UiO : Matematisk institutt
Det matematisk-naturvitskaplege fakultet

Forhandlingar, preferansar og nyttefunksjonar

Magnus Myrhol

Masteroppgåve, våren 2022

Denne masteroppgåva er levert inn som ein del av programspesialiseringa *Matematikk* under *Lektorprogrammet* ved Universitetet i Oslo. Oppgåva er normert til 30 studiepoeng.

Framsida viser eit utsnitt av rotsystemet til den eksepsjonelle liegruppa E_8, projisert ned i planet. Liegrupper vart funne opp av den norske matematikaren Sophus Lie (1842–1899) for å uttrykkje symmetriane til differensiallikningar og spelar i dag ei sentral rolle i fleire delar av matematikken.

Abstrakt

Temaet for denne oppgåva er forhandlingar frå eit spillteoretisk perspektiv. Vi tar utgangspunkt i artikkelen «The Bargaining Problem» av John Nash og forsøker å legge fram Nash si løysing på ein forståeleg måte. Her ser vi nærare på matematikken bak teorien, og presenterer eigne bevis av resultat som kanskje ikkje er heilt opplagde. Vi ser på forhandlingar om gode mellom to partar, og kjem fram til at gitt visse vilkår, finn vi den optimale fordelinga av gode ved å maksimere *produktet* av nytten som dei to partane får av goda. Deretter anvender vi dette ved å rekne på eit konkret eksempel, før vi avsluttar oppgåva med å studere samanhengen mellom preferanserelasjonar og nyttefunksjonar. Her viser det seg at gitt visse krav, er vi sikra at det eksisterer skalérbare nyttefunksjonar som representerer preferansane våre.

The theme of this thesis is bargaining from a game theoretical point of view. We look at John Nash's article "The Bargaining Problem" and try to present Nash's solution in an understandable way. We take a closer look at the mathematics behind the theory and present our own proofs of results that may not be entirely obvious. We look at a bargaining situation between two parties and come to the conclusion that given certain conditions, we find the optimal distribution of goods by maximizing the *product* of the utilities that the two parties gain from the bargaining. Then we apply this in an example, and finish the thesis by studying the connection between preference relations and utility functions. It turns out that given certain requirements, we are sure that there exist scalable utility functions that represent our preferences.

Forord

På eit jobbintervju for 3-4 veker sidan vart eg spurd om korleis eg ville bruke masteroppgåva mi i jobben som lærar. Det eg klarte å svare, var at «eg veit i alle fall korleis det er å ikkje forstå noko». Dette var jo ein ærleg sak, og eg må innrømme at arbeidet med masteroppgåva til tider har vore både utfordrande og frustrerande. På same tid har det vore veldig kjekt, og det har vore spennande å kunne å fordjupe seg i eit tema på ein slik måte. Eg har lært veldig mykje, og har utvikla meg både som matematikar, lærar og person. Dette oppsummerer i grunn dei fem siste åra som student på Lektorprogrammet ganske bra, og sida denne oppgåva markerer dette, er det mange eg vil takke.

Først og fremst vil eg takke min rettleiar, Tom Lindstrøm, for gode innspel, interessante diskusjonar og hyggelege samtaler. Takk for hurtige svar på mail, og takk for at du gjorde meg observant på at eg har «et litt gjerrigere forhold til kommaer enn det Språkrådet har». Eg vil rette ei stor takk til alle mine medstudentar – utan kvarandre er det vel ytterst få av oss som hadde kome oss gjennom det her. Takk for godt samarbeid, og ikkje minst hyggelege stunder både på og utanfor studiane. Ein spesiell takk går til gjengen på 902. Vidare vil eg takke Blindern Rockeswing, og ikkje minst verdens beste 6. divisjonslag, OSI H2, for alle gode stunder. Til slutt vil eg takke kjæresten min, vener og familie for all kjærleik.

Innhald

Figurar

Tabellar

KAPITTEL 1

Introduksjon

Forhandlingar er noko dei fleste av oss har eit forhold til, enten det er pruting ved bilkjøp, lønnsoppgjer eller harde forhandlingar om kven som fortjener det siste kakestykket. Temaet for denne oppgåva er kooperativ forhandling, altså korleis to partar kan samarbeide for å saman finne den beste løysinga (i den forstand at begge partar blir så fornøgde som mogleg).

Meir presist vil vi sjå på dette frå eit spillteoretisk perspektiv, og ta utgangspunkt i artikkelen «The Bargaining Problem» av John Forbes Nash jr. publisert i 1950 [Nas50]. Her presenterer han nokre kriterium han meiner bør ligge til grunn for rasjonelle forhandlingar mellom to partar, og viser ut i frå dette kva løysinga av eit slikt problem må vere. Dette er altså ei statisk og abstrakt tilnærming i den forstand at vi reknar oss fram til ei optimal fordeling. Seinare har det blitt presentert andre løysingar, som legg andre kriterium til grunn, av Kalai & Smorodinsky [KS75] og Kalai [Kal77], uten at desse har hatt same innverknad som Nash si løysing. Ei anna tilnærming er å prøve å modellere sjølve forhandlingsprosessen, som presentert av Rubinstein [Rub82].

1.1 Kva kan du forvente?

Som sagt er det Nash sitt resultat i «The Bargaining Problem» vi vil konsentrere oss om. Dette er ein artikkel med veldig mykje informasjon, og Nash skriv med ei slik overbevising at ein kan få lyst til å godta ein del påstandar utan å heilt skjønne kva som ligg bak. Målet med denne oppgåva er derfor å legge fram Nash sitt hovudresultat på ein forståeleg måte, og sjå nærare på matematikken bak det. Det betyr at det kan vere delar av Nash sin artikkelen vi ikkje vil bry oss så mykje om, medan andre delar vil vi gå djupare inn på. Spesielt vil vi sjå nærare på det vi kallar preferanserelasjonar og nyttefunksjonar, og dette vil vere ein stor del av oppgåva.

Alt dette er ting som har blitt studert og skrive veldig mykje om før, så det vil nok ikkje bli presentert noko banebrytande i denne oppgåva. Men måten eg har jobba med stoffet på gjer at det kan hende enkelte resultat blir framstilt på ein måte som ikkje er gjort før, og som kanskje kan vere meir forståeleg for nokon med tilsvarande bakgrunn som meg. Eg har med utgangspunkt i Nash sin artikkel prøvd å utforske, legge fram og bevise resultat på eigenhand, med unntak av diskusjonar med rettleiar og litt inspirasjon frå *Axiomatic Models of Bargaining* av Alvin E. Roth [Rot79].

I Kapittel 2 vil vi sjå på nokre eksempel og kort introdusere nokre viktige konsept som kan vere fint å ha litt innblikk i før vi tar fatt på hovudresultatet, som vi finn i Kapittel 3. Her presenterer vi Nash si løysing på «The Bargaining Problem» og reknar eit konkret eksempel. I Kapittel 4 utforskar vi teorien bak preferanserelasjonar og nyttefunksjonar, og undersøker om det nødvendigvis er slik at alle preferanserelasjonar er representert ved ein nyttefunksjon. Og vil ein slik nyttefunksjon i tilfelle vere unik? Til slutt oppsummerer vi oppgåva i avslutninga.

KAPITTEL 2

Litt av teorien bak

I dette kapittelet skal vi sjå litt på det som er grunnlaget i Nash sin artikkel. Vi startar med å sjå på eit eksempel, slik at vi veit kva type situasjon det kan dreie seg om: La oss sei Joey og Chandler skal ha filmkveld. Dei skal sjå Die Hard og kose seg med pizza, brus og is. Så korleis bør dei fordele desse goda mellom seg? 50/50 kanskje? Men tenk om Chandler ikkje er så glad i is? Og kanskje Joey elskar pizza! Finnast det ei betre fordeling?

2.1 Preferansar

Eksempelet over vil vi kome tilbake til seinare, men la oss først sjå på det meir generelle tilfellet. Anta at S er ei ikkje-tom mengde, og tenk på elementa i S som gode vi kan velje mellom. Ikkje alle gode er like attraktive, og for å halde orden på preferansane våre innfører vi ein preferanserelasjon $\preceq$ der $t \preceq s$ betyr at s er minst like attraktivt som t. Vi skal anta at $\preceq$ har følgande eigenskaper:

Definisjon 2.1.1. Ein preferanserelasjon $\preceq$ på S tilfredstiller:

(i) $s \preceq s$ for alle $s \in S$.

(ii) Dersom $r \preceq s$ og $s \preceq t$, så $r \preceq t$.

(iii) For alle $s, t \in S$, så har vi enten $s \preceq t$ eller $t \preceq s$.

Dersom $s \preceq t$ og $t \preceq s$, skriv vi $s \sim t$. Dette symboliserer at s og t er like attraktive. Dersom s og t ikkje er like attraktive, skriv vi $s \nsim t$. Vi kan no innføre ein streng preferanserelasjon ved å sette

$$s \prec t \quad \iff \quad s \preceq t \text{ og } s \nsim t.$$

2.2 Nyttefunksjonar

Som ein motivasjon for det som kjem under, kan vi trekke ein analogi til temperatur. La oss sei vi har identiske gjenstandar med ulike mengder termisk energi. Dersom vi tar på to av desse, er det ganske greit å kjenne kor det er varmast, men skal vi samanlikne 40 gjenstandar, kan det fort bli litt rot. Derfor er det fint å kunne måle mengda termisk energi og setje eit tal på det – det vi kallar temperatur. Dette er det vi ønsker å gjere med preferansane våre: Ein funksjon $u\colon S \to \mathbb{R}$ kallast ein *nyttefunksjon* for $\preceq$ dersom $u(s) < u(t)$ viss og berre viss $s \prec t$. Dette medfører at $u(s) = u(t)$ viss og berre viss $s \sim t$, og $s \preceq t$ viss og berre viss $u(s) \leq u(t)$. Legg merke til at denne konstruksjonen kan reverserast: Gitt ein funksjon $u\colon S \to \mathbb{R}$, kan vi definere ein preferanserelasjon $\preceq$ ved

$$s \preceq t \qquad \Longleftrightarrow \qquad u(s) \leq u(t).$$

Slike nyttefunksjonane gir altså uttrykk for kor stor nytte kvart element i S har for ein av partane i ei forhandling. Eit interessant spørsmål å stille seg er om alle preferanserelasjonar har ein nyttefunksjon. Dersom S er ei endeleg mengde er nok svaret ja, men er dette tilfellet dersom S er ei «stor», uendeleg mengde? Slike spørsmål skal vi sjå nærare på i Kapittel 4.

