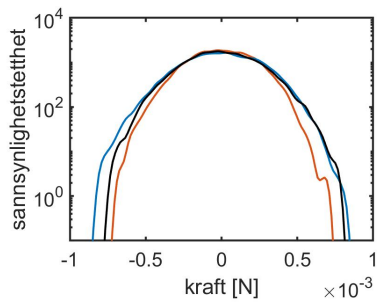
4.4. Sannsynlighetsfordeling



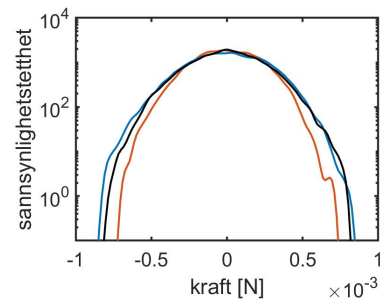
(a) Posisjon $x = 2,130$ m.



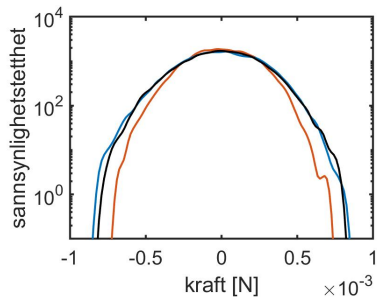
(b) Posisjon $x = 2,160$ m.



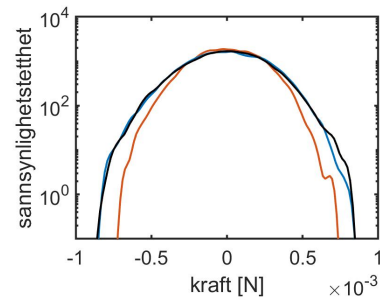
(c) Posisjon $x = 2,190$ m.



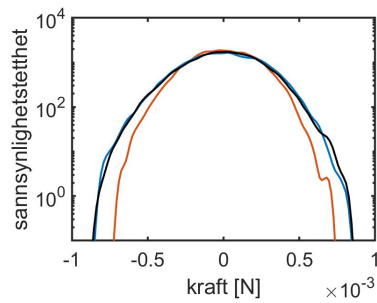
(d) Posisjon $x = 2,220$ m.



(e) Posisjon $x = 2,250$ m.



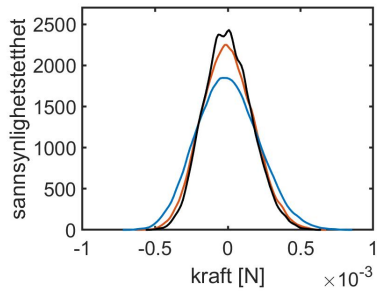
(f) Posisjon $x = 2,270$ m.



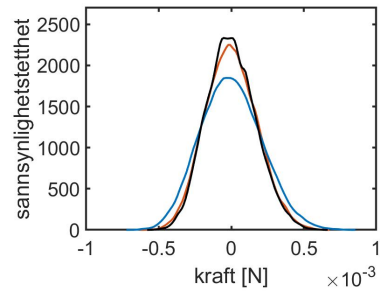
(g) Posisjon $x = 2,300$ m.

Figur 4.18: Samme som Figur 4.17.

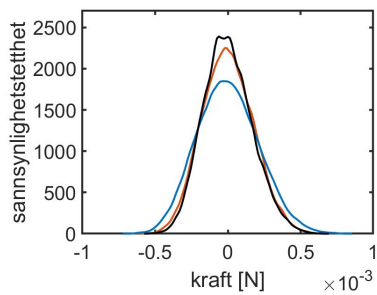
4.4. Sannsynlighetsfordeling



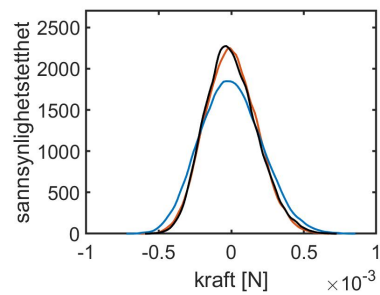
(a) Posisjon $x = 1,890$ m.



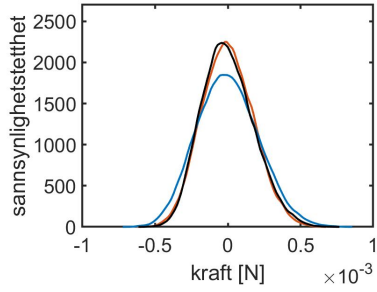
(b) Posisjon $x = 1,920$ m.



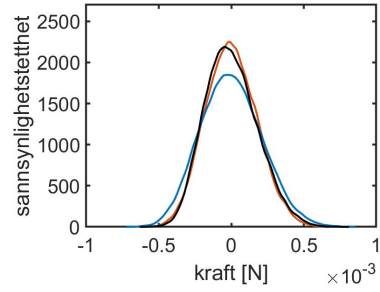
(c) Posisjon $x = 1,950$ m.



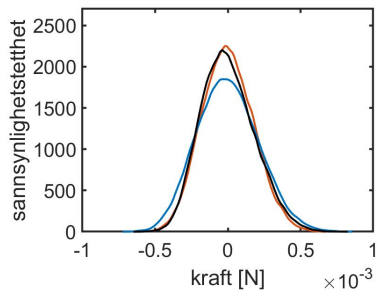
(d) Posisjon $x = 1,980$ m.



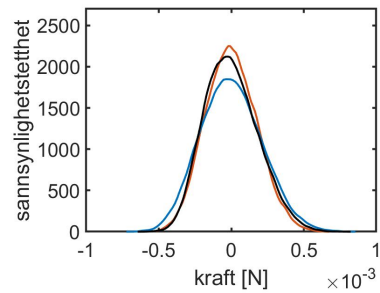
(e) Posisjon $x = 2,010$ m.



(f) Posisjon $x = 2,040$ m.



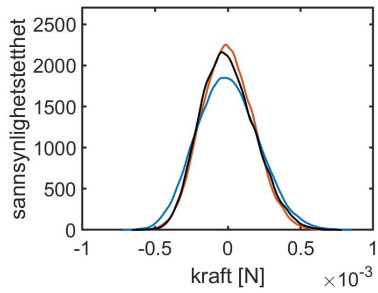
(g) Posisjon $x = 2,070$ m.



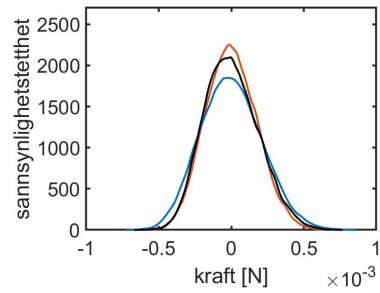
(h) Posisjon $x = 2,100$ m.

Figur 4.19: Samme type grafer som i Figur 4.15, men for målinger gjort i z-retning.

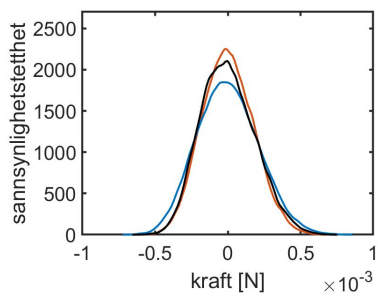
4.4. Sannsynlighetsfordeling



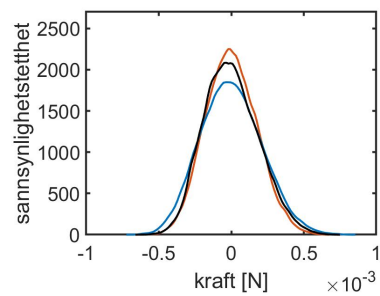
(a) Posisjon $x = 2,130$ m.



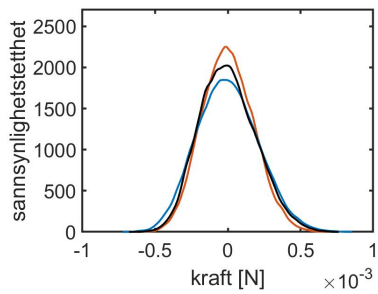
(b) Posisjon $x = 2,160$ m.



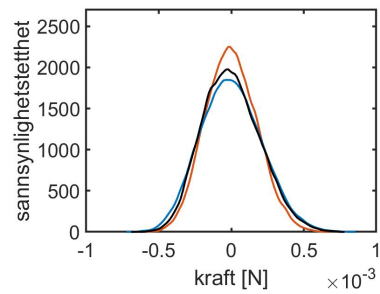
(c) Posisjon $x = 2,190$ m.



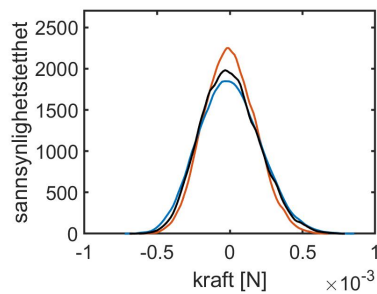
(d) Posisjon $x = 2,220$ m.



(e) Posisjon $x = 2,250$ m.



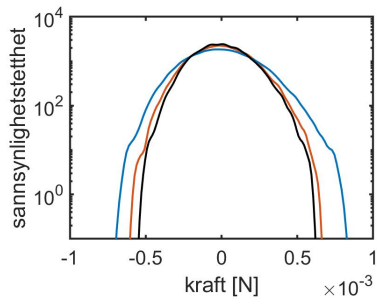
(f) Posisjon $x = 2,270$ m.



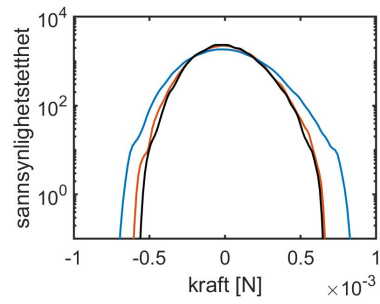
(g) Posisjon $x = 2,300$ m.

Figur 4.20: Samme som Figur 4.19.

