UiO : Matematisk institutt
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Hex

Stort og smått om Hex og andre matematiske spill

Maren P. S. Walderhaug

Masteroppgave, våren 2022

Denne masteroppgaven er levert inn som en del av programspesialiseringen *Matematikk* under *Lektorprogrammet* ved Universitetet i Oslo. Oppgaven er normert til 30 studiepoeng.

Forsiden viser et utsnitt av rotsystemet til den eksepsjonelle liegruppen E_8, projisert ned i planet. Liegrupper ble oppfunnet av den norske matematikeren Sophus Lie (1842–1899) for å uttrykke symmetriene til differensiallikninger og spiller i dag en sentral rolle i flere deler av matematikken.

Sammendrag

Denne oppgaven gir et overblikk over diverse egenskaper ved det abstrakte matematiske spillet Hex. I oppgaven presenterer vi historien bak spillet, og spillets to oppfinnere Piet Hein og John Nash. Vi skal innføre generell spillteori og se på strategi ved bruk av spilltrær. Vi skal også se på konkrete strategier i Hex, og se på analysemetoder som brukes for å beregne strategier. Vi skal se på Hex i et grafperspektiv, og utforske de geometriske egenskapene ved spillbrettet. Hex-teoremet, som sier at det alltid er nøyaktig én vinner i Hex og at det aldri kan bli uavgjort, skal bevises og relateres til Brouwers fikspunktteorem. Videre skal vi se på Hex som et mengdefargeleggingsspill og bevise at det aldri er ufordelaktig med en vennlig brikke på brettet.

Anerkjennelse

Jeg ønsker å takke min veileder Arne Bernhard Sletsjøe. Han har gitt svært god støtte, vist engasjement og interesse for oppgaven min og gitt meg mange gode tips på veien. Jeg ønsker også å takke matematisk institutt ved UiO. Sist men ikke minst ønsker jeg å takke familien min og alle rundt meg som har støttet meg under skriveprosessen, spesielt min søster Maiken Walderhaug som har lest korrektur.

Innhold

Figurer

KAPITTEL 1

Innledning

I denne oppgaven skal vi ta et dypdykk ned i det pooulære matematiske brettspillet Hex. Vi skal presentere historien bak spillet, se på konkrete strategier og bevise mange spennende matematiske egenskaper ved spillet. I tillegg skal vi undersøke noen andre abstrakte matematiske spill. Hex er et svært interessant spill. Det er både lett å forstå, lett å spille, og det kan spilles hvor som helst. Man kan spille Hex så lenge man har noe å skrive med og noe å skrive på. Likevel er spillet i aller høyeste grad matematisk. Man behøver ikke å kjenne til de matematiske idéene bak Hex for å kunne spille, men de er likevel interessante å undersøke. Piet Hein, poet og oppfinneren av Hex, skrev

> *"I skolen terper man de små tabeller. I livet lærer man at de ikke gjelder."*
>
> — Piet Hein

Figurer i denne oppgaven er laget med [Til] hvis ingenting annet er spesifisert.

1.1 Disposisjon

Kapittel 1: Innledning En kort introduksjon til oppgaven.

Kapittel 2: Hex - En introduksjon Regler i Hex, utforming av brettet, historien bak Hex og noen egenskaper ved spillet.

Kapittel 3: Spillteori Innføring i spillteori og bruk av spilltrær for å finne vinnerstrategier

Kapittel 4: Analyse Beskrivelse av noen analysemetoder som brukes for å finne vinnerstrategier.

Kapittel 5: Strategi Introduserer noen konkrete strategier i Hex.

Kapittel 6: Geometri + grafspill Betrakter Hex i et grafperspektiv, undersøker hvilke egenskaper ved brettet som gjør at Hex ikke kan ende uavgjort og ser på noen flislegginger.

Kapittel 7: Hex-teoremet og Brouwers fikspunktteorem Beskriver

Hex-teoremet og viser at det er ekvivalent med Brouwers fikspunktteorem.

Kapittel 8: Andre matematiske spill Beskrivelse av noen andre tilkoblingsspill samt noen andre versjoner av Hex.

Kapittel 9: Mengdefargeleggingsspill Betrakter Hex som et mengdefargeleggingsspill, og beviser at det aldri er ufordelaktig med en vennlig brikke på brettet.

Tillegg A: Strategi for 4×4 Hex En fullstendig strategi for et Hexbrett av størrelse 4×4.

KAPITTEL 2

Hex - En introduksjon

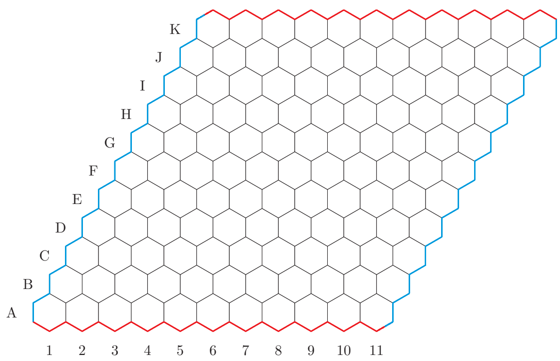
2.1 Regler

Hex spilles på et rombeformet brett. Brettet består av $n \times m$ regulære heksagonale ruter. Som regel er $n = m$, og 11×11 er det mest vanlige spillbrettet. To spillere spiller mot hverandre, og bytter på å spille på sin tur. Vi kan kalle spillerne for rød og blå. På sin tur skal spillerne plassere en brikke i sin farge på en ledig rute på brettet. Hver spiller eier to motstående kanter av brettet. Spillet avsluttes når én av spillerne har klart å koble sine to sider med en sammenhengende kjede av brikker farget i sin farge. Denne spilleren vinner.

Vanligvis spilles Hex med en åpningsregel som kalles bytteregelen. Bytteregelen går ut på den spiller 2 har muligheten til å bytte farge med spiller 1 etter at den spiller 1 har gjort første trekk. Denne regelen har blitt implementert for å gi spiller 2 en mulighet til å vinne, da det er kjent at spiller nummer en alltid har en vinnerstrategi.

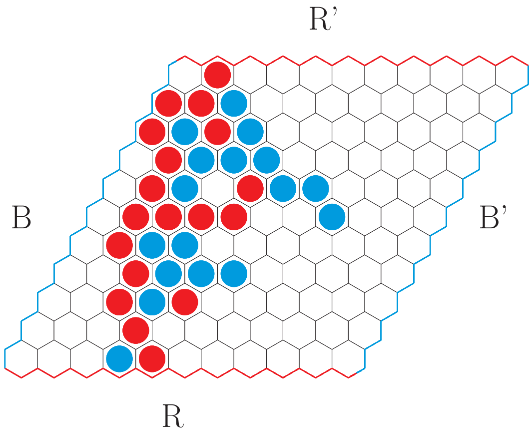
2.2 Spillets design

Vi navngir cellene på brettet slik som i sjakk. Raden til en celle kan beskrives ved hjelp av en bokstav og kolonnen til en celle kan beskrives ved hjelp av et tall. Figur 2.1 illustrerer et 11×11 Hex-brett.



Figur 2.1: 11×11 Hex-brett

Spilleren med de røde brikkene vinner dersom hun klarer å lage en sammenhengende kjede med brikker fra den ene røde kanten til den andre. Figur 2.2 viser et eksempel der rød vinner. Figuren illustrerer også at vi kan navngi de røde og de blå kantene av brettet som R, R', B og B'.



Figur 2.2: Et eksempel der rød vinner i 11×11 Hex

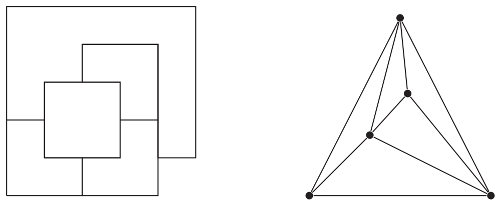
2.3 Historien bak Hex

Oppfinnelsen av Hex kan tillegges to personer; Piet Hein og John Nash. Både Hein og Nash fant opp Hex uavhengig av hverandre, i alle fall i følge Nash selv. Det var Piet Hein som, tidlig på 1940-tallet, først kom på idéen til spillet. Piet Hein var en dansk matematiker, oppfinner, poet og ingeniør. Han er aller mest kjent for sine Gruk. Gruk er en diktform oppfunnet av Hein som formlider livsvisdom. Ordet Gruk er en blanding av ordene "grin" og "suk", som på norsk oversettes til "latter og sukk". Han utga disse diktene under pseudonymet Kumbel Kumbell via den danske avisen Politiken [Lom22]. Etter okkupasjonen av Norge og Danmark 9.april 1940 begynte den danske avisen Politiken å utgi disse diktene. Diktene var politiske kommentarer og beskrev okkupantene slik at dansker kunne forstå det, men ikke tyskerne [HT19, s. 8]. Vi så et eksempel på ett av Hein sine gruk i innledningen.

Hein hadde mange interesser, og studerte blant annet ingeniørfag og filosofi. Under et foredrag av Werner Heisenberg i 1932 skulle Hein ha kjedet seg så mye at han heller brukte tiden på å designe somakuben [HT19, s. 3]. Somakuben er et geometrisk puslespill bestående av brikker med ulike former, som kan passe sammen til å danne en $3 \times 3 \times 3$ kube. Somakuben ble populær, noe som førte til at Hein ble inspirert til å designe et nytt spill. Dette ble hex.

Hex ble for første gang introdusert for offentligheten av den danske avisen Politiken 26.desember 1942. På denne tiden ble Hex kalt for Polygon. Hein hadde i flere år tenkt på idéen om å lage et spill som Hex. Det tok han likevel flere år før han fullførte designet. Idéen hans var et brett bestående av to hærstyrker, der hver hærstyrke skulle okkupere to motstående sider av brettet. Problemet var at dersom man spilte på et brett med kvadratiske ruter, så kunne arméene blokkere hverandre. Det var ikke før i september 1942 at han innså at ved å la rutene være heksagonale, så ville han unngå problemet med at spillerne kunne blokkere hverandre [HT19, s. 10].

Hein sin idée bak Hex ble inspirert av firefargeproblemet, på engelsk kalt "the four color problem". Firefargeproblemet har blitt undersøkt, og forsøkt bevist i mer enn 100 år etter at problemstillingen først ble introdusert. Firefargeproblemet er datert til 1852, da den sør-afrikanske matematikeren Francis Guthrie foreslo følgende: Anta at du har et kart i planet bestående av ulike regioner. Regionene skal fargelegges slik at to naboregioner (regioner som deler en kant) tildeles forskjellig farge. Kan man fargelegge et slikt kart ved å bruke maksimalt fire farger? Det ble antatt i mange år at denne påstanden var sann, men å produsere et bevis for dette ble ikke muliggjort før i 1976 ved hjelp av en datamaskin. Faktisk så var beviset av firefargeproblemet det første beviset utført ved hjelp av en datamaskin [HT19, s. 6].

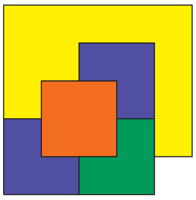


(i) (ii)

Figur 2.3: Kan dette fargelegges med bare fire farger?

I Figur 2.3 (i) ser vi et kart bestående av fem regioner. Er det er mulig å fargelegge regionene på dette kartet med kun fire forskjellige farger slik at naboregioner har ulik farge? Svaret er ja, som vi ser i Figur 2.4. Vi ser at tre av regionene på kartet (de som er farget gul, oransje og grønn) deler en kant med alle de andre regioene. To av regionene deler kun en kant med tre av de andre regionene, og kan dermed fargelegges med samme farge. Poenget er at det er umulig å konstruere et kart i planet slik at alle fem regioner deler en kant med hverandre. Dette prinsippet kalles "the five princes problem", eller femprinserproblemet [HT19, s. 6]. Anta at fem prinser eier hver sin region i et landområde. De ønsker å dele regionene inn slik at hver av prinsene sin region grenser til hver av de andre prinsene sine regioner. Men dette er ikke mulig. Vi kan forstå dette intuitivt ved å se på Figur 2.4. Dersom de to blå regioenen skulle ha grenset til hverandre måtte en av dem ha krysset over den gule regionen. Men da ville ikke den gule regionen ha grenset til den grønne regionen.

Vi kan også forklare dette ved å tegne den duale grafen til kartet. Den duale grafen til et kart er en graf som har et hjørne for hvert område på kartet, og kanter som forbinder hjørner der områdene grenser til hverandre. Figur 2.4 (ii) viser den duale grafen til kartet i Figur 2.4 (i). Den duale grafen får vi ved å plassere noder i hvert område av kartet, og tegne kanter mellom noder der to områder grenser til hverandre. Dersom den duale grafen består av fem noder eller mer er det ikke mulig å tegne kanter som forbinder alle nodene til hverandre uten at minst to kanter skjærer hverandre. Dette er det topologiske prinsippet som Piet Hein baserte Hex på. Nemlig det at to linjer i en firkant, som hver



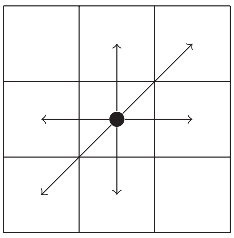
Figur 2.4: Kartet i Figur 2.3 fargelagt med bare fire farger

forbinder et par med motstående sider, må krysse hverandre [Hei42]. Men på hvilken måte er dette relatert til Hex? Som vi senere skal bevise i Kapittel 7, så er det kun én av spillerne som kan koble sine to sider av Hex-brettet. For dersom det både fins en rød og en blå sti som forbinder to parvis motstående sider, så må disse stiene skjære hverandre i en rute på brettet. Dette er umulig siden kun én av spillerne kan ha en brikke i sin farge på denne ruten.

I 1948 oppfant John Nash også Hex, i følge han selv helt uavhengig av Piet Hein. Nash sitt design bestod av et rutenett med firkanter. Brikkene på brettet kan kobles sammen til en sti dersom to firkanter deler en felles kant, eller dersom de er på samme positive diagonal. David Gale, en phd-student ved Princeton, utviklet dermed Hex med sekskanter utifra Nash sin beskrivelse [HT19, s. 94]. Vi skal i Kapittel 7 se videre på Gale sine bidrag til Hex-teorien.

Figur 2.5 illustrerer hvordan Nash designet sitt Hex-brett. Hvis man plasserer en brikke i midten av brettet kan man bygge en sti oppover, nedover, til høyre og venstre og langs den positive diagonalen.

Nash sitt Hex-brett er ekvivalent med Hex-brettet bestående av heksagonale celler. Dette skal vi se nærmere på i senere kapitler. Poenget er å se på Hex-brettet som en graf, og da spiller det ingen rolle hvilken form cellene på brettet har. Det har lenge vært kjent at den første spilleren har en vinnerstrategi i Hex. Både Hein og Nash visste dette, og i Kapittel 3 skal vi se på Nash sitt bevis for at første spiller har en vinnerstrategi i Hex.



Figur 2.5: Illustrasjon av hvordan brikkker på Nash sitt brett kan kobles.

2.4 Egenskaper ved Hex

Hex er et interessant spill for matematikere da det innehar mange spennende egenskaper som kan utforskes og forklares matematisk. Som vi skal se på senere så kan ikke Hex ende uavgjort. Dette gjør spillet mer interessant matematisk enn for eksempel Tre på rad, der begge spillerne kan blokkere hverandre og hvis begge spillerne spiller perfekt så vil det alltid ende uavgjort. I Hex er det alltid garantert vinst for én av spillerne. Vi skal også senere bevise at i vanlig Hex så er det første spiller som har en vinnerstrategi. Dette betyr at ved perfekt spill så vil den første spilleren alltid vinne. Likevel har man ikke funnet en fullstendig strategi for et Hex-brett av størrelse $n \times n$ for alle n. Hittil har man funnet alle åpningstrekk som er en del av en vinnerstrategi for spiller 1 for brett av størrelse 9×9 og mindre. To åpningstrekk for et brett av størrelse 10×10 har også blitt løst [HW17, s. 222]. Det er dermed likevel interessant å spille på store brett, da man ikke er kjent med hvordan første spiller kan garantere vinst (selv om man vet at hun kan det).

En måte å beskrive komplelsiteten til kombinatoriske spill slik som Hex er å se på om de er det som kalles PSPACE-complete (komplette i PSPACE). PSPACE er mengden av alle problemer som kan løses ved hjelp av en Turingmaskin som bruker lagringsplass av polynomial størrelse. Et problem er komplett i PSPACE dersom det fins en algoritme for å løse problemet som også kan brukes for løse alle andre problemer i PSPACE [ET76, s. 2]. Even og Tarjan (1979) beviser i sin artikkel at Hex er komplett i PSPACE, noe som betyr at dersom man hadde funnet en algoritme som beskriver en fullstendig Hex-strategi, så kan alle problemer i PSPACE også løses ved hjelp av denne algoritmen. Vi skal ikke gå mer inn i dybden i akkurat dette, men poenget er at det å finne en vinnerstrategi for Hex er vanskelig. Det impliserer dessuten at det å skulle finne en algoritme i polynomtid som kan løse en vilkårlig Hex-posisjon er veldig lite sannsynlig [HR06, s. 2520].

KAPITTEL 3

Spillteori

3.1 Teori

Definisjon 3.1.1 ([Aum20, s. 8])**.** Et spill G består av

- En mengde C med spillere
- En mengde med strategier S^{c_i} for hver spiller $c_i \in C$
- En utbyttefunksjon $f^{c_i}\colon S^{c_1} \times S^{c_2} \times \ldots \times S^{c_n} \to \mathbb{R}$

Utbyttefunksjonen f sier noe om hvor god posisjonen til en spiller er. Desto høyere utbytteverdien er for en spiller, desto bedre posisjon har spilleren. En strategi er en fullstendig plan for den ene spilleren for hvordan han skal spille spillet. Strategien baserer seg på hvilke trekk som motstanderen/motstanderene potensielt kan gjøre. I neste delkapittel skal vi se på spilltrær, som beskriver fullstendige strategier for spillerne.

Definisjon 3.1.2 ([Aum20, s. 9])**.** Et tospiller-nullsumspill er et spill med to spillere der summen av utbyttefunksjonene for alle strategipar er 0. Vi har altså at for to strategier $s_1 \in S^{c_1}$ og $s_2 \in S^{c_2}$ så er $f^{c_1}(s_1, s_2) + f^{c_2}(s_1, s_2) = 0$. Dette impliserer at den ene spilleren kan vinne bare dersom den andre spilleren taper.

Hex er et eksempel på et nullsumspill for to spillere. Andre eksempler på nullsumspill er sjakk, bridge og poker (det er mulig å definere et nullsumspill for mer enn to spillere). For et nullsumspill med to spillere kan vi la $f^{c_i}\colon S^{c_1} \times \ldots \times S^{c_n} \to \{-1, 0, 1\}$. Hvis utbytteverdien for spiller c er 1 betyr det at spilleren har en vinnende posisjon, hvis den er 0 er det uavgjort og hvis den er -1 har spilleren en tapende posisjon.

Definisjon 3.1.3. Et spill med perfekt informasjon er et spill der spillerne bytter på å gjøre et trekk, og hver spiller er fullstendig informert om alle tidligere trekk som har blitt gjort.

Eksempler på spill med perfekt informasjon er sjakk, Hex og Go. Poker er et eksempel på et spill som ikke har perfekt informasjon, siden noe av informasjonen i spillet er ukjent for spillerne. Nå kan vi definere en klasse med spill som har perfekt informasjon kalt kombinatoriske spill. Kombinatoriske spill er spill for to spillere med perfekt informasjon, uten sjansetrekk og lovlige trekk bestemmes utifra spesifikke regler. Konvensjon for normalt spill er at spillet avsluttes når den ene spilleren ikke kan gjøre noen flere trekk. Denne spilleren vil tape. Vi kan også definere misèrespill, der konvensjon er spilleren som ikke kan gjøre noen flere trekk vinner. Misèreversjonen av Hex kalles for Rex (Reverse Hex), og vi skal se nærmere på dette i Kapittel 8. I Rex vil spilleren som klarer å tvinge motstanderen til å koble sammen sine sider vinne.

Definisjon 3.1.4. Et upartisk spill er et kombinatorisk spill der mengden av mulige trekk for en spiller kun er avhengig av posisjonen men ikke spilleren. Et partisk spill er et kombinatorisk spill der mengden av mulige trekk for en spiller er avhengig av både posisjonen og spilleren.

Hex og sjakk er eksempler på partiske spill. Hex er partisk fordi spillerne har hver sin farge, så den røde spilleren har for eksempel ikke lov til å spille en blå brikke.

Nå som vi har definert en klasse med tospillerspill kalt nullsumspill, kan vi introdusere Zermelos teorem.

Teorem 3.1.5 ([Aum20, s. 1])**.** *Anta at vi har et endelig tospiller-spill med perfekt informasjon, der spillerne veksler på å gjøre sine trekk. Vi antar at de to spillerne er kalt rød og blå. Da kan enten rød eller blå tvinge frem vinst eller så kan begge sidene minst tvinge frem uavgjort.*

Bevis. Dette beviset er inspirert av beviset av [Aum20]. Vi lar n være antall trekk i spillet. Vi antar at dersom ingen av spillerne har vunnet eller spilt uavgjort etter n trekk, så ender spillet likevel uavgjort (denne betingelsen må tydeliggjøres, da man for eksempel i sjakk har en regel som presiserer at spillet ender uavgjort dersom samme posisjon repeteres tre ganger). Vi skal bruke induksjon på n for å bevise teoremet.

Grunntilfellet: Vi lar $n = 0$. Spillet er avklart, og enten så har rød vunnet, eller så har blå vunnet eller så har de spilt uavgjort.

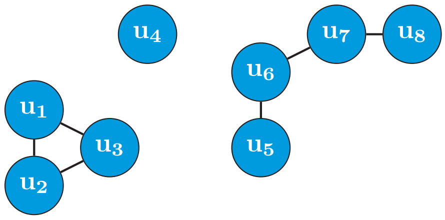
Induksjonssteget: Vi antar at hypotesen gjelder for alle $n \leq m - 1$. Vi betrakter et spill G av lengde $n = m$. Fra og med det andre trekket i G begynner et spill G' av lengde $m - 1$. Det første trekket i G består dermed av å velge et spill av lengde $m - 1$. Induksjonshypotesen sier at G' ender i vinst, tap eller uavgjort for den ene spilleren. Dermed må også G ende i vinst, tap eller uavgjort for den ene spilleren.

■

3.2 Spilltrær

For å kunne definere spilltrær må vi først gi en definisjon på en graf. En graf er et par $G = (V, E)$, der V er mengden av noder og E er mengden av kanter. En kant forbinder to noder sammen, og vi har at for $e \in E$ så er $e \in V^2$. Graden til en node er definert som antall kanter som er forbundet til denne noden. En node som ikke er koblet til noen andre noder har grad 0, og kalles for en isolert node. En sti er en følge med kanter som kobler sammen en følge med noder. En simpel sti er en sti der alle nodene er distinkte. Dette betyr at for hver node v inneholdt i en simpel sti så er graden 1 dersom noden er et endepunkt, og 2 ellers. En sykel er sti med minst tre noder i tillegg til kanten som forbinder første og siste node. En simpel sykel er en sykel der ingen av nodene repeteres, utenom den første og siste noden.

Eksempel 3.2.1. La oss se på et eksempel på en graf. Figur 3.1 illustrerer en graf som inneholder en simpel sykel, en isolert node og en simpel sti.



Figur 3.1: Et eksempel på en graf. Fra venstre til høyre: En simpel sykel som består av nodene u_1, u_2 og u_3 og kantene mellom dem, en isolert node u_4, en simpel sti som består av nodene u_5, u_6, u_7 og u_8 og kantene mellom dem.

Definisjonen av en graf er også viktig for senere kapitler. I Kapittel 6 skal vi se nærmere på Hex som en graf og i Kapittel 7 skal vi bevise at Hex aldri kan ende uavgjort ved å se på en graf bestående av celler på brettet.

Definisjon 3.2.2. Et spilltre er en rettet, sammenhengende graf uten sykler.

