

UiO : Matematisk institutt

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Frie deformasjonsbølger i blodårer

Ingvild Hjortnæs Larsen

Masteroppgave, høsten 2021



Denne masteroppgaven er levert inn under masterprogrammet *Mekanikk*, studieretning *Mekanikk*, ved Matematisk institutt, Universitetet i Oslo. Oppgaven er normert til 60 studiepoeng.

Forsiden viser et utsnitt av rotsystemet til den eksepsjonelle liegruppen E_8 , projisert ned i planet. Liegrupper ble oppfunnet av den norske matematikeren Sophus Lie (1842–1899) for å uttrykke symmetriene til differensiallikninger og spiller i dag en sentral rolle i flere deler av matematikken.

Sammendrag

I nyere tid har det blitt gjennomført diverse studier på blodstrømning gjennom blodårer, hvor forskningen har blitt utført med et medisinsk perspektiv. I denne oppgaven blir også blodstrømning gjennom blodårer sett på, men fra et fluid mekanisk perspektiv med et ståsted innfor hydrodynamisk bølgeteori. Ved å ta utgangspunkt i Womersley modell av en blodåre med fast vegg, har vi brukt bølgeteori til å utvide modellen til blodåre med elatisk vegg. Sluttresultatet viser en utledning til en dispersjonsrelasjon som består av kjente modifiserte Bessel funksjoner. Her spiller Bessel funksjonene samme rolle som de kjente cosh og sinh funksjonene som man er vant til i hydrodynamisk bølgeteori for overflatebølger på havet.

Forord

Først og fremst vil jeg takke min veileder Karsten Trulsen. Takk for all hjelp og støtte, og takk for at du hadde troen på meg.

En stor takk går også til Thea. Takk for at har motivert meg gjennom mange år, og spesielt gjennom den siste tiden.

Vil også takke familien min for å ha holdt ut med meg, og spesielt min sønn Isak for å være mitt lyspunkt i livet.

Ingvild Hjortnæs Larsen
Oslo, 15.09.2021

Notasjon

(r, θ, z) : sylinderkoordinater
 (t) : tid

\vec{v} : hastighetsfelt
 p : trykk
 ρ : tetthet
 \mathbb{P} : spenningstensor
 E : Youngs modul δ : Poisson forhold
 u_r : forskyvning i radiell retning
 $\tilde{\epsilon}$: tøyning
 h : tykkelse til blodåreveggen
 R : radius
 R_0 : likevekst radius
 A : tverrsnitt
 A_0 : likevekst tverrsnitt
 D : Utvidbarhetsparameter
 η : overflatehevning
 ω : vinkelfrekvens, pulsen
 k : bølgetall
 μ : dynamisk viskositet
 ν : kinematisk viskositet
 f : frekvens
 q : integrert fluks
 a : amplitude
 α : Womersleys tall
 ϕ : skalarpotensial
 ψ : strømfunksjon
 λ : bølgelende
 c : fasefart

Ytterligere notasjon er beskrevet i teksten der den brukes.

Innhold

Sammendrag	i
Forord	ii
Notasjon	iii
Innhold	iv
1 Introduksjon	1
2 Matematiske elementer	3
2.1 Likninger	3
Navier-Stokes ligning	3
Kontinuitetslikningen	4
Bessels likning	4
Modifisert Bessels likning	5
Gamma funksjonen	5
Forholdet mellom Bessel I og Bessel J funksjonene	5
2.2 Regneregler i sylinderkoordinater	6
2.3 Helmholtz dekomposisjon	6
Coulomb mål	6
2.4 Leibnitz formel (Reynolds transport teorem)	7
2.5 Taylor utvikling	8
3 Elastiske egenskaper	9
3.1 Elastiske parametere	9
3.2 Mekanikken til blodåreveggen	10
4 Metode	12
5 Womersleys fast vegg	13
5.1 Konstant pålagt trykkgradient	13
5.2 Pulserende strøm	17
Parametere til blod og blodårer	18
6 Elastisk vegg	20
6.1 Utvidbarhet	21

6.2	Hoved likninger	22
6.3	Lineariserer problemet	24
	Anta bølgeløsning	25
6.4	Helmholtz dekomposisjon	27
6.5	Det lineære problemet	33
	Løsning for trykket	34
	Løser problemet	36
6.6	Dispersjonsrelasjonen	41
7	Diskusjon	43
7.1	Analogi	43
7.2	Mitt resultat	44
7.3	Sammenligning	44
8	Konklusjon	46
A	Vedlegg	47
A.1	Pendel	47
	Bibliografi	51
	Figurer	52

KAPITTEL 1

Introduksjon

I denne oppgaven skal jeg, med et utgangspunkt i hydrodynamisk bølgeteori, se på blodstrømmen i en blodåre. Det har blitt utført diverse forskning på blodstrøm, men fra et medisinsk perspektiv, og det er forstøtt mye vi ikke vet. Denne oppgaven vil ta utgangspunktet i Womersleys [15] modell av en blodåre med fast vegg, hvor vi utvider denne modellen til blodåre med elastisk vegg.

Blodstrømmen drives av en puls, som lager ikke-dispersive drevne bølger. Som betyr at det er en proporsjonalitet mellom pulsen ω og bølgetallet k , på denne måten $\omega = sk$, der s er en konstant. De ikke dispersive bølgene har derfor konstant fastfart $c = \frac{\omega}{k} = s$.

Målet for oppgaven er å komme frem til en dispersjonsrelasjon. Hvis den er tilfredsstillende, vet vi at vi har frie dispersive bølger, med fasefart $c = c(\omega, k)$. Dette betyr at vi både har dispersive frie bølger og ikke dispersive drevne bølger med forskjellig fasefart c , som lever side om side i blodårene våre.

Det er gjort eksperimenter på hovedpulsåren til hunder [1], for å kunne bestemme parametere som sier hvordan egenskaper blodåreveggen har, ved å måle dispersjon og dempning av kunstig induserte trykkbølger. Eksperimentene ble målt i den fasen av hjerteslag når hjertemusklene slapper av og hjertekamerene fylles med blod. Eksperimentene viste konsekvent en svak dispersjon og dempning, og viste i alle tilfeller det samme eksponensielle forfallsmønsteret. Ut i fra de sammen eksperimentene har de i denne artikkelen [2], også prøvd å måle det viskøse bidraget, som sier noe om dempningen. Det var såpass lite at det var vanskelig å måle.

Det har også blitt gjort andre eksperimenter på blod som strømmer i arterier [13], der de har prøvd å måle dispersjon. De har kommet frem til at hvis man ser på et lite rørsegment, er det liten forskjell på fasefarten til de drevne og frie bølgene, og de ser derfor bort i fra dispersjonen.

Denne boken [14] er den eneste kilden jeg har funnet, som har kommet frem til en dispersjonsrelasjon. Men siden de har tatt utgangspunkt i det som står i denne boken [13], og har medisinsk bagrunn, har de valgt å se bort i fra den radielle strukturen til hastighetsfeltet.

Siden alle kildene jeg har sett på har medisinsk bakgrunn, skal jeg derfor prøve å komme frem til en dispersjonsrelasjonen ved hjelp av hydrodynamisk bølgeteori.

Oppgaven er strukturert på følgende måte: I kapittel 2 innfører og beskriver jeg kort de generelle likningene som er brukt gjennom hele oppgaven, samt diverse regneregler og formler. I kapittel 3 presenteres de elastiske parameterne og mekanikken til en blodårevegg og egenskaper som medfølger. I kapittel 4 kommer metoden jeg skal bruke. Videre i kapittel 5 blir Womersley resultater for fast vegg gjennomgått, men fra et ståsted innfor fluid mekanikk. Her er kapitlet delt opp i to seksjoner, hvor første del tar for seg konstant pålagt trykkgradient, og del to tar for seg en pulserende strøm. Kapittel 6 utvider modellen framlagt i kapittel 5 til at blodårene har elastiske vegger, hvor vi ender opp i en dispersjonsrelasjon med modifiserte Bessel funksjoner. Kapittel 7 inneholder diskusjonsdelen, mens kapittel 8 presenterer konklusjonen til oppgaven.

KAPITTEL 2

Matematiske elementer

Denne seksjonen vil gi et overblikk over hovedligningene som er brukt videre i oppgaven.

Vi er interessert i å se på blodstrømmen i en blodåre, som forklart i kapittel 1. Ergo skriver vi koordinatsystemet i sylinder koordinater (r, θ, z) .

Dermed kan vi uttrykke hastighetsvektoren på følgende måte:

$$\vec{v} = (v_r, v_\theta, v_z) \quad (2.1)$$

2.1 Likninger

Navier-Stokes ligning

Navier-Stokes ligningen beskriver her strømming i inkompressibelt, viskøst fluid [10]. Uttrykt i sylinder koordinater, (r, θ, z) , blir ligningene henholdsvis likning (2.2), likning (2.3) og likning (2.4).

r-komponenten:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

θ -komponenten:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

z-komponenten:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (2.5)$$

Inkompresibel kontinuitetslikning:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

Viskøs spenningstensoren:

$$\mathbb{P} = 2\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{2r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) & \frac{1}{2r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_\theta}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Bessels likning

Bessel ligningen er gitt ved:

$$r^2 \frac{d^2 w}{dr^2} + z \frac{dw}{dr} + (r^2 - \zeta^2) w = 0 \quad (2.8)$$

Denne differensiallikningen har singulariteter ved $z = 0$ og $z = \infty$ [11]. Bessels funksjon av første type, som er standard løsning av Bessels likning, er på formen:

$$J_\zeta(r) = \left(\frac{1}{2}r\right)^\zeta \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa \frac{\left(\frac{1}{4}r^2\right)^\kappa}{\kappa! \Gamma(\zeta + \kappa + 1)} \quad (2.9)$$

Denne løsningen er en analytisk funksjon av $z \in \mathbb{C}$, untatt grenpunktet $z = 0$ når ζ ikke er et heltall.

Modifisert Bessels likning

En modifisert Bessel ligning er gitt på formen:

$$r^2 \frac{d^2 w}{dr^2} + r \frac{dw}{dr} - (r^2 + \zeta^2)w = 0 \quad (2.10)$$

Denne kommer fra Bessels likning ovenfor, ved å bytte ut r med $\pm ir$, og har samme singulariteter [11].

Likning 2.10 har to standard løsninger, som kalles modifisert Bessel funksjon eller Bessels funksjon med imaginært argument. Det første standard løsnings er

$$I_\zeta(r) = \left(\frac{1}{2}r\right)^\zeta \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}r^2\right)^\kappa}{\kappa! \Gamma(\zeta + \kappa + 1)} \quad (2.11)$$

Denne løsningen har samme egenskaper som løsningen 2.9.

Den definerende egenskapen til den andre standard løsningen er

$$K_\zeta(r) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2r}} e^{-r} \quad (2.12)$$

og har grenpunkt i $z = 0$ for alle ζ .