2.3 Total nytte

Vi har sett at vi kan tileigne ein verdi til enkeltelement i ei mengde S. Men i ei forhandling er det jo ein kombinasjon av gode vi vil stå igjen med, og det er kva samla nytte desse goda gir oss, som betyr noko. Det kan derfor vere naturleg å definere ein *total nyttefunksjon* som tileignar ulike kombinasjonar av gode ein viss verdi. Dette kan gjerast på ulike måtar, men det Nash gjer i sin artikkel, er at han seier den totale nytten av ein kombinasjon gode er lik summen av nytten til kvar enkelt gode. La oss prøve å illustrere dette ved å sjå på eit eksempel:

Eksempel 2.3.1. Anta at S er ei endeleg mengde og tenk på $s \in S$ som ulike matrettar. Vi har to personar, A og B, som skal fordele ulike mengder av desse matrettane mellom seg. Desse to personane har naturlig nok ulike preferansar for dei ulike matrettane, og har kvar sin nyttefunksjon, u_A og u_B, som representerer desse preferansane. Vi antar at alle elementa i S har positiv verdi (det kunne jo tenkast at ein av personane er såpass lite glad i ein av rettane at den er eit bryderi å få), og at nytten til dei ulike elementa er uavhengige av kvarandre. Med andre ord blir det ikkje tatt hensyn til kor godt rettane passar i lag. Så skulle ein person få to rettar som passar veldig godt i lag, så medfører ikkje det ein ekstra auke i nytte.

Det første som er verdt å merke seg er at dette er eit eksempel med gode som kan delast opp. Det vil sei at det er mogleg å få til dømes 50 % av gode s og 32 % av gode t. La oss sei S inneheld n element. Då kan vi la ei løysing vere på forma $\mathbf{p} = (p_1, p_2 \ldots, p_n)$, der $p_1, p_2, \ldots, p_n \in [0, 1]$. Her skildrar $p_1, p_2, \ldots, p_n$ kor stor del av dei ulike rettane *person* A får. Då kan vi definere ein total nyttefunksjon $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ved

$$U_A(\mathbf{p}) = p_1 u_A(s_1) + p_2 u_A(s_2) + \ldots + p_n u_A(s_n)$$

for $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$. Dermed vil den totale nytten som B står igjen med for ei løysing $\mathbf{p}$ vere gitt ved

$$U_B(\mathbf{p}) = (1 - p_1)u_B(s_1) + (1 - p_2)u_B(s_2) + \ldots + (1 - p_n)u_B(s_n).$$

I ei forhandling ønsker sjølvsagt både A og B å få så høg total nytte U_A og U_B som mogleg, men problemet er at A og B må dele på goda. Så det store spørsmålet er jo kva burde vi eigentleg prøve å maksimere? Ein første tanke kan vere at vi burde finne den løysinga $\mathbf{p}$ som maksimerer summen av U_A og U_B. Men er det så enkelt? Dette kjem vi straks tilbake til i Kapittel 3.

2.4 Forventa nytte

No har vi sett på eit eksempel med gode som kan delast opp, men korleis blir det dersom vi ser på gode som vi helst vil unngå å dele opp?

Eksempel 2.4.1. Anta at S er ei endeleg mengde med n element, og tenk på $s \in S$ som gjenstandar som to personar A og B skal fordele mellom seg i eit arveoppgjer. Vi antar fortsatt at alle elementa har positiv verdi, og at verdiane er uavhengige av kvarandre. Nyttefunksjonane u_A og u_B representerer preferansane til A og B.

Vi lar ei løysing vere på forma $\mathbf{q} = (q_1, q_2 \ldots, q_n)$, der $q_1, q_2, \ldots, q_n \in \{0, 1\}$. Då kan vi la den totale nytten til A vere gitt ved

$$U_A(\mathbf{q}) = q_1 u_A(s_1) + q_2 u_A(s_2) + \ldots + q_n u_A(s_n)$$

for $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$, og tilsvarande den totale nytten til B vere gitt ved

$$U_B(\mathbf{q}) = q_1 u_B(s_1) + q_2 u_B(s_2) + \ldots + q_n u_B(s_n).$$

Dersom $q_i = 1$, betyr det at A får element s_i, og dersom $q_i = 0$, betyr det at B får element s_i. Men dette kan by på problem: La oss sei vi har nokre krav som ei løysing må oppfylle. Er vi heldige så eksisterer det ei løysing som fordeler alle gjenstandane mellom A og B, og som tilfredstiller krava våre. Dette er tilfellet i eksempelet til Nash, og er nok konstruert slik for enkelheits skyld. Men det kunne jo tenkast at det er tydeleg korleis vi bør fordele dei fleste gjenstandane, men at vi står igjen med ein gjenstand som både A og B fortjener. Korleis «fordeler» vi denne? Ei moglegheit er å bruke myntkast til å avgjere kven som får gjenstanden. Vi ønsker derfor at ei løysing skal kunne representere dette, og vi kan tenke oss eit generalisert myntkast der A har p sjanse for å vinne.

Derfor lar vi ei løysing vere på forma $(p_1, p_2 \ldots, p_n)$, kor $p_1, p_2, \ldots, p_n \in [0, 1]$ og løysinga representerer ei sannsynsfordeling av elementa i S. Vi tenker at A no har ein *forventa nytte* gitt ved

$$U_A(\mathbf{p}) = p_1 u_A(s_1) + p_2 u_A(s_2) + \ldots + p_n u_A(s_n)$$

der $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$. Her er altså tanken at dersom det er gjenstandar som det er klart at A burde få, så er $p = 1$, men om det er mindre klart kven som burde få gjenstanden så er $p \in (0, 1)$. Dersom $p_i = 0{,}8$ betyr altså dette at det er 80 % sjanse for at A stikk av med gjenstand s_i. Tilsvarande er den forventa totale nytten til B gitt ved

$$U_B(\mathbf{p}) = (1 - p_1) u_B(s_1) + (1 - p_2) u_B(s_2) + \ldots + (1 - p_n) u_B(s_n)$$

for $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$. På denne måten er vi sikra å ha løysingar i alle tilfeller.

Vi ser altså at vi kan ha like utrykk for den totale nytten av «kontinuerlege» gode og forventa nytte av «distinkte» gode, men at p_i spelar ulike roller i dei to situasjonane. Frå eit matematisk synspunkt er fordelen ved denne konklusjonen at samlinga av alle moglege forhandlingsresultat $(U_A(\mathbf{p}), U_B(\mathbf{p}))$ blir ei konveks mengde i planet. Dette skal vi utnytte i neste kapittel.

KAPITTEL 3

Nashs teorem

No som vi har fått grunnlaget på plass skal vi prøve å sjå på det som er Nash sitt hovudresultat. Det skal nemnast at vi har henta inspirasjon i frå *Axiomatic Models of Bargaining* [Rot79] i prosessen med å bevise enkelte av resultata i dette kapittelet.

3.1 Nashs teorem

Vi begynner med å la $\mathcal{T}$ vere samlinga av alle konvekse, kompakte delmengder T av $\mathbb{R}^2$ slik at T har punkt i første kvadrant, dvs. slik at

$$T^+ = \{(x, y) \in T : x > 0, y > 0\}$$

er ikkje-tom. Vi tenker på punkta i T som alle moglege resultat av ei forhandling mellom to partar, A og B. Meir presist tenker vi oss at vi har bestemt oss for nyttefunksjonar U_A for A og U_B for B, og at kvart punkt i T er på forma $(U_A(\mathbf{p}), U_B(\mathbf{p}))$ for eit forhandlingsresultat $\mathbf{p}$. Ei mengde T svarar til mengda S i Nash sin artikkel. Denne tolkinga er eigentleg berre ein motivasjon for dei matematiske definisjonane nedanfor, men utan denne motivasjonen gjev ikkje definisjonane særleg meining.

Før vi ser nærare på forhandlingane, kan det vere greit å ta med seg eit reint matematisk resultat, og i beviset av dette resultatet kan det vere fint å ha Lindstrøm [Lin15] si formulering av ekstremalverdisetninga friskt i minne:

Setning 3.1.1 (Ekstremalverdisetninga). *Anta at A er ei lukka og avgrensa, det vil sei kompakt, delmengde av $\mathbb{R}^m$, og at $f : A \to \mathbb{R}$ er kontinuerleg. Då har f minimumspunkt og maksimumspunkt og er følgeleg avgrensa.*

Vårt resultat er som følger:

Setning 3.1.2. *Anta $T \in \mathcal{T}$. Då har funksjonen $f : T^+ \to \mathbb{R}$ definert ved $f(x, y) = xy$ eitt eintydig maksimumspunkt $\mathbf{x}_T = (x_T, y_T)$.*

Bevis. T^+ er kompakt og konveks fordi T er det. Det vil sei at T^+ er ei lukka og avgrensa delmengde av $\mathbb{R}^2$. Sida $f : T^+ \to \mathbb{R}$ er ein kontinuerleg funksjon følger det frå ekstremalverdisetninga at f har eitt eller fleire maksimumspunkt.