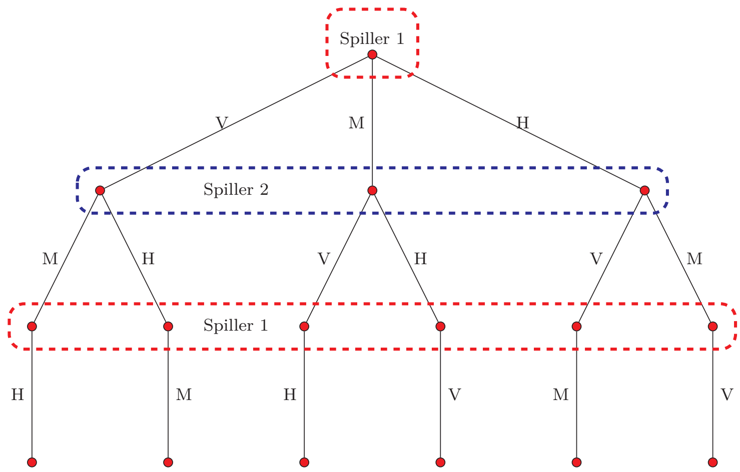
Det at et spilltre er rettet betyr at det kun går én vei. Det begynner altså i en node som vi kaller rotnoden, og ender i noder som vi kaller for terminalnoder. Nodene i spilltreet markerer punkter der en av spillerne kan gjøre et valg. En kant markerer en vei fra en node til en annen. Vi kaller en node v_0 for en forløper til en node v_1 dersom det fins en vei av kanter fra v_0 til v_1. Da er v_1 en etterfølger til v_0. Vi kaller en node v_0 for en foreldrenode dersom den er en direkte forløper til en node v_1, som vi kaller for barnet til v_0. Spilltrær kan brukes for å bestemme hvilken av spillerne som har en vinnende posisjon, og hvilken strategi spilleren burde følge. Vi skal senere se på spilltrær for Hex-brett av størrelser 2×2, 3×3 og 4×4.

Først skal vi presentere en metode som vi skal bruke for å beregne vinneren i et spilltre, som kalles for baklengs induksjon (eller Zermelos algoritme).

Zermelos algoritme. *Start med å markere terminalnodene med fargen (eller navnet) til spilleren med høyest utbytteverdi i den aktuelle noden. Dersom en terminalnode er den eneste etterløperen til en foreldrenode markerer vi forelderen med den samme fargen. Dersom mer enn én terminalnode har samme forelder markerer vi foreldrenoden basert på hvilken spiller som var i trekket og basert på fargene til terminalnodene. Dersom alle terminalnodene har samme farge, markerer vi foreldrenoden med denne fargen uavhengig av hvem som var i trekket. Dersom noen av terminalnodene har forskjellig farge markerer vi foreldrenoden med fargen til den spilleren som er i trekket. Vi fortsetter slik helt til vi kommer til rotnoden. Fargen til rotnoden indikerer hvilken spiller som har en vinnerstrategi.*

Teorem 3.1.5 garanterer at Zermelos algoritme alltid resulterer i enten vinst, tap eller uavgjort for den ene spilleren. La oss se på et eksempel på et velkjent spill kalt Nim, og et spilltre for Nim.

Eksempel 3.2.3. Nim er et upartisk kombinatorisk spill. I Nim har man en mengde med hauger, og hver haug består av et mengde med pinner. Spillerne velger, på tur å enten ta bort en hel haug eller så mange pinner de vil fra én av haugene. Den første spilleren som ikke kan gjøre noe taper. Vi kan for eksempel se på et nimspill der haugene har størrelser $1, 1, 1$. Altså kan spillerne velge å ta pinner fra tre hauger med én pinne i hver haug. Her er det tre mulige valg i første trekk. Deretter er det to valg, og til slutt kun ett valg. Vi kaller haugene for V, M og H, og tegner et spilltre som viser valgmulighetene. Vi markerer i spilltreet hvilken spiller sin tur det er. Siden spiller 1 begynner vil rotnoden tilhøre spiller 1. Alle barn av rotnoden tilhører spiller 2, og så videre. Vi tildeler spillerne hver sin farge (for at det skal være lettere å lese spilltreet). Vi lar spiller 1 være rød og spiller 2 være blå.



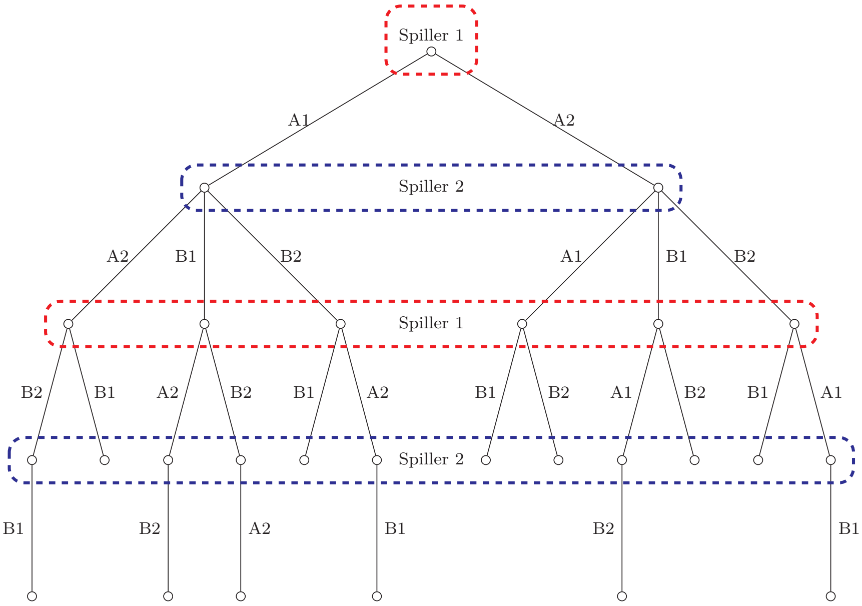
Figur 3.2: Spilltre for nim 1,1,1.

Vi bruker Zermelos algoritme for å fargelegge nodene i spilltreet og avgjøre hvilken av spillerne som har en vinnerstrategi. Vi ser at den første spilleren (rød) har en vinnerstrategi.

La oss se nærmere på Hex og et spilltre for et Hex-brett av størrelse 2×2. I første trekk har den første spilleren to muligheter. I praksis har den første spilleren fire muligheter, men vi legger merke til at $A1$ og $B2$ er ekvivalente i første trekk og at $A2$ og $B1$ er ekvivalente i første trekk. Vi kan se dette ved å rotere brettet 180°. Figur 3.3 viser spilltreet uten fargede noder.

Ved å bruke Zermelos algoritme kan vi konkludere med at den første spilleren har en vinnerstrategi i 2×2 Hex. Figur 3.4 viser spilltreet med fargede noder. Rotnoden er rød, så første spiller har en vinnerstrategi ved å spille på $A2$ i første trekk.

For 2×2-Hex var det mulig å illustrere hele spilltreet ved å anta at noen av trekkene var ekvivalente i første trekk. Allerede for brett av størrelse 3×3 får vi problemer med å tegne hele spilltreet, da antallet noder blir for stort. Hvis vi skulle ha tegnet hele spilltreet uten å anta at noen av nodene var ekvivalente i første trekk, ville det vært 9 muligheter i første trekk, så 8 muligheter i andre trekk også videre. Spillet kan tidligst avsluttes etter trekk nummer 5, fordi den første spilleren må spille minst tre trekk for å fullføre en sti som kobler sine sider. Spillet kan senest avsluttes når alle celler på brettet er fargelagt, altså etter trekk nummer 9. Disse begrensningene gir oss en nedre grense på



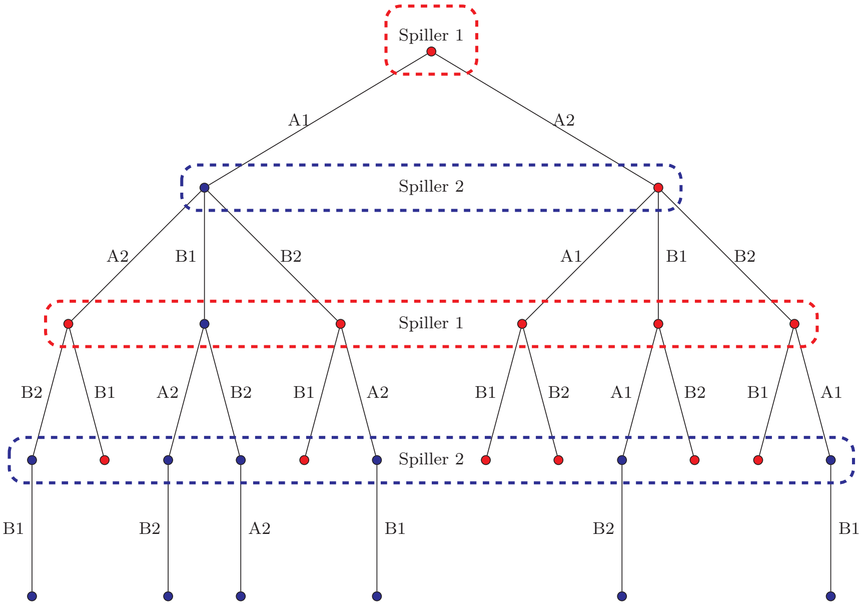
Figur 3.3: Et spilltre for 2×2 Hex der nodene er ufarget.

$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$ noder, og en øvre grense på $9! = 362\,880$ noder i spilltreet. Vi må dermed gjøre noen antagelser og se bort i fra noen trekk for å kunne tegne et spilltre for 3×3-Hex.

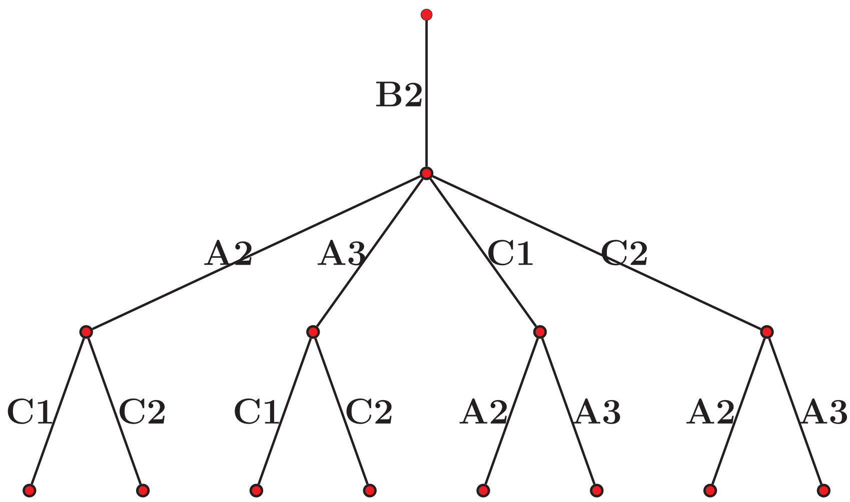
I Tillegg A ser vi på en fullstendig strategi for 4×4-Hex ved å benytte spilltrær, men da har vi delt opp spilltreet i fem spilltrær.

For spilltreet til 3×3-Hex antar vi at den første spilleren spiller i midten, altså på $B2$, i første trekk. I det andre trekket er det fire muligheter, da vi igjen kan anta at noen av trekkene er ekvivalente. Ved å rotere brettet 180° ser vi at $A1$ er ekvivalent med $C3$, $A2$ er ekvivalent med $C2$, $A3$ er ekvivalent med $C1$ og $B1$ er ekvivalent med $B3$. Figur 3.6 illustrerer et spilltre for 3×3-Hex. Spilltreet i Figur 3.6 inneholder ikke alle mulige posisjoner og alle mulige valg som kan tas. Likevel kan vi bruke Zermelos algoritme på dette spilltreet for å bestemme hvilken spiller som har en vinnerstrategi i 3×3-Hex. Poenget er at i det tredje trekket så er det spiller 1 som velger hvor hun skal spille, og som spilltreet illustrerer så er det minst ett valg hun kan gjøre for å vinne uansett hvor spiller 2 spiller i det andre trekket. I det fjerde trekket er det spiller 2 sin tur, og hun har seks valg. Uansett hva spiller 2 velger i det fjerde trekket har spiller 1 en vinnende respons i det femte trekket. Vi bruker Zermelos algoritme og ser at siden alle nodene i det andre trekket er røde, må rotnoden også være rød. Dermed har spiller 1 en vinnerstrategi dersom hun spiller på $B2$ i første trekk. Uten å vise det påstår vi også at spiller 1 har en vinnerstrategi dersom hun spiller på $B1$ eller $A3$ i første trekk. Spiller 2 har en vinnerstrategi dersom spiller 1 spiller på $A1$ eller $A2$ i første trekk.

Som vi har sett så kan vi gjøre forenklinger og illustrere relevante muligheter i spillet uten å inkludere alle nodene i det fullstendige spilltreet. I de tidligere eksemplene har vi sett på spilltrær der hver rad med noder er tilegnet den ene spilleren, og representerer at den spilleren kan gjøre et valg her. Vi kan også

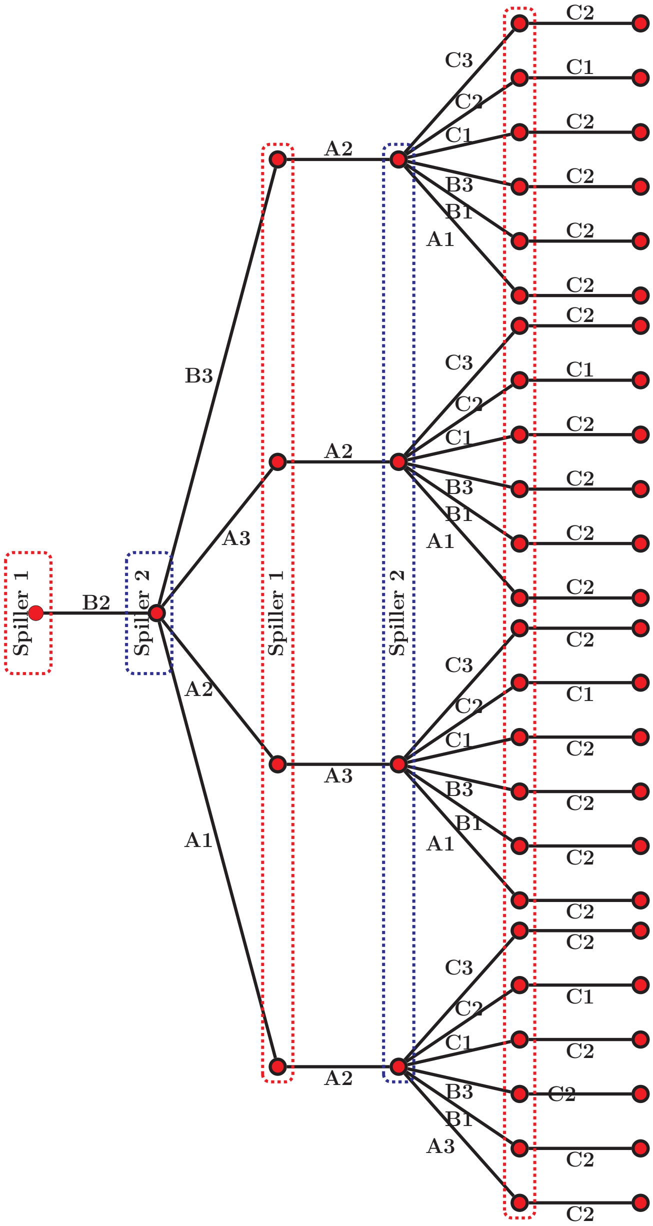


Figur 3.4: Et spilltre for 2×2 Hex der nodene er farget ved hjelp av baklengs induksjon.



Figur 3.5: Rødt spilltre for 3×3 Hex

velge å representere et spilltre for 3×3-Hex som bare betrakter spiller 1 (rød) sine valgmuligheter. I Figur 3.5 ser vi et spilltre som illustrerer valg som rød kan ta i hvert trekk for å vinne. I første trekk kan rød, som vi allerede har sett, velge å spille på $B2$ for å vinne. I rødt sitt andre trekk kan hun velge mellom $A2$, $A3$, $C1$ eller $C2$ avhengig av hvor blå spilte i det forrige trekket. Rød vinner i sitt tredje trekk ved å spille på $A2$, $A3$, $C1$ eller $C2$, avhengig av hvor blå spilte i sitt første og andre trekk. Spilltreet viser at uansett hvor blå spiller, så



Figur 3.6: Spilltre for 3×3 Hex med starttrekk B2

har rød vinnende muligheter.

3.3 Hvem vinner i Hex?

Det er kjent at den første spilleren alltid har en vinnerstrategi på et Hexbrett av størrelse $n \times n$. Vi skal gi et bevis for dette, men behøver først å introdusere noen resultater (som senere skal bevises) som vi skal bruke i beviset.

Teorem 3.3.1. *[Gal79] Hvis hver celle på Hex-brettet enten er okkupert av røde eller blå brikker, da fins det enten en rød kjede som forbinder de røde sidene eller en blå kjede som forbinder de blå sidene, men ikke begge.*

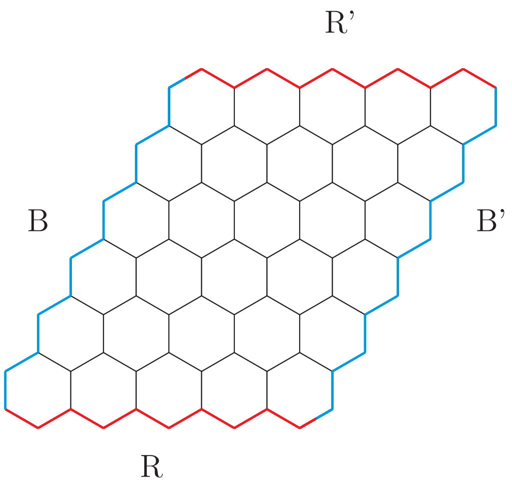
Teorem 3.3.2. *[Rij06] I Hex er det aldri ufordelaktig å legge til en vennlig brikke eller å fjerne en fiendtlig brikke.*

Vi henviser til Kapittel 7 for et bevis av Teorem 3.3.2 og til Kapittel 7 for et bevis av Teorem 3.3.1, da det krever en innføring av mange nye definisjoner, teoremer og notasjoner for å kunne bevise disse (tilsynelatende) enkle teoremene.

Teorem 3.3.3. *[HT19]. Den første spilleren (rød) har alltid en vinnerstrategi for et regulært $n \times n$-brett.*

Bevis. Dette beviset krediteres til John Nash, og er funnet hos [HT19, s. 95]. I følge Teorem 3.3.1 så vil én av spillerne ha en vinnende sti (men ikke begge) når brettet er fullt. Dermed vil enten den første spilleren (rød) eller den andre spilleren (blå) ha en vinnerstrategi. Vi antar at blå har en vinnerstrategi. Da kan rød velge en defensiv strategi som hermer etter blå sin strategi. Rødt sitt første trekk er vilkårlig. Siden en ekstra brikke på brettet aldri er ufordelaktig i følge Teorem 3.3.2, så vil rød ha en bedre sjanse for å vinne ved å bruke sin strategi (som foreslått over) enn ved å spille som den andre spilleren. Dermed har rød en vinnerstrategi. Dette er en motsigelse. Det følger at blå ikke har noen vinnerstrategi, noe som betyr at rød alltid har en vinnerstrategi. ∎

Som regel spilles Hex på regulære brett. De vanligste størrelsene er 11×11, 13×13 og 19×19. Men det er også mulig å spille på ikke-regulære brett der det enten er flere rader enn kolonner eller flere kolonner enn rader. Målområdene til den ene spilleren vil da inneholde flere celler og denne spilleren vil ha en kortere vei å gå for å fullføre en vinnende sti. Se et eksempel i Figur 3.7 på et Hex-brett av størrelse 5×6.

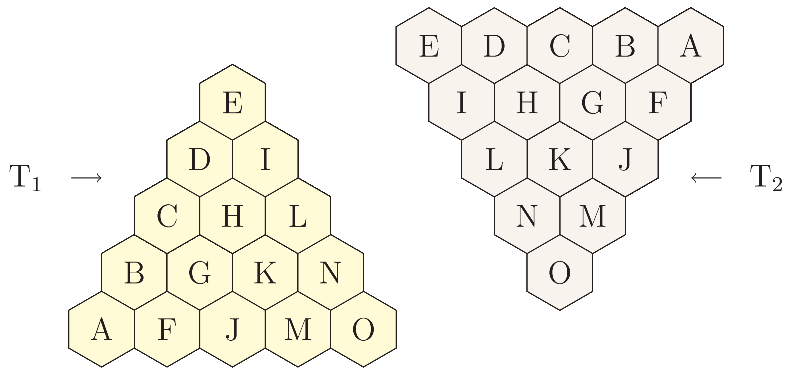


Figur 3.7: 5×6 Hex-brett

På et slikt brett gjelder ikke det foregående teoremet. Her er det ikke nødvendigvis den første spilleren som har en vinnende strategi. Den andre spilleren har nemlig en vinnerstrategi dersom hun eier de lengste sidene.

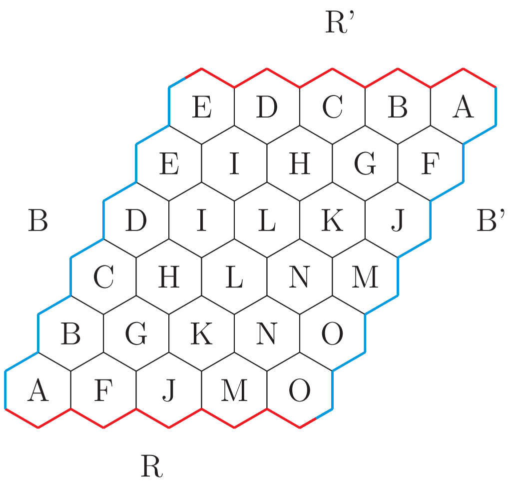
Teorem 3.3.4 ([HT19])**.** *På et ikke regulært brett av størrelse $n \times m$ der $n > m$ eller $m > n$ vil alltid spilleren med den lengste siden ha en vinnerstrategi.*

Bevis. Dette beviset er hentet fra [HT19]. Vi antar at vi har et $n \times (n+1)$-brett. Vi begynner med å dele opp brettet i to like store partisjoner, begge med n celler på hver side. Disse partisjonene er trekanter som vi kaller T_1 og T_2. Figur 3.8 viser partisjonene T_1 og T_2 på et 5×6 Hex-brett.



Figur 3.8: Et 5×6-brett delt opp i to trekanter T_1 og T_2

Vi markerer også hver av cellene på brettet med bokstaver. En celle og den cellen vi får når vi speiler om diagonalen der brettet deles vil bli markert med samme bokstav som illustrert i Figur 3.9.



Figur 3.9: 5×6 Hex-brett der cellene er markert med bokstaver

Vi påstår følgende vinnerstrategi for spilleren med den lengste siden: Hvis hun spiller først så kan hun spille hvor som helst. Deretter i alle trekk fremover, som respons til motstanderens trekk spiller hun på cellen med samme bokstav som cellen motstanderen spilte på.

Vi antar nå at spilleren med den korteste siden (i vårt eksempel er dette rød) vinner, og vi skal vise at vi får en motsigelse. For at rød skal komme seg fra R til R' må rød sin sti inneholde elementer fra både T_1 og T_2. Det følger at rød sin sti må bestå av minst to celler med samme bokstav. Teorem 3.3.1 sier at det kun fins en sti fra R til R' eller en sti fra B til B', men ikke begge. Blå følger den påståtte vinnerstrategien. Dermed kan ikke rød vinne fordi blå vil alltid spille på celler av samme bokstav som cellene i stien til rød. Vi har nådd en motsigelse. Dermed har alltid spilleren med den lengste siden en vinnerstrategi på et Hex-brett av størrelse $n \times m$, der $n \neq m$.

■

KAPITTEL 4

Analyse

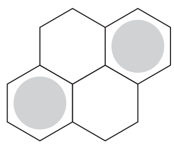
I dette kapittelet skal vi se på analysemetoder som kan brukes for å finne løsninger, altså vinnerstrategier, for noen Hex-tilstander.

4.1 Virtuelle koblinger

Strategi i Hex dreier seg i stor grad om å skape virtuelle koblinger.

Definisjon 4.1.1 ([Ans01])**.** To grupper med blå celler x og y, eller en gruppe blå celler x og en tom celle y, eller to ledige celler x og y, danner en virtuell kobling hvis og bare hvis rød ikke kan forhindre at blå kobler dem sammen, selv om rød spiller først.

Et eksempel på en virtuell kobling er broen. Figur 4.1 illustrerer en bro mellom de to grå cellene. Broen er en virtuell kobling fordi motstanderen ikke kan forhindre at spilleren som eier de grå cellene kan lage en kobling mellom dem.