Gamma funksjonen

Bessel funksjon og modifisert Bessel funksjon innerholder gamma funksjonen, som er gitt på formen

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx \quad (2.13)$$

$$(2.14)$$

Forholdet mellom Bessel I og Bessel J funksjonene

Forholdet mellom Bessel funksjon og den modifiserte Bessel funksjonen kan skrives slik

$$J_\zeta(re^{\pm \frac{\pi i}{2}}) = 2I_\zeta(r)e^{\pm \frac{\pi i}{2}} \quad (2.15)$$

2.2 Regneregler i sylinderkoordinater

Ikke-trivielle beregningsregler

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (2.16)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0 \quad (2.17)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v} \quad (2.18)$$

hvor ϕ er et skalarfelt, og \vec{v} er hastighetsvektor [4].
Virvlingen til hastighetsfeltet er gitt på formen:

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) \vec{i}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \vec{i}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) - \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) \vec{i}_z \quad (2.19)$$

Laplace operator er gitt ved:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (2.20)$$

Vektor Laplace er gitt ved:

$$\nabla^2 \vec{v} = \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right) \vec{i}_r + \left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) \vec{i}_\theta + \nabla^2 v_z \vec{i}_z \quad (2.21)$$

2.3 Helmholtz dekomposisjon

Et virvelfritt vektorfelt har et skalar potensial og et magnetfelt har et vektorpotensial. Helmholtz dekomposisjon ([9]) sier at et vektorfelt kan dekomponeres til en sum på formen

$$\vec{v} = \nabla \phi + \nabla \times \vec{A} \quad (2.22)$$

hvor ϕ er et skalarfelt som kalles skalar potensial, og \vec{A} er et vektorfelt, som kalles vektor potensial. Der den første delen er virvelfri og den andre delen er divergensfri.

Coulomb mål

Coulomb mål er definert ([5]) av målerens fikserings tilstand slik

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.23)$$

2.4. Leibnitz formel (Reynolds transport teorem)

der \vec{A} er et vektorfelt, slik som ovenfor.

2.4 Leibnitz formel (Reynolds transport teorem)

Leibnitz formel (Reynolds transport teorem) ([13]) tar i betraktning et vilkårlig volum $\Omega = \Omega(t)$ med grenseflate $\Gamma = \Gamma(t)$, som ikke nødvendigvis beveger seg med fluidet, og la $\Psi(\vec{x}, t)$ være en skalar, vektor eller tensor funksjon av rom og tid definert i $\Omega(t)$ og \vec{n} være normalvektor. Volum integralet bli da:

$$\int_{\Omega(t)} \Psi(\vec{x}, t) d\Omega \quad (2.24)$$

og er en veldefinert funksjon av bare tid. Endringshastigheten av Ψ i $\Omega(t)$ er gitt ved

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \Psi(\vec{x}, t) d\Omega = \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Omega(t+\Delta t)} \Psi(\vec{x}, t + \Delta t) d\Omega - \int_{\Omega(t)} \Psi(\vec{x}, t) d\Omega \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Hvis grenseflaten $\Gamma(t)$ beveger seg med hastighet \vec{v}_Γ , vil dette introdusere en flux av Ψ proporsjonal til $\vec{v}_\Gamma \cdot \vec{n}$. Som en konsekvens av dette, vil integralet bli:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t+\Delta t)} \Psi(\vec{x}, t + \Delta t) d\Omega = \\ \int_{\Omega(t)} \Psi(\vec{x}, t + \Delta t) d\Omega + \Delta t \int_{\Gamma(t)} \Psi(\vec{x}, t + \Delta t) \vec{v}_\Gamma \cdot \vec{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.26)$$

Endringshastigheten av Ψ kan da skrives som

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \Psi d\Omega \\ = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Omega(t)} \Psi(\vec{x}, t + \Delta t) d\Omega + \Delta t \int_{\Gamma(t)} \Psi(\vec{x}, t + \Delta t) \vec{v}_\Gamma \cdot \vec{n} d\Gamma - \int_{\Omega(t)} \Psi(\vec{x}, t) d\Omega \right] \\ = \int_{\Omega(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\Psi(\vec{x}, t + \Delta t) d\Omega - \Psi(\vec{x}, t) d\Omega] + \int_{\Gamma(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Psi(\vec{x}, t + \Delta t) \vec{v}_\Gamma \cdot \vec{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.27)$$

eller ekvivalent

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \Psi d\Omega = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma(t)} \Psi(\vec{x}, t + \Delta t) \vec{v}_\Gamma \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (2.28)$$

En mer passende form i denne oppgaven er

$$\frac{d}{dz} \int_0^{R(z)} s(r, z) dr = \int_0^{R(z)} \frac{\partial s(r, z)}{\partial z} dr + s(R, z)|_R \quad (2.29)$$

der $R(z)$ er radius og $s(r, z)$ er en tilfeldig funksjon.

2.5 Taylor utvikling

Senere i oppgaven skal vi Taylor utvikle ledd om likevekstradius $r = R_0$

$$\begin{aligned} f(r)|_{r=R} &= f(R_0) + (R - R_0) \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{r=R_0} \\ &+ \frac{1}{2} (R - R_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \Big|_{r=R_0} + \frac{1}{6} (R - R_0)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \Big|_{r=R_0} + \dots \quad (2.30) \end{aligned}$$

KAPITTEL 3

Elastiske egenskaper

3.1 Elastiske parametere

E - Youngs modul. Det beskriver forholdet mellom spenning og tøyning. Det er stort sett veldig stor, og bruker vanligvis enhet GPa (gigapascal).

δ - Poisson forhold er forholdet mellom tøyning i r-retning og tøyning i z-retning.

K - bulkmodul

G - stivhetsmodul

Forholdene mellom de er

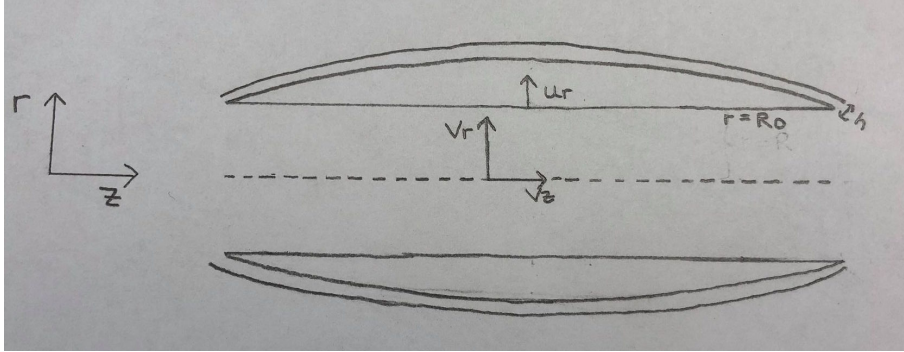
$$K = \frac{E}{3(1 - 2\delta)}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \delta)}$$

$$\delta = \frac{3K - 2G}{6K + 2G}$$

$$E = \frac{9KG}{3K + G}$$

3.2 Mekanikken til blodåreveggen



Figur 3.1: Blodåre med elastiske tynn vegg. Veggen har konstant tykkelse h . Likevekst radius R_0 , og radius $R(z,t)$.

Egenskapene til blodåreveggen, er studert i boken [14]. Blodåreveggen er av et isotropt lineært elastisk materiale og har en konstant tykkelse h . Vi antar at tykkelsen til veggen, h , er så liten at spenningskomponenten $\mathbb{P}_{rr} = 0$ i spenningstensoren 2.7. Ved å bruke forholdet mellom spenningstensoren \mathbb{P} og tøyningstensoren $\tilde{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^T)$, hentet fra kompendiet [8], finner de et uttrykk for veggforskyvningen i radiell retning, u_r , uttrykt slik

$$u_r = \frac{(1 - \delta^2)R_0^2}{hE}p \quad (3.1)$$

der δ er Poisson forhold og E er Youngs modul. Beskrevet i avsnitt 3.1.

Da kan tverrsnittet skrives slik

$$A = \pi(R_0 + u_r)^2 \approx \pi R_0^2 + 2\pi R_0 u_r \quad (3.2)$$

Siden jeg skal se på et isolert arterie segment fylt med væske, og antar at h er liten, trenger vi derfor kun se på utvidbarhetsparameteren som er definert som endring i volum for en gitt endring i trykk, delt på initial volumet V_0 slik som dette

$$D = \frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta p} \quad (3.3)$$

Siden sekvensen er bundet og strømmen er pulserende kan den bli estimert til tverrsnittsarealet for en gitt endring i pulstrykket. Da kan den skrives slik:

$$D = \frac{1}{A_0} \left(\frac{\partial A}{\partial p} \right)_{p=p_0} \quad (3.4)$$

3.2. Mekanikken til blodåreveggen

hvor A_0 er initial tverrsnittet, A tverrsnittet som funksjon av tid og rom, og p er trykk.

Fra likning 3.2 og 3.1, kan likning 3.4 skrives om til en denne formen

$$D = \frac{1}{A_0} \left(\frac{\Delta A}{\Delta p} \right)_{p=p_0} = \frac{2R_0}{h} \frac{(1 - \delta^2)}{E} \quad (3.5)$$

Grunnen til at man vil skrive D på denne formen, er for å gjøre det lettere å finne et estimat for D . Der verdiene til δ og E kan måles ved å gjøre en strekk test.

I blodårer kan vi anta et estimat på Poisson forholdet $\delta = 0.45$ og Youngs modul $E \approx 1MPa$.

Hvis vi antar at radiusen til blodåren $R_0 = 0.5cm$ og tykkelsen til veggen er $h = 0.01cm$, kan vi finne et estimat for D

$$D = \frac{2R_0}{h} \frac{(1 - \delta^2)}{E} \quad (3.6)$$

$$= \frac{1}{0.01} \frac{1 - 0.45^2}{1MPa} \quad (3.7)$$

$$= 7,9810^{-5} \frac{m^2}{N} \quad (3.8)$$

KAPITTEL 4

Metode

Innledningsvis trenger vi alle grunnleggende likninger og randkrav. Anta først bølgeløsning for hastighet \vec{v} , trykk p og overflatehevning η på formen

$$\begin{pmatrix} \eta(z, t) \\ p(r, z, t) \\ \vec{v}(r, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{p}(r) \\ \hat{\vec{v}}(r) \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \quad (4.1)$$

hvor z er akse langs blodåra og r er radius.

Deretter skal vi løse den radielle strukturen av feltene $\hat{p}(r)$ og $\hat{\vec{v}}(r)$ og vi skal finne dispersjonsrelasjonen, altså relasjonen mellom ω og k som garanterer at vi kan ha frie bølger.

I neste runde ønsker vi å se hvordan ikkelineære effekter kan dukke opp, ved at bølgefeltene fra ledene orden kan drive ikkelineære høyere ordens korreksjoner. Dersom det er resonans, dvs de ikkelineære inhomogenitetene driver det opprinnelige systemet på en måte som tilfredsstiller dispersjonsrelasjonen, så forventer vi å måtte introdusere langsomme skalaer og utlede evolusjonslikninger for å beskrive den langsomme utviklingen til bølgene.

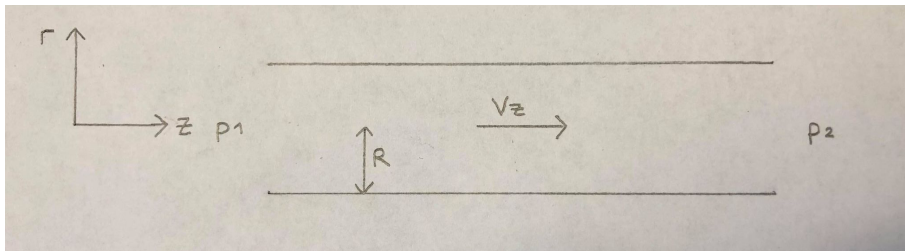
For å illustrere hva slags framgangsmåte vi har i tankene for å behandle ikkelineære effekter kan vi med fordel se på en enkel svingende pendel, se vedlegg A.1.