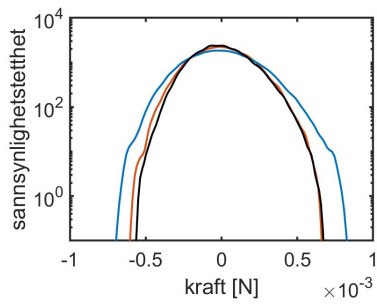
4.4. Sannsynlighetsfordeling



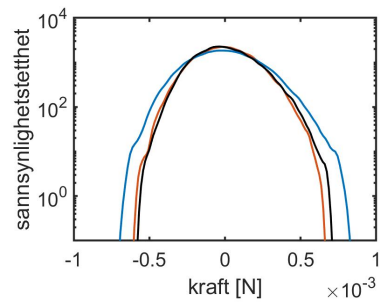
(a) Posisjon $x = 1,890$ m.



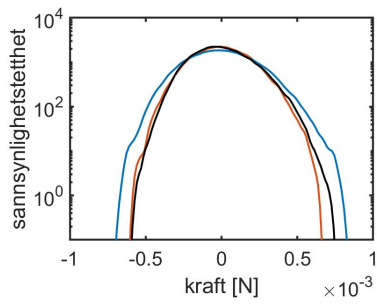
(b) Posisjon $x = 1,920$ m.



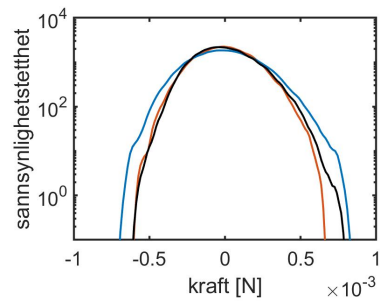
(c) Posisjon $x = 1,950$ m.



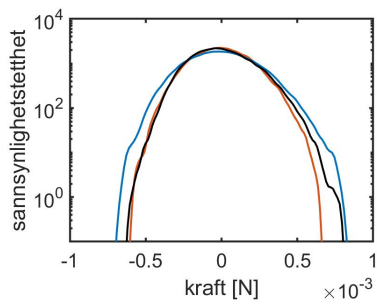
(d) Posisjon $x = 1,980$ m.



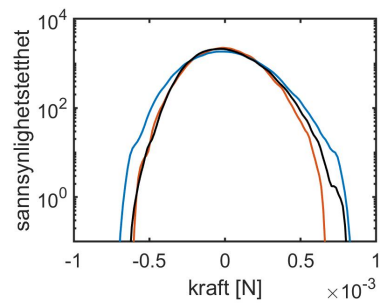
(e) Posisjon $x = 2,010$ m.



(f) Posisjon $x = 2,040$ m.



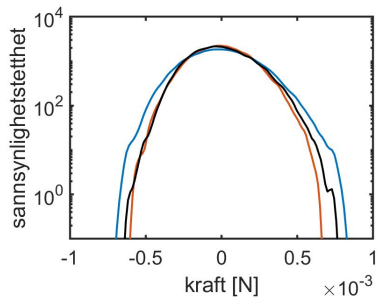
(g) Posisjon $x = 2,070$ m.



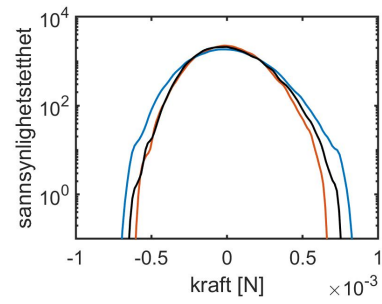
(h) Posisjon $x = 2,100$ m.

Figur 4.21: Tilsvarende grafer som i Figur 4.15, men her vist ved logaritmisk andreakse. Målinger gjort i z-retning.

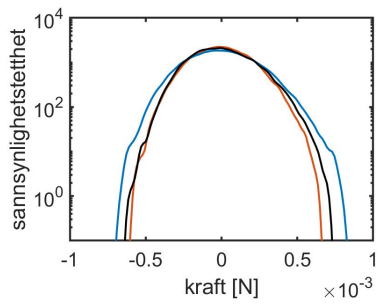
4.4. Sannsynlighetsfordeling



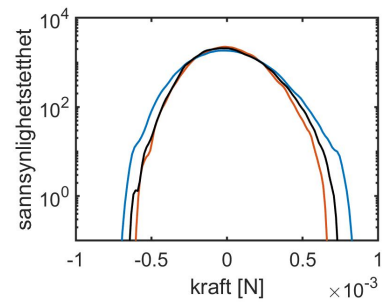
(a) Posisjon $x = 2,130$ m.



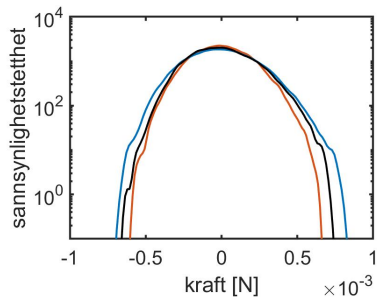
(b) Posisjon $x = 2,160$ m.



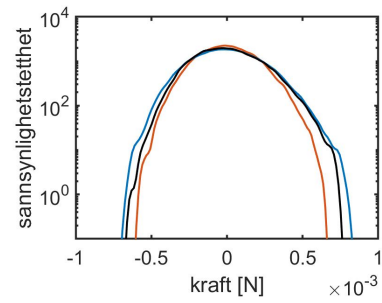
(c) Posisjon $x = 2,190$ m.



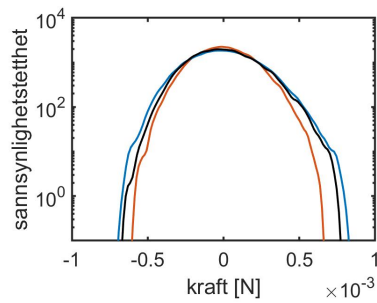
(d) Posisjon $x = 2,220$ m.



(e) Posisjon $x = 2,250$ m.



(f) Posisjon $x = 2,270$ m.



(g) Posisjon $x = 2,300$ m.

Figur 4.22: Samme som Figur 4.21.

KAPITTEL 5

Diskusjon

Gjennom denne masteroppgaven ønsket vi å undersøke forekomsten av freake krefter på en sylinder plassert rett etter en grunne, sammenlignet med freake overflatebølger over grunna og bølger som forplanter seg over flat bunn. I dette kapitlet vil resultatene fra eksperimentene bli diskutert og sammenlignet med resultater fra tidligere artikler, med fokus på skjevhet, kurtose og sannsynlighetsfordeling.

5.1 Målinger uten grunne

Skjevhet

Når vi ser på overflatemålingene uten grunne i [Figur 4.1a](#), ser vi at skjevheten holder seg jevnt på rundt 0,10 for bølger generert fra PM-spektrumet, og noe lavere for JONSWAP-spektrumet. Lawrence et al. [\[18\]](#) og Trulsen et al. [\[32\]](#) viser også at overflatehevningen har noe positiv skjevhet før den forplanter seg over grunna. At skjevheten i tillegg endrer seg lite utover i tanken kan vi også se i Kashima et al. [\[17\]](#) sine resultater. Kashima et al. [\[17\]](#) og Gramstad et al. [\[10\]](#) viser at høyere steilhet gir høyere verdi for skjevhet for overflatehevning over flat bunn, noe vi også ser i våre resultater i sammenligningen av målinger gjort med bølger generert fra ulike spektrum som har ulike steilheter.

Kraftmålingene uten grunne i x-retning ga en noe negativ skjevhet, som vist i [Figur 4.4a](#). For kraftmålingene i z-retning, som vises i [Figur 4.4b](#), er det større forskjell mellom resultater fra bølger generert fra JONSWAP- og PM-spektrumene, og for begge type bølger er skjevheten positiv. Dette gjør resultatene forskjellige fra x-retning, siden skjevheten i x-retning var negativ for begge typer bølger. Skjevheten til kraft i x-retning uten grunne er også lavere enn for overflatehevning i våre eksperimenter.

Kurtose

Kurtose fra overflatemålingene uten grunne holder seg jevnt rundt 2,9. I følge Kashima et al. [\[17\]](#) burde kurtosen til overflatehevningen øke gradvis, men ikke så raskt som hvis $k_p h$ hadde vært større enn 1,363. Janssen og Herbers [\[15\]](#) og Zeng og Trulsen [\[39\]](#) viser en kurtose for overflatehevning som øker til et maksimum før den synker og stabiliserer seg, i løpet av rundt 100 bølgelengder. Vårt origo ligger omtrent 6,3 bølgelengder fra padla. Det vil si at hvis våre resultater skulle ha fulgt tendensene fra simuleringene i disse artiklene, burde

vår kurtose ha steget, i stedet for å holde seg jevn. Verdien på kurtosen for overflatemålingene ser ut til å stemme omtrentlig overens med resultatene til Gramstad et al. [10] for målingene de gjorde der det var med størst dybde, men den er noe lavere enn Trulsen et al [32] fant på størst dybde. Kurtosen til overflatehevingen ved bølger generert fra de ulike spektrumene gir høyere verdi for høyere bølgeamplitude.

Figur 4.5a viser at kraften er platy-kurtisk når bølgene forplanter seg over flat bunn. Vi ser også at kurtosen til kreftene induisert av bølgene generert med PM-spektrumet er noe høyere enn de med JONSWAP-spektrumet.

Sannsynlighetsfordeling

Når vi ser på sannsynlighetsfordelingene fra målingene gjort uten grunne i Figur 4.15 til 4.22, ser vi at krefter induisert av bølger generert fra PM-spektrumet gir større sannsynlighet for ekstreme krefter i både x- og z-retning, og også sannsynlighet for større ekstreme krefter i begge retninger, sammenlignet med krefter induisert av bølger generert fra JONSWAP-spektrumet. Dette gjenspeiler seg i at kurtosen er høyere for kraftmålingene induisert av bølger generert fra PM-spektrumet, i tillegg til at skjevheten er større i z-retning for krefter induisert av bølger generert fra PM-spektrumet enn fra JONSWAP-spektrumet.