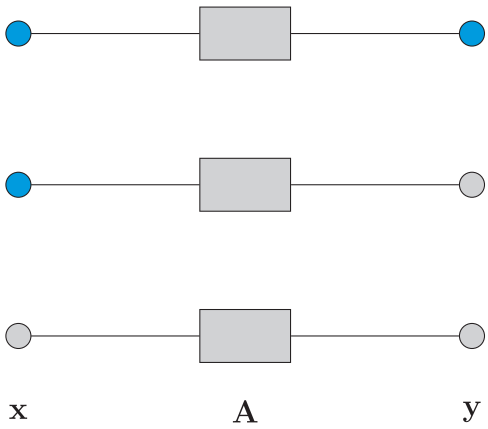
Figur 4.1: En bro mellom de to grå cellene

Hvis koblingen kun kan tvinges frem hvis spilleren trekker først kaller vi det for en semikobling. Mengden av ledige celler på brettet som kan brukes til å skape en virtuell kobling kaller vi for en bærer (på engelsk "carrier").

Virtuelle koblinger kan beskriver grafisk ved hjelp av diagrammer som i Figur 4.2. De runde nodene representerer celler på brettet og de rektangulære nodene beskriver bærere. De blå nodene er okkupert av blå brikker, og de grå nodene er tomme.

Definisjon 4.1.2 ([Ans01])**.** Dybden til en virtuell kobling defineres som antall trekk som må spilles for å gjøre en virtuell kobling til en faktisk kobling.

Vi vet at virtuelle koblinger er viktige i hex-strategi, da virtuelle koblinger gjør at man kan dekke et større område på brettet mens man samtidig sikrer seg en trygg kobling mellom sine brikker. Den enkleste virtuelle koblignen



Figur 4.2: Grafisk representasjon av virtuelle koblinger. Blå noder er okkupert av blå brikker, grå noder er ledige og rektangulære nodene er bærere. Fra øverst til nederst: blå-blå, blå-tom, tom-tom

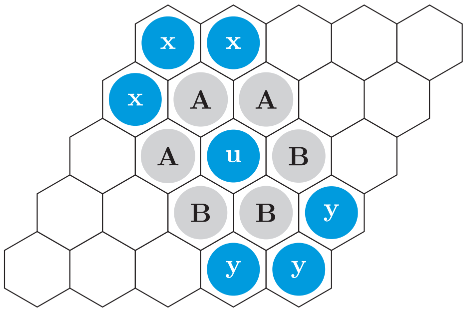
er en bro, og alle andre virtuelle koblinger kan bygges ut i fra broen. For å analysere en gitt spillposisjon kan man derfor analysere mengden av virtuelle koblinger og semikoblinger for å dedusere en vinnerstrategi for en av spillerne. For å kunne gjøre dette trenger man en måte å kunne bygge mer komplekse virtuelle koblinger fra eksisterende virtuelle koblinger. Anshelevich (2001) foreslår to deduksjonsregler som kan brukes for å danne nye virtuelle koblinger fra eksisterende virtuelle koblinger eller semi-koblinger.

Teorem 4.1.3 (OG-regelen)**.** *[[Ans01]] La (x, A, u) og (u, B, y) være virtuelle koblinger, der gruppen u er blå og tilhører begge triplene. Hvis $x \cap B = \emptyset$, $y \cap A = \emptyset$ og $A \cap B = \emptyset$, da danner $(x, A \cup B, y)$ en virtuell kobling.*

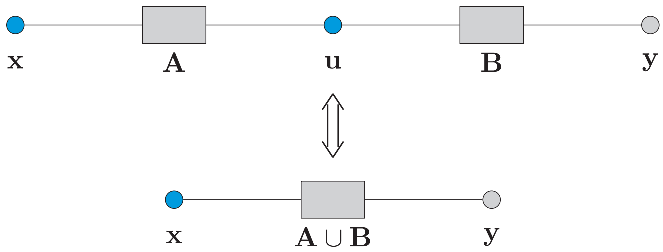
Siden $A \cap B = \emptyset$ betyr det at selv om rød spiller sin brikke på en av cellene $a \in A$, må det finnes en celle $b \in A$ som er en del av en virtuell kobling mellom x og u slik at blå i neste trekk kan spille her. Det samme gjelder for bæreren B. Altså kan blå kontre alle trekkene til rød, og etter hvert koble sammen sine brikker. Dermed må $(x, A \cup B, y)$ være en virtuell kobling for blå.

Eksempel 4.1.4. I Figur 4.3 ser vi at det fins en virtuell kobling mellom u og gruppen x ved hjelp av bæreren A, og at det fins en virtuell kobling mellom u og gruppen y ved hjelp av bæreren B. Siden $A \cap B = \emptyset$ spiller det ingen rolle hvor rød spiller fordi blå alltid kan skape en sikker kobling uansett.

Vi kan også beskrive denne regelen ved hjelp av en grafisk representasjon, som illustrert i Figur 4.4. De blå nodene er okkupert av blå brikker, de grå nodene er ledige og de firkantede nodene representerer bærere.



Figur 4.3: Eksempel på OG-regelen



Figur 4.4: Grafisk representasjon av OG-regelen. De blå nodene er okkupert av blå brikker, og de grå nodene er tomme. Rektangulære noder representerer bærere.

Anshelevich (2001) [Ans01] presenterer også en annen regel:

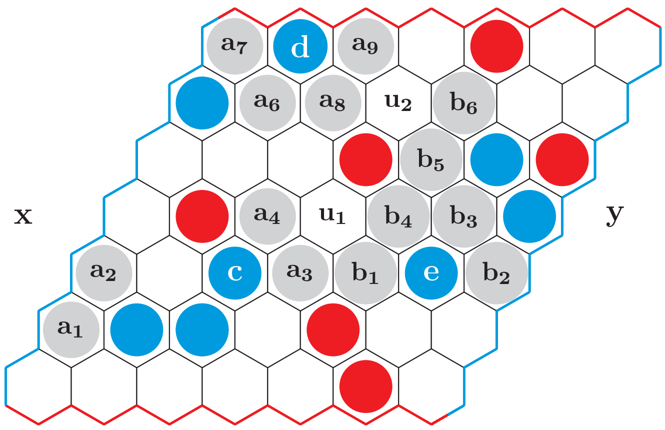
Teorem 4.1.5. *ELLER-regelen[[Ans01]] La* (x, A_k, u_k) *og* (u_k, B_k, y)*,* $(k = 1, 2, \ldots n$ *for* $n > 1)$ *være virtuelle koblinger der cellene* x *og* y *er enten blå eller tomme og alle cellene* u_k *er tomme. Dersom vi har at*

- $x \cap B_k = \emptyset$ *og* $y \cap A_k = \emptyset$ *for alle* $k = 1, 2, \ldots n$
- $A_k \cap B_k = \emptyset$ *for alle* $k = 1, 2, \ldots n$
- $\bigcap_{k=1}^{n} C_k = \emptyset$ *der* $C_k = A_k \cup u_k \cup B_k$ *for alle* $k = 1, 2, \ldots n$

da danner (x, D, y) *en virtuell kobling med bæreren* $D = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$*.*

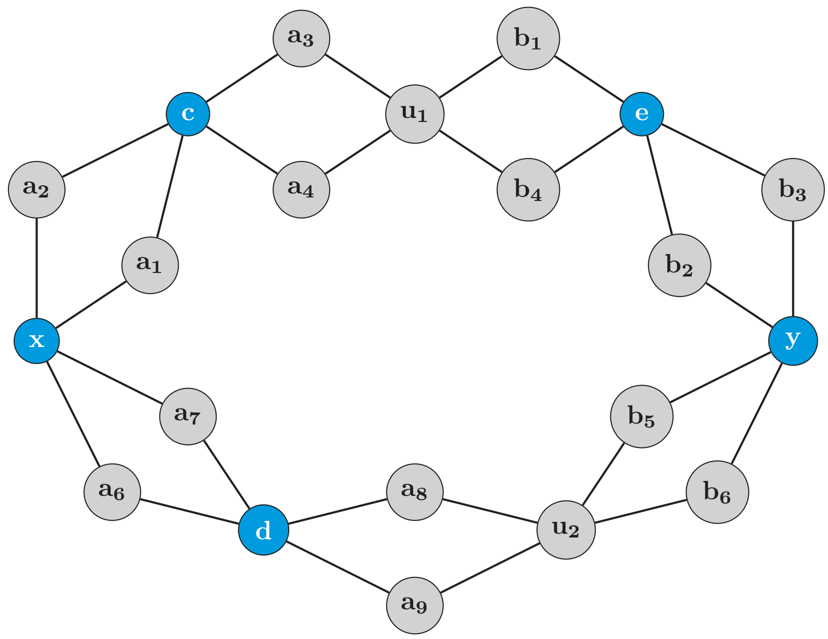
Denne regelen kan forklares ved at dersom rød spiller en brikke på en celle i C_i, da fins det en bærer C_j slik at $C_i \cap C_j = \emptyset$. Da kan blå spille på u_j for å lage en ny virtuell kobling $(x, A_j \cup B_j, y)$. Dette følger fra OG-regelen.

Eksempel 4.1.6. La oss se på et eksempel. Figur 4.5 viser en Hex-posisjon der rød er i trekket. Vi påstår at selv om det er rød sin tur, så har blå en vinennde posisjon. Vi kan bruke ELLER-regelen og OG-regelen for å vise dette.



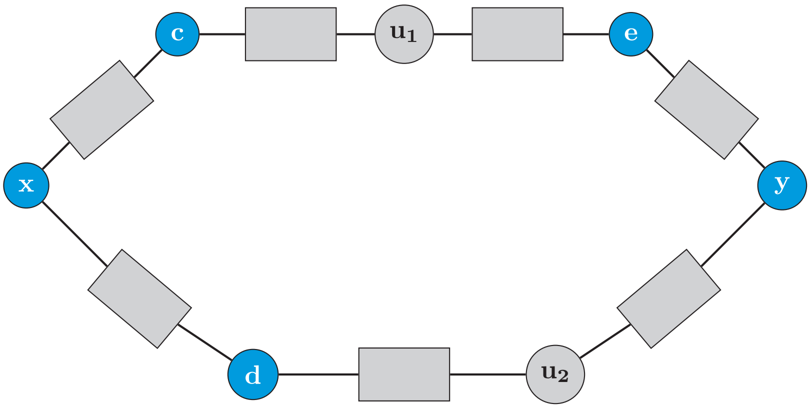
Figur 4.5: Blå vinner. De grå nodene representerer bærere, de blå og røde brikkene er brikker på brettet. x og y er de blå kantene på brettet.

Vi lager en grafisk representasjon av situasjonen. Figur 4.6 illustrerer dette. Det fins virtuelle koblinger (x, A_1, u_1), (x, A_2, u_2), (y, B_1, u_1) og (y, B_2, u_2).



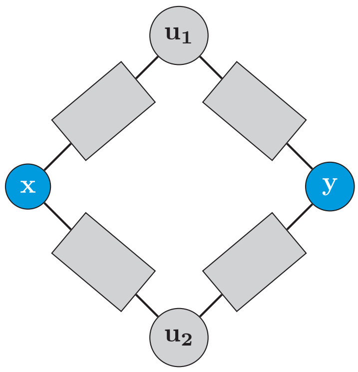
Figur 4.6: Grafisk representasjon av virtuelle koblinger mellom x og y i posisjonen i Figur 4.5.

Vi bruker ELLER-regelen for å oppnå grafen i Figur 4.7.



Figur 4.7: Grafisk representasjon av virtuelle koblinger mellom x og y etter å ha anvendt ELLER-regelen på Figur 4.6.

Nå kan vi bruke OG-regelen for å oppnå grafen i Figur 4.8, og til slutt ELLER-regelen igjen for å komme frem til Figur 4.9. Det fins altså en virtuell kobling (x, D, y), der $D = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$ og $C_k = A_k \cup u_k \cup B_k$. Dermed har blå en vinnerstrategi i denne posisjonen.



Figur 4.8: Grafisk representasjon av virtuelle koblinger mellom x og y etter å ha anvendt OG-regelen på Figur 4.7.

Figur 4.9: Grafisk representasjon av virtuelle koblinger mellom x og y etter å ha anvendt ELLER-regelen på Figur 4.8.

ELLER-regelen presiserer at $n > 1$. Dette er viktig, fordi dersom $n = 1$ kunne rød ha spilt på u_1 i sitt neste trekk, og dermed blokkert blå.

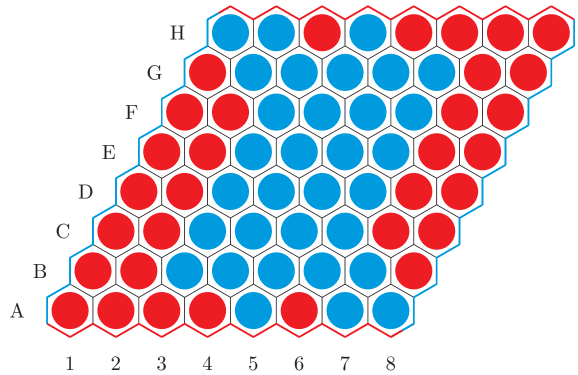
4.2 Dødcelleanalyse

I forrige delkapittel introduserte vi virtuelle koblinger. Disse kan brukes for å forenkle analyseprosessen, slik at man slipper å se på hele spilltreet. En annen analysemetode som kan brukes kalles dødcelleanalyse.

Definisjon 4.2.1 ([HR06, s. 2523])**.** Vi kaller en celle for død dersom fargen til brikken som er plassert på denne cellen ikke påvirker utfallet av spillet.

Vi sier at en tilstand på brettet B' fullfører en tilstand B dersom vi kan oppnå B' ved å legge til brikker på alle ledige celler på brettet. Da er en celle v levende i B dersom, for en B' som fullfører B, så vil det å endre fargen til brikken på v endre fargen til vinneren i B'. Ellers er v død i B.

En spiller som har en vinnerstrategi, men som ikke enda har en vinnende sti, vil måtte spille på en levende celle for å vinne. Døde celler er blant de cellene som vi kaller for mindre verdt (på engelsk "inferior cells"). Verdien til en celle er utbytteverdien til den resulterende spilltilstanden som man ender på ved å spille på den cellen i en viss posisjon. En celle er mindre verdt dersom det fins en annen celle som har en verdi som er minst like god [HAH09]. En mengde med celler V er fanget av en spiller dersom spilleren har en respons som gjør at V ender opp døde når motstanderen spiller på en av cellene i V. En mengde med celler V er sårbare for en spiller dersom motstanderen har et trekk som kan fange alle cellene i mengden [HT19]. Dødcelleanalyse handler altså om å se bort i fra spilltrær som inneholder cellene på brettet som er mindre verdt. Dette bidrar til å redusere mengden med noder i et spilltre betraktelig.



Figur 4.10: Illustrasjon av hvilke trekk som er vinnende åpningstrekk for et Hex-brett av størrelse 8×8. Fargen indikerer hvilken spiller som vinner dersom rød spiller der i første trekk.

Hittil har det blitt funnet vinnerstrategier for brett opptil størrelse 9×9. Hayward et al. (2009) [HAH09] presenterer i sin artikkel en algoritme som baserer seg på dødcelleanalyse og Anshelevich sine regler som kan løse åpningstrekk på et Hex-brett av størrelse 8×8. Figur 4.10 viser hvilke åpningstrekk som er en del av en vinnerstrategi for spillerne. Cellene som er okkupert av røde brikker indikerer at rød (første spiller) har en vinnerstrategi dersom hun plasserer en brikke der i første trekk. Cellene som er okkupert av blå brikker indikerer at blå (andre spiller) har en vinnerstrategi dersom rød plasserer sin brikke der i første trekk.

4.3 Evalueringsfunksjoner

Anshelevich (2001) beskriver en evalueringsfunksjon av Hex-tilstander basert på en elektrisk krets. Evalureringsfunksjonen kan beregne hvor mye nærmere rød er til å fullføre en vinennde rød sti enn det blå er til å fullføre en vinnende blå sti.

En nærliggende måte å evaluere hvor nærme en spiller er til å fullføre en vinnende kjede er å regne ut det minimale antallet brikker som trengs for å koble to sider av brettet. Problemet med denne metoden er at den ikke ser på alle mulige kjeder. Ved å bruke en modell basert på en elektrisk krets kan dette fikses [Ans01].

Vi anser de fire kantene av brettet som celler på spillbrettet slik at cellene på de blå kantene er okkupert av blå brikker og cellene på de røde kantene er okkupert av røde brikker ved spillets start. For enhver Hex-posisjon kan vi assosiere to elektrisk kretser, der den ene kretsen er fra rød sitt ståsted og den andre er fra blå sitt ståsted. For hver celle v på brettet kan vi assosiere en resistans r slik at

$$
\begin{aligned}
r_R(v) &= 1, && \text{hvis } v \text{ er ledig} \\
r_R(v) &= 0, && \text{hvis } v \text{ er okkupert av en rød brikke} \\
r_R(v) &= \infty, && \text{hvis } v \text{ er okkupert av en blå brikke}
\end{aligned}
$$

for rød sin krets, og

$$
\begin{aligned}
r_B(v) &= 1, && \text{hvis } v \text{ er ledig} \\
r_B(v) &= 0, && \text{hvis } v \text{ er okkupert av en blå brikke} \\
r_B(v) &= \infty, && \text{hvis } v \text{ er okkupert av en rød brikke}
\end{aligned}
$$

for blå sin krets. For to naboceller v_1 og v_2 kan vi assosiere en elektrisk kobling mellom dem, slik at

$$
\begin{aligned}
r_R(v_1, v_2) &= r_R(v_1) + r_R(v_2), && \text{for rød sin krets} \\
r_B(v_1, v_2) &= r_B(v_1) + r_B(v_2), && \text{for blå sin krets}
\end{aligned}
$$

Vi kan nå koble sammen motsatte sider av brettet til en spenningskilde, og på den måten beregne den totale motstanden i kretsen, slik at R_R er den totale motstanden i rød sin krets og R_B er den totale motstanden i blå sin krets. Uten å gå så mye dypere inn i teorien om elektriske kretser så skal vi nevne to lover om elektriske kretser. Ohms lov forteller oss at spenningen V over endepunktene i en leder er proporsjonal med strømmen I og den totale motstanden R i lederen, slik at $V = I \cdot R$. I følge Kirchoffs strømlov vil summen av strømmene inn i et forgreningspunkt være lik summen av strømmene ut av punktet. Det følger at den totale resistansen i en elektrisk krets vil estimere antall brikker som må legges til kretsen for å koble sammen de to motstående sidene, samt antall måter dette kan gjøres på.

Vi definerer evalueringsfunksjonen

$$E = \frac{R_R}{R_B}$$

Da er

$$\begin{aligned} E &= 0, && \text{hvis og bare hvis det fins en vinnende rød kjede} \\ E &= +\infty, && \text{hvis og bare hvis det fins en vinnende blå kjede} \end{aligned}$$

Desto mindre E er desto bedre er posisjonen for rød, og motsatt. Hexy er et dataprogram som kan spille Hex. Det bruker idéene presentert i dette kapittelet for å beregne gode trekk. Hexy bruker en alpha-beta søkealgoritme med evalueringsfunksjonen E [Ans02]. En alfa-beta søkealgoritme stopper å evaluere et trekk dersom den finner minst et annet trekk som er bedre enn dette [Wik22a]. Hexy finner virtuelle koblinger for rød og blå, og rangerer disse. Den løser Kirchoffs likningssystem for å beregne den totale motstanden mellom kantene.

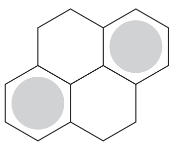
KAPITTEL 5

Strategi

I dette kapittelet skal vi se nærmere på noen konkrete strategimetoder som kan brukes når man spiller Hex. Som vi allerede har nevnt er Hex svært komplekst. Det har ikke enda blitt funnet noen vinnerstrategi for brett av størrelse 9×9 eller større, selv om man vet at slike strategier eksisterer. Vi kan likevel argumentere for noen gode åpningstrekk, måter for hvordan man skal bygge en kjede og hvordan man kan blokkere en motstander.

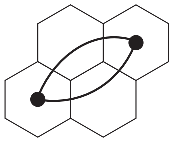
5.1 Bygge broer

Målet i Hex er å lage en sammenhengende sti fra én av sine sider til den andre. For å kunne klare dette må man lage trygge koblinger mellom sine brikker. To brikker er trygt koblet sammen dersom de deler en kant med hverandre, altså dersom de er naboer. Det å spille på en nabocelle vil derfor skape en trygg kobling, og vil i flere tilfeller være det beste trekket. Ulempen ved å spille på en nabocelle er at det tar lang tid å lage en kjede, og man kan risikere at motstanderen rekker å fullføre en sti først. Ved å spille brikker som er for nære hverandre dekker man en mindre del av brettet enn dersom man spiller på celler som ikke er naboer. En spesielt god strategi er å bygge broer mellom celler på brettet (som vi så i Kapittel 4). Broer dekker dobbelt så stor avstand på brettet som det å spille en brikke ved siden av en annen brikke. Dermed kan man bygge en kjede dobbelt så fort. Figur 5.1 viser en bro mellom to grå brikker.



Figur 5.1: En bro mellom de to grå brikkene

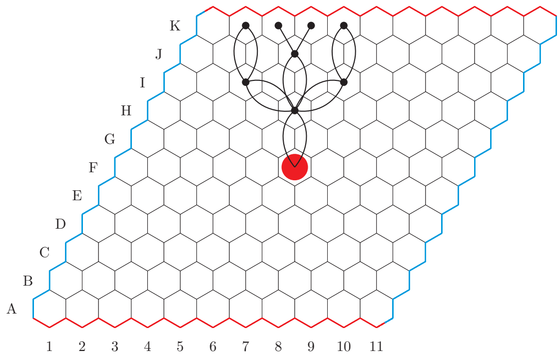
En bro er en kobling mellom to celler på brettet der det fins to celler i mellom dem som kan fullføre koblingen. Siden det fins to mulige celler å spille på for å fullføre koblingen, vil man derfor alltid ha muligheten til å fullføre koblingen fordi den andre spilleren behøver to trekk for å blokkere. Vi kan også representere en bro mellom to celler som to kurvede linjer fra den ene cellen til den andre. Se Figur 5.2.



Figur 5.2: Visualisering av en bro der de kurvede linjene representerer en virtuell kobling mellom cellene

5.2 Åpningstrekk

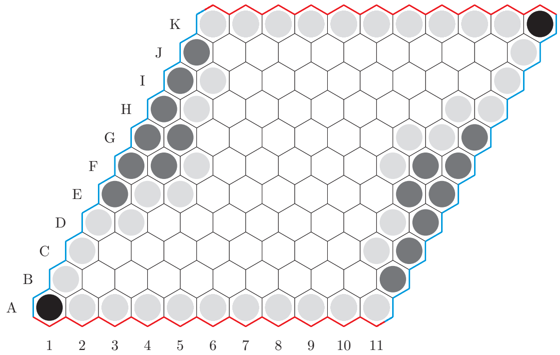
En fullstendig vinnerstrategi i Hex for brett av størrelse større enn 9×9 har enda ikke blitt funnet. Likevel er det antatt at å spille i midten er det sterkeste åpningstrekket [Bro00]. For et 11×11-brett betyr det at å spille på $F6$ antageligvis er en del av en vinnerstrategi for den første spilleren.



Figur 5.3: Rød spiller på $F6$ i første trekk og har mange muligheter

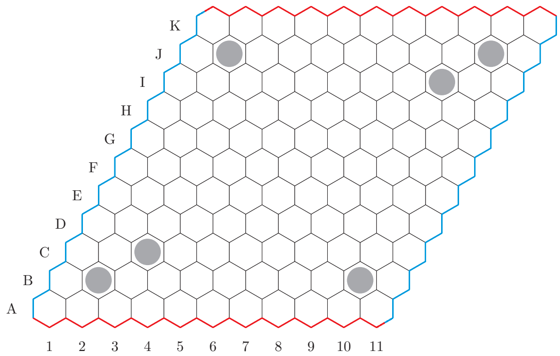
Se på Figur 5.3. Hvis rød spiller på $F6$ i første trekk er hun kun to trekk unna å skape en virtuell kobling av dybde 3 til én av de røde sidene. Dybden til en virtuell kobling er (som forklart i Definisjon 4.1.2) antall trekk som må til for å realisere en kobling fra en virtuell kobling. Hvis vi ser på figuren ser vi at rød også kun er tre trekk unna å skape virtuelle koblinger av dybde 3. Selv om det er antatt at $F6$ gir vinst for rød i første trekk, vet man ikke akkurat hvilken strategi rød burde følge for å vinne. Derfor er det også interessant å betrakte noen gode responser for blå i trekk to. Figur 5.4 viser gode, middels gode og dårlige responser for blå i andre trekk dersom rød spiller på $F6$ i første trekk. Cellene i figuren som er markert med svart indikerer tap for blå, cellene som er markert med mørkegrå indikerer en dårlig respins, cellene som er markert med lysegrå indikerer en middels god respons og cellene som er markert med hvit indikerer en god respons.

