# «Jeg liker matte. Ikke matte i seg selv, men det å løse oppgaver.»

*En kvalitativ studie av førsteårsstudenters opplevelse av overgangen fra matematikk på videregående skole til universitetsmatematikk*

Lars Retterholt og Brede Martinussen

Masteroppgave i matematikkdidaktikk

Institutt for lærerutdanning og skoleforskning

Det utdanningsvitenskapelige fakultet

**Universitetet i Oslo**

Våren 2021

# Sammendrag

Både norsk og internasjonal forskning viser at overgangen fra matematikkundervisning på videregående skole til universitet kan være krevende for studentene (Borge & Hole, 2017; Gueudet, 2008). Basert på en større undersøkelse gjennomført av Universitets- og Høgskolerådet i 2013, finner Rønning (2014) indikasjoner på at studenter som tar matematikk-krevende studier ikke føler seg godt nok forberedt på universitetsmatematikken. Både Rønning (2014) og Borge & Hole (2017) antyder at det matematiske språket kan være en av faktorene som gjør denne overgangen utfordrende for norske studenter.

Basert på blant annet disse studiene finner vi det interessant å utforske relasjonen mellom matematisk forståelse og matematisk språk nærmere, i overgangen mellom sekundær- og tertiær matematikkutdanning. Problemstillingen for denne studien lyder dermed som følger: *«Hvordan opplever matematikkstudenter det matematiske språket i overgangen fra videregående skole til universitetet, og hvilken rolle spiller dette i studenters utvikling av relasjonsforståelse i matematikk?».*

For å belyse problemstillingen gjennomførte vi en studie hvor vi intervjuet åtte studenter som tok emnet MAT1100 ved Universitetet i Oslo. Intervjuene ga oss innsikt i studentenes opplevelse av det matematiske språket gjennom denne overgangen, samt et innblikk i deres matematiske forståelse og tilnærming. Intervjuene ble analysert tematisk og abduktivt. Det kvalitative datamaterialet ble supplert med en analyse av eksamensresultater i MAT1100 for det samme årskullet som informantene våre studerte på.

Resultatene fra studien indikerer at det matematiske språket i denne overgangen oppleves som utfordrende for studentene. Mer inngående viser det seg at studentene finner språklige faktorer som presisjon, symbolspråk, generalisering og abstraksjon spesielt krevende. Vi finner også indikasjoner på en instrumentell tilnærming til faget og et rasjonale som i hovedsak baserer seg på et mål om gode resultater på eksamen. Eksamensresultatene tyder på at en av eksamensoppgavene var mer utfordrende for studentene enn de resterende. I denne oppgaven finner vi flere elementer knyttet til det matematiske språket, som vi finner igjen i de kvalitative intervjuene. Dette kan indikere at flere studenter ved kurset har lignende utfordringer med det matematiske språket.

# Forord

Etter fem flotte år på Lektorutdanningen ved Universitetet i Oslo, setter denne oppgaven et punktum for vår tid som lektorstudenter. Disse årene har vært både lærerike og inspirerende og vi ser nå frem til å ta fatt på livet som lærere for de unge og lovende i landet.

Da vi i 2019 bestemte oss for å skrive denne oppgaven sammen, så vi for oss lange skrivedager på Blindern med rykende kaffekopper, gode diskusjoner og sosiale lunsjpauser med resten av den flotte lektorgjengen. Slik ble det imidlertid ikke, da koronapandemien i store deler av skriveprosessen førte til stengte dører på Universitetet og svært begrenset sosial omgang. Løsningen ble dermed daglige diskusjoner og skriveøkter på Zoom. Dette har fungert overraskende bra og vi føler selv at vi har hatt et godt og lærerikt samarbeid.

Vi ønsker å takke vår veileder, Arne Hole, for tett og konstruktiv oppfølging fra start til slutt. Etter hver veiledning satt vi igjen med fornyet motivasjon og tro på at denne oppgaven skulle gå i havn. Vi vil også takke venner og familie for støtte, motivasjon og konstruktive blikk på oppgaven. Ikke minst vil vi takke våre samboere. Ikke bare for all hjelp og støtte, men også for at de har tolerert at vi til tider har brukt mer tid med hverandre enn vi har med dem.

Til slutt vil vi takke informantene våre for å dele sine opplevelser og refleksjoner rundt det matematiske språket i overgangen fra videregående skole til universitet.

Oslo, juni 2021

Lars Retterholt og Brede Martinussen

# Innholdsfortegnelse

# 1 Innledning

## 1.1 Valg av forskningstema

Overgangen fra matematikk på videregående skole til matematikk på universitetet kan være utfordrende for mange studenter, spesielt med tanke på det faglige innholdet (Rønning, 2015). Da vi begynte på Lektorutdanningen ved Universitetet i Oslo var dette noe vi selv fikk førstehånds erfaring med. Matematikkfagene var tyngre å lese på og vanskeligere å arbeide med. Vi merket også at forventningene til hva vi skulle kunne, eller var forventet å kunne, var på grensen til hva vi selv tenkte var rimelig der og da. Selv om vi ikke klarte å sette fingeren på hva det var som gjorde at vi hadde utfordringer med både forståelse og arbeidsmetoder da vi stod midt i det, så har vi med tiden fått bedre forståelse for både matematikken og det matematiske språket som den blir kommunisert gjennom. Det er denne erfaringen, samt vår interesse for faget, som fikk oss til å ønske og gjøre et dypere dykk tematikken vi beskriver videre.

Rønning (2014) holdt et foredrag hvor han presenterer resultater fra Universitets- og høgskolerådets undersøkelse som ble gjennomført høsten 2013. Undersøkelsen tar for seg overgangen fra videregående opplæring til matematikkrevende studier på universitet eller høgskoler. Resultatene viser til at flere studenter peker på forskjeller i det matematiske språket og notasjon som en utfordring ved denne overgangen. Faget MAT1100 ved Universitetet i Oslo bygger på full fordypning i matematikk fra videregående skole og er en videreføring av integral- og differensialregningen studentene hadde der (UiO, u.å.). MAT1100 er i utdanningsplanen til de fleste matematikk-krevende studieprogrammene ved UiO.

Borge & Hole (2017) analyserte eksamensbesvarelsene til studenter med karakter F i emnet MAT1100, høsten 2015 ved UiO. Det de fant var at grunnleggende algebrakunnskap fra ungdomsskole og videregående skole skaper problemer for flere av studentene i denne gruppen. Resultatene fra studien peker altså i retningen av at flere studenter mangler relasjonell forståelse og dybdekunnskap om algebraiske uttrykk (Borge & Hole, 2017), noe som også kan kobles opp mot behandling og forståelse av språklige elementer i matematikken. Gjennom den internasjonale undersøkelsen TIMSS Advanced fra 2015, kan vi se at den gjennomsnittlige prestasjonen til norske R2 er markant lavere sammenlignet med flere andre land (Grønmo & Hole, 2016). Eksempelvis presterer vi dårligere enn land som Frankrike og Slovenia, selv om disse landene har en dekningsgrad (andel elever som gjennomfører full fordypning i matematikk) som er to til tre ganger så høy som i Norge (Grønmo et al., 2017). Hva er grunnen til at det er slik?

I de nye læreplanene (LK20) som nå gradvis innføres i skolen legges det stor vekt på at skolen skal legge til rette for dybdelæring, slik at elevene kan utvikle forståelse for de sentrale elementene og se sammenhenger innenfor faget (Kunnskapsdepartementet, 2017). I kapittel 2.2 av overordnet del i LK20 blir begrepet beskrevet på følgende måte:

> *«Skolen skal gi rom for dybdelæring slik at elevene utvikler forståelse av sentrale elementer og sammenhenger innenfor et fag, og slik at de lærer å bruke faglige kunnskaper og ferdigheter i kjente og ukjente sammenhenger. I arbeidet med fagene skal elevene møte oppgaver og delta i varierte aktiviteter av stadig økende kompleksitet. Dybdelæring i fag innebærer å anvende kunnskaper og ferdigheter på ulike måter, slik at elevene over tid kan mestre ulike typer faglige utfordringer individuelt og i samspill med andre.»* (Kunnskapsdepartementet, 2017).

Det overordnede målet om at elevene skal tilegne seg en dypere forståelse for sentrale temaer har vært fokus også tidligere, men kommer tydeligere frem i den overordnede delen til LK20 sammenlignet med den utgående læreplanen. De fleste av de nye kjerneelementene til matematikkfaget i LK20 kan knyttes opp mot matematisk språk og mestringen av dette. Under resonnering og argumentasjon skal elevene være i stand til å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker og gyldigheten til disse. Representasjoner og kommunikasjon blir også trukket fram som en viktig kompetanse. Med dette forventes det at elevene er komfortable med de ulike representasjonene som finnes i matematikk, enten de er konkrete, visuelle, verbale eller symbolske. Abstraksjon og generalisering trekkes også fram som viktige kompetanseområder. Ved disse stilles det krav til studentenes ferdigheter innenfor det matematiske språket, som for eksempel det å kunne bruke et formelt matematisk språk og passende representasjoner i matematikken (Utdanningsdirektoratet, 2020).

## 1.2 Formål, avgrensninger og problemstillinger

Formålet med denne oppgaven er å undersøke hvordan studenter opplever overgangen fra matematikk på videregående skole til matematikk på universitetsnivå. Denne overgangen kan være krevende for mange studenter, og som vi ser fra forrige delkapittel er det flere studier som indikerer at det matematiske språket kan være en faktor som påvirker elevene i denne overgangen. Vi ser også hvordan dybdelæring har fått en sentral plass i den nye læreplanen, og det kommer dessuten frem at dybdelæring blir et mål for matematikkundervisning i skolen de kommende årene. Studiene vi har trukket frem til nå indikerer at flere studenter kanskje ikke er så godt forberedt på videre studier som vi skulle ønske, men hvordan dette kan endres og hvilke faktorer som spiller inn ønsker vi å se nærmere på. På grunn av oppgavens omfang og gjennom et ønske om å finne konkrete utfordringer knyttet til den nevnte overgangen har vi valgt å ha fokus på relasjonsforståelse og matematisk språk. Dermed har vi formulert følgende problemstilling:

*«Hvordan opplever matematikkstudenter det matematiske språket i overgangen fra videregående skole til universitetet, og hvilken rolle spiller dette i studenters utvikling av relasjonsforståelse i matematikk?».*

Dette kan virke som en stor og vid problemstilling, men det er i hovedsak det matematiske språket og refleksjoner angående forståelse vi vil fokusere på i studien. Ordet *opplever* blir sentralt i problemstillingen. Studien vår vil på ingen måte forsøke å definere elevenes kunnskap eller forståelse. Vi er ute etter hvilke opplevelser og refleksjoner studentene har rundt denne overgangen, og det matematiske språket. På samme tid vil informantenes refleksjoner og vår tolkning av disse uttalelsene kunne danne et bilde av hvilken tilnærming studentene har til matematikken.

I løpet av de siste årene har flere forskere vist interesse for denne type overganger. Studier fra andre land forsøker å kartlegge hvordan studenter opplever en overgang fra sekundær til tertiærutdanning, men storparten av disse undersøker mer generelle aspekter i form av for eksempel kompetanse, sosiale eller institusjonelle faktorer (Hernandez-Martinez et al., 2011; Lødding et al., 2016; Bampili et al., 2017). I vår studie ønsker vi imidlertid å knytte problemstillingen mer mot et faglig aspekt, nemlig matematisk språk. For å belyse denne problemstillingen har vi valgt en kvalitativ metode hvor vi intervjuer studenter som tok emnet MAT1100 ved UiO høsten 2020.

## 1.3 Oppgavens struktur

I kapittel 2 legger vi frem teorien som videre danner grunnlaget for å diskutere funnene i studien. Vi starter med å presentere tidligere forskning rundt overgangen fra videregående skole til universitetet før vi presenterer teori som omhandler det matematiske språket. Til slutt i kapittelet presenterer vi ulike fornuftsgrunnlag og motivasjon for å lære matematikk, samt ulike begreper angående forståelse.

I kapittel 3 gjør vi rede for det metodiske i studien. Vi starter med å presentere den metodiske tilnærmingen vi har valgt for studien og våre teoretiske antakelser. Videre presenterer vi utvalget og hvordan intervjuene ble gjennomført, før vi beskriver hvordan eksamensresultatene vil brukes i studien. Til slutt i oppgaven legger vi fram hvordan analyseprosessen har foregått og vi presenterer etiske betraktninger ved studien og diskuterer kvalitet i studien vår.

I kapittel 4 presenterer vi resultatene fra studien. Resultatene består av sitater fra intervjuene og våre tolkninger av disse. Vi presenterer også resultatene fra analysen av avsluttende eksamen i emnet MAT1100 høsten 2020. Disse resultatene sammen med teorien fra kapittel 2 danner grunnlaget for diskusjonen.

I kapittel 5 diskuterer vi våre hovedfunn. Med bakgrunn i problemstillingen, våre tolkninger og ved hjelp av teorien som er redegjort for i kapittel 2 starter vi med å diskutere studentenes rasjonale og forståelsestyper, før vi videre diskuterer mulige utfordringer med det matematiske språket. Til slutt i kapittelet trekkes eksamensresultatene frem og vi diskuterer disse ved hjelp av relevant teori.

Kapittel 6 er det siste kapittelet. Funnene fra studien presenteres, og vi svarer på problemstillingen. Avslutningsvis legger vi også fram hvilke implikasjoner denne studien kan ha for videre forskning og undervisning. Vi presenterer forslag til, og våre refleksjoner rundt hvordan videre forskning på dette feltet kan gå fram.

# 2 Teori

I dette kapittelet vil vi redegjøre for teori og tidligere forskning som kan være relevant for å utforske problemstillingen og diskutere resultatene våre. Vi vil presentere teori fra våre tre grunnpilarer i oppgaven, nemlig overganger i skolen, matematisk språk og rasjonale og matematisk forståelse. Disse vil være veiledende i oppgaven vår sammen med forskning som har fokusert på lignende fenomener. Vi ønsker videre å utforske studentenes opplevelse, som er et subjektivt begrep, samtidig som vi vil se etter sammenhenger mellom matematisk språk, rasjonale og forståelse i denne overgangsprosessen. Som følge av dette blir ikke teorien og tidligere forskning som videre legges frem alltid være like tett sammenknyttet, rett og slett på grunn av at vi ikke finner noen som har hatt akkurat denne vinklingen før oss.

## 2.1 Overgangen fra videregående skole til høyere utdanning

Overganger i seg selv er et begrep som kan bli brukt og forstått på svært mange forskjellige måter. Dermed er det viktig å presisere hvordan begrepet blir brukt og hva dette innebærer i denne oppgaven (Colley, 2007). Vår forskning vil ta for seg overgangen mellom videregående skole og universitetet, og endringer i matematisk språk. Videre vil følger av dette vil settes under lupen. Vi vil i hovedsak presentere teori og tidligere forskning som baserer seg på overgangen mellom videregående skole og universitet, og hvor matematikk er en del av forskningsområdet.

### 2.1.1 Overgang mellom videregående skole og universitet

Hernandez-Martinez et al. (2011) er noen av forskerne som har undersøkt hvordan overganger i skolen virker inn på matematikkfaget. De påpeker at overgangen mellom akkurat videregående skole og høyere utdanning er et felt hvor det er begrenset med forskning. Videre poengterer de at institusjonelle overganger tradisjonelt har blitt utforsket innen tre dimensjoner. *Den sosiale dimensjonen* beskriver de endringene som oppstår når man skal innfinne seg på et nytt sted og med nye mennesker rundt seg. *Kontinuitet i fag og undervisning* som beskriver hvordan det faglige innholdet og læringsmetoder kan endres eller utfordres og *den individuelle dimensjonen* som baserer seg på kommunikasjon og kunnskap mellom institusjonene og individene som forflytter seg mellom dem (Hernandez-Martinez et al., 2011). Gueudet (2008) legger frem lignende dimensjoner, men løfter frem kompleksiteten som ligger i overgangen mellom videregående skole og universitet/høyskole (secondary-tertiary transition) og at disse tre dimensjonene igjen inneholder flere aspekter og synsvinkler som kan utforskes.

### 2.1.2 Faktorer som kan påvirke elevers læring i matematikk

Gjennom en rapport fra ICME12 og en studie utført på forelesere og undervisningsansvarlige på matematiske institutter fra universiteter i 21 land med 79 respondenter, gjorde Thomas et al. (2015) en studie hvor overgangen mellom videregående skole og universitetsmatematikk var fokus. De konkluderte blant annet med at en slik overgang i matematikk består av et komplisert nett av kognitive, pensumrelaterte og pedagogiske utfordringer. Videre viste denne studien at et stort flertall av foreleserne peker på forskjellen i arbeidsmengde og klassestørrelse, og også på en faglig endring fra den mer prosedurale tilnærmingen på videregående til den mer formelle og rigide matematikken på universitetet. Dette var også et av funnene Crawford et al. (1998) gjorde da de gjennomførte en større studie på matematikkstudenter ved et større universitet i Australia i 1998. Studien indikerte at studentene hadde tilegnet seg en prosedural tilnærming til matematikken og at de i hovedsak var vant til å jobbe med standardiserte matematiske problemer. Dette gjorde videre til at de opplevde matematikken på universitetet som krevende og at deres syn på matematikken var fragmentert i den forstand at de hadde vansker med å danne koblinger og se sammenhenger i matematikkpensum.

Gueudet (2008) gjør en gjennomgang av tidligere forskning rundt overganger i matematikk. Her trekker hun frem resultater fra blant annet Spania, av Bosch et al. (2004) og Frankrike, av Winsløw (2007) som vi ønsker å trekke frem i vår studie. Videre vil vi referere til disse studiene, men understreker at de er hentet fra Gueudet (2008). Bosch et al. (2004) finner at elever på videregående ofte lærer seg en spesifikk teknikk for å løse en matematisk oppgave, og at de videre ikke har kunnskap om andre måter å tilnærme seg dette på. Når denne teknikken benyttes viser det seg videre at elevene ikke har ferdighetene til å tolke og forstå resultatet de kommer frem til. Dette kommer frem i for eksempel økonomi- eller fysikkoppgaver hvor svaret skal tolkes og forklares. Videre argumenterer de for at dette kan ha sammenheng med hvordan lærebøkene legger frem stoffet og at det også der presenteres en teknikk for å løse lignende problemer. De peker med andre ord på begrensningene dette skaper for studentene når læreboken legger frem en metode og fokuserer på spesifikke, rigide oppgaver uten mye sammenheng mellom forskjellige metoder og matematiske tema. Winsløw

(2007) referert i Gueudet (2008) og Brandell et al. (2008) bekrefter videre dette som en utfordring i den forstand at de finner resultater som tyder på at studentene på universitetsnivå blir forventet å danne seg en mer helhetlig og sammenhengene matematisk forståelse, uten at de nødvendigvis har forståelsen eller verktøyene for dette fra videregående skole.

Gjennom et foredrag i regi av NTNU presenterer Rønning (2014) resultater fra en større undersøkelse utført av Universitets- og høgskolerådet i 2013, som viser at studenter som tok høyere utdanning innen matematikk-krevende studier opplevde noen utfordringer knyttet til steget fra videregående skole. Undersøkelsen ble gjort av rundt 3000 studenter fra 19 forskjellige utdanningsinstitusjoner i Norge, hvor omtrent 60% av deltakerne hadde fullført matematikk R2 eller tilsvarende. For det første opplevde studentene at matematikken i høyere utdanning var preget av teori i større grad enn skolematematikken. Det andre som kom frem var at studentene ikke følte seg godt nok forberedt på den faglige utfordringen de møtte i høyere utdanning. Dette fant også Brandell et al. (2008) i en studie gjennomført i Sverige, hvor de i tillegg peker på at gapet mellom pensum og dermed forventningene som stilles til studentenes forkunnskaper i overgangen mellom videregående skole og begynneremner i matematikk på universiteter er for stort.

Det siste funnet som presenteres av Rønning (2014) var at studentene opplevde utfordringer knyttet til matematisk språk og notasjon. Studenter peker for eksempel på at de kjenner igjen mye av pensum i introduserende matematikkfag på universitet/høgskole, men at det oppleves annerledes på grunn av avansert språk og ukjent notasjon. Det siste funnet samsvarer med hva Wade et al. (2018) fant i sin studie om hvordan lærere på videregående skoler kan forberede elevene sine best mulig til kalkulus på universitetsnivå. De påstår at det å mestre det matematiske språket er en nøkkelfaktor for at studentene skal få en relasjonell forståelse av matematikken som venter dem.

Resultatene fra Rønning (2014) og Wade et al. (2018) har også paralleller til hva Iannone & Nardi (2008; 2006) finner i sine studier, hvor de intervjuer matematikere fra forskjellige universiteter i England om matematikkstudenter ved universitetene. De beskriver i disse studiene at et avansert matematisk språk anses som et krav for å kunne bli en del av det matematiske samfunnet, og videre for å kunne kommunisere innad i dette. Å tilegne seg dette språket, mener de i stor grad handler om å mestre symbolspråket og kvantorer («for alle», «så eksisterer det», osv.). De peker videre på en utfordring hvor studentene fort merker at forelesere og bøker kommuniserer i dette språket, og prøver videre å adaptere dette. Dette fører til at fokuset fort kan gå over til at det å skrive matematikken så «kondensert» eller symbolholdig som mulig, med minimal bruk av vanlig skriftspråk de er fortrolige med, noe som igjen kan gå ut over fokuset på den matematiske forståelsen til studentene.

## 2.2 Matematisk språk

Gjennom historien har matematikken vært mye diskutert. Om man går tilbake og ser på arbeid fra store matematikere og filosofer som Pythagoras, Kant, Descartes, Aristoteles med flere, så kommer det frem at spørsmålet «hva er matematikk?» er både stort og komplisert (Hersh, 1997). Vi ønsker ikke å bevege oss så langt inn på dette spørsmålet i denne oppgaven, men vi velger å nevne det for å få frem kompleksiteten som ligger i det å skrive om matematikk. Pimm (1995) beskriver matematikken som et verktøy vi har konstruert for å kunne forstå virkeligheten vi lever i, og at matematikkens objekter og representasjonene vi bruker for å tilnærme oss dem, ikke har rot i den fysiske verden. I en lignende tone beskriver Sfard (2012) matematikken som noe vi konstruerer i vårt eget hode og som dermed representerer det hun kaller for en «virtuell virkelighet». I boken til Hersh (1997) vender han stadig tilbake til dette abstrakte og ugripelige innen matematikken, hvordan matematikk kan virke så konkret og så vagt på samme tid. Dette kan kanskje virke som en avsporing i vår sammenheng, men det har å gjøre med hvor komplisert og abstrakt det er å jobbe innen matematikken. Å definere matematikk er dermed en oppgave vi ikke har tenkt å begi oss ut på videre. Det er heller ikke bare enkelt å definere matematisk språk, verken fra et rent teoretisk eller pedagogisk perspektiv. I fortsettelsen vil vi presentere teori som hjelper oss med å stake ut en kurs for hvordan vi kan behandle matematisk språk i denne oppgaven. Dette blir ikke en utfyllende fremstilling av matematikkens natur og rollen til matematisk språk i denne sammenheng, men det vil ha som hensikt å bane vei for resten av oppgavens tematikk.

Austin & Howson (1979) mener det er vanskelig å skulle sidestille matematikken og videre det matematiske språket med andre formelle og internasjonalt aksepterte språk. Dette argumenterer de for ved å beskrive matematikk som kunnskap. Kunnskap vi har bygget opp gjennom hundrevis av år med oppdagelser, forskning og utvikling. I tillegg til å være en kunnskap legger Austin og Howson (1979) også vekt på at matematikken kan sees på som en aktivitet man kan sette seg inn i og benytte seg av. Pimm (1987) beskriver dette ved å vise til at matematikk, selv skrevet utelukkende gjennom matematiske symboler, kan leses høyt og fremstå som et hvilket som helst naturlig språk når det formidles. Dermed hevder han at matematikken kan projiseres gjennom naturlige språk, slik også Austin og Howson (1979) hevder det kan gjøres gjennom koding, tolkning og formidling. På denne måten kan man se for seg en vekselvirkning mellom de naturlige språkene og det matematiske språket (Pimm, 1987).

Gjennom delkapittel 2.2.1, 2.2.2 og 2.2.3 vil vi ved bruk av teori beskrive tre fremtredende elementer innen det matematiske språket, nemlig *symboler*, *begreper* og *presisjon*. Videre vil vi se på hvordan matematiske bevis kan plasseres i sammenheng med dette og avslutte med å se på hvordan det matematiske språket endrer seg når man flytter seg mellom forskjellige instanser eller miljø. Vi vil også knytte dette opp mot deler av rammeverket til Niss & Højgaard (2002) for å vise at matematisk språk og matematisk kompetanse i mange tilfeller er nært tilknyttet hverandre. Riccomini et al. (2015) hevder i denne sammenheng at det å beherske det matematiske språket er en essensiell del av å utvikle en matematisk kompetanse.

### 2.2.1 Symbolspråk, begreper og representasjoner

I tråd med hvordan Pimm (1995) og Sfard (2012) beskriver matematikk, hevder Skemp (1987) at matematiske begreper i bunn og grunn bare gir mennesker et mentalt bilde. For at andre skal ha mulighet til å vurdere eller forstå dette bildet, og dermed få innsikt i dine tanker, må det på en eller annen måte kommuniseres gjennom synlig eller hørbar kommunikasjon. Et symbol er i denne forstand en lyd eller noe synlig som er forbundet med en idé, og det er denne idéen som er meningen med symbolet. Uten en idé er symbolet meningsløst (Skemp, 1987).