KAPITTEL 5

Womersleys fast vegg

I dette kapitlet går jeg gjennom Womersleys resultat, for blodstrøm i sirkulært rør med fast vegg. Dette resultatet har jeg sett på i alle disse kildene [15], [10] og [14], der alle kildene er skrevet av folk med medisinsk bakgrunn. I denne seksjonen gjenskaper jeg deres resultater fra mitt ståsted innenfor fluid mekanikk. Dette kapitlet består av to seksjoner. I seksjon 5.1 er den konstant pålagt trykkgradient, men i seksjon 5.2 er det med pulserende strøm.

5.1 Konstant pålagt trykkgradient



Figur 5.1: Blodåre med faste vegger, med radius R .

Vi ser på et sirkulært rør med faste vegger, med lengde l og radius R . Røret er fylt med en tyktflytende væske, blod, med tetthet ρ og dynamisk viskositet μ . Den kinematiske viskositeten er $\nu = \frac{\mu}{\rho}$.

Siden dette er et rør, bruker vi sylinderkoordinater (r, θ, z) . Blodet strømmer med en hastighet $\vec{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$. Antar at vi har en trykkgradient som dette $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p_1 - p_2}{l}$.

Siden vi har viskøs strøm, kan vi derfor bruke Navier-Stokes ligning:

r-komponenten:

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right)$$

5.1. Konstant pålagt trykkgradient

$$= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right) \quad (5.1)$$

θ-komponenten:

$$\begin{aligned} & \rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r}\right) \\ &= -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

z-komponenten:

$$\begin{aligned} & \rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

I tillegg har vi to randkrav.

Det kinematisk randkravet, som sier at det ikke kan strømme blod gjennom veggen:

$$v_r = 0 \quad \text{ved} \quad r = R \quad (5.4)$$

Og at det er full heft på veggen:

$$v_z = 0 \quad \text{ved} \quad r = R \quad (5.5)$$

Vi antar at vi kan se bort fra at blodet strømmer i sirkulære bevegelser, derfor antar vi $v_\theta = 0$ og $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$. Dette antar vi for resten av denne oppgaven.

På grunn av randkravene og antakelsene, antar jeg at $v_r = 0$ overalt, og problemet blir forenklet til dette:

r-komponenten:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (5.6)$$

z-komponenten:

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) \quad (5.7)$$

5.1. Konstant pålagt trykkgradient

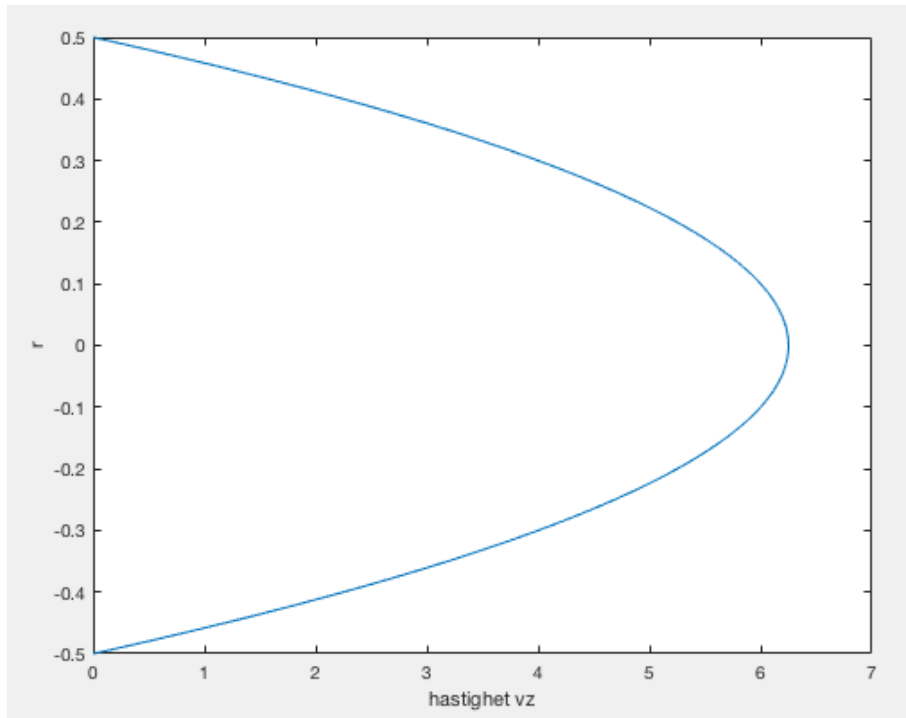
På grunn av betingelsen for inkompressibilitet ser vi at v_z ikke kan være avhengig av z . Antar da at $v_z = v_z(r)$. Vi antar at trykkgradienten er konstant.

Bevegelseslikningen til væsken blir da

$$\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} + \frac{p_1 - p_2}{\mu l} = 0 \quad (5.8)$$

hvor løsningen for $v_z(r)$ blir:

$$v_z(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (5.9)$$



Figur 5.2: Hastighetsprofilen til Poiseuille strøm. $R=0.5\text{cm}$

Løsningen er vanlig Poiseuille løsning for jevn flyt. Ser at randkravet for $v_r = 0$ er oppfylt, siden jeg har antatt at $v_r = 0$ overalt. Ser også at randkravet $v_z = 0$ ved $r=R$, er oppfylt her

$$v_z(R) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} R^2 (1 - 1) = 0 \quad (5.10)$$

5.1. Konstant pålagt trykkgradient

v_z har sin største verdi ved $r=0$, kaller den for v_{zmax}

$$v_{zmax} = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} R^2 \quad (5.11)$$

Den integrerte fluksen $q = \int \int \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = 2\pi \int_0^R v_z(r) r dr$, der $\vec{n} = \vec{i}_z$ blir da

$$q = 2\pi \int_0^R v_z r dr = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} \pi R^4 = \frac{v_{zmax}}{2} \pi R^2 \quad (5.12)$$

5.2 Pulserende strøm

Vi er interessert i å se på blod som strømmer i blodårer. Derfor utvider vi til å se på en pulserende strøm, da vi vet at $\frac{\partial p}{\partial z} \neq$ konstant. Da skriver vi $\frac{\partial p}{\partial z} = ae^{i\omega t}$, som er periodisk med frekvens $f = \frac{\omega}{2\pi}$ og amplituden a til trykkgradientpuls. Da får vi med et ekstra ledd fra Navier-Stokes, siden vi ser at $\frac{\partial p}{\partial z}$ er avhengig av t , og at da er også v_z avhengig av t . Antar fortsatt at $v_r = 0$ overalt, da blir $v_z = v_z(r, t)$.

Da blir bevegelseslikningen på formen:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial v_z}{\partial t} = ae^{i\omega t} \quad (5.13)$$

I tillegg har vi de samme to randkravene.

Det kinematisk randkravet, som sier at det ikke kan strømme blod gjennom vegg:

$$v_r = 0 \quad \text{ved} \quad r = R \quad (5.14)$$

Og at det er full heft på vegg:

$$v_z = 0 \quad \text{ved} \quad r = R \quad (5.15)$$

Skriver om $v_z(r, t) = V(r)e^{i\omega t}$ og setter det inn i bevegelseslikningen

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} - \frac{i\omega}{\nu} V = -\frac{a}{\mu} \quad (5.16)$$

Skriver om likningen til formen

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{i^3 \omega}{\nu} V = -\frac{a}{\mu} \quad (5.17)$$

Da kan løsningen skrives slik

$$V = \frac{a}{\rho i \omega} \left(1 - \frac{J_0\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} i^{\frac{3}{2}}\right)}{J_0\left(R\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} i^{\frac{3}{2}}\right)} \right) \quad (5.18)$$

hvor $J_0(i^{\frac{3}{2}} x)$ er en Besselfunksjon. Skriver $\alpha = R\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$, der α er Womersleys tall. Det er et dimensjonsløst uttrykk for pulserende strømningsfrekvens i forhold til viskøse krefter.

Setter V inn igjen i v_z og får dette uttrykket

$$v_z(r, t) = V(r)e^{i\omega t} = \frac{a}{\rho i \omega} \left(1 - \frac{J_0(i^{\frac{3}{2}} \alpha \frac{r}{R})}{J_0(i^{\frac{3}{2}} \alpha)} \right) e^{i\omega t} \quad (5.19)$$

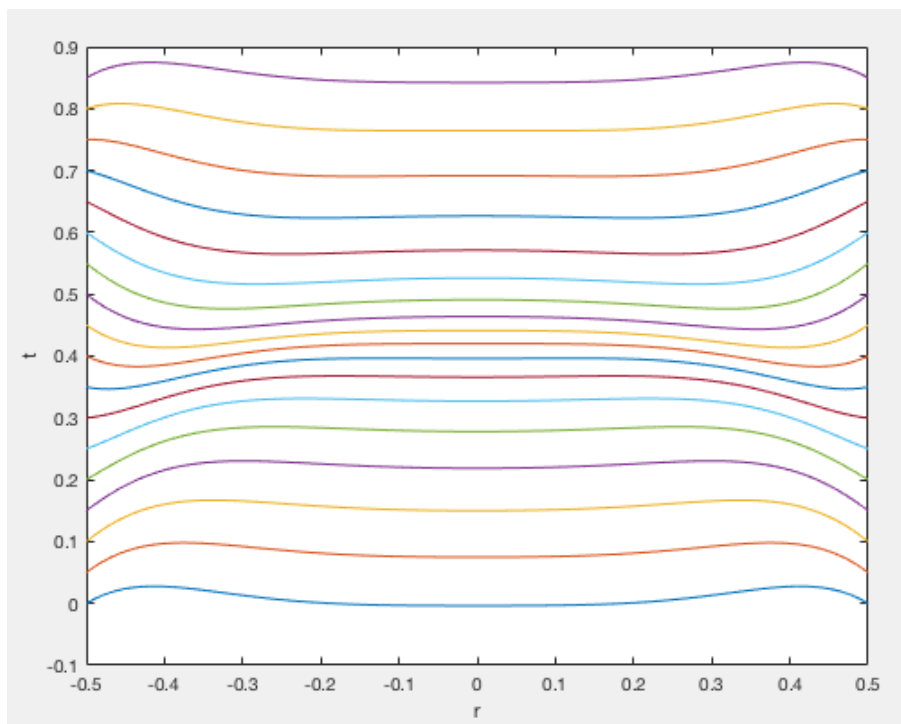
Ser at randkravene er oppfylt, akkurat som problemet over.

Parametere til blod og blodårer

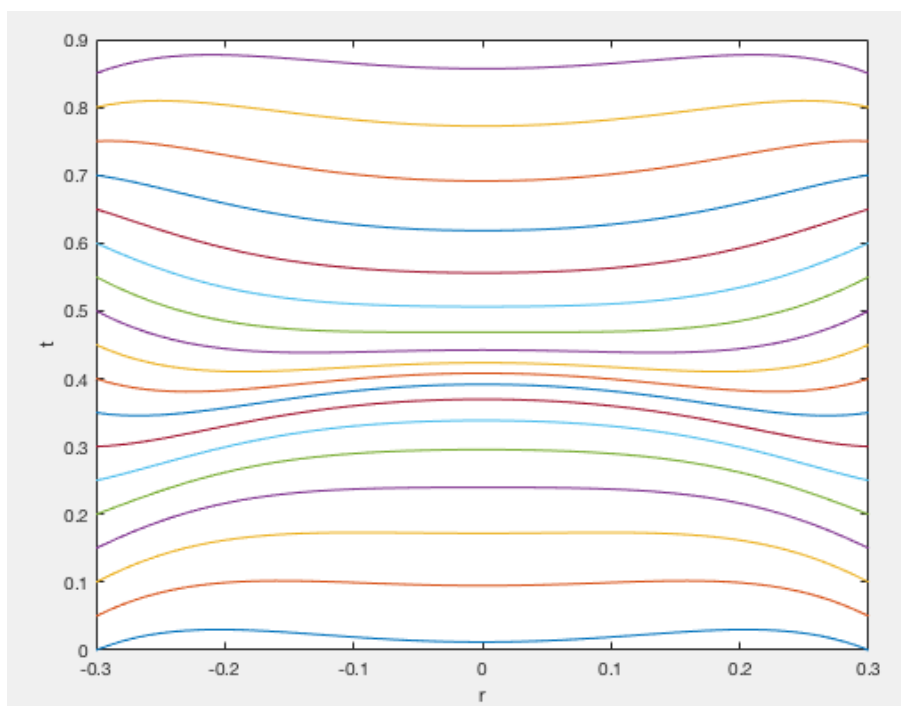
I blodet er tettheten $\rho = 1.05 \frac{g}{cm^3}$ og den dynamiske viskositeten $\mu = 0.04 \frac{g}{cm \cdot s}$.