Vidare må vi vise at maksimumspunktet er unikt. La oss anta at vi har to punkt $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$ og $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$ slik at $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Sida T^+ er konveks vil midtpunktet mellom desse to punkta òg ligge i T^+. Vi veit at

$x_1 \neq x_2$ eller $y_1 \neq y_2$ fordi $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$. Men sida vi òg veit at $x_1y_1 = x_2y_2$, så ser vi at vi må ha både $x_1 \neq x_2$ og $y_1 \neq y_2$. Så la oss anta at $x_1 < x_2$. Då kan vi skrive x_2 som $x_2 = ax_1$, kor $a \in \mathbb{R}$ og $a > 1$. Dermed har vi at funksjonsverdien i midtpunktet mellom desse to punkta er gitt ved

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right)\right) &= f\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right) \\
&= \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\
&= \frac{1}{4}\left(x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2\right) \\
&= \frac{1}{4}x_1y_1 + \frac{1}{4}(x_1y_2 + x_2y_1) + \frac{1}{4}x_2y_2 \\
&= \frac{1}{4}x_1y_1 + \frac{1}{4}\left(\frac{x_2y_2}{a} + ax_1y_1\right) + \frac{1}{4}x_2y_2 \\
&= \frac{1}{4}x_1y_1 + \frac{1}{4}\left(\frac{x_1y_1}{a} + ax_1y_1\right) + \frac{1}{4}x_1y_1 \\
&= \frac{1}{2}x_1y_1 + \frac{1}{4}x_1y_1\left(\frac{1}{a} + a\right) \\
&> \frac{1}{2}x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_1 \\
&= x_1y_1 = f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)
\end{aligned}$$

kor vi har brukt at $\frac{1}{a} + a > 2$ for alle $a > 1$. Altså kan ikkje $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ vere maksimumspunkt, så maksimumspunktet må vere unikt. ■

No tenker vi oss at vi for $T \in \mathcal{T}$ har eit utpeika punkt $\mathbf{x}^T = (x^T, y^T)$ i T^+ (dette er det som Nash kallar for $c(T)$). Tanken er at dette punktet skal vere resultatet som A og B kjem fram til gjennom rasjonelle forhandlingar når «utfallsrommet» er T. Vi skal innføre nokre vilkår som punkta $\{\mathbf{x}^T\}_{T\in\mathcal{T}}$ skal oppfylle, men først treng vi nokre definisjonar:

Definisjon 3.1.3. Vi seier at T er *symmetrisk* (om linja $y = x$) dersom $(x, y) \in T$ viss og berre viss $(y, x) \in T$.

Definisjon 3.1.4. Dersom $a, b \in \mathbb{R}^+$, lar vi $\phi_{a,b} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vere gitt ved $\phi_{a,b}(x, y) = (ax, by)$.

Intuisjonen er at $\phi_{a,b}(x, y)$ er nytten vi hadde fått om vi hadde brukt dei ekvivalente nyttefunksjonane $\widetilde{U}_A(\mathbf{p}) = aU_A(\mathbf{p})$ og $\widetilde{U}_B(\mathbf{p}) = bU_B(\mathbf{p})$ i staden for U_A og U_B.

Ein naturleg føresetnad for eit resultat $\mathbf{x}^T$ er at det ikkje eksisterer ei anna løysing som gir høgre nytte for ein av partane samtidig som den ikkje reduserer nytten for den andre parten:

Aksiom 3.1.5 (N1: Pareto-optimalitet). Det eksisterer ikkje noko punkt $(x, y) \in T$ slik at $x \geq x^T$ og $y \geq y^T$ med streng ulikskap i minst eitt av tilfella.

Legg merke til at $\mathbf{x}^T$ er Pareto-optimalt viss og berre viss det ikkje finnast noko punkt i T som ligg nordaust for $\mathbf{x}^T$. Det betyr at $\mathbf{x}^T$ må vere eit randpunkt i T.

Aksiom 3.1.6 (N2: Inklusjon). Dersom $S \subseteq T$ og $\mathbf{x}^T \in S$, så er $\mathbf{x}^S = \mathbf{x}^T$.

Nash forklarar denne ved å sei at dersom T er utfallsrommet av moglege resultat, S er ei delmengde av T og vi har $\mathbf{x}^T \in S$, så vil fortsatt $\mathbf{x}^T$ vere det ønska resultatet om vi innskrenkar utfallsrommet til S. Altså er $\mathbf{x}^S = \mathbf{x}^T$. Ein annan måte å sjå på det er at om vi utvidar utfallsrommet frå S til T, så vil vi enten ha det same resultatet som i S, eller så vil vi velje eit av dei nye alternativa.

Aksiom 3.1.7 (N3: Symmetri). Dersom T er symmetrisk om linja $y = x$, så er $x^T = y^T$.

Dette skal representere like forhandlingsferdigheiter. Legg merke til at dette betyr at ei løysing $\mathbf{x}^T$ må ligge på linja $y = x$ når T er symmetrisk.

Aksiom 3.1.8 (N4: Skalainvarians). For alle $a, b \in \mathbb{R}_+$ er $\mathbf{x}^{\phi_{a,b}(T)} = \phi_{a,b}(\mathbf{x}^T)$.

N1-N3 svarar til vilkåra (6)-(8) hos Nash, medan N4 ser det ut som han innfører implisitt som følge av at nyttefunksjonane må vere skalérbare (den er innbakt i setninga «Of course, the graph is only determined up to changes og scale since the utility functions are not completely determined»[Nas50]). At nyttefunksjonane må vere skalérbare er kanskje ikkje heilt opplagt, så dette skal vi sjå nærare på i Kapittel 4.

Motivasjonen for N4 er uansett som følger: Mengda $\phi_{a,b}(T)$ er det «utfallsrommet» vi får om vi betraktar akkurat den same forhandlingssituasjonen som med T, men brukar nyttefunksjonane $\widetilde{U}_A = aU_A$ og $\widetilde{U}_B = bU_B$ i staden for U_A og U_B. Det er derfor rimeleg å tenke seg at $\mathbf{x}^{\phi_{a,b}(T)}$ skal ha same relative posisjon i $\phi_{a,b}(T)$ som $\mathbf{x}^T$ har i T.

Nash meiner altså at rasjonelle forhandlingar bør oppfylle desse fire vilkåra, og det er her andre forskarar har argumentert for å bytte ut enkelte vilkår, og dermed kome fram til andre løysingar [KS75][Kal77].

La oss no anta at resultatet av forhandlingane, $\mathbf{x}^T$, er det punktet kor vi maksimerer produktet av nytten til A og B, nemlig $\mathbf{x}_T$. Er då desse vilkåra oppfylt?

Lemma 3.1.9. *Set* $\mathbf{x}^T = \mathbf{x}_T$ *for alle* $T \in \mathcal{T}$. *Då er N1-N4 oppfylt.*

Bevis.

N1 Vi veit at $\mathbf{x}^T = (x^T, y^T) = \mathbf{x}_T$, altså maksimumspunktet til f. Anta at det eksistere eit punkt $\mathbf{x} = (x, y) \in T$ slik at $x \geq x^T$ og $y \geq y^T$ med streng ulikskap i minst eitt av tilfella. Sida f er definert ved $f(x, y) = xy$ ser vi at $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}^T)$, noko som er absurd, ettersom $\mathbf{x}^T$ er maksimumspunktet til f. Dermed kan ikkje eit slikt punkt $\mathbf{x}$ eksistere.

N2 Dette er oppfylt sida $\mathbf{x}^T$ per definisjon vil vere eit eintydig maksimumspunkt for alle delmengder av T som inneheld $\mathbf{x}^T$.

N3 La T vere symmetrisk om linja $y = x$ og la $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$ vere ei løysing, kor $x_1 \neq y_1$. Då ser vi at $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$ for $x_2 = y_1$ og $y_2 = x_1$ òg er ei løysing. Men frå Setning 3.1.2 veit vi at det berre eksisterer éi slik løysing, så vi må ha at $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ og dermed $x_1 = y_1$. Altså er $x^T = y^T$.

N4 Her vil vi vise at $f\left(\phi_{a,b}\left(\mathbf{x}^T\right)\right) > f(\mathbf{x}')$ for alle $\mathbf{x}' \in \phi_{a,b}(T)$. La oss anta at det finnast ein $\mathbf{x}' \in \phi_{a,b}(T)$ slik at $f(\mathbf{x}') \geq f\left(\phi_{a,b}\left(\mathbf{x}^T\right)\right)$. Då har vi at

$$abx'y' \geq abx^T y^T \iff x'y' \geq x^T y^T,$$

som viser at $\mathbf{x}^T$ ikkje er maksimumspunktet til f. Vi får altså ei motseiing, og dermed har vi at $f\left(\phi_{a,b}\left(\mathbf{x}^T\right)\right) > f(\mathbf{x}')$ for alle $\mathbf{x}' \in \phi_{a,b}(T)$.

■

Spørsmålet er no om vi kan vise at $\mathbf{x}^T = \mathbf{x}_T$ ikkje berre er eit *mogleg* resultat, men faktisk det *einaste* moglege resultatet når N1-N4 gjeld. Det viser det seg at det er:

Teorem 3.1.10 (Nashs teorem). *Anta at N1-N4 er oppfylt. Då er* $\mathbf{x}^T = \mathbf{x}_T$ *for alle* $T \in \mathcal{T}$.

Bevis. Vi vil vise at dersom N1-N4 er oppfylt, og T er ei tilfeldig mengde i $\mathcal{T}$, så er $\mathbf{x}^T = \mathbf{x}_T$. Med andre ord vil vi vise at dersom N1-N4 er oppfylt, så er resultatet av forhandlingane gitt ved det punktet kor vi maksimerer produktet av nytten til A og B. Så la os starte med å la $T \in \mathcal{T}$, $\mathbf{x}_T \in T$ og la kvart punkt i T vere gitt ved nyttefunksjonane U_A og U_B, dvs. at punkta i T er på forma $(U_A(\mathbf{p}), U_B(\mathbf{p}))$ for eit forhandlingsresultat $\mathbf{p}$.