5.2 Målinger med grunne

Vi vil nå diskutere målingene gjort med grunne med bølger generert fra PM-spektrumet som beskrevet i Avsnitt 3.3, og sammenligne med målingene gjort med samme kjørefil uten grunne.

Skjevhet

- Skjevhet for overflatemålinger

Flere studier har vist at skjevheten for overflatemålinger med grunne gir et maksimum ved starten av et plataå, og minimum i nedoverbakken etter plataået [10, 18, 19, 31, 32, 35]. Vi ser den samme tendensen i våre resultater i Figur 4.1a. Vi har ingen overflatemålinger i oppoverbakken, men vi ser at målingen ved $x = -2,900$ m er signifikant lavere enn målingene over plataået. Den høyeste skjevheten vi har målt er på 0,670, og den laveste på $-0,220$, noe som er ganske nærme det Lawrence et al. [18] viste i sine simuleringer av overflateheving med $T_p = 1,1$ s, $H_s = 0,025$ m, og dybde på dypt vann 0,53 m og dybde over grunne 0,11 m. Trulsen et al. [32] viser også lignende verdier. Sergeeva et al. [26] og Viotti og Dias [35] viste at skjevheten konvergerer i løpet av lengden til plataået, noe vi ikke kan se i våre målinger. Disse gjorde riktignok simulerte målinger med mye større lengde på tanken og plataået.

Siden skjevheten til overflatehevingen fra målingene uten grunne med bølger generert fra PM-spektrumet i Figur 4.1a holder seg jevnt på rundt 0,10, kan vi anta at endringene i skjevhet for målingene med grunne er på grunn av endringen i dybde, siden dette er det eneste som endrer seg mellom målingene gjort uten grunne og med grunne med samme opprinnelige spektrum.

- Skjevhet for kraftmålinger

Fra resultatene i [Figur 4.4](#) ser vi en tydelig endring i skjevhet for kraftmålinger gjort med grunne, avhengig av hvor i nedoverbakken man befinner seg. En slik sammenheng er det også funnet ved tidligere forskning på hastighet i x-retning [[18](#), [32](#)]. Fra Lawrence et al. [[18](#)] sine simuleringer med bølger generert fra et JONSWAP-spektrum med $T_p = 1,1$ s, kan man se at minimumet til hastigheten i x-retning er rundt $x = 2,300$ m. Vi ønsket å sjekke om minimumet til kraften i x-retning også var i nærheten av dette, så vi startet derfor målingene der. I våre resultater i x-retning er det ikke klart akkurat hvor minimumet er, fordi målingene stopper før vi ser en oppadgående tendens. Det trengs altså å gjøre flere målinger før vi kan si noe mer sikkert om hvor minimumet til skjevhet for kraft egentlig er.

Som referanseverdi har vi skjevhet av kraftmålingen uten grunne med samme kjørefil som for målingene med grunne, med bølger generert fra PM-spektrumet. Denne målingen i x-retning ga en noe negativ skjevhet, og vi ser at minimumet i våre målinger med grunne ikke er så mye lavere enn denne skjevheten for målinger uten grunne (se [Figur 4.4a](#)). På den andre siden er maksimumet vi har målt en del større enn målingen uten grunne, noe som kan tyde på at det skjer en tydelig endring i skjevhet i nedoverbakken, men mer i form av positiv enn negativ skjevhet.

I z-retning ser vi også en tydelig endring i skjevhet i [Figur 4.4b](#), selvom denne endringen ikke er like stor som i x-retning. Skjevheten endrer seg også på en helt annen måte enn i x-retning, noe som er verdt å legge merke til ved videre arbeid med last på konstruksjoner. Plasseringen som gir lavest skjevhet i x-retning gir ikke nødvendigvis dette i z-retning. Målingen med grunne ved $x = 1,890$ m gir lik skjevhet som målingen uten grunne med samme genererte spektrum, mens for kraftmålingene i x-retning skjer tilsvarende ved omtrent $x = 2,250$ m.

Både Lawrence et al. [[18](#)] og Trulsen et al [[32](#)] har observert at skjevheten til hastighetsfeltet ser ut til å ha maksimum og minimum samme steder som skjevheten til overflatehevningen. Fra [Figur 4.10](#) ser vi at dette ikke gjelder for kraftmålinger. Der våre overflatemålinger har minimum, har ikke kraftmålingene minimum, og i z-retning kan det se ut til at kraftmålingene har et lokalt maksimum rett før der overflatemålingene har et minimum. Om kraft i x-retning har et minimum ved $x = 2,300$ m, eller om det kommer senere, kan vi ikke vite uten å gjøre flere målinger lenger fra plataet. Derfor er det vanskelig å trekke noen konklusjon om hvor minimumet for kraft i x-retning er i forhold til for overflatemåling, men vi ser uansett en tydelig tendens til at skjevheten for kraft i x-retning synker i nedoverbakken omtrent like fort som for overflatemålingene. I tillegg kan det altså se ut til at skjevheten for kraft i x-retning synker i samme område som skjevheten for hastighet gjør, ut ifra Lawrence et al. [[18](#)] sine simuleringer og Trulsen et al [[32](#)] sine målinger av hastighet. Dette må vi riktignok ta med en klype salt, da deres målinger ble gjort med lengre nedoverbakke enn vi hadde.

Kurtose

- Kurtose for overflatemålinger

Når det gjelder kurtose for målingene gjort med grunne, viser [Figur 4.1b](#) at våre overflatemålinger har et maksimum litt etter starten av plataået. Dette samsvarer omtrentlig med resultatene i flere tidligere arbeid [[10](#), [18](#), [19](#), [31](#), [32](#), [35](#)], selv om det varierer akkurat hvor i overgangen fra oppoverbakke til plataå at maksimumet er i disse resultatene. Lawrence et al. [[18](#)] har vist at hvor langt inn på plataået maksimum kurtose for overflatehevning kommer, varierer med peak-periode. Vårt maksimum slik det ser ut ved våre målepunkter samsvarer omtrentlig med Lawrence et al. [[18](#)] sitt maksimum for $T_p = 1,1$ s. Samtidig har ikke vi målinger for akkurat overgangen mellom oppoverbakke og plataå, så vi kan ikke si akkurat hvor maksimumet for kurtose for overflatehevning er. Nedgangen i kurtose i våre målinger ved $x = 0,435$ m til $x = 0,495$ m, som ble gjort med samme probe, vises tilsvarende ved samme målinger for en annen probe i posisjon $x = 1,190$ m til $x = 1,250$ m, som har blitt målt ved de samme kjøringene (se [Tabell 3.1](#)). Samme type nedgang viser seg også igjen i skjevheten for de samme posisjonene. Samtidig vises ikke denne tendensen i tidligere tilsvarende målinger slik som de Trulsen et al. [[32](#)] gjorde. Dette kan tyde på at det kan være en systematisk feil som gir en endring i resultatene, og at denne endringen ikke nødvendigvis er på grunn av grunna. Dermed kan vi ikke med sikkerhet bruke denne nedgangen til å forklare at maksimum for kurtose er akkurat der det vises i våre resultater. Verdien for vårt maksimum av kurtose for overflatehevning er på 3,63. Dette er litt lavere enn i Lawrence et al. [[18](#)] sine resultater for $T_p = 1,1$ s og like lang oppoverbakke som plataå, og det er en god del lavere enn Trulsen et al. [[32](#)] fant ved tilsvarende dimensjonsløst dyp. Vi har valgt en høyere bølgeamplitude enn disse, noe som burde dette ha gitt høyere kurtose, og ikke lavere, i følge Seergeva et al. [[26](#)] og Kashima et al. [[17](#)].

- Kurtose for kraftmålinger

Vi ser en tydelig endring i kurtose for kraft i [Figur 4.5](#). Ved første øyekast kan det se ut til at kurtose for kraft i x-retning øker i samme områder som for hastighetsmålinger, når vi sammenligner våre kraft-resultater med resultatene fra Lawrence et al. [[18](#)] sine hastighetssimuleringer og Trulsen et al. [[32](#)] sine hastighetsmålinger. De rapporterer et maksimum i kurtose omtrent midt på deres nedoverbakke, det vil si ved omtrent $x = 2,300$ m. Våre kraftmålinger gir ikke et klart maksimum, men ut ifra de målingene vi har gjort, kan det se ut til at kurtosen til kraft i x-retning også har en økning fra mot rundt $x = 2,300$ m. Samtidig vet vi ikke effekten av at vår nedoverbakke var kortere enn den hastighetssimuleringene- og målingene ble gjort over, i tillegg til at vi ikke vet hvordan kurtose for kraft endrer seg enda lengre fra plataået.

I forhold til kraftmålingen med samme kjørefil gjort uten grunne, ser vi at kurtosen blir signifikant endret når en grunne blir plassert rett før sylindren. Altså, selv om det lokale maksimumet vi får med grunne er lavt, så er det signifikant høyere enn kurtosen vi får uten grunne.

For kraftmålingene i z-retning, som vi ser i [Figur 4.5b](#), kommer kurtosemaksimumet litt før maksimumet for x-retning. Man kan undre seg om dette også er før maksimumet for hastighet som ble funnet i Lawrence et al. [[18](#)] sine simuleringer og Trulsen et al. [[32](#)] sine eksperimenter. For å sjekke dette bør vi i

så fall gjøre målinger der vi genererer bølger fra akkurat samme spektrum som de gjorde, og med samme type nedoverbakke. Som for skjevhet, viser det seg at kurtosen til kraft i z-retning endrer seg på en annen måte enn kraft i x-retning. Samtidig holder kurtosen fra kraftmålingene i x- og z-retning seg rundt samme verdiene. I forhold til resultatene for kraft i x-retning, viser kraft i z-retning seg å ha mindre differanse mellom maksimum kurtose med grunne og kurtose uten grunne. Altså kan det ut ifra våre målinger se ut til at endringene i kurtose forårsaket av grunne foran sylinder ikke er like store i z-retning som i x-retning, selv om det er noe endring.