Dermed blir den kinematiske viskositeten $\nu = \frac{\mu}{\rho} = 0.038 \frac{cm^2}{s}$.

Frekvensen til pulsen er ω , og den antar jeg til å være $\omega = \frac{2\pi \cdot 70}{60} \frac{rad}{s}$. Radiusen til blodåren antar jeg til å være 0.5cm.



Figur 5.3: Hastighetsprofil til v_z i likning 5.19. Alle parameterene til blodet står ovenfor. Her har jeg satt amplituden $a=0.6$. Womersleys tall blir da $\alpha = 6.94$.



Figur 5.4: Hastighetprofil til v_z i likning 5.19. Her bruker jeg de samme verdiene som ovenfor, men endrer radius til $R=0.3$. Da blir Womersleys tall $\alpha = 4.16$

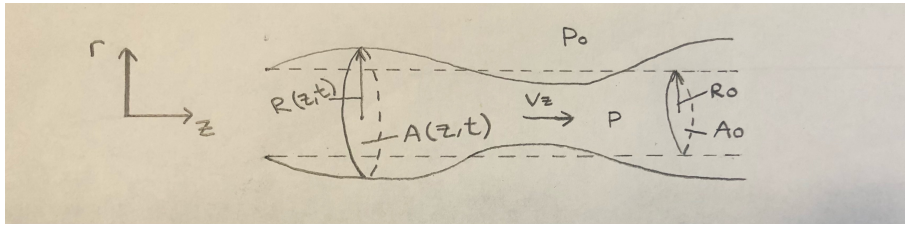
Den integrerte fluksen $q = \int \int \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = 2\pi \int_0^R v_z(r) r dr$, der $\vec{n} = \vec{i}_z$ blir da

$$q = \frac{\pi R^2}{\rho} \frac{a}{i\omega} \left(1 - \frac{2\alpha i^{\frac{3}{2}}}{\alpha i^3} \frac{J_1(i^{\frac{3}{2}}\alpha)}{J_0(i^{\frac{3}{2}}\alpha)} \right) e^{i\omega t} \quad (5.20)$$

KAPITTEL 6

Elastisk vegg

I denne kapitlet utvider jeg den modellen fra 5 til at blodårene har elastisk vegg. Har fortsatt et sirkulært rør, men går nå over fra fast vegg til elastisk vegg. Da blir radiusen $r = R(z,t)$ og tverrsnittet $A(z,t) = \pi R^2$. Vi har også likevekt radius R_0 og likevekt tverrsnitt $A_0 = \pi R_0^2$. Vi har fortsatt hastighet \vec{v} , men nå med $\vec{v} = (v_r, 0, v_z)$, der $v_r \neq 0$. Integrert fluks blir $q = q(z,t)$. Vi har også trykk p i blodet og trykk p_0 utenfor veggen når $r = R_0$. Den faste linjen på figuren er R , mens det stiplede linjen er R_0 .



Figur 6.1: Blodåre med elastisk vegg, med likevekst radius R_0 og radius $R(z,t)$.

Med normalvektor

$$\vec{n}_1 = \frac{(1, 0, -\frac{\partial R}{\partial z})}{\sqrt{1 + (\frac{\partial R}{\partial z})^2}} \quad (6.1)$$

Og tangentvektorer

$$\vec{l}_1 = \frac{(\frac{\partial R}{\partial z}, 0, 1)}{\sqrt{(\frac{\partial R}{\partial z})^2 + 1}} \quad (6.2)$$

$$\vec{m}_1 = \frac{(0, -1 - (\frac{\partial R}{\partial z})^2, 0)}{1 + (\frac{\partial R}{\partial z})^2} = -i\vec{\theta} \quad (6.3)$$

6.1 Utvidbarhet

I en isolert arterie segment fylt med væske, der h er liten, kan vi derfor kun se på utvidbarhetsparameteren som er definert som endring i volum for en gitt endring i trykk, delt på initial volumet V_0 slik som dette

$$D = \frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta p} \quad (6.4)$$

Siden sekvensen er bundet og strømmen er pulserende kan den bli estimert til tverrsnittsarealet for en gitt endring i pulstrykket. Da kan den skrives slik:

$$D = \frac{1}{A_0} \left(\frac{\partial A}{\partial p} \right)_{p=p_0} \quad (6.5)$$

der A_0 er initial tverrsnittet, A tverrsnittet som funksjon av tid og rom, og p er trykk.

6.2 Hoved likninger

Har hastighet på formen $\vec{v} = (v_r, 0, v_z)$, siden det allerede er definert at jeg ikke har hastighet i sirkulære bevegelser.

Navier-Stokes
r-komponenten:

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right) \quad (6.6)$$

z-komponenten:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (6.7)$$

Siden blodet er inkompressibelt har vi i tillegg kontinuitetslikningen

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (6.8)$$

I tillegg er det ikke er radial hastighet i sentrum, der $r = 0$,

$$v_r = 0 \quad (6.9)$$

Det kinematiske randkravet, som sier at det ikke kan strømme blod gjennom vegg, ved $r=R$,

$$n_1 \cdot \vec{v} = \frac{\partial R}{\partial t} \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial z} v_z = v_r \quad (6.11)$$

At det er full heft på vegg, ved $r=R$,

$$l_1 \cdot \vec{v} = 0 \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} v_r + v_z = 0 \quad (6.13)$$

Nå skal jeg finne det dynamiske randkravet, starter med utvidbarhetsparameteren, for å finne et uttrykk for R

$$D = \frac{1}{A_0} \left(\frac{\partial A}{\partial p} \right)_{p=p_0} \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial A}{\partial p}|_{p=p_0} = A_0 D \quad (6.15)$$

$$A = A_0 D(p - p_0) + A_0 \quad (6.16)$$

$$\pi R^2 = \pi R_0^2 (D(p - p_0) + 1) \quad (6.17)$$

$$R = R_0 \sqrt{D(p - p_0) + 1} \quad (6.18)$$

Dette er det dynamiske randkravet, ved $r=R$

$$R = R_0 \sqrt{D(p - p_0) + 1} \quad (6.19)$$

Da har jeg skrevet ned hele problemet med alle likningene jeg trenger og fire randkravene. Videre skal jeg Taylorutvikle randkravene om likevekstradius R_0 .

Starter med å Taylorutvikling alle leddene

$$\frac{\partial R}{\partial z} v_z|_{r=R} = \frac{\partial R}{\partial z} v_z|_{r=R_0} + \dots \quad (6.20)$$

$$v_r|_{r=R} = v_r|_{r=R_0} + (R - R_0) \frac{\partial v_r}{\partial r}|_{r=R_0} + \dots \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} v_r|_{r=R} = \frac{\partial R}{\partial z} v_r|_{r=R_0} + \dots \quad (6.22)$$

$$v_z|_{r=R} = v_z|_{r=R_0} + (R - R_0) \frac{\partial v_z}{\partial r}|_{r=R_0} + \dots \quad (6.23)$$

$$\sqrt{1 + D(p(R) - p_0)} = 1 + \frac{1}{2} D(p(R_0) - p_0) - \frac{1}{8} D^2(p(R_0) - p_0)^2 + \dots \quad (6.24)$$

Taylorutviklingen for det siste leddet blir litt spesielt. Dette er fordi jeg antar at 1 er stor og $D(p(R_0) - p_0)$ er liten. Det er fordi $D(p(R_0) - p_0)$, som er utslaget av blodåren er lite i forhold til 1.

Videre nedover kommer de Taylorutviklede randkravene

Det kinematiske randkravet blir da, ved $r = R_0$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial z} v_z = v_r + (R - R_0) \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (6.25)$$

Full heft randkravet blir da, ved $r = R_0$

$$\frac{\partial R}{\partial z} v_r + v_z + (R - R_0) \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \quad (6.26)$$

Det dynamiske randkravet blir da, ved $r = R_0$

$$R = R_0 \left(1 + \frac{1}{2} D(p(R_0) - p_0) - \frac{1}{8} D^2(p(R_0) - p_0)^2 \right) \quad (6.27)$$

6.3 Lineariserer problemet

Herfra skal jeg se på det lineære problemet. Starter derfor med å skrive opp alle de lineære likningen og randkravene.

Lineariserte Navier-Stokes
r-komponenten

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right) \quad (6.28)$$

z-komponenten

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (6.29)$$

Kontinuitetslikningen, som allerede er lineær

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (6.30)$$

Det er ikke radiell hastighet i sentrum, der $r = 0$,

$$v_r = 0 \quad (6.31)$$

Linearisert kinematisk randkrav, ved $r = R_0$, blir

$$\frac{\partial R}{\partial t} = v_r \quad (6.32)$$

Linearisert full heft kravet, ved $r = R_0$, blir

$$v_z = 0 \quad (6.33)$$

Lineariserte dynamisk randkrav, ved $r = R_0$, blir

$$R = R_0 \left(1 + \frac{1}{2} D(p(R_0) - p_0) \right) \quad (6.34)$$

Anta bølgeløsning

$$\begin{pmatrix} p(r, z, t) \\ R(z, t) \\ v_r(r, z, t) \\ v_z(r, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{R} \\ \hat{v}_r \\ \hat{v}_z \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.35)$$

Setter inn dette i likningene, og faktoriserer ut $e^{i(kz - \omega t)} \neq 0$:

Navier-Stokes
r-komponenten:

$$-\rho i \omega \hat{v}_r = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial r} \right) - k^2 \hat{v}_r - \frac{\hat{v}_r}{r^2} \right) \quad (6.36)$$

z-komponenten:

$$-\rho i \omega \hat{v}_z = -ik \hat{p} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \hat{v}_z}{\partial r} \right) - k^2 \hat{v}_z \right) \quad (6.37)$$

Kontinuitetslikningen

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{v}_r) + ik \hat{v}_z = 0 \quad (6.38)$$

Det ikke radial hastighet i sentrum, der $r = 0$,

$$\hat{v}_r = 0 \quad (6.39)$$

Kinematisk randkravet, ved $r = R_0$

$$-i\omega \hat{R} = \hat{v}_r \quad (6.40)$$

Full heft kravet, ved $r = R_0$

$$\hat{v}_z = 0 \quad (6.41)$$

Dynamiske kravet, ved $r = R_0$

$$R = R_0(1 + \frac{1}{2}D(p(R_0) - p_0)) \quad (6.42)$$

For å løse dette lineære problemet, må jeg først løse for r-avhengigheten. Det var det jeg gjorde i problemene ovenfor med fast vegg. Siden jeg nå har tre koblede andre-ordens differensialligninger for denne r-avhengigheten, blir det for vanskelig å løse analytisk. Derfor må jeg nå prøve en annen fremgangsmåte.