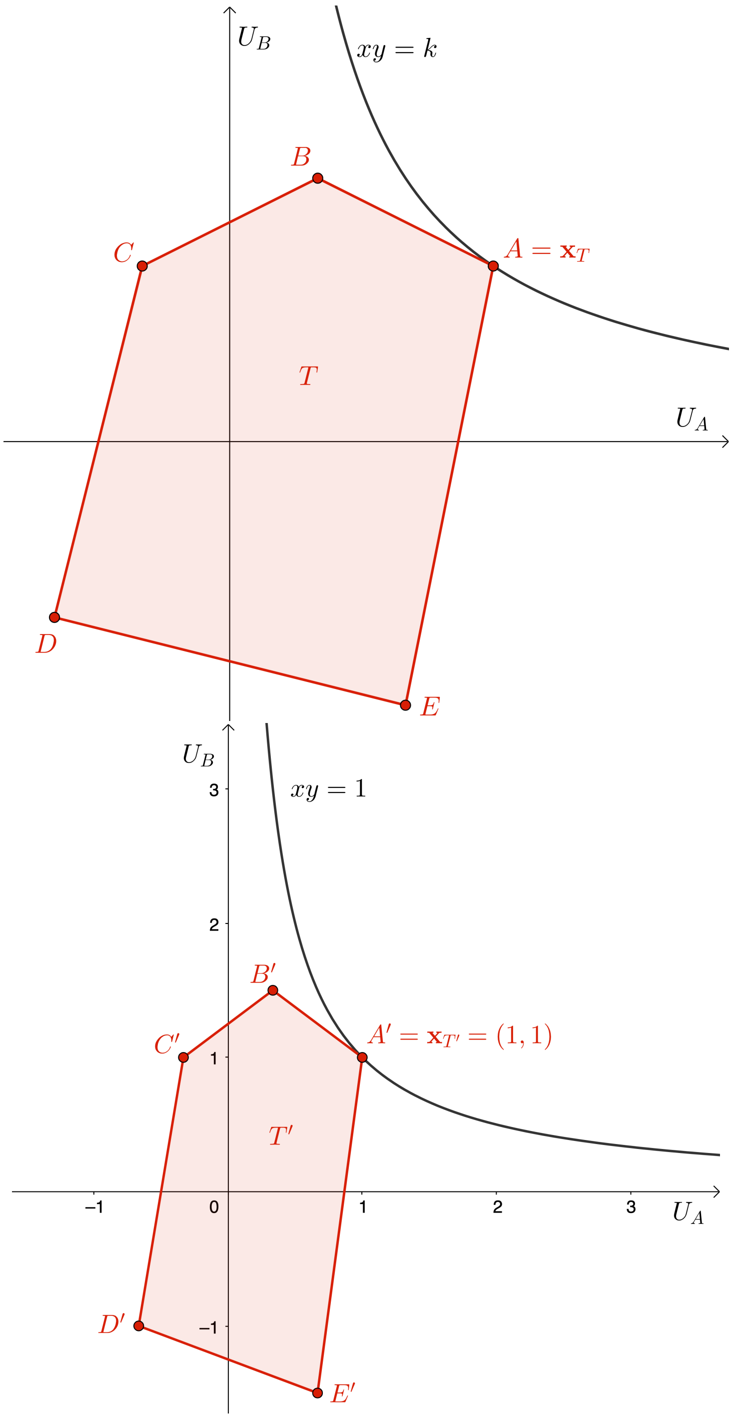
La oss definere mengda $T' = \phi_{a,b}(T)$ gitt ved nyttefunksjonane $U'_A = aU_A$ og $U'_B = bU_B$. Uansett kva verdi $\mathbf{x}_T$ har i T, så kan vi velge a, $b \in \mathbb{R}^+$ slik at vi får $\mathbf{x}_{T'} = (1, 1)$. Vi veit at eit resultat $\mathbf{x}^T$ oppfyller N4 (Aksiom 3.1.8), som betyr at $\mathbf{x}^{\phi_{a,b}(T)}$ skal ha same relative posisjon i $\phi_{a,b}(T)$ som $\mathbf{x}^T$ har i T. Det vil sei at dersom $\mathbf{x}^{T'} = \mathbf{x}_{T'}$, så er $\mathbf{x}^T = \mathbf{x}_T$. Derfor held det altså for oss å vise at når N1-N4 er oppfylt, så er $\mathbf{x}^{T'} = \mathbf{x}_{T'} = (1, 1)$. Sjå Figur 3.1 for illustrasjon.

Før vi prøver på dette tar vi med oss eit viktig poeng, nemlig at mengda T' er avgrensa av linja $x + y = 2$. Med andre ord er $x + y \leq 2$ for alle $\mathbf{x} = (x, y) \in T'$. La oss vise at dette faktisk stemmer. Vi antar at det ikkje stemmer og at det finnast ein $\mathbf{x}^* \in T'$ slik at $x^* + y^* > 2$. Sida T' er konveks, er alle punkt på linjestykket mellom $\mathbf{x}^*$ og $\mathbf{x}_{T'}$ element i T'. Det vil sei alle punkt på forma $\mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{x}_{T'} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^*$ for $\lambda \in (0, 1)$. Dersom vi vel λ stor nok, får vi at $f(\mathbf{x}_1) = x_1 y_1 > 1$ (sjå Avsnitt 3.1), som motseier at $\mathbf{x}_{T'}$ er maksimumspunktet for f. Det viser at $x + y \leq 2$ for alle $\mathbf{x} \in T'$.

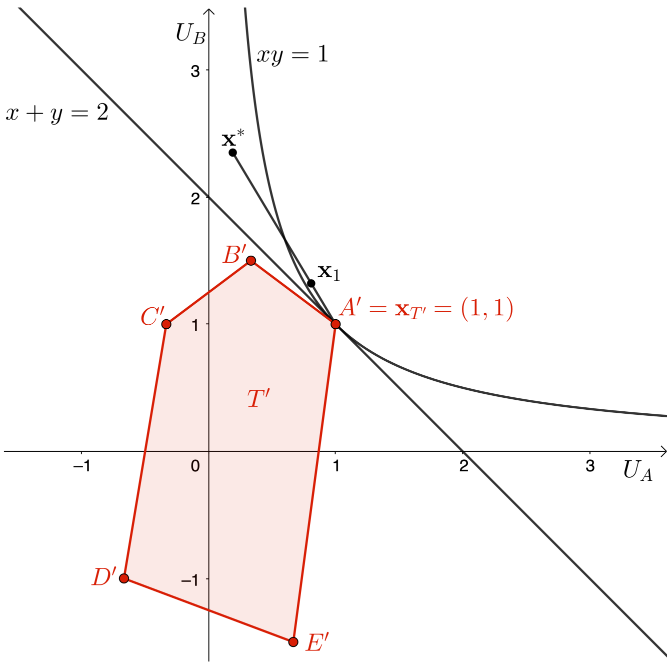
No kan vi gå vidare med det som er trikset i dette beviset. Sida vi veit at T' er konveks, så er T' òg avgrensa. Det betyr at vi kan la T' vere ei delmengde av ein tilstrekkeleg stor firkant F som har ein sidekant som overlappar med linja $x + y = 2$, og som er symmetrisk om linja $x = y$, som i Figur 3.3.

Sida F er ei konveks og kompakt delmengde av $\mathbb{R}^2$ med punkt i første kvadrant, er også $F \in \mathcal{T}$. Dermed må N1 og N3 vere oppfylt for F, som betyr at eit resultat $\mathbf{x}^F$ må vere symmetrisk og pareto-optimalt. Med andre ord må $\mathbf{x}^F$ ligge så langt oppe til høgre på linja $x = y$ som mogleg. Då ser vi av Figur 3.3 at $\mathbf{x}^F = \mathbf{x}_{T'} = (1, 1)$.

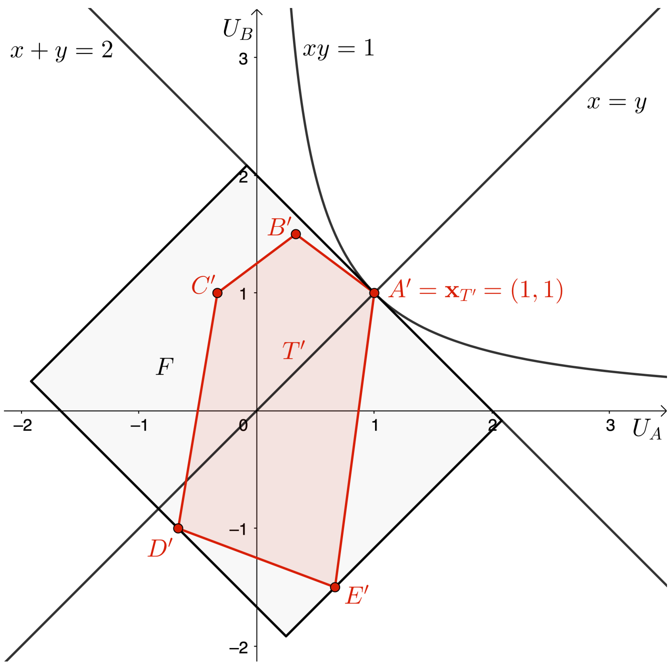
Vidare følger det frå N2, inklusjon, at sida $T' \subseteq F$ så er $\mathbf{x}^{T'} = \mathbf{x}^F = \mathbf{x}_{T'}$. Frå N4, skalainvarians, følger det som tidlegare nemnt at då må $\mathbf{x}^T = \mathbf{x}_T$. Dette fullfører beviset, og viser at dersom N1-N4 er oppfylt, så er $\mathbf{x}^T = \mathbf{x}_T$ einaste moglege løysing. ■



Figur 3.1: Her ser vi korleis punktet $A = \mathbf{x}_T$ i ei vilkårlig mengde $T \in \mathcal{T}$ kan transformerast til punktet $A' = \mathbf{x}_{T'} = (1, 1)$ i T'. Bokstaven k er ein konstant.[Geo22]



Figur 3.2: Figuren viser at T' er avgrensa av linja $x + y = 2$. Dersom T' hadde vore slik at punktet $\mathbf{x}^*$ var i T', hadde vi hatt eit punkt $\mathbf{x}_1 \in T'$ slik at $f(\mathbf{x}_1) > 1$. [Geo22]



Figur 3.3: Figuren viser korleis T' er avgrensa av F, og at vi må ha $\mathbf{x}^{T'} = \mathbf{x}^F = \mathbf{x}_{T'} = (1, 1)$.[Geo22]

Nashs teorem seier altså at dersom vi legg vilkåra N1-N4 til grunn, så er den optimale fordelinga av goder den løysinga som maksimerer produktet av nytten til dei to partane i forhandlingane.