I Kapittel 2 så vi at det er vanlig å spille Hex med bytteregelen. Dersom man spiller med bytteregelen burde ikke spiller 1 spille på $F6$ i første trekk, for da kan spiller 2 bytte til seg brikken på $F6$ og har dermed antageligvis en vinnerstrategi. Hvis man spiller med bytteregelen burde man heller ikke spille på en celler der motstanderen har en vinnerstrategi. Det betyr at man burde holde seg unna de spisse hjørnene og midten. Alt i alt betyr dette at når man spiller med bytteregelen så burde spiller 1 velge en celle som hverken er



Figur 5.4: Blå sine svar til åpningstrekket F6. Cellene som er farget svart er tapende trekk for blå. Cellene som er farget mørkegrå er dårlige trekk for blå. Cellene som er farget lysegrå er fristende". Cellene som er farget hvite er gode trekk.

veldig fordelaktig eller veldig ufordelaktig. Figur 5.5 viser gode åpninger dersom man spiller med bytteregelen. Cellene som er markert med grå indikerer gode åpningstrekk for spiller 1. Disse åpningene er gode mot en middels god eller dårlig spiller. Spiller man disse trekkene mot en god spiller vil motstanderen bytte, og har fordel med det [Bro00].



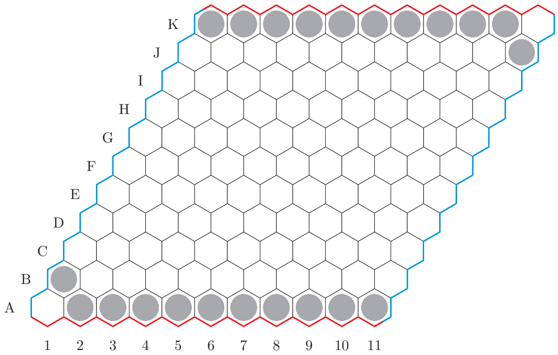
Figur 5.5: Gode åpningstrekk dersom man spiller med bytteregelen og motstanderen er middels god.

Dersom man spiller mot en god spiller bør man velge et av åpningstrekkene som er vist i Figur 5.6 [Bro00]. Igjen vil cellene som er markert grå indikere gode åpningstrekk.

Vi har nå sett på ulike åpningstrekk som gir vinst for første spiller. Vi har også sett at det å åpne i de spisse hjørnene, altså på $A1$ eller $K11$, gir motstanderen en vinnerstrategi. Vi skal nå vise at dette faktisk resulterer i et tap for spiller 1.

Teorem 5.2.1 ([BBC00, s. 334])**.** *Hvis den første spilleren (rød) plasserer sin første brikke i det spisse hjørnet, så har blå en vinnerstrategi.*

Beck et al. (2000) [BBC00] gir også et bevis for dette teoremet, som skal

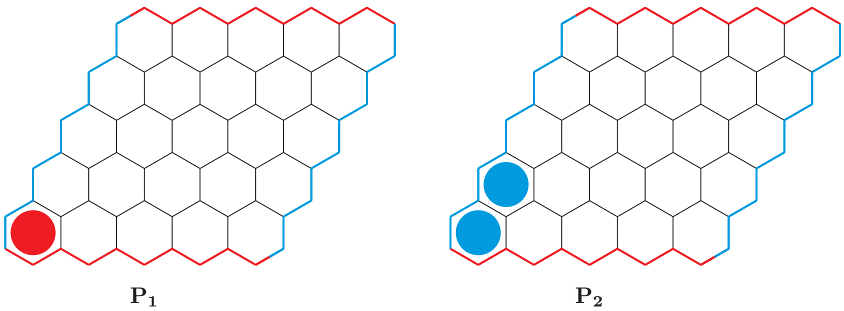


Figur 5.6: Gode åpningstrekk dersom man spiller med bytteregelen og motstanderen er god.

presenteres her.

Bevis. Vi skal vise at hvis rød har en vinnerstrategi når hun spiller i det spisse hjørnet i første trekk, så har også blå en vinnerstrategi. Dette er ikke mulig i Hex, dermed når vi en motsigelse.

Vi antar at rød plasserer sin brikke i det spisse hjørnet ($A1$) i første trekk. Vi kaller denne posisjonen for P_1. Blå spiller sin brikke på $B1$ i andre trekk, men hun forestiller seg at den røde brikken på $A1$ egentlig er blå. Denne posisjonen kaller vi for P_2. Figur 5.7 viser posisjonene P_1 og P_2 for et Hex-brett av størrelse 5×5. I følge Teorem 3.3.2 er det aldri ufordelaktig med en ekstra vennlig brikke på brettet, så posisjonen P_2 er minst like sterk for blå som P_1 er for rød. Dette betyr at dersom rød har en vinnerstrategi ved å spille på $A1$ i første trekk (posisjon P_1), så må blå ha en vinnerstrategi i posisjon P_2. Vi antar at rød har en vinnerstrategi som innebærer å spille på $A1$ i første trekk.



Figur 5.7: Illustrasjon av posisjonene P_1 og P_2

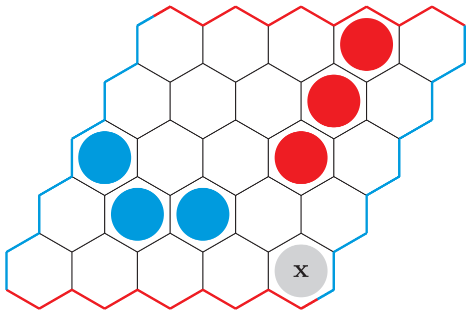
Blå følger den antatte vinnerstrategien til rød (blå tror at brikken på $A1$ er blå, og må dermed ha en vinnerstrategi ut ifra antagelsen). Spillerne fortsetter å spille helt til blå tror at hun har vunnet. Nå kan vi se bort i fra illusjonen om at brikken på $A1$ er blå, og undersøke om blå faktisk har vunnet. Den minimale vinnende stien til blå må inneholde nøyaktig én brikke på den venstre siden av brettet, nemlig $A1$ eller $B1$. Dersom brikken er på $B1$ har blå faktisk vunnet.

Vi legger merke til at $A1$ kun har to naboer, $B1$ og $A2$, og at $A2$ er nabo med både $A1$ og $B1$. Så dersom blå har en minimal sti som inneholder $A1$ så har hun også en minimal sti som inneholder $B1$ (fordi hun spilte på $B1$ i andre trekk). Dermed vinner hun også i dette tilfellet. Nå har vi vist at dersom rød har en vinnerstrategi ved å spille på $A1$ i første trekk, så har også blå en vinnerstrategi når rød spiller på $A1$ i første trekk. Dette er en motsigelse i følge Hex-teoremet (Teorem 3.3.1). Dermed kan ikke rød ha en vinnerstrategi, og det følger at blå har en vinnerstrategi.

■

5.3 Blokkere motstanderen

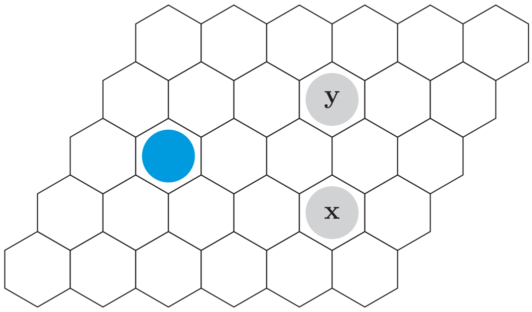
I hvert trekk burde man forsøke å gjøre noe som er mest mulig fordelaktig for seg selv og som forhindrer motstanderen i å skape en sti. Et godt trekk gjør derfor begge deler. Ved å bygge broer skaper man en trygg kobling mellom sine egne brikker på brettet, men i tillegg til å skape sin egen sti må man samtidig forsøke å hindre motstanderen i å lage en sti. Dette kan man gjøre ved å blokkere motstanderen. Ved å blokkere motstanderen mener vi her at man spiller på en celle som forhindrer motstanderen å koble to områder på brettet. Én mulig måte å blokkere motstanderen på er ved å spille på en celle som motstanderen kunne ha spilt på for å skape en bro.



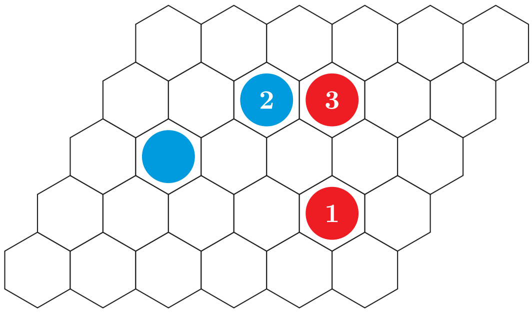
Figur 5.8: Begge spillere kan blokkere den andre ved å spille på x avhengig av hvem sin tur det er

Generelt er dette en god metode å følge når man spiller Hex. Hvis man ikke har noen andre gode trekk burde man spille på den cellen man tror at motsanderen helst har lyst til å spille på i neste trekk. En annen måte å blokkere motstanderen på er å spille på én av cellene som er to bortover og en opp eller ned fra dette. Se Figur 5.9. Hvis blå er den horisontale spilleren kan rød blokkere blå ved å enten spille på y eller z.

Grunnen til at denne metoden fungerer er at man forhindrer motstanderen i å lage en bro mellom videre brikker. I eksempelet i Figur 5.10 spiller rød først på y. I neste trekk lager blå en bro i motsatt retning av y. Rød kan deretter spille på x, og har nå blokkert blå i å komme forbi de ro røde brikkene, fordi de er nå koblet sammen med en bro. Dette betyr ikke at rød nødvendigvis har forhindret blå i skape en sti som går en annen vei, men rød har blokkert blå i å lage en sti som inneholder de cellene som er en del av broen mellom x og y.

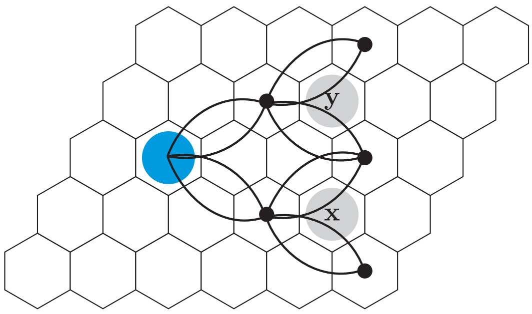


Figur 5.9: Rød kan blokkere blå ved å spille på enten y eller z



Figur 5.10: Rød blokkerer blå ved å spille på z i første trekk og deretter på y i tredje trekk

Figur 5.11 viser alle broer i horisontal retning fra startpunktet. Vi ser at x og y begge er en del av fremtidige broer som blå kan bygge, og forhindrer dermed blå i å bygge broer.

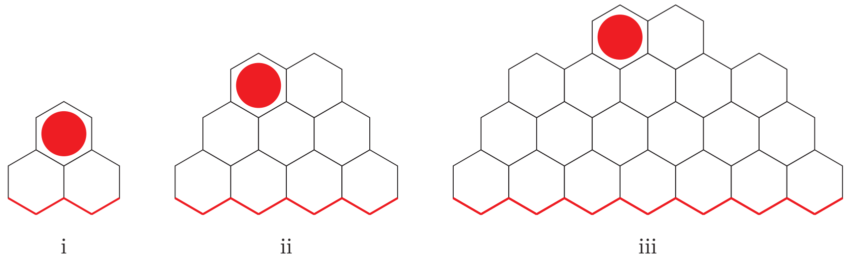


Figur 5.11: Mulige broer fra startpunktet

5.4 Se etter mønstre

Strategien i Hex bygger på å se etter mønstre på brettet. En bro er et eksempel på et slikt mønster. Et annet mønster er nabobrikker.

[Bro00] henviser til ti trygge kantmønstre. Dette er mønstre på brettet som, dersom man spiller her så kan man lage en trygg kobling til en kant. Figur 5.12 viser tre eksempler på trygge kantmønstre. I figur (i) har rød to muligheter for å skape en trygg kobling til den røde siden. I figur (ii) kan rød bygge to broer fra startpunktet. Begge broene er koblet til en celle på brettet som har en trygg kobling til den røde siden. I figur (iii) kan rød bygge to broer fra startpunktet. Den ene broen skaper en trygg kobling direkte til den røde siden. Den andre broen kobler startpunktet til en celle som rød deretter kan bygge to nye broer fra. Begge disse nye broene skaper en trygg kobling til den røde siden. Dermed er alle disse situasjonene trygge for rød, og garanterer at rød kan koble sin brikke med den røde siden. Vi viser til [Bro00, s. 72] for resten av de trygge kantmønstrene.



Figur 5.12: Tre eksempler på trygge kantmønstre

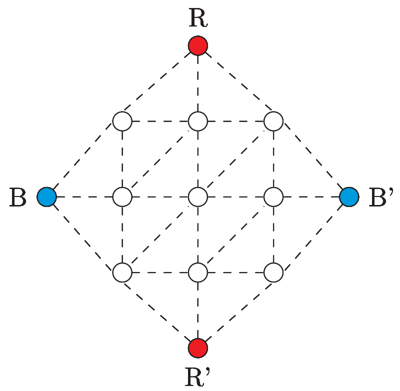
KAPITTEL 6

Geometri + grafspill

I Kapittel 4 definerte vi en graf, og vi skal i dette kapittelet se på Hex som et spill som kan spilles på en graf. I dette kapittelet skal vi også undersøke flislegginger, og hvilke geometriske egenskaper ved Hex-brettet som gjør at Hex aldri kan ende uavgjort.

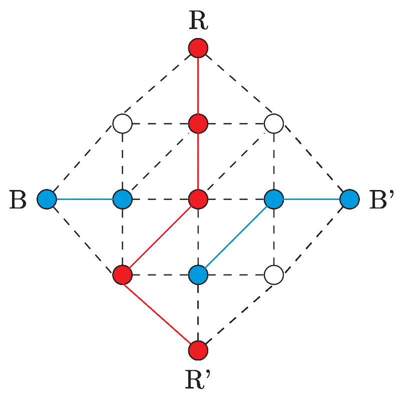
6.1 Grafspill

Vi definerer et graf-fargeleggingsspill som et spill der to spillere bruker en gitt mengde med farger for å fargelegge en graf. Utenom dette kan et generelt graf-fargeleggingsspill beskrives utifra gitte regler for hvordan man skal fargelegge grafen, og hva målet med spillet er. Hex er et eksempel på et partisk graf-fargeleggingsspill, der spillerne skal fargelegge en graf med farger fra en gitt mengde, men hver spiller kan bare velge én av fargene. Den ene spilleren kan velge fargen rød, og på sin tur kan hun velge en ufarget node som hun fargelegger. Den andre spilleren velger fargen blå og fargelegger en ufarget node på sin tur. Når to nabonoder begge er fargelagt med samme farge, farger vi også kanten som forbinder nodene. Spilleren med fargen rød vinner dersom hun klarer å lage en vei av kanter mellom nodene R og R' på grafen. Figur 6.1 viser hvordan grafen til Hex ser ut på et brett av størrelse 3×3



Figur 6.1: 3×3-Hex som et grafspill

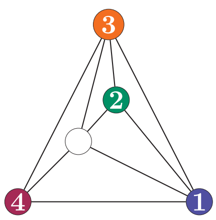
I Figur 6.2 ser vi et eksempel der rød vinner.



Figur 6.2: 3×3-Hex som et grafspill der rød vinner

La oss se på et annet eksempel på et graf-fargeleggingsspill:

Eksempel 6.1.1. Nodefargeleggingsspillet (på engelsk kalt "vertex coloring game") er et graf-fargeleggingsspill der to spillere, kalt for Alice og Bob, på tur fargelegger noder på en graf. Spillerne kan velge fra en gitt mengde med farger, og spillet avsluttes når den ene spilleren ikke kan gjøre noe. En node kan kun fargelegges med en farge som er forskjellig fra fargen til nabonodene. Alice vinner dersom alle nodene er fargelagt når spillet er ferdig. Dersom en node v ikke kan fargelegges så vinner Bob. La oss se på dualgrafen til kartet fra Kapittel 2, illustrert i Figur 2.3 (ii). Vi kan spille nodefargeleggingsspillet på denne grafen. Vi vet at denne grafen kan fargelegges med bare fire farger, men betyr det at Alice vinner dersom spillerne kan velge farger fra en mengde bestående av bare fire farger?



Figur 6.3: Et eksempel på et nodefargeleggingsspill på en graf

Figur 6.3 viser et eksempel på et spill på denne grafen der Bob vinner. Tallene på nodene indikerer hvilket trekk det er. Det spiller ingen rolle hvor Alice spiller først, fordi Bob har en vinnerstrategi uansett. Årsaken til dette er at grafen består av fem noder, der to av nodene har grad 3 og tre av nodene har grad 4. Dersom Alice kunne ha garantert at én av nodene av grad 3 hadde blitt fargelagt til sist, ville hun vunnet. Men siden det er fem noder har hun det siste trekket, og Bob kan fargelegge de to nodene av grad 3 i sine trekk. Hvem som vinner i nodefargeleggingsspillet avhenger av hvor mange farger spillerne har å velge mellom og den maksimale graden til grafen $\Delta(G)$, altså graden til noden med høyest grad i grafen G. Vi kan la $\chi(G)$ være det minimale antallet farger nødvendig for at Alice skal vinne et nodefargeleggingsspill på grafen G. Da er $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ [Wik20a].

6.1.1 Kan det bli uavgjort?

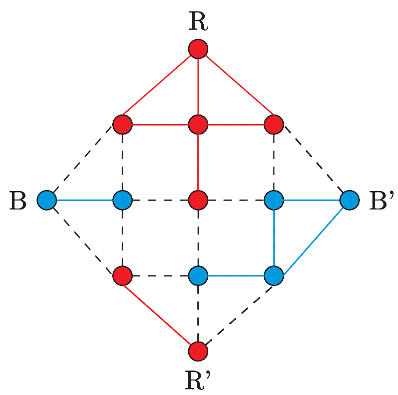
Vi har alt sett at i følge Hex-teoremet så kan ikke Hex ende uavgjort - den ene spilleren er altså garantert en vinst. Dette avhenger likevel av at vi spiller på et vanlig heksagonalt brett der rutene er sekskanter.

Da John Nash utviklet Hex tenkte han i utgangspunktet at det skulle spilles på et brett bestående av firkanter, og ikke sekskanter, men at to celler på brettet kunne kobles sammen dersom de lå på samme positive diagonal.

Dette er ekvivalent med et Hex-brett bestående av sekskanter. Vi så i kapittel 5 at vi kunne plassere noder i hvert av sekskantenes midtpunkt og trekke kanter mellom alle nodene. Deretter kan vi bruke en lineær transformasjon på brettet slik at det befinner seg i enhetskvadratet. Dermed er disse brettene ekvivalente.

Men hva hvis vi tenker oss et brett bestående av firkanter der to brikker ikke kan kobles dersom de ligger på samme positive diagonal? Kan vi likevel garantere at den ene spilleren vinner? Svaret på dette er nei, og vi kan overbevise oss selv om at dette stemmer ved å fortsette å se på Hex-brettet som en graf.

Eksempel 6.1.2. La oss se på et eksempel på et Hex-brett bestående av firkantede ruter representert som en graf. Dersom rød og blå spiller på samme celler som i Figur 6.2 og vi fyller inn de resterende nodene vilkårlig ser vi at spillet kan ende uavgjort. Figur 6.4 viser at rød og blå spiller uavgjort.

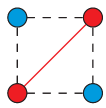


Figur 6.4: Et Hex-brett bestående av firkantede ruter representert som en graf. I eksempelet spiller rød og blå uavgjort.

Dette kan generaliseres mer. La oss se på et eksempel.

Eksempel 6.1.3. Vi påstår at dersom man spiller Hex på en graf som inneholder en simpel sykel av grad ≥ 4, kan spillet ende uavgjort.

For å vise dette trenger vi kun å vise til eksempler der spillet kan ende uavgjort. Vi begynner med et spill på et vanlig Hex-brett bestående av sykler av grad 3. Vi har tidligere vist at et slikt spill ikke kan ende uavgjort. Altså må enten rød eller blå klare å lage en sti fra den ene siden til den andre. Vi antar at alle nodene er farget enten rød eller blå, og at rød vinner. I tillegg antar vi at rød sin sti fra R til R' består av et kritisk punkt, der to noder kun kan kobles sammen av én kant, og at det ikke er mulig å koble disse nodene med to kanter. Vi har altså et punkt der to av rød sine noder som er inneholdt i stien er koblet sammen som vist i Figur 6.5, og blå okkuperer de to andre nodene som utgjør firkanten.



Figur 6.5: De røde nodene er kun koblet sammen med én kant, og blå okkuperer de to andre nodene som utgjør firkanten.

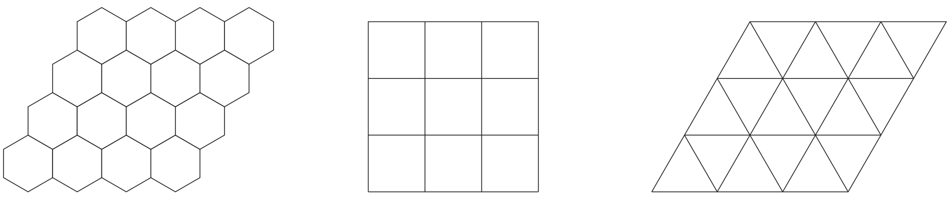
Nå fjerner vi kanten som kobler sammen de røde nodene. Nå har vi laget en sykel av grad 4. Det blir uavgjort. Vi fjerner en til kant som hører til sykelen av grad 4. Nå har vi en sykel av grad 5, og det er fremdeles uavgjort. Vi kan fortsette slik. Så, hvis Hex spilles på en graf som inneholder sykler av grad ≥ 4 kan spillet ende uavgjort.

6.2 Flislegging

Hex spilles vanligvis på et brett bestående av sekskanter, men er det mulig å spille Hex på brett bestående av andre polygoner eller andre former? For å finne ut av dette må vi undersøke de ulike måtene å tesselere planet på.

6.2.1 Regulære fliselegginger

Regulære flislegginger defineres som flislegginger bestående av samme type polygon. Det fins tre mulige slike flislegginger: 6.6.6, 4.4.4.4 og 3.3.3.3.3.3.

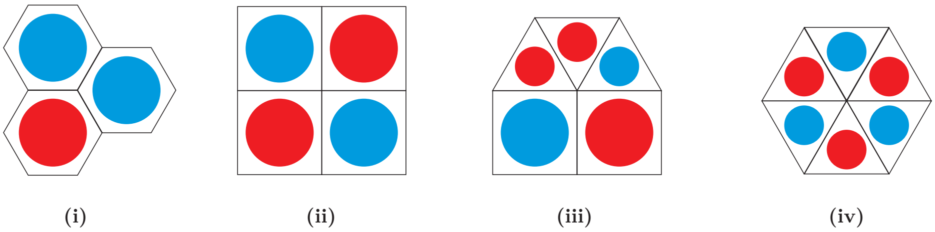


Figur 6.6: De tre regulære flisleggingene av planet. (i): 6.6.6, (ii): 4.4.4.4, (iii): 3.3.3.3.3.3

Det er mulig å spille Hex på alle disse mønstrene, men som vi har sett tidligere så er det ikke veldig spennende da spillerne kan blokkere hverandre og spille uavgjort. Dette gjelder både for flisleggingene 4.4.4.4 og 3.3.3.3.3.3.

Som vi så i Eksempel 6.1.3 så kan Hex ende uavgjort dersom det spilles på en graf består av minst én simpel sykel av grad ≥ 4. Dette er det samme som å si at det kan bli uavgjort dersom Hex spilles på et brett som inneholder et hjørne der fire eller flere celler møtes. La oss se på noen eksempler. Figur 6.7 viser fire forskjellige konfigurasjoner av regulære polygoner som møtes i et hjørne.

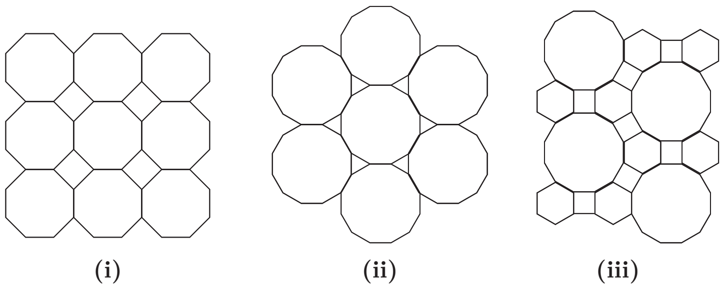
I Figur 6.7 (i) ser vi tre sekskanter som møtes i et hjørne. Spillerne, rød og blå, kan ikke blokkere hverandre siden alle tre sekskanter deler en kant med hverandre. I Figur 6.7 (ii), (iii) og (iv) ser vi konfigurasjoner der mer enn tre polygoner møtes i et hjørne. Siden ikke alle polygoner deler en kant med alle de andre polygonene, kan spillerne blokkere hverandre.