6.4 Helmholtz dekomposisjon

Herfra skal jeg prøve en annen fremgangsmåte, for å se om problemet blir lettere å løse.

Skal nå uttrykke \vec{v} som en superposisjon av virvelfrie og divergensfrie deler, ved å introdusere Helmholtz dekomposisjon (2.22). Da får jeg

$$\vec{v} = \nabla\phi + \nabla \times (\psi \vec{i}_\theta) \quad (6.43)$$

som betyr at

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z} \quad (6.44)$$

$$v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\psi) \quad (6.45)$$

Kontinuitetslikning

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (\nabla\phi + \nabla \times \psi \vec{i}_\theta) = 0 \quad (6.46)$$

$$\nabla^2\phi + \nabla \cdot \nabla \times \psi \vec{i}_\theta = 0 \quad (6.47)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r), 0, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(-\frac{\partial\psi}{\partial z}, 0, \frac{1}{r}(\psi + r \frac{\partial\psi}{\partial r}) \right) = 0 \quad (6.48)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \psi + \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) = 0 \quad (6.49)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + r \frac{\partial^2\psi}{\partial z \partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z \partial r} = 0 \quad (6.50)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.51)$$

Kan også regnes ut slik

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (6.52)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right) = 0 \quad (6.53)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial^2\psi}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r \partial z} = 0 \quad (6.54)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.55)$$

Neste steg er å ta virvlingen til Navier-Stokes:

$$\nabla \times \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} \right] \quad (6.56)$$

Først regner jeg ut virvlingen til \vec{v} , ved hjelp av likningene 2.16 og likning 2.23

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{v} &= \nabla \times (\nabla \phi + \nabla \times (\psi \vec{i}_\theta)) \\ &= \nabla \times \nabla \phi + \nabla \times (\nabla \times (\psi \vec{i}_\theta)) \\ &= \nabla \times (\nabla \times (\psi \vec{i}_\theta)) \\ &= \nabla \nabla \cdot (\psi \vec{i}_\theta) - \nabla \cdot \nabla (\psi \vec{i}_\theta) \\ &= \nabla (\vec{i}_\theta \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \vec{i}_\theta) - \nabla^2 (\psi \vec{i}_\theta) \\ &= -\nabla^2 (\psi \vec{i}_\theta) \\ &= -\nabla^2 \psi \vec{i}_\theta - \psi \nabla^2 \vec{i}_\theta \end{aligned} \quad (6.57)$$

Kan også regne ut slik, men det over hjelper bedre i denne sammenheng

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{v} &= \nabla \times (\nabla \phi + \nabla \times \psi \vec{i}_\theta) \\ &= \nabla \times \nabla \phi + \nabla \times (\nabla \times \psi \vec{i}_\theta) \\ &= \nabla \times \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}, 0, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \nabla \times (\nabla \times (0, \psi, 0)) \\ &= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial r} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial r} \right) \vec{i}_\theta + \nabla \times \left(-\frac{\partial \psi}{\partial z}, 0, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right) \\ &= \nabla \times \left(-\frac{\partial \psi}{\partial z}, 0, \frac{1}{r} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \\ &= \left(\frac{1}{r^2} \psi - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \right) \vec{i}_\theta \\ &= \left(\frac{1}{r^2} \psi - \nabla^2 \psi \right) \vec{i}_\theta \end{aligned} \quad (6.58)$$

Så regner jeg ut virvlingen leddvis

$$\nabla \times \nabla p = \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \right) \vec{i}_\theta = 0 \quad (6.59)$$

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla^2 (\psi \vec{i}_\theta))$$

$$= -\nabla^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\vec{i}_\theta\right) \quad (6.60)$$

$$\nabla \times \nu \nabla^2 \vec{v} = -\nu \nabla^2 \nabla^2 (\psi \vec{i}_\theta) \quad (6.61)$$

Setter sammen alle leddene, så får jeg virvlingen til Navier-Stokes

$$-\nabla^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\vec{i}_\theta\right) = -\nu \nabla^2 \nabla^2 (\psi \vec{i}_\theta) \quad (6.62)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}\vec{i}_\theta = \nu \nabla^2 (\psi \vec{i}_\theta) \quad (6.63)$$

Skriver alle leddene ut

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}\vec{i}_\theta = \nu(\nabla^2\psi\vec{i}_\theta - \psi\nabla^2\vec{i}_\theta) \quad (6.64)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}\psi\right) \quad (6.65)$$

Dette har nå blitt min varmelikning.

Det neste jeg gjør er at jeg skal sette inn uttrykkene for v_r og v_z i Navier-Stokes ligning og rydde opp. Starter med r-komponenten, og skal deretter gjøre det samme for z-komponenten.

r-komponenten av Navier-Stokes

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2}\right) \quad (6.66)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right) \end{aligned} \quad (6.67)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} - r\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^3\phi}{\partial z^2\partial r} - \frac{\partial^3\psi}{\partial z^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) \end{aligned} \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial r} - \frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^3\phi}{\partial r^3} + \frac{\partial^3\phi}{\partial r\partial z^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z} - \frac{\partial^3\psi}{\partial r^2\partial z} - \frac{\partial^3\psi}{\partial z^3} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) \end{aligned} \quad (6.69)$$

6.4. Helmholtz dekomposisjon

$$\rho \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \right) \quad (6.70)$$

Når vi bruker kontinuitetslikningen 6.51, får vi dette uttrykket

$$\rho \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \right) \quad (6.71)$$

Fortsetter videre med å rydde opp, prøver å forenkle uttrykket mitt videre

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \right) \quad (6.72)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} + \nu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \right) \quad (6.73)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \nu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (6.74)$$

Ved å bruke varmelikningen 6.64 blir uttrykket forkortet til

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (6.75)$$

Da har uttrykket for r-komponenten blitt kraftig redusert, til å bli en likning for ϕ og p , som bare er avhengig av r og t .

Skal nå prøve det samme for z-komponenten.

z-komponenten av Navier-Stokes

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (6.76)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} \\ &+ \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right) \right) \end{aligned} \quad (6.77)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{1}{r^2} \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) \right) + \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (6.78)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} + r \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^2 \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \psi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + r \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} \right) + \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (6.79)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial r} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \psi \right) \end{aligned} \quad (6.80)$$

Bruker igjen kontinuitetslikningen 6.51, får vi

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \psi \right) \end{aligned} \quad (6.81)$$

Fortsetter videre med å rydde opp og prøve å forenkle

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \psi \right) \end{aligned} \quad (6.82)$$

6.4. Helmholtz dekomposisjon

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial r} + \nu \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial r} + \frac{2}{r^3} \psi \right) + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^3} \psi \right) \end{aligned} \quad (6.83)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \psi \right) \right) \\ &\quad + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^3} \psi \right) \end{aligned} \quad (6.84)$$

Bruker også denne gangen varmelikningen 6.64 til å forkorte uttrykket til dette

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^3} \psi \right) \quad (6.85)$$

Fortsetter enda en gang for å prøve å forenkle enda mer

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^3} \psi \right) \quad (6.86)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \psi \right) \right) \quad (6.87)$$

Forkorter igjen ved bruk av varmelikningen 6.64 og får

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (6.88)$$

Både r-komponenten 6.75 og z-komponenten 6.88 har nå blitt kraftig redusert, begge likningene inneholder nå bare ϕ og p . Ser at hvis jeg tar $\frac{\partial}{\partial r}$ av z-komponenten 6.88 og $\frac{\partial}{\partial z}$ av r-komponenten 6.75, blir de like. Videre nå skal jeg sette opp alle de nye ligningen med randkrav.

6.5 Det lineære problemet

Navier-Stokes
r-komponenten

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (6.89)$$

z-komponenten

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (6.90)$$

Kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.91)$$

Varmelikningen

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \psi \right) \quad (6.92)$$

Ingen radial hastighet i sentrum, der $r = 0$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (6.93)$$

Kinematisk randkravet, ved $r = R_0$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (6.94)$$

Full heft kravet, ved $r = R_0$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) = 0 \quad (6.95)$$

Dynamisk randkravet, ved $r = R_0$

$$R = R_0 \left(1 + \frac{1}{2} D(p(R_0) - p_0) \right) \quad (6.96)$$

Løsning for trykket

Siden jeg har fått likningene til å dekkoble, kan jeg integrerer de to Navier-Stokes komponentene med hensyn på rom, og få en løsning for trykket.

$$\int \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} dz = -\frac{1}{\rho} \int \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (6.97)$$

og

$$\int \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r} dr = -\frac{1}{\rho} \int \frac{\partial p}{\partial r} dr \quad (6.98)$$

Da får jeg ut Eulers trykklikning, der trykket er gitt ved den tidsderiverte av ϕ

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + p_0 \quad (6.99)$$

Nå kan jeg bruke dette til å fjerne trykket fra det dynamiske randkravet. Jeg har

$$R = R_0 \left(1 + \frac{1}{2} D(p(R_0) - p_0) \right) \quad (6.100)$$

og

$$p - p_0 = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (6.101)$$

Setter uttrykket jeg har funnet for trykket inn i den dynamiske randkravet, og får dette som det nye dynamiske randkravet, ved $r = R_0$

$$R = R_0 \left(1 - \frac{1}{2} \rho D \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (6.102)$$

der $R = R_0 + \eta$, der η er overflatehevingen beskrevet slik

$$\eta = -\frac{1}{2} R_0 D \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (6.103)$$

Dette skal jeg bruke som mitt dynamisk randkrav.

På grunn av denne endringen, skriver jeg om det kinematiske randkravet til dette:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (6.104)$$

Anta bølgeløsning

$$\begin{pmatrix} p(r, z, t) \\ \eta(z, t) \\ \phi(r, z, t) \\ \psi(r, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{\eta} \\ \hat{\phi} \\ \hat{\psi} \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.105)$$

Setter inn dette i likningene, og faktoriserer ut $e^{i(kz - \omega t)} \neq 0$:

Navier-Stokes

r-komponenten:

$$-i\omega \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} \quad (6.106)$$

z-komponenten:

$$\omega \hat{\phi} = -\frac{1}{\rho} i \hat{p} \quad (6.107)$$

Kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} - k^2 \hat{\phi} = 0 \quad (6.108)$$

Varmelikning/diffusjonslikningen

$$-i\omega \hat{\psi} - \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial r^2} - k^2 \hat{\psi} - \frac{1}{r^2} \hat{\psi} \right) = 0 \quad (6.109)$$

Kinematisk randkravet, ved $r = R_0$

$$\omega \hat{\eta} = i \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} - k \hat{\psi} \quad (6.110)$$

Full heft kravet, ved $r = R_0$

$$ik \hat{\phi} + \frac{1}{R_0} \hat{\psi} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} = 0 \quad (6.111)$$

Dynamiske randkravet, ved $r = R_0$

$$\hat{\eta} = R_0 \frac{1}{2} D\rho\omega i \hat{\phi} \quad (6.112)$$

Ingen radial hastighet i sentrum, der $r = 0$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} - ik\hat{\psi} = 0 \quad (6.113)$$

Løser problemet

Siden jeg nå har kontinuitetslikningen for $\hat{\phi}$ og varmelikningen for $\hat{\psi}$ er det neste jeg skal gjøre å finne løsninger for disse.