3.2 Eksempel

No som vi har resultatet i Nash sin artikkel på plass, skal vi prøve å anvende det ved å sjå på eit eksempel. Vi går tilbake til eksempelet med Joey og Chandler:

Eksempel 3.2.1. Joey og Chandler skal altså sjå film og fordele goda pizza, brus og is mellom seg. No skal vi med utgangspunkt i preferansane til Joey og Chandler finne den optimale fordelinga ved hjelp av Nashs teorem. Vi lar $S = \{\text{pizza}, \text{brus}, \text{is}\}$ og omtalar Joey som A og Chandler som B. Vi definerer nyttefunksjonane $u_A : S \to \mathbb{R}$ og $u_B : S \to \mathbb{R}$ ved

- $u_A(\text{pizza}) = 6$
- $u_A(\text{brus}) = 2$
- $u_A(\text{is}) = 2$
- $u_B(\text{pizza}) = 3$
- $u_B(\text{brus}) = 5$
- $u_B(\text{is}) = 2.$

Dette kan vi oppsumere i tabellen under:

Gode	**Nytte for Joey**	**Nytte for Chandler**
Pizza	6	3
Brus	2	5
Is	2	2

Tabell 3.1: Nytteverdiane til dei ulike goda for Joey og Chandler.

Vi definerer den totale nyttefunksjonen til A ved

$$U_A(\mathbf{p}) = p_1 u_A(\text{pizza}) + p_2 u_A(\text{brus}) + p_3 u_A(\text{is}),$$

og tilsvarande

$$U_B(\mathbf{p}) = (1 - p_1) u_B(\text{pizza}) + (1 - p_2) u_B(\text{brus}) + (1 - p_3) u_B(\text{is})$$

for B. Vidare lar vi ei løysing vere på forma $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, der $p_1, p_2, p_3 \in [0, 1]$ og utrykker kor stor del A får av høvesvis pizza, brus og is. Til dømes betyr $(1, 1, 0)$ at A får alt av pizza og brus, medan B får heile isen.

I realiteten er det jo kanskje slik at gleden ved å få pizza avtar jo meir pizza ein får, slik at nytten ved det siste stykket er mindre enn ved det første. Det kan òg tenkast at uten å få pizza, så er det ikkje så mykje nytte i brusen, slik at nyttefunksjonen for eit forhandlingsresultat vil avhenge av forholdet mellom dei ulike goda. Dette ser vi vekk i frå og lar nyttefunksjonane til A og B for eit forhandlingsresultat $\mathbf{p}$ vere summen av nytten til dei ulike goda.

La oss prøve å løyse dette ved å bruke Nashs teorem. Vi lar mengda T vere gitt ved

$$T = \{(U_A(\mathbf{p}), U_B(\mathbf{p})) \mid \mathbf{p} \in P\}.$$

Første steg er å «finne» denne mengda og vise at den er konveks og kompakt – sida det er ein føresetnad for å bruke Nashs teorem. Vi ser først på tilfella der A eller B får *heile* pizzaen, brusen og/eller isen. Dersom A får alt, gir det punktet $(U_A(1,1,1), U_B(1,1,1)) = (6+2+2, 0+0+0)) = (10,0)$. På same måte har vi at dersom B får alt, gir det punktet $(0,10)$, og får til dømes A heile pizzaen, medan B får brus og is gir det punktet $(6,7)$. Vi har i alt $2^3 = 8$ slike tilfeller og punkt som er markert i Figur 3.4. Den konvekse innhyllinga T' av desse punkta er mengda av alle konvekse kombinasjonar av punkta [Dah00]. Det vil sei

$$T' = \{\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_8\mathbf{x}_8 \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{8} \lambda_i = 1\}.$$

Frå definisjonen av T har vi at T må vere lik T'. Dette er kanskje ikkje heilt openbert, så la oss sjå litt nærare på det. Lar vi $p_2 = p_3 = 0$, og lar p_1 variere mellom 0 og 1, får vi linjestykket mellom $(0,10)$ og $(6,7)$. I T' tilsvarer dette å la $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ og la λ_1 (og λ_2) variere. På same måte kan vi finne resten av linjestykka mellom ekstremalpunkta i T igjen i T'. Dersom vi lar $p_3 = 0$ og lar p_1 og p_2 variere mellom 0 og 1 får vi den den konvekse innhyllinga av punkta $(0,10)$, $(2,5)$ og $(6,7)$. På tilsvarande måte kan vi finne alle dei andre punkta i T igjen i T', og då har vi òg dekka alle punkta i T'. Dermed er $T = T'$. Dette betyr at T er lukka og avgrensa, og dermed kompakt og konveks – som var ein føresetnad for å bruke Nashs teorem.

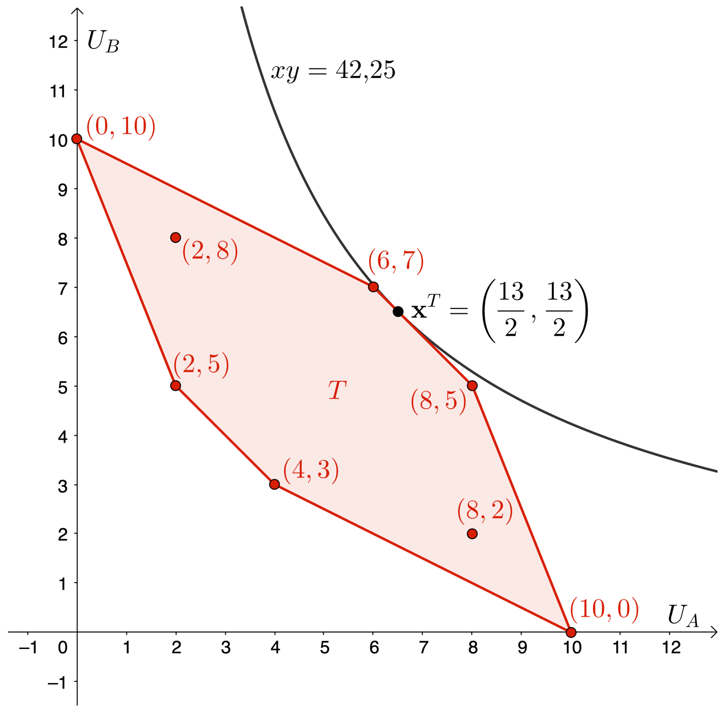
Frå Nashs teorem veit vi at løysinga $\mathbf{x}^T$ er punktet $\mathbf{x}_T \in T$ kor vi maksimerer produktet av nytten til A og B, og vi veit at dette punktet må ligge på randa til T. Frå Figur 3.4 er det tydeleg at dette punktet må ligge på linjestykket mellom $(6,7)$ og $(8,5)$. Då kan vi bruke Lagranges multiplikatormetode [Lin15]. Linja som går gjennom punkta $(6,7)$ og $(8,5)$ er gitt ved $y = -x + 13$, så vi lar $g(x,y) = x + y$ og har $f(x,y) = xy$. Gradientane til f og g er som følger:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \qquad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skriv vi likninga $\nabla f(x,y) = \lambda g(x,y)$ på komponentform, får vi likningsystemet

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \lambda \\ x + y &= 13. \end{aligned}$$

Dette gir $x = y = \frac{13}{2}$ og vi har $\mathbf{x}^T = (\frac{13}{2}, \frac{13}{2})$.



Figur 3.4: Produktet av U_A og U_B har sitt maksimum i punktet $\mathbf{x}^T = (\frac{13}{2}, \frac{13}{2})$.[Geo22]

No gjenstår det å finne løysinga $\mathbf{p}$. Som sagt ligg $\mathbf{x}^T$ på linjestykket mellom $(6,7)$ og $(8,5)$, og meir presist har vi $\mathbf{x}^T = \left(\frac{3}{4}(6,7) + \frac{1}{4}(8,5)\right)$. Punkta $(6,7)$ og $(8,5)$ svarar til løysingane $(1,0,0)$ og $(1,0,1)$, dvs. at $(6,7) = (U_A(1,0,0), U_B(1,0,0))$ og $(8,5) = (U_A(1,0,1), U_B(1,0,1))$. Brukar vi dette ser vi at

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}^T = (\frac{13}{2}, \frac{13}{2}) &= \frac{3}{4}(6,7) + \frac{1}{4}(8,5) \\
&= \frac{3}{4}\left(U_A(1,0,0), U_B(1,0,0)\right) + \frac{1}{4}\left(U_A(1,0,1), U_B(1,0,1)\right) \\
&= \left(U_A\left(\frac{3}{4}, 0, 0\right), U_B\left(\frac{3}{4}, 0, 0\right)\right) + \left(U_A\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\right), U_B\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)\right) \\
&= \left(U_A\left(1, 0, \frac{1}{4}\right), U_B\left(1, 0, \frac{1}{4}\right)\right),
\end{aligned}
$$

som impliserer at $\mathbf{p} = \left(1, 0, \frac{1}{4}\right)$. Med andre ord er løysinga at Joey (A) bør få heile pizzaen og $\frac{1}{4}$ av isen, medan Chandler (B) får heile brusen og $\frac{3}{4}$ av isen. Så kan ein jo lure på kor fornøgde dei eigentleg er med dette resultatet.