Lawrence et al. [18] og Trulsen et al. [32] antydte at maksimumet i kurtose for overflatehevning og for hastighet ikke er på samme sted for målinger over en grunne. Samme tendens kan det se ut til at vi har til en viss grad i våre resultater i Figur 4.11 når vi sammenligner hvordan kurtose endrer seg for overflatehevning og kraft. Kurtosen til overflatehevningen har et mye høyere maksimum enn for kraft, men vi fant et mulig lokalt maksimum for kraft der kurtosen for overflate ikke hadde maksimum. Ut ifra våre målinger kan vi ikke vite om kraft-kurtose har maksimum der overflate-kurtosen har maksimum, siden vi ikke har gjort målinger for kraft ved de posisjonene der overflate-kurtosen har maksimum. Ut ifra de resultatene vi derimot har, kan det se ut til at kurtosen til overflatehevning og til kraft endrer seg på ulike måter og avhengig av ulik type endring i bunngeometrien, men dette trengs å undersøkes nærmere.

Sammenligning av skjevhet og kurtose

- Sammenligning for overflatemålinger

Ma et al. [19] observerte at forholdstallet mellom kurtose og skjevhet for overflatehevning fulgte funksjonsuttrykket til Mori og Kobayashi for målinger gjort i oppover- og nedoverbakke, mens målinger på plataet ga forholdstall som fulgte funksjonsuttrykket de selv utviklet. Ut ifra våre resultater i Figur 4.2a ser det derimot ut til at forholdstallet mellom kurtose og skjevhet fulgte en funksjon med samme form men litt lavere enn Mori og Kobayashi sin, for alle posisjoner vi har gjort målinger for, også for målingene på plataet. Dette gjelder også målingene uten grunne og med bølger generert fra PM- og JONSWAP-spektrum.

Hvis vi sammenligner Figur 4.1a med Figur 4.1b, ser vi at maksimum kurtose for overflatehevning er på omtrent samme sted som maksimumet for skjevhet. Dette vises også fra Figur 4.2a, der vi ser at høyeste kurtose og skjevhet måles fra samme probe, det vil si i samme område. Vi ser altså samme tendensen i våre resultater som flere andre tidligere artikler har vist [10, 18, 19, 26, 31, 32, 35].

På den andre siden har vi at i området i nedoverbakken der vi får lavest kurtose for overflatehevning er det omtrent samme kurtose for nesten alle posisjonene målt med samme probe, og verdien er omtrent lik som ved $x = -2,900$ m, mens skjevheten har et mer tydelig minimum. Derav får vi spredningen i forholdstall mellom skjevhet og kurtose i Figur 4.2a for probe 4. At kurtosen nærmer seg nivået det lå på foran grunna, på omtrent samme sted som skjevheten har sitt minimum, har også flere tidligere artikler antydte [10, 18, 19, 26, 32].

- Sammenligning for kraftmålinger

For kraftmålinger kan vi se fra [Figur 4.6](#) at skjevheten endrer seg mer enn kurtosen, men variasjonen er større i x-retning enn i z-retning. Ut ifra resultatene til Lawrence et al. [18] og Trulsen et al. [32] kan det se ut til at de har tilsvarende resultater for endring i skjevhet i forhold til kurtose for hastighet i nedoverbakken.

[Figur 4.4](#) og [Figur 4.5](#) antyder at det målte maksimumet til skjevhet og kurtose for kraft har ulik posisjon for x-retning, mens i z-retning kan det se ut til at maksimumene har mer lik posisjon. Dette må riktignok undersøkes videre ved måling av et større område. Lawrence et al. [18] og Trulsen et al. [32] viser for hastighetssimuleringer og -målinger at maksimumet for skjevhet og for kurtose har ulik plassering for deres type grunne, og at skjevheten har et minimum der kurtosen har et maksimum.

Sannsynlighetsfordeling

[Figur 4.15](#) til [4.22](#) viser en større sannsynlighet for ekstreme krefter og en sannsynlighet for større ekstreme krefter i x-retning, når bølgene forplanter seg over en grunne sammenlignet med når bølgene forplanter seg over flat bunn. Dette gjelder særlig ved posisjonene i nedoverbakken nærmest plataået, og for kreftene i positiv x-retning.

Når vi sammenligner dette med resultatene for skjevheten til kraft i [Figur 4.4](#), ser vi at dette stemmer overens med hvordan skjevhet endrer seg for målingene gjort i x-retning med grunne, ved at skjevheten for målinger med grunne skiller seg mer fra skjevheten for målinger uten grunne nærmere starten av nedoverbakken. Kurtosen for målingene med grunne er derimot mer forskjellig fra kurtosen til målingene uten grunne dess lenger fra plataået vi måler. For skjevhet og kurtose er variasjonene mellom målingene med og uten grunne i z-retning mindre enn i x-retning, noe som også viser seg i forskjellen mellom sannsynlighetsfordelingene til målingene med og uten grunne.

Samtidig ser vi fra [Figur 4.8](#) at den dimensjonsløse karakteristiske amplituden til kraftmålingene har høyere verdi i starten av nedoverbakken på grunna enn ved flat bunn, for kraftmålingene i x-retning. Dette gir i seg selv en sannsynlighet for større krefter enn når det er flat bunn. Det betyr at det at sannsynlighetsfordelingen gir sannsynlighet for større krefter med grunne enn uten grunne ikke nødvendigvis betyr at det er økt forekomst av freake krefter i starten av nedoverbakken.

5.3 Videre arbeid

Vi har gjort eksperimenter med en vilkårlig, fast radius på sylindren, og en vilkårlig, fast plassering vertikalt, med ulike plasseringer horisontalt, i tillegg til at vi genererte vindbølger. Videre kan man undersøke trenden til skjevhet og kurtose ved flere posisjoner over og rundt plataået, og ved ulike dybder. Beregningen av sannsynlighetsfordelingen til total kraft som er begynt på i [Tillegg B](#) kan fullføres, for å deretter sammenligne resultatene fra empiri med teori. Dette vil også gjøre at vi kan se tydeligere hvordan fordelingen til kraft er i forhold til hastighet. I tillegg, hvis man ønsker en mer realistisk modell av

SFTB rørbruer, bør cylinder-radius skaleres i forhold til vanddybden. Man kan også undersøke med dønninger istedenfor vindbølger.

KAPITTEL 6

Konklusjon

Statens Vegvesen har fremmet muligheten for å plassere en rørbru av typen Submerged Floating Tube Bridge (SFTB) bak en forhøyning i bunneometri i en fjord. Tidligere har det blitt funnet økt sannsynlighet for freake hastigheter ved slike posisjoner. Med freake hastigheter menes her unormalt store og uforutsigbare hastigheter. For at SFTB skal være trygg å kjøre gjennom, må det beregnes for mulige krefter som kommer til å virke på den.

Gjennom denne masteroppgaven ønsket vi derfor å gå videre til å undersøke problemstillingen *Hvordan er forekomsten av freake bølge-induserte krefter på en sylinder bak en grunne, sammenlignet med over flat bunn?* Dette gjorde vi gjennom eksperimenter i en bølgetank, der en sylinder ble plassert på tvers bak en grunne. Bølger av JONSWAP- og Pierson-Moskowitz-spektrum ble generert fra padla i bølgetanken og forplantet seg over flat bunn, og bølger av Pierson-Moskowitz-spektrum ble generert for å forplante seg over grunna. Videre analyserte vi resultatene gjennom skjevhet, kurtose og sannsynlighetsfordeling, og fokuserte på hvordan resultatene fra målinger gjort med grunne endret seg sammenlignet med målinger gjort over flat bunn.

Alt i alt kan det se ut til at rørbruer plassert i nedoverbakken bak en grunne bør være bygget slik at de tåler freake krefter både i horisontal og vertikal retning. I dette området har vi nemlig funnet at det forekommer en vesentlig endring i sannsynligheten for ekstreme krefter sammenlignet med når bølger forplanter seg over flat bunn.

Tillegg

TILLEGG A

Programmeringskoder

Dette tillegget viser koder brukt for postprosessering av rådataene fra kraftmålingene og overflatemålingene, i tillegg til andre funksjoner og programmer som ble brukt i utregningene for analysering av dataene.

A.1 Postprosessering av overflatemålingene

overflatehevning_sentrere

```
%Sentrerer overflatemaalingene rundt likevektslinja (gjennomsnittet).
%Tar inn raafil med 6 kolonner:
%[dato og tid , probe1, probe2, probe3, probe4, lyd hastighet]
%Returnerer filen probe_runX_sentrert (X er run nr) med 4 kolonner:
%[probe1, probe2, probe3, probe4]

run_nr = 48

%Laste opp data:
datafile = sprintf('Kjoring/probe_run%d', run_nr);
run = readmatrix(datafile);

%Sentrerer data for hver probe:
overflate = zeros(length(run(:,1)),4);
for probe = 1:4
    kanal = probe+1;
    dette_run = run(:,kanal);
    %Finner overflaten som tilsvarer 0,52 m dybde:
    likevekt = mean(dette_run);
    %Finner overflaten i forhold til likevektsdybden:
    overflate(:,probe) = -(dette_run-likevekt);
end

%Plotter for probe 4:
figure;
plot(overflate(:,4))
title(sprintf('run %d',run_nr))
xlabel('sample-punkter')
ylabel('overflate')

%Lagrer:
filename = sprintf('Kjoring/probe_run%d_sentrert',run_nr);
save(filename, 'overflate')
```

InterpolateSpikes

```

function eta_out=InterpolateSpikes(eta_in,Threshold)
%Removes and interpolates spikes.
%(code fra Anne Raustoeel 2012, with some changes)
% eta_in is a Nx1 vector with surface elevation data,
% t is a Nx1 vector with the time.
% Threshold is the maximum slope between two datapoints.
% Interpolation method is 'pchip' default

E = length(eta_in);
t = 1: +1 :E;
t = transpose(t);

eta_out=eta_in;

np=0; % Total number of points removed.
counter=0; % Total number of passes

while counter<20
    counter=counter+1;
    npr=0; % Number of points removed in each pass.

    for i=3:length(eta_in)-3
        if eta_out(i)<0 % only looks at values below the mean.
            if abs ...
                ((eta_out(i+1)-eta_out(i))/(t(i+1)-t(i)))>...
                Threshold
                    eta_out(i)=NaN;
                    eta_out(i+1)=NaN;
                    eta_out(i+2)=NaN;
                    eta_out(i-1)=NaN;
                    eta_out(i-2)=NaN;
                    npr=npr+1;
            end
        end
    end

    np=np+npr;
    index = find(isnan(eta_out));
    eta_out(index)=interp1(find(~isnan(eta_out)),...
    eta_out(~isnan(eta_out)), index, 'pchip');
end
end