Det å knytte sammen symboler med en idé, eller å gi symbolet en mening i matematikken, er et viktig grunnlag for å videre utvikle matematisk kompetanse og relasjonell forståelse (Hiebert, 1988; Jørgensen & Goodchild, 2009). Niss & Højgaard (2002) beskriver dette gjennom det de kaller symbol- og formalismekompetanse hvor de trekker frem evnen til å avkode matematiske symboler og formler. Med dette mener de at man må ha ferdigheter til å forstå- og kjennskap til de matematiske symbolene på en slik måte at man klarer å oversette disse til sitt naturlige språk og omvendt, samt at man forstår og kan benytte seg av symbolholdige utsagn og uttrykk i matematikken. Kenney (2005) omtaler dette som «double decoding» i den forstand at når studentene møter et matematisk symbol i en eller annen form, må de først oversette dette og deretter knytte det opp mot et matematisk begrep eller konsept, de enten har eller ikke har bakgrunnskunnskap om. Dette hevder Kenney (2005) er en av de største utfordringene studenter har knyttet til det matematiske språket. Johnsen-Høines (2006) argumenterer for at begreper i denne sammenhengen kan skape utfordringer i den forstand at de har andre betydninger i det hverdagslige språket enn de har i det matematiske språket. Som Skemp (1987) beskriver vil det ikke nødvendigvis være slik at  et symbol eller et begrep fremkaller samme konsept i mottaker sin bevissthet som det avsender har i sin. Dette kan skape forvirring og utfordringer dersom ikke de kommuniserende parter har en felles forståelse av hvilken kontekst begrepene brukes, og at de har en forståelse av den matematiske betydningen begrepene har (Johnsen-Høines, 2006; Skemp, 1987)

Det er naturlig å knytte symbol- og formalismekompetanse opp mot hva Pimm (1995) beskriver som matematisk «fluency». Han hevder denne ferdigheten ikke er oppnådd før symbolene sees på som transparente. Med andre ord, når disse oversettelsene mellom symbol og konsept ikke lenger øker den kognitive belastningen. Et sted hvor denne symbolbehandlingen kommer tydelig til uttrykk er i algebra. En elev med høy grad av «fluency» i symbolbehandling vil kunne mestre manipulasjon av algebraiske uttrykk, og dermed kunne gjøre de regnetekniske transformasjonene som kreves for å gjøre algebraiske oppgaver. Dette kan likevel være en utfordring i den forstand at økt «fluency» vil kunne risikere å gå på bekostning av elevenes forståelse av hva som ligger bak det algebraiske uttrykket de jobber med (Hiebert, 1988; Pimm, 1995). Dersom dette skjer kan studentene gå i den fellen at de forbinder symbolene med regnetekniske operasjoner heller enn å forstå de bakenforliggende matematiske betydningene (Hiebert, 1988). Pimm (1995) beskriver dette ved at studentene behandler symbolene som selve objektene de jobber med og ikke som et hjelpemiddel for å få innsikt i matematiske sammenhenger. I en analyse av resultatene fra TIMSS Advanced 2015 finner Borge og Hole (2017) indikasjoner på at dette fremdeles er relevant. For eksempel finner de at det kan se ut som om elever får problemer når matematikken går fra å være konkret til å bli mer abstrakt. En slik abstraksjon kan eksempelvis være å gå fra konkrete talleksempel til mer generell algebra. Her finner Borge & Hole (2017) at elevene lett kan vippes av pinnen og kobler dette mot deres dybdeforståelse. I tillegg til dette finner Moore (1994) i sin studie at studenter sliter med bevis på grunn av at de oppfatter definisjonene som bevis bygger på, som abstrakte. Videre oppfattes definisjonene som abstrakte og vanskelige å forstå for studentene på grunn av at språk og notasjon, inkludert kvantorer, ikke er kjent eller forståelig for studentene (Moore, 1994).

Den neste kompetansen som er tett forbundet matematisk språk omtaler Niss & Højgaard (2002) som representasjonskompetanse. I denne beskriver de ferdigheten til å forstå hva ulike matematiske objekter, fenomener, problemer eller situasjoner faktisk representerer. Med andre ord vil dette si at studentene må evne å se hvilke matematiske konsepter eller hvilken matematisk betydning tekstsymboler, grafer, diagrammer, tabeller, geometriske figurer, verbale representasjoner og algebraiske uttrykk representerer. Dette kan igjen knyttes opp mot hva Pimm (1995) omtaler som en objektivisering av matematiske symboler og representasjoner, og han går videre langt i å beskrive dette som en av de vanskeligste delene av matematikken og i skolen generelt. Niss & Højgaard (2002) poengterer videre at representasjonskompetanse også handler om å kunne benytte seg at forskjellige representasjoner for samme matematiske konsept. Også dette trekker Pimm (1995) frem som en utfordring for elever og studenter som skal lære matematikk og tilegne seg det matematiske det matematiske språket. Eksempelvis hevder han at elever har lettere for å oversette en symbolholdig funksjon til dens grafiske representasjon enn å gå den andre veien. For erfarne matematikere vil en slik oversettelse kunne sammenlignes med hvordan man behandler synonymer i andre språk, men at dette ikke kommer naturlig for elever uten trening og matematisk forståelse (Sfard, 2008).

Den neste kompetansen vi vil trekke frem fra rammeverket til Niss & Højgaard (2002) kaller de for kommunikasjonskompetanse. Utgangspunktet for denne gjelder ferdigheter som gjør at man kan bruke matematikk som et middel for kommunikasjon. Å gjøre seg forstått og forstå andre gjennom både skriftlig, muntlig og visuell kommunikasjon i matematikken, samt å kunne tilpasse denne kommunikasjonen til forskjellige typer mottakere (Niss & Højgaard, 2002). Med andre ord må man beherske det matematiske språket i den forstand at man må kunne justere kommunikasjonen i forhold til hvem man kommuniserer med og på hvilken form det kommuniseres. I disse justeringene ligger også evnen til å tilpasse det matematiske språket med tanke på teoretisk og teknisk presisjon slik at det til sammen også utgjør evnen til å bevege seg fritt mellom ulike registre av formalitet i det matematiske språket (Niss & Højgaard, 2002; Pimm, 1987). Mer om dette i delkapittel 2.2.2 og 2.2.4.

### 2.2.2 Presisjon

Matematisk presisjon er tett forbundet med matematisk språk. Presisjon er noe som kreves for at den matematiske kommunikasjonen skal være forståelig, strukturert og godt nok argumentert til at det matematiske innholdet som beskrives har forankring i teorien samtidig som mottaker av informasjonen kan følge argumentasjonen uten forvirring (Shockey & Pindiprolu, 2015). Presisjon kan omtales i forhold til om studentene bruker riktige begreper og symboler tilknyttet et matematisk resonnement eller det kan brukes for å vurdere om man eksempelvis har gjort en korrekt avrunding på en matematisk utregning (Otten et al., 2019). Videre henviser Otten et al. (2019) til litteratur som deler matematisk presisjon i to kategorier, nemlig presisjon innen kalkulasjon og presisjon innen kommunikasjon. Førstnevnte hevder de handler om behandling at tall. Eksempelvis hvordan estimering og avrunding blir oppfattet og behandlet av studentene. Dette blir også omtalt som numerisk presisjon og videre henviser Otten et al. (2019) til eksempler der studenter ikke behandler forskjellige representasjoner av et tall som det samme eller ikke tar hensyn til avrundingsfeil i løpet av utregninger.

Presisjon innen kommunikasjon handler om hvordan man bruker språk til å kommunisere matematikken, ikke bare for å formulere seg matematisk korrekt, men også for å utvikle en felles forståelse av hvilken matematisk idé som kommuniseres (Otten et al., 2019; Shockey & Pindiprolu, 2015). Dette er noe vi finner igjen i Niss & Højgaard (2002) sin beskrivelse av kommunikasjonskompetanse. Videre trekker Otten et. al (2019) frem litteratur som beskriver hvordan presisjon innen kommunikasjon også tar for seg den enkeltes evne til å forflytte seg mellom forskjellige symboler eller begreper og deres matematiske betydning uten ekstra kognitiv belastning, som vi beskrev i tilknytning til Niss & Højgaard (2002) sin symbol- og formalismekompetanse og Pimm (1995) sin forklaring av matematisk «fluency».

Gueudet (2008) illustrerer en utfordring med tanke på hvilket matematisk nivå man opererer under. Hun legger frem et eksempel fra en oppgave innen geometri som undervises både i videregående skole og i lineær algebra på universitetsnivå. Det hun viser er at oppgaven, som går ut på å bevise «at en gitt familie av $n$ vektorer er en ortogonal basis av et $n$-rom» har samme fremgangsmåte, nemlig å regne ut skalarproduktene for hvert par av vektorer for å vise at de er ortogonale. Forskjellen er imidlertid at man på videregående skole tar det for gitt at disse vektorene er lineært uavhengige og at det dermed ikke trengs noen videre begrunnelse. På universitetet må man derimot benytte seg av et teorem for å understøtte argumentasjonen sin (Gueudet, 2008). I denne sammenheng kan man også se på presisjon i forhold til matematisk argumentasjon, og Gueudet (2008) viser med dette at kravene til denne type presisjon kan endres over tid, noe som videre kan forvirre studentene. Også Shockey & Pindiprolu (2015) hevder definisjoner og bevisst symbolbruk er noe som kreves for at studenter skal kunne kommunisere presist i matematikken.

For å kunne argumentere presist og holde seg innen den matematiske konteksten er det dermed viktig at studenter får støtte og veiledning underveis (Adams et al., 2016). Det faller ikke naturlig for studentene å benytte seg av symbolholdig språk eller definisjoner i sine matematiske argumenter dersom de ikke har fått kontinuerlig og tett oppfølging på dette gjennom deres matematiske utdanning (Kranda, 2008). Presisjon og argumentasjon er høyst fremtredende i matematiske bevis, og vi skal i delkapittel 2.2.2 se nærmere på dette.

En annen utfordring er hvis det oppstår konflikter mellom den «hverdagslige» og den matematiske betydningen av begreper eller setninger (Adams et al., 2016; Pimm, 1987). Denne utfordringen, samt flere vil utdypes i delkapittel 2.2.4. Videre anses utviklingen av matematisk presisjon en faktor som går hånd i hånd med utviklingen av relasjonell forståelse i matematikken (Adams et al., 2016; Shockey & Pindiprolu, 2015).

### 2.2.3 Bevis

Matematikken slik vi kjenner den i dag er bygd opp av matematiske bevis. Disse er på en måte grunnmuren som bekrefter gyldigheten av alt som forekommer innen matematikken. Likevel er det ikke lett å definere selve begrepet. Forskjellige matematikere har forskjellige syn på hva som ligger i et matematisk bevis (Hemmi, 2009). Tall et al. (2011) hevder at et matematisk bevis handler om å takle nye situasjoner, fokusere på signifikante matematiske aspekter, involvere tidligere kunnskap for å sette nye idéer sammen på nye måter, tenke over sammenhenger mellom matematiske idéer, komme med antagelser og formulere definisjoner som er nødvendige for å bygge valide matematiske argumenter.

Hanna (2014) skriver blant annet om hvilken rolle matematisk bevis har i undervisning og hvilke kompetanser elevene kan utvikle gjennom arbeid med dette. Hun poengterer at læreplaner i matematikk verden rundt har en målsetning om at elever skal lære både å forstå og kunne skrive ut egne bevisføringer. Dette skal elevene gjøre for å reflektere over bevisets sentrale plass i matematikken og for å utnytte de mange fordelene bevis har for læring i matematikk (Hanna, 2014). Ved fagfornyelsen ble alle læreplanmål i Norge revidert og et av de nye læreplanmålene for matematikk R2 lyder som følger: «Mål for opplæringen er at eleven skal kunne analysere og forstå matematiske bevis, forklare de bærende ideene i et matematisk bevis og utvikle egne bevis» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Hvordan bevis blir behandlet i skolematematikken har variert i med læreplanene, og de siste 20-30 årene har bevis hatt en unnværende rolle i mange land (Hemmi, 2009). I den nå utgående læreplanen i matematikk stilles det krav om at enkelte bevis skal være med i undervisningen, samtidig har lærerne stor frihet til å bestemme hvilke bevis de vil bruke i undervisningen og hvordan disse skal legges fram (Utdanningsdirektoratet, 2006).

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) kommer med seks grunner for at bevis bør være en del av matematikkundervisningen. For å bli trygg på at matematikken stemmer, for å fremme matematisk forståelse, for å få intellektuelle utfordringer, for å kunne kommunisere ideer, for å produsere noe som på en elegant eller overraskende måte gir matematisk innsikt og for å konstruere en større matematisk teori (NCTM, 2000, referert i Hanna, 2014, s. 404).

Det er vanlig å skille mellom formelle og uformelle bevis i matematikken. Dawson (2006) og Rav (1999) poengterer at begrepet formelt matematisk bevis også kan ha to ulike tolkninger innenfor matematikken. På den ene siden har du den logiske matematikkretningen hvor et formelt matematisk bevis er helt presis og består av en rekke velformulerte formler som skal ha røtter i aksiomer eller følge en slutningsregel (Dawson, 2006). Det bærer preg av deduksjon, altså en fastsatt metode for hvordan beviset skal legges fram (Hanna & Villiers, 2012). Det er altså ikke rom for utdypende forklaringer og visualiseringer for å hjelpe til med å forklare beviset. Dette utgjør dog en smal retning innenfor matematikken og de fleste formelle matematiske bevis har som mål å forklare hvorfor et matematisk fenomen stemmer (Rav, 1999). Det stilles fortsatt krav til bruk av et formelt matematisk språk og det skal ikke være noen usikkerheter i slutningene som tas, men matematikeren har større frihet til å komme med forklaringer underveis og å bruke setninger og begreper i beviset i stedet for å kun bruke kvantorer, symboler og operatorer (Dawson, 2006).
I motsetning til formelle bevis er det færre restriksjoner når det kommer til uformelle bevis. I et uformelt bevis er det dermed rom for å bruke mer hverdagslige begreper og en kan støtte seg på tilleggsinformasjon, for eksempel visuelle argumenter, som kan være med på å forklare

det matematiske fenomenet som bevises (Hanna, 1990). I utdanningsøyemed vil det være vanlig å benytte seg av en blanding mellom uformelle og mer formelle bevisføringer. Dette er også tilfellet i boken til Lindstrøm (2016), som brukes i MAT1100.

I denne studien er det ikke bevisets rolle i seg selv som undersøkes, men vi anser kompetansen om å kunne følge et bevis og kunne konstruere egne beviser som en viktig kompetanse i universitetsmatematikken. Samtidig som man skrider fremover i det matematiske utdanningsløpet stilles det strengere og strengere krav til grad av formalitet i bevisene som brukes i kursene. Når vi videre referer til formelle bevis mener vi da ikke den strengeste definisjonen som Dawson (2006) viser til, men vi vil heller fokusere på grad av formalitet i beviset. En høyere grad av formalitet i beviset vil kreve høyere grad av matematisk presisjon, bruk av riktig matematisk notasjon og matematiske symboler (Lew & Mejia-Ramos, 2019). Studien til Moore (1994) viser at det matematiske språket er en av hovedutfordringene studenter har i møte med bevisføring på universitetet når de skal lære seg å skrive mer formelle bevis og dermed argumentere for holdbarheten til matematiske påstander.

### 2.2.4 Matematisk register

Å utrykke seg matematisk kan gjøres på flere forskjellige måter. Et matematisk fenomen kan for eksempel beskrives med et uformelt og dagligdags språk, «funksjonen er sammenhengende når x er mellom a og b» eller med et mer formelt og matematisk språk «funksjonen $f$ er kontinuerlig for alle $x \in (a, b)$». Ved bruk av et formelt matematisk språk stilles det store krav til bruk av matematiske begreper, symboler, struktur og syntaks for å beskrive matematikken (Farrugia, 2013; Pimm, 1987). Forskjellen mellom å bruke et formelt og et uformelt språk til å beskrive eller argumentere i matematikk forklarer Halliday (1974) ved at de tilhører forskjellige register.

Register er et komplisert lingvistisk begrep som Halliday (1974, s. 65) definerer på følgende måte: «A register is a set of meanings that is appropriate to a particular function of language, toghether with the words and structures which express these meanings». Et register altså en samling av hvordan ord, symboler og formuleringer har sin nytte inne forskjellige bruksområder. Videre beskriver Halliday (1974) et matematisk register som kommunikasjon og betydninger som hører til det matematiske språket og videre matematiske anvendelser.

Selv om matematiske ord og uttrykk er en del av det matematiske registeret må vi ikke se på det matematiske registeret som en ordbok for matematisk terminologi. Det matematiske registeret innebærer helheten i kompetansen «å kommunisere matematisk» gjennom alt fra valg av begreper, symboler, presisjon, syntaks og notasjon til hvordan å bygge opp et matematisk argument (Halliday, 1974).

Pimm (1987) fremhever to registre innen matematikken. Det tekniske matematisk registeret og det hverdagslige registeret. En stor del av det å lære matematikk er det å kunne kommunisere som en matematiker (Pimm, 1987). Når man skal lære elever å kommunisere matematisk er det viktig å støtte dem i overgangen fra det hverdagslige registeret over i det mer tekniske matematiske registeret. Som nevnt tidligere er ikke dette en overgang som ligger naturlig for elevene (Kranda, 2008). Pimm (1987) beskriver i hovedsak disse to registrene, men nevner også at det finnes et tredje register som kan plasseres mellom det tekniske og det hverdagslige. Dette definerer Prediger et al. (2016) som skoleregisteret. Skoleregisteret kan sees på som et springbrett hvor elevene er på vei fra det hverdagslige over til det tekniske registeret (Prediger et al., 2016).

Det hverdagslige registeret består av ord, utrykk og formuleringer som kommer fra den daglige talen, men som ikke har bakgrunn i matematikken (Pimm, 1987; Prediger et al., 2016). Selv om det ikke er et mål for matematikkundervisningen at elevene skal støtte seg på dette registeret, påpeker Prediger et al. (2016) viktigheten av dette registeret og hvordan elevene kan bruke de dagligdagse kunnskapene sine til å forstå matematikken bedre.

Det tekniske matematiske registeret består av faglige matematiske ord, uttrykk, formuleringer og måter å representere matematikk på, som for eksempel bruk av algebraiske symboler (Pimm, 1987; Prediger et al., 2016). Ord og utrykk i det tekniske matematiske registeret er sjeldent særegne for matematikken. Ofte brukes ord som er lånt fra andre språk som for eksempel *integrere, produkt, reell, imaginær* og *naturlig*, eller symboler lånt fra for eksempel det greske eller latinske alfabetet. Dette er ord og symboler som representerer én betydning i matematikken, men som har en annen betydning i det dagligdagse språket (Pimm, 1987). Det er også tilfeller hvor ordene har den samme betydningen, men hvor det er mer restriktivt når man kan bruke ordene i det tekniske matematiske språket. Pimm (1987) bruker ordene *hvis* og *da* som et eksempel for dette. I det hverdagslige språket ville setningen «*Hvis* du ønsker å reise til Australia, *da* kan du få informasjon fra den Australske ambassaden» være en helt naturlig formulering. Om man derimot ser på bruken av *hvis* og *da* fra et teknisk matematisk synspunkt vil du få et problem ved at det kontrapositive utsagnet «*Hvis* du ikke kan få informasjon fra den Australske ambassaden, *da* ønsker du ikke å reise til Australia» ikke være meningsfylt da det åpenbart ikke stemmer. Eksempelet ovenfor viser med andre ord hvordan slike skjult nyanser avviker i de ulike registrene.

Skoleregisteret overlapper både med det hverdagslige registeret og det tekniske matematiske registeret, men det er samtidig elementer som er med på å skille skoleregisteret fra de andre (Prediger et al., 2016). Schleppegrell (2004) referert i Prediger et al. (2016, s. 207) forklarer at skoleregisteret kan karakteriseres ved at det er dekontekstualisert, mer eksplisitt, inneholder færre personlige referanser og at den grammatiske strukturen er mer kompleks enn i det hverdagslige registeret. Bruk av skoleregisteret forekommer ofte i aviser, bøker, matematikklasserommet og særlig i matematikklærebøkene (Prediger et al., 2016). Hun poengterer også at selv om dette registeret som oftest brukes i skriftlig form, så blir det også benyttet muntlig av mange lærere i skolen. I likhet med det tekniske matematiske registeret inneholder skoleregisteret i tillegg til verbale representasjonsformer også grafiske og numeriske representasjoner (Prediger et al., 2016).

## 2.3 Fornuftsgrunnlag og matematisk forståelse

For å belyse problemstillingen og tolke informantenes ytringer ser vi det som hensiktsmessig å benytte begrepene rasjonale, motivasjon og forståelse. Vi vil bruke Mellin-Olsens beskrivelse av det instrumentelle- og det sosiale fornuftsgrunnlaget for å diskutere rasjonale for å lære matematikk. Disse begrepene beskriver han i kapittel 9, som han har forfattet i boken til Solvang (1986). Fornuftsgrunnlagene til Mellin-Olsen kan fort bli misforstått og sett på som synonymer til motivasjon for å lære matematikk. For å belyse denne forskjellen vil vi også trekke inn motivasjon, slik at våre tolkninger og diskusjoner ikke blir misforstått. Studentenes forståelse har også en sentral plass i analysen. I hovedsak vil studentenes forståelse diskuteres i lys av relasjonell og instrumentell forståelse, men det er viktig for oss å påpeke at vi ikke ser på dette som to disjunkte forståelsestyper.

### 2.3.1 Forståelse

Instrumentell- og relasjonell forståelse er to begreper som er flittig brukt og forsket på i matematikkdidaktikken. Gjennom fagfornyelsen, som nå innføres i skoleverket, kan det se ut til at det i større grad er ønskelig at elevene får mulighet til å fordype seg i faglige tema (Kunnskapsdepartementet, 2017). Dermed er det naturlig å tro at det vil bli et større fokus på tilegnelse av kunnskap som er relasjonell, heller enn instrumentell. Før vi definerer og beskriver disse begrepene er det viktig å påpeke at vi i vår studie ikke kartlegger informantenes forståelse, men diskusjon rundt dette skjer på bakgrunn av våre tolkninger av studentenes uttalelser. I den nye læreplanen bruker de begrepet dybdelæring. Dette begrepet finner vi nært tilknyttet relasjonell forståelse som vil operasjonaliseres ytterligere i dette delkapittelet.

Relasjonell forståelse blir ifølge Skemp (1978) beskrevet som å vite hva du skal gjøre og hvorfor du skal gjøre det, mens instrumentell forståelse blir beskrevet som regler uten noen begrunnelse. Slik Skemp (1978) beskriver relasjonell og instrumentell forståelse kan knyttes nært opp til hvordan Hiebert & Lefevre (1986) forklarer begrepene konseptuell kunnskap og prosedural kunnskap. De definerer konseptuell kunnskap ved at det er rikt på relasjoner og at det fungerer som et nettverk av individuelle kunnskaper hvor sammenhengen mellom de ulike delene er viktig. De påpeker at konseptuell kunnskap ikke kan være en disjunkt kunnskap uten noen sammenhenger til andre kunnskaper da det vil bryte med definisjonen av konseptuell kunnskap.

Prosedural kunnskap kan ifølge Hiebert & Lefevre (1986) tilegnes på to ulike måter. Den første måten går ut på å bruke matematikkens formelle språk eller hvordan matematiske symboler brukes til å kunne løse oppgaver. For eksempel kan en med prosedural kunnskap gjenkjenne og se at regnestykket $3{,}5 \div [\ ] = 2{,}71$ har rett syntaks og kan løses, selv om de kanskje ikke vet hvordan det skal løses. Samtidig kan de også se at et regnestykke som $6 + = [\ ]2$ ikke vil være gyldig. I høyere grads matematikk vil en slik prosedural kunnskap kunne bestå av å gjenkjenne strukturen til et formelt matematisk bevis uten at strukturen i seg selv gir noen mening for dem. Den andre delen av prosedural kunnskap består av regler, algoritmer eller prosedyrer for hvordan man kan løse et matematisk problem. Det kan sees på som en steg for steg instruksjon på hvordan å løse problemet uten at det blir reflektert over stegene eller at kunnskapen henger sammen med annen matematisk kunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986).

Når det gjelder hvilken av disse forståelsestypene vi burde strebe etter, virker det tydelig at Skemp (1978) i stor grad heller mot relasjonell forståelse. Samtidig gir han uttrykk for at det finnes argumenter for begge måter å tilegne seg kunnskap på. Skemp (1978) kommer så med fire argumenter for relasjonell forståelse og tre argumenter for instrumentell forståelse. Det første argumentet for relasjonell forståelse i matematikk er at en relasjonell forståelse gjør det lettere å overføre kunnskapen til nye oppgaver eller problemer. Det andre argumentet er at en relasjonell forståelse gjør matematikken enklere å huske tilbake til. Dette utsagnet påpeker Skemp (1978) at kan virke som et paradoks, da det eksempelvis trolig er enkelt for elever å lære seg at arealet til en trekant kan uttrykkes ved formelen $A = g \cdot h$, som illustrerer en instrumentell tilegnelse av kunnskap. Likevel, dersom en elev danner seg en relasjonell forståelse for- og ser sammenhengen mellom arealet av ulike geometriske figurer ut ifra arealet av et rektangel, trenger de ikke lengre å lære seg formlene for arealet av trekant, parallellogrammer og trapeser. De vil i fremtiden kunne resonnere seg frem til det. Det tredje argumentet er at relasjonell forståelse kan være et effektivt læringsmål i seg selv. Dette begrunner han gjennom empiriske studier gjort i andre fag enn matematikken, hvor det viser seg at det trengs mindre belønning for læringen. Dette argumentet knytter han sammen med det siste argumentet som går ut på at en relasjonell tilnærming er av «organisk kvalitet». Han sammenligner dette med et tre hvor røttene vokser, og treet blir sterkere. Dette knyttes opp mot det tredje argumentet ved at elever som opplever det meningsfylt å danne en relasjonell forståelse, i tillegg vil søke etter ny kunnskap og utforske matematikken i større grad (Skemp, 1978).

Det første argumentet Skemp (1978) har for instrumentell forståelse er at det, innenfor sin egen kontekst, er det letteste å lære. For eksempel det å multiplisere to negative tall. Det å lære en elev bruken av regelen som sier at dette blir positivt, går rimelig fort og er lett å lære. Dersom du bare ønsker å kunne løse oppgaver kan instrumentell forståelse generere de rette svarene raskest og lettest. Det andre argumentet for instrumentell forståelse er at belønningen kommer raskere og oftere. Dette kan være en god måte å øke både selvtillit, mestringsfølelse og motivasjon ved at elever ved at de faktisk klarer å løse de matematiske problemene. Det tredje argumentet er at du ofte kan få det rette svaret mye raskere og konsist ved bruk av instrumentell tilnærming kontra en relasjonell tilnærming. Han påpeker at denne forskjellen er så stor at flere matematikere ofte kan bruke instrumentelle tilnærminger (Skemp, 1978).

Om vi ser på de to forrige avsnittene kan det være lett å se sort-hvitt på instrumentell og relasjonell forståelse, og videre tenke at en elev enten har den ene eller den andre forståelsestypen. For oss er det viktig å påpeke at vi ser på dette som noe mer flytende og ubestemmelig. Altså tenker vi at en elev kan ha en relasjonell forståelse for et tema, men samtidig bruke isolerte kunnskaper og algoritmer for å løse problemet. Dette synet støttes av Jørgensen & Goodchild (2009) som hevder at det kan være fordelaktig å tilegne seg overflatekunnskap (instrumentell tilnærming) i form av for eksempel fakta, prosedyrer og framgangsmåter, før en kan bygge videre på dette ved å koble sammen kunnskap og jobbe mot en mer relasjonell forståelse. På veien mot en relasjonell forståelse ser vi det altså som mulig at begge disse tilnærmingene er til stede hos en elev.

Niss & Højgaard (2002) beskriver også en kompetanse, som på enkelte måter inneholder aspekter som kan hjelpe for å danne en relasjonell forståelse, slik den er beskrevet av Skemp (1978) og Hiebert & Lefevre (1986). Denne omtaler Niss & Højgaard (2002) som *tankegangskompetanse* og handler om at elevene skal forstå hva som er et holdbart matematisk argument. For å gjøre dette må elevene kunne skille mellom forskjellige typer påstander og utsagn som for eksempel setninger eller definisjoner. De må også ha innsikt i hva som er tilstrekkelige eller nødvendige betingelser for at en matematisk egenskap skal være gyldig (Niss & Højgaard, 2002). To begreper som er tett knyttet opp mot denne kompetansen er beskrevet gjennom fagfornyelsens kjerneelementer i matematikk, nemlig abstraksjon og generalisering. Disse beskrives som følger:

> *«Abstraksjon i matematikk innebærer at elevene gradvis utvikler en formalisering av tanker, strategier og matematisk språk. Utviklingen går fra konkrete beskrivelser til formelt symbolspråk og formelle resonnementer. Generalisering i matematikk handler om at elevene oppdager sammenhenger og strukturer og ikke blir presentert for en ferdig løsning. Det vil si at elevene kan utforske tall, utregninger og figurer for å finne sammenhenger og deretter formalisere ved å bruke algebra og hensiktsmessige representasjoner.»* (Utdanningsdirektoratet, 2020).