KAPITTEL 4

Preferanserelasjonar og nyttefunksjonar

No har vi sett på hovudresultatet i Nash sin artikkel, og ønsker å sjå litt nærare på preferanserelasjonar og nyttefunksjonar. I Kapittel 2 såg vi på nyttefunksjonar som tileigna element i ei mengde S verdiar, før vi gjekk vidare til å setje desse saman til totale nyttefunksjonar. Målet med dette kapittelet er å studere samanhengen mellom preferanserelasjonar på $\mathbb{R}^n$ og nyttefunksjonar, og undersøke om vi kan definere nyttefunksjonar $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ som representerer preferansane våre for ulike kombinasjonar av gode direkte. Kva krav må eventuelt setje på ein preferanserelasjon for å sikre at den kan representerast ved ein slik nyttefunksjon?

4.1 Preferanserelasjonar

Vi startar med å sjå på ein preferanserelasjon $\preceq$ på $\mathbb{R}^n$. Anta at vi har n goder som vi forhandlar om. Vi skal tenke oss at ein vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ symboliserer at vi har u_1 einingar av gode 1, u_2 einingar av gode 2 osv. Her kan u_i vere eit vilkårleg reelt tal; vi kan altså skylde goder. Tanken er at

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) \preceq (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

betyr at vi føretrekker å ha ein kombinasjon av v_1 einingar av gode 1, v_2 einingar av gode 2 osv, framfor å ha kombinasjonen av u_1 einingar av gode 1, u_2 einingar av gode 2 osv.

Vi skal først og fremst anta at $\preceq$ tilfredstiller dei vanlege aksioma for preferanserelasjonar. Dette svarar til det vi gjorde i Kapittel 2:

Definisjon 4.1.1. Ein preferanserelasjon $\preceq$ på $\mathbb{R}^n$ tilfredstiller:

(i) $\mathbf{u} \preceq \mathbf{u}$ for alle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Dersom $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$ og $\mathbf{v} \preceq \mathbf{w}$, så $\mathbf{u} \preceq \mathbf{w}$.

(iii) For alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, så har vi enten $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$ eller $\mathbf{v} \preceq \mathbf{u}$.

Dersom $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$ og $\mathbf{v} \preceq \mathbf{u}$, skriv vi $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$. Dette symboliserer at $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er like attraktive. Dersom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ ikkje er like attraktive, skriv vi $\mathbf{u} \nsim \mathbf{v}$. Som vanleg skriv vi óg $\mathbf{u} \prec \mathbf{v}$ dersom $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$ og $\mathbf{u} \nsim \mathbf{v}$.

Vi skal no legge til nokre ekstra krav på preferanserelasjonen vår:

(iv) Dersom $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v} \preceq \mathbf{w}$, så eksisterer det ein $p \in [0,1]$ slik at $p\mathbf{u}+(1-p)\mathbf{w} \sim \mathbf{v}$.

Legg merke til at her kan p tolkast på to ulike måtar. Den eine måten er at vi kan tenke at p representerer sannsyn, altså at vi har p sjanse for å få $\mathbf{u}$ og $(1-p)$ sjanse for å få $\mathbf{w}$. Den andre måten er å tenke at p seier kor stor del av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{w}$ vi får. Ser vi på goder som ikkje kan delast opp, er det første naturleg, og då seier kravet at dersom ei fordeling av gode $\mathbf{w}$ er minst like attraktiv som $\mathbf{v}$, som igjen er minst like attraktiv som $\mathbf{u}$, så vil ein sjanse p for å få $\mathbf{u}$ og sjanse $(1-p)$ for å få $\mathbf{w}$ vere like attraktivt som å få $\mathbf{v}$. Dette seier altså noko om at dei ulike kombinasjonane av gode kan samanliknast i verdi, og kan tenkast på som eit kontiunitetskrav.

Det neste kravet er eit monotonitetskrav som kan sjå fornuftig ut ved første augekast, men som kanskje ikkje held i alle situasjonar: Det kunne jo tenkast at når vi har fått 10 kg sjokolade, så er vi metta på sjokolade, og at om vi då får 2 kg ekstra så gir ikkje det oss noko ekstra glede. Men dette kravet seier altså at «more is more»:

(v) For alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ har vi at dersom $u_i \leq v_i$ for alle i og $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ så er $\mathbf{u} \prec \mathbf{v}$.

Frå dette følger det eit resultat som kan vere nyttig å ta med seg:

Lemma 4.1.2. *For $u^*, v^* \in \mathbb{R}$ har vi $u^* \leq v^* \iff u^*\mathbf{e} \preceq v^*\mathbf{e}$, der $\mathbf{e} = (1,1,\ldots,1)$.*

Bevis. $\implies$: Dersom $u^* \leq v^*$ følger det direkte frå (v) at $u^*\mathbf{e} \preceq v^*\mathbf{e}$.
$\impliedby$: La $u^*\mathbf{e} \preceq v^*\mathbf{e}$ og anta $v^* < u^*$. Frå (v) følger det at $v^*\mathbf{e} \prec u^*\mathbf{e}$, som motseier at $u^*\mathbf{e} \preceq v^*\mathbf{e}$. Det betyr at antakinga om at $v^* < u^*$ er feil og at $u^* \leq v^*$. ■

Det siste kravet er er eit skaléringskrav som óg kan sjå fornuftig ut, men som nok heller ikkje er oppfylt i alle samanhengar sida nokre gode er meir skalérbare enn andre: Det kan hende vi føretrekk 1 kg lutefisk føre 100 kr, men det er dermed ikkje sagt at vi vil føretrekke 1000 kg lutefisk føre 100 000 kr:

(vi) For alle $s \geq 0$ har vi $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v} \iff s\mathbf{u} \preceq s\mathbf{v}$.

Vår påstand er at dersom desse seks krava (i)-(vi) er oppfylt for ein preferanserelasjon $\preceq$ kan vi vise at det eksister ein nyttefunksjon som representerer $\preceq$. Men la oss først ta med oss eit par konsekvensar av desse krava.

Legg merke til at einingsvektoren $\mathbf{e}_i$ representerer situasjonen der vi har éi eining av gode i og ingenting av dei andre goda.

Lemma 4.1.3. *Vi har $\mathbf{0} \prec \mathbf{e}_i$ for alle i, og for $i = 2, 3, \ldots, n$ finnast det eit positivt tal α_i slik at $\alpha_i\mathbf{e}_1 \sim \mathbf{e}_i$.*

Bevis. At $\mathbf{0} \prec \mathbf{e}_i$ følger direkte frå (v). Vidare har vi enten $\mathbf{0} \prec \mathbf{e}_1 \preceq \mathbf{e}_i$ eller $\mathbf{0} \prec \mathbf{e}_i \preceq \mathbf{e}_1$. Dersom $\mathbf{0} \prec \mathbf{e}_i \preceq \mathbf{e}_1$ følger det frå (iv) at $p\mathbf{0} + (1-p)\mathbf{e}_1 = (1-p)\mathbf{e}_1 \sim \mathbf{e}_i$ for $p \in [0,1]$. Då lar vi $\alpha_i = (1-p)$ og vi er i mål. Dersom $\mathbf{0} \prec \mathbf{e}_1 \preceq \mathbf{e}_i$ følger det frå (iv) at $p\mathbf{0} + (1-p)\mathbf{e}_i = (1-p)\mathbf{e}_i \sim \mathbf{e}_1$ for $p \in [0,1]$.

Då lar vi $\alpha_i = \frac{1}{1-p}$ og det følger frå (vi) at vi kan «multipliserer med α_i på begge sider» og får $\alpha_i(1-p)\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \sim \alpha_i \mathbf{e}_1$. ∎

Dette sikrar for det første at alle goda har positiv verdi, og for det andre at alle goda kan samanliknast i verdi med gode 1. Det finnast altså eit tal einingar av gode 1 som er verdt like mykje som éi eining av gode i.

Det andre resultatet seier at vi for alle fordelingar $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ kan finne ei fordeling $u^*\mathbf{e}$ som er like attraktiv som $\mathbf{u}$, kor vi altså får like mykje av alle goda:

Lemma 4.1.4. *For alle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ finnast det ein $u^* \in \mathbb{R}$ slik at $u^*\mathbf{e} \sim \mathbf{u}$, der $\mathbf{e} = (1, 1, \ldots, 1)$.*

Bevis. La oss sei vi har ein vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ slik at $u_{min} = \inf(u_i)$ og $u_{maks} = \sup(u_i)$. Dersom $u_{min} = u_{maks}$ har vi $u_{min}\mathbf{e} = u_{maks}\mathbf{e} = u^*\mathbf{e} = \mathbf{u}$, og vi er ferdig. Dersom $u_{min} \neq u_{maks}$ har vi frå (v) at $u_{min}\mathbf{e} \prec \mathbf{u} \prec u_{maks}\mathbf{e}$. Då følger det frå (iv) at det eksisterer ein $p \in [0, 1]$ og dermed ein $u^* \in \mathbb{R}$ slik at $pu_{min}\mathbf{e} + (1-p)u_{maks}\mathbf{e} = u^*\mathbf{e} \sim \mathbf{u}$. ∎

Før vi går vidare og ser på eksistensen av nyttefunksjonar vil vi påpeike at ingen av desse krava for $\preceq$ seier noko om kor godt dei ulike goda passar i lag. Det betyr at for $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ har vi at dersom

$$\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}, \text{ så er } \mathbf{u} + \mathbf{w} \preceq \mathbf{v} + \mathbf{w}.$$

Dette har vi ikkje formulert som eit krav, men det følger av korleis (i)-(vi) definerer $\preceq$. Dette er nok heller ikkje heilt fornuftig i alle samanhengar: Sjølv om vi generelt føretrekk karamellsaus føre sennepssaus, kan det likevel vere at vi føretrekk sennepssausen i kombinasjon med gravlaks.