Starter med kontinuitetslikningen, får å finne en løsning for $\hat{\phi}$

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} - k^2 \hat{\phi} = 0 \quad (6.114)$$

Kan skrive om likningen til

$$r^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial r^2} + r \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} - k^2 r^2 \hat{\phi} = 0 \quad (6.115)$$

For å fjerne k^2 må jeg innføre et variabelskifte, $r = \gamma\epsilon$ der gamma er en konstant.

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \epsilon} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \quad (6.116)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \quad (6.117)$$

Setter inn i kontinuitetslikningen

$$\gamma^2 r^2 \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \epsilon^2} + \gamma \epsilon \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \epsilon} - k^2 \gamma^2 r^2 \hat{\phi} = 0 \quad (6.118)$$

ser da at

$$\gamma = \frac{1}{k} \quad (6.119)$$

Da kan løsningen skrives slik

$$\hat{\phi} = AI_0(\epsilon) \quad (6.120)$$

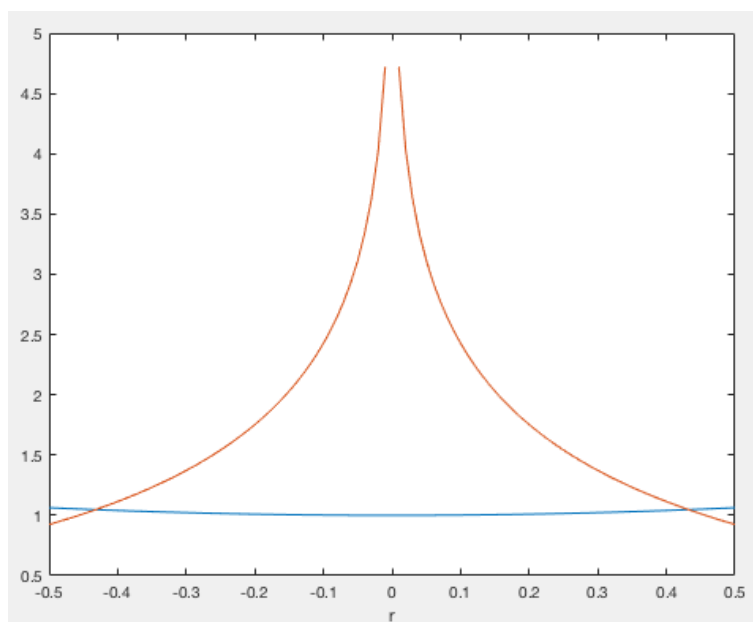
Setter inn igjen uttrykket for ϵ , og får løsningen

$$\hat{\phi} = AI_0\left(\frac{r}{\gamma}\right) \quad (6.121)$$

der A er en konstant og $I_0\left(\frac{r}{\gamma}\right)$ er en modifisert Bessel funksjon, se likning 2.11. På grunn av betingelsen om at det ikke er radial hastighet i sentrum, har vi ikke løsningen $K_0(r)$ siden

$$\lim_{r \rightarrow 0} K_0(r) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2r}} e^{-r} \rightarrow \infty \quad (6.122)$$

Dette er også vist i figur 6.2.



Figur 6.2: Her er den blå kurven $I_0(r)$ og den oransje kurven $K_0(r)$. Ser at $K_0(r)$ ikke er definert i $r=0$.

Fortsetter med å se på varmelikningen

$$-i\omega\hat{\psi} - \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial r} + \frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial r^2} - k^2\hat{\psi} - \frac{1}{r^2}\hat{\psi}\right) = 0 \quad (6.123)$$

Rydder litt opp

$$\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial r} - k^2\hat{\psi} - \frac{1}{r^2}\hat{\psi} + \frac{i\omega}{\nu}\hat{\psi} = 0 \quad (6.124)$$

$$r^2\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial r^2} + r\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial r} - r^2k^2\hat{\psi} - \hat{\psi} + r^2\frac{i\omega}{\nu}\hat{\psi} = 0 \quad (6.125)$$

$$r^2\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial r^2} + r\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial r} - r^2\left(k^2 - \frac{i\omega}{\nu}\right)\hat{\psi} - \hat{\psi} = 0 \quad (6.126)$$

Ser at jeg må få det som står i parentesen til å bli 1, for at jeg skal kunne finne en løsning analytisk. Derfor skal jeg innføre et variabelskifte. Velger $r = \beta\xi$, der β er en konstant.

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial\xi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\xi} \quad (6.127)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \quad (6.128)$$

Setter dette inn i varmelikningen

$$\beta^2\xi^2\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\xi^2} + \beta\xi\frac{1}{\beta}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\xi} - \beta^2\xi^2\left(k^2 - \frac{i\omega}{\nu}\right)\hat{\psi} - \hat{\psi} = 0 \quad (6.129)$$

$$\xi^2\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\xi^2} + \xi\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\xi} - \beta^2\xi^2\left(k^2 - \frac{i\omega}{\nu}\right)\hat{\psi} - \hat{\psi} = 0 \quad (6.130)$$

Trenger derfor

$$\beta^2\left(k^2 - \frac{i\omega}{\nu}\right) = 1 \quad (6.131)$$

Det betyr at

$$\frac{1}{\beta^2} = k^2 - \frac{i\omega}{\nu} \quad (6.132)$$

$$\beta^2 = \frac{1}{k^2} - \frac{\nu}{i\omega} \quad (6.133)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{k^2} - \frac{\nu}{i\omega}} \quad (6.134)$$

Setter uttrykket for β tilbake, og får

$$\xi^2 \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi} - (\xi^2 + 1)\hat{\psi} = 0 \quad (6.135)$$

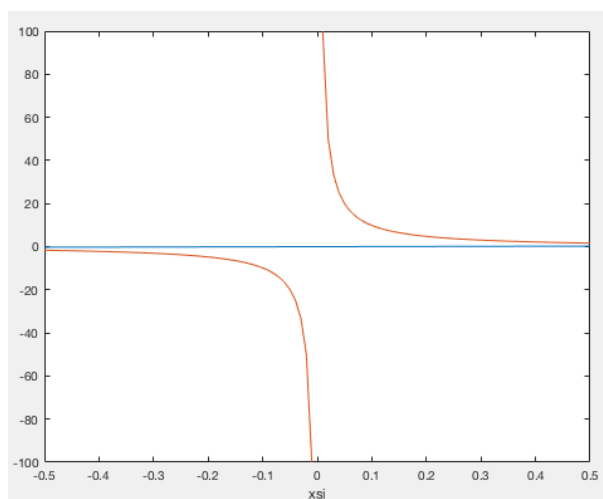
Da er ser vi at løsningen er

$$\hat{\psi} = BI_1(\xi) \quad (6.136)$$

setter inn igjen, og får løsningen

$$\hat{\psi} = BI_1\left(\frac{r}{\beta}\right) \quad (6.137)$$

der B er en konstant, og $I_1\left(\frac{r}{\beta}\right)$ er en modifisert Besselfunksjon, se likning 2.11. Akkurat som løsningen for $\hat{\phi}$, likning 6.121, gjelder samme betingelse her, slik av vi ikke har med $K_1\left(\frac{r}{\beta}\right)$. Også vist i figur 6.3.



Figur 6.3: Den blå grafen er $I_1(\xi)$ og den oransje grafen er $K_1(\xi)$. Ser også her at $K_1(\xi)$ ikke er definert i $\xi = 0$.

Nå som jeg har funnet løsning for $\hat{\phi}$ og $\hat{\psi}$ setter jeg de inn i de tre randkravene.

Kinematiske randkravet, ved $r = R_0$

$$\omega\hat{\eta} = i\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial r} - k\hat{\psi} \quad (6.138)$$

$$\omega\hat{\eta} = i\frac{\partial}{\partial r}\left(AI_0\left(\frac{R_0}{\gamma}\right)\right) - kBI_1\left(\frac{R_0}{\beta}\right) \quad (6.139)$$

$$\omega\hat{\eta} = iAI_1\left(\frac{R_0}{\gamma}\right) - kBI_1\left(\frac{R_0}{\beta}\right) \quad (6.140)$$

Full heft kravet, ved $r = R_0$

$$ik\hat{\phi} + \frac{1}{R_0}\hat{\psi} + \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial r} = 0 \quad (6.141)$$

$$ikAI_0\left(\frac{R_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{R_0}BI_1\left(\frac{R_0}{\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(BI_1\left(\frac{R_0}{\beta}\right)\right) = 0 \quad (6.142)$$

$$ikAI_0\left(\frac{R_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{R_0}BI_1\left(\frac{R_0}{\beta}\right) + B\left(\frac{I_0\left(\frac{R_0}{\beta}\right) + I_2\left(\frac{R_0}{\beta}\right)}{2\beta}\right) = 0 \quad (6.143)$$

Dynamiske randkravet, ved $r = R_0$

$$\hat{\eta} = \frac{1}{2}D\rho\omega i\hat{\phi} \quad (6.144)$$

$$\hat{\eta} = \frac{1}{2}R_0D\rho\omega iAI_0\left(\frac{R_0}{\gamma}\right) \quad (6.145)$$

6.6 Dispersjonsrelasjonen

Videre skal jeg sette opp en 3x3 matrise med 3 likninger og 3 ukjente. De 3 likningene er det kinematiske randkravet, det dynamiske randkravet og full heft randkravet. De 3 ukjente er A, B og $\hat{\eta}$.

$$\begin{pmatrix} -iI_1(\frac{R_0}{\gamma}) & kI_1(\frac{R_0}{\beta}) & \omega \\ ikI_0(\frac{R_0}{\gamma}) & \frac{1}{R_0}I_1(\frac{R_0}{\beta}) + (\frac{I_0(\frac{R_0}{\beta}) + I_2(\frac{R_0}{\beta})}{2\beta}) & 0 \\ \frac{1}{2}R_0D\rho i\omega I_0(\frac{R_0}{\gamma}) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ \hat{\eta} \end{pmatrix} = 0 \quad (6.146)$$