De samme to begrepene blir brukt av Niss & Højgaard (2002) hvor abstraksjon beskriver evnen til å trekke ut underliggende strukturer, mønstre eller egenskaper til et matematisk konsept/begrep, mens generalisering handler om å forstå- og selv kunne benytte seg av matematiske resultater fremstilt i et gitt tilfelle, til å gjelde en større klasse matematiske objekter. Tankegangskompetanse er, slik den beskrives av Niss & Højgaard (2002), på mange måter linket til bevisføring der nettopp disse matematiske ferdighetene krever mestring. Slik Crawford et al. (1998) og Brandell et al. (2008) finner i sine studier, er det å se helhetlige sammenhenger og koblinger mellom matematiske egenskaper en av utfordringene for studenter som nylig begynte på universitetet. Det vil også stilles store krav til den språklige kompetansen i form av både symbolspråk, begrepsbruk og presisjon, slik Rønning (2014, 2015) hevder gjennom sine analyser.

### 2.3.2 Rasjonale

Elevenes fornuftsgrunnlag for læring blir av Mellin-Olsen i Solvang (1986) beskrevet som grunnlaget til hvordan elevene imøtekommer lærestoffet. Han viser til tre spørsmål dette fornuftsgrunnlaget sier noe om. Er lærestoffet interessant? Er det viktig? Har det en hensikt å lære dette? Ut ifra disse spørsmålene avgjør elevene om de skal delta i undervisningen og hvordan de skal delta (Solvang, 1986). Han fremhever to forskjellige rasjonale, det instrumentelle og det sosiale fornuftsgrunnlaget. Disse kan enten jobbe sammen, eller så kan det ene fornuftsgrunnlaget jobbe alene for å drive læringen fremover (Mellin-Olsen, 1981; Solvang, 1986).

Det instrumentelle fornuftsgrunnlaget (IFG) knyttes ofte opp mot hvordan prøver og eksamen påvirker elevene, og hvordan skolen skal hjelpe dem mot videre skolegang og arbeidsmuligheter i fremtiden. I det instrumentelle fornuftsgrunnlaget skal skolen fungere som hjelp for elevenes framtid, slik at denne blir så god som mulig (Mellin-Olsen, 1981; Solvang, 1986). Når det instrumentelle fornuftsgrunnlaget er til stede er det ytre påvirkninger som motiverer eleven og som rasjonaliserer hvorfor eleven skal lære dette. Eksempelvis kan dette være elever som har gitt opp matematikken og tenkt at dette ikke var noe for dem, men som i senere tid har fått lærlingplass eller annen jobb som forutsetter at de fullfører videregående skole (Mellin-Olsen, 1981). I denne situasjonen står skolen og matematikkfaget sentralt i det å skulle skape en bedre framtid, ved at dette er en nødvendighet for at eleven skal få jobben han ønsker.

Det sosiale fornuftsgrunnlaget (SFG) går ut på at eleven syntes det er viktig å lære noe fordi lærestoffet i seg selv er viktig og ikke bare for å kunne oppnå et eksamensmål (Solvang, 1986). Mellin-Olsen (1981) påpeker at ordet «sosial» brukes for å vise at eleven er et sosialt vesen som både påvirker og blir påvirket av omgivelsene, og at et slikt grunnlag skapes ikke helt på egenhånd. Det sosiale fornuftsgrunnlaget vil ikke bare være forskjellig fra elev til elev. Det kan også være forskjeller basert på hvilket miljø man er i, slik Mellin-Olsen (1981) eksemplifiserer ved forskjeller i det sosiale fornuftsgrunnlaget mellom skoleklasser fra urbane miljøer og skoleklasser i mer landlige distrikter.

Det er viktig å påpeke at en elev sitt fornuftsgrunnlag for å lære matematikk kan endre seg over tid og etter hva som skal læres. Det ideelle er at IFG og SFG skal forekomme sammen og at læreplanen, undervisningen og elevens troverdighet til at skolen skal gi den kunnskap som trengs, samsvarer med hva eleven selv ser på som nyttig og hva eleven selv ønsker å lære fra skoleløpet. Dette senarioet kan ifølge Mellin-Olsen (1981) forekomme for noen elever, men for alle elever samlet vil disse fornuftsgrunnlagene kun jobbe perfekt sammen i en begrenset tid.

Et annet senario er at det sosiale og det instrumentelle fornuftsgrunnlaget er disjunkt og dermed ikke jobber sammen på noen måte. Dette mener Mellin-Olsen (1981) at er lite sannsynlig da det alltid vil være noen elever som godtar at skolen er en viktig læringsplattform og har tro på at det de en dag vil få bruk for den kunnskapen de tilegner seg. Samtidig forteller han i Solvang (1986) hvordan det sosiale fornuftsgrunnlaget kan virke alene i noen situasjoner. For eksempel kan elevene jobbe med et prosjekt som virkelig skaper interesse, men hvor læreren har vanskeligheter med å knytte prosjektarbeidet til læreplanen eller elevenes matematiske kompetanse og dermed må avslutte prosjektet for å gå videre med læringsmålene.

Et tredje senario, som også er det mest vanlige, er at vi har en overlapp mellom det sosiale og det instrumentelle fornuftsgrunnlaget uten at dette er en fullstendig overlapp. Didaktikere og lærere må hele tiden jobbe for å gjøre denne overlappen størst mulig slik at fornuftsgrunnlagene jobber mest mulig sammen for å drive fram læringen i matematikkfaget (Mellin-Olsen, 1981).

### 2.3.3 Motivasjon

Motivasjon er noe vi alle opplever når det er noe vi har lyst på eller det er en aktivitet vi ønsker å utføre (Manger, 2013). Motivasjon har mange likhetstrekk med fornuftsgrunnlagene til Mellin-Olsen, og flere didaktikere oversetter begrepene SFG og IFG direkte til indre og ytre motivasjon. Vi vil først presentere begrepene indre og ytre motivasjon og avslutningsvis se disse opp mot fornuftsgrunnlagene beskrevet i kapittel 2.3.2.

Motivasjon kan sees på som en indre tilstand som gir energi og styrer atferden i en bestemt retning (Reeve, 2005, referert i Manger, 2013). Vanligvis skilles det mellom indre og ytre motivasjon for læring i psykologien (Manger, 2013; Woolfolk et al., 2013). Wæge (2007) beskriver at en person har indre motivasjon for en oppgave dersom h*n finner oppgaven i seg selv interessant og/eller morsom. Ifølge Woolfolk et al. (2013) går indre motivasjon ut på at man har en indre tilstand som søker etter utfordringer man er personlig interessert i. De forklarer også at dersom man er indre motivert behøver man ingen fortjeneste for å utføre oppgaven fordi aktiviteten i seg selv er givende. Manger (2013) forklarer at indre motivasjon har rot i selve aktiviteten ved at den appellerer til kunnskap, utfordrer eller skaper glede. Som vi ser er det en personlig interesse som fører til indre motivasjon ved at aktiviteten er givende. I kontrast beskriver Woolfolk et al. (2013) at vi har en ytre motivasjon dersom vi gjør noe for å få en viss karakter, unngå straff eller for eksempel å gjøre en lærer fornøyd. Altså er det ikke oppgaven i seg selv som er motiverende, men det er andre ytre faktorer som motiverer oss til aktiviteten.

Det er flere likheter mellom fornuftsgrunnlagene og motivasjonsbegrepene indre og ytre motivasjon, men kan disse begrepene brukes om hverandre som synonymer? Dette spørsmålet er noe Wæge (2007) diskuterer. Hun bruker et eksempel fra Mellin-Olsen (1984) angående gutten Jarle. Jarle er legesønn og har gjennom påvirkning fra familie, naboer og lærere opparbeidet seg en tanke om at han skal studere i framtiden. Når læreren introduserer klassen for likninger og de fleste ikke skjønner hva de skal bruke denne kunnskapen, vet Jarle at likninger er noe han vil kunne få bruk for senere. Kanskje må han mestre dette dersom han skal bli lege? På grunn av dette har han derfor ingen problemer med å godta at dette er en meningsfylt aktivitet på skolen. Det sosiale fornuftsgrunnlaget er altså fungerende for Jarle selv om aktiviteten i seg selv ikke frembringer indre motivasjon. På bakgrunn av situasjoner som denne velger vi å skille mellom begrepene for motivasjon og fornuftsgrunnlagene.

# 3 Metode

I dette kapittelet vil vi gjøre rede for vår metodiske tilnærming til forskningsprosjektet. Før man kan velge en metodisk tilnærming må man finne ut hva man ønsker å undersøke. Denne kartleggingen er med på å legge føringer for metodevalg som er best egnet for å besvare hva man vil undersøke (Kvale & Brinkmann, 2015). Bakgrunnen for vårt valg av metode er basert på problemstillingen *«Hvordan opplever matematikkstudenter det matematiske språket i overgangen fra videregående skole til universitetet, og hvilken rolle spiller dette i studenters utvikling av relasjonsforståelse i matematikk?»*.

Det finnes mye forskning knyttet til overganger i skolesystemet. Det er også mange som har forsket på både relasjonsforståelse og matematisk språk. Vi finner derimot få studier som gjør et forsøk på å knytte dette sammen og undersøke om disse faktorene kan ha innvirkning på hverandre i den norske konteksten. Sånn sett føler vi at vi går i en retning få har gjort før oss, samtidig som vi har en stor mengde tidligere forskning vi kan støtte oss på. Valg av metode kan være avgjørende for om en studie kan finne ny kunnskap rundt et fenomen, men det krever at forskeren gjør valg som er både tilpasset studien og veloverveid før gjennomføring (Everett & Furseth, 2012). Videre vil vi redegjøre for våre metodiske valg, samt diskutere oppgavens kvalitet og de etiske betraktninger vi har gjort oss.

## 3.1 Valg av tilnærming og vårt vitenskapelige syn

Før vi går i gang med å beskrive vår metodiske tilnærming ønsker vi å tydeliggjøre vårt vitenskapelige syn. I en studie som dette vil «linsen» vi som forskere ser gjennom ha stor betydning for hvilket datamateriale vi får inn og hvordan dette blir brukt. Dermed vil det også påvirke hvordan resultatene i denne studien blir til. Alt fra planlegging av studien til det ferdige produktet vil være farget av dette i større eller mindre grad (Nilssen, 2012). Med dette i bakhodet ønsker vi å gi en klar og tydelig beskrivelse av vårt forskningssyn og hvordan data og resultater er kommet frem i denne studien. På denne måten vil vår påvirkning på dette forskningsprosjektet være tydelig og transparent for eventuelle lesere.

Vårt vitenskapelige syn samsvarer godt med hvordan Thagaard (2009) beskriver sosialkonstruktivismen. I sosialkonstruktivismen dannes kunnskap i samspillet mellom intervjuer og informant, og i sosiale sammenhenger (Thagaard, 2009). På samme måte er vår kunnskap om studentens opplevelse av overgangen mellom videregående skole og universitetet dannet i samspill mellom oss som forskere og studentene som informanter. Analysen vår vil bære preg av det samme, gjennom våre tolkninger og refleksjoner av det transkriberte materialet.

Problemstillingen i denne oppgaven er noe kompleks da den sikter mot å utforske studentenes *opplevelse* av det matematiske språket i o*vergangen* mellom videregående skole og universitetet, samtidig som vi ønsker å undersøke om dette kan ha en sammenheng med studentenes *utvikling av relasjonsforståelse* innen matematikken. Selv om problemstillingen er kompleks, mener vi det er tydelig at det er studentene og deres opplevelser, refleksjoner og erfaringer som er kjernen. Dalen (2011) beskriver dette gjennom begrepet «livsverden» og at dette beskriver en opplevelsesdimensjon, ikke bare gjengivelse av forholdene personen lever i. På bakgrunn av dette vil en kvalitativ tilnærming være best egnet. Dette samsvarer med hvordan Cohen et al. (2018) definerer et subjektivistisk perspektiv på forskning. Mennesker blir sett på som frie og kreative, og at de tolker verden ulikt. Dette er noe vi som forskere også må være oppmerksomme på gjennom den videre forskningsprosessen. Nilssen (2012) hevder det er viktig at forskere selv er bevisste på egen subjektivitet i forskningen. Dette fordi vi selv har en forforståelse rundt fenomenet som undersøkes og denne forforståelsen er viktig for vår egen forståelse av informanten og senere for vår tolkning (Dalen, 2011). I vårt tilfelle vil dette for eksempel gjelde faktorer som våre egne erfaringer, verdier, språk og begreper. Denne forforståelsen kan påvirke fortolkningene våre bevisst eller ubevisst og det er dermed viktig å ha reflektert over dette.

Vi ønsker videre å utforske studentenes opplevelse av det matematiske språket og få et innblikk i deres forståelse av matematikken. Dette krever at vi har en åpen tilnærming til problemstillingen samtidig som vi er avhengige av å skaffe oss dybdekunnskap og mulighet til å forstå studentenes erfaringer og opplevelser. Informantene må med andre ord få mulighet til å reflektere over spørsmålene som blir stilt, og de må få anledning til å snakke fritt og ufiltrert rundt sine egne oppfatninger av både matematisk språk og matematiske emner som tas opp underveis i intervjuet. På bakgrunn av dette hevder Larsen (2017) og Kvale & Brinkmann (2015) at det er hensiktsmessig med en kvalitativ tilnærming til oppgaven.

Både Johnson & Christensen (2012) og Larsen (2017) poengterer at det kan være en styrke å bruke flere metoder i forskningen. Vi vil også supplere vår kvalitative forskning med en mindre dataanalyse knyttet til eksamensresultatene i MAT1100. Disse resultatene er hentet fra det samme årskullet som informantene våre er en del av. En analyse av eksamensresultatene til studentene ved MAT1100 vil kunne gi oss et innblikk i hvordan deres matematiske forståelse reflekteres i resultatene, og vi vil videre ha mulighet til å analysere og tolke enkeltoppgaver med tanke på matematisk språk. Ved å bruke kvantitativ data som en støtte til vår primærdata, vil vi få mulighet til å få en dypere forståelse av fenomenet gjennom triangulering av data (Larsen, 2017; Patton, 2015).

Creamer (2016) mener man må skille mellom det han omtaler som mixed-methods og multi-methods i forskningen. For at en metodisk tilnærming skal omtales som mixed-method bør datagrunnlaget samlet gjennom de forskjellige metodene og de analytiske verktøyene brukt for å tolke resultatene være så nært knyttet at man ser på dem som nødvendige for å forstå konklusjonene fra forskningen. For vår del vil innslaget av kvantitativ data være ment som et supplement som vi håper kan få frem noen interessante aspekter rundt problemstillingen, og som kan gi oss et lite innblikk i hvordan en større del av studentmassen ved MAT1100 forholder seg til det matematiske språket, og hvordan deres relasjonsforståelse i faget er. Dette uten å ha noe mål om å kunne generalisere resultatene, men heller for å se etter tendenser eller interessante nyanser for fremtidig forskning. Selv om vi kombinerer metoder i oppgaven vår, og at det dermed kan argumenteres for at dette bør defineres som multi-metodisk forskning, er vår hovedvekt lagt på det kvalitative materialet. Vårt kvantitative innslag gjennom analyse av eksamensresultater er ment som et supplement til denne hvor vi kan lete etter sammenhenger og trender som kan være aktuelle for problemstillingen og gi oss et enda bedre innblikk.

### 3.1.1 Valg av problemstilling

Gjennom utallige diskusjoner rundt lunsjbordet i løpet av lektorstudiet ble idéen om å undersøke matematisk språk og relasjonsforståelse i matematikken utformet. Vår felles interesse for undervisning og matematikk ligger til grunn, samtidig som vi har egne erfaringer rundt hvordan det matematiske språket kan være utfordrende og hvor viktig det er å utvikle en relasjonsforståelse i matematikken dersom man skal arbeide videre med faget. Særlig ble vi oppmerksomme på dette da vi selv tok steget fra videregående over til universitetet og fortsatte den matematiske fordypningen der. Etter samtaler med fagpersoner ved UiO kom det også frem at denne vinklingen hadde potensiale til å bidra med nye innblikk og refleksjoner i forskningen, noe vi synes var spennende.

I vårt innledende arbeid med å utforme problemstillingen var tanken at relasjonsforståelse i matematikk skulle ligge mer som et bakteppe i forskningen. Det var først ved gjennomføring av intervjuene og analyse av disse at vi fant uttalelser som direkte omhandlet forståelse av matematikken. Dette ledet oss til å inkludere relasjonsforståelse i matematikk som en mer sentral del i forskningen. Slike endringer er naturlig å gjøre etterhvert som kvalitativ forskning skrider frem (Larsen, 2017).

### 3.1.2 Teoretiske antagelser

Vår valgte problemstilling er til dels utformet med bakgrunn i erfaringsbaserte hypoteser. Vi har førstehånds erfaring med hvordan overgangen fra videregående skole over til universitetet, noe som var med på å skape interessen vår for problemstillingen. Med dette vil vår forforståelse og erfaringer spille inn i utviklingen av oppgaven. Vi har også presentert noe tidligere forskning i teorikapittelet som har påvirket utgangspunktet for undersøkelsen vår. Dette er naturlig i en studie av denne typen, men også relevant å påpeke.

## 3.2 Utvalg og rekruttering

Det finnes mange ulike strategier for å velge ut informanter til forskningsprosjekter (Dalen, 2011). For å besvare vår problemstilling ønsker vi at informantene i undersøkelsen oppfyller noen gitte kriterier som vil bli nærmere beskrevet i de neste avsnittene. Et utvalg hvor det legges inn kriterier som informantene må oppfylle omtales som et *kriteriebasert utvalg* (Dalen, 2011; Johannessen et al., 2016). Samtidig er utvalget basert på intervjupersoner vi lett kunne nå uten for stor reiseavstand og uten at vi måtte bruke mye ressurser på å nå dem. I så måte kan det også argumenteres for at utvalget vårt er et såkalt *bekvemmelighetsutvalg,* hvor vi gjorde det som var enklest og mest bekvemmelig for vår egen del (Johannessen et al., 2016). Samtidig ønsker vi å legge til at det både med tanke på oppgavens omfang, tilgjengelige ressurser og på grunn av restriksjoner knyttet til pandemien, egentlig ikke var noe realistisk alternativ til et bekvemmelighetsutvalg, da vi ønsket å gjennomføre intervjuene fysisk.

Siden vi ønsker å se på studenters opplevelse av overgangen mellom videregående skole og universitetet, er det selvsagt at vi må velge informanter som har gått videre til høyere utdanning. Ut fra vår problemstilling ønsker vi å fordype oss i deres opplevelse av det matematiske språk og deres relasjonsforståelse. Med dette vil vi være avhengig av å snakke med studenter som også tar matematiske fag ved universitetet. Dermed falt valget på emnet MAT1100 (Kalkulus) ved Universitetet i Oslo. Universitetet beskriver emnet som følger:

> *MAT1100 er en videreføring av integral- og differensialregningen i videregående skole, men emnet går dypere ned i det teoretiske grunnlaget og videreutvikler metodene til å dekke mer kompliserte tilfeller. Emnet inneholder også innføringer i komplekse tall, vektorer og matriser, samt kontinuitet og derivasjon av funksjoner av flere variable. MAT1100 bygger på full fordypning i matematikk fra videregående skole og danner grunnlaget for MAT1110* (UiO, u.å.).

Dette emnet inngår som et av de første matematiske emnene i en rekke forskjellige studier og spenner fra studieløp som for eksempel Geofysikk og klima eller Lektorutdanningen i realfag, til renere matematiske studier som Matematikk og økonomi eller Matematikk og informatikk. Med andre ord får vi mulighet til å intervjue informanter som ikke nødvendigvis har samme interesser eller rasjonale for å velge dette matematiske emnet.

Matematisk institutt ved UiO viser til at emnet MAT1100 bygger på full fordypning i matematikk fra videregående skole (UiO, u.å.). Det er et krav at studentene har tatt matematikk R2 eller tilsvarende programfag på videregående. Vi satte likevel et tilleggskrav om at studentene hadde tatt matematikk R2 gjennom offentlig videregående skole i Norge, da vi ønsket at intervjupersonene skulle ha så like forutsetninger som mulig for å forstå matematikken som blir presentert i MAT1100. På denne måten vil ikke kunnskapsmangel eller manglende introduksjon av matematisk språk kunne skyldes faglige valg på videregående skole. Videre ønsket vi også å rekruttere informanter som hadde fullført videregående utdanning senest to år før de startet på emnet MAT1100. Dette kriteriet satt vi fordi vi ønsket at informantene skulle ha et godt grunnlag for å huske tilbake til matematikken på videregående og dermed kunne sammenligne dette med deres erfaringer fra MAT1100 på en best mulig måte.

Grunnet pandemien som pågår, måtte vi tenke alternativt når det kom til selve rekrutteringen av informanter. For å unngå store forsamlinger som vi i utgangspunktet ikke var en del av, tok vi kontakt med foreleseren for MAT1100 og spurte om han kunne informere studentene om prosjektet. På samme tid som vi gjennomførte datainnsamlingen var det levert ut en obligatorisk oppgave for studentene på MAT1100. Som en belønning for å bidra i forskningsprosjektet vårt tilbød vi derfor å hjelpe studentene som meldte seg med den obligatoriske oppgaven. Dette for å motivere til deltagelse, men også som et verktøy vi kunne bruke for å diskutere matematisk språk og forståelse. Studentene fikk oppgitt kontaktinformasjonen vår i forelesning og ble oppfordret til å sende mail dersom det var av interesse å delta. Denne måten å rekruttere på baserer seg på frivillighet blant studentene og det kan tenkes at studenter som melder seg frivillig til slike forskningsprosjekter, har høyere interesse og motivasjon for faget enn de som ikke melder seg. På den andre siden kan det tenkes at studenter som føler de ikke har kontroll på den obligatoriske oppgaven, har en høyere tilbøyelighet til å melde seg som deltaker. En innvending er uansett at utvalget til en viss grad vil styres av studentenes egen interesse for å delta i forskningen og at dette kan påvirke resultatene våre.

Målet med intervjuene var å få dybdekunnskap om studentene som ble intervjuet, og vi antok dermed å sitte igjen med et relativt stort datamateriale per informant. Å bestemme hvor mange personer man skal intervjue i en kvalitativ studie er vanskelig, og det må tas valg basert på flere hensyn. Et for lite utvalg kan føre til at det er vanskelig å generalisere resultater, mens et for stort utvalg kan føre til at man mister muligheten til de dyptgående og forstående intervjuene man søker etter. Det vanskelige, men samtidig enkle svaret, er at man skal intervjue så mange personer som er nødvendig for at man finner ut det man trenger å vite (Kvale & Brinkmann, 2015). Basert på vår problemstilling, våre ressurser og tiden vi hadde til rådighet falt valget på åtte intervjupersoner. Dette anså vi som et hensiktsmessig grunnlag for å undersøke studentenes opplevelser av det matematiske språket og deres relasjonsforståelse i dybden, samtidig som datamaterialet ikke ble for overveldende. Målet med oppgaven er ikke å kunne generalisere resultatene til alle studenter som tar MAT1100 eller lignende introduksjonsfag på høyere utdanning, men heller undersøke om det er noen aspekter ved denne overgangen som kan være interessant å forske videre på. Dette beskrives nærmere i delkapittel 3.7.3. Utvalget for den kvantitative analysen blir beskrevet i kapittel 3.4.

Selv om informantgruppen i vår kvalitative datainnsamling kan sees på som homogen i den forstand at vi har flere tydelige kriterier som må oppfylles for at intervjupersonene skal være aktuelle for forskningsprosjektet, må man også ta hensyn til grad av variasjon innenfor de kriterier som er satt (Johannessen et al., 2016). Vi ønsket å intervjue studenter fra forskjellige studieløp, da det kan tenkes at studenter som velger forskjellige emner og forskjellige studieløp ved universitetet også har forskjellige rasjonale og motivasjon for å arbeide med matematikken. På denne måten kan det argumenteres for en viss diversitet blant intervjupersonene.

Studentene som meldte interesse for prosjektet, fikk videre et par spørsmål av oss som omhandlet kriteriene beskrevet over. Dersom disse var oppfylt sendte vi dem informasjons- og samtykkebrevet (vedlegg 2) slik at de kunne gjøre seg litt mer kjent med prosjektet og lese hva det innebar å delta. De studentene som ikke oppfylte kriteriene, fikk beskjed om dette og samtidig en takk for at de meldte interesse. Deretter informerte vi de aktuelle kandidatene om hvordan vi hadde planlagt å gjennomføre intervjuet, for å forsikre oss om at informantene var komfortable med dette, særlig med tanke på smittevern. Om alt dette var greit for dem avtalte vi tid og sted for å møtes og gjennomføre intervjuet. Informantene fikk også utdelt telefonnummer de kunne nå oss på dersom det oppstod noe uventet før intervjuet eller at de ikke fant frem. Da vi hadde fylt opp kvoten på åtte intervjupersoner takket vi høflig nei til de resterende studentene som meldte interesse og takket for interessen.

## 3.3 Det kvalitative intervjuet

Til nå har vi begrunnet vårt valg av en kvalitativ tilnærming til forskningen. Videre vil vi argumentere for hvorfor vi har valgt akkurat intervju som hovedkilde for innsamling av datamateriale og videre for hvilken struktur vi benyttet oss av i det kvalitative intervjuet.

### 3.3.1 Struktur

De to vanligste metodene for datainnsamling i kvalitativ forskning er observasjon og intervju (Dalen, 2011). Innen utdanningsforskning ser man ofte på sosiale fenomener og hvordan disse oppstår eller utvikler seg. Slike fenomener er ofte komplekse og fulle av nyanser. Nyanser og subjektive refleksjoner rundt informantenes egne opplevelser er noe som er vanskelig å avdekke gjennom observasjon. Vi er opptatt av å beskrive studenter sin subjektive oppfatning av det matematiske språket gjennom en overgang mellom to utdanningsinstanser. Vi er også interessert i å avdekke noe av deres matematiske forståelse. Vi vil altså forstå temaet bedre gjennom intervjupersonens egne perspektiver, noe som gjør dybdeintervju til en velegnet metode (Kvale & Brinkmann, 2015; Tjora, 2017). Dette vil gi intervjupersonene mulighet til å beskrive deres egne synspunkter og vise deres egen forståelse knyttet til problemstillingen, om vi gjennomfører intervjuet på en god og hensiktsmessig måte.