4.2 Eksistens av nyttefunksjonar

La oss først minne om at ein funksjon ρ er ein nyttefunksjon for ein preferanserelasjon $\preceq$ dersom

$$\mathbf{u} \preceq \mathbf{v} \quad \text{viss og berre viss} \quad \rho(\mathbf{u}) \leq \rho(\mathbf{v}).$$

Det vi ønsker å studere er om det for det første eksisterer ein nyttefunksjon for preferanserelasjonen vår $\preceq$, og eventuelt kva eigenskapar ein slik nyttefunksjon må ha.

Teorem 4.2.1.

(1) *Anta at $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ er positive, reelle tal, og at $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er ei lineæravbilding gitt ved*

$$\rho(u_1, u_2, \ldots, u_n) = u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots + \alpha_n u_n.$$

Definer

$$\mathbf{u} \preceq \mathbf{v} \quad \textit{viss og berre viss} \quad \rho(\mathbf{u}) \leq \rho(\mathbf{v}).$$

Då er $\preceq$ ein preferanserelasjon som tilfredstiller krava (i)-(vi) og $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ er tala i Lemma 4.1.3.

(2) *Anta at* $\preceq$ *er ein preferanserelasjon som tilfredstiller krava (i)-(vi) og la* $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ *vere tala i Lemma 4.1.3. Då er* $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *gitt ved*

$$\rho(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \dots + \alpha_n u_n$$

ein nyttefunksjon for $\preceq$*, dvs.*

$$\mathbf{u} \preceq \mathbf{v} \quad \textit{viss og berre viss} \quad \rho(\mathbf{u}) \leq \rho(\mathbf{v}).$$

Bevis.

(1) Anta at vi startar med nyttefunksjonen ρ og definerer relasjonen $\preceq$ til å vere representert ved ρ, dvs. vi definerer $\preceq$ ved

$$\mathbf{u} \preceq \mathbf{v} \quad \text{viss og berre viss} \quad \rho(\mathbf{u}) \leq \rho(\mathbf{v}).$$

La oss sjå om $\preceq$ tilfredstiller krava (i)-(vi):

(i) Vi har $\mathbf{u} \preceq \mathbf{u}$ for alle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ fordi $\rho(\mathbf{u}) \leq \rho(\mathbf{u})$ og ρ representerer $\preceq$.

(ii) Anta $\rho(\mathbf{u}) \leq \rho(\mathbf{v})$ og $\rho(\mathbf{v}) \leq \rho(\mathbf{w})$, som betyr at $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$ og $\mathbf{v} \preceq \mathbf{w}$. Då følger det at $\rho(\mathbf{u}) \leq \rho(\mathbf{w})$, og sida ρ representerer $\preceq$ har vi $\mathbf{u} \preceq \mathbf{w}$.

(iii) Frå definisjonen av ρ har vi at for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ så har vi enten $\rho(\mathbf{u}) \leq \rho(\mathbf{v})$ eller $\rho(\mathbf{v}) \leq \rho(\mathbf{u})$. Sida ρ representerer $\preceq$ følger det at vi har enten $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$ eller $\mathbf{v} \preceq \mathbf{u}$.

(iv) Anta $\rho(\mathbf{u}) \leq \rho(\mathbf{v}) \leq \rho(\mathbf{w})$ og dermed $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v} \preceq \mathbf{w}$. Sida $\rho(\mathbf{u})$, $\rho(\mathbf{v})$ og $\rho(\mathbf{w})$ er tre reelle tal er det klart at det finnast det ein $p \in [0, 1]$ slik at $\rho(\mathbf{v}) = p\rho(\mathbf{u}) + (1-p)\rho(\mathbf{w})$, og sida ρ er ein lineær funksjon følger det at $\rho(\mathbf{v}) = \rho(p\mathbf{u} + (1-p)\mathbf{w})$. Fordi ρ representerer $\preceq$ følger det derfor at (iv) oppfylt.

(v) For alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ har vi at dersom $u_i \leq v_i$ for alle i og $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ så er $\rho(\mathbf{u}) < \rho(\mathbf{v})$. Sida ρ representerer $\preceq$ har vi $\mathbf{u} \prec \mathbf{v}$.

(vi) Vi lar $\rho(\mathbf{u}) \leq \rho(\mathbf{v})$ som betyr at $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$. Vi har $s\rho(\mathbf{u}) \leq s\rho(\mathbf{v})$ for alle $s \geq 0$, og sida ρ representerer $\preceq$ har vi $s\mathbf{u} \preceq s\mathbf{v}$ for alle $s \geq 0$.

Dermed tilfredstiller $\preceq$ krava (i)-(vi). At $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ er tala i Lemma 4.1.3 følger frå at vi har definert $\preceq$ til å vere representert ved ρ, og dermed må $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ vere dei same tala.

(2) La oss prøve å snu om på det: Vi startar med ein relasjon $\preceq$ som tilfredstiller (i)-(vi), og så definerer vi $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ved

$$\rho(v_1, v_2, \dots, v_n) = v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_n v_n$$

der $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ er tala i Lemma 4.1.3. Vil då ρ vere ein nyttefunksjon for $\preceq$, dvs. vil vi nødvendigvis ha

$$\mathbf{u} \preceq \mathbf{v} \quad \text{viss og berre viss} \quad \rho(\mathbf{u}) \leq \rho(\mathbf{v})?$$

Anta $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$. Frå Lemma 4.1.4 veit vi at det eksisterer $u^*, v^* \in \mathbb{R}$ slik at $\mathbf{u} \sim u^*\mathbf{e}$ og $\mathbf{v} \sim v^*\mathbf{e}$, og dermed følger det frå (ii) at $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$ er ekvivalent med $u^*\mathbf{e} \preceq v^*\mathbf{e}$. Vidare har vi frå Lemma 4.1.2 at dette er ekvivalent med $u^* \leq v^*$. Frå definisjonen av ρ ser vi at

$$\begin{aligned} \rho(u^*\mathbf{e}) &= \rho(\mathbf{u}) \qquad \text{og} \qquad & \rho(v^*\mathbf{e}) &= \rho(\mathbf{v}) \\ \iff u^*\left(1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i\right) &= \rho(\mathbf{u}) \qquad \text{og} \qquad & v^*\left(1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i\right) &= \rho(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

som viser at $u^* \leq v^*$ er ekvivalent med $\rho(\mathbf{u}) \leq \rho(\mathbf{v})$. Dette fullfører beviset.

■

Lineæravbildinga ρ er altså ein lineær nyttefunksjon for preferanserelasjonen vår $\preceq$. Men er denne unik, eller eksisterer det andre lineære nyttefunksjonar for $\preceq$?

Teorem 4.2.2. *La ρ vere ein lineær nyttefunksjon for preferanserelasjonen $\preceq$. Dersom $\tilde{\rho}$ er ein annan lineær nyttefunksjon for $\preceq$ har vi*

$$\tilde{\rho} = c\rho$$

for ein positiv konstant c.

Bevis. Dette beviset er i to delar: Først vil vi vise at om $\tilde{\rho}$ er på forma $\tilde{\rho} = c\rho$ så impliserer det at $\tilde{\rho}$ er ein lineær nyttefunksjon for $\preceq$. Deretter vil vi sjekke at dersom $\tilde{\rho}$ er ein lineær nyttefunksjon for $\preceq$ så impliserer det at $\tilde{\rho}$ er på forma $\tilde{\rho} = c\rho$ for positiv konstant c. Vi startar med det første:

$\Longleftarrow$: Vi veit at ρ er ein lineær nyttefunksjon for $\preceq$, dvs. at

$$\mathbf{u} \preceq \mathbf{v} \quad \text{viss og berre viss} \quad \rho(\mathbf{u}) \leq \rho(\mathbf{v}).$$

Dersom $\tilde{\rho}$ er på forma $\tilde{\rho} = c\rho$ har vi

$$\rho(\mathbf{u}) \leq \rho(\mathbf{v}) \iff \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{u})}{c} \leq \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{v})}{c}$$

Sida c er eit positivt tal kan vi multipliserer med c utan å måtte snu på ulikskapen og vi får

$$\mathbf{u} \preceq \mathbf{v} \iff \rho(\mathbf{u}) \leq \rho(\mathbf{v}) \iff \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{u})}{c} \leq \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{v})}{c} \iff \tilde{\rho}(\mathbf{u}) \leq \tilde{\rho}(\mathbf{v})$$

som viser at $\tilde{\rho}$ er ein nyttefunksjon for $\preceq$.