Figur 6.7: Fire forskjellige konfigurasjoner av polygoner som møtes i et hjørne. (i): Tre sekskanter, (ii): Fire kvadrater, (iii): To kvadrater og tre trekanter, (iv): Seks trekanter

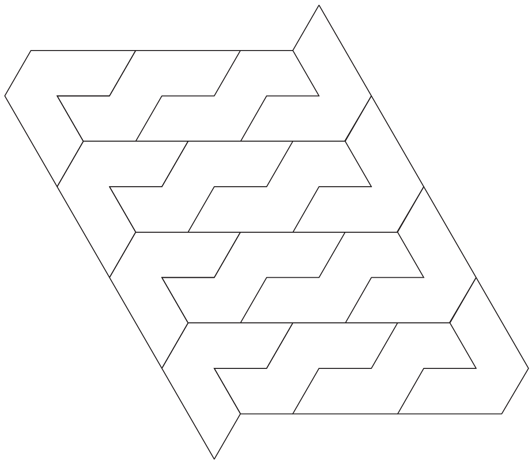
6.2.2 Semiregulære og irregulære flislegginger

Nå som vi har sett på regulære flislegginger kan vi undersøke semiregulære og irregulære flislegginger. En semiregulær flislegging består av polygoner (mer enn én type polygon) slik at konfigurasjonen av polygoner er lik rundt hvert hjørne. Vi har allerede sett ett eksempel, i figur Figur 6.7 (iii), på en del av en semiregulær flislegging kalt 3.3.3.4.4. Vi vet nå at Hex ikke kan ende uavgjort dersom det spilles på et brett der tre celler møtes i hvert hjørne. Finnes det semiregulære flislegginger som oppfyller denne betingelsen? Figur 6.8 viser de tre semiregulære flisleggingene som har denne egenskapen.



Figur 6.8: De tre semiregulære flisleggingene der tre polygoner møtes i hvert hjørne. (i): 4.8.8, (ii): 3.12.12, (iii): 4.6.12

Vi kan også konstruere brett som ikke består av regulære polygoner i det hele tatt. Se for eksempel på mønsteret i Figur 6.9. Dette er et eksempel på en irregulær flislegging, altså en flislegging som ikke består av regulære polygoner. I Figur 6.9 møtes tre figurer i hvert hjørne, noe som betyr at det ikke er mulig å spille uavgjort på et slikt brett.



Figur 6.9: Et eksempel på en irregulær flislegging der tre figurer møtes i hvert hjørne

KAPITTEL 7

Hex-teoremet og Brouwers fikspunktteorem

I dette kapittelet skal vi bevise at det alltid vil være nøyaktig én vinner i Hex og at Hex aldri kan ende uavgjort (Hex-teoremet). Vi skal også se på et velkjent resultat innen topoligien kalt Brouwers fikspunktteorem, og bevise at Hex-teoremet og Brouwers fikspunktteorem er ekvivalente.

7.1 Teori

De fleste resulatetene i dette kapittelet er hentet fra Gale (1979) [Gal79].

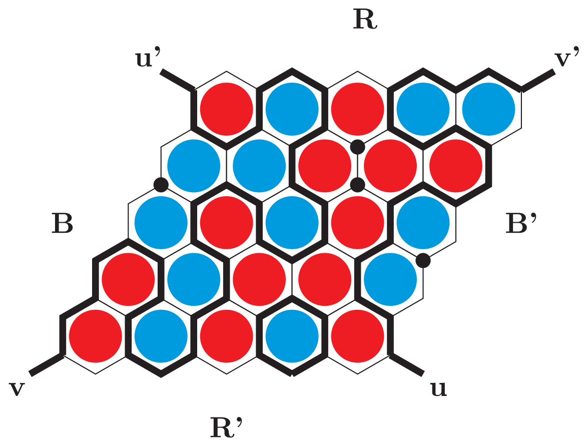
Teorem 7.1.1 (Hex-teoremet)**.** *[[Gal79, s. 820]] Hvis hver celle på Hex-brettet er okkupert av enten røde eller blå brikker, da fins det en rød kjede som kobler de røde regionene R og R' eller en blå kjede som kobler de blå regionene B og B', men ikke begge.*

Vi kan overbevise oss om at teoremet må stemme ved å tenke på følgende: Anta at Hex-brettet er laget av papir. Når det er rød spiller sin tur, så farger han en rute rød. Når det er blå spiller sin tur, så klipper han ut en rute på brettet. Spillerne fortsetter slik til alle ruter på brettet enten er farget rød eller klippet ut. Nå plukker vi opp brettet og holder fast i de røde kantene R og R'. Vi drar i brettet slik at hver hånd drar R og R' motsatt vei. Hvis det stopper opp, og vi ikke klarer å dra i brettet så må det bety at det finnes en rød sti fra R til R' som stopper oss i å dra brettet fra hverandre. Hvis vi derimot klarer å dra brettet fra hverandre må det bety at det finnes en blå sti fra B til B'.

For å bevise Hex-teoremet skal vi se på en kantgraf G på Hex-brettet. Vi tegner kanter ut fra hvert av hjørnene på brettet og lar disse kantene ende i hjørnene u, v, u' og v' som vist i Figur 7.1. Vi begynner i u og bruker følgende regel for å tegne kantgrafen fra u: Hver gang vi møter på et hjørne der nabocellene har forskjellig farge, så tegner vi en kant mellom disse cellene. Vi fortsetter slik helt til vi når ett av de tre andre hjørnene u', v eller v'. Vi lager også kantgrafer som forbinder de to resterende hjørnene ved å følge samme regel.

Dersom det fins celler på brettet som ikke er en del av noen av grafene som forbinder hjørnene på grafen, så tegner vi en graf bestående av en simpel sykel rundt disse cellene. De svarte prikkene i Figur 7.1 representerer isolerte noder.

Kantgrafen G består dermed av delgrafene som forbinder hjørnene u, v, u' og v', simple sykler og isolerte hjørner.



Figur 7.1: En kantgraf G på et Hex-brett av størrelse 5×5. Eksempelet viser en simpel sti fra v til u' og en simpel sti fra v' til u. I tillegg ser vi fire isolerte noder representert ved svarte prikker og én simpel sykel.

Lemma 7.1.2 ([Gal79, s. 820])**.** *En endelig graf med hjørner av grad ≤ 2 er unionen av disjunkte delgrafer, som hver er en av følgende:*

(i) *et isolert hjørne*

(ii) *en simpel sykel*

(iii) *en simpel sti*

Bevis. La G være en graf og n være antall kanter i G. Vi bruker induksjon på n.
Grunntilfellet: For $n = 0$ inneholder G kun en isolert node.

Induksjonssteget: Antar at hypotesen holder for $n = k$. Ser nå på grafen G med $n = k + 1$ kanter. Siden grafen inneholder hjørner av grad ≤ 2 kan vi se på to nabohjørner u og v som deler en kant. Hvis vi fjerner kanten (u, v) får vi en ny graf G' med $n = k$ kanter. Vi har antatt at hypotesen stemmer for G'. Ved å legge til (u, v) igjen får vi enten en simpel sti eller en simpel sykel, så hypotesen stemmer også for G. ∎

Bevis av Hex-teoremet. Vi ser på kantgrafen G som forklart tidligere i kapittelet. Se figur Figur 7.1 for en illustrasjon av G. Regelen vår garanterer at alle noder har grad ≤ 2, så i følge lemma Lemma 7.1.2 er G en disjunkt union av isolerte noder, simple sykler og simple stier. Siden cellene på brettet kun kan farges med to ulike farger, bestemmer regelen vår en entydig vei for de simple stiene. Det er kun fire noder inneholdt i G av grad 1, altså u, v, u' og v'. Alle andre noder har enten grad 0 (isolerte noder) eller grad 2 (noder på brettet inneholdt i simple stier eller simple sykler). Dermed må simple stier ende i u, v, u' og v'. Alle nodene på grafen har grad ≤ 2 noe som impliserer at vi kan ha simple stier fra u til v og fra u' til v', eller fra u til v' og v til u'. Vi kan ikke ha simple stier fra u til u' og v til v', for da ville vi hatt en node av grad ≥ 2.

Dersom vi har simple stier fra u til v og fra u' til v' vinner blå, og dersom vi har simple stier fra u til v' og v til u' vinner rød. Vi har dermed vist at det må finnes enten en rød kjede fra R til R' eller en blå kjede fra B til B', men ikke begge. ∎

I dette kapittelet skal vi bevise Hex-teoremet og Brouwers fikspunktteorem og vise at teoremene impliserer hverandre. Før vi kan bevise Brouwers fikspunktteorem må vi inntrodusere noen topologiske begreper.

Definisjon 7.1.3. En loop i et topologisk rom M er en kontinuerlig avbildning $f\colon [0,1] \to M$ slik at $f(0) = f(1)$.

To funksjoner kalles homotopiske (det fins en homotopi mellom dem) dersom de kan deformeres på kontinuerlig vis til hverandre. For to kontinuerlige funksjoner g og f fra et topologisk rom X til et topologisk rom Y, definerer vi en homotopi mellom dem som $H\colon X \times [0,1] \to Y$ slik at $H(x,0) = f(x)$ og $H(x,1) = g(x)$ for alle $x \in X$.

Definisjon 7.1.4. Fundamentalgruppen til et topoligisk rom defineres som gruppen av ekvivalensklasser av loopene som er inneholdt i rommet, opp til homotopi.

Eksempel 7.1.5. La oss se på fundamentalgruppen til en sirkel og fundamentalgruppen til en disk. Enhver loop inneholdt i disken $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq 1\}$ kan trekkes sammen og deformeres slik at den er homotopisk med den konstante loopen plassert i origo. Fundamentalgruppen til disken er dermed triviell, altså 0.

Enhver ekvivalensklasse mellom homotopiene i en sirkel består av alle looper som går rundt sirkelen et gitt antall ganger (det kan være i positiv og negativ retning). Fundamentalgruppen til sirkelen er dermed $\mathbb{Z}$.

Lemma 7.1.6 ([Gal79, s. 823])**.** *Anta at $f\colon X \to X$ er en kontinuerlig funksjon og at X er en kompakt delmengde av R^k. Hvis det for hver $\epsilon > 0$ fins en x slik at $|f(x) - x| < \epsilon$, da har f et fikspunkt.*

Bevis. Dette beviset er hentet fra [Cal13]. Vi antar at $f\colon X \to X$ er kontinuerlig og at X er en kompakt delmengde av R^k. Videre antar vi at for hver $\epsilon > 0$ så fins en x slik at $|f(x) - x| < \epsilon$. Vi lar $\epsilon = \frac{1}{n}$ for $n \in \mathbb{N}$ og $(x_{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge slik at for hver x i $(x_{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ så er $|f(x) - x| < \epsilon$. Siden X er kompakt vil $(x_{1/n})$ ha en konvergent delfølge (x_{n_m}) som konvergerer mot et punkt x'. Siden $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = x'$ kan vi finne en $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{3}$ slik at $|x_{n_M} - x'| < \epsilon_1 = \frac{\epsilon}{3}$ for en tilstrekkelig stor $M \in \mathbb{N}$. Ved trekantulikheten har vi at

$$|f(x') - x'| \leq |f(x') - f(x_{n_M})| + |f(x_{n_M}) - x_{n_M}| + |x_{n_M} - x'| \tag{7.1}$$

Siden f er kontinuerlig på en kompakt delmengde av R^k, er f uniformt kontinuerlig. Siden f er uniformt kontinuerlig kan vi finne en $\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{3}$ slik at $|f(x') - f(x_{n_m})| < \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{3}$. Vi har antatt at for hver $\epsilon > 0$ så fins x_ϵ slik at $|f(x_\epsilon) - x_\epsilon| < \epsilon$. Dermed kan vi også finne en $\epsilon_3 = \frac{\epsilon}{3}$ slik at $|f(x_{n_M}) - x_{n_M}| < \epsilon_3 = \frac{\epsilon}{3}$.

Så $|f(x') - x'| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$. Siden ϵ var vilkårlig kan vi la den være tilstrekkelig liten slik at $|f(x') - x'| = 0$. Dermed er x' et fikspunkt for f. ∎

Definisjon 7.1.7. En mengde Q i R^k er konveks dersom for to gitte punkter A og B i Q, så inneholder Q linjesegmentet $\overline{AB}$.

Definisjon 7.1.8. En konvekskombinasjon er en lineærkombinasjon av punkter der alle koeffisientene er ikkenegative og summerer til 1. Altså, gitt punkter $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i et reelt vektorrom, så er en konvekskombinasjon av disse gitt på formen

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_1 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$$

der $\lambda_i \in [0,1]$ og $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Definisjon 7.1.9. Den konvekse innhyllingen til en mengde punkter $P \in \mathbb{R}^n$ er den minste konvekse mengde Q som inneholder punktene i P. Hvis $\{x_1, \ldots, x_n\}$ er en mengde startvektorer, da er den konvekse innhyllingen K til disse vektorene mengden av alle punkter som kan skrives som en konvekskombinasjon av startvektorene. Så, hvis det fins $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ der $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ og $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$, så definerer vi

$$K = \{y \colon \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = y\}$$

Lemma 7.1.10 ([Gal79, s. 824])**.** *La z_1, z_2, z_3 være hjørnene til en trekant i $\mathbb{R}^2$. La p være en avbildning definert på hjørnene til trekanten slik at $p(z_i) = z_i + v_i$, der v_1, v_2, v_3 er gitte vektorer i $\mathbb{R}^2$. La $\tilde{p}$ være en stykkevis lineær utvidelse av p slik at $\tilde{p} \colon \triangle \to \mathbb{R}^2$ er definert ved $\tilde{p}(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3) = \lambda_1 p(z_1) + \lambda_2 p(z_2) + \lambda_3 p(z_3)$. Da har $\tilde{p}$ et fikspunkt hvis og bare hvis 0 ligger i den konvekse innhyllingen til v_1, v_2 og v_3.*

Vi kan argumentere for at lemma Lemma 7.1.10 stemmer ved å sette inn i formelen.

Bevis. Vi skal vise at

$$\tilde{p} \text{ har et fikspunkt} \Leftrightarrow 0 \in K$$

der K er den konvekse innhyllingen til v_1, v_2 og v_3. Vi har:

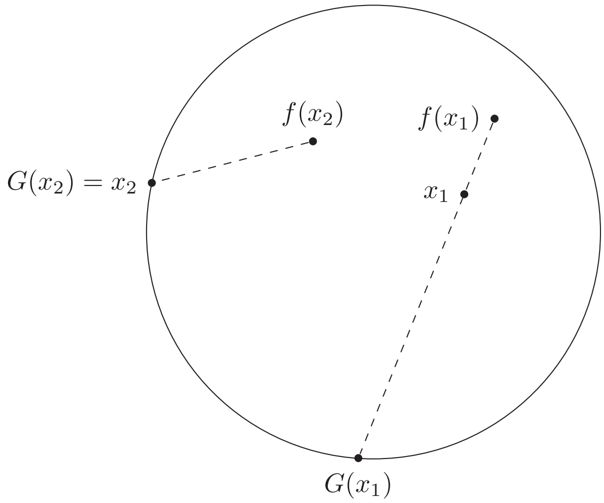
$$\begin{aligned}
\tilde{p}(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3) &= \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 \\
&\Updownarrow \\
\lambda_1 p(z_1) + \lambda_2 p(z_2) + \lambda_3 p(z_3) &= \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 \\
&\Updownarrow \\
\lambda_1 (z_1 + v_1) + \lambda_2 (z_2 + v_2) + \lambda_3 (z_3 + v_2) &= \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 \\
&\Updownarrow \\
\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_2 &= 0
\end{aligned}$$

∎

Teorem 7.1.11 (Brouwers fikspunktteorem)**.** *La f være en kontinuerlig avbildning fra enhetsdisken D^2 på seg selv, der $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$. Da fins $x \in D^2$ slik at $f(x) = x$.*

Bevis. Beviset er hentet fra [Eva17]. Vi antar at f er kontinuerlig, men $f(x) \neq x$ for alle $x \in D^2$.

Siden $f(x) \neq x \;\; \forall x \in D^2$ kan vi definere en ny funksjon $G\colon D^2 \to \partial D^2$ slik at $G(x)$ er punktet på ∂D^2 vi får når vi trekker en linje fra $f(x)$ og gjennom x. Da har vi at G er kontinuerlig og hvis $x \in \partial D^2$ så er $G(x) = x$. Se på figuren:



Figur 7.2: Funksjonen G(x)

Vi lar $\iota\colon \partial D^2 \to D^2$ være inklusjonsavbildningen. Da er identitetsavbildningen på ∂D^2 komposisjonen av G med ι, altså $id_{\partial D^2} = G \circ \iota$.

Nå har vi funnet kontinuerlige avbildninger fra ∂D^2 til D^2 og tilbake til ∂D^2, altså

$$\partial D^2 \xrightarrow{\iota} D^2 \xrightarrow{G} \partial D^2 \tag{7.2}$$

Vi har at fundamentalgruppen π_1 til ∂D^2 er $\pi_1(\partial D^2) = \mathbb{Z}$. Vi har også at $\pi_1(D^2) = 0$.

Kontinuerlige avbildninger mellom topologiske rom induserer homomorfier mellom deres fundamentalgrupper. Vi har altså følgende:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\iota_*} 0 \xrightarrow{G_*} \mathbb{Z} \tag{7.3}$$

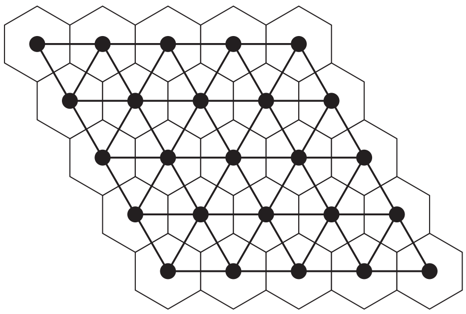
Dermed er $(G_* \circ \iota_*)(\gamma) = 0$ for alle $\gamma \in \mathbb{Z}$. Men siden $id_{\partial D^2} = G \circ \iota$ betyr det at $(G \circ \iota)_*(\gamma) = \gamma$ for alle $\gamma \in \mathbb{Z}$.

Vi har nådd en motsigelse siden $(G \circ \iota)_* = G_* \circ \iota_*$. Det følger at det ikke kan finnes en slik funksjon G, og dermed må det bety at f har et fikspunkt. ■

7.2 Ekvivalens mellom Hex-teoremet og Brouwers fikspunktteorem

Poenget med å ta opp Brouwers fikspunktteorem er for å vise at dette er ekvivalent med Hex-teoremet.

For å kunne vise dette vil vi først gjøre om Hex-brettet til en graf. Vi kan bruke en lineær transformasjon til å gjøre om det vanlige Hex-brettet med heksagonale ruter til en graf. I den grafiske framstillingen av Hex-brettet representerer hjørnene midtpunktene til de heksagonale cellene, og kantene representerer nærliggende celler. Det fins altså en kant mellom to hjørner dersom cellene er nærliggende.



Figur 7.3: Grafisk representasjon av et 5×5 Hex-brett

Vi ser at vi kan bruke en lineær transformasjon til å gjøre om denne grafen slik at den ligger i enhetskvadratet I^2. Områdene N og S representerer R og R'. Hjørnene som er en del av disse mengdene er altså de cellene på Hex-brettet som grenser til randen der den røde spilleren skal prøve å lage en vinnende sti. Områdene W og E representerer B og B'.

Vi kaller det todimensjonale Hex-brettet for B_k, der B_k er en graf av størrelse k. Hjørnene i B_k er alle $z \in \mathbb{Z}^2$ slik at $(1,1) \leq z \leq (k,k)$. To hjørner z og z' er naboer i B_k (det fins en kant mellom dem), dersom $|z - z'| = 1$. Vi bruker notasjonen $z = (z_1, z_2)$ for et hjørne i B_k. Kantene S, W, E og N består av hjørnene (z_1, z_2) der $z_1 = 0$ eller $z_1 = k$ og $z_2 = 0$ eller $z_2 = k$.

Siden B_k er av størrelse k må vi dele punktene i B_k på k når vi avbilder B_k inn i I^2.

Nå kan vi skrive om Hex-teoremet ved å bruke den nye notasjonen vi har innført.

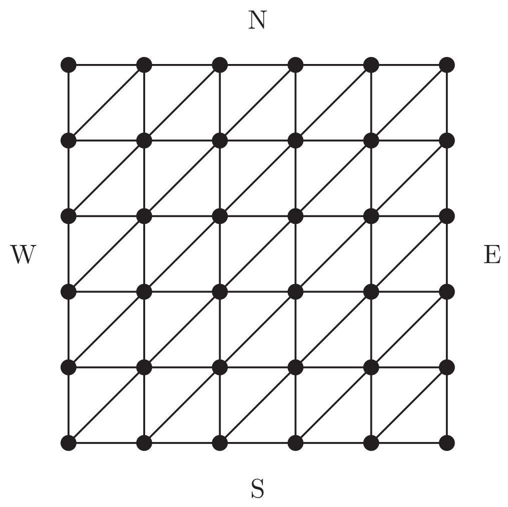
Teorem 7.2.1. *[Gal79, s. 822] La B_k være dekket av to mengder H og V. Da vil enten H inneholde en sammenhengende mengde som kobler W og E eller så vil V inneholde en sammenhengende mengde som kobler N og S.*

Teorem 7.2.2. *[Gal79, s. 822] Hex-teoremet impliserer Brouwers fikspunktteorem.*

Bevis. Beviset er hentet fra [Gal79, s. 823]. Siden I^2 er en kompakt delmengde av R^2 og $f\colon I^2 \to I^2$ er kontinuerlig på I^2 kan vi bruke Lemma 7.1.6. Dermed trenger vi kun å vise at for hver $\epsilon > 0$ så fins $x' \in I^2$ slik at $|f(x') - x'| < \epsilon$.

Vi lar $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Siden f er kontinuerlig på I^2, og I^2 er en kompakt delmengde av $\mathbb{R}^2$, er f uniformt kontinuerlig på I^2. Det vil si at gitt $\epsilon > 0$ så fins $\delta > 0$ slik at $\delta < \epsilon$ og hvis $|x - x^*| < \delta$ så er $|f(x) - f(x^*)| < \epsilon$. Vi lar $\delta > \frac{1}{k}$, og ser på følgende delmengder av B_K:

$$H^+ = \{z \in B_K\colon f_1(\tfrac{z}{k}) - \tfrac{z_1}{k} > \epsilon\}$$



Figur 7.4: Grafisk representasjon av et 5×5 Hex-brett i I^2

$$H^- = \{z \in B_K : \tfrac{z_1}{k} - f_1(\tfrac{z}{k}) > \epsilon\}$$
$$V^+ = \{z \in B_K : f_2(\tfrac{z}{k}) - \tfrac{z_2}{k} > \epsilon\}$$
$$V^- = \{z \in B_K : \tfrac{z_2}{k} - f_2(\tfrac{z}{k}) > \epsilon\}$$

Vi kan tenke på disse mengdene som at et hjørne z i B_K tilhører H^+ hvis $\frac{z}{k}$ avbildes av f mer enn en ϵ til høyre, og z tilhører H^- hvis den avbildes av f mer enn en ϵ til venstre. Tilsvarende vil z tilhøre V^+ eller V^- hvis den avbildes mer enn en ϵ oppover eller nedover.

Vi lager følgende regel: Hvis et hjørne i B_K tilhører H^+ eller $H-$ så farger vi hjørnet blått, og hvis det tilhører V^+ eller V^- så farger vi det rødt. Hvis et hjørne tilhører både en H-og en V-mengde, så farger vi det blått.
I følge Hex-teoremet har vi at hvis alle hjørner i B_K er farget, så må det finnes en sti fra N til S eller fra W til E. Vi antar at det finnes en slik blå sti fra W til E. Da må det finnes et hjørne som er farget blått på W og et hjørne som er farget blått på E. Siden f sender I^2 til I^2 er det ingen hjørner på E som kan sendes mer enn en ϵ til høyre. Dermed må dette hjørnet tilhøre H^-. Det er heller er ingen hjørner på E som kan sendes minst en ϵ til venstre, så dette hjørnet må tilhøre H^+. Dermed må den blå stien inneholde elementer fra både H^+ og H^-. Nå skal vi vise at $H^+ \cup H^-$ ikke er sammenhengende.