Et kvalitativt intervju kan karakteriseres som en samtale med et formål og en struktur (Kvale & Brinkmann, 2015). Strukturen tilpasses etter hva som er formålet og kan variere fra det helt forhåndsbestemte hvor alle spørsmål er forhåndsdefinert, til en samtale hvor ingen spørsmål er fastsatt før intervjuet starter (Johannessen et al., 2016). En fordel med et strukturert intervju er at det er enkelt å sammenligne svar, men man mister samtidig friheten til å utforske og gå i dybden dersom intervjupersonen nevner noe som kan være relevant for forskningen. Ved et helt åpent eller ustrukturert intervju vil målet være at intervjupersonene skal kunne fortelle så fritt som mulig om deres livserfaringer (Dalen, 2011; Kvale & Brinkmann, 2015). Vi har valgt å benytte oss av det som omtales som en semistrukturert intervjuform, altså en mellomting mellom de to nevnt over. Et semistrukturert intervju gir oss muligheten til å standardisere spørsmål knyttet til forskningens tematikk, men samtidig fleksibilitet nok til å utforske interessante svar videre, bringe inn nye eller endre rekkefølge dersom dette er hensiktsmessig (Johannessen et al., 2016). Dette med mål om å forstå eller beskrive tematikk knyttet til oppgavens problemstilling.

### 3.3.2 Artefakter

Videre har vi valgt å komplementere vårt semistrukturerte intervju med det Bahn & Barratt-Pugh (2013) omtaler som artefakter. Artefakter kan være bilder, oppgaver eller fysiske objekter som bringes inn i intervjusituasjonen. Ved å bruke matematiske oppgaver som artefakt vil dette ifølge Goldin (2000) klassifiseres som et oppgavebasert intervju. Dette kjennetegnes for eksempel ved at intervjupersonen interagerer med både intervjuer og artefaktene. For vår del var det relevant å bringe inn artefakter i intervjuet av flere grunner. Ønsket vårt om å få et dypere innblikk i intervjupersonene sine refleksjoner rundt det matematiske språket, og samtidig analysere deres matematiske forståelse gjør artefakter aktuelt for intervjusettingen. Goldin (2000) beskriver videre at denne formen for intervju kan bidra til å gi innsikt i hva intervjupersonene kan og hvordan de begrunner sine matematiske refleksjoner. Videre er det viktig å ha fokus på prosessen intervjupersonen gjennomgår ved innføring av artefakter, ikke bare hva det konkluderes med. Våre artefakter bestod av den obligatoriske oppgaven studentene jobbet med i den gitte perioden (vedlegg 3), læreboken i MAT1100 ved UiO (Lindstrøm, 2016) og et ark hvor vi inkluderte to setninger og to definisjoner fra læreboken (vedlegg 4).

Tanken med å bringe inn den obligatoriske oppgaven var at intervjupersonene selv skulle få mulighet til å stille oss spørsmål knyttet til denne. På denne måten kunne vi, ved å ha god kjennskap til oppgavene, diskutere disse sammen med intervjupersonene. Videre kunne vi bruke diskusjonene til å utforske deres forståelse av matematikken og språket i oppgavene. Bruk av artefakter gir en mulighet til å stimulere samtale for intervjupersonene og kan fungere som en utvidelse av minnet (Bahn & Barratt-Pugh, 2013). Vi forventet ikke at intervjupersonene skulle klare å huske tilbake til alle tema og utfordringer de hadde møtt på i MAT1100 eller videregående skole. På denne måten vil bruk av læreboken være et verktøy som kan hjelpe dem å huske tilbake til, eller sette fingeren på interessante betraktninger og refleksjoner de har hatt gjennom kurset. Informantene kan gjøre begrepsbaserte tilnærminger mer konkrete ved å bla i boken, noe som kan bidra til å stimulere til diskusjon, refleksjoner og svar (Cohen et al., 2018). Det siste arket vi tok inn som artefakt i intervjuet var basert på fire utvalgte utklipp fra boken. Disse ble valgt ut basert på kriterier om at de inneholdt ulik grad av avansert matematisk språk, og dermed kunne bidra til å fremme intervjupersonenes erfaringer og refleksjoner rundt dette. Dette gir oss et mer konkret sammenligningsgrunnlag blant intervjupersonene siden disse komponentene kan inkluderes i alle intervjuene på en naturlig måte som følge av det semistrukturerte intervjuets form. Goldin (2000) omtaler dette som en styrke for oppgavebaserte intervju.

Å gjennomføre denne typen intervju stiller bestemte krav til oss som intervjuere. For det første krever det av vi har satt oss godt inn i innholdet. Vi må sørge for å være faglig oppdatert på temaene som kan bli diskutert, ha kjennskap til flere mulige tilnærminger og løsninger på oppgavene og være forberedt på en rekke mulige oppfølgingsspørsmål eller bruk av faglig støtte avhengig av hva intervjupersonene svarer (Bahn & Barratt-Pugh, 2013; Goldin, 2000). Videre påpeker Goldin (2000) at det er viktig å ta hensyn til graden av kompleksitet ved bruk av matematiske artefakter og er noe vi etterstrebet ved å ta inn utklippsarket med definisjoner og setninger som inneholdt forskjellig grad av avansert matematisk språk. Utklippene er også tatt fra sentrale tema i læreboken, slik at sjansen var større for at intervjupersonene skulle ha kjennskap til disse fra før av.

### 3.3.3 Tematisering – undersøkelsens hvorfor, hva og hvordan

Selv om det ikke kan lages noen standard prosedyrer for hvordan et intervju skal gjennomføres, vil man i følge Kvale & Brinkmann (2015) kunne finne en del fellestrekk gjennom de valgene og teknikkene som typisk blir brukt i prosessen. For det første må man som intervjuer ha en klar oppfatning av hva som er hensikten med intervjuene, noe som oftest handler om å belyse, utforske og forstå problemstillingen. Dette svarer til undersøkelsens «hvorfor», som vi beskriver i kapittel 3.1. Intervjuene våre har som mål å avdekke mest mulig av informantene sine egne erfaringer og opplevelser knyttet til problemstillingen. Både på et generelt grunnlag, hvor samtalen føres videre av intervjupersonenes egne betraktninger, men også mer spisset inn mot våre artefakter som bringes inn der det er naturlig. I alle faser av intervjuet er målet å stille gode og utdypende oppfølgingsspørsmål som bringer frem dypere refleksjoner fra intervjupersonene. For å best mulig forstå hva informantene uttrykker (undersøkelsens «hva») er det dermed essensielt at vi tar betraktningene nevnt i slutten av forrige delkapittel på alvor. Vi brukte dermed mye tid på å sette oss inn i det faglige og reflekterte rundt egne erfaringer fra tiden som ny student ved MAT1100 på universitetet. Dette ble også fokus gjennom piloteringen av intervju som vi vil beskrive nærmere i kapittel 3.3.4. Til slutt har vi som intervjuere satt oss godt inn i relevant teori knyttet til metode og intervjusituasjonen, slik at undersøkelsens design og metode (undersøkelsens «hvordan») er tilpasset formålet.

### 3.3.4 Forberedelse til intervju

En viktig del av et forskningsprosjekt er å planlegge godt (Dalen, 2011). Et ledd i denne planleggingen er å være best mulig forberedt på intervjusituasjonen og de faktorene som spiller inn i en slik setting. Videre vil vi beskrive våre valg knyttet til de faktorene som har direkte innvirkning på intervjuene vi gjennomfører. Disse handler om valg vi tar for at vi som intervjuere skal legge best mulig til rette for at intervjupersonene skal kunne svare så fritt, nyansert og utdypende som mulig, samtidig som svarene i størst mulig grad skal omhandle oppgavens tematikk (Kvale & Brinkmann, 2015).

Noe av det viktigste man gjør for å forberede seg til kvalitative intervjustudier er å gjennomføre prøveintervju (Johannessen et al., 2016). Ved gjennomføring av prøveintervju får intervjueren testet seg selv i rollen og kan gjennom tilbakemelding og analyse av egen gjennomføring gjøre justeringer slik at selve intervjuet gjennomføres på best mulig måte (Dalen, 2011). Manglende trening i selve intervjusituasjonen kan føre til at informanten blir negativt påvirket og at svarene man får farges av dette (Johannessen et al., 2016).

Vi gjennomførte tre prøveintervju. Disse intervjuene ble gjennomført på medstudenter som tidligere har tatt R2 på videregående skole og videre emnet MAT1100 på universitetet. På denne måten håpet vi å få samtaler som til en viss grad også var realistiske også for selve intervjuene. Siden vi skulle være to intervjuere til stede var det også viktig for oss at vi fikk definert og testet rollefordelingen vi skulle ha i intervjuene, slik at ikke dette ble et usikkerhetsmoment og forvirrende for intervjupersonene. Videre fikk vi gode innspill og diskusjoner rundt intervjuguiden, noe som hjalp oss til å reflektere rundt både spørsmål og aktuelle oppfølgingsspørsmål. Vi fikk også testet ut hvilke setninger og definisjoner som skulle bringes med som artefakter og diskutert hvorvidt disse var relevante for formålet. Goldin (2000) hevder at nettopp det å teste ut og vurdere om artefaktene er hensiktsmessige, samt å videreutvikle intervjuguiden, er å anbefale som forberedelse til en slik intervjuform.

Gjennom prøveintervjuene gjorde vi dermed noen justeringer på både intervjuguide og artefakter. Dette sammen med verdifull trening i å gjennomføre intervju gav oss en større trygghet rundt både det faglige innholdet og selve intervjusettingen. Vi fikk i tillegg testet utstyret for lydopptak slik at vi var trygge på at dette fungerte og at vi kunne behandle dette. Dalen (2011) anbefaler at man gjør dette for å redusere risikoen for at man i ettertid mister verdifullt materiale til oppgaven.

### 3.3.5 Intervju

Intervjuene ble gjennomført på et kontor på Matematisk institutt ved UiO, som igjen er i umiddelbar nærhet til lokalene hvor studentene har forelesning i MAT1100. For å gjøre det mest mulig bekvemt for intervjupersonene og med tanke på smittevern ble alle intervjuer gjennomført på samme dag som studentene hadde forelesning, og dermed allerede var på campus. Dette for at de skulle slippe å gjennomføre en ekstra reise for å delta i prosjektet. Kontoret ble innredet på en måte som gjorde at avstand mellom intervjuere og intervjupersoner ble opprettholdt, og det var håndsprit og desinfiserende middel tilgjengelig både ved inngang til bygget og på kontoret hvor intervjuene ble gjennomført.

Intervjupersonene ble møtt utenfor bygget hvor intervjuet skulle gjennomføres. På vei opp til kontoret ble det holdt en kort og uformell samtale som vi fortsatte etter at vi hadde entret kontoret. I denne samtalen fikk vi introdusert oss selv og opprettet kontakt med intervjupersonene. Det var også viktig for oss å påpeke hensikten med intervjuet og det ikke var en situasjon der intervjupersonene skulle bli testet. Vi forklarte at vi ønsker deres egne refleksjoner og opplevelser knyttet til spørsmålene og at de snakket så åpenhjertig og utdypende som de kunne. Gjennom denne uformelle praten og de nevnte presiseringene håpet vi å oppnå en avslappet og komfortabel atmosfære for intervjupersonen, noe Tjora (2017) nevner som en forutsetning for et vellykket intervju. Videre poengterer Johannessen et al. (2016) at en presentasjon av studien er med på å rette oppmerksomheten mot temaet som skal undersøkes.

Alle åtte intervjuene ble gjennomført på avtalt tidspunkt og varte mellom 40 og 60 minutter og det ble gjort lydopptak med utstyr godkjent av UiO sin personvernavdeling. Teknisk opptaksutstyr er noe som anbefales sterkt å benytte seg av i kvalitative intervjuer da dette gir intervjuer mulighet til å ha fokus på samtalen heller enn å notere eller vurdere hva som blir sagt (Dalen, 2011; Kvale & Brinkmann, 2015). Siden vi i hovedsak var ute etter å analysere deres opplevelser og refleksjoner rundt matematikk og matematisk språk fant vi det mest hensiktsmessig å bruke lydopptak. Det kan også tenkes at dette oppleves som noe mindre inntrengende for intervjupersonene og at de dermed føler seg mer komfortable enn hvis vi hadde brukt videokamera. Samtidig kan det tenkes at vi kunne fått enda bedre data dersom vi for eksempel hadde tatt videoopptak, da en av svakhetene med lydopptak er at det ikke får dokumentert ikke-verbal kommunikasjon (Johannessen et al., 2016).

Intervjupersonene ble tilsendt informasjonsskriv og samtykkeskjema da intervjuet ble avtalt, men ble også informert om sine rettigheter ved oppstart og bedt om å signere samtykkeskjema dersom de fremdeles ønsket å delta. Selve intervjuspørsmålene begynte med noen enkle introduksjonsspørsmål, før vi beveget oss inn på tematikken rundt overgangen mellom videregående skole og universitet og matematisk språk. Videre ble dette konkretisert enda mer da vi tok frem artefaktene og ba intervjupersonene reflektere rundt disse. Avslutningsvis ble intervjuene rundet av med spørsmål om det var noe intervjupersonene ønsket å tilføye.

Det må imidlertid påpekes at ingen av intervjuene var like, hverken i lengde eller oppbygning. Vi strebet etter å få stilt de mest sentrale spørsmålene til alle intervjupersonene, men på grunn av det semistrukturerte intervjuets natur er det vår oppgave som intervjupersoner å få til en meningsfull samtale som føles naturlig for intervjupersonen (Johannessen et al., 2016). Dermed stilte vi oppfølgingsspørsmål der det var relevant, og justere selve oppbygningen på intervjuet i forhold til hvordan intervjupersonene responderte. Særlig var dette en utfordring der hvor svarene var lange og inneholdt flere aspekter vi ønsket å høre mer om. Dette er viktig å nevne og ta hensyn til, særlig med tanke på den videre analysen (Kvale & Brinkmann, 2015).

Vi opplevde intervjupersonene som engasjerte og ærlige. Samtalen fløt for det meste lett og gjennom selve intervjuet virket det som om de fleste ikke tenkte noe over settingen de var i. Dette mener vi også kommer frem når vi i resultatkapittelet ser på hvordan intervjupersonene uttaler seg.

### 3.3.6 Transkribering

Å transkribere et intervju handler om å overføre en samtale fra verbal kommunikasjon til tekst. Dette er ikke en handling man skal ta lett på da det er transkripsjonen som videre legger grunnlaget for analysen gjennom å strukturere og synliggjøre samtalen (Kvale & Brinkmann, 2015). Etter gjennomført intervju startet vi transkripsjonsprosessen så fort vi kunne. Først hørte vi gjennom materialet en gang, før vi videre begynte å transkribere. Dette gjorde vi med en intensjon om å bli så godt kjent med innholdet i intervjuene som mulig, da vi var forberedt på at vi ikke ville kunne rekke å transkribere alt materiale i samme tidsrom som vi gjennomførte resterende intervjuer. Gjennom en overgang fra tale til tekst beskriver Johannessen et al. (2016) dette som en delvis rekonstruksjon av intervjuet. For at denne rekonstruksjonen skal bli best mulig er det fordelaktig at de som gjennomførte intervjuet også gjennomfører transkriberingen (Tjora, 2017).

Det er ingen standard for hvordan man skal transkribere, men det er forventet at transkripsjonene er hensiktsmessig for å få frem innhold og informasjon som er relevant for problemstillingen. Derfor må man selv gjøre valget om det er nødvendig å inkludere kroppsspråk, toneleie, tenkepauser, nøling og lignende (Kvale & Brinkmann, 2015). Vi valgte å transkribere intervjuene i sin helhet, men utelot samtidig transkripsjonskonvensjoner som kroppsspråk og toneleie, der det i stor grad er rom for tolkning. Dette gjorde vi siden det i hovedsak er meningsinnholdet i intervjupersonenes uttalelser vi er ute etter, og at deres refleksjoner og erfaringer rundt overgangen fra videregående skole til universitetet og det matematiske språket ikke farges i stor grad av dette. Vi valgte å inkludere tenkepauser for å fremheve hvor intervjupersonene trengte betenkningstid. Dette anså vi som særlig viktig da vi i løpet av intervjuene diskuterte en del matematisk innhold. Tenkepauser er noe Goldin (2000) poengterer at er en viktig del av arbeid med matematisk innhold i en intervjusituasjon. Intervjupersonene er gitt fiktive navn, og innhold som kan avsløre deres identitet er anonymisert eller utelatt. Intervjuene ble transkribert med følgende transkripsjonsnøkler:

| Tegn | Betydning |
|---|---|
| .. | Tenkepause |
| [...] | Utelatt del av sitat |
| « » | Intervjuperson siterer |
| [ ] | Vi tilføye kontekst |

*Figur 1: Transkripsjonsnøkkel.*

Slik figur 1 illustrerer, blir [...] benyttet dersom vi utelater deler av et sitat. Selv om intervjuene ble transkribert i sin helhet vil vi i noen tilfeller fremheve deler av et sitat og utelate deler som ikke har relevans i resultatkapittelet. [ ] blir benyttet dersom informanten for eksempel peker på en artefakt eller snakker om et tema i læreboken som ikke blir spesifisert gjennom tale. Hermetegn blir benyttet dersom informanten leser opp tekst hentet fra artefaktene eller hvis h*n siterer andre eller seg selv i tredjeperson.

## 3.4 Eksamensresultater

Som tidligere nevnt består studien vår av både kvalitative data i form av intervju og kvantitative data i form at eksamensresultater. Selv om det dermed kunne vært rimelig å omtale oppgaven som et multi-metodisk studium (Creamer, 2016), er det de kvalitative dataene fra intervjuene som danner grunnlaget for studien og eksamensresultatene blir brukt som et supplement til disse. Det kvantitative datamaterialet består av eksamensresultater for studenter som tok avsluttende eksamen i kurset MAT1100 høsten 2020 ved Universitet i Oslo.

Målet vårt ved å implementere disse resultatene er å se etter tendenser i eksamensresultatene og knytte dette opp mot funnene fra intervjuene. Oppgavesettet (vedlegg 5) består av 12 deloppgaver hvor studentene kan få 0 til 6 poeng per deloppgave. Ved gjennomgang av oppgavene var det spesielt en oppgave som skilte seg ut med tanke på resultater og som generelt sett virket til å utfordre studentene på en litt annen måte enn de andre oppgavene, nemlig oppgave 8 som blir beskrevet i detalj i kapittel 4.5. I oppgave 8 ble studentene utfordret til å sette opp et bevis for deriverbarhet. De måtte definere egne hjelpefunksjoner for å gjøre beviset generelt og kunne dermed ikke løse dette for et spesifikt sett av verdier.

Det var til sammen 446 studenter som tok den avsluttende eksamen. For å fremstille eksamensresultatene har vi gjennomført det Solbakken (2019) refererer til som univariat analyse, altså analyse med én variabel. Denne analysen gav oss mulighet til å presentere gjennomsnittlig poengsum på de ulike deloppgavene samtidig som vi kunne gruppere studentene etter hvilken karakter de ville fått på eksamen. Dette vil kunne gi oss et bedre bilde av vanskelighetsgraden på oppgavene, relatert til studentenes helhetlige prestasjon og ferdigheter i matematikken som undervises i MAT1100.

Et problem ved bruk av gjennomsnitt til å finne sentraltendens er at verdier som er veldig forskjellig fra de fleste andre kan endre gjennomsnittet drastisk (Solbakken, 2019). Slike avvik omtaler Solbakken (2019) som *«uteliggere»*. Eksempelvis kan det være mange studenter som er meldt opp til faget, men av ulike grunner ikke har fulgt undervisningen og forberedt seg til eksamen, men som samtidig velger å gjennomføre eksamen da dette ikke vil ha noen negative konsekvenser for dem. Dersom noen studenter scorer 0 poeng på en deloppgave, selv om flesteparten fikk 4 eller 5 poeng, vil gjennomsnittet kunne gi et falskt inntrykk av studentenes prestasjon på deloppgaven. Ved å samle studentene i grupper basert på karakteren de ville fått på avsluttende eksamen vil vi trolig få et mer realistisk bilde på hva sentraltendensen på de ulike deloppgavene er for de ulike karaktergruppene. Vi vil også trolig få færre uteliggere som påvirker gjennomsnittet.

Selv om dette kan sees på som et forsøk å gjøre studien mer generaliserbar er dette fortsatt en kvalitativ studie og eksamensresultatene er ment til å kunne støtte opp eller stille spørsmål ved funn fra intervjuene. Samtidig kan det tenkes at disse kvantitative dataene vil kunne gi oss en indikasjon på om flere studenter har de samme utfordringene knyttet til det matematiske språket eller overgangen til matematikk på universitetet som våre intervjupersoner. Om vi ser på rapportene fra TIMSS Advanced 2015 ser vi at det er omtrent 6000 elever som tar matematikk R2 på videregående skole hvert skoleår (Grønmo & Hole, 2016). Dermed er det rimelig å tro at en betydelig andel av deltakerne i MAT1100, skoleåret 19/20, nylig har gjennomført matematikk R2 på videregående. På denne måten kan vår analyse av de 446 studentene som tok avsluttende eksamen i MAT1100 høsten 2020 være med på å gi et lite innblikk i denne målgruppen. Utvalget på ca. 500 studenter som vi benyttet i den kvantitative delen av vår undersøkelse, inneholder dermed antakeligvis en ikke helt ubetydelig del av elevmassen som tok R2 skoleåret 19/20.

## 3.5 Analyseprosessen

Å analysere i forbindelse med forskning er en kontinuerlig og omfattende prosess. Allerede i gjennomføringen av intervjuene vil det være naturlig å analysere hva som blir sagt og vurdere dette. Dette vil i stor grad også gjelde for våre semistrukturerte intervjuer, hvor vi som forskere må lytte, analysere og finne mening i uttalelser, for deretter å vurdere hvordan intervjuet skal føres videre. I arbeidet med å transkribere intervjuene gjør man mye av det samme. Man danner seg tanker om hva som menes og sammenligner med andre sine uttalelser. Tolkninger oppstår kontinuerlig, både basert på egen forutinntatthet og gjennom tidligere forskning man har kjennskap til.

I dette delkapittelet vil vi gjennomgå og forklare hvordan vi gjennomførte analyseprosessen etter at datamaterialet var samlet inn og transkribert. Etter vi hadde transkribert de åtte intervjuene satte vi igjen med ens stor mengde data i form av tekst. Ifølge Grønmo (2004) innebærer dataanalysen i kvalitative studier å avdekke generelle eller typiske mønstre i materialet. For å få til dette, samt å danne seg en bedre oversikt over innholdet i et relativt stort datamateriale, er det fordelaktig å dele dette materialet inn i mindre biter (Grønmo, 2004; Kvale & Brinkmann, 2015).

### 3.5.1 Tematisk analyse og abduktiv tilnærming

Problemstillingen vår inneholder relativt mange elementer som vi ønsker å utforske. Vi er også ute etter å se etter sammenhenger mellom disse elementene. I stikkordsform er overgang, matematisk språk og forståelse mest fremtredende. Disse fungerer som en rød tråd også når det kommer til analysearbeidet vårt, og vi er videre ute etter å analysere informantenes uttalelser knyttet til overgangen mellom videregående skole og universitet og det matematiske språket. Samtidig vil det være behov for å tolke uttalelser knyttet til deres forståelse av det matematiske innholdet som diskuteres og deres oppfatning av det matematiske språket.

Hvilken analytisk tilnærming man velger for datamaterialet legger føringer for det videre arbeidet. For vårt datamateriale bruker vi i denne studien en tematisk analyse. Braun & Clarke (2006) beskriver tematisk analyse som en fleksibel og anvendelig metode for å analysere datamaterialet, med potensiale for å gi forskerne rike og detaljerte data. Metoden går ut på at forskerne aktivt søker etter, analyserer og tolker aspekter på tvers av hele datamaterialet. Videre blir de temaene som forskeren finner i datamaterialet, kodet eller tematisert i grupper. Gjennom en tematisk analyse vil det ikke være nødvendig å binde seg til et teoretisk rammeverk, og dette vil gi oss som gi forskere frihet til å forflytte oss mellom eksisterende teori og egne tematiske innslag (Braun & Clarke, 2006).

En tematisk analyse kan ifølge Braun & Clarke (2006) beskrives gjennom en sekstrinns analysemodell. Først gjør man seg kjent med datamaterialet. Deretter lager man en liste over de tema man finner datamaterialet før man identifiserer de overordnede temaene og koder tekstutdragene inn under de forskjellige tematiske kodene. I det fjerde steget går man gjennom alle de tematiske kodene med et kritisk blikk og sjekker om de passer med datamaterialet før man i det femte steget setter navn på kodene. Når dette er gjort kan man sette i gang med å skrive analysen (Braun & Clarke, 2006). Dette er en prosess som beskriver arbeidet vårt godt, selv om vi ikke gjennomførte analysen så trinnvis som beskrevet over. I så måte vil analysen vår beskrives bedre av hvordan Percy et al. (2015) beskriver grenen «constant comparison» innen tematisk analyse. Denne følger på mange måter prosessen beskrevet ovenfor, men har det aspektet at man gjennom hele arbeidet beveger seg frem og tilbake i datamaterialet for å finne sammenhenger og nye aspekter etter hvert som koder og tema utvikles.

Etter å ha satt oss inn i og lest transkripsjonene, begynte vi å lage forslag til koder og temaer vi fant igjen i datamaterialet. Kodingen ble for øvrig gjennomført i programmet NVivo 12. Vi hadde noen forhåndsbestemte koder som for eksempel «matematisk språk» og «rasjonale», mens de resterende temaene ble til i denne fasen. Dette vil vi utdype senere i dette delkapittelet når vi redegjør for vår abduktive kodeprosess. Etter at kodene var på plass begynte vi å systematisere informantenes sitater inn under temaet som beskrev disse best. Alle kodene ble kontinuerlig vurdert og revidert slik at vi kodene på best mulig måte beskrev tekstutdragene. Etter flere runder med koding og analyse begynte vi arbeidet med å beskrive funnene våre i resultatkapittelet.

Vi fant det naturlig å kode studentenes innspill angående matematisk språk og forståelse med en deduktiv tilnærming. Ved en deduktiv tilnærming har ofte kodene røtter i et rammeverk eller teori innenfor forskningsområdet og datamaterialet systematiseres igjennom disse kodene (Larsen, 2017). Som nevnt ovenfor startet vi analysen med noen fastsatte koder som pekte på ulike deler av det matematiske språket. Selv om disse kodene ikke har fundament i et spesielt rammeverk, ble de konstruert i tråd med diverse litteratur vi har lest angående matematisk språk og matematisk forståelse.

Når det gjelder å kategorisere studentenes opplevelse av overgangen og å søke etter sammenhenger mellom overgang, språk og forståelse finnes det lite tidligere forskning. Dette taler for bruken av tematisk koding (Braun & Clarke, 2006). Videre vil det være naturlig å søke etter slike subjektive opplevelser gjennom en induktiv tilnærming. En induktiv tilnærming kan sees på som motpolen til den deduktive. En induktiv tilnærming tar ikke utgangspunkt i noen bestemt teori, men forskeren er åpen for nye innspill og vinklinger underveis i forskningsprosjektet (Larsen, 2017). Larsen (2017) påpeker også at en induktiv tilnærming ofte brukes i beskrivende studier der problemstillingen er formet som et spørsmål. Vår induktive tilnærming av analysen kommer fram ved at vi ikke utelukkende tar utgangspunkt i et teoretisk rammeverk eller teori. Den kommer også frem gjennom at vi kontinuerlig reviderte og la til nye koder etter hvert som det dukket opp interessante og relevante aspekter i intervjuene. Dette beskriver også Percy et al. (2015) gjennom «constant comparison» i den tematiske analysen.