```

A.2 Postprosessering av kraftmålingene

kraft_snu_koordinatsystem

```

%Snur koordinatsystem paa runs slik at x er med bolgene, y1 opp.
%Gjelder runs 3-8 og 24-53.

%Xtot = X1+X2, siden positiv x-retning er samme retning for
%begge maalerne.
%Ytot = Y1-Y2, siden positiv y-retning for maaler 2 gaar i
% motsatt retning av y-retning for maaler 1.
%Y2inv = -Y1

```

A.2. Postprosessering av kraftmålingene

```
%MED GRUNNE:
for a=3:8 %gaar gjennom de aktuelle runs
  %Laster inn data:
  datafile = sprintf('Kjoring/run%d_200Hz', a);
  load(datafile)

  %Snur dataene: (x mot padla, y1 ned)
  Channel_2_Data = -Channel_2_Data; %X1
  Channel_5_Data = -Channel_5_Data; %X2
  Channel_7_Data = -Channel_7_Data; %X-tot
  Channel_3_Data = -Channel_3_Data; %Y1
  Channel_6_Data = -Channel_6_Data; %Y2
  Channel_8_Data = -Channel_8_Data; %Y-tot
  Channel_9_Data = -Channel_9_Data; %Y2inv

  %Lagrer:
  filename = sprintf('Kjoring/run%d_200Hz_snudd',a);
  save(filename,'Channel_1_Data','Channel_2_Data',...
        'Channel_3_Data','Channel_4_Data','Channel_5_Data',...
        'Channel_6_Data','Channel_7_Data','Channel_8_Data',...
        'Channel_9_Data');
end

for b=24:47 %gaar gjennom de aktuelle runs
  %Laster inn data:
  datafile = sprintf('Kjoring/run%d_200Hz', b);
  load(datafile)

  %Snur dataene: (x mot padla, y1 opp)
  Channel_2_Data = -Channel_2_Data; %X1
  Channel_5_Data = -Channel_5_Data; %X2
  Channel_7_Data = -Channel_7_Data; %X-tot

  %Lagrer:
  filename = sprintf('Kjoring/run%d_200Hz_snudd',b);
  save(filename,'Channel_1_Data','Channel_2_Data',...
        'Channel_3_Data','Channel_4_Data','Channel_5_Data',...
        'Channel_6_Data','Channel_7_Data','Channel_8_Data',...
        'Channel_9_Data');
end

%FOR FLAT BUNN:
for b=48:53 %gaar gjennom de aktuelle runs
  %Laster inn data:
  datafile = sprintf('Kjoring/run%d_200Hz', b);
  load(datafile)

  %Snur dataene: (x mot padla, y1 opp)
  Channel_2_Data = -Channel_2_Data; %X1
  Channel_5_Data = -Channel_5_Data; %X2
  Channel_7_Data = -Channel_7_Data; %X-tot

  %Lagrer:
  filename = sprintf('Kjoring/run%d_200Hz_snudd',b);
  save(filename,'Channel_1_Data','Channel_2_Data',...
        'Channel_3_Data','Channel_4_Data','Channel_5_Data',...
        'Channel_6_Data','Channel_7_Data','Channel_8_Data',...
        'Channel_9_Data');
end
```

A.2. Postprosessering av kraftmålingene

kraft_vri

```
%Tar lineær regresjon av kraftmålinger og
%sentrerer kraftmålingene om denne linja.

%VRIR ALLE DATAENE FOR X-TOT OG Y-TOT TIL AA SENTRERES RUNDT LINREG,
%FOR RUNS MED GRUNNE:
N = 47-2; %antall runs totalt
for i = 1:N
    run_nr = i+2;

    %Laster inn data:
    snudd1 = 3:8;
    snudd2 = 24:47;
    if ismember(run_nr,snudd1)
        datafile = sprintf('Kjoring/run%d_200Hz_snudd', ...
            run_nr);
    elseif ismember(run_nr,snudd2)
        datafile = sprintf('Kjoring/run%d_200Hz_snudd', ...
            run_nr);
    else
        datafile = sprintf('Kjoring/run%d_200Hz', run_nr);
    end
    load(datafile)

    %Velger interessant kanal:
    xtot = Channel_7_Data; %X-tot
    ytot = Channel_8_Data; %Y-tot
    tot = [xtot ytot];

    kraftdata = zeros(length(xtot),2);
    %Beregner lineær regresjon for x-tot og y-tot:
    for k=1:2
        y = tot(:,k);
        x=1:length(y); %liste over sample-punkter
        x=x.'; %transponerer
        X=[ones(length(x),1) x]; %for aa faa konstantledd
        b=X\y; %returnerer en vektor
        %med [konstantledd stigningstall]
        yCalc = X*b; %regner ut den lineære grafen i hvert
        %punkt x har

        %Vrir dataene til aa sentreres om den lineære regresjonen:
        kraftdata(:,k) = y-yCalc;
    end

    %Lagrer:
    filename = sprintf('Kjoring/run%d_snudd_sentrert',run_nr);
    save(filename, 'kraftdata')
end

%VRIR ALLE DATAENE FOR X-TOT OG Y-TOT TIL AA SENTRERES RUNDT LINREG,
%FOR RUNS MED FLAT BUNN:
N = 6; %antall runs totalt
for i = 1:N
    run_nr = i+47;

    %Laster inn data:
    datafile = sprintf('Kjoring/run%d_200Hz_snudd', run_nr);
    load(datafile)
```

A.3. Andre programmer/funksjoner

```
%Velger interessant kanal:
xtot = Channel_7_Data; %X-tot
ytot = Channel_8_Data; %Y-tot
tot = [xtot ytot];

kraftdata = zeros(length(xtot),2);
%Beregner lineær regresjon for x-tot og y-tot:
for k=1:2
    y = tot(:,k);
    x=1:length(y); %liste over sample-punkter
    x=x.'; %transponerer
    X=[ones(length(x),1) x]; %for aa faa konstantledd
    b=X\y; %returnerer en vektor
    %med [konstantledd stigningstall]
    yCalc = X*b; %regner ut den lineære grafen i hvert
    %punkt x har

    %Vrir dataene til aa sentreres om den lineære regresjonen:
    kraftdata(:,k) = y-yCalc;
end

%Lagrer:
filename = sprintf('Kjoring/run%d_snudd_sentrert',run_nr);
save(filename, 'kraftdata')
end
```

A.3 Andre programmer/funksjoner

wparam

```
%(SIGMA,T,K,LAMBDA,CP,CG)=WPARAM(F,H)
% This function calculates these different wave parameters using the
% full dispersion relation ( $\sigma^2=g*k*\tanh(k*H)$ ) given the
% depth of the water H and the frequency f.
%(from Atle Jensen)
function [sigma,T,k,lambda,Cp,Cg]=wparam(f,H)

g=9.8;
sigma=2*pi*f;
T=1/f;

k0=0.00001;
k1=sigma^2/(g*tanh(k0*H));

while abs(k1-k0)>0.00001
    k0=k1;
    k1=sigma^2/(g*tanh(k0*H));
end

k=k1;
lambda=2*pi/k;
%Cp=sqrt((g*tanh(k*H))/k);
Cp=sigma/k;
Cg=(1/(2*sigma))*(g*tanh(k*H)+g*k*H*(sech(k*H))^2);
end
```

TILLEGG B

Sannsynlighetsfordelingen til kreftene på sylinder

Ut ifra Morison-likningen (se [Likning \(2.57\)](#)) kan man beregne sannsynlighetsfordelingen til kreftene som virker på sylindren, for å gjøre en større analyse av statistikken til bølgene. Vi har gjort en del av disse beregningene for kreftene hver for seg, men i videre arbeid trengs å finne fordelingen til den totale kraften. Dette vedlegget viser beregninger av sannsynlighetsfordelingen til treghetskraft og motstandskraft.

B.1 Teoretiske beregninger

Hastighet

- En enkel modell av hastigheten

I Morisons likning, [Likning \(2.57\)](#), vil hastigheten $U(t)$ være den stokastiske prosessen, så la oss se nærmere på denne. Vi antar at $U(t)$ er en gaussisk prosess med forventningsverdi $\mu = 0$ og midlere effekt σ^2 . Vi lager en enkel modell der vi lar U være beskrevet av en Fourier-dekomposisjon,

$$U(t) = \sum_n a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t), \quad (\text{B.1})$$

der a_n og b_n beskriver amplituden til hastigheten, ω_n er vinkelfrekvens, t er tid og $n = 1, 2, \dots, N$. Anta at a_n og b_n er normalfordelt med forventningsverdi $\mu = 0$ og standardavvik σ_n , og anta at a_n og b_m er statistisk uavhengige, a_n og a_m er statistisk uavhengige og b_n og b_m er statistisk uavhengige for alle n og m .