Deretter regner jeg ut determinanten av matrisen lik 0, $\det()=0$

$$\begin{aligned} & -iI_1(\frac{R_0}{\gamma})\left(\frac{1}{R_0}I_1(\frac{R_0}{\beta}) + (\frac{I_0(\frac{R_0}{\beta}) + I_2(\frac{R_0}{\beta})}{2\beta})\right) - ikI_0(\frac{R_0}{\gamma})kI_1(\frac{R_0}{\beta}) \\ & - \frac{1}{2}R_0D\rho i\omega I_0(\frac{R_0}{\gamma})\omega\left(\frac{1}{R_0}I_1(\frac{R_0}{\beta}) + (\frac{I_0(\frac{R_0}{\beta}) + I_2(\frac{R_0}{\beta})}{2\beta})\right) = 0 \end{aligned} \quad (6.147)$$

$$\begin{aligned} & I_1(\frac{R_0}{\gamma})\left(\frac{1}{R_0}I_1(\frac{R_0}{\beta}) + (\frac{I_0(\frac{R_0}{\beta}) + I_2(\frac{R_0}{\beta})}{2\beta})\right) + kI_0(\frac{R_0}{\gamma})kI_1(\frac{R_0}{\beta}) \\ & + \frac{1}{2}R_0D\rho\omega I_0(\frac{R_0}{\gamma})\omega\left(\frac{1}{R_0}I_1(\frac{R_0}{\beta}) + (\frac{I_0(\frac{R_0}{\beta}) + I_2(\frac{R_0}{\beta})}{2\beta})\right) = 0 \end{aligned} \quad (6.148)$$

$$\begin{aligned} & k^2 I_0(\frac{R_0}{\gamma})I_1(\frac{R_0}{\beta}) = -I_1(\frac{R_0}{\gamma})\left(\frac{1}{R_0}I_1(\frac{R_0}{\beta}) + (\frac{I_0(\frac{R_0}{\beta}) + I_2(\frac{R_0}{\beta})}{2\beta})\right) \\ & - \frac{1}{2}R_0D\rho\omega I_0(\frac{R_0}{\gamma})\omega\left(\frac{1}{R_0}I_1(\frac{R_0}{\beta}) + (\frac{I_0(\frac{R_0}{\beta}) + I_2(\frac{R_0}{\beta})}{2\beta})\right) \end{aligned} \quad (6.149)$$

$$\begin{aligned} & k^2 I_1(\frac{R_0}{\beta}) = -\frac{I_1(\frac{R_0}{\gamma})}{I_0(\frac{R_0}{\gamma})}\left(\frac{1}{R_0}I_1(\frac{R_0}{\beta}) + (\frac{I_0(\frac{R_0}{\beta}) + I_2(\frac{R_0}{\beta})}{2\beta})\right) \\ & - \frac{1}{2}R_0D\rho\omega^2\left(\frac{1}{R_0}I_1(\frac{R_0}{\beta}) + (\frac{I_0(\frac{R_0}{\beta}) + I_2(\frac{R_0}{\beta})}{2\beta})\right) \end{aligned} \quad (6.150)$$

6.6. Dispersjonsrelasjonen

Her har jeg kommet frem til dispersjonsrelasjonen

$$k^2 = -\frac{I_1(\frac{R_0}{\gamma})}{I_0(\frac{R_0}{\gamma})} \left(\frac{1}{R_0} + \left(\frac{I_0(\frac{R_0}{\beta}) + I_2(\frac{R_0}{\beta})}{2\beta I_1(\frac{R_0}{\beta})} \right) \right) - \frac{1}{2} R_0 D \rho \omega^2 \left(\frac{1}{R_0} + \left(\frac{I_0(\frac{R_0}{\beta}) + I_2(\frac{R_0}{\beta})}{2\beta I_1(\frac{R_0}{\beta})} \right) \right) \quad (6.151)$$

hvor

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{k^2} - \frac{\nu}{i\omega}} \quad (6.152)$$

og

$$\gamma = \frac{1}{k} \quad (6.153)$$

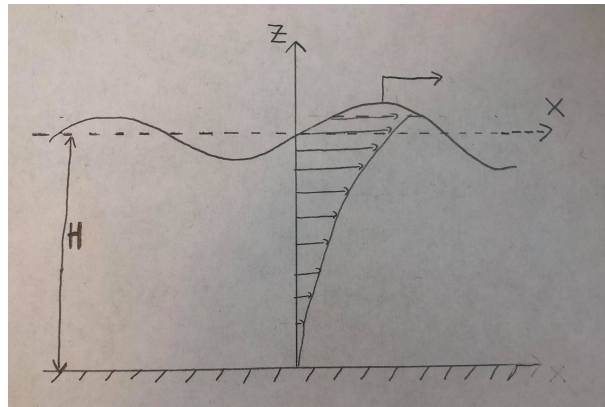
KAPITTEL 7

Diskusjon

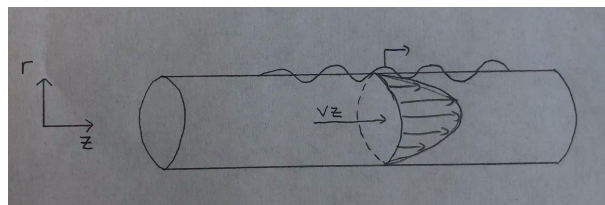
7.1 Analogi

I hydrodynamisk bølgeteori [7], har vi sett mye på overflatebølger på havet. I kapittel 6, løste jeg Laplace likning 6.108 og fikk ut de modifiserte Bessel funksjonene i likning 6.121.

Dette kan vi sammenligne med når vi løser Laplace i kartesiske koordinater, for overflatebølger i havet. Når vi i løser Laplace likning i kartesiske koordinater får vi ut løsninger av de hyperbolske funksjonene $\cosh(k(z+h))$ og $\sinh(k(z+h))$, som spiller samme rolle som de modifiserte Bessel funksjonene.



Figur 7.1: Hastighetsprofil til overflatebølger på havet. Der H er avstanden fra bunnen til likevekt.



Figur 7.2: Hastighetprofilen i en blodåre. Ser slik ut med fast vegg, kan ha

7.2 Mitt resultat

Her har jeg kommet frem til dispersjonsrelasjonen

$$k^2 = -\frac{I_1(\frac{R_0}{\gamma})}{I_0(\frac{R_0}{\gamma})} \left(\frac{1}{R_0} + \left(\frac{I_0(\frac{R_0}{\beta}) + I_2(\frac{R_0}{\beta})}{2\beta I_1(\frac{R_0}{\beta})} \right) \right) - \frac{1}{2} R_0 D \rho \omega^2 \left(\frac{1}{R_0} + \left(\frac{I_0(\frac{R_0}{\beta}) + I_2(\frac{R_0}{\beta})}{2\beta I_1(\frac{R_0}{\beta})} \right) \right) \quad (7.1)$$

der I_0 , I_1 og I_2 er modifiserte bessel funksjoner. der β definert i likning 6.134 og γ definert i likning 6.119 ser slik ut

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{k^2} - \frac{\nu}{i\omega}} \quad (7.2)$$

$$\gamma = \frac{1}{k} \quad (7.3)$$

Har fått en bølge som har samme egenskaper i begge retninger.

7.3 Sammenligning

Her skal jeg sammenligne min dispersjonsrelasjon med Vosse og Dongen [14] sin dispersjonsrelasjon

De starter med å skalere Navier-Stokes komponentene og kontinuitetslikningen, for å gjøre hele problemet dimensjonsløst. De skalerer bare med den reelle delen av k , k_r . De antar deretter at fasefarten, $c = \frac{\omega}{k_r}$, er mye større enn hastigheten til fluidet og at bølgelengden, $\lambda = \frac{2\pi}{k_r}$, er mye større enn den dimensjonsløse radiusen $\frac{R}{R_0}$. Derfor velger de å kvitte seg med hastigheten i radiell retning, v_r . Og løser derfor problemet bare for v_z . Vosse og Dongen kommer frem til en dispersjonsrelasjon, men det gjør de ved å se bort fra den radielle strukturen. De kommer frem til en dispersjonsrelasjon som ser slik ut

$$k(\omega) = \pm \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\frac{1}{1 - F_{10}}} \quad (7.4)$$

der c_0 og F_{10} er beskrevet slik

$$c_0(\omega) = \sqrt{\frac{1}{\rho D}} \quad (7.5)$$

$$F_{10}(\omega) = \frac{2J_1(i^{\frac{3}{2}}\omega)}{i^{\frac{3}{2}}\omega J_0(i^{\frac{3}{2}}\omega)} \quad (7.6)$$

der J_0 og J_1 er bessel funksjoner.

For å kunne sammenligne min dispersjonsrelasjon med denne, må jeg skrive litt likning 7.4 om, ved å først sette inn uttrykkene for $c_0(\omega)$ og $F_{10}(\omega)$, og da

ender jeg opp med

$$k^2(\omega) = D\rho\omega^2\left(1 - \frac{i^{3/2}\omega J_0(i^{3/2}\omega)}{2J_1(i^{3/2}\omega)}\right) \quad (7.7)$$

ved hjelp av likning 2.15, som sier

$$J_\zeta(re^{\pm\frac{\pi i}{2}}) = 2I_\zeta(r)e^{\pm\frac{\pi i}{2}} \quad (7.8)$$

kan vi skrive om de ordinære Bessel funksjonene til modifiserte Bessel funksjoner. Da ser jeg at mitt andre ledd i min dispersjonsrelasjonen

$$\frac{1}{2}R_0D\rho\omega^2\left(\frac{1}{R_0} + \left(\frac{I_0(\frac{R_0}{\beta}) + I_2(\frac{R_0}{\beta})}{2\beta I_1(\frac{R_0}{\beta})}\right)\right) \quad (7.9)$$

har lik form som dispersjonsrelasjonen til Vosse og Dongen. Siden de har sett bort fra den radielle strukturen, kan det være en grunn til at jeg har med et ledd ekstra.

Bølgetallet $k = k_r + ik_i$ der $k_r = \frac{2\pi}{\lambda}$, med λ som er bølgelengden og k_i måler dempningen av bølgene. Siden både β og γ innerholder bølgetallet k er det vanskelig å finne k_r og k_i , derfor har jeg ikke hatt nok tid til å studere dispersjonsrelasjonen min nøyere.

Jeg legger også merke til at Vosse og Dongen har unngår å si hva k_r og k_i er.

KAPITTEL 8

Konklusjon

I denne oppgaven har jeg sett på de elastiske egenskapene til blodårene, og hastighetsfeltet til blodet.

Vist på vellykket vis ved hjelp av Helmholtz dekomposisjon at jeg har løst den radielle strukturen, i stedet for å integrere over tverrsnittet slik som Vosse og Dongen har gjort.

Vi spekulerer i at dett er et viktig og riktig steg på veien til et mer sofistisert uttrykk for hastighetsfeltet.

Videre kan man finne ut hvordan ikkelineære effekter kan dukke opp.

TILLEGG A

Vedlegg

A.1 Pendel

Bevegelsen til en enkel pendel[12] kan bli beskrevet som

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \quad (\text{A.1})$$

hvor l er lengde, g er gravitasjon og θ er vinkelforskyvning. For et 2D-felt har jeg hastigheten gitt ved $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j}$, samt $\vec{v}(\theta, \phi)$. Hastighetene blir da beskrevet av likning (A.2) og likning (A.3).

$$\frac{d\theta}{dt} = \phi = u \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\phi}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\theta = v \quad (\text{A.3})$$

Sjekke at feltet er divergensfritt:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Siden feltet er divergensfritt og 2D[6], eksisterer det en strømfunksjon.