Selv om en induktiv og en deduktiv tilnærming er svært forskjellig, påpeker flere at mange studier veksler mellom en induktiv og en deduktiv tilnærming (Larsen, 2017; Percy et al., 2015). Det er tydelig at vi også veksler mellom en induktiv og en deduktiv tilnærming i vår studie. En slik veksling kaller Thagaard (2009) abduksjon. Abduksjon kan også knyttes til at forskerens teoretiske bakgrunn og empiri gir rom til fortolkning av datamaterialet og dens meningsinnhold (Thagaard, 2009). Empirisk sitter vi med kunnskap og vår egen forforståelse av det matematiske språket både gjennom det å ha studert matematikk selv, gjennom vår erfaring som lærere på videregående skole og gjennom å lese teori i forkant av oppgaven. Våre tolkninger, erfaringer og refleksjoner vil dermed sette preg på analysen. Dette kan problematiseres da ulike fortolkere kan finne ulike meninger i det samme intervjuet (Kvale & Brinkmann, 2015).

## 3.6 Etiske betraktninger

I all forskning hvor mennesker er involvert har forskerne et etisk ansvar og juridiske retningslinjer som skal sørge for at informantene og datamaterialet blir brukt på en verdig og forsvarlig måte (Befring, 2015; Johannessen et al., 2016). For å fremme en god vitenskapelig forskningspraksis har den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) utviklet retningslinjer for etiske vurderinger som bør tas når det gjennomføres et forskningsprosjekt (NESH, 2016).

Det stilles blant annet krav om fritt og informert samtykke for deltakerne i studien (NESH, 2016). Fritt og informert samtykke betyr at informantene selv skal få velge om de ønsker å være med i studien uten noen former for press eller ytre faktorer som påvirker informanten til å delta i prosjektet. Informanten skal også være informert om forskningsprosjektet og hva opplysningene skal brukes til. Det er ikke nok å bare gi informasjon angående forskningsprosjektet, forskerne er ansvarlige for at informasjonen er gitt, forståelig og forstått (Befring, 2015; Dalen, 2011). For å sikre at ingen følte seg presset til å delta i studien spurte vi ingen enkeltindivider direkte om å være med i forskningsprosjektet vårt, men vi reklamerte for prosjektet til alle studentene som tok MAT1100 kurset og lot de som ønsket å være med ta kontakt med oss. Informasjonsskrivet var vedlagt samtykkeskjemaet informantene måtte signere på. Dette fikk de utdelt på epost i god tid før intervjuet. Før informantene signerte samtykkeskjema fortalte vi også om prosjektet og hvilke rettigheter de har som deltakere.

Det stilles også krav til konfidensiell og anonym deltakelse (NESH, 2016). Dette innebærer at informasjon og datamaterialet behandler på en konfidensiell og trygg måte. Det stilles strenge krav til hvordan personidentifiserende data skal oppbevares. Vanligvis stilles det også krav om at forskningsdata skal være anonymisert slik at informantene ikke vil bli gjenkjent i datamaterialet eller oppgaven (Befring, 2015; Johannessen et al., 2016). Noen ganger kan dette skape konflikt med forskerens ønske om hvilke metoder som brukes i forskningsprosjektet. For eksempel kan dette påvirke studiens etterprøvbarhet (Befring, 2015). For å sikre informantenes anonymitet ble intervjuene transkribert og anonymisert i etterkant av intervjuet. Lydopptakene ble lagret på et trygt sted i henhold til UiO sin lagringsguide for personidentifiserbare data og slettet når transkripsjonen var ferdig.

I og med at vi ønsket å ta lydopptak av intervjuene og for å sikre at prosjektet vi hadde planlagt ble gjennomført på en etisk riktig og lovlig måte, meldte vi prosjektet til Norsk senter for forskningsdata (NSD). NSD vurderte prosjektet som godkjent og vurderingen kan sees i vedlegg 1. All behandling av datamaterialet har skjedd i tråd med det som ble meldt inn til NSD.

## 3.7 Studiens kvalitet

Forskningsarbeid krever at man tar hensyn til en rekke faktorer og retningslinjer, og valgene man gjør underveis vil være med på å bestemme kvaliteten på forskningen. En av grunnpilarene i forskning er at det skal være mulig for andre å følge den fremgangsmåten og de valgene som er gjort underveis i forskningsprosjektet. Det må vurderes og argumenteres for påliteligheten til datamaterialet som er samlet inn og behandlet, og om det materialet som er samlet inn stemmer overens med formålet for studien (Johannessen et al., 2016). Dette vil videre ha innvirkning på troverdigheten av resultatene som fremkommer (Dalen, 2011; Johnson & Christensen, 2012). Videre vil vi redegjøre for de valgene vi har gjort underveis i forskningsprosjektet.

I kvantitative studier er det vanlig å bruke begrepene validitet og reliabilitet for å drøfte studiens kvalitet. I kvalitativ forskning vil det derimot være mer komplisert å bruke disse begrepene, blant annet fordi kvalitative data vanligvis ikke er mulig å reprodusere på samme måte som kvantitative data (Dalen, 2011). I kvalitativ forskning har dette problemet blitt håndtert på forskjellige måter. Kvale & Brinkmann (2015) forteller at enkelte kvalitative studier har ignorert eller avvist spørsmål angående validitet, reliabilitet og generalisering på bakgrunn av at disse begrepene hindrer en kreativ og frigjørende kvalitativ forskning. Dette behøver ikke være et hinder. Lincoln & Guba (1985) argumenterer for at det finnes måter å vurdere kvaliteten også på kvalitativ forskning, selv om denne kan være noe mer abstrakt enn kvantitativ forskning. De peker på fire kriterier som kan være hensiktsmessige for å sikre god validitet i kvalitativ forskning, *troverdighet*, *pålitelighet*, *overførbarhet* og *bekreftbarhet*. Vi vil videre i dette kapittelet bruke disse begrepene for å reflektere over kvaliteten i vår studie.

### 3.7.1 Troverdighet

Troverdighet betegnes ofte som indre validitet i kvalitativ forskning og handler blant annet om metodene som blir brukt er egnet til å undersøke det som skal undersøkes, altså om metoden er egnet til å undersøke problemstillingen (Cohen et al., 2018; Kvale & Brinkmann, 2015). I vår problemstilling ønsker vi å finne ut hvordan matematikkstudentene opplever det matematiske språket. For å kunne fordype oss i dette og for å høre studentenes refleksjoner anså vi det som fordelaktig å benytte semistrukturerte intervjuer for å samle inn datamateriale. Som nevnt i kapittel 3.3.1, gir en semistrukturert intervjuguide en ramme for intervjuet som er med på å styre samtalen en ønskelig retning basert på problemstillingen, samtidig som forskerne kan komme med oppfølgingsspørsmål og grave dypere der dette er interessant. Det finnes flere måter å forbedre troverdigheten i kvalitative studier. Johnson & Christensen (2012) nevner blant annet at metodetriangulering kan styrke troverdigheten. Metodetriangulering går ut på å bruke flere forskere, metoder, datakilder eller teoretiske forankringer til å innhente eller til å se på resultatene (Johnson & Christensen, 2012). Selv om vi har supplert datamaterialet med en analyse av eksamensresultatene, er det de kvalitative intervjuene som legger grunnlaget for analysen. Vi anser altså ikke metodevalget vårt som metodetriangulering, men samtidig vil datamaterialet vårt bli mer troverdig dersom analysen av eksamensresultatene viser de samme tendensene som intervjudataene. Vi har derfor gjort det vi kan for å gi detaljerte beskrivelser i alle forskningsledd, samtidig som vi har vært bevisste på begge metodologiske tilnærminger sine svakheter (Creamer, 2016).

### 3.7.2 Pålitelighet

Pålitelighet kan sammenlignes med reliabilitet i kvantitative studier, det handler om hvilke data som brukes, hvordan datamaterialet blir samlet inn og hvordan datamaterialet bearbeides (Johannessen et al., 2016). Samtidig kan ikke påliteligheten i kvalitative studier diskuteres på samme måte som reliabiliteten i en kvantitativ studie, dette er på grunn av den begrensede muligheten for å reprodusere studien. Påliteligheten kan derimot styrkes ved at forskeren gir leseren en rik bekrivelse av konteksten og en åpen og detaljert beskrivelse av hele forskningsprosessen (Johannessen et al., 2016). Vi gjør derfor det vi kan for å forklare grundig hvordan vi gikk fram i forberedelse til intervjuene, i selve intervjuene og i analyseprosessen. Dette gjelder også vårt utvalg av artefakter inkludert i intervjuet, noe Goldin (2000) hevder er en viktig faktor for å gjøre forskning rundt matematiske oppgaver pålitelige. Disse detaljerte beskrivelsene kan dermed være med på å styrke påliteligheten i oppgaven vår.

Vår abduktive analyseprosess kan vurderes til å være noe problematisk, særlig med tanke på at vi ikke har tatt utgangspunkt i et tydelig rammeverk. Analyseprosessen er på mange måter basert på empiri og våre antakelser angående temaet samtidig som det også har røtter i tidligere forskning. Dette kan gi analysen en noe ustrukturert form, selv om vi anser dette som nødvendig for å ha en åpen nok tilnærming til problemstillingen.

### 3.7.3 Overførbarhet

Overførbarhet handler om hvorvidt resultatene fra et forskningsprosjekt kan overføres til andre liknende fenomener (Johannessen et al., 2016). Selv om vår studie bare har brukt åtte informanter er det rimelig å anta at flere studenter sitter med liknende oppfatninger og erfaringer knyttet til det matematiske språket, spesielt om det finnes funn som går igjen hos flere av informantene. Dersom funnene fra intervjuene og analysen av eksamensresultatene peker i samme retning mener vi også dette kan være en indikator på at flere studenter opplever noen av de samme utfordringene knyttet til det matematiske språket.

Utvalget vårt kan imidlertid også by på noen utfordringer tilknyttet overførbarheten av studien. Som tidligere nevnt ble det foretatt et bekvemmelighetsutvalg hvor vi informerte om forskningsprosjektet og de studentene som ønsket å delta tok kontakt med oss. Det kan tenkes at studentene som ønsket å delta i et slikt forskningsprosjekt og som tok kontakt med oss har noe mer sammenfallende rasjonale for å lære matematikk sammenlignet med den helhetlige sammensetningen av studentene på kurset. Det kan også tenkes at studenter som frivillig melder seg til et slikt prosjekt er studenter som har tro på egne ferdigheter og som føler seg komfortable med å åpne seg opp om sine refleksjoner og kompetanser om faget.

I tidligere forskning ser vi at overgangen fra videregående skole til universitetet har fått et større forskningsfokus i løpet av de siste 10-15 årene. Storparten av studiene utforsker sosiale eller institusjonelle sider ved denne overgangen. I vår studie har vi en noe mer spisset og faglig tilnærming enn hva vi finner i de fleste andre studier på temaet. Dermed kan funnene fra studien vår i flere tilfeller kunne overføres og knyttes sammen med funn fra andre studier angående overgangen fra videregående til universitetet, men sannsynligvis med en noe annen vinkling og dybde med tanke på matematisk språk. Det vil også være naturlig å tro at en slik studie vil kunne overføres til andre faglige områder enn matematikk, der hvor språket utvikles og profesjonaliseres ved institusjonelle overganger.

### 3.7.4 Bekreftbarhet

Ifølge Johannessen et al. (2016) er det i kvalitative studier ønskelig at forskerne bringer fram et mest mulig unikt perspektiv i studien. De påpeker også viktigheten av at funnene i studien må være et resultat av forskningen og ikke forskernes egne subjektive holdninger. Dette beskriver godt hva bekreftbarhet i kvalitative studier skal sikre. Det handler blant annet om at funnene i studien skal kunne bekreftes av andre forskere i liknende studier. Dette er generelt vanskelig å oppnå i denne type kvalitative studier, hvor hovedpoenget på mange måter er å beskrive «eksistensen» av et fenomen. For å sikre best mulig bekreftbarhet er det viktig at forskeren beskriver de slutningene og tolkningene som gjøres slik at leseren kan følge opp disse (Johannessen et al., 2016). Thagaard (2009) argumenterer dermed for at man bør inkludere det hun omtaler som fortolkende tilnærminger og rike beskrivelser. Dette går ut på at vi som forskere ikke bare må beskrive, men også tolke de fenomenene vi presenterer. På denne måten vil det komme tydeligere frem hva som er grunnlaget for våre tolkninger og hvordan vår forståelse kan ha innvirkning på disse.

I denne studien, hvor teorien ikke er forankret i et spesielt teoretisk rammeverk blir dette særlig viktig. I resultatkapittelet er det derfor et tydelig skille mellom hva som er transkripsjonsdata fra intervjuene og hva som er våre tolkninger som forskere. Cresswell & Miller (2000) påpeker hvor viktigheten av at forskerne opplyser leserne om sin førforståelse og hypotesene. I innledningen har vi derfor gjort rede for vår tilknytning til forskningsfeltet og hvilke tanker vi hadde gjort oss angående funn før vi begynte studien. Dette håper vi tydelig signaliserer vår posisjon knyttet til problemstillingen vi har valgt oss.

# 4 Resultater

I dette kapittelet vil vi presentere resultatene av intervjuene og tolke disse. Funn fra tre av intervjuene presenteres mer inngående enn de resterende fem. Dette gjør vi fordi vi ønsker å få tydelig frem hvordan vi har jobbet i intervjusituasjonen og gjennom analysearbeidet. Vi håper også at dette vil gi leseren en mulighet til å danne seg er bedre bilde av studentene som beskrives, og videre et innblikk i hvordan de oppfatter overgangen mellom videregående skole og universitetet med hensyn på matematisk språk og deres matematiske forståelse. De fem resterende intervjuene blir presentert noe mer kortfattet og komprimert, hvor vi i mindre grad presenterer funn som gir et innblikk i studentenes helhetsbilde, men heller fokuserer på de funnene vi anser som mest relevant for å belyse problemstillingen. Det er viktig å presisere at alle intervjuene følger samme metodikk, noe som også beskrives i metodekapittelet ovenfor.

Resultatene som legges frem er ment for å belyse problemstillingen vår «*Hvordan opplever matematikkstudenter det matematiske språket i overgangen fra videregående skole til universitetet, og hvilken rolle spiller dette i studenters utvikling av relasjonsforståelse i matematikk?».* Det vil altså i hovedsak drøftes funn som belyser aspekter ved matematisk språk, studentenes matematiske forståelse og rundt deres opplevelse av overgangen til universitetet.

Respondentene tar alle MAT1100 ved UiO, men har valgt forskjellige studieretninger. Dette kan være nyttig da det viser at MAT1100 er et emne som dekker flere studieretninger og på den måten også får frem en mer variert studentgruppe med tanke på bakgrunn og interesser enn hva som kunne vært tilfellet på et mer spesialisert matematisk kurs. Alle studentene er gitt fiktive navn slik at personvern opprettholdes.

## 4.1 Student 1 (Per)

Per går på bachelorstudiet Fysikk og astronomi og sier selv at han til en viss grad er interessert i dette, men at han egentlig er mer interessert i filosofi og politikk. Selv om Per har en interesse for fysikk og astronomi valgte han ikke et realfagligstudium kun basert på interesse, men jobbmuligheter og studiens nytte hadde også en innvirkning:

> *Jeg er litt interessert. Eller det er mer som det beste alternativet, men det er ikke det jeg er mest interessert i.*

Dette kan knyttes til Per sitt rasjonale for studievalg. Ved å gjøre et valg basert på nytte i fremtiden heller enn kun personlige interesser kan det tyde på at Per handler ut både det instrumentelle- og det sosiale fornuftsgrunnlaget, slik det er beskrevet av Mellin-Olsen (1981). Videre forteller Per om sitt forhold til matematikkfaget:

> *Det er gøy å løse oppgaver for eksempel. At du har en ny oppgave hver gang gjør det mer spennende enn andre fag hvor du må skrive hele tekster på flere hundre ord eller pugge. Det er også bare et svar, og det liker jeg.*

Basert på disse uttalelsene og den neste finner vi indikasjoner på at Per er relativt oppgaveorientert. Det virker ikke som om det er de matematiske ideene og prosessene som er interessante for han, men heller det å løse oppgaver. På spørsmål om hvilke oppgaver han liker best å jobbe med sier han følgende:

> *Hvis jeg jobber alene så liker jeg oppgaver som «bestem integralet» og mer regning og sånn. Men det er mer matte, mer praktisk matte enn det er teori. Jeg liker ikke oppgaver som sier «la f være kontinuerlig, vis at den er».. Jeg vet ikke... «det finnes et punkt der som er et element i..» det liker jeg ikke. Jeg må tegne grafer og sånn og tenke hele tiden. Jeg liker mer automatisert matte der du må regne algebra og du vet hva du skal og du gjør det. Og du viser at du kan algebra, du kan derivere og du kan alt dette her.*

Det kommer tydelig frem at det å løse ferdig oppstilte regneoppgaver uten for mye bakgrunnsinformasjon og teoretiske vinklinger er hva studenten foretrekker. Vi får et inntrykk av at hans tilnærming til matematikken kan sammenlignes med hvordan man spiller mange dataspill. Han løser konkrete oppgaver og går videre til en ny utfordring. På bakgrunn av dette utsagnet vil det være rimelig å anta at Per ikke søker etter sammenhenger og helhetlig forståelse av de matematiske egenskapene han jobber med. Per har videre et utsagn som på mange måter virker til å definere hans forhold til matematikk:

> *Jeg liker matte. Ikke matte i seg selv, men det å løse oppgaver.*

Dette er en tydelig indikator på at Per i hovedsak liker å holde seg til det vi har omtalt som en instrumentell tilnærming til matematikken, der denne spill-baserte tilnærmingen er dominerende i arbeidet hans. Samtidig gir neste utsagn grunnlag for å tro at han i noen tilfeller også jobber noe mer relasjonelt dersom han arbeider sammen med andre. Vi mener det er en naturlig tilpasning dersom han må forklare eller sette ord på hvordan han forstår og løser matematiske utfordringer:

> *Jeg liker å jobbe med andre. Når jeg setter ord på matte så sitter det bare fast. Når jeg prøver å beskrive et uttrykk eller noe, eller når jeg forklarer til noen så lærer jeg best egentlig.*

Når Per snakker om hvordan det er å jobbe sammen med andre i matematikkfaget kan det virke som om hans tilnærming til matematikk skifter fra denne prosedurale, oppgavebaserte tilnærmingen til at det å snakke om matematikk og uttrykke matematikken med ord blir viktigere. Han sier blant annet at det er når han utrykker matematikken med egne ord han lærer best og at det er da matematikken sitter igjen hos han. Dette kan tyde på at Per tilnærmer seg matematikken på en instrumentell måte når han jobber alene, men at han beveger seg over til en mer relasjonell tilnærming når han samarbeider med andre. Se kapittel 5.
Videre forteller Per om sin opplevelse av overgangen fra matematikk på videregående skole til matematikk på universitetet:

> *Nei, altså alt i R2 var egentlig ganske straight forward. Det var liksom ikke noe mystisk gjennom hele faget. Det merket jeg særlig når jeg kom hit [Universitetet i Oslo]. Med den overgangen merket jeg slik at det her var bare tull, det var ikke helt.. Det var straight forward på videregående. Vi måtte ikke bevise alt vi kunne liksom. Vi*

*trengte ikke det. Eller, det var ikke i boken en gang å måtte bevise det, og læreren går gjennom bevisene.*

Dette kan tyde på at Per anser matematikken de hadde på videregående skole som forenklet sammenlignet med det han nå lærer på universitetet. Han påpeker også forskjellen i bevisbruk på videregående skole og på universitetet. Videre finner vi utsagn som kan antyde at Per ikke ser nytten og verdien av beviser i matematikken:

*Her [UiO] er det bare å gi meg noe som ligner på.. ikke så lett, men si* $1 + 1 = 2$ *og bevis det, og så bruker de liksom 15 minutter på å bevise dette på grafer og sånn og algebraisk, så jeg mener det bare tar tid og det er vanskelig å følge med på slike bevis og sånn.*

Per syntes altså det er vanskelig å følge med på slike bevis og han sier at det «bare tar tid». Dette kan tyde på at det instrumentelle fornuftsgrunnlaget er til stede uten det sosiale fornuftsgrunnlaget. Det kan også tyde på at Per opplever matematikkspråklige utfordringer, da han sliter med å følge disse bevisene. Det vil være naturlig å tenke på dette i sammenheng med både symbolbruk, begreper og presisjon som brukes for å bevise slike matematiske egenskaper. Vi vil også påstå at det kreves en relasjonell matematisk forståelse for å se og forstå hvorfor vi trenger slike bevis og hvorfor de er holdbare, slik Niss & Højgaard (2002) beskriver i sin argumentasjon for tankegangskompetanse. Videre forteller Per at bevisene i boka ofte forvirrer han og at det dermed blir vanskeligere å løse oppgaver:

*Ja, jeg tenker sånn ofte i forelesningen, men når jeg skal løse oppgaver så er det sånn at bevisene gjorde til at jeg tenkte det var vanskeligere enn det faktisk var for når jeg prøver å løse det selv eller ser i boken og ignorerer eller ser bort fra bevisene og heller ser på eksempler, så ser det eller det blir mye lettere.*

Det er igjen rimelig å tenke at dette kan kobles opp mot Pers instrumentelle tilnærming til flere av de matematiske oppgavene, hvor algoritmene følges og det er følgelig ikke så vanskelig å finne svaret. Det er også sammenfallende med hvordan vi etter forrige sitat påpeker den relasjonelle forståelsen og språkmestring, da en intuitiv forklaring i mange tilfeller ikke vil være holdbar i et mer formelt og presist matematisk perspektiv. Da vi spurte om han hadde noen utfordringer eller noe som var gjorde matematikken på universitetet vanskelig for han svarte han følgende:

> *Matte her er jo mer presisjon. [...] Det blir på en måte slik at bevisene er mye viktigere nå. Altså matte er.. Her er det fremstilt som noe som gir mening, eller skal gi mening i hvert fall, mens matte R2 er mer det at de har litt mindre forklaring og beviser. Det er litt mer «det er sånn her du gjør det». Bare gjør det, på en måte.*

Det kan altså tyde på at Per på videregående kunne tilnærme seg matematikken mer instrumentelt og algoritmisk uten store problemer, men at han nå på universitetet behøver å tilnærme seg matematikken på en mer relasjonell måte. Det er naturlig å tenke at Per opplever et større krav til å kunne se sammenhenger og argumentere matematisk nå som han har begynt på universitetet. En ting Per trekker fram som ekstra utfordrende er bruken av epsilon og delta for å bevise kontinuitet:

> *Mener du bruk av epsilon? Ja, den var helt forferdelig og den glemte jeg å nevne. Det er egentlig det vanskeligste vi har jobbet med. Særlig det å skulle sette seg ned og forstå det. Jeg kan forstå det grafisk, men det å sette seg ned å løse slike oppgaver var veldig, veldig lite intuitivt for meg. Alt som skjedde, altså jeg kan løse mange av oppgavene, men jeg vet egentlig ikke hva jeg gjør.*

Per virker enda ikke til å ha fått et skikkelig innblikk i hvordan man argumenterer for kontinuitet. Likevel sier han for at det er oppgaver han kan løse innenfor temaet. Dette mener vi gir indikasjon på at han i hovedsak vektlegger resultatet av oppgavene heller enn å forstå teorien. Om vår tolkning stemmer har vi en ny tydelig indikator på en instrumentell tilnærming. Samtidig sier Per at han forstår bevisene grafisk. For å forstå hva kontinuitet er grafisk krever det en form for relasjonell forståelse. Per sier også at dette er der vanskeligste de har jobbet med så langt. For å finne ut hva som gjorde dette vanskelig for Per spurte vi om det var det å løse oppgavene eller det å forstå beviset som var vanskelig:

> *Å forstå teorien. Jeg vet ikke hvorfor vi gjør det på en måte. Jeg vet ikke hvorfor vi tar «$h = x - a$» for eksempel. Hvis du viser meg en graf så kan jeg si «å ja, selvfølgelig er det slik fordi det er så lite, eller fordi den «går sånn». Men når jeg løser den og jeg prøver å tenke grafisk, uten at noen forklarer det til meg, så blir det litt vanskelig for*

*meg. Jeg vet ikke hvorfor. Det har nok vært det vanskeligste for meg hvis vi ser fra R2 til universitetet så langt.*

Per sier en av utfordringene er å forstå teorien. Selv om han virker til å ha kunnskap om hva en kontinuerlig funksjon er, altså en form for relasjonell forståelse, gir han uttrykk for at definisjoner som dette fremdeles er vanskelig for han. Dette kan ha en sammenheng med Pers oppgaveorienterte holdning til matematikkfaget. Det kan også tenkes at den symbolholdige fremstillingen av matematikken gjør Per usikker, slik han fremstiller sine holdninger til grafiske illustrasjoner sammenlignet med skriftlige/symbolske representasjoner. Tidligere nevnte Per at han ofte så bort fra bevisene og forklaringene og heller brukte eksemplene som hjelp når han skal løse oppgaver, noe som kan tyde på det samme. For oss virker det altså sannsynlig at det matematiske språket og presisjonen i hvordan matematikken blir framstilt byr på utfordringer for Per, noe hans neste uttalelse bekrefter:

*Du må være veldig presis på alt hele veien. Du må ha definisjoner som kanskje kunne ha vært veldig forenklet. Og jeg skjønner at vi må det, men det er det som gjør det vanskelig for meg.*

Videre spurte vi Per om han følte det var en forskjell i der matematiske språket som ble brukt på videregående og det som blir brukt i MAT1100:

*Hmm.. Ikke så veldig forskjellig fra videregående egentlig. Du får bare bruk for supremum og noen begreper som minste øvre skranke og sånn, mens på videregående var det mer å si at det punktet som kommer før der.. Ja, altså det var litt mindre faglig språk, men mer intuitivt for meg. Så her, når foreleser sier for eksempel «minste øvre skranke» så forventes det at man forstår hva dette er, selvfølgelig, mens på videregående så bruker man å si det for hva det er. Altså bruke litt flere ord på å beskrive hva som skjer. Men det er ikke så praktisk nå, fordi man sier egentlig mer man trenger. Samme som den deriverte, så forklarte man nesten hver gang hva man mente med den deriverte på vgs.*

Vi tolket dette som at Per opplevde språket på videregående som noe mer hverdagslig og at presisjonen var blitt viktigere på universitetet og spurte Per om vi hadde forstått han riktig:

*Ja, absolutt. Men det føler jeg er en god overgang. Det er ikke vanskelig når man blir vant til det. Man gjør matte mer matematisk på en måte. Jeg føler meg mer som en matematiker når jeg løser oppgavene. Ved å være presis og alt det der.*

På bakgrunn av de to siste uttalelsene er det rimelig å tro at Per opplever at forventningene til hans matematiske språkkunnskap og begrepsforståelse er høyere enn de var på videregående skole. Samtidig kan virke som at overgangen til et mer formelt matematisk språk hvor det er lagt mer vekt på presisjon og formuleringer motiverer Per ved at han føler seg mer som en matematiker. Videre spurte vi Per hva han syntes var vanskeligst med ulike bevis:

*[...] Dette er en av mine største utfordringer. Ulikheter. Hvordan man jobber med ulikheter, og hvordan man tar en variabel som er lik noe i ulikheten og substituerer det for eksempel. Da kan du anta at nå er den større eller mindre enn den. Skjønner dere? Når du modifiserer ulikheter for å støtte beviset. Da mister jeg tråden. For eksempel i 5.3 [kapittel i læreboken] er det en del teori for hvordan man skal vite om en funksjon er oppad begrenset, avtagende og sånne ting. Og så må du bruke induksjon og ulikheter. Det sliter jeg med. Jeg kan løse oppgavene, men jeg skjønner ikke helt hvorfor jeg gjør hvert trinn.*

Per nevner blant annet at ulikheter er en utfordring for han, og at han kan løse oppgaver, men at han ikke skjønner helt hvorfor han gjør de ulike trinnene. Dette til tross for at ulikheter er noe studentene har jobbet med på videregående. Dette kan igjen tyde på en instrumentell tilnærming til bruken av ulikheter i matematikken. Deretter fikk vi mulighet til å undersøke nærmere hvordan det matematiske språket påvirket Per da han bladde seg frem til definisjon 4.3.3 i læreboken til MAT1100:

*Intervjuer: Men for eksempel så kan man i bevis finne antagelser om at man må ha en kontinuerlig funksjon på det lukkede intervallet* $[a, b]$ *og så bruker de for eksempel ofte ordet «hvis og bare hvis» eller «slik at» i matematiske bevis. Hva tenker du når du hører eller leser noe slikt?*
*Per: Det er greit. Men jeg vet ikke hva forskjellen er på hvis det er sånn, eller forskjellen på en pil sånn [implikasjon], eller to piler sånn [ekvivalens].*

Ut fra dette virker det rimelig å anta at Per ikke har full kontroll på matematiske symboler og deres betydning. Som han selv beskriver, er implikasjon og ekvivalens noe han ikke er sikker på. Siden disse symbolene presenteres tidlig i videregående matematikk er det naturlig å tro at dette ikke er de eneste symbolene Per finner utfordrende. Avslutningsvis spurte vi om det er noe han skulle ønske han lærte på videregående for å gjøre overgangen lettere:

> *Ja, grafer. Jeg mener det er bedre for å forstå ting. For alt i alt så er matematikk bare symboler man ser på tavla, men hvis man har en graf kan man ofte se veldig godt hva disse symbolene beskriver. Hva vil det si å ta derivere? Hvis man kan se det for seg mener jeg det er enklere å forstå det. Da er det enklere for meg å se tangenten i et punkt enn å forstå tallet man får om man deriverer matematisk.*

Per sier altså at de burde jobbe mer med grafer og forklaringer på videregående skole. Vi tolker dette som at han ønsker å gå fra en instrumentell tilnærming til en mer relasjonell tilnærming der man forklarer og visualiserer hva som skjer i matematikken.