Hvis $z \in H^+$ og $z^* \in H^-$ så har vi at $f_1(\frac{z}{k}) - \frac{z_1}{k} > \epsilon$ og $\frac{z_1^*}{k} - f_1(\frac{z^*}{k}) > \epsilon$. Vi legger sammen disse ulikhetene og får:

$$f_1\left(\frac{z}{k}\right) - \frac{z_1}{k} + \frac{z_1^*}{k} - f_1\left(\frac{z^*}{k}\right) > 2\epsilon \tag{7.4}$$

Hvis z og z^* er nærliggende hjørner og $z_1^* > z_1$, er $z_1^* - z_1 = 1$. Siden $\delta > \frac{1}{k}$ har vi dermed at

$$\frac{z_1^*}{k} - \frac{z_1}{k} = \frac{1}{k} < \delta < \epsilon \tag{7.5}$$

Det betyr at

$$\frac{z_1}{k} - \frac{z_1^*}{k} > -\epsilon \tag{7.6}$$

Nå kan vi legge sammen 7.4 og 7.6, og vi ser at

$$f_1\left(\frac{z}{k}\right) - f_1\left(\frac{z^*}{k}\right) > \epsilon \tag{7.7}$$

Dette motstrider den uniforme kontinuiteten av f, for nå har vi funnet to hjørner z og z^* slik at $|\frac{z}{k} - \frac{z^*}{k}| < \delta$, men $|f(\frac{z}{k}) - f(\frac{z^*}{k})| > \epsilon$. Dermed må antagelsen vår om at det finnes to nærliggende hjørner z og z^* der $z \in H^+$ og $z^* \in H^-$ være feil. Det følger at $H = H^+ \cup H^-$ ikke er sammenhengende. Tilsvarende er ikke $V = V^+ \cup V^-$ sammenhengende. Det følger at det ikke kan være noen blå sti fra W til E, og heller ingen rød sti fra N til S. Dette impliserer at brettet ikke kan være fullt, så mengdene H og V dekker ikke B_K. Da finnes $z \in B_K$ slik at $|f(\frac{z}{k}) - \frac{z}{k}| < \epsilon$, og vi har fullført beviset.

■

Nå har vi vist at Hex-teoremet impliserer Brouwers fikspunktteorem, men det viser seg at motsatt implikasjon også stemmer. Vi skal nå vise at Brouwers fikspunktteorem impliserer Hex-teoremet. Vi presiserer følgende teorem:

Lemma 7.2.3. *[Gal79, s. 824] Ethvert punkt i I^2 kan uttrykkes unikt som en konvekskombinasjon av en mengde av maksimalt tre hjørner i B_k, der alle hjørnene er parvis naboer.*

Bevis. Vi betrakter et punkt $P \in I^2$. Dersom P er et hjørne i B_k trenger vi ikke vise noe. Dersom P ligger på en kant som forbinder to nabohjørner z^1 og z^2 i B_k, da ligger P på linjesegmentet mellom dem, altså på $\overline{z^1 z^2} = \{(t-1)z^1 + tz^2 : t \in [0,1]\}$. Dermed kan P uttrykkes som en konvekskombinasjon av z^1 og z^2.

Dersom P hverken ligger på et hjørne eller på en kant i B_k, så ligger P inni en trekant som består av hjørner z^1, z^2, z^3 i B_k, der hjørnene er parvis naboliggende. Den konvekse innhyllingen av disse hjørnene er trekanten som hjørnene danner. Per definisjon kan dermed P skrives som en konveks kombinasjon av disse.

■

Teorem 7.2.4. *[Gal79, s. 824] Brouwers fikspunktteorem impliserer Hex-teoremet*

Bevis. Beviset er hentet fra [Gal79, s. 824]. I følge Lemma 7.2.3 kan ethvert punkt i I^2 kan uttrykkes unikt som en konvekskombinasjon av maks tre hjørner i B_K, der hjørnene er parvis ved naboliggende.

Enhver kontinuerlig avbildning $f : B_K \to \mathbb{R}^2$ kan utvides til en kontinuerlig stykkevis lineær avbildning $\tilde{f} : I_K^2 \to \mathbb{R}^2$. Hvis $x = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3$, der $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ og $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$, da er

$$\tilde{f}(x) = \lambda_1 f(z_1) + \lambda_2 f(z_2) + \lambda_3 f(z_3) \tag{7.8}$$

Vi ser at dette er en utvidelse av f fordi $\tilde{f}(B_K) = f(B_K)$, og $\tilde{f}$ er kontinuerlig fordi f er kontinuerlig.

Vi antar at B_K er delt opp i to partisjoner H og V, og definerer fire mengder:

$$\tilde{W} = \{\text{Alle hjørner } z \text{ som er inneholdt i en } H\text{-sti som er koblet til } W\}$$
$$\tilde{E} = H \setminus \tilde{W}$$
$$\tilde{S} = \{\text{Alle hjørner } z \text{ som er inneholdt i en } V\text{-sti som er koblet til } S\}$$
$$\tilde{N} = V \setminus \tilde{S}$$

Fra definisjonen av disse mengdene er det tydelig at $\tilde{W}$ og $\tilde{E}$ er disjunkte og at $\tilde{S}$ og $\tilde{N}$ er disjunkte.

Vi antar at det ikke fins noen H-sti fra W til E og ingen V-sti fra N til S. Vi lar $e_1 = (1, 0)$ og $e_2 = (0, 1)$ være enhetsvektorene i $\mathbb{R}^2$, og definerer avbildningen $f\colon B_K \to B_K$ ved

$$f(z) = \begin{cases} z + e_1, & z \in \tilde{W} \\ z - e_1, & z \in \tilde{E} \\ z + e_2, & z \in \tilde{S} \\ z - e_2, & z \in \tilde{N} \end{cases}$$

Nå må vi sjekke at $f(z) \in B_K$. Hvis $f(z) = z + e_1$ er $f(z) \notin B_K$ kun dersom $z \in E$. Siden vi har antatt at det ikke finnes noen H-sti fra W til E, og vi vet at $z \in W$ betyr det at $z \notin E$. Tilsvarende kan vi vise at $f(z) \in B_K$ for de resterende tilfellene.

Vi utvider f til en stykkevis lineær funksjon i I_K^2 som definert i 7.8. Vi bruker Lemma 7.1.10 på avbildningen f.

Vi betrakter tre hjørner i B_K som er parvis nærliggende og danner en trekant. Hvis ett av hjørnene i trekanten forflyttes med e_i, så kan ikke et av de andre hjørnene forflyttes med $-e_i$. Dette er fordi $\tilde{E}$ og $\tilde{W}$, og $\tilde{N}$ og $\tilde{S}$ er disjunkte.

Hjørnene forflyttes altså av vektorer fra samme kvadrant, altså enten av e_1 og/eller e_2 eller av $-e_1$ og/eller $-e_2$. Dermed kan ikke 0 ligge i den konvekse innhyllingen av vektorene som flytter hjørnene i trekanten. I følge Lemma 7.1.10 har vi nå funnet en avbildning uten fikspunkter. Dette er en motsigelse ved Brouwers fikspunktteorem. Det må altså finnes en H-sti fra W til E eller en V-sti fra N til S. Dette fullfører beviset. ■

7.3 Hex i n dimensjoner

Gale (1979) generaliserer Hex til n dimensjoner, der nodene på Hex-brettet er vektorer i stedet. I artikkelen hans presenterer han også et bevis for Hex-teoremet i n dimensjoner.

Definisjon 7.3.1. [Gal79, s. 825] Det $n-$dimensjonale Hex-brettet av størrelse k, H_k^n består av vektorer $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$ slik at $1 \leq z_i \leq k$ for $i = 1, \ldots, n$.

Som for $2-$dimensjonal Hex kan vi definere at to noder (vektorer) z og z' er naboer dersom $|z - z'| = 1$ og dersom $z_i \geq z_i'$ eller $z_i' \geq z_i$ for alle i.

For hver i kaller vi målområdene til spillerne for H_i^+ og H_i^-, og definerer

$$H_i^- = \{z \in H_k^n \ : \ z_i = 1\}$$
$$H_i^+ = \{z \in H_k^n \ : \ z_i = k\}$$

Vi definerer også en funksjon $L\ colon H_k^n \to N$ der $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Teorem 7.3.2 (Hex-teoremet i n dimensjoner)**.** *[[Gal79, s. 825]] For enhver $L\colon H_k^n \to N$ fins minst én $i \in N$ slik at $L^{-1}(i)$ inneholder en sammenhengende mengde som møter H_i^- og H_i^+.*

Vi skal ikke se videre på beviset for Teorem 7.3.2, men henviser til [Gal79, s. 825] for et bevis. Vi kan likevel observere at tredimensjonal Hex er et spill for tre personer der hver person eier hver sin flate av en kube, og forsøker å koble to motstående flater. Vi vet at todimensjonal Hex aldri kan ende uavgjort, men i følge Teorem 7.3.2 er ikke det nødvendigvis tilfelle i n-dimensjonal Hex. For eksempel, i tredimensjonal Hex er det mulig for to av spillerne å fullføre en vinnende sti (så lenge vi ikke spiller under normal konvensjon, og spillerne fortsetter selv om én av dem har fullført en vinnende sti). Vi så tidligere at Hex-teoremet kan relateres til firefargeproblemet. Både firefargeproblemet og Hex-teoremet er resultater som holder i planet, men ikke i høyere dimensjoner. Firefargeproblemet holder for eksempel ikke på en torus, da man kan finne eksempler der man behøver 7 farger for å fargelegge et kart på torusen [Wik22c].

KAPITTEL 8

Andre matematiske spill

8.1 Teori

Hex er en del av en klasse med spill som kalles "connection games", eller tilkoblingsspill på norsk. Tilkoblingsspill er en form for abstrakte strategispill der spillerne forsøker å fullføre en form for tilkobling med brikkene sine [Wik22b]. I dette kapittelet skal vi se på noen versjoner av tilkoblingsspill, samt Rex (altså misère-versjonen av Hex).

De aller fleste resultatene og bevisene i dette kapittelet er hentet fra Hayward og Toft (2019) [HT19]. Først skal vi introdusere et lemma som vi skal bruke til bevise et Rex-teorem senere i kapittelet. Vi må først definere begrepet TRex. Rex er som nevnt misereversjonen av Hex. Målet med Rex er altså å tvinge motstanderen til å fullføre en kjede som forbinder motstanderen sine sider. TRex (Terminated Rex") spilles på samme måte som Rex, bare at vi introduserer én ekstra regel. Dersom ingen av spillerne har vunnet, og det er nøyaktig én gjenværende ledig rute på brettet, så sier vi at spillet ender uavgjort.

Lemma 8.1.1. *Anta at vi har en posisjon og en spiller X med en vinnerstrategi i TRex. Det å fjerne en farge fra en celle på brettet, eller å fargelegge en tom celle på brettet vil resultere i en ikke-tapende strategi for X.*

Beviset er også hentet fra HT19:

Bevis. Vi ser først på tilfellet der vi fjerner en farge fra en celle på brettet. Vi antar at vi har en posisjon P og to spillere X og Y. I denne posisjonen antar vi at spiller X har en vinnerstrategi S. Vi fjerner fargen til en celle c fra P. Spiller X later som at c fremdeles er farget, og fortsetter å følge S. Dersom Y spiller på c, så later X som at Y har spilt på en tom celle d, og fortsetter å følge S. Vi kaller det ekte spillet for G og spillet som X later som at finner sted for G'. Siden X later som at Y spiller på en tom celle d i stedet for på c så vil det være én færre celle i G enn i G'. I G' vil X vinne ved å følge S dersom Y klarer å koble sammen sine to sider. Hvis Y også klarer å koble sine to sider i G, så vinner X. Dersom Y ikke kobler sine sider i G, så må det bety at den cellen q som mangler i G er en del av stien til Y som gjør at Y kan koble sine to sider. Dermed må X følge en ny strategi. Denne strategien går ut på å ikke spille på q. Ettersom q også må være en del av stien som kobler X sine to sider, så vil X nå ha en ikke-tapende strategi.

Nå ser vi på tilfellet der vi fargelegger en tom celle på brettet. Vi ser på en posisjon P der celle c ikke er farget, og vi antar at X har en vinnerstrategi i denne posisjonen. Så ser vi på posisjonen P' som vi kan oppnå ved å fargelegge c fra P. Vi antar nå at X taper i P'. Da vil Y ha en vinnerstrategi. Ved å fjerne fargen til c fra P' ser vi at Y ikke taper i P (dette følger fra det foregående tilfellet). Dette motsiger antagelsen om at X har en vinnerstrategi i P. ■

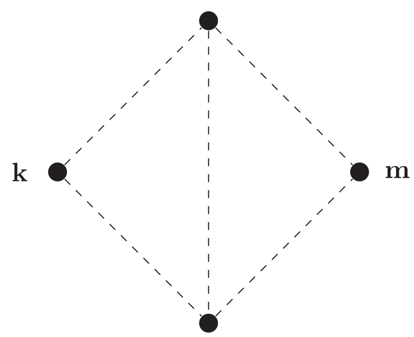
Lemma 8.1.2. *For et tomt $n \times n$-brett i TRex har begge spillerne en ikke-tapende strategi.*

Bevis. Vi lar A være spilleren som tar det første trekket. Vi antar at B har en vinnerstrategi, der B er enten A eller $-A$. Etter at A har gjort første trekk er det $-A$ sin tur, og B kan fremdeles vinne. Nå fjerner vi fargen til cellen som A spilte på. Det er nå $-A$ sin tur, brettet er tomt og ved Lemma 8.1.1 så kan B unngå å tape. Hvis vi nå bytter om fargene og spillerne så er det A sin tur, brettet er fremdeles tomt og $-B$ kan unngå å tape. Dette er en motsigelse. Det følger at begge spillerne i TRex har en ikke-tapende strategi. ■

8.2 Shannon switching game

Hex er et spesielt tilfelle av en generell klasse med spill som heter Shannon switching games.

Shannon switching games spilles på en graf der to hjørner er koblet sammen av en kant. Det er to spillere: Kort og Kutt. Kort forsøker å koble sammen hjørnene m og k ved å lage en kortslutning. Kutt forsøker å kutte koblingene.



Figur 8.1: Shannon switching game. Kort prøver å koble sammen hjørnene k (kilde) og m (mottaker)

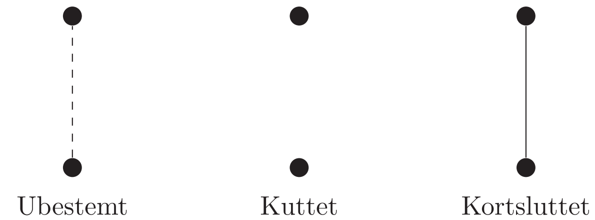
En kant kan befinne seg i én av de tre følgende tilstandene: ubestemt, kuttet eller kortsluttet. Se Figur 8.2.

Terminologien til spillet kommer fra læren om elektriske kretser, og selve spillet kan sees på som en analogi til en elektrisk krets.

Shannon switching games kan spilles på kantene eller på hjørnene.

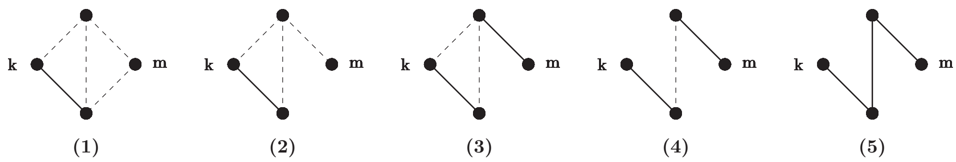
8.2.1 Spille på kantene

Når man spiller Shannon switching games på kantene skal spillerne på sin tur velge seg en kant. Kort velger en kant som hun kortslutter, altså hun lager en kobling mellom de to hjørnene som forbindes av kanten. Kutt velger en kant som hun fjerner.



Figur 8.2: En kant kan være i én av disse tilstandene

Figur 8.3 viser et eksempel der Kort spiller først og vinner.

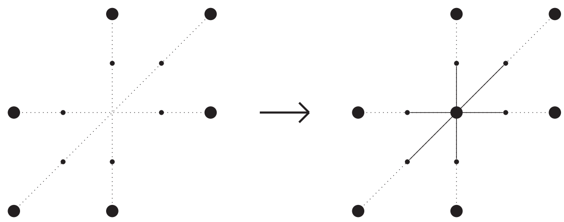


Figur 8.3: Et eksempel på et Shannon switching game spilt på kantene. Kort spiller først og vinner

8.2.2 Spille på hjørnene

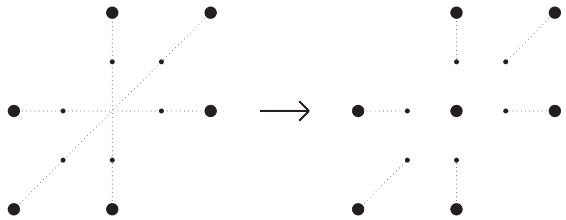
Hex er som tidligere forklart en spesiell versjon av Shannon switching game. I forrige delkapittel så vi på hvordan Shannon switching game kan spilles på kantene. Det er derimot også mulig å spille på hjørnene. Hex tilhører denne sjangeren av Shannon switching games.

Nå ser vi på kantene som om de består av to halvkanter, med et hjørne i mellom dem. Når det er Kutt sin tur vil hun velge et hjørne og deretter kutte alle halvkanter fra dette hjørnet. Figur 8.5 illustrerer dette. Når det er Kort sin tur velger hun et hjørne og konsoliderer koblinger langs alle halvkanter fra dette hjørnet. Figur 8.4 illustrerer dette.

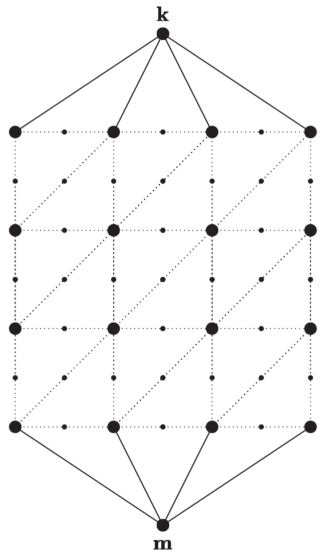


Figur 8.4: Illustrasjon av hva som skjer når Kort spiller på et hjørne

Figur 8.6 viser hvordan et 4×4 Hex-brett ser ut som et shannon switching game.



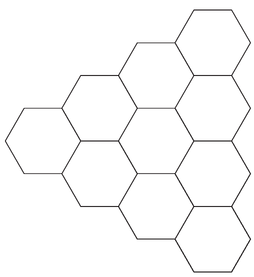
Figur 8.5: Illustrasjon av hva som skjer når Kutt spiller på et hjørne



Figur 8.6: 4×4 Hex som et shannon switching game

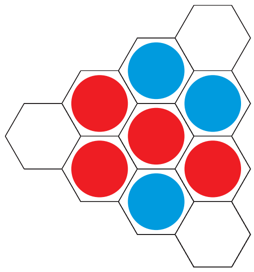
8.3 Y

Slik som Hex, så er Y et tilkoblingsspill for to spillere der spillerne forsøker å fullføre en kobling med sine brikker. På sin tur plasserer spillerne en brikke i sin farge på brettet, og spillet fortsetter helt til den ene spilleren har klart å lage en vinnende sti. Y spilles på et trekantet brett bestående av heksagonale ruter og n ruter per side [Wik20b]. Figur 8.7 illustrerer et Y-brett med 4 ruter per side.



Figur 8.7: Et Y-brett med 4 ruter på hver side.

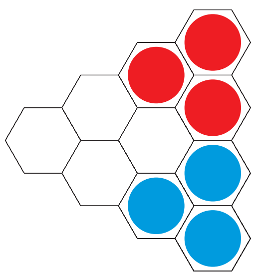
I Y er målet å koble alle de tre sidene av brettet. Den første spilleren som klarer å koble de tre sidene vil altså vinne. Figur 8.8 illustrerer et eksempel der rød vinner.



Figur 8.8: Et Y-brett med sider av lengde 4. I eksempelet vinner rød.

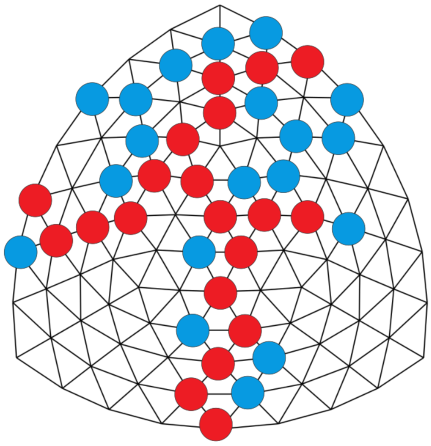
Slik som Hex så innehar Y en stor fordel for den første spilleren [Wik20b]. Den første spilleren har en vinnerstrategi som innebærer å plassere sin brikke på ruten i midten i første trekk. Siden brettet er formet som en trekant så vil avstanden fra den midterste ruten til den nærmeste ruten på kantene være 1/3 så stor som avstanden fra et hjørne til et annet hjørne. Vi kan bruke et strategistjelingsargument for å bevise at første spiller har en vinnerstrategi, men vi skal ikke presentere beviset her. Vi refererer til beviset for at første spiller har en vinenrstrategi i Hex, og at beviset for Y egentlig er det samme. Hex spilles ofte med bytteregelen, der andre spilleren kan velge å bytte farge med den første spilleren i sitt første trekk. Y spilles ofte med en lignende regel kalt kakeregelen. Navnet kommer fra analogien til en kake der ett barn blir bedt om å skjære kakestykkene og det andre barnet får velge hvem som får hvilket stykke. I Y innebærer kakeregelen at den første spilleren velger det første trekket og den andre spilleren velger hvem som spiller først. Dersom kakeregelen implementeres vil den andre spilleren ha en vinnerstrategi. Dette kommer av at den andre spilleren kan evaluere om første trekk er et vinnertrekk, og dersom det er det kan velge å bli første spiller [Wik20b].

Hex er et spesielt tilfelle av Y. For et hvert Hex-spill kan man finne et tilsvarende Y-spill slik at spillene har isomorfe spilltrær. Med dette mener vi at fra tilsvarende posisjoner i spilltreet så er det en $1-1$ korrespondanse mellom antallet tilgjengelige trekk og terminalposisjoner har samme vinner [Bro05, s. 78]. Figur 8.9 illustrerer dette. For en hver Hex-posisjon, start fra Y-posisjonen i Figur 8.9 og plasser brikkene slik at de tilsvarer plasseringene på Hex-brettet.



Figur 8.9: Y generaliserer Hex

Siden første spiller har en såpass massiv fordel i Y, har det blitt lansert Y-brett som minimerer fordelen til den første spilleren. Figur 8.10 illustrerer et slikt Y-brett, og viser et eksempel der rød vinner. Her spiller man brikkene sine på nodene.



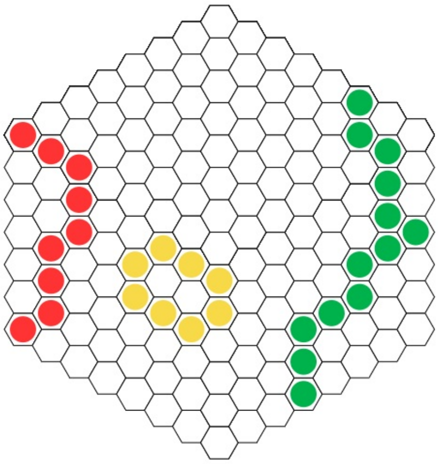
Figur 8.10: Figur av et kommersielt Y-brett. Rød vinner. Figur laget i Inkscape [Ink20]

8.4 Havannah

Havannah er et abstrakt tospiller strategispill. Det er også et tilkoblingsspill. Det spilles på et heksagonalt brett bestående av heksagonale ruter med n ruter langs hver av kantene. Den vanligste brettstørrelsen er med 10 ruter langs hver side, men Havannah spilles også på brett med 8 ruter langs hver side [Wik22d].

Slik som i Hex spilles Havannah ved at hver spiller plasserer en brikke i sin farge på brettet på sin tur. Spillet avsluttes når den ene spilleren har klart å fullføre en vinnende sti med sine brikker. I Havannah er det tre mulige måter å fullføre en vinnende sti på. Den ene måten er å lage en bro. En bro i Havannah er ikke det samme som en bro i Hex. I Havannah kaller vi en sti som kobler sammen to hjørner på brettet for en bro. Den andre måten er å lage en ring. En ring er en sti som ikke har et start eller sluttpunkt (en sykel). Den tredje måten er å lage en gaffel. En gaffel kobler tre av kantene på brettet sammen (hjørner er ikke en del av en kant). Figur 8.11 viser et brett med 8 ruter på hver kant, og illustrasjoner av de tre mulige vinnerstiene bro, ring og gaffel.