- Spektrum for U for $N = 1$

Vi trenger å vite noe om standardavviket σ_n til a_n og b_n som påvirker hastigheten U . Vi starter med å se på tilfellet $N = 1$. Da blir autokorrelasjonsfunksjonen,

der $\tau = t_2 - t_1$,

$$R(t, \tau) = E[U(t + \tau)U(t)] \quad (\text{B.2})$$

$$= E[(a_n \cos(\omega_n(t + \tau)) + b_n \sin(\omega_n(t + \tau))) \cdot (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t))] \quad (\text{B.3})$$

$$= E[a_n^2 \cos(\omega_n(t + \tau)) \cos(\omega_n t) + b_n^2 \sin(\omega_n(t + \tau)) \sin(\omega_n t) + a_n b_n \cos(\omega_n(t + \tau)) \sin(\omega_n t) + a_n b_n \sin(\omega_n(t + \tau)) \cos(\omega_n t)] \quad (\text{B.4})$$

$$= E[a_n^2] \cos(\omega_n(t + \tau)) \cos(\omega_n t) + E[b_n^2] \sin(\omega_n(t + \tau)) \sin(\omega_n t) + E[a_n b_n] (\cos(\omega_n(t + \tau)) \sin(\omega_n t) + \sin(\omega_n(t + \tau)) \cos(\omega_n t)). \quad (\text{B.5})$$

Siden vi har antatt at a_n og b_n er statistisk uavhengige og har forventningsverdi $\mu = 0$ og standardavvik σ_n , og

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y), \quad (\text{B.6})$$

så får vi at

$$R(t, \tau) = \sigma_n^2 (\cos(\omega_n(t + \tau)) \cos(\omega_n t) + \sin(\omega_n(t + \tau)) \sin(\omega_n t)) \quad (\text{B.7})$$

$$= \sigma_n^2 \cos(\omega_n(t + \tau) - \omega_n t) \quad (\text{B.8})$$

$$= \sigma_n^2 \cos(\omega_n \tau). \quad (\text{B.9})$$

Vi ser altså at prosessen $U(t)$ er svakt stasjonær, og kan dermed beregne spektrumet til prosessen ved Wiener-Khintchines relasjon som vist i [Likning \(2.27\)](#):

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (\text{B.10})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_n^2 \cos(\omega_n \tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (\text{B.11})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_n^2 \frac{1}{2} (e^{i\omega_n \tau} e^{-i\omega_n \tau}) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (\text{B.12})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_n^2 \frac{1}{2} (e^{-i(-\omega - \omega_n)\tau} e^{-i(-\omega + \omega_n)\tau}) d\tau \quad (\text{B.13})$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_n^2 (\delta(-\omega + \omega_n) + \delta(-\omega - \omega_n)). \quad (\text{B.14})$$

Vi får altså et spektrum med Dirac delta ved $\omega = -\omega_n$ og $\omega = \omega_n$ med verdi $\frac{1}{2} \sigma_n^2$.

- Spektrum for U for $n = 1, \dots, N$

La oss nå utvide til tilfellet $n = 1, \dots, N$. Autokorrelasjonsfunksjonen gir da

$$R(t, \tau) = E[U(t + \tau)U(t)] \quad (\text{B.15})$$

$$= E\left[\sum_n (a_n \cos(\omega_n(t + \tau)) + b_n \sin(\omega_n(t + \tau))) \cdot \sum_m (a_m \cos(\omega_m t) + b_m \sin(\omega_m t))\right] \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned}
 &= E\left[\sum_n \sum_m a_n a_m \cos(\omega_n(t + \tau)) \cos(\omega_m t) \right. \\
 &\quad + b_n b_m \sin(\omega_n(t + \tau)) \sin(\omega_m t) \\
 &\quad + a_n b_m \cos(\omega_n(t + \tau)) \sin(\omega_m t) \\
 &\quad \left. + a_m b_n \sin(\omega_n(t + \tau)) \cos(\omega_m t)\right] \quad (\text{B.17})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_n \sum_m E[a_n a_m] \cos(\omega_n(t + \tau)) \cos(\omega_m t) \\
 &\quad + E[b_n b_m] \sin(\omega_n(t + \tau)) \sin(\omega_m t) \\
 &\quad + E[a_n b_m] \cos(\omega_n(t + \tau)) \sin(\omega_m t) \\
 &\quad + E[a_m b_n] \sin(\omega_n(t + \tau)) \cos(\omega_m t). \quad (\text{B.18})
 \end{aligned}$$

Igen, siden a_n og b_n er normalfordelt med forventningsverdi $\mu = 0$ og standardavvik σ_n , og a_n og b_m er statistisk uavhengige, a_n og a_m er statistisk uavhengige og b_n og b_m er statistisk uavhengige for $m \neq n$, så får vi at

$$\begin{aligned}
 R(t, \tau) &= \sum_n E[a_n^2] \cos(\omega_n(t + \tau)) \cos(\omega_n t) \\
 &\quad + E[b_n^2] \sin(\omega_n(t + \tau)) \sin(\omega_n t) \quad (\text{B.19})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_n \sigma_n^2 (\cos(\omega_n(t + \tau)) \cos(\omega_n t) \\
 &\quad + \sin(\omega_n(t + \tau)) \sin(\omega_n t)) \quad (\text{B.20})
 \end{aligned}$$

$$= \sum_n \sigma_n^2 \cos(\omega_n(t + \tau) - \omega_n t) \quad (\text{B.21})$$

$$= \sum_n \sigma_n^2 \cos(\omega_n \tau). \quad (\text{B.22})$$

Nok en gang blir autokorrelasjonen kun avhengig av tidsforsinkelsen τ , så prosessen er svakt stasjonær. Ved tilsvarende framgangsmåte som for $n = 1$ får vi da at

$$S(\omega) = \sum_n \frac{1}{2} \sigma_n^2 (\delta(-\omega + \omega_n) + \delta(-\omega - \omega_n)). \quad (\text{B.23})$$

Vi ser altså at spektrumet til hastigheten U kan beskrives som en sum av Dirac delta-er plassert ved $\pm\omega_n$, med størrelse $\frac{1}{2}\sigma_n^2$ for tosidig spektrum, det vil si størrelse σ_n^2 for ensidig spektrum. Dette spektrumet kan vi bruke til å sammenligne teori med empiri. I tillegg ser vi at vi kan finne en sammenheng mellom den midlere effekten til hastigheten $U(t)$ og standardavviket til a_n og b_n :

$$\sigma^2 = E[U(t)^2] = R(0) \quad (\text{B.24})$$

for U ikke-kompleks, der vi finner $R(0)$ fra [Likning \(B.22\)](#):

$$R(0) = \sum_n \sigma_n^2 \cos(\omega_n \cdot 0) = \sum_n \sigma_n^2 \quad (\text{B.25})$$

slik at

$$\sigma^2 = \sum_n \sigma_n^2. \quad (\text{B.26})$$

Sannsynlighetsfordeling for motstandskraft

For å sammenligne den teoretiske kraften med resultatene fra dataene, kan vi se på sannsynlighetsfordelingen til kraften. Vi tar utgangspunkt i at hastighetsfeltet U er normalfordelt med forventningsverdi $\mu = 0$ og standardavvik σ .

Fra Morisons likning, [Likning \(2.57\)](#), ser vi at det ene leddet, som tilsvarer vannmotstand-kraften, er avhengig av en kvadratisk form av hastigheten, $u|u|$. Vi antar som sagt at hastigheten er en stokastisk variabel, og ønsker å finne sannsynlighetsfordelingen til dette leddet. La $W = U|U|$. Anta først $w > 0$. Da får vi

$$P(W \leq w) = P(U|U| \leq w) \quad (\text{B.27})$$

$$= \frac{1}{2} + P(U^2 \leq w) \quad (\text{B.28})$$

$$= \frac{1}{2} + P(0 \leq U \leq \sqrt{w}) \quad (\text{B.29})$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^{\sqrt{w}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-u^2/2\sigma^2} du. \quad (\text{B.30})$$

Leibniz' regel [\[36\]](#),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \right) &= f(x, b(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} b(x) - f(x, a(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} a(x) \\ &\quad + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt, \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

gir da at sannsynlighetsfordelingen til $W = U|U|$ er

$$f_W(w) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma^2 w}} e^{-w/2\sigma^2}. \quad (\text{B.32})$$

Tilsvarende, hvis vi antar $w < 0$, får vi

$$P(W \leq w) = P(U|U| \leq w) \quad (\text{B.33})$$

$$= P(U^2 \geq -w) \quad (\text{B.34})$$

$$= 1 - P(U^2 \leq -w) \quad (\text{B.35})$$

$$= 1 - P(-\sqrt{-w} \leq U \leq 0) \quad (\text{B.36})$$

$$= 1 - \int_{-\sqrt{-w}}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-u^2/2\sigma^2} du. \quad (\text{B.37})$$

Ved Leibniz' regel ([Likning \(B.31\)](#)) gir dette

$$f_W(w) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma^2(-w)}} e^{w/2\sigma^2}. \quad (\text{B.38})$$

Vi har en singularitet ved $w = 0$. Når $w \rightarrow 0$ ovenfra, vil eksponentialfunksjonen gå mot 1, så $\frac{1}{2\sqrt{w}}$ vil dominere over eksponentialfunksjonen. Ved

$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{w}} dw = [\sqrt{w}]_0^1 = 1, \quad (\text{B.39})$$

ser vi at $f_W(w)$ vil gå sakte nok mot uendelig når $w \rightarrow 0$ til at vi kan få endelig areal under grafen.

Dette gir altså at $W = U|U|$ har sannsynlighetsfordelingen

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}w} e^{-w/2\sigma^2} & \text{hvis } w > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(-w)}} e^{w/2\sigma^2} & \text{hvis } w < 0 \end{cases} \quad (\text{B.40})$$

som videre gir at sannsynlighetsfordelingen til drag-kraft er

$$f_D(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} C_D \rho A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2|u|}} e^{-u|u|/2\sigma^2} & \text{hvis } u > 0 \\ \frac{1}{2} C_D \rho A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(-|u|)}} e^{u|u|/2\sigma^2} & \text{hvis } u < 0 \end{cases} \quad (\text{B.41})$$

Sannsynlighetsfordeling for treghetskraft

La oss nå se på treghetskraft-leddet i Morisons likning, [Likning \(2.57\)](#). Her finner vi sannsynlighetsfordelingen ved å se på $\frac{dU}{dt}$. Fra definisjonen av hastigheten i [Likning \(B.1\)](#), finner vi

$$\frac{dU(t)}{dt} = \sum_n \omega_n (-a_n \sin(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t)) \quad (\text{B.42})$$

$$= \sum_n \omega_n (A_n a_n + B_n b_n), \quad (\text{B.43})$$

der $A_n = -\sin(\omega_n t)$ og $B_n = \cos(\omega_n t)$.