## 4.2 Student 2 (Gro):

Gro studerer til bachelorgrad gjennom studieprogrammet fysikk og astronomi ved universitetet i Oslo. Hun har hatt to års pause fra skolegang hvor hun har jobbet mens hun har fundert over hva hun har villet studere. Valget av studie baserte seg ifølge Gro på hennes interesser:

> *[...] Jeg stod mellom statsvitenskap og fysikk så det var jo ganske liksom spredt, men det var jo ikke egentlig noe mer enn at jeg hadde fysikk på videregående og syntes at det var gøy og hadde lyst til å prøve ut det. Jeg har ikke veldig liksom noe plan.*

Her er det rimelig å si at Gro beskriver en indre motivasjon for valg av studieretning.
Når vi så begynner å snakke om matematikkfaget så sier Gro at hun ikke var så veldig glad i matematikk på barneskolen, men at det skjedde en endring da hun kom opp til ungdomsskolenivå:

*Jeg hadde en fantastisk mattelærer på ungdomsskolen og følte at det egentlig gjorde veldig mye. Og da oppdaget jeg også at jeg var ganske god i matte og det gjorde jo det at jeg ble liksom ganske motivert til å ta det ordentlig på videregående.*

Hun peker altså på mestringsfølelse, sammen med lærere som hjalp henne til å oppnå denne. Videre presiserer også Gro at hun kom inn i et trygt læringsmiljø der elevene ønsket å lære matematikk og hvor hun ikke følte det var skummelt å stille spørsmål eller gjøre feil. Gro utdyper hva hun mener lærerne gjorde som hjalp henne videre i matematikkfaget:

*[...] Jeg følte også at vi hadde lærere som var veldig gode på å forklare ting og ikke ta for gitt at alle skjønte akkurat det som, at alle ikke tenkte likt, at alles hoder ikke funker likt. Særlig tenker jeg at det er veldig viktig i matte fordi det gjør jo ikke folk og folk trenger å høre det på ulike måter...*

Gro gir oss altså et innblikk i hennes forståelse av matematikk som fag. Hun erkjenner at det ikke nødvendigvis bare er én måte å tilnærme seg og forstå matematikken på, og roser lærerne for å ta hensyn til dette. Vi tolker dette i den retning at Gro har en form for relasjonell tilnærming til faget. I stedet for å lære seg en metode virker det som om Gro søker etter en tilnærming hvor hun forstår hvordan matematikken er bygd opp for deretter å kunne anvende den. Dette inntrykket forsterkes når hun videre beskriver hvilke matematikkfag hun likte best på videregående og hvorfor:

*Jeg syntes R2 var gøy for da begynte det liksom å bli litt mer, jeg følte litt at 1T og R1 så var det litt mer sånn da lærte man bare metoder for å komme til ting, da lærte man liksom grunnleggende derivasjon, grunnleggende og alt det der. Mens i R2 kunne man faktisk anvende det til å, at det ble litt mer abstrakt på et vis. [...]*

Etter at Gro kom til universitetet gir hun uttrykk for at det har vært utfordrende å ha samme tilnærming til matematikken. En av grunnene hun peker på er overgangen fra klasserom til forelesningssal:

*På videregående så var det jo en mye tettere oppfølgning [...] først går læreren gjennom ting så gjør man oppgaver i timene som gjorde at man kan spørre læreren* *om ting der og da, mens på universitetet er det mer at man sitter i en forelesning og så snakker foreleseren i to timer.*

Gro opplever altså det mange andre studenter også gjør når de tar steget fra videregående skole til universiteter. Nemlig at man mister noe av den tette og personlige oppfølgingen hvor den faglige støtten fra en lærer er i umiddelbar nærhet. Særlig påpeker hun at det er uvant og vanskelig for henne å omstille seg fra timene på videregående hvor hun ofte opplevde en fordeling mellom teoretisk gjennomgang og utprøving av teorien gjennom oppgaveløsning:

*Matte føler jeg er jo et fag som man må prøve på, jeg må, jeg klør litt i fingrene til å gjøre det selv jeg kan ikke liksom bare se på foreleser regne ut ting, jeg må, jeg er nødt til å liksom prøve å gjøre det selv. Og det føler jeg må skje ganske fort, så jeg må liksom rett etter forelesning egentlig sette meg ned å prøve og liksom, okei hva var det vi gjorde nå. Så jeg tror veldig at man må ha, at man må ha en blanding der, matte er jo ikke et fag man kan lære med å bare høre på.*

Det er naturlig å tro at en slik tilnærming til arbeid med matematikk er noe som gjelder mange studenter. Anvendelse av teori gjennom oppgaveløsning er nå mer opp til studenten selv da dette ikke er en del av undervisningen i samme grad som på videregående. Gro kan se ut til å anerkjenne nytten av det å koble teorien opp mot anvendelse, noe som igjen kan være en viktig faktor for å fremme relasjonell forståelse. Videre peker hun også på at hun føler kravene som stilles til henne og arbeidsmengden har økt etter at hun kom til universitetet. Dette resulterer i at hun ikke alltid får disponert tiden sin slik hun ideelt sett ville ha gjort for å lære seg matematikken:

*Ideelt sett så har jeg jo på en måte overskudd og tid til å sette meg ned rett etter forelesning og gjøre ting. Men så er det jo ofte at det ikke blir helt sånn at man på en måte, man henger seg jo ofte opp i ting som faktisk må gjøres istedenfor, som obliger.*

Denne uttalelsen tar henne inn på hvordan både faglig nivå og ikke minst hvordan det matematiske språket har vist seg å utfordre henne. Særlig i de tilfellene hvor hun nå skal jobbe med fagstoffet alene:

*På videregående så følte jeg at det var kanskje det var egentlig ingen tema på videregående som var så vanskelig at jeg ikke klarte å lære meg dem selv. Mens her så har det vært noen som har vært det som jeg bare har måttet si at liksom dette klarer jeg ikke i kveld, dette må jeg gi opp, dette må jeg spørre noen andre om i morgen. Og det blir vel sikkert, når ting blir vanskeligere så skjønner man etter hvert at det går jo ikke an å bare lese seg til. Og at det er jo sikkert også ganske, altså at Kalkulus-boka tar jo mye mer snarveier enn det matteboka på videregående gjorde. Det er jo mye mer sånn hva skjedde mellom disse to linjene?*

Det kan virke som om Gro har opplevd en endring, ikke bare i faglig nivå, men også i hvordan matematikken fremstilles. Der hvor matematikken ble forklart trinnvis og hvor hvert steg i prosessen ble forklart og begrunnet på videregående, blir det nå forventet at studentene i noen tilfeller selv ser hva som blir gjort av matematiske utregninger, eller «snarveier» som Gro nevner. På denne måten blir det i MAT1100 en større forventning om at studentene viser en helhetlig og relasjonell forståelse til utledninger og eksempler enn hva studentene kanskje er vant med. Dersom man ikke har denne forståelsen, men heller en mer instrumentell tilnærming til temaet kan dette være nok til at man mister tråden i det matematiske resonnementet. Det er også rimelig å tro at både sviktende bakgrunn- og språklige problemer i algebra vil spille inn når det kommer til «fylle ut» og forstå mellomregninger som gjøres. En annen ting som kan tyde på instrumentell forståelse er når teori og anvendelse av matematikken ikke henger sammen for studenten:

*Alt er mye mer sånn vevd sammen på videregående følte jeg. Mens her er det litt mer sånn separert, det er veldig tydelig her at det liksom at teorien er noe, også er oppgaven noe annet, fordi i forelesning går vi bare igjennom teori i to timer også er det at man på en måte skal prøve å bruke dem selv.*

Gro viser selv til at hun forstår at det har skjedd en endring og at dette er noe som er opp til henne å jobbe med. Hun setter ord på dette på følgende måte:

*[...] på universitetet så er det liksom ikke så mye sånne mellomskrivinger, det er litt sånn du får den teorien sånn som den er og hvis du ikke på en måte, det er liksom ikke matten som tilpasser seg deg det er vi som må tilpasse oss matten.*

Når vi går mer i dybden på hva Gro egentlig mener med uttalelsen over, kommer det indikasjoner på at det språklige aspektet kan fremstå som et hinder for henne. Krav om presisjon, symbolbruk og begreper gjør til at hun rett og slett ikke klarer å henge med på de matematiske resonnementene som legges frem i faget. Særlig kom dette frem da vi snakket om grenseverdier hvor bruken av epsilon og delta raskt ble et tema:

> *[...] Så er det nok litt det med epsilon-delta at man har jo aldri hørt om det før, også tror jeg i hvert fall i mitt tilfellet så ble det veldig mye konstanter, det ble veldig mye tall og det blir veldig mye bokstaver som jeg ikke helt klarte å plassere. At i de tekstbevisene så var det mye sånn, «vi setter en n mindre enn m på tallinja der større en null, finnes det da en epsilon større enn», også ble det bare veldig mye sånn jeg skjønte ikke hva n representerte, jeg klarte ikke å plassere m, jeg skjønte ikke helt hva, altså jeg skjønte ikke helt de forholdene der, det var liksom mange ting som jeg ikke hadde noe forhold til.*

Videre beskriver hun slike situasjoner i forelesning:

> *Foreleser er veldig opptatt av at alle beviser skal være riktige det skal ikke være noen snarveier i bevisene. [...] at det skal ikke være noen snarveier og at ting kan jo bli veldig teknisk at det kan bli veldig sånn typ når man skriver en hel side med veldig notasjon også skjønner man egentlig ikke hva det betyr. Også er han jo veldig god på å etterpå si den intuitive forklaringen, da blir man jo litt sånn, men hvorfor trenger man egentlig alle de greiene rundt, kunne man ikke bare hatt de intuitive.*

Gro gir inntrykk av å kunne følge argumentene til foreleser når han beskriver matematikken som skal bevises. Den «intuitive» forklaringen blir ofte gjort ved at man gjør et matematisk fenomen mer visuelt for studentene. Man viser dem hva og hvorfor man må argumentere så presist og rigid for at det skal bli korrekt matematisk. Likevel viser det seg at notasjon, symbolbruk og presisjonen i disse bevisene gir Gro problemer allerede når bevisene presenteres for henne. Altså vil være naturlig å tro at det bli enda vanskeligere om hun skulle utledet eller benyttet seg av et slikt bevis selv. Dersom denne utfordringen melder seg viser det seg at Gro har en kortsiktig løsning. En tilnærming hun tenker vil gjøre nytten med tanke på målet hennes om å gjøre det bra på eksamen og som indikerer at det instrumentelle fornuftsgrunnlaget er det mest fremtredende:

*[...] For av og til tenker jeg jo litt at jeg hadde lært mer av å bare sitte å gjøre oppgaver alene fordi jeg veldig ofte når jeg går ut av forelesning så er jeg ganske forvirra fordi det er så utrolig mye også blir jeg litt sånn å herre gud må jeg kunne alle de tingene, men så er jo 90% av de tingene bevis som er jo nyttige å se på, men det er ikke noe jeg fokuserer så mye på fordi mitt hovedfokus er jo å stå på eksamen, selv om jeg er interessert i matte så blir jo det litt sånn man fokuserer på det man må kunne på eksamen og det er ikke de store bevisene.*

Med andre ord fremstår hun reflektert og bevisst i handlingene sine. Hun ser at det vil være tidkrevende og vanskelig å faktisk forstå disse bevisene, og velger dermed heller å fokusere på å få en god karakter i faget. Det fremstår som om studenten mener at hun må gjøre en byttehandel med seg selv. Hva betyr mest. Å få en god karakter gjennom å lære seg prosedyrene for slike oppgaver eller å faktisk forstå de matematiske argumentene og det bakenforliggende teppet som oppgavene baserer seg på? Hun gir uttrykk for å velge førstnevnte, noe som peker på en typisk instrumentell tilnærming til matematikken hvor det å kunne utføre kjente prosedyrer og gjenkjenne mønstre for hvordan man løser oppgavene blir sentralt. Dette kommer også frem når Gro senere kommenterer en forskjell hun har merket seg mellom matematikkfagene på videregående og MAT1100:

*På videregående var det altså det var et helt kapittel om derivasjon, og da var det jo bare oppgaver, 1000 oppgaver til det også var det typ fasit på alle oppgavene, også var det løsningsforslag på. Men i den Kalkulus-boka er det jo bare løsningsforslag på annen hver oppgave, for eksempel. Bare på oddetallsoppgaver av en eller annen sinnsyk grunn. Og det er jo veldig slitsomt.*

Igjen kan dette indikere en mer instrumentell tilnærming. Mengdetrening er en del av matematikken, men samtidig en utfordring sett i sammenheng med en tilnærming hvor fremgangsmåter og gjenkjenning av mønster blir det sentrale i stedet for å forstå det matematiske bakteppet. Irritasjonen over mangel på fasit og løsningsforslag kan peke på noe av det samme. Det kan også peke mot at Gro er resultatorientert og ser seg fornøyd når svaret er riktig, heller enn når hun har forstått matematikken. En slik tilnærming vil diskuteres mer inngående i kapittel 5.

Videre forklarer Gro oss hva hun tenker er de største forskjellene mellom videregående og MAT1100:

> *[...] I Kalkulus-boka så føler jeg at det er litt mer sånn.. Ja, dette er syntaksen for dette og det er de ordene vi bruker. Og at man da, det er jo litt notasjon og sånn som man ikke, også føler jeg bruker mye mer krefter på oppgavene i Kalkulus-boka. Fordi jeg ofte føler at det er veldig mye mer som er lagt opp til meg og at det ikke er så «step for step» på en måte.*

Det er rimelig å tro at Gro med dette merker at det har skjedd en endring i hvordan hun leser oppgaver og teori i boka. Det kan tyde på at et mer presist og teoretisk matematisk språk gjør til at hun ikke klarer å «oversette» alle matematiske symboler og begreper på samme måte som før. Dette fører til at hun bruker lengre tid på å tyde hva boken beskriver eller hva oppgavene ber henne om enn hun gjorde på videregående.
Disse språklige utfordringene kommer også frem når Gro ser på hvordan ekstremalverdisetningen er beskrevet i læreboken:

> *At det er litt det med de definisjonene som type ikke gir så mye mening. Man kan tenke seg fram til hva det betyr, men det er jo ikke en notasjon som jeg intuitivt skriver. At på videregående ville de kanskje heller skrevet liksom litt sånn at, grafen x ligger mellom a og b og alle tallene er reelle bla bla, de ville liksom tatt det på en litt sånn annen måte. Mens dette her er jo type en setning som jeg må lese ganske mange ganger for å egentlig få med meg hva det er som skjer. At jeg er litt sånn «okei jeg skjønner ikke helt hva det betyr, men det er en kontinuerlig funksjon definert på et lukket begrenset, oja det lukket begrenset det er den a og b, okei greit». Man må ta det litt flere ganger, det er jo ikke en veldig intuitiv forklaring.*

Vi får samtidig inntrykk av at Gro har en viss forståelse for matematikken som blir beskrevet. Hun klarer å sette ord på matematikken, selv om hun mener det tar lengre tid enn hva hun er vant med. Samtidig peker hun igjen på det hun føler er et stort sprang fra videregående skole, noe vi vil diskutere nærmere i kapittel 5.4. Eksempelvis forklarer hun at læreren hun hadde i R2 kunne gi variablene kallenavn slik at elevene skulle klare å kjenne dem igjen på en annen måte og dermed bli tryggere på å forholde seg til dem. Videre kommer det frem at måten hun er vant til å håndtere og se på bevis også oppleves veldig annerledes etter at hun startet på universitetet. Hun vektlegger to ting som gjør til at hun nå opplever bevis som svært krevende når vi spør henne hvordan hun opplever beviser som presenteres i MAT1100:

> *Nei, altså det er jo mye av det samme om at det er en samling av mange ord som man kanskje kan forstå hver for seg, men når de blir puttet så komprimert sammen i fire linjer så blir alt litt mer, så blir det veldig vanskelig å ta ut en betydning av det. Sånn at du må lese mange ganger over det og oversette det i hodet mange ganger for å få det med seg.*

Det Gro virker til å problematisere her er begrepsforståelse. Hun beskriver at hun opplever en utfordring i det å forstå matematiske begreper. Kanskje ikke hver for seg, men når hun skal knytte dem sammen og få de til å gi mening matematisk. Videre sier hun:

> *Også er det jo mange ting som sånn som de sier mange ganger som er litt sånne premisser som er litt sånn vanskelig å være med på. Typ at det er jo veldig mye sånn, vi antar dette og dette. Antar at denne funksjonen er definert her og her, at det vil gjøre at også videre også videre. [...]. Det er jo veldig mye sånn legge til grunn greier, og det er mye sånn nå bare ser vi for oss en graf som er sånn, og vi bare ser for oss at det er sånn og vi ser for oss at vi bare opererer med disse tallene. Og vi bare ser for oss. At det blir på en måte mye oppå hverandre som kanskje er litt vanskelig og få med seg. Det med og anta og velge og sånn er jo en ting som man ikke er. Jeg er jo veldig vant med at matte er veldig absolutt, og plutselig så er det mange beviser der det er sånn, vi bare velger et tall og det spiller ingen rolle hvilket tall. Vi velger et tall og kaller det p. Også er man sånn okei hvilket, hva slags tall, er det minus, hva? Neinei, det kan være hvilket som helst tall og vi bare velger et tall. Også er man litt sånn, okei, jeg skjønner ikke helt hva det betyr fordi det er veldig vagt. Og jeg er veldig vant til å se beviser med faktiske tall, og se at det går opp.*

Videre kommer det til uttrykk at antagelser og premisser for matematiske sammenhenger er noe hun har vansker med å få kontroll på. Dette kan tyde på at Gro ikke har klart å danne seg en forståelse hvor hun ser at slike premisser kan være nødvendige for at et bevis skal være gjeldende. I tillegg er antagelser en del av å bevise eller motbevise matematiske setninger. Ved å ha et ønske om å hele tiden jobbe med konkrete tall er det rimelig å tro at Gro ikke ser den store sammenhengen med beviser, nemlig at de skal være gyldige innenfor de premissene som er satt. I så måte kan vi også tenke oss at den abstraksjonen og generaliseringen som kreves for å behandle matematikken på dette nivået er problematisk for Gro, og at språket som kreves for å skape disse generelle matematiske sammenhengene gjør henne forvirret og usikker. Når vi tar frem definisjon 5.4.10 fra læreboken i MAT1100 (vedlegg 4) og ber henne beskrive hvordan hun opplever å lese denne, kommer det tydelig frem at Gro ikke har tro på egne evner til å tyde denne. Selv om dette er et langt sitat, føler vi det er relevant å legge det frem i sin helhet:

> *Jeg kjenner jo typ at hvis jeg skulle lest og forstått typ en slik definisjon. Det tar jo lang tid, da er det nesten så jeg må sette opp notater ved siden av, bare for å få med seg. Vi ser at f av x går mot b som grenseverdi når x går mot uendelig, at da blir det sånn. Hvis x går dit, at man må stoppe opp og prøve å se det veldig for seg hele tiden. Og jeg forstår jo alle ordene, jeg har brukt alle ordene før, men sånn grenseverdi, hva betyr egentlig det igjen? Også plutselig så finnes det en n som er reel som gjør at f av x minus b er mindre en epsilon. At det blir veldig mange steg, så man må se det for seg veldig alene. Også er det jo veldig mye dette med at de velger en, altså jeg syntes det er problematisk det med, hvis vi har en epsilon her. Så har vi også en delta der. Jeg skjønner ikke den sammenhengen, jeg skjønner ikke hva det betyr. Det finnes en delta.. hvor faen da? Det blir en sånn, hva betyr det? I det hele tatt, også er det veldig vanskelig å se for seg. Også føles det litt sånn tilfeldig. Foreleseren tegner opp en graf og tegner en epsilon og en delta, også er det veldig sånn.. det kan være hvor som helst egentlig, det spiller ingen rolle. Det blir litt sånn tilfeldig, det er ikke konkret nok. Og det er jo også litt poenget på en måte, at dette her er bevis fra definisjoner som skal være gyldige for alt. Og det er jo selvfølgelig bra å bevise, men det blir litt for sånn. Det hadde kanskje vært bedre å finne to tilfeldige tall, og velge faktisk to bestemte tall og bevise for begge de to, og se det fungerer for begge disse to tallene, det betyr at det fungerer for alle. Litt sånn da også er det kanskje ikke helt presist, men det hadde gjort at jeg skjønte at det funker for både 2 og 13, det betyr at det fungerer for alt.*

Igjen ser vi indikasjoner på at Gro sliter med å henge med når det blir innført mange begreper, generaliseringer og premisser i matematikken. Hun gjentar at hun ønsker seg mer konkrete forklaringer, men samtidig at hun innser hvorfor det ikke vil være tilstrekkelig. Vi kan tenke oss at dette har en tilknytning til at Gro er vant til en mer instrumentell tilnærming til matematiske tema. Ved å etterlyse konkrete tall i et bevis drar vi paralleller til arbeidsmetoder som er nevnt av flere studenter i denne oppgaven. Nemlig at studentene bruker eksempler for å lære seg en metode for å løse forskjellige problemstillinger. På denne måten kan de da bare bytte ut de konkrete tallene i et eksempel, med de tallene studentene selv har å jobbe med i egne oppgaver. Denne tilnærmingen fungerer plutselig ikke lenger, da Gro blir tvunget til å se bak denne metodiske tilnærmingen. Gro blir nå utfordret til å se og forstå hvorfor man kan gjøre det på den måten hun er vant til fra videregående, noe Gueudet (2008) viser til som en utfordring. Denne overgangen finner hun vanskelig, ikke bare på grunn av en ny tilnærming til det matematiske innholdet hvor abstraksjon og generalisering tydelig forvirrer henne, men også på grunn av hvordan det matematiske språket stadig begrenser henne ved at hun må stoppe opp og reflektere over dets betydning.