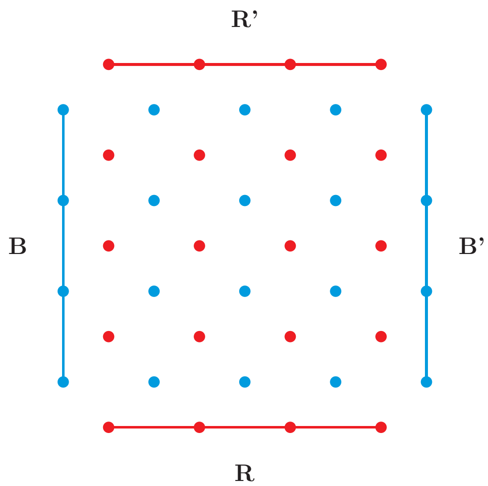
Vi vet at i Hex så vil et fullt brett bestå av nøyaktig én vinennde sti. I Havannah vil et fullt brett ofte bestå av mer enn én vinnende sti. Det er likevel mulig i Havannah å spille uavgjort, altså at ingen av spillerne klarer å lage en vinnende sti. Dette er derimot svært uvanlig, og det har kun vært ett kjent tilfelle der to mennesker spilte uavgjort mot hverandre [Wik22d].



Figur 8.11: Figur av et Havannahbrett. Fra venstre til høyre: Den røde stien er en bro, den gule stien er en ring og den grønne stien er en gaffel

8.5 Bridg-it

Bridg-it, også kalt "The game of Gale", ble som navnet impliserer oppfunnet av David Gale. To spillere spiller på tur og forsøker å koble sine to sider med en sti i sin farge. Det spilles på en graf, som illustrert i Figur 8.12, med røde og blå noder. Den røde spilleren forsøker å koble R og R' ved å lage kanter som forbinder de røde nodene på brettet, og blå forsøker å koble B og B'.

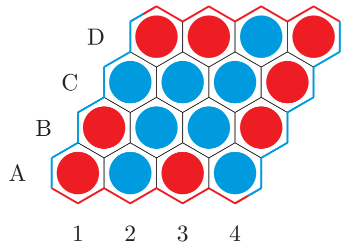


Figur 8.12: Figur av et spillbrett for Bridg-it.

Bridg-it er ekvivalent med et shannon swithing game som spilles på kantene. Slik som Hex, så kan ikke Bridg-it ende uavgjort. Den første spilleren har en vinnerstrategi [Wik21].

8.6 Rex

Rex, eller Reverse Hex", er misère-versjonen av Hex. Dette betyr at i Rex så taper man dersom man klarer å lage en sti som kobler sidene sine. Vi har tidligere bevist Hex-teoremet, altså at Hex aldri kan ende uavgjort. Det samme gjelder for Rex (og beviset er det samme).



Figur 8.13: Et eksempel der rød vinner i Rex på et brett av størrelse 4×4.

Teorem 8.6.1 ([HT19])**.** *For et Rex-brett av størrelse $n \times m$ der $n < m$ eller $m < n$ så har spilleren med de korteste sidene en vinnerstrategi.*

Beviset for dette teoremet følger av Teorem 3.3.4.

Bevis. Personen som eier de korte sidene av brettet følger samme strategi som foreslått i Teorem 3.3.4. Vi deler brettet i to trekanter T_1 og T_2 og markerer cellene med bokstaver slik at en celle i T_1 markeres med samme bokstav som cellen i T_2 som man får når man speiler om diagonalen der brettet deles. Hvis hun spiller først så kan hun spille hvor som helst. Deretter hermer hun etter motstanderen ved å spille på cellen med samme bokstav. Hvis hun spiller som andre spiller så kopierer hun motstanderen sine trekk hele veien. Siden spilleren som eier de korte sidene må ha en sti som inneholder minst to celler av samme bokstav for å koble sine to sider, vil hun ikke kunne klare å koble sine sider ved å følge denne strategien. Dermed vil spilleren med de korte sidene ha en vinnerstrategi i Rex. ■

Teorem 8.6.2. *For $n \times n$ Rex har begge spillerne en strategi som gjør at de kan unngå å tape helt til brettet er fullt.*

Bevis. Dette følger fra Lemma 8.1.2. Begge spillerne kan unngå å tape i Rex helt til brettet er fullt dersom de følger den ikke-tapende TRex strategien. ■

Teorem 8.6.3. *For et $n \times n$-brett har den første spilleren en vinnerstrategi hvis n er et partall og den andre spilleren har en vinnerstrategi hvis n er et oddetall.*

Bevis. Vi kaller den første spilleren for A og den andre spilleren for B. Beviset for dette går ut på at for et brett av størrelse $n \times n$ der n er et partall, så vil B spille siste trekk, og når n er et oddetall så vil A spille siste trekk. Siden siste trekk er et tvunget trekk, kan vi anta at et hvilket som helst vilkårlig trekk er en del av en vinnerstrategi dersom siste trekk inngår i vinnerstrategien.

n er et partall: Vi antar at B har en vinnerstrategi. A spiller vilkårlig i første trekk og ser på seg selv som den andre spilleren etter dette ved å følge den antatte vinnerstrategien til B. Hvis vinnerstrategien på et tidspunkt krever at A spiller der han spilte i første trekk, så spiller han vilkårlig. I følge Teorem 8.6.2 kan vi anta at spillet avsluttes når brettet er fullt. Siden n er et partall kan ikke A spille siste trekk, men han må likevel ha vunnet. Hans siste vilkårlige trekk må ha vært på en rute som var en del av vinnerstrategien fordi vi kan se på det som den siste ledige ruten på brettet. Dette er en motsigelse. Dermed har A en vinnerstrategi når n er et partall.

n er et oddetall: Vi antar at A har en vinnerstrategi. B spiller sitt første trekk vilkårlig. Han later dermed som at A sitt første trekk var hans, og at hans andre trekk (det fjerde trekket i spillet) bare er det tredje trekket i et spill der han er den første spilleren. Igjen antar vi at spillet avsluttes når brettet er fullt. B kan ikke spille siste trekk fordi n er et oddetall, men han vinner fordi det siste vilkårlige trekket hans må ha vært en del av vinnerstrategien. B antok at hans første trekk var A sitt første trekk, så den første brikken er feil farge. Dette er ikke et problem, da det i Rex (i motsetning til Hex) ikke er ufordelaktig å ha en ekstra fiendtlig brikke på brettet. Dermed vinner B, og vi har nådd en motsigelse. Så B har en vinnerstrategi når n er et oddetall.

■

I Kapittel 4 så vi på noen strategimetoder for Hex, og vi så at det å spille i det spisse hjørnet i første trekk fører til tap for første spiller. I Rex har vi et lignende resultat som sier at for et Rex-brett av størrelse $n \times n$, der n er et partall, så er de spisse hjørnene vinnende åpningstrekk for første spiller [HT19, s. 176].

8.7 Andre versjoner av Hex

Det fins mange versjoner av Hex. For eksempel har vi allerede sett på misère-versjonen av Hex, altså Rex. Vi skal nå se på noen flere versjoner av spillet.

8.7.1 Tex

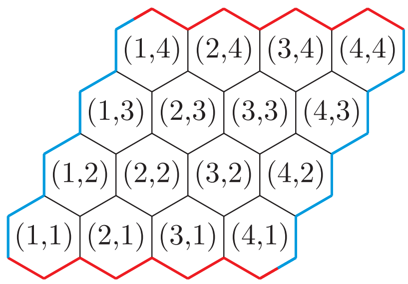
Hex spilles på et endelig brett, men vi kunne også tenke oss et uendelig stort Hex-brett. Et spill på et slikt brett kalles Tex [Bro00, s. 313]. Reglene i Tex er annerledes enn for Hex siden brettet er uendelig stort og dermed ikke har kanter. I Tex spiller to spillere mot hverandre og plasserer på sin tur en brikke i sin farge på brettet. Den andre spilleren forsøker å lage en kjede med sine brikker som omringer den første spilleren sin første brikke. Tex er likevel ikke like interessant å spille som Hex, men er heller en spennende matematisk idé. Det er ikke kjent om den første spilleren kan unngå å tape i det uendelige [Bro05].

8.7.2 Becks Hex

Becks Hex spilles på et vanlig Hex-brett med samme regler som i Hex, bortsett fra at det implementeres én ekstra regel. Den andre spilleren velger hvor den første spilleren skal plassere sin første brikke. I motsetning til Hex vil den andre spilleren ha en vinnerstrategi i Becks Hex. I følge Teorem 5.2.1 vil den første spilleren tape dersom hun plasserer sin første brikke i det akutte hjørnet i førse trekk. Det følger at den andre spilleren har en vinnerstrategi i Becks Hex, da hun kan velge å plassere den første spilleren sin brikke i det akutte hjørnet.

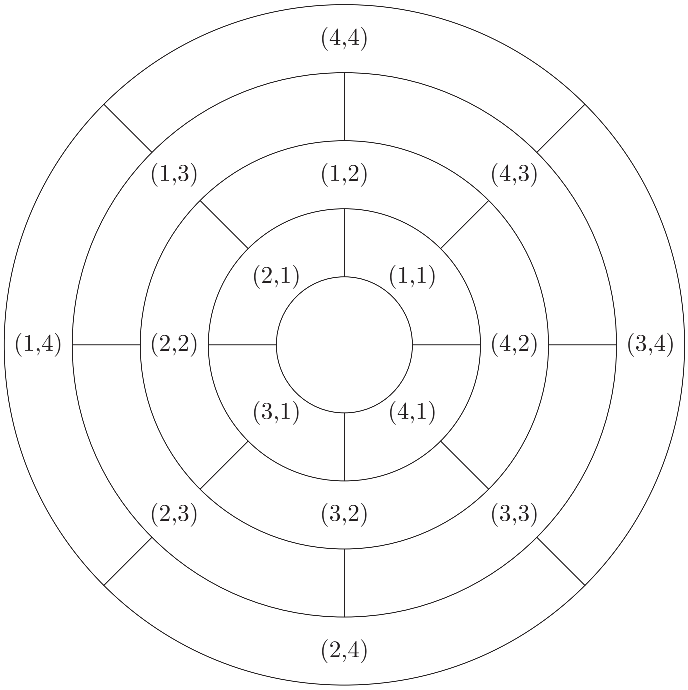
8.7.3 Sylindrisk hex

Sylindrisk Hex, eller annulushex, spilles som navnet antyder på en sylinder av størrelse $m \times n$. Det vanlige Hex-brettet er da pakket rundt en sylinder. Dette kan også flates ut til to dimensjoner, slik at det kan spilles på en annulus. I sylindrisk Hex skal den ene spilleren forsøke å koble toppen og bunnen av sylinderen (eller innsiden og utsiden av annulusen). Den andre spilleren skal prøve å lage en kjede rundt sylinderen (eller rundt annulussenteret). Sylindrisk Hex spilles på en graf med noder (x, y) der $x \in \{1, \dots, m\}$ og $y \in \{1, \dots, n\}$. Da er x, y nabo med $((x-1) \bmod m, y)$ og $((x+1) \bmod m, y)$. Dersom $y > 1$ er x, y også nabo med $(x, y-1)$ og $((x+1) \bmod m, y-1)$, og dersom $y < n$ er x, y også nabo med $(x, y+1)$ og $((x-1) \bmod m, y+1)$. Figur 8.14 viser en todimensjonal illustrasjon av det sylindriske hex-brettet. De røde kantene representerer toppen og bunnen av sylinderen, og de blå kantene representerer et snitt i sylinderen langs høyden til sylinderen.



Figur 8.14: Sylindrisk hex

Vi kan som sagt flate ut det sylindriske hex-brettet slik at det kan spilles på en annulus. Figur 8.15 illustrerer dette. Det har blitt vist at rød (spilleren som skal koble toppen og bunnen av sylinderen) har en vinnerstrategi når m er et partall [HHT14]. Hayward et al (2014) viser i sin artikkel at rød også har en vinnerstrategi når $m = 3$, og de antar at dette gjelder for alle m, men ingen har klart å bevise dette enda.



Figur 8.15: Sylindrisk hex brettet ut til en todimensjonal annulus

KAPITTEL 9

Mengdefargeleggingsspill

Dette kapittelet er dedikert til å bevise Teorem 9.5.1. Teoremet sier at det å legge til en vennlig brikke eller å fjerne en fiendtlig brikke fra brettet aldri er ufordelaktig i Hex. Vi skal derfor definere en ny klasse med spill kalt mengdefargeleggingsspill, og bruke resultater fra kapittelet for å komme frem til beviset. All notasjon samt definisjoner, resultater og beviser i dette kapittelet er hentet fra Rijswijck (2006) [Rij06].

9.1 Mengder

I Kapittel 3 definerte vi et spill. Et spill består av en utbyttefunksjon f, og utbytteverdien til et spill sier noe om hvilken spiller som har en vinnerstrategi. I Hex er det kun to spillere som spiller mot hverandre. I tillegg er Hex et nullsumspill, slik at utbytteverdien for den ene spilleren er lik den negative utbytteverdien for motstanderen. Dessuten forteller Hex-teoremet oss at Hex aldri kan ende uavgjort, noe som betyr at vi kan la verdiområdet til f være $\mathbb{B}$. Mengden $\mathbb{B}$ kalles for mengden av Boolske verdier og består av elementene SANT og USANT. Vi kan også definere disse verdiene numerisk som $+1$ og -1. For $t \in \mathbb{B}$ refererer $-t$ til negasjonen til t, slik at $\{-t, t\} = \mathbb{B}$.

Vi kaller spillerne for MAX og MIN, der MAX ønsker å maksimere utbyttet av spillet og MIN ønsker å minimere utbyttet av spillet. Vi kaller mengden av spillere for $\mathscr{C}$, der $\mathscr{C} = \{\mathrm{MIN}, \mathrm{MAX}\}$. For $c \in \mathscr{C}$ refererer $\bar{c}$ til c sin motstander, slik at $\{\bar{c}, c\} = \mathscr{C}$.

Nå kan vi definere mengden av farger. I Hex er det kun to spillere, og hver spiller kan benytte seg av hver sin farge for å fargelegge celler på brettet. Alle cellene på brettet som ikke har blitt farget enda er ufarget, og kan også tilegnes en farge (ufarget). Vi kaller mengden av farger for X. Vi lar $X = \{B, \emptyset, R\}$, der R er fargen som hører til MAX-spilleren, $\emptyset$ er ufarget og B er fargen som hører til MIN-spilleren.

Vi vil se på hvordan vi kan fargelegge Hex-brettet ved å bruke farger fra X. Vi lar S være mengden av elementer på Hex-brettet.

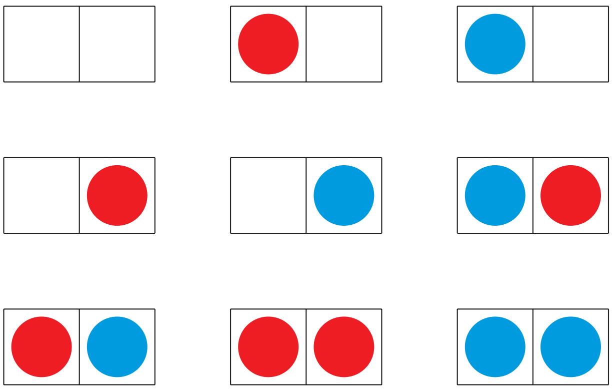
Definisjon 9.1.1. La S og X være to mengder, der X er mengden av farger og S er mengder av elementer på brettet. Da sier vi at $\psi\colon S \to X$ er en fargelegging av S. Et element $v \in S$ er farget i ψ hvis $\psi(v) \neq \emptyset$, og ufarget ellers. En fargelegging er komplett hvis den ikke inneholder noen ufargede elementer, og ukomplett ellers.

Nå som vi har definert X, S og $\psi\colon S \to X$ kan vi gi et navn til mengden av alle fargelegginger ψ. Vi definerer fargerommet $X^S = \{\psi \mid \psi\colon S \to X\}$ som mengden av alle fargelegginger av S med farger fra X. Nå har vi alt vi trenger for å definere et mengdefargeleggingsspill.

Definisjon 9.1.2. Et mengdefargeleggingsspill består av et fargerom $X^S = \{\psi \mid \psi\colon S \to X\}$ og en funksjon $f X^S \to \mathbb{B}$. Dette mengdefargeleggingsspillet skrives $\Gamma = \langle X^S, f\rangle$, der funksjonen f er utbyttefunksjonen.

Et mengdefargelegginsspill starter ved at alle elementer er ufarget, og det er ingen bestemt konvensjon om hvilken spiller som starter. Spillerne bytter på å farge et tidligere ufarget element av S med en ren farge fra X (det vil si enten R eller B). Spillerne kan ikke fjerne en farge fra et element som allerede har en farge. Funksjonen f indikerer utfallet av spillet. Spiller MAX prøver å maksimere utfallet ved å gjøre det likt SANT, eller $+1$, og spiller MIN prøver på det motsatte. La oss se på et eksempel på et brett S og det tilhørende fargerommet X^S.

Eksempel 9.1.3. Vi lar S være et brett bestående av to elementer, og $X = \{B, \emptyset, R\}$.



Figur 9.1: Elementene i fargerommet når S består av to elementer

Figur 9.1 viser elementene som er inneholdt i fargerommet $X^S = \{\psi \mid \psi\colon S \to X\}$. Vi ser at vi kan regne ut kardinaliteten til fargerommet på følgende måte $|X^S| = |X|^{|S|} = 3^2 = 9$.

9.2 Posisjoner og trekk

Definisjon 9.2.1. En posisjon på en mengde S er et par $p = (\psi, c)$ der $\psi \in X^S$ og $c \in \mathscr{C}$. Komponenten c indikerer hvilken spiller som har neste trekk. Mengden av alle posisjoner skrives P_S, og vi har at $P_S = X^S \times \mathscr{C}$.

Vi kan bruke notasjonen χ_+ og χ_- om elementer i X. Siden X er en ordnet mengde og kun består av tre farger kan vi definere $\chi_+ > \chi_-$ til å bety at χ_+ kommer etter χ_- i X. Relasjonen $>$ bestemmer altså hvilken farge som tilhører hvilken spiller basert på hvor fargen er plassert i X. For et element $v \in S$ kan vi bruke notasjonen χ^v til å indikere at vi tilegner fargen χ til elementet v.

Vi har at ψ er en fargelegging i X^S. For et element $v \in S$ og en farge $\chi \in X$ bruker vi notasjonen $\psi\chi^v$ til å indikere at vi fargelegger v med fargen χ og at resten av brettet er fargelagt med ψ. Da har vi at dersom $\psi = \emptyset^S$ så er p en startposisjon, og hvis ψ er en komplett fargelegging da er p en sluttposisjon.

Definisjon 9.2.2. La $\psi \in X^S$ være en fargelegging av S. Et lovlig trekk m i ψ er en fargelegging som tilegner en farge til et ufarget element i ψ. Vi kaller mengden av alle lovlige trekk i ψ for $\mathscr{M}(\psi)$.

I Hex er det ikke å lov å fargelegge et element som allerede er fargelagt. Vi sier derfor at det å tilegne en farge til et element v er lovlig dersom v er ufarget fra før av.

Definisjon 9.2.3. La $\Gamma = \langle X^S, f\rangle$ være et spill, $v \in S$ være en celle på brettet og la m^+ og m^- være to trekk, altså to lovlige fargelegginger av v. Dersom $f(\psi^* m^+) \geq f(\psi^* m^-)$ for alle $\psi^* \in X^S$, da sier vi at m^+ er å foretrekke til m^- for MAX, og omvendt for MIN.

Definisjon 9.2.4. For en fargelegging $\psi \in X^S$, en posisjon $p \in P_S$ og et trekk $m \in \mathscr{M}(p)$ definerer vi $p \oplus m = (\psi m, \bar{c})$.

I Kapittel 3 definerte vi barnenoder og foreldrenoder i et spilltre. En node v_1 er barnet til v_0 dersom v_0 er en direkte forløper til v_1. Vi kan beskrive en tilsvarende definisjon for posisjoner på Hex-brettet, der en posisjon p' er barnet til p dersom vi vi kan gjøre et trekk i p for å ende opp i p'. Dermed har vi at p' er barnet til p hvis og bare hvis $p' = p \oplus m$ for et trekk $m \in \mathscr{M}(p)$.

I Kapittel 4 undersøkte vi dødcelleanalyse, og definerte samtidig hva en død celle er. Den definisjonen kan gjøres mer presis slik at den passer med notasjon innført i dette kapittelet.

Definisjon 9.2.5. La $f\colon X^S \to \mathbb{B}$ og $v \in S$. Vi sier at v er død i f dersom $f(\psi) = f(\psi\chi^v)$ for alle $\psi \in X^S$ og alle $\chi \in X$.

9.3 Funksjoner og projeksjoner

Definisjon 9.3.1. La $f\colon X^S \to \mathbb{B}$. Da er f økende i $v \in S$ hvis

$$\chi_+ \geq \chi_- \implies f(\psi\chi_+^v) \geq f(\psi\chi_-^v) \qquad \forall\, \chi_+^v, \chi_-^v \in X,\ \ \forall\, \psi \in X^S$$

Vi sier at en funksjon $f\colon X^S \to \mathbb{B}$ er isoton hvis den er økende i alle elementer av S.

Utbyttefunksjonen f i Hex er isoton. Vi skal ikke vise dette, men henviser til [Rij06, s. 14] for et bevis.

Definisjon 9.3.2. La $\langle X^S, f\rangle$ være et mengdefargeleggingsspill og $p = (\psi, c)$ være en posisjon. La p_1 være en etterfølger av p. Da definerer vi minimaxverdien $\mathrm{MNX}(f;p)$ til spillet i posisjonen p som

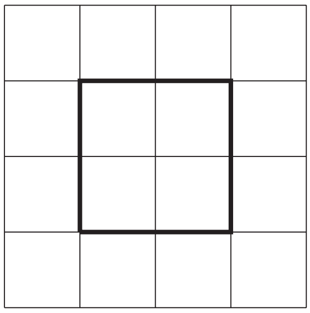
$$\mathrm{MNX}(f;p) = \begin{cases} f(\psi) & \text{hvis } p \text{ er en endelig posisjon} \\ \min[\mathrm{MNX}(f;p_1)] & \text{hvis } c = \mathrm{MIN} \\ \max[\mathrm{MNX}(f;p_1)] & \text{hvis } c = \mathrm{MAX} \end{cases}$$

Minimaxverdien er det beste utfallet som hver av spillerne kan garantere mot en hver strategi som motstanderen kan følge. Det betyr at MAX prøver å maksimere minimaxverdien og MIN prøver å minimere minimaxverdien.

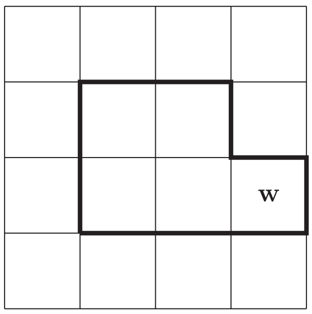
Definisjon 9.3.3. La X være en mengde av farger og la S og S' være to mengder. Da definerer vi projeksjonen $\mathrm{proj}_S^{S'} : X^S \to X^{S'}$ ved

$$\mathrm{proj}_S^{S'}(\psi) \colon v \mapsto \begin{cases} \psi(v) & \text{hvis } v \in S \\ \emptyset & \text{hvis } v \notin S \end{cases}$$

Eksempel 9.3.4. La domenet $D(\psi)$ til ψ og $S \subset D(\psi)$ være som illustrert i Figur 9.2. La $S^* = S \cup w$ der w er død i f og f er utbyttefunksjonen. Figur 9.3 illustrerer $D(\psi)$ og S^*.