Vi kan nå bruke resultatet vi fant i avsnittet **Summen av to bivariat gaussisk fordelte variabler** i [Avsnitt 2.1](#) om fordelingen til $Z = X + Y$, til å finne fordelingen til $\frac{dU}{dt}$. La $\dot{U} = \frac{dU}{dt}$ markere den tidsderiverte. Hvis vi bruker resultatet, men utvidet for en sum av to eller flere gaussiske stokastiske prosesser, får vi at $\dot{U} = \sum_n \dot{U}_n$ er gaussisk fordelt med forventning $\mu_{\dot{U}} = 0$ og midlere effekt

$$\sigma_{\dot{U}}^2 = \sum_n \sigma_{\dot{U}_n}^2 \quad (\text{B.44})$$

der $\dot{U}_n = \omega_n (A_n a_n + B_n b_n)$ med forventning $\mu_{\dot{U}_n} = 0$ og midlere effekt

$$\sigma_{\dot{U}_n}^2 = \omega_n^2 A_n^2 \sigma_n^2 + \omega_n^2 B_n^2 \sigma_n^2 \quad (\text{B.45})$$

$$= \omega_n^2 \sigma_n^2 (A_n^2 + B_n^2) \quad (\text{B.46})$$

$$= \omega_n^2 \sigma_n^2 (-\sin^2(\omega_n t) + \cos^2(\omega_n t)) \quad (\text{B.47})$$

$$= \omega_n^2 \sigma_n^2 \quad (\text{B.48})$$

med A_n og B_n som beskrevet tidligere. Her har vi antatt, som før, at a_n og b_n er normalfordelt med forventningsverdi $\mu = 0$ og standardavvik σ_n , og at a_n og b_m er statistisk uavhengige, a_n og a_m er statistisk uavhengige og b_n og b_m er statistisk uavhengige for alle n og m . Dermed får vi at

$$\sigma_{\dot{U}}^2 = \sum_n \omega_n^2 \sigma_n^2. \quad (\text{B.49})$$

Sannsynlighetsfordelingen til treghetskraften blir altså

$$f_I(u) = C_M \rho V \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_U^2}} e^{-u^2/2\sigma_U^2}. \quad (\text{B.50})$$

Det gjenstår videre å finne σ_n og ω_n ut ifra spektrumet til hastigheten.

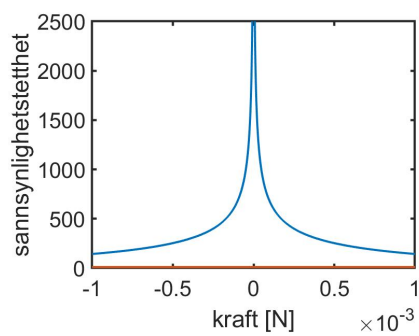
B.2 Metode

Teoretisk sannsynlighetsfordeling ble plottet ut ifra [Likning \(B.50\)](#) og [Likning \(B.41\)](#). Siden vi ikke har funnet verdiene for σ_n og ω_n enda, har sannsynlighetsfordelingen til den deriverte av hastigheten blitt beregnet kun som en normalfordeling med middelværdi $\mu = 0$ og standardavvik ω , der ω er hentet fra kjøringen vi sammenligner med. σ er satt til 0,005 for at hastigheten, som er satt til å gå mellom $\pm\sqrt{2}\sigma$, skal favne alle verdiene for kraft som eksperimentell fordeling gir. Siden vi heller ikke har den karakteristiske hastigheten rundt sylindren, har vi ikke kunnet beregne Reynoldstallet, så vi satte $C_D = 1,2$, basert på hvordan motstandskoeffisienten typisk er for sylinder [\[38\]](#). Sannsynlighetsfordelingene ble normalisert ved hjelp av arealet under grafene, som ble funnet ved MATLAB sin funksjon `trapz`.

B.3 Resultater og diskusjon

[Figur B.1](#) viser den teoretiske sannsynlighetsfordelingen for treghetskraft og motstandskraft ut ifra beregningene vi har gjort over. Vi ser at treghetskraften her har mye lavere sannsynlighetstetthet for alle kreftene, enn motstandskraften har.

Vi har antatt i de teoretiske fordelingene at hastigheten til vannet rundt sylindren er fordelt gaussisk, og vi har beregnet ved teoretiske sammenhenger mellom karakteristisk amplitude, standardavviket til hastighet og standardavvik til de ulike koeffisientene i uttrykket for hastighet, som vist i [Tillegg B.1](#). Her kan valg av verdier som vi ikke har funnet enda, ha påvirket resultatet, i tillegg til at fordelingen fra eksperimentene er total kraft, mens vi kun har plottet teoretisk sannsynlighetsfordeling for de to kreftene hver for seg. Derfor kan vi ikke sammenligne disse teoretiske resultatene med de empiriske uten å jobbe videre med utregningen av fordeling av total kraft. Det vi derimot ser tydelig her er at selv om hastighet er gaussisk fordelt, vil ikke motstandskraften være det.



Figur B.1: Teoretisk sannsynlighetsfordeling for motstandskraft beregnet ved Likning (B.41) (—), og for treghetskraft beregnet ved Likning (B.50) (—).

Figurer

3.1	Modell av sylinderen med diameter 0,75m. Sylinderen har en kraftmåler inn fra hver ende.	17
3.2	Oppsett for grunna (grå), sylinderen (svart sirkel) og UL-probene (røde streker) i tanken. Koordinatsystemet har origo ved vannoverflaten ved stille vann, over starten av plataet.	18
3.3	Bilde av at sylinderen med stativ skrues fast i skinna i tanken. Grunna og såvidt UL-probene kan sees til høyre i bildet.	19
3.4	Bilde av sylinderen på stativet, med lodd som henger på for kalibrering.	23
3.5	Viser forhold mellom vekt og totalt utslag på kraftmålerne, mot lineær regresjonsgraf gjennom punktene. Loddene henger her under måler 1. \mp -viser resultatet fra målingene med vektene, med standardavvik. --- viser resultatet fra lineær regresjon av resultatene (se Avsnitt 3.2 for mer forklaring).	23
3.6	Viser forhold mellom vekt og totalt utslag på kraftmålerne, mot lineær regresjonsgraf gjennom punktene. Loddene henger her under måler 2. \mp -viser resultatet fra målingene med vektene, med standardavvik. --- viser resultatet fra lineær regresjon av resultatene (se Avsnitt 3.2 for mer forklaring).	24
3.7	Viser forhold mellom vekt og totalt utslag på kraftmålerne, mot lineær regresjonsgraf gjennom punktene. Loddene henger her midt mellom måler 1 og 2. \mp -viser resultatet fra målingene med vektene, med standardavvik. --- viser resultatet fra lineær regresjon av resultatene (se Avsnitt 3.2 for mer forklaring).	25
3.8	Konvergenstrakt for skjevhet med data fra kraftmålerne i x-retning (—), sammenlignet med standardavviket til sample-skjevheten til en normalfordelt sample-mengde (—).	26
3.9	Konvergenstrakt for skjevhet med data fra kraftmålerne i z-retning (—), sammenlignet med standardavviket til sample-skjevheten til en normalfordelt sample-mengde (—).	27
3.10	Konvergenstrakt for kurtose med data fra kraftmålerne i x-retning (—), sammenlignet med standardavviket til sample-kurtosen til en normalfordelt sample-mengde (—).	27
3.11	Konvergenstrakt for kurtose med data fra kraftmålerne i z-retning (—), sammenlignet med standardavviket til sample-kurtosen til en normalfordelt sample-mengde (—).	27

3.12	Konvergenstrakt for skjevhet med data fra overflatemålerne (—), sammenlignet med standardavviket til sample-skjevheten til en normalfordelt sample-mengde (—).	28
3.13	Konvergenstrakt for kurtose med data fra overflatemålerne (—), sammenlignet med standardavviket til sample-kurtosen til en normalfordelt sample-mengde (—).	29
3.14	Et typisk eksempel på en spiss utstikker som renses bort med «threshold» 0,009. Originaldata (—) plottet mot rensed data (—) ved posisjon $x = 2,190$ m.	30
4.1	Skjevhet og kurtose av overflatedataene, med standardavvik mellom de tre runs med samme posisjon. Viser målinger med grunne med bølger generert fra PM-spektrum (\boxplus), uten grunne med PM-spektrum (\boxtimes) og uten grunne med JONSWAP-spektrum (\boxdot).	33
4.2	Relasjon mellom kurtose og skjevhet for overflatemålinger, mot Mori og Kobayashi (—) og Ma et al. (---) [19] sine teoretiske sammenhenger.	33
4.3	Ulike resultater for overflatemålingene. Viser målinger gjort med grunne med bølger generert fra PM-spektrumet (*), uten grunne med PM-spektrumet (\circ) og uten grunne med JONSWAP-spektrumet (\odot).	34
4.4	Skjevhet av kraftdataene, med standardavvik mellom de tre runs med samme posisjon. Viser målinger gjort med grunne med bølger generert fra PM-spektrum (\boxminus), uten grunne med PM-spektrum (\boxplus), og uten grunne med JONSWAP-spektrum (\boxdot).	36
4.5	Kurtose av kraftdataene, med standardavvik mellom de tre runs med samme posisjon. Viser målinger gjort med grunne med bølger generert fra PM-spektrum (\boxminus), uten grunne med PM-spektrum (\boxplus), og uten grunne med JONSWAP-spektrum (\boxdot).	36
4.6	Relasjon mellom kurtose og skjevhet for kraftmålinger. Viser målinger gjort med grunne med bølger generert fra PM-spektrum (*), uten grunne med PM-spektrum (\circ), og uten grunne med JONSWAP-spektrum (\odot). Viser også Mori og Kobayashi (—) og Ma et al. (---) [19] sine teoretiske sammenhenger for overflatehevning.	36
4.7	Variansen til kraftmålingene. Viser målinger gjort med grunne med bølger generert fra PM-spektrumet (*), uten grunne med PM-spektrumet (\circ) og uten grunne med JONSWAP-spektrumet (\odot).	37
4.8	Den dimensjonsløse karakteristiske amplituden til kraftmålingene, ζ , beregnet ved Likning (2.51). Viser målinger gjort med grunne med bølger generert fra PM-spektrumet (*), uten grunne med PM-spektrumet (\ominus) og uten grunne med JONSWAP-spektrumet (\odot).	37
4.9	Dimensjonsløst dyp, utregnet ved $k_p h$, for kraftmålingene. Viser målinger gjort med grunne med bølger generert fra PM-spektrumet (*), uten grunne med PM-spektrumet (\ominus) og uten grunne med JONSWAP-spektrumet (\odot).	38
4.10	Skjevhet for kraftmålingene og overflatemålinger.	39
4.11	Kurtose for kraftmålingene og overflatemålinger.	39
4.12	Varians for kraftmålingene og overflatemålinger.	40