## 4.3 Student 3 (Jon)

Jon går på bachelorstudiet robotikk og intelligente systemer. Han forteller at valget av studium ikke var veldig gjennomtenkt, men at robotikk og intelligente systemer hørtes spennende ut og at en lærer på videregående hadde anbefalt han dette studiet. Intervjuet begynner ved at Jon forteller om sitt forhold til matematikk opp gjennom skoleløpet:

> *Jeg har egentlig synes at det har vært veldig allright. I hvert fall på barneskolen og ungdomsskolen så synes jeg egentlig det var veldig lett. Og jeg har aldri slitt med det. Syns aldri det var sånn kjempegøy, men helt midt på treet. [...] På videregående så var det jo litt større, eller det ble mer utfordrende, så det var en liten overgang til T-matte i første klasse. Og det var en god del vanskeligere, men også mer interessant egentlig. Og særlig R1 og R2.*

Det kan virke som at Jon ønsker å utfordre seg selv, og at utfordringer i matematikken kan være med på å motivere han. På samme måte som Jon forklarte en endring i matematikken fra barne- og ungdomsskolen til matematikken på videregående skole kommer det fram at han opplever at matematikken har endret seg også fra videregående til universitetet:

> *Det er jo ganske, og det gjelder jo hele faget, ikke bare læreboka, men det er en litt sånn endring på hele matten egentlig. [...] Det er jo mye fokus på slike ting som at det skal være mye mer presise definisjoner og ting skal bevises. Ja, og selv de enkleste ting skal skrives på en veldig omfattende måte, på en måte. Så... det kan, eller det er mye*

*vanskeligere å få med seg mye av det som. Så er det jo ganske lange og sånn formelle definisjoner på ting. Særlig det med, når det kommer til ting vi ikke har hatt før så er det mye nye tegn og mye nye måter å skrive ting på. Og bare det at man skriver ting på en litt annen måte enn på videregående, og så skal du lese det i et avsnitt med veldig mange nye tegn så må du holde tunga rett i munnen!*

Jon trekker frem flere eksempler på hvordan han mener matematikken har endret seg i overgangen til universitetet. Blant annet viser han til et større fokus på presise definisjoner. Det kan tyde på at det ikke ble stilt like høye krav til hvordan Jon uttrykket seg matematisk på videregående og at han der kunne bruke et friere språk når han skulle forklare og presentere matematikk. Han peker også på at lengre definisjoner med nye skrivemåter og symboler er utfordrende. Det kan tenkes at mange nye symboler og skrivemåter gjør det vanskelig for Jon å oversette informasjonen og danne et helhetlig bilde av definisjonen selv om han har et forhold og en forståelse til de ulike komponentene som brukes. Dette virker også til å kunne overføres til hvordan han forholder seg til bevis som legges frem i matematikken. Også her viser han til en opplevd endring etter at han kom til universitetet:

*Ja, jeg synes det. Det var jo et lite skift fra.. Når vi begynte å bevise Pytagoras. Det var vel det første beviset vi hadde på videregående tror jeg? Men, det begynte med sånn et induksjonsbevis og sånne ting. Så det var jo en intro til det da. Men nå er det jo ganske mye mer. [...] At det er liksom ganske mye fokus på... Ja, egentlig å skjønne hva som skjer og kunne bevise hva som skjer. Så du er avhengig av å ikke bare skjønne det selv, men.. Du er avhengig av å skjønne det så godt at du også kan forklare det til andre da, når du skal bevise ting. Og så er det jo, ja. Det er litt sånn bevistungt. Mye nye tegn. Mange nye måter å skrive ting på og, ja. Det går fort!*

Selv om bevis ikke er fraværende på videregående skole påpeker Jon en forskjell i bevisets rolle i matematikkfaget. Jon virker med andre ord til å forstå hvorfor bevis inkluderes i større grad enn før. Bevisene som innføres på videregående skole er ofte mindre omfattende og har ikke en like sentral plass i faget. Jon sier at de på videregående jobbet med induksjonsbevis. Induksjonsbevisene som benyttes på videregående skole har en relativt standardisert fremgangsmetode og det kan brukes rimelig faste trinn for å utlede beviset. Dette gjør også til at man som elev har mulighet til å utlede forskjellige induksjonsbevis ved å ha memorert en algoritme for hvordan de skal skrive dem. Vi sier ikke at dette er tilfellet med Jon, men samtidig er det en mulighet som er mer aktuell på videregående enn hva den er i MAT1100. Videre utdyper Jon hvordan han forholder seg til bevis i MAT1100:

> *Egentlig så får jeg litt sånn panikk hver gang ordet «bevis» kommer. Hehe. Da er det litt sånn.. Da skal ting være på stell. Og det er jo egentlig.. Det er vel ikke unødvendig, men i mange tilfeller så er det bare en presis måte å skrive ting på, på en måte. Sånn.. Det ble jo bevist nå i forelesningen som akkurat var, at* $a + b$ *er det samme som* $b + a$ *på en måte. Og det er jo det samme som vi har lært hele veien, men som man da skal vise hvorfor er sånn. Og det er særlig vanskelig med de enkle tingene, egentlig.*

Igjen trekker Jon fram den matematiske presisjonen som forventes på universitetet. Det kan tenkes at forskjellen i den matematiske presisjonen som kreves er en av grunnene til at Jon opplever vansker med bevis. Selv om Jon ikke direkte sier at bevis er unødvendig kan hans utsagn tyde på at han enda ikke har fått erfart nytteverdien ved bevis i matematikken. Samtidig får vi et inntrykk av at han tenker at bevis er nødvendig for å få en dypere matematisk forståelse, og på den måten er det naturlig å tenke at Jon til en viss grad innehar tankegangskompetanse, slik den er beskrevet av Niss & Højgaard (2002). Det kan tyde på et skille mellom Jons sosiale fornuftsgrunnlag og det instrumentelle fornuftsgrunnlaget for å lære om beviser i matematikken. For å få et bedre innblikk i hvordan Jon tilnærmer seg matematikken spurte vi han hvordan han likte å jobbe med den:

> *[...] stort sett i oppgaveløsning på egenhånd. Så.. Og det syns jeg har vært veldig bra tidligere, men.. sånn som i år så synes jeg egentlig det har vært veldig fint å kunne diskutere det litt med andre som går samme studie egentlig. Og det har egentlig hjulpet litt mer kanskje, enn å holde på mer på egenhånd.*

Jon liker altså godt å jobbe selvstendig med matematikken, men har i det siste sett flere fordeler med å samarbeide og diskutere matematikken med andre studenter. Den endringen i tilnærming fra en mer algoritmisk, oppgaveorientert arbeidsmetode på videregående til samarbeid og utforsking på universitetet kan tenkes å være en tilpasning Jon har sett seg nødt til å gjøre. Ser man på hans tidligere uttalelser kan man tenke seg at det matematiske språket gjør at det blir vanskeligere for Jon å lære matematikken selv og at dette har ført til at han ser en større nytte i og samarbeide og sparre med andre studenter. Videre forteller Jon om hvilke tema som har bydd på de største utfordringene for han så langt på universitetet:

> *Det er jo særlig det med.. Ja, for eksempel når vi hadde midtveiseksamen og du får avkrysningsoppgaver hvor du skal krysse av på en lang setning hvor det blir brukt epsilon-delta om hverandre og.. og mye andre nye variabler, så er det mye å holde styr på. Foreleseren er jo veldig flink på å forklare det, sånn særlig geometrisk, og da skjønner jeg det med en gang og det har jeg ikke noe problem med å forstå. Men særlig da når man skal begynne å beskrive det med tekst og når det da blir mer teoretisk da.*

I likhet med flere av de andre studentene trekker Jon frem definisjonen av kontinuitet som ekstra utfordrende. Samtidig som Jon drar frem denne definisjonen som en av de største utfordringene i kurset så langt, er dette noe han gir uttrykk for at han kan se for seg geometrisk og at han forstår prinsippene. Det virker altså ikke som om problemet ligger i å forstå den matematiske ideen bak definisjonen av kontinuitet. Det kan heller virke som om det også her er det matematiske språket som begrenser han:

> *Jeg er nok avhengig av å kunne se det for meg på en eller annen måte. Og det synes jeg er vanskelig. Det å sortere informasjonen og behandle denne. Nå så er det ofte.. Det er litt sånn at jeg faller av underveis fordi jeg mister oversikten, eller.. Jeg mister bildet av hvordan ting skal se ut eller oppfører seg.*

Det å kognitivt kunne danne seg et geometrisk bilde av en matematisk ide, som for eksempel definisjonen av kontinuitet, krever mye av en student. Med så mye informasjon å behandle vil det stille store krav til Jon sin forståelse rundt temaet. Basert på uttalelsen til Jon vil det være rimelig å anta at det kan bli for mye informasjon med ukjente symboler og skrivemåter, og at dette fører til vanskeligheter når han skal oversette informasjonen og danne den geometriske forståelsen for teorien. Det samme vil graden av abstraksjon og generalisering i teorien som presenteres. Vi var også interessert i å høre hvordan Jon generelt sett opplever det matematiske språket som brukes i definisjoner og teori på universitetet:

> *Jeg vet ikke om jeg klarer helt å sette ord på hva det er, men det er en forskjell i språket, ja. Det blir mye mer vitenskapelig på en måte. Litt sånn som å lese en veldig tung wikipedia-artikkel om noe du ikke vet helt hva er. Når det kommer.. Ikke bare at du ikke forstår sammenhengen, men du forstår ikke hver enkelt bit som de prater om heller fordi det er så mye nytt på en gang.*

Igjen kommer Jon med uttalelser som det vil være naturlig å knytte opp mot utfordringer rundt det matematiske språket som brukes på universitetet. Det brukes flere nye begreper og notasjoner som han ikke føler at han har kontroll på. Han kom videre ikke på noen konkrete eksempler på dette, men da vi tok frem definisjon 5.1.1 fra læreboken i MAT1100 (vedlegg 4) satte han ord på dette på følgende måte:

> *Det er jo for eksempel de to nye tegnene epsilon og delta. Man hadde ikke dem på videregående så vidt jeg kan huske? Så det er nytt. Og når man ser på det sånn en ting av gangen, så er det jo veldig greit sånn matematisk å skjønne at noe er mindre enn noe annet for eksempel. Men.. Ja, når man skal.. Når man skal tenke på både mengde og likninger... og mye rart i en setning, så er det veldig mye å få med seg.*

Det kan også virke som om bruken av *epsilon* og *delta* gjør definisjonen noe vanskeligere for Jon, selv om disse representerer konstanter som burde være kjent fra videregående skole. Dette kan tyde på at han ikke er helt fortrolig med disse symbolene, og heller ikke at disse bare opererer som konstanter i denne definisjonen. Dette er en sentral del av definisjonen og vi mener dette tyder på at han ikke har forstått denne helt enda. Igjen påpeker Jon også at det blir mange premisser i en og samme setning. Han virker til å slite med å sortere informasjonen. Dette stemmer overens med Jons neste uttalelse hvor han går i dybden på hva det er i denne definisjonen han syntes er utfordrende:

> *Det har nok med det at jeg føler det blir så mye på en gang. Så når man skal lese det så er det veldig vanskelig å holde styr på... fordi når du leser det «en funksjon f er kontinuerlig i et punkt a i definisjonsmengden til f, dersom følgende gjelder:» og så begynner du på en ny setning. Det er fort gjort å glemme at dette er på en måte.. det som kommer nå er et premiss for det du nettopp leste. Og så «for enhver epsilon større enn null, uansett hvor liten, finnes det en delta større enn null, slik at når», og da er du jo i gang. Så det blir veldig mange tegn på en gang.*

Det virker tydelig at det å prosessere de ulike premissene og detaljene i definisjonen er en av hovedutfordringene til Jon. Samtidig viser Jon god forståelse for oppbygningen av bevis og presise definisjoner ved at det ofte presenteres ulike premisser for at beviset eller definisjonen skal være gyldig. Dette kan tyde på at ukjente symboler og notasjoner står sentralt med tanke på hva som skaper utfordringer for Jon. Vi valgte derfor videre å se på ekstremalverdisetningen og notasjonene som brukes i denne. Jon trekker da frem bruken av notasjonen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ som en utfordring:

> *Ja, det har vært, og er fortsatt litt problematisk. Fordi jeg er enda ikke helt vant til det og bruker hele tiden litt tid på å tenke over hva det egentlig er som står der. Selv om det ikke på en måte er det som er det jeg skal slite med her. Så, ja, det er en utfordring med notasjon og hvordan man skriver ting. Og det er jo egentlig ikke noen grunn til at det skal variere så mye fra videregående. Sånn jeg ser det egentlig. Så kunne man jo, hvis man skriver ting på en måte her, så kunne man jo bare gjort det på videregående også. For det er ikke noen sånn kjempe mye vanskeligere måte å skrive ting på her, etter min mening. Men det er annerledes.*

Altså gir Jon uttrykk for at notasjonen som brukes på universitetet ikke nødvendigvis er mer utfordrende, men at problemet heller kan tyde på at den er ukjent og at han må bruke tid på å lære seg hva de nye notasjonene betyr. I så måte kan det tyde på et skift i det matematiske registeret Jon må forholde seg til, og at han ikke enda er helt komfortabel med dette. På spørsmål om det er noe han mat møtt på universitetet som han skulle ønske han hadde blitt introdusert for på videregående svarer Jon følgende:

> *Tja.. Da må jeg tenke meg litt om.. Jeg tror egentlig ikke det, sånn helhetlig. I hvert fall jeg tror at jeg hadde nok med det vi hadde på videregående. Vi fikk jo for eksempel en liten introduksjon til komplekse tall, hvis ikke jeg husker feil. Og det var jo fint. Det er fint å bare ha sett ting bare sånn litt før. Det er jo litt der samme som å bare ha bladd litt i boka før forelesning. Bare slik at det ikke er helt nytt.*

Vi tolker dette som at Jon ikke ønsker å skulle lære flere ting på videregående, men at han ser det som en fordel å ha blitt introdusert for enkelte temaer uten å gå for dypt inn i disse. Det virker også som at Jon ønsker mer samkjøring mellom videregående og universitetet på hvilke matematiske symboler som brukes og hvordan matematikken legges fram. Vi spurte også Jon om det var noe han skulle ønske han hadde en bedre forståelse av fra videregående skole:

> *Sånn veldig overordnet så tenker jeg det å lære seg mer metoder for hvordan å skjønne ting, ikke bare kunne regne med det. Sånn overordnet. Men jeg tror egentlig det er det.*

*At i alle fall jeg brukte litt mye tid på å fokusere på å få bra karakter på prøven i stedet for å faktisk prøve å forstå hva vi gikk gjennom. Og det slår det kanskje litt i bakhodet når du kommer videre, det og ikke forstå hva du har lært [...] jeg på en måte var mer opptatt av å vite hvordan jeg regnet. Eller hvordan jeg brukte teknikkene på en måte. Ikke hvorfor de fungerte.*

Vi tolker dette som at Jon har opplevet en endring i hvordan han ønsker å tilnærme seg matematikken. På videregående kan det tenkes at karakterene var den motiverende faktoren og forståelsen var ikke ble vektlagt. Nå som Jon har startet på universitetet er det naturlig å tro at han ser det som en fordel, om ikke en nødvendighet å søke en mer relasjonell forståelse framfor en mer instrumentell tilnærming hvor han bare ønsker å kunne løse oppgavene. Dette kan også tyde på et skille mellom de ulike fornuftsgrunnlagene i Jons tid på videregående skole. Jon så kanskje ikke nytten og strebet ikke etter å danne en forståelse for de ulike temaene, men han var interessert i å kunne regne oppgaver og få gode karakterer på videregående. Det virker altså ikke som om Jons sosiale fornuftsgrunnlag jobbet sammen med det instrumentelle fornuftsgrunnlaget.

## 4.4 Sammendrag/utdrag fra resterende intervjuer

I dette delkapittelet vil vi presentere funn fra intervjuene med de resterende fem studentene. For å gi en bedre oversikt har vi valgt å presentere disse noe mer tematisk enn hva som er tilfellet for de tre studentene som blir beskrevet mer i dybden.

Vi kaller studentene som videre beskrives for Ola, Tom, Siv, Ask og Pål. De tar alle emnet MAT1100 på universitetet, men representerer forskjellige utdanningsløp ved Universitetet i Oslo. Ola og Pål går bachelorstudiet matematikk med informatikk, Tom studerer robotikk og intelligente systemer, Ask tar en årsenhet i realfag mens Siv tar enkeltemner. Med unntak av Siv kommer samtlige studenter direkte fra videregående. Siv har hatt et drøyt års studieopphold etter at hun valgte å hoppe av et annet studie da hun ikke følte dette var helt for henne.

Samtlige studenter har hatt et godt forhold til matematikk som fag gjennom skoleløpet. Mestringsfølelse er en ting som blir nevnt av flere. Siv beskriver hva hun likte med matematikken på følgende måte:

*Det var lett å jobbe med. Og veldig den mestringsfølelsen når man får det til.*

I svaret til Siv kan vi også merke oss at hun mener matematikk var lett og morsomt å jobbe med. Dette støttes opp av uttalelser fra både Ask:

*Også har det vel også vært sånn at sammenlignet med de andre fagene, så er det bare morsommere. [...] Så det har egentlig vært bra, også etter hvert som det har blitt vanskeligere har jeg opplevd at jeg kan slite litt med og sette meg ned, men når jeg først setter meg ned så kan jeg liksom bare kjøre på med oppgaver.*

og Pål:

*Det gøyeste er vel å gjøre oppgavene.*

Det virker med dette rimelig å anta at oppgaveløsning i seg selv er en faktor som kan motivere studentene til å arbeide med faget. Vi har ikke grunnlag til å uttale oss om andre faktorer for motivasjon, men dette vil være naturlig å tolke i samme retning som hva vi beskrev i delkapitlene om Gro og Per, hvor resultatet eller svaret på oppgavene var det som drev dem til å løse dem. Vi har beskrevet denne formen for arbeid med matematikken som «spillbasert» og vil i diskusjonen, se kapittel 5.1, forklare dette nærmere. En student som gav uttrykk for noe annet rundt dette spørsmålet var Ola. Vi har inntrykk av at hans uttalelse som en form for motpol sammenlignet med hva de andre studentene beskrev:

*Jeg tror nok jeg er en som liker bedre å jobbe med liksom sammenhengen og forståelsen, så jeg er kanskje dårlig på å få meg selv til å jobbe sånn ordentlig regne- og mengdetrening selv om jeg vet at det er viktig, så liker jeg heller å skjønne det! Det er vel egentlig det korte svaret. Jeg liker sammenhenger og det å kunne resonnere meg frem til og vite hvordan ting virker istedenfor å måtte huske mye.*

Her beskriver Ola med sine egne ord hvordan han søker etter en relasjonell forståelse av matematikken, og denne metoden er sammenfallende med hvordan Skemp (1978) beskriver dette begrepet.

Når vi videre undersøker hvordan studentene arbeider med matematikken kan det også her tyde på at vi har likhetstrekk mellom flere av studentene. Om vi skal starte med den som skiller seg ut er det igjen Ola vi trekker frem:

> *Hvis jeg prøver å gjøre oppgaver og ikke skjønner hvorfor jeg gjør det jeg gjør, så går jeg heller tilbake til læreboken og prøver å finne sammenhengen. Så det er nok det fokuset på sammenhenger som er sånn at jeg vil vite hva jeg gjør, og heller fokusere på det, enn å gjøre mange oppgaver.*

Tom gir uttrykk for å bruke læreboken på en annen måte når vi spør hvordan han bruker den:

> *Det er vel egentlig mest eksempler. Teorien, eller definisjonene som står i Kalkulus syntes jeg blir veldig sånn vanskelig og forstå fordi det blir så veldig teoretisk føler jeg.*

Også blant de andre studentene kommer det frem at de i hovedsak benytter seg av læreboka til å se på eksempler og metoder for å løse forskjellige oppgaver. Ask beskriver dette på følgende måte når vi spør om han bruker læreboken aktivt når han arbeider med faget:

> *Nei, ikke i det hele tatt. Det jeg bruker læreboka til er vel og finne oppgaver. Og liksom se på hva som står i boka, det er litt sånn. For meg så er det helt umulig og forstå nesten, det føles i alle fall sånn.*

Dette kan ha mange mulige forklaringer, men det vil være rimelig å anta at vårt inntrykk av at studentene i hovedsak fokuserer på å finne mønstre i matematiske oppgaver kan bidra til den innstillingen som kommer frem hos Ask. En uttalelse fra Pål, som lufter litt frustrasjon i løpet av intervjuet, kan lede oss videre i samme retning:

> *Altså på videregående så var det, da var det veldig greit, fordi jeg så liksom. Da hadde du undervisningen og hvis du ikke forsto det så sjekket du bare eksempelet, men her så selv om jeg sjekker eksempelet så får jeg ikke til oppgaven. Så hvis jeg ikke klarer oppgaven så, da.. Hva er det jeg har gjort da?*

Pål nevner altså eksempler og oppgaver når vi spør han om han har opplevd noen endringer i det faglige arbeidet fra videregående til MAT1100 på universitetet. Han virker ikke til å ha fokus på teoretiske forklaringer eller begrunnelser når han jobber med matematikken. Igjen er det rimelig å anta at denne uttalelsen knytter seg til studentens rasjonale for arbeid med faget og hvordan han virker til å ha en instrumentell tilnærming til faget.

Om vi tar et skritt tilbake finner vi også Ask sin andre påstand i sitatet ovenfor interessant. Hvorfor føler han det er umulig å forstå teorien i faget? Vi mener det er rimelig å tro at dette kan ha med hvordan elevene opplever det matematiske språket. Det er nemlig ikke bare Ask som kommer med uttalelser som bringer oss videre i denne retningen, og vi vil videre trekke frem uttalelser som belyser vår tolkning av dette. Dette kommer særlig frem når vi spør elevene om hvordan de forholder seg til bevisene i faget og hvordan de føler den matematiske teorien blir brukt på universitetet sammenlignet med på videregående skole. Ola, som er den av studentene som i større grad gir uttrykk for å være opptatt av forståelse og matematiske sammenhenger forklarer hva han opplever har endret seg på følgende måte:

> *Det er mange flere ord. Bare sånn altså. Det er ikke så mange numeriske sammenhenger eller noe sånn, men at mer liksom bare.. disse tallene er disse identitetene og da har vi dette forholdet, men her er det jo ting som finnes. Eller her er det jo bevis av ting... Så ser man jo fort at noe av notasjonen er annerledes. For eksempel den øverste linjen med at det intervallet.. alle gir reelle verdier. Det er jo sånt som på en måte er nytt nå.*

En slik opplevd endring finner vi naturlig å se i sammenheng med hvordan det matematiske språket blir mer teoretisk, i den forstand at matematikken i større grad kommuniseres gjennom korrekte og presise matematiske sammenhenger. En slik overgang vil vi se nærmere på når vi senere diskuterer utfordringer med matematisk språk og matematiske registre i kapittel 5.3 og 5.4. Denne overgangen vil kunne utfordre studentenes kjente tilnærming til matematikken. Eksempler blir i større grad erstattet med bevis, setninger og definisjoner. Selv om dette er en naturlig og nødvendig endring for at studentene skal kunne danne seg en mer helhetlig og relasjonell forståelse av matematikken, vil det på mange måter også kunne føles forvirrende og abstrakt for studentene. Tom beskriver dette på følgende måte:

*Det er mye mer teoretisk føler jeg, enn det R2 gikk inn på. Det var mye mere, hvorfor den formelen funker når vi bruker det og som sagt litt mer sånne definisjoner da som var bare masse tekst og større og mindre og pluss det og det, ja. Det syntes jeg det er mindre av i R2 da. Så det er kanskje den største forandringen da.*

Siv beskriver den samme erfaringen:

*Altså det krever litt mer at jeg må på en måte lese nøyere, mens på R2 var det mer.. ikke barnespråk da, for all del, men et litt enklere språk da. Litt mer sånn praktisk språk.*

Videre fant vi det naturlig å undersøke hva det var med disse opplevde endringene i det matematiske språket som føltes krevende for studentene. Da vi snakket om typiske matematiske egenskaper som introduseres i MAT1100 sier Tom følgende:

*Det er jo egentlig slike definisjoner jeg sliter litt med, eller i alle fall sitter lenge med å forstå da. For her blir det, mye informasjon og det er bare tekst nesten, og det er liksom grenseverdier, som er større eller mindre og det blir liksom veldig mye informasjon føler jeg. Og ja jeg får ikke så veldig mye ut av det egentlig av å bare lese det føler jeg.*

Vi føler det rimelig at en slik uttalelse sees i sammenheng med at det nå brukes et større spekter av matematiske begreper, og at det i større grad kreves av Tom at han ser en sammenheng mellom hvilken matematisk egenskap som presenteres og premissene som må ligge til grunn for at denne skal være gyldig. Ask fant frem en definisjon i boken som vi diskuterte under intervjuet:

*Intervjuer: Så a er da et element av de reelle tallene, som er en mengde som du sier.*
*Ask: Okei, men det hjelper meg jo på en måte ingenting, altså selvfølgelig så er a et tall, ikke sant jeg trenger ikke å bli forklart at a er et tall, jeg vet jo at a blir et tall på en måte. Så det er for meg på en måte litt sånn unødvendig informasjon da. Fordi det bare setter meg ut, at det skal stå sånn.*

Dette kan indikere at Ask enda ikke ser nødvendigheten av slike premisser eller antagelser i matematikken for at de skal være gyldig, og det vil være naturlig å koble dette opp mot de språklige egenskapene innenfor matematisk presisjon, abstraksjon og generalisering. Vi tolker det som om dette er noe Ask ikke har hatt så mye erfaring med tidligere og at han muligens ikke har forståelsen for hvorfor dette er en sentral del av matematikkens teori. Siv beskriver den samme utfordringen rundt hvorfor teorien nå oppleves mer utfordrende på følgende måte:

> *Det blir liksom litt mindre dilldall, og heller litt mer rett på sak liksom. Det som har vært utfordrende har jo bare vært at det har vært mer fagspråk og mer.. sånn som krever da, at det ikke blir forklart på en litt mer forståelig måte. Så det er på en måte en slags byttehandel. Det tar mindre plass og blir mer konkret, men det krever liksom.. det er vanskeligere å få det til å gi mening, syns jeg.*

Det «fagspråket» Siv sikter til ser vi igjen i sammenheng med blant annet begrepsbruk. Det er rimelig å anta at man på universitetet kan implementere begreper uten at disse må forklares nærmere. Altså vil det nok i mange tilfeller bli tatt litt for gitt at studentene selv forstår hva som eksempelvis ligger i premisser brukt i teorier og definisjoner i MAT1100. Eksempelvis forventes det at begrepene kontinuerlig og deriverbar er kjent når man skal jobbe mot å forstå ekstremalverdisetningen og middelverdisetningen som er to av eksemplene vi hadde med til studentene under intervjuene. Dette kan man se indikasjoner på at ikke er tilfellet for studentene vi undersøkte i oppgaven, og at dette kan være en av grunnene til at Siv mener at det er vanskeligere å få teorien til å gi mening.

Som vi også har presentert i våre tre andre intervjuer er det en annen faktor i det matematiske språket som nå kan se ut til å gi studentene utfordringer med tanke på deres relasjonsforståelse. Dette gjelder de matematiske symbolene som blir benyttet. Pål kommer inn på dette da vi diskuterer nærmere hva som kan være grunnen til at han nå føler matematikken er vanskeligere enn på videregående:

> *Det er mange symboler i Kalkulus. Det er jo nesten ikke tall lengre. Det er jo bare symboler, så det er gøy. Så er det enda mer hokus pokus når du klarer å løse det.*

Vi finner denne uttalelsen interessant av flere grunner. Symboler i matematikk representerer sammenhenger og tall i matematikken (Pimm, 1995). Altså vil mange av symbolene Pål nå møter faktisk representere nettopp de tallene han etterlyser. Pål virker dermed ikke til å se denne koblingen og gir uttrykk for at han nå jobber med noe helt nytt. Ved å omtale matematikken som noe magisk som skjer kan det også være rimelig å tro at han enda ikke ser hvorfor eller hva de matematiske symbolene representerer og dermed heller ikke har forståelsen som kreves for å få dette til å gi mening. Dette er også naturlig å se i sammenheng med en mer utstrakt bruk av abstraksjon og generalisering, noe Pål gir uttrykk for at er motiverende samtidig som han opplever det som vanskelig å forstå. Når vi prater med Ola om symbolbruken i MAT1100 har vi også fremme definisjon 5.4.10 (vedlegg 4). Han beskriver sin opplevelse av symbolbruken etter at han startet på MAT1100 på følgende måte:

> *Når jeg kjenner de igjen, så går det egentlig greit, men de var veldig tunge å forstå de første gangene jeg så dem. Det var de faktisk.. Akkurat de notasjonsmetodene er fortsatt litt «shaky», men altså.. om det var akkurat den du spurte om, men.. jeg prøver jo igjen å forstå det jeg leser.*

Ola påpekte tidligere i intervjuet at symbolbruken har blitt mer omfattende etter at han begynte på MAT1100. Ola indikerer gjennom hele intervjuet at han søker en relasjonell forståelse av matematikken og vi mener det er rimelig å tro at han er interessert i matematikken i seg selv. Basert på hva han sier over kan det se ut som om en av utfordringene han opplever mot å oppnå den forståelsen han ønsker er nettopp det å tyde og sette sammen symbolene i de matematiske utledningene. Det er rimelig å tro at flere av symbolene var ukjente for Ola da han startet på universitetet, og at dette kan være en faktor som fremdeles er med på å gjøre det matematiske innholdet som skjuler seg bak mindre tilgjengelig. Under vår samtale med Tom viser det seg at han har en relativt lik oppfatning:

> *Det er jo flere symboler som kommer inn i matten nå egentlig.. Det er helt okay syntes jeg. Men i starten så blir det jo veldig forvirrende fordi du skjønner ikke helt hva disse symbolene betyr og da er det vanskelig og forstå både teorien, eksempler og noen av oppgavene.*

Der hvor begge studentene over virker til å ha en tilnærming hvor de ønsker å forstå hva symbolene representerer matematisk, har Siv en annen tilnærming. På spørsmål om hun har opplevd noen forskjell i måten matematikken kommuniseres etter at hun begynte på universitetet svarer hun følgende:

*Siv: [...] Det er jo også veldig mye mer symboler, og mindre forklaring av hva disse betyr i detalj for eksempel. Det syns jeg er litt vanskelig..*
*Intervjuer: Hva gjør du hvis du for eksempel møter noen symboler hvor du egentlig er usikker på hva de egentlig betyr?*
*Siv: heh. Jeg ignorerer dem ofte.*

Ved å ignorere symboler risikerer Siv å miste viktig informasjon, enten det gjelder oppgaver eller teori. Dette vil videre begrense mulighetene for Siv til å tyde det matematiske innholdet og hun vil risikere at dette valget også påvirker hennes videre forståelse i kurset og kanskje i videre studier. Det er rimelig å tro at Siv likevel ikke ignorerer symboler hun synes er vanskelig, men at hun på en eller annen måte finner en tilnærming hvor hun kan løse oppgaver med dem og at symbolene dermed kan bli mer et kjennetegn på en metode heller enn en betydning. På denne måten finner vi det rimelig å anta at det matematiske språket begrenser henne og at på grunn av dette finner andre måter å behandle matematikken på. Når vi diskuterer ekstremalverdisetningen (vedlegg 4) gir Siv uttrykk for samme problematikk:

*Akkurat den synes jeg er grei, mest fordi jeg er vant til å jobbe med den fra før av. Altså ekstremalpunkter og slikt. Det har vi jo hatt om i mange år, ikke sant.. Men særlig de symbolene.. de der klammeparentesene som.. mot R og sånn.. jeg skjønner jo fremdeles ikke.. jeg klarer fremdeles ikke å si det med ord liksom. Jeg skjønner hva det står, men..*

Denne språklige utfordringen vil diskuteres nærmere i kapittel 5.3.