$\Longrightarrow$: Vi veit at ρ er ein lineære nyttefunksjon for $\preceq$, og vil vi vise at dersom $\tilde{\rho}$ er ein lineær nyttefunksjon, så er $\tilde{\rho}$ på forma

$$\tilde{\rho} = c\rho$$

for ein positiv konstant c. Først antar vi altså at ρ og $\tilde{\rho}$ begge er lineære nyttefunksjonar. Vi veit frå Lemma 4.1.4 at for alle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ eksisterer ein $u^* \in \mathbb{R}$ slik at $u^*\mathbf{e} \sim \mathbf{u}$, der $\mathbf{e} = (1, 1, \ldots, 1$. Då følger det at

$$\rho(\mathbf{u}) = \rho(u^*\mathbf{e}) = u^*\rho(\mathbf{e}) \tag{4.1}$$

og

$$\tilde{\rho}(\mathbf{u}) = \tilde{\rho}(u^*\mathbf{e}) = u^*\tilde{\rho}(\mathbf{u}). \tag{4.2}$$

Løyser vi (4.1) for u^* og set inn i (4.2) får vi

$$\tilde{\rho}(\mathbf{u}) = u^*\tilde{\rho}(\mathbf{e}) = \frac{\rho(\mathbf{u})}{\rho(\mathbf{e})}\tilde{\rho}(\mathbf{e}) = \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{e})}{\rho(\mathbf{e})}\rho(\mathbf{u}) = c\rho(\mathbf{u})$$

for $c = \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{e})}{\rho(\mathbf{e})}$. Per definisjon er $\rho(\mathbf{e})$ eit positivt tal. Sida $\mathbf{0} \prec \mathbf{e}$ er

$$\tilde{\rho}(\mathbf{e}) > \tilde{\rho}(\mathbf{0}) = \tilde{\rho}(0\mathbf{0}) = 0\tilde{\rho}(\mathbf{0}) = 0.$$

Dermed følger det at c må vere positivt, og vi er i mål.

■

Dette resultatet viser altså at vi kan skalére nyttefunksjonane våre ved å multipliserer med ein faktor c. Det er akkurat dette vi nytta oss av i beviset av Nashs teorem, Teorem 3.1.10. Sida dette er lineære nyttefunksjonar, vil vi alltid ha at situasjonen der vi får ingen goder, er representert ved at nyttefunksjonen spyttar ut 0, dvs. at nullpunktet ikkje endrar seg. I dei eksempla vi har sett på er dette heilt fint, og det verkar for oss litt rart og unødvendig å til dømes skulle legge på ein konstant i nyttefunksjonen vår. Men i nokre tilfeller kan det vere meir naturleg å sjå på nyttefunksjonar med eit anna nullpunkt enn $\mathbf{0}$. Eit slikt tilfelle kan til dømes vere eksempelet i Nash sin artikkel, altså ein situasjon kor vi startar forhandlingane med ei behaldning $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ av dei ulike goda. Då kan det vere naturleg bruke nyttefunksjonen

$$\tau(u_1, u_2, \ldots, u_n) = u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n - (\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n),$$

som fortel oss kor stor *auke* i goder vi har fått. Dette gir oss ein nyttefunksjon på forma $\tau(\mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}) + d$; altså ein affin nyttefunksjon. Å legge til ein konstant d endrar ikkje rekkefølga ρ rangerer dei ulike kombinasjonane av gode på, og vi vil fortsatt ha

$$\mathbf{u} \preceq \mathbf{v} \quad \text{viss og berre viss} \quad \tau(\mathbf{u}) \leq \tau(\mathbf{v}).$$

Ein affin nyttefunksjon er per definisjon på forma $\tau(\mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}) + a$ der ρ er ein lineær nyttefunksjon og a er ein konstant. Dersom vi lar $\tilde{\tau}(\mathbf{u}) = \tilde{\rho}(\mathbf{u}) + b$ vere ein annan affin nyttefunksjon, så vil den representerer same preferanserelasjon som $\tilde{\rho}$, og dermed same preferanserelasjon som ρ og τ. Frå Teorem 4.2.2 veit vi at $\tilde{\rho} = c\rho$ for positiv konstant c, og set vi dette inn i uttrykket for $\tilde{\tau}$ får vi

$$\tilde{\tau}(\mathbf{u}) = \tilde{\rho}(\mathbf{u}) + b = c\rho(\mathbf{u}) + b = c(\tau(\mathbf{u}) - a) + b = c\tau(\mathbf{u}) + d$$

der $d = b - ca$. Dette viser at $\tilde{\tau}$ er ein affin funksjon av τ, og vi kan formulere følgande resultat:

Korollar 4.2.3.

(1) *Anta at τ er ein affin nyttefunksjon som representerer preferanserelasjonen $\preceq$. La $\tilde{\tau}$ vere ein funksjonen gitt ved*

$$\tilde{\tau}(\mathbf{u}) = c\tau(\mathbf{u}) + d,$$

kor c og d er konstantar og $c > 0$. Då er $\tilde{\tau}$ ein affin nyttefunksjon for den same preferanserelasjonen $\preceq$.

(2) *Dersom vi i staden for antar at τ og $\tilde{\tau}$ er to affine nyttefunksjonar for den same preferanserelasjonen $\preceq$, så eksisterer det konstantar c, d, $c > 0$, slik at*

$$\tilde{\tau}(\mathbf{u}) = c\tau(\mathbf{u}) + d$$

for alle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

Dette viser altså at nyttefunksjonane er skalérbare: Gitt ein nyttefunksjon kan vi skalere den og flytte nullpunktet ved å legge til ein konstant. Om vi tenker tilbake på analogien vår om temperatur, så representerer nyttefunksjonane våre den same informasjonen om preferansane til ein part i ei forhandling på same måte som Celsius og Fahrenheit representerer den same informasjonen om temperaturen til eit objekt.

Før vi kom fram til dette kunne ein jo tenke seg at verdiane til nyttefunksjonane hadde noko å sei for kva part som fortjener mest i ei forhandling. Men det har altså ingenting å sei om nytten for pizza, brus og is for Joey er høvesvis 6, 2 og 2 eller 600, 200 og 200. Nyttefunksjonane seier berre noko om kvar enkelt person sine preferansar for dei ulike goda, og korleis personen verdset desse i forhold til kvarandre – ikkje noko om kven som fortjener størst del av goda.

Med bakgrunn i dette er det plutseleg meir opplagt at tanken om å maksimere *summen* av nytten til begge partar i ei forhandling ikkje gir mykje meining, og Nash si løysing verkar meir naturleg.

KAPITTEL 5

Avslutning

Målet med denne oppgåva var å legge fram Nash sitt hovudresultat i artikkelen «The Bargaining Problem» på ein forståeleg måte, og sjå nærare på delar av matematikken bak dette [Nas50].

Vi starta derfor med å sjå på korleis vi kan innføre ein preferanserelasjon $\preceq$ for å halde orden på kva gode som er mest attraktive. Vidare definerte vi kva ein nyttefunkjon for $\preceq$ er for noko, og såg korleis vi kan konstruere ein total nyttefunksjon som gir uttrykk for den totale nytten ein kombinasjon av gode gir oss. Til slutt i Kapittel 2 såg vi korleis vi kan konstruere ein nyttefunksjon som gir uttrykk for forventa nytte. Dette er nyttig for å sikre oss løysingar i alle tilfelle når vi ser på gode som ikkje kan delast opp.

I Kapittel 3 presenterte vi først fire vilkår som resultatet av rasjonelle forhandlingar mellom to partar må oppfylle: pareto-optimalitet, inklusjon, symmetri og skalainvarians. Deretter viste vi at dersom desse fire vilkåra er oppfylt, så vil den optimale løysinga av forhandlingane maksimere *produktet* av nytten til dei to partane. Dette formulerte vi som Nashs teorem (Teorem 3.1.10). Til slutt i Kapittel 3 rekna vi på eit eksempel og fann den optimale fordelinga av gode mellom to partar.

I Kapittel 4 studerte vi samanhengen mellom preferanserelasjonar på $\mathbb{R}^n$ og nyttefunksjonar. Vi såg at dersom ein preferanserelasjon $\preceq$ på $\mathbb{R}^n$ oppfyller visse krav, eksisterer det ein lineær nyttefunksjon $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ som representerer $\preceq$, og som direkte gir uttryk for den totale nytten av ein kombinasjon av gode. Vidare såg vi at denne nyttefunksjonen er skalérbar, dvs. at vi kan skalere den og flytte nullpunktet slik at vi får nye nyttefunksjonar som representerer same preferanserelasjon.

Vidare kunne det vore interessant å studere dei alternative løysingane presentert av Kalai & Smorodinsky [KS75] og Kalai [Kal77], og sett på korleis det her blir argumentert for andre vilkår. Blir det store forskjellar dersom vi finn dei ulike løysingane av konkrete eksempel? Ein annan ting som kunne vore interessant er å sjå på Rubinstein [Rub82] si meir dynamiske tilnærming, og eventuelt gjort forsøk for å sjå kva løysingar som stemmer best overens med praksis.

Bibliografi

[Dah00] Dahl, G. *An introduction to convexity.* eng. Bd. 279. Research report (Universitetet i Oslo. Institutt for informatikk : trykt utg.) Oslo: University of Oslo, Department of Informatics, 2000.

[Geo22] GeoGebra GmbH. *GeoGebra.* Versjon 6.0.703.0. 26. apr. 2022. URL: https://www.geogebra.org/.

[Kal77] Kalai, E. «Proportional solutions to bargaining situations: interpersonal utility comparisons». I: *Econometrica* årg. 45, nr. 7 (1977), s. 1623–1630. URL: https://doi.org/10.2307/1913954.

[KS75] Kalai, E. og Smorodinsky, M. «Other solutions to Nash's bargaining problem». I: *Econometrica* årg. 43 (1975), s. 513–518. URL: https://doi.org/10.2307/1914280.

[Lin15] Lindstrøm, T. L. *Flervariabel analyse med lineær algebra.* nob. 2. utg. Oslo: Gyldendal akademisk, 2015.

[Nas50] Nash Jr., J. F. «The bargaining problem». I: *Econometrica* årg. 18 (1950), s. 155–162. URL: https://doi.org/10.2307/1907266.

[Rot79] Roth, A. E. *Axiomatic Models of Bargaining.* Red. av Beckmann, M. og Künzi, H. P. Bd. 170. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg New York, 1979. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-51570-5 (sjekka 13.05.2022).

[Rub82] Rubinstein, A. «Perfect equilibrium in a bargaining model». I: *Econometrica* årg. 50, nr. 1 (1982), s. 97–109. URL: https://doi.org/10.2307/1912531.