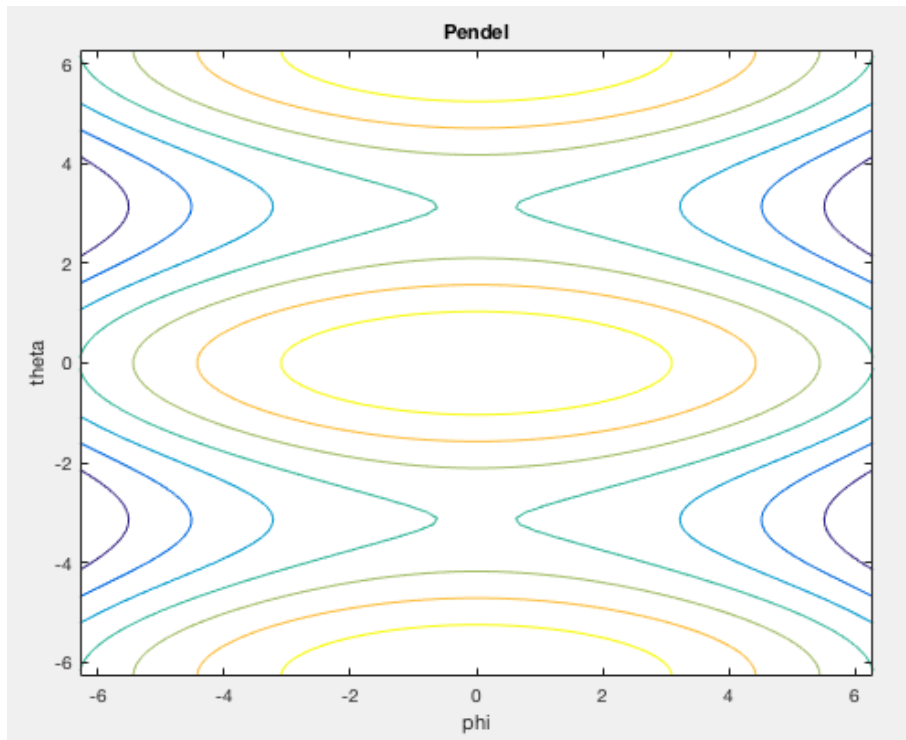
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = \phi \rightarrow \psi = -\frac{1}{2}\phi^2 + f_1(\theta) \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} v = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{g}{l}\sin\theta \rightarrow \psi &= \frac{g}{l}\cos\theta + f_2(\phi) \\ &\rightarrow \psi = -\frac{1}{2}\phi^2 + \frac{g}{l}\cos\theta \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Da får jeg strømlinjer:

$$\phi = \sqrt{\frac{2g\cos\theta}{l}} + \psi_0 \quad (\text{A.7})$$

Faseportrett



Figur A.1: Faseportrett av strømmlinjer

Taylor-utvikling:

$$\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots \quad (\text{A.8})$$

Da får jeg:

$$\theta'' + \frac{g}{l}\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = 0 \quad (\text{A.9})$$

Vanlig pertubasjon:

$$\theta = \theta_0 + \epsilon\theta_1 + \epsilon^2\theta_2 + \epsilon^3\theta_3 + \dots \quad (\text{A.10})$$

Velger utgangsposisjonen $\theta_0 = 0$

Setter inn i likningen:

$$\epsilon\theta_1'' + \epsilon^2\theta_2'' + \epsilon^3\theta_3'' + \frac{g}{l}\left(\epsilon\theta_1 + \epsilon^2\theta_2 + \epsilon^3\theta_3 - \frac{(\epsilon\theta_1 + \epsilon^2\theta_2 + \epsilon^3\theta_3)^3}{6}\right) = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\epsilon\theta_1'' + \epsilon^2\theta_2'' + \epsilon^3\theta_3'' + \frac{g}{l}\left(\epsilon\theta_1 + \epsilon^2\theta_2 + \epsilon^3\theta_3 - \frac{\epsilon^3\theta_1^3}{6}\right) = 0 \quad (\text{A.12})$$

(ϵ^1):

$$\theta_1'' + \frac{g}{l}\theta_1 = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\Rightarrow \theta_1 = ae^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + be^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t} \quad (\text{A.14})$$

(ϵ^2):

$$\theta_2'' + \frac{g}{l}\theta_2 = 0 \quad (\text{A.15})$$

(ϵ^3):

$$\theta_3'' + \frac{g}{l}\theta_3 = \frac{g}{l}\frac{\theta_1^3}{6} \quad (\text{A.16})$$

$$\theta_3'' + \frac{g}{l}\theta_3 = \frac{g}{6l}(a^3e^{3i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + 3a^2be^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + 3ab^2e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + b^3e^{-3i\sqrt{\frac{g}{l}}t}) \quad (\text{A.17})$$

Siden θ_1^3 er ikke-lineært, må jeg bruke en langsom tidskala. jeg starter med denne likningen:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}(\theta - \frac{\theta^3}{6}) = 0 \quad (\text{A.18})$$

Videre bruker jeg flerskala pertubasjon [3]:

$$\tau = \epsilon^2 t \quad (\text{A.19})$$

$$\theta(t) = \theta_0(t, \tau) + \epsilon\theta_1(t, \tau) + \epsilon^2\theta_2(t, \tau) + \epsilon^3\theta_3(t, \tau) + \dots \quad (\text{A.20})$$

$$\theta_0 = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} + \epsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \epsilon \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + \epsilon^3 \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta_3}{\partial t} \right) + O(\epsilon^4) \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \epsilon \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} + \epsilon^3 \left(2 \frac{\partial \theta_1}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial t^2} \right) + O(\epsilon^4) \quad (\text{A.25})$$

$$\Rightarrow \epsilon \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} + \epsilon^3 \left(2 \frac{\partial \theta_1}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial t^2} \right) + \frac{g}{l} \left(\epsilon \theta_1 + \epsilon^2 \theta_2 + \epsilon^3 \theta_3 - \frac{\epsilon^3 \theta_1^3}{6} \right) = 0 \quad (\text{A.26})$$

(ϵ^1):

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} + \frac{g}{l}\theta_1 = 0 \quad (\text{A.27})$$

$$\Rightarrow \theta_1 = A(\tau)e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + A^*(\tau)e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t} \quad (\text{A.28})$$

(ϵ^2):

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} + \frac{g}{l} \theta_2 = 0 \quad (\text{A.29})$$

(ϵ^3):

$$\frac{\partial^2 \theta_3}{\partial t^2} + \frac{g}{l} \theta_3 = \frac{g}{l} \frac{\theta_1^3}{6} - 2 \frac{\partial \theta_1}{\partial t \partial \tau} \quad (\text{A.30})$$

Setter inn løsningen for θ_1 , og høyresiden blir:

$$\begin{aligned} & \frac{g}{6l} (A^3 e^{3i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + 3A^2 A^* e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + 3A(A^*)^2 e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + (A^*)^3 e^{-3i\sqrt{\frac{g}{l}}t}) - \\ & 2i\sqrt{\frac{g}{l}} \left(\frac{dA}{d\tau} e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t} - \frac{dA^*}{d\tau} e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t} \right) e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t} \left[3A^2 A^* \frac{g}{6l} - 2i\sqrt{\frac{g}{l}} \frac{dA}{d\tau} \right] + \\ & e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t} \left[3A(A^*)^2 \frac{g}{6l} + 2i\sqrt{\frac{g}{l}} \frac{dA^*}{d\tau} \right] + A^3 e^{3i\sqrt{\frac{g}{l}}t} \frac{g}{6l} + (A^*)^3 e^{-3i\sqrt{\frac{g}{l}}t} \frac{g}{6l} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

For å utelukke at det dukker opp (secularity), krever jeg at $A(\tau)$ tilfredstiller:

$$3A^2 A^* \frac{g}{6l} - 2i\sqrt{\frac{g}{l}} \frac{dA}{d\tau} = 0 \quad (\text{A.32})$$

$$3A(A^*)^2 \frac{g}{6l} + 2i\sqrt{\frac{g}{l}} \frac{dA^*}{d\tau} = 0 \quad (\text{A.33})$$

For å løse for $A(\tau)$, skriver jeg slik:

$$A(\tau) = R(\tau) e^{i\theta(\tau)} \quad (\text{A.34})$$

Siden likningene over, er kompleks konjugerte av hverandre, velger jeg å finne $A(\tau)$ fra den øverste likningen.

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = -i\frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{l}} A^2 A^* \quad (\text{A.35})$$

$$\left(i\frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{l}} R^3 + \frac{\partial R}{\partial \tau} + Ri \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right) e^{i\theta} = 0 \quad (\text{A.36})$$

Deler opp i reel og imaginer del, der begge delene skal være null

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = 0; R(\tau) = R(0) = \textit{konstant} \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{l}} R^2 \quad (\text{A.38})$$

$$\theta(\tau) = \theta(0) - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{l}} R^2(0)\tau \quad (\text{A.39})$$

$$A(\tau) = R(0) e^{i\theta(0) - i\frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{l}} R^2(0)\tau} \quad (\text{A.40})$$

Bibliografi

- [1] ANLIKER, M., HISTAND, M. B. og OGDEN, E. «Dispersion and Attenuation of Small Artificial Pressure Waves in the Canine Aorta». I: *Circulation Research* årg. 23 (1968), s. 539–551.
- [2] ANLIKER, M. og MAXWELL, J. «The Dissipation and Dispersion of Small Waves in Ateries and Veins with Viscoelatic Wall Properties». I: *Biophysical journal* årg. 8 (1968), s. 920–950.
- [3] BENDER, C. M. og ORSZAG, S. A. *Multiple-scale analysis. In Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I. p. 544-576*. New York: Springer, 1999.
- [4] *Del in cylindrical and spherical coordinates*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates. 30.06.21.
- [5] *Gauge fixing*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Gauge_fixing. 30.08.21.
- [6] GJEVIK, B. og FAGERLAND, M. W. *Feltteori og vektoranalyse. Forelesninger og oppgaver i MEK1100*. Aug. 2012.
- [7] GJEVIK, B., PEDERSEN, G. og TRULSEN, K. *Lecture notes MEK4320. Hydrodynamic wave theory*. Jan. 2021.
- [8] GJEVIK, B., PEDERSEN, G. og TRULSEN, K. *Viskøse væsker og elastisk stoffer. Forelesninger i Mek2200*. Nov. 2002.
- [9] *Helmholtz decomposition*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Helmholtz_decomposition. 20.08.21.
- [10] KUNDU, P. og COHEN, I. M. *Fluid Mechanics, fifth edition*. Waltham, Oxford: Acedemic Press, 2008.
- [11] OLVER, F. W. J. mfl. *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. URL: <http://dlmf.nist.gov/>. Release 1.1.2 of 2021-06-15.
- [12] TRULSEN, K. *Lecture notes in MEK4350*. Aug. 2020.
- [13] VLACHOPOULOS, C., O'ROURKE, M. og NICHOLS, W. W. *McDonald's Blood Flow in Arteries 6th ediotion*. London: CRC Press, 2011.
- [14] VOSSE, F. van der og DONGEN, M. E. H. van. *Cardiovascular Fluid Mechanics: Lecture Notes*. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 1998.
- [15] WOMERSLEY, J. «Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known». I: *The Journal of Physiology* årg. 127, nr. 3 (1955), s. 553–556.

Figurer

3.1	Blodåre med elastiske tynn vegg. Veggen har konstant tykkelse h . Likevekst radius R_0 , og radius $R(z,t)$	10
5.1	Blodåre med faste vegger, med radius R	13
5.2	Hastighetsprofilen til Poiseuille strøm. $R=0.5\text{cm}$	15
5.3	Hastighetsprofil til v_z i likning 5.19. Alle parameterene til blodet står ovenfor. Her har jeg satt amplituden $a=0.6$. Womersleys tall blir da $\alpha = 6.94$	18
5.4	Hastighetprofil til v_z i likning 5.19. Her bruker jeg de samme verdiene som ovenfor, men endrer radius til $R=0.3$. Da blir Womersleys tall $\alpha = 4.16$	19
6.1	Blodåre med elastisk vegger, med likevekst radius R_0 og radius $R(z,t)$	20
6.2	Her er den blå kurven $I_0(r)$ og den oransje kurven $K_0(r)$. Ser at $K_0(r)$ ikke er definert i $r=0$	37
6.3	Den blå grafen er $I_1(\xi)$ og den oransje grafen er $K_1(\xi)$. Ser også her at $K_1(\xi)$ ikke er definert i $\xi = 0$	39
7.1	Hastighetsprofil til overflatebølger på havet. Der H er avstanden fra bunnen til likevekt.	43
7.2	Hastighetprofilen i en blodåre. Ser slik ut med fast vegg, kan ha	43
A.1	Faseportrett av strømmlinjer	48