4.13	Verdier for den dimensjonsløse karakteristiske amplituden for kraftmålingene og overflatemålinger.	40
4.14	$k_p h$ for kraftmålingene og overflatemålinger.	41
4.15	Sannsynlighetsfordeling for målinger med grunne ved ulike posisjoner (—), satt opp mot sannsynlighetsfordeling for målinger uten grunne med generert PM-spektrum (—) og med generert JONSWAP-spektrum (—). Målinger gjort i x-retning.	43
4.16	Samme som Figur 4.15.	44
4.17	Tilsvarende grafer som i Figur 4.15, men her vist ved logaritmisk andreakse. Målinger gjort i x-retning.	45
4.18	Samme som Figur 4.17.	46
4.19	Samme type grafer som i Figur 4.15, men for målinger gjort i z-retning.	47
4.20	Samme som Figur 4.19.	48
4.21	Tilsvarende grafer som i Figur 4.15, men her vist ved logaritmisk andreakse. Målinger gjort i z-retning.	49
4.22	Samme som Figur 4.21.	50
B.1	Teoretisk sannsynlighetsfordeling for motstandskraft beregnet ved Likning (B.41) (—), og for tregghetskraft beregnet ved Likning (B.50) (—).	71

Tabeller

3.1	Posisjonene til UL-probene og sentrum av sylindren, i forhold til origo satt 10,160 m fra padla i midtposisjon. Enheten er meter. Hver rad viser posisjonen til de ulike måleinstrumentene ved samme kjøring.	18
3.2	Vekten til loddene og oppheng brukt i kalibrering av kraftmålerne.	22
3.3	Oversikt over den største usikkerheten målt for hver retning og hver posisjon, når man sammenligner usikkerhetene mellom de ulike loddene. Enhet mV/V.	24

Bibliografi

- [1] Andersen I. og Taraldsen, L. «Ptil om COSL-dødsulykken: Overbygget tålte ikke bølgen». I: *Teknisk Ukeblad* (2016). URL: <https://www.tu.no/artikler/ptil-om-cosl-dodsulykken-to-alvorlige-regelbrudd/346166>.
- [2] Beji, S. og Battjes, J. A. «Experimental investigation of wave propagation over a bar». I: *Coastal Engineering* årg. 19, nr. 1-2 (1993), s. 151–162.
- [3] Bitner, E. M. «Non-linear effects of the statistical model of shallow-water wind waves». I: *Applied Ocean Research* årg. 2, nr. 2 (1980), s. 63–73.
- [4] Bunnik, T. «Benchmark workshop on numerical wave modeling — description of test cases». I: *Technical Report 70022-1-RD (Marin, Nederland)* (2010).
- [5] Cherneva, Z. mfl. «Probability distributions of peaks, troughs and heights of wind waves measured in the black sea coastal zone». I: *Coastal Engineering* årg. 52, nr. 7 (2005), s. 599–615.
- [6] Dean, R. G. *Water wave mechanics for engineers and scientists*. und. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1984.
- [7] Dysthe, K., Krogstad, H. E. og Müller, P. «Oceanic rogue waves». I: *Annu. Rev. Fluid Mech.* årg. 40 (2008), s. 287–310.
- [8] Fisher, R. A. «The Moments of the Distribution for Normal Samples of Measures of Departure from Normality». I: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* årg. 1230, nr. 812 (1930), s. 16–28.
- [9] Gjevik, B., Pedersen, G. K. og Trulsen, K. *Mek 4320: Hydrodynamic Wave theory*. 2021.
- [10] Gramstad, O. mfl. «Freak waves in weakly nonlinear unidirectional wave trains over a sloping bottom in shallow water». I: *Physics of Fluids* årg. 25, nr. 12 (2013), s. 122103.
- [11] Grue, J. «Nonlinear water waves at a submerged obstacle or bottom topography». I: *Journal of Fluid Mechanics* årg. 244 (1992), s. 455–476.
- [12] Hasselmann K., e. a. «Measurements of wind-wave growth and swell decay during the joint North Sea wave project (JONSWAP)». I: *Ergänzungsheft zur Deutschen Hydrographischen Zeitschrift*, nr. 12 (1973).
- [13] Haver, S. «A possible freak wave event measured at the Draupner Jacket January 1 1995». I: *Rogue waves*. Bd. 2004. 2004, s. 1–8.

-
- [14] Janssen, T. T., Herbers, T. H. C. og Battjes, J. A. «Evolution of ocean wave statistics in shallow water: Refraction and diffraction over seafloor topography». I: *Journal of Geophysical Research: Oceans* årg. 113, nr. C3 (2008).
- [15] Janssen, T. T. og Herbers, T. H. C. «Nonlinear wave statistics in a focal zone». I: *Journal of Physical Oceanography* årg. 39, nr. 8 (2009), s. 1948–1964.
- [16] Jorde, S. *Kinematikken i bølger over en grunne*. 2018.
- [17] Kashima, H., Hirayama, K. og Mori, N. «Estimation of freak wave occurrence from deep to shallow water regions». I: *Coastal Engineering Proceedings* årg. 1, nr. 34 (2014), s. 36.
- [18] Lawrence, C., Trulsen, K. og Gramstad, O. «Statistical properties of wave kinematics in long-crested irregular waves propagating over non-uniform bathymetry». I: *Physics of Fluids* årg. 33, nr. 4 (2021), s. 046601.
- [19] Ma, Y., Dong, G. og Ma, X. «Experimental study of statistics of random waves propagating over a bar». I: *Coastal Engineering Proceedings*, nr. 34 (2014), s. 30–30.
- [20] Magnusson, A. K. og Donelan, M. A. «The Andrea wave characteristics of a measured North Sea rogue wave». I: *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering* årg. 135, nr. 3 (2013).
- [21] Morison, J. R., Johnson, J. W. og Schaaf, S. A. «The force exerted by surface waves on piles». I: *Journal of Petroleum Technology* årg. 2, nr. 05 (1950), s. 149–154.
- [22] Nachazel, T. *What is a Strain Gauge and How Does it Work?* [Online; accessed 8-March-2022]. 2020. URL: <https://www.michsci.com/what-is-a-strain-gauge/?cn-reloaded=1>.
- [23] Ochi, M. K. *Ocean Waves: The Stochastic Approach*. eng. Cambridge, 1998.
- [24] Phillips, O. M. «The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves». I: *Journal of Fluid Mechanics* årg. 4, nr. 4 (1958), s. 426–434.
- [25] Pierson Jr., W. J. og Moskowitz, L. «A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of SA Kitaigorodskii». I: *Journal of geophysical research* årg. 69, nr. 24 (1964), s. 5181–5190.
- [26] Sergeeva, A., Pelinovsky, E. og Talipova, T. «Nonlinear random wave field in shallow water: variable Korteweg-de Vries framework». I: *Natural Hazards and Earth System Sciences* årg. 11, nr. 2 (2011), s. 323–330.
- [27] «De første internasjonale retningslinjene for rørbru er nå publisert». I: *Samferdsel og Infrastruktur* (des. 2020). Red. av Shojaei, S. URL: <https://www.samferdselinfra.no/de-forste-internasjonale-retningslinjene-for-rorbru-er-na-publisert/>.
- [28] Statens vegvesen. *Statens vegvesen- Ferjefri E39- Forskerpresentasjon - Arianna Minoretti*. YouTube. 2018. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=fYW9NxdZsjl>.
- [29] Trulsen, K. *Nonlinear theory*. 2020.
- [30] Trulsen, K. *Stochastic theory*. 2020.

-
- [31] Trulsen, K., Zeng, H. og Gramstad, O. «Laboratory evidence of freak waves provoked by non-uniform bathymetry». I: *Physics of Fluids* årg. 24, nr. 9 (2012), s. 097101.
- [32] Trulsen, K. mfl. «Extreme wave statistics of long-crested irregular waves over a shoal». I: *Journal of Fluid Mechanics* årg. 882 (2020).
- [33] *UltraLab ULS Advanced – User Manual, Ver. 2.3*. General Acoustics. Kiel, Tyskland, 2013.
- [34] *UltraLab ULS Advanced Field – Supplementary Manual, Ver. 1.0*. General Acoustics. Kiel, Tyskland, 2014.
- [35] Viotti, C. og Dias, F. «Extreme waves induced by strong depth transitions: Fully nonlinear results». I: *Physics of Fluids* årg. 26, nr. 5 (2014), s. 051705.
- [36] Weisstein, E. W. *Leibniz integral rule*. MathWorld – A Wolfram Web Resource. URL: <https://mathworld.wolfram.com/LeibnizIntegralRule.html>.
- [37] «What Does the Millivolts per Volt Unit for a Bridge-Based Sensor Mean?» I: *National Instruments* (2019). URL: <https://knowledge.ni.com/KnowledgeArticleDetails?id=kA00Z000000P9yBSAS>.
- [38] White, F. M. og Majdalani, J. *Viscous fluid flow*. Bd. 4. McGraw-Hill New York, 2021.
- [39] Zeng, H. og Trulsen, K. «Evolution of skewness and kurtosis of weakly nonlinear unidirectional waves over a sloping bottom». I: *Natural Hazards and Earth System Sciences* årg. 12, nr. 3 (2012), s. 631–638.