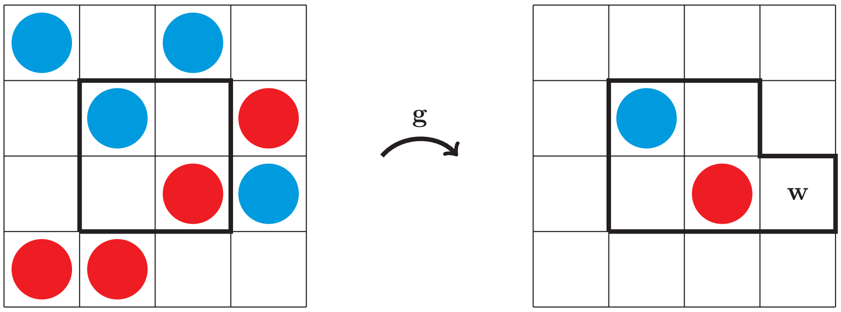


Figur 9.2: 4×4-rutenettet representerer $D(\psi)$ og området som er rammet inn representerer S



Figur 9.3: Området som er rammet inn representerer S^*

Vi vil se på hva projeksjonen $g = \mathrm{proj}_{D(\psi)}^{S^*} \colon X^S \to X^{S^*}$ gjør med en fargelegging ψ av $D(\psi)$. Siden projeksjonen tar elementer i S til seg selv og tar elementer som ikke er i S til $\emptyset$ betyr det at vi fjerner fargen til alle elementer som ikke er i S og lar de elementene som er i S ha samme farge som i ψ. Figur 9.4 viser et eksempel på en fargelegging ψ av S og projeksjonen g fra $D(\psi)$ inn i S^*.



Figur 9.4: Illustrasjon av projeksjonen g fra $D(\psi)$ inn i S^*

9.4 Teoremer

Teorem 9.4.1. *La* $\Gamma = \langle X^S, f\rangle$ *være et spill,* $p = (\psi, c)$ *være en posisjon og la* $v \in S$ *være en celle på brettet. La* m^+ *og* m^- *være trekk, der* m^+ *er å foretrekke til* m^- *for MAX. Da er*

$$MNX(f; pm^-) \leq MNX(f; p\chi^+)$$

Bevis. Vi skal bruke induksjon på $|U(p)|$ for å vise dette.

Grunntilfellet: $|U(p)| = 0$.
Da er p en endelig posisjon. Fra definisjonen av minimax-verdien er $\text{MNX}(f; pm^+) = f(pm^+)$ og $\text{MNX}(f; pm^-) = f(pm^-)$ når p er en endelig posisjon. Siden m^+ er å foretrekke til m^- for MAX følger resultatet.

Induksjonssteget: Antar at resultatet holder for $|U(p)| = n$. Må vise at det holder for $|U(p)| = n + 1$.

Vi antar at $|U(p)| = n + 1$. For $v \in U(p)$ (altså m^+ og m^- er trekk som farger v) følger resultatet ved induksjon siden $|U(pm)| = |U(p)| - 1$.

For $v \notin U(p)$ kan vi vise dette ved å manipulere uttrykket $\text{MNX}(f; pm^+)$. Vi antar at $c = \text{MAX}$. Poenget er at det å fargelegge et element i S med en farge som er fordelaktig for MAX ikke endrer minimax-verdien.

Siden $|U(p \oplus m)| < |U(p)|$ kan vi deretter vise ved induksjon at minimaxverdien er større eller lik minimax-verdien når MAX spiller et trekk som ikke er fordelaktig. Det følger at $\text{MNX}(f; pm^+) \geq \text{MNX}(f; pm^-)$. ■

Teorem 9.4.2. *La* $\Gamma = \langle X^S, f\rangle$ *være isoton. La* $p = (\psi, c)$ *være en posisjon og la* $v \in S$ *være en celle på brettet. La* $\chi_-, \chi_+ \in \{B, \emptyset, R\}$ *være farger der* $\chi_- \leq \chi_+$. *Da er*

$$MNX(\Gamma; p\chi_-^v) \leq MNX(\Gamma; p\chi_+^v)$$

Bevis. Hvis $\chi_+ \neq \emptyset$ og $\chi_- \neq \emptyset$ følger teoremet fra Teorem 9.4.1. Vi har to tilfeller igjen. Vi må vise at $\text{MNX}(\Gamma; pR^v) \geq \text{MNX}(\Gamma; p\emptyset^v)$ og $\text{MNX}(\Gamma; p\emptyset^v) \geq \text{MNX}(\Gamma; pB^v)$.

For å gjøre dette introduserer vi et nytt spill $\Gamma^* = \langle X^{S^*}, f\rangle$ der $S^* = S \cup \{w\}$ slik at w er død i Γ^*. Vi definerer projeksjonen ψ^* fra X^S til X^{S^*} som tar elementer fra definisjonsområdet til $\psi\emptyset^v$, $D(\psi\emptyset^v)$, og sender dem til S^*. Da har vi $\psi^* = \text{proj}^{S^*}_{D(\psi\emptyset^v)}$.

Vi vil vise at $\text{MNX}(\Gamma; \psi B^v, c) \leq \text{MNX}(\Gamma; \psi\emptyset^v, c)$. Vi gir en skisse av denne utregningen og ikke et fullstendig bevis. Det kan vises at $\text{MNX}(\Gamma; \psi B^v, c) = \text{MNX}(\Gamma^*; \text{proj}^{S^*}_{D(\psi B^v)}, c)$. Deretter bruker vi det faktum at det å farge v med B er det samme som å først farge v med $\emptyset$ og så farge v med B. Vi har definert $\psi^* = \text{proj}^{S^*}_{D(\psi\emptyset^v)}$, så da får vi

$$\begin{aligned}
\text{MNX}(\Gamma; \psi B^v, c) &= \text{MNX}(\Gamma^*; \text{proj}^{S^*}_{D(\psi B^v)}, c) \\
&= \text{MNX}(\Gamma^*; \text{proj}^{S^*}_{D(\psi\emptyset^v B^v)}, c) \\
&= \text{MNX}(\Gamma^*; (\text{proj}^{S^*}_{D(\psi\emptyset^v)}) B^v, c) \\
&= \text{MNX}(\Gamma^*; \psi^* B^v, c)
\end{aligned}$$

Siden w er død i S^* vil det å fargelegge v med B være minst like fordelaktig for MIN som å fargelegge w med B. Dermed er $\text{MNX}(\Gamma^*; \psi^* B^v, c) \leq \text{MNX}(\Gamma^*; \psi^* B^w, c)$. Det kan så vises at $\text{MNX}(\Gamma^*; \psi^* B^w, c) = \text{MNX}(\Gamma; \psi\emptyset^v, c)$. Dermed har vi:

$$\text{MNX}(\Gamma; \psi B^v, c) \leq \text{MNX}(\Gamma^*; \psi^* B^w, c) = \text{MNX}(\Gamma; \psi\emptyset^v, c) \tag{9.1}$$

Tilsvarende kan det vises at

$$\text{MNX}(\Gamma; \psi R^v, c) \geq \text{MNX}(\Gamma^*; \psi^* R^w, c) = \text{MNX}(\Gamma; \psi\emptyset^v, c) \tag{9.2}$$

■

9.5 Strategiteoremet

Teorem 9.5.1. *I Hex vil det å legge til en vennlig brikke eller det å fjerne en fiendtlig brikke aldri være ufordelaktig.*

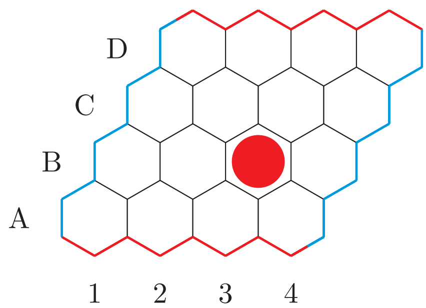
Bevis. For MAX vil det å legge til en vennlig brikke være fordelaktig dersom $\text{MNX}(\Gamma; p\emptyset^v) \leq \text{MNX}(\Gamma; pR^v)$ og det å fjerne en fiendltig brikke vil være fordelaktig dersom $\text{MNX}(\Gamma; pB^v) \leq \text{MNX}(\Gamma; p\emptyset^v)$. For MIN vil det å legge til en vennlig brikke være fordelaktig dersom $\text{MNX}(\Gamma; pB^v) \leq \text{MNX}(\Gamma; p\emptyset^v)$ og det å fjerne en fiendtlig brikke vil være fordelaktig dersom $\text{MNX}(\Gamma; p\emptyset^v) \leq \text{MNX}(\Gamma; pR^v)$. Dermed følger dette teoremet av Teorem 9.4.2. ■

Tillegg

TILLEGG A

Strategi for 4x4 Hex

Vi presenterer her en fullstendig strategi for rød, altså spiller 1, på et Hex-brett av størrelse 4×4. Strategien illustreres i fire spilltrær som viser hvilke trekk som burde spilles i hvert trekk. Vi antar at motstanderen spiller så bra som mulig, og har dermed valgt å se bort i fra trekk som åpenbart er dårlige for blå. Rød velger å spille på en av sentrumsbrikkene". Rød kan dermed for eksempel velge å spille på $B3$ i første trekk.

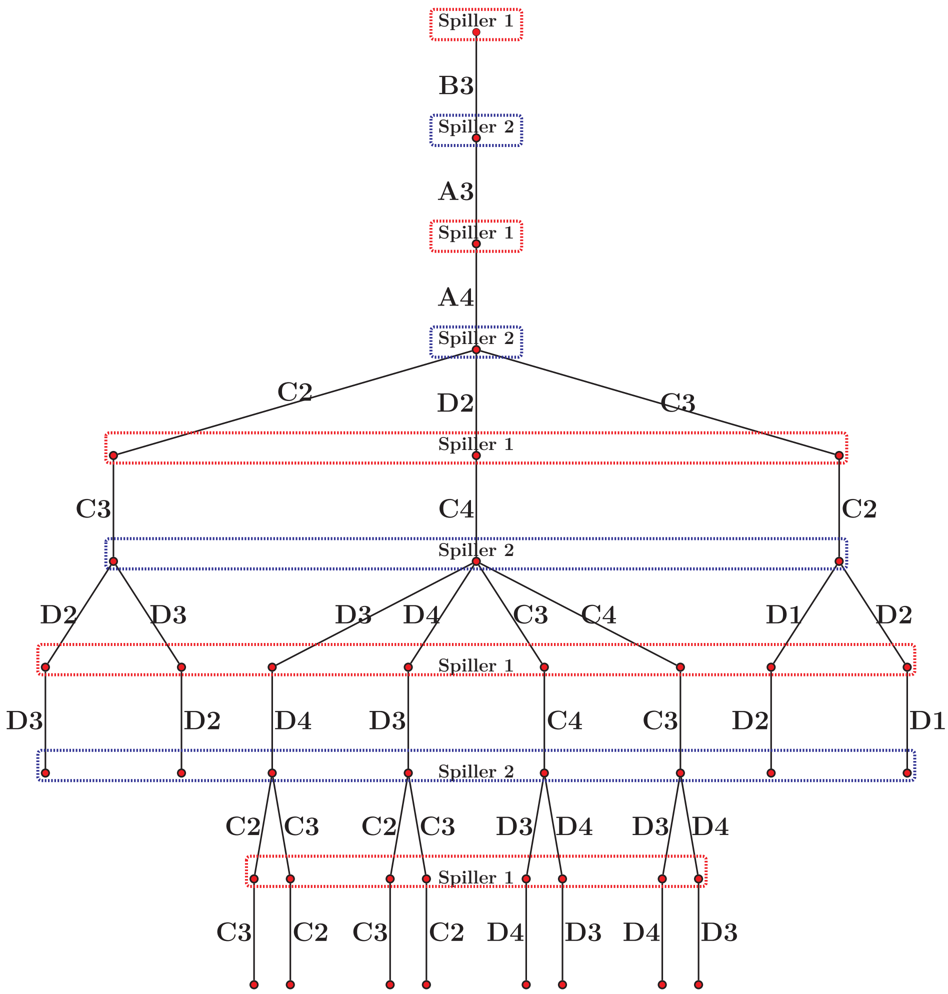


Figur A.1: Spiller 1 (rød) spiller på $B3$ i første trekk.

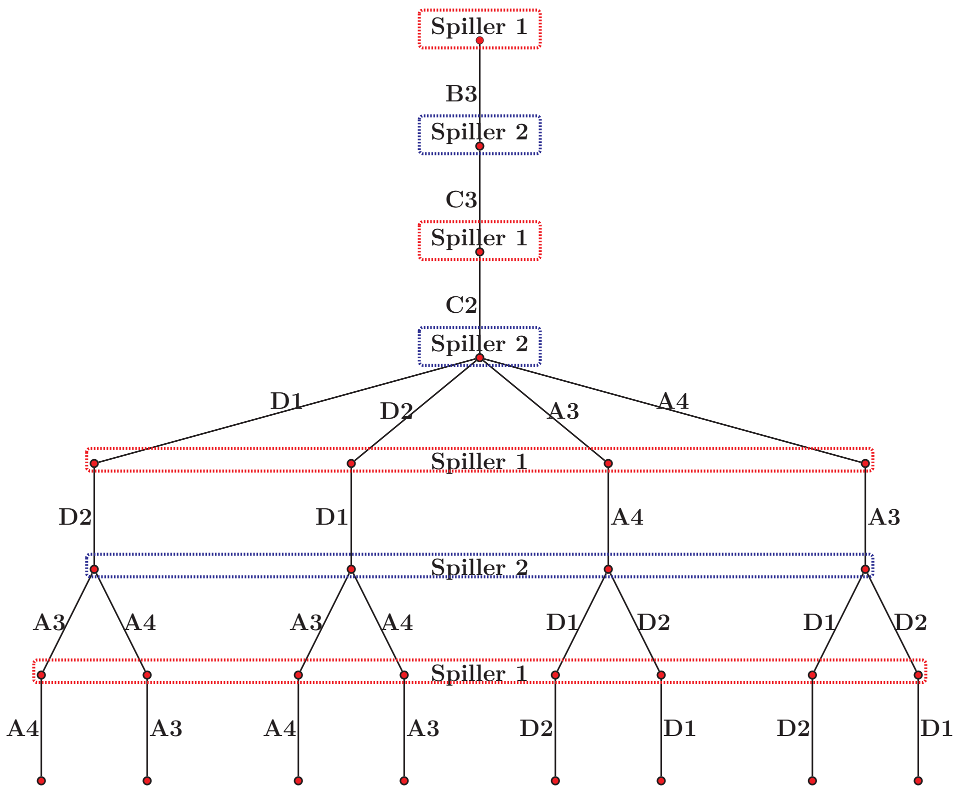
Vi skal altså se på situasjonen illustrert i figur A.1. I trekk nummer to må blå prøve å forhindre at rød kan koble sine røde sider. Vi påstår dermed at det kun er fem godetrekk som blå kan gjøre i andre trekk. Med gode trekk mener vi trekk som blokkerer motstanderen eller forsinker utvikling hos motstanderen. Gode trekk her betyr dermed ikke at blå kan vinne. Blå kan kun utsette å tape ved å spille disse trekkene.

I trekk nummer to er blå sine beste muligheter å spille på $A3$, $A4$, $D2$, $C2$ eller $C3$.

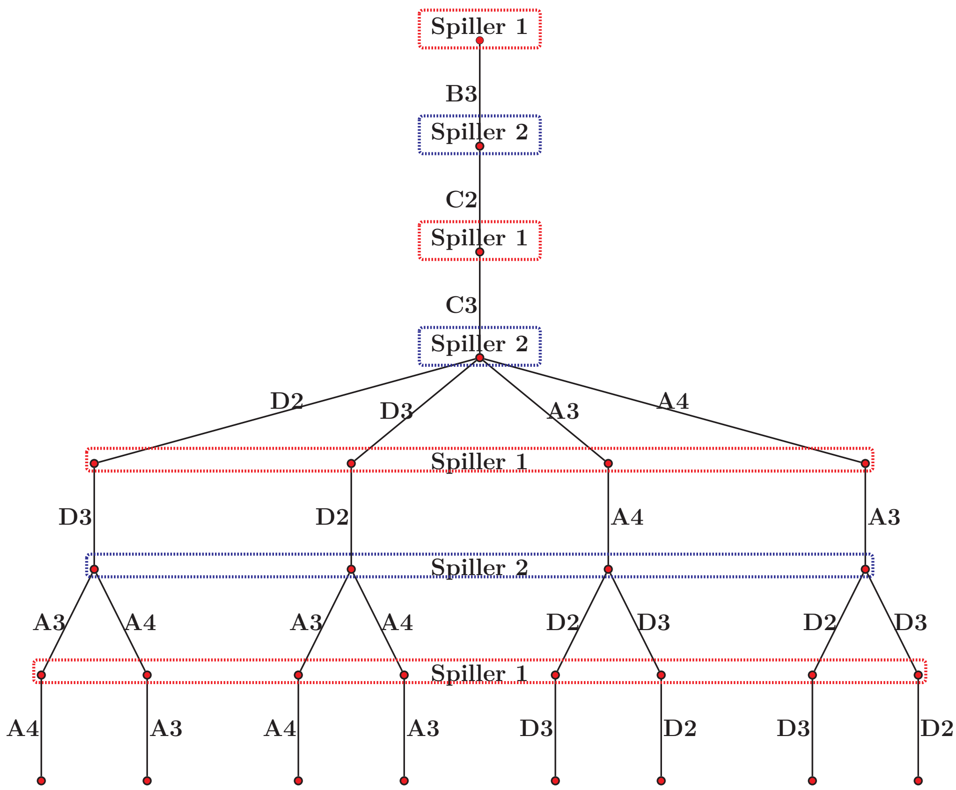
Strategien for Hex-brettet av størrelse 4×4 representeres dermed ved hjelp av fire spilltrær der vi kun betrakter de fem mulighetene forklart over i trekk nummer to. Spilltrærne der blå spiller på $A3$ og $A4$ i trekk nummer to er like bortsett fra rekkefølgen $A3$ og $A4$ spilles i. Vi presenterer dermed kun ett av spilltrærne, da de er helt like ellers.



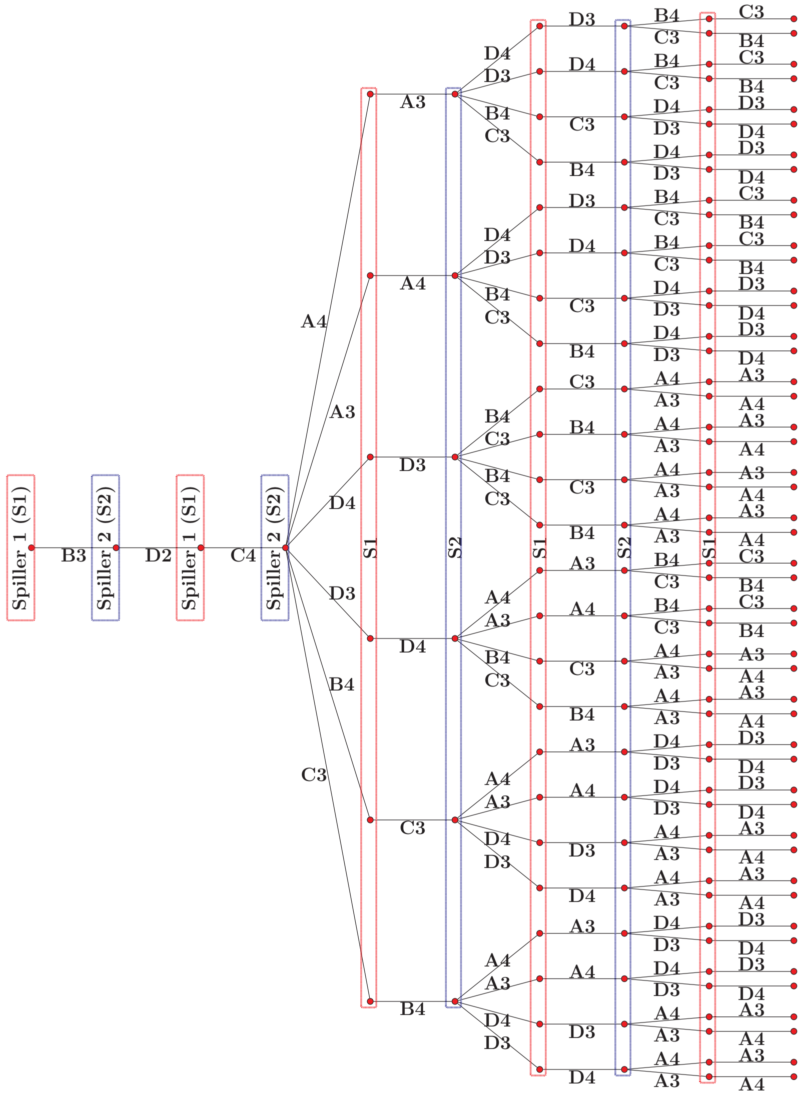
Figur A.2: Spilltre som illustrerer situasjonen der blå spiller på $A3$ i andre trekk.



Figur A.3: Spilltre som illustrerer situasjonen der blå spiller på $C3$ i andre trekk.



Figur A.4: Spilltre som illustrerer situasjonen der blå spiller på $C2$ i andre trekk.



Figur A.5: Spilltre som illustrerer situasjonen der blå spiller på $D2$ i andre trekk.

Bibliografi

[Ans01] Anshelevich, V. «The Game of Hex: An Automatic Theorem Proving Approach to Game Programming». I: (apr. 2001).

[Ans02] Anshelevich, V. «A hierarchical approach to computer Hex». I: *Artificial Intelligence* årg. 134 (jan. 2002), s. 101–120.

[Aum20] Aumann, R. J. *Lectures On Game Theory*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2020, s. ix+119.

[BBC00] Beck, A., Bleicher, M. N. og Crowe, D. W. *Excursions into mathematics*. millennium. With a foreword by Martin Gardner. A K Peters, Ltd., Natick, MA, 2000, s. xxvi+499.

[Bro00] Browne, C. *Hex strategy: making the right connections*. A K Peters, Ltd., Natick, MA, 2000, s. xiv+363.

[Bro05] Browne, C. *Connection Games: Variations on a Theme*. Feb. 2005.

[Cal13] Calvin, M. *The Joy of Hex and Brouwer's Fixed Point Theorem*. 2013. URL: https://vigoroushandwaving.wordpress.com/2013/09/30/the-joy-of-hex-and-brouwers-fixed-point-theorem/. (Hentet: 28.02.2022).

[ET76] Even, S. og Tarjan, R. E. «A combinatorial problem which is complete in polynomial space». I: *J. Assoc. Comput. Mach.* årg. 23, nr. 4 (1976), s. 710–719.

[Eva17] Evans, J. *Brouwer's fixed point theorem*. 2017. URL: http://www.homepages.ucl.ac.uk/~ucahjde/tg/html/pi1-08.html. (Hentet: 21.02.2022).

[Gal79] Gale, D. «The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem». I: *Amer. Math. Monthly* årg. 86, nr. 10 (1979), s. 818–827.

[HAH09] Henderson, P., Arneson, B. og Hayward, R. «Solving 8x8 Hex». I: jan. 2009, s. 505–510.

[Hei42] Hein, P. «Vil De lære Polygon?» I: *Politiken* årg. 59, nr. 360 (1942).

[HHT14] Huneke, S. C., Hayward, R. og Toft, B. «A winning strategy for $3 \times n$ Cylindrical Hex». I: *Discrete Math.* årg. 331 (2014), s. 93–97.

[HR06] Hayward, R. B. og Rijswijck, J. van. «Hex and combinatorics». I: *Discrete Math.* årg. 306, nr. 19-20 (2006), s. 2515–2528.

[HT19] Hayward, R. B. og Toft, B. *Hex, inside and out—the full story.* CRC Press, Boca Raton, FL, 2019, s. xxii+297.

[HW17] Hayward, R. B. og Weninger, N. «Hex 2017: MoHex wins the 11x11 and 13x13 tournaments». I: *J. Int. Comput. Games Assoc.* årg. 39 (2017), s. 222–227.

[Ink20] Inkscape Project. *Inkscape.* Versjon 0.92.5. 16. apr. 2020.

[Lom22] Lome, R. *Piet Hein.* 2022. URL: https://snl.no/Piet_Hein. (Hentet: 29.04.2022).

[Rij06] Rijswijck, J. van. «Set Colouring Games». PhD dissertation. University of Alberta, 2006.

[Til] Till Tantau, H. M. *The TikZ and PGF Packages. Manual for version 3.1.9a.*

[Wik20a] Wikipedia. *Graph coloring game.* 2020. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_coloring_game. (Hentet: 14.05.2022).

[Wik20b] Wikipedia. *Y (game).* 2020. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Y_(game). (Hentet: 01.05.2022).

[Wik21] Wikipedia. *Shannon switching game.* 2021. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Shannon_switching_game. (Hentet: 03.05.2022).

[Wik22a] Wikipedia. *Alpha–beta pruning.* 2022. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Alpha%E2%80%93beta_pruning. (Hentet: 06.05.2022).

[Wik22b] Wikipedia. *Connection game.* 2022. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Connection_game. (Hentet: 01.05.2022).

[Wik22c] Wikipedia. *Four color theorem.* 2022. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem. (Hentet: 12.05.2022).

[Wik22d] Wikipedia. *Havannah.* 2022. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Havannah. (Hentet: 01.05.2022).