Det vil være rimelig å tenke at utfordringene studentene har nevnt til nå også finner sted dersom man diskuterer hvordan de opplever matematiske bevis og bevisets rolle i MAT1100. Pål beskriver hvordan han forholder seg til beviser dersom de blir trukket frem i forelesning eller i læreboken på følgende måte:

*Pål: Altså bevis er jo på en måte forklaringer på hvorfor matten er som den er. Og det liker jeg jo.. Det gir på en måte en annen måte og huske på hva det var for noe. I stedet for å bare huske formelen du bruker så kan man gå på beviset også tenke igjennom, ja det kommer fra sånn og sånn og sånn i stedet for og se at «ja den har*

*også samme fremgangsmåte». Så da kan du koble sammen forskjellige definisjoner med måten de kom fram til definisjonen på.*
*Intervjuer: Mhm, er det noe du bruker aktivt når du prøver å jobbe med matematikken her?*
*Pål: Jeg har tenkt til å begynne å gjøre det. Sånn se tilbake på forskjellige definisjoner og se hvor de henger sammen slik at det blir lettere å huske alle sammen.*

Pål anerkjenner altså at bevisets rolle i matematikken og han trekker frem hvordan bevis kan hjelpe han med den matematiske forståelsen. Videre kan det også virke som om Jon tenker at det kan være en fordel å forstå bevis med tanke på å løse oppgaver. Basert på uttalelsen over har vi inntrykk av at han til nå har benyttet seg av en mer metode og oppgavebasert tilnærming til matematikken, men at han ser og ønsker å endre dette fremover.
Det er flere av studentene som gir uttrykk for at bevis oppleves som en krevende del av matematikken, særlig etter at de startet på universitetet. Når Ask skal beskrive den største forskjellen på matematikken fra videregående til MAT1100 sier han følgende:

*Ja, det går jo mye på de bevisene da. Som er ganske fraværende på videregående. Det er vel lite, det er lite sånn symboler på videregående, det er lite sånn altså spesielt hvis jeg skal trekke fram en ting. [...]. Innstillingen er jo alltid at dette skal jeg forstå, der skal jeg følge med. Og så etter hvert som beviset forklares forstår jeg på en måte bare mindre og mindre, også stopper det..*

Pål beskriver det på en lignende måte:

*Det var mer sånn finn kjennetrekkene i oppgaven, også sammenligner du bare kjennetrekkene med løsningsmetoder for å løse dem. Istedenfor.. Nå da så er det, dette her er sånn du løser det. Og dette er hvorfor du løser det, også er det sånne lange forklaringer og bevis på hvorfor det fungerer da. De forstår jeg som regel ikke så mye av..*

Dermed er det interessant og se hvordan studentene faktisk forholder seg til bevis som presenteres for dem i faget. Tom sier følgende:

*Det blir vel liksom at det blir så vanskelig å forstå hvordan du skal bevise det syntes jeg egentlig. For jeg syntes bevisene er skrevet tungvint og vanskelig, ikke så veldig intuitivt da og forstå egentlig.. I verste fall så er det bare at jeg ikke skjønner beviset, men jeg får til å regne med det så det er litt sånn, okay..*

Det er rimelig å tro at Tom med andre ord prioriterer oppgaveløsning heller enn å bruke for mye tid på å forstå bevis. Han gir inntrykk av at han gir det et forsøk, men at oppgaver og prosedyre prioriteres. Med andre ord den mer instrumentelle læringsmetoden. Dette gjelder også Siv som impliserer at hun ofte velger bort denne fordypningen:

*Intervjuer: Så hvis du sitter i forelesning eller hvis du sitter og leser i boka og kommer over et bevis du føler er komplisert. Bruker du da tid på å prøve og forstå det?*
*Siv: Jeg hopper nok ofte over det med mindre jeg ser tydelig at det er noe jeg trenger etterpå, liksom..*

Til slutt oppsummerer Ask på mange måter dette når han snakker om at han ønsket mye flere eksempler i forelesningene og i læreboka:

*Intervjuer: Så hvis jeg forstår deg riktig så føler du på en måte at du får mer ut av det å jobbe med eksempler og oppgaver, enn det å få den bakgrunnsinformasjonen om hvorfor de matematiske modellene fungerer og hvorfor de matematiske uttrykkene er sånn som de er da?*
*Ask: Ja. Jeg vet jo at det er noen som får mer ut av å forstå hvorfor og liksom få den dypere forståelsen da, men for min del så jeg vet ikke, det føles ut som.. Det kan hende fordi det er en lettere vei, altså det går fortere og bare lære eksemplene. Men at jeg får på en måte en sånn rask overflate forståelse som jeg føler funker for meg, mens for noen så lønner det seg kanskje og liksom forstå det som ligger bak.*

Det er naturlig å tenke at bevis på mange måter er en kulminasjon av de språklige aspektene vi har tatt for oss over. Begreper, symboler og presisjon er i stor grad en del av det matematiske språket i beviser, både når de skal presenteres for studentene og når studentene skal utlede bevis selv. Dette kan det tyde på at studentene finner utfordrende. I tillegg ser vi indikasjoner på at studentene ikke nødvendigvis er godt kjent med denne formen for matematikk fra videregående skole og heller ikke blitt komfortabel med den enda. For de studentene som da har et rasjonale hvor oppgaveløsning er hva de finner interessant eller der eksamensresultatene er hva de prioriterer, vil bevis kunne bli nedprioritert eller oversett.

## 4.5 Avsluttende eksamen

I dette kapittelet vil vi presentere noen resultater fra avsluttende eksamen i MAT1100 ved Universitetet i Oslo. Eksamen ble avholdt høsten 2020 og følgelig er dette oppgaven som ble gitt til studentene vi har intervjuet. Resultatene som presenteres videre gjenspeiler kun poengsummen fra avsluttende eksamen. Når studentene fikk sin endelige karakter i faget ble også resultatet fra midtveiseksamen vektet. Videre vil vi vie oppgave 8 spesiell oppmerksomhet, da denne viste seg å være spesielt krevende for studentene på MAT1100 dette året – dersom man vurderer dette ut fra resultat.

Totalt var det 446 studenter som tok avsluttende eksamen. Eksamensoppgaven bestod av tolv deloppgaver hvor hver av dem ble vurdert på skalaen fra 0 - 6 poeng. I gjennomsnitt fikk studentene 50,8 av totalt 72 poeng på avsluttende eksamen, noe som tilsvarer 4,2 poeng per deloppgave og en total score på 70,6%. Etter vurderingskriteriene for eksamen ved Matematisk institutt vil dette gjennomsnittet tilsvare karakter C, ikke alt for langt fra grensen til karakter B som er på 77%.

Dersom vi ser på den gjennomsnittlige poengsummen for hver enkelt deloppgave er denne relativt stabil og varier fra 3,1 poeng til 5,4 poeng. Dette med unntak av en deloppgave, nemlig oppgave 8 hvor den gjennomsnittlige poengsummen «*bare»* er på 1,1 poeng. Variasjonen fra 3,1 poeng til 5,4 poeng vil vi anse som normal med tanke på at oppgavene naturligvis har noe ulik vanskelighetsgrad og at enkelte temaer ofte er vanskeligere for majoriteten av studenter sammenlignet med andre temaer. Dermed er det tydelig at oppgave 8 skiller seg ut fra de resterende oppgavene. Oppgave 8 lyder som følger:

> *Vis at hvis* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *er en to ganger deriverbar funksjon slik at* $f'(0) = f(0)$ *og* $f'(1) = f(1)$*, så fins* $c \in (0,1)$ *slik at*
> $$f'(c) = f''(c).$$

Regneteknisk anser vi ikke dette som en krevende oppgave, men det er en teoretisk oppgave hvor studentene må ta i bruk et teorem fra kurset uten at det opplyses i oppgaven hvilket teorem dette er. Det vil altså kreve kjennskap til teorien og en relasjonell forståelse av matematikken dersom studentene skal forstå hva de skal vise og hvordan de skal vise det. Vi vil videre komme med et forslag til hvordan oppgaven kan løses:

> *La* $g(x) = f(x) - f'(x)$, *da er* $g(0) = f(0) - f'(0)$ *og* $g(1) = f(1) - f'(1) = 0$.
> *Siden* $f$ *er to ganger deriverbar er også* $g$ *deriverbar og følgelig er*
> $g'(x) = f'(x) - f''(x)$. *Ved hjelp av Rolles teorem får vi da at det finnes en*
> $c \in (0,1)$ *slik at* $g'(c) = f'(c) - f''(c) = 0$. *Følgelig må* $f'(c) = f''(c)$ *.*

Det er mange elementer som skal på plass i denne oppgaven. Det første man kan merke seg et at det er minimalt med tallverdier i oppgaven. I stedet må man vise en generell sammenheng, noe som krever at studentene har kjennskap til Rolles teorem og at de er kapable til å skrive et eget bevis. Dette har vi sett at flere av informantene i oppgaven vår opplever som problematisk. Vi vil også påstå at det er vanskelig å finne en algoritmisk tilnærming til denne oppgaven, hvor man kjenner igjen spørsmålsformuleringen og videre vet hva man skal svare. På semestersiden til MAT1100 høsten 2020 ble det lagt ut en generell kommentar til sensuren, hvor det ble poengtert en «svært vanlig feil» i besvarelsen av oppgave 8. Løsningsforslag og kommentar for sensuren ligger ute på emnesiden for høstsemesteret 2020 (UiO, 2020).

Denne feilen gikk ut på at studenter hadde valgt å bruke middelverdisetningen på funksjonene $f(x)$ og $f'(x)$ hver for seg. På denne måten vil studentene finne et punkt $c$ slik at $f(1) - f(0) = f'(c)$ og et punkt $c$ slik at $f'(1) - f'(0) = f''(c)$. Problemet med denne løsningen er at man ikke kan vite om de to punktene $c$ er like og dermed faller argumentet sammen.

| Poeng på oppgave 8 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Antall studenter | 155 | 166 | 97 | 2 | 1 | 6 | 18 |

*Tabell 1: Antall studenter som fikk respektiv poengsum på oppgave 8.*

Tabellen ovenfor viser hvor mange studenter som fikk hvilken poengsum på oppgave 8. Som tidligere nevnt har studentene et signifikant lavere gjennomsnitt på oppgave 8 sammenlignet med de øvrige oppgavene i settet. I tabell 1 ser vi tydelig at de fleste studentene fikk 0, 1 eller 2 poeng på denne oppgaven. Det er også flere studenter som fikk 6 poeng enn studenter som fikk 3, 4 eller 5 poeng. Det tyder altså på at dette var en oppgave studentene enten mestret eller ikke fikk til i det hele tatt. Det er naturlig å tro at dette har noe med studentenes matematiske forståelse å gjøre. Som nevnt over vil en oppgaveorientert student som har jobbet med eksempler og konkrete oppgaver sannsynligvis ikke klare å komme i gang med en slik oppgave, og dermed heller ikke få høstet så mange delpoeng. Ifølge Parameswaran (2009) vil en relasjonell forståelse rundt dette teoremet kreve innsikt i komponentene grenseverdier, kontinuitet og deriverbarhet. Det vil være rimelig å tro at studentene som fikk full score på denne oppgaven til en viss grad innehar dette.

Tabellen nedenfor viser hvor mange poeng studentene med total poengsum tilsvarende karakter A på avsluttende eksamen fikk på de ulike deloppgavene.

| | | Oppgave | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7a | 7b | 7c | 8 | 9a | 9b |
| Antall poeng | 6 | 44 | 41 | 42 | 37 | 42 | 43 | 42 | 43 | 43 | 13 | 42 | 40 |
| | 5 | 0 | 3 | 2 | 5 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 4 | 2 | 2 |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 16 | 0 | 2 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

*Tabell 2: Oversikt over hvor mange poeng elevene med total poengsum over 92% har fått på de ulike deloppgavene.*

Selv når vi kun ser på de høyest presterende studentene skiller altså oppgave 8 seg ut. Spredningen i antall poeng bryter helt tydelig med mønsteret vi ser på de andre oppgavene. Tidligere så vi en tydelig forandring i studentenes gjennomsnittlige poengsum på oppgave 8 sammenlignet med de øvrige oppgavene og tabell 2 tyder på at denne oppgaven også bød på problemer også for denne studentgruppen. Studentene som lå an til karakter A på avsluttende eksamen fikk i gjennomsnitt 3,3 poeng på oppgave 8. Samtidig varierte gjennomsnittscoren på de øvrige oppgavene fra 5,8 til 6,0 poeng.

| | Gjennomsnittlig poengsum på de respektive deloppgavene | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7a | 7b | 7c | 8 | 9a | 9b |
| Studenter med karakter A | 6,00 | 5,93 | 5,95 | 5,77 | 5,93 | 5,98 | 5,95 | 5,98 | 5,93 | 3,27 | 5,95 | 5,77 |
| Studenter med karakter B | 5,86 | 5,25 | 5,65 | 4,88 | 5,08 | 5,90 | 5,79 | 5,85 | 5,77 | 1,24 | 5,10 | 4,26 |
| Studenter med karakter C | 5,64 | 4,51 | 5,52 | 3,45 | 3,22 | 5,54 | 5,52 | 4,79 | 5,04 | 0,90 | 3,07 | 2,22 |
| Studenter med karakter D | 4,93 | 3,40 | 4,72 | 2,46 | 2,43 | 5,00 | 4,75 | 2,73 | 4,08 | 0,48 | 2,15 | 1,20 |
| Studenter med karakter E | 5,73 | 3,00 | 3,82 | 2,18 | 1,91 | 3,91 | 4,36 | 1,36 | 3,09 | 0,55 | 1,27 | 0,91 |
| Studenter med karakter F | 3,81 | 2,47 | 2,87 | 1,45 | 1,62 | 2,26 | 2,49 | 0,43 | 1,32 | 0,23 | 0,89 | 0,74 |

*Tabell 3: Gjennomsnittlig poengsum på de ulike deloppgavene. Studentene er gruppert etter antall poeng på avsluttende eksamen og hvilken karakter de ville fått på denne.*

Uavhengig av karakter var oppgave 8 den deloppgaven studentene i gjennomsnitt fikk dårligst resultat på. Vi finner to aspekter ved akkurat denne oppgaven som kan sees i sammenheng med intervjuobjektenes oppfatning av matematisk språk.

Det første kan på mange måter illustreres gjennom Pål sin uttalelse om hvordan han opplever kalkulus i forhold til matematikken på videregående:

> *Og derfor er dette basically bare R2, bare med litt sånn hokus pokus greier.*

Og Per sin uttalelse om faget:

> *Her [UiO] er det bare å gi meg noe som ligner på... ikke så lett, men si* $1 + 1 = 2$ *og bevis det, og så bruker de liksom 15 minutter på å bevise dette på grafer og sånn og algebraisk, så jeg mener det bare tar tid [...].*

Begge disse uttalelsene peker på at det studentene før opplevde som kjent og intuitivt nå blir problematisert. Det er rimelig å anta at studentene har få problemer med å intuitivt forstå at $1 + 1 = 2$, men dette blir utfordrende når det videre også blir stilt krav til at det skal defineres teoretisk. Man tar altså noe studentene er kjent med og fortrolige med og teoretiserer dette.

Det virker rimelig å anta at studenter i MAT1100 har en viss innsikt i de matematiske egenskapene som omhandler grenseverdier, kontinuitet og deriverbarhet. I alle fall det som i intervjuene blir omtalt som en intuitiv innsikt, hvor disse egenskapene overordnet kan beskrives gjennom ord eller konkrete eksempler. Fra sitatene ovenfor kan det virke som om våre intervjuobjekter finner slike teoretiseringer både mystisk i og unødvendig basert på kunnskapen de innehar fra matematikken på videregående.

Det andre aspektet vi finner interessant vil være naturlig å knytte mer mot det matematiske språket. Hvorfor gjorde så mange av studentene akkurat den feilen som omhandlet konstanten $c$? Vi tenker dette kan ha noe med studentenes forhold til konstanter og dermed symboler i matematikken. Det er lett å tenke at siden en konstant er definert med symbolet $c$, så vil denne konstanten ha samme verdi gjennom hele oppgaven. Dette er ikke nødvendigvis tilfellet, noe som illustreres ved den nevnte feilen mange studenter gjorde ved å bruke middelverdisetningen på de to funksjonene hver for seg. For begge funksjonene finner studentene en konstant $c$, men den behøver ikke nødvendigvis ha samme verdi, noe som mange har antatt i sine besvarelser. Det ligger med andre ord en språklig abstraksjon i denne oppgaven, hvor studentene betegner noe man har eksistensen av, men i løpet av beviset vil denne verdien kunne skifte. Dette er hvor Rolles teorem kommer inn. Dette teoremet er et spesialtilfelle av middelverdisetningen som inneholder en betingelse hvor problematikken med denne konstanten elimineres. I tillegg vil vi påstå at Rolles teorem er et godt eksempel på et «unødvendig» bevis, slik flere av studentene vi intervjuet omtaler bevis hvor de «intuitivt» forstår hva som skjer matematisk, men ikke klarer å formulere det teoretisk (s. 58, 64-65 & 77-78).

# 5 Hovedfunn og diskusjon

I dette kapittelet vil vi presentere og diskutere de sentrale funnene vi har gjort i studien.

## 5.1 Studentenes rasjonale

Våre funn kan tyde på at studentenes rasjonale og motivasjon for å studere og fordype seg i matematikken i stor grad baserer seg på andre faktorer enn matematikken i seg selv. På denne måten kan det tenkes at motivasjonen for å bruke tid på å søke etter sammenhenger og å bruke tid på å forstå de forskjellige matematiske temaene være begrenset, noe som igjen kan føre til en instrumentell/prosedural tilnærming som vi diskuterer i kapittel 5.2.

Resultatene i kapittel 4 viser at studentene angir forskjellige grunner for sine valg av studieretning (s. 48, 54, 63 & 69-70). En fellesnevner er likevel at matematikken ikke virker til å være en pådriver for deres valg, men at MAT1100 er et emne de må gjennomføre som en del av deres studieløp. I så måte finner vi en klar sammenheng med Mellin-Olsen (1981) og hans kapittel i Solvang (1986) hvor han beskriver det instrumentelle fornuftsgrunnlaget. Det kan tenkes at studentene ikke ser nytten med matematikken knyttet opp mot deres utdanningsvalg og videre deltagelse i samfunnet, men at emnet likevel er nødvendig for dem å gjennomføre emnet da det er en del av studieløpet. Dette er tendenser vi finner hos samtlige, med unntak av studenten vi kaller Ola. Han gir uttrykk for å synes matematikken i større grad er spennende og relevant (s. 70-71). Med andre ord virker samspillet og overlappen mellom det sosiale og det instrumentelle fornuftsgrunnlaget, slik beskrevet i Mellin-Olsen (1981), til å fungere bedre hos Ola enn hos de andre studentene. Et eksempel på dette er Per (s. 50), som gir uttrykk for at han ikke ser poenget med å forstå matematiske bevis eller det å argumentere matematisk. Et annet funn som forsterker vårt inntrykk av at studentene i hovedsak opererer innenfor det instrumentelle fornuftsgrunnlaget er deres prioriteringer når de jobber med matematikken. Storparten av informantene antyder at de ved flere anledninger velger å se bort fra teori og bevis dersom de finner dette utfordrende. Dette argumenterer de videre for ved at målsetningen deres er å få en god karakter på eksamen og at de dermed sier seg fornøyde om de klarer å løse oppgavene.

Poengene vi trekker frem i forrige avsnitt kan knyttes opp mot Woolfolk (2013) og Manger (2013) sin beskrivelse av ytre motivasjon. Samtidig beskriver studentene ved flere anledninger matematikken på en slik måte at de fremstår som indre motivert i arbeidet med faget. Dette fremkommer særlig i sammenheng med oppgaveløsing, hvor studentene beskriver dette som en aktivitet de finner givende og hvor de finner glede og mestring i å bedrive denne aktiviteten (s. 48, 55 & 70). Et direkte sitat hentet fra intervjuet med Per illustrere dette: *«Jeg liker matte. Ikke matte i seg selv, men det å løse oppgaver»* (s. 49). Denne formen for glede og mestring knyttet til oppgaver har vi tidligere knyttet opp mot det vi omtaler som en «spillbasert» tilnærming. Med det trekker vi paralleller til hvordan oppgaver isolert sett gir studentene mulighet til å bedrive en aktivitet hvor de med jevne mellomrom får produsert resultater i form av svar og kan gå videre til nye konkrete utfordringer. På denne måten kan man sammenligne oppgaver med et spill hvor man hele tiden gjør mindre oppdrag, og når disse er løst forflytter man seg videre til et mer utfordrende oppdrag. Om man utelukkende arbeider med matematikken på denne måten vil man risikere å oppnå en instrumentell forståelse av matematikken, hvor prosedyrer og algoritmisk tankegang er styrende (Skemp, 1978). Samtidig fører arbeid på denne måten til at man stadig finner nye svar, og man opplever mestring og belønning oftere dersom man gjør riktig.

## 5.2 Forståelsestyper hos studentene

Studentenes tilnærming og rasjonale for matematikk kan tyde på at flere har hatt en instrumentell tilnærming til matematikken på videregående skole. Våre funn gir uttrykk for at dette kan være en tilnærming studentene har videreført og tatt med seg også til matematikken de nå har på universitetet. For eksempel trekker flere av studentene frem at det å løse oppgaver vies mye mer oppmerksomhet og prioritet enn det å sette seg inn i ulike bevis. Vi finner også at flere av studentene nesten utelukkende bruker læreboken for å finne oppgaver eller se på eksempler. Tom og Ask (s. 71) begrunner dette med at de opplever teorien som presenteres i læreboka som vanskelig, eller nesten umulig å forstå. For det første kan dette sees i sammenheng med utfordringer i det matematiske språket, som vi vil diskutere nærmere i kapittel 5.3. For det andre kan det indikere at de nevnte studentene har et mål om å lære seg hvordan de skal løse oppgavene som blir gitt i faget uten å aktivt søke etter en forståelse av matematikken som ligger bak disse oppgavene. Dermed vil de være avhengige av å gjenkjenne mønstre eller algoritmer for å være i stand til å løse oppgaver om disse matematiske temaene. Uttalelsene beskrevet over har flere likhetstrekk med hvordan Skemp (1987) forklarer instrumentell forståelse. Ved at studentene ønsker å kunne løse oppgavene, men samtidig ikke søker etter en forståelse for teorien og dermed hvorfor de kan løse oppgavene på måten de gjør.

Flere av studentene kommer også med spesifikke eksempler på oppgavetyper eller tema i matematikken som tyder på det Skemp (1978) beskriver som instrumentell forståelse eller hva Hiebert & Lefevre (1986) omtaler som prosedural kunnskap. Da vi diskuterte arbeid med kontinuitet indikerte Per dette tydelig: «Jeg kan løse mange av oppgavene, men jeg vet egentlig ikke helt hva jeg gjør» (s. 51). Videre opplever Per at det å jobbe med ulikheter er en av de største utfordringene hans. Han forklarer at han ofte får til å løse oppgavene, men at han ikke skjønner hvorfor han gjør de ulike modifiseringene i hvert trinn. Dette gir oss grunnlag for å tro at Per heller gjenkjenner et mønster for hvordan ulikheter blir modifisert i ulike oppgaver heller enn å forstå hvorfor disse modifikasjonene kan gjøres i gitte sammenhenger. På spørsmål om hvordan studentene bruker læreboka når de jobber med matematikken svarer flere av studentene at de utelukkende bruker læreboka til å se på eksempler eller finne oppgaver. Teorien er noe de ofte hopper over og det er tydelig at de velger en algoritmisk tilnærming til matematikken (s. 50 & 71). Studentene opplever også at bevisene og det teoretiske i MAT1100 ofte er utfordrende. Flere av informantene mener bevisene er tungvint skrevet og at de er lite intuitive. Videre forklarer for eksempel Gro, Siv og Tom (s. 59 & 78) at de ofte hopper over bevisene dersom det blir vanskelig og de likevel klarer å gjøre oppgavene knyttet til temaet. Med dette finner vi tydelige likhetstrekk for hvordan studentene opplever, og videre velger å tilnærme seg matematikken. Studentene erkjenner at det er temaer i MAT1100 de ikke forstår, men de sier seg fornøyd siden de klarer å løse flere av oppgavene. Denne metodiske tilnærmingen og bevisstheten rundt denne indikerer et skille mellom studentenes instrumentelle og sosiale fornuftsgrunnlag, som diskutert i kapittel 5.1.

Våre funn viser at en av studentene skiller seg tydelig ut fra de andre med tanke på hvordan den matematiske tilnærmingen blir beskrevet. Denne studenten gir uttrykk for å strekke seg etter en relasjonell forståelse eller konseptuell kunnskap som er beskrevet av henholdsvis Skemp (1978) og Hiebert & Lefevre (1986). Ola beskriver at han liker å jobbe med sammenhenger og forståelse i matematikken. Han påpeker at han ønsker å kunne se sammenhengene i matematikken og resonnere seg fram til hvordan noe virker framfor å måtte huske så mange formler og fremgangsmåter. Ola (s. 71) er også den eneste av studentene som forklarer at han går tilbake til teoridelen av læreboka for å lete etter sammenhenger dersom han gjør oppgaver, men ikke forstår hvorfor han gjør det han gjør.

Selv om vi her argumenterer for at resultatene tyder på at Ola skiller seg ut fra de resterende studentene vi har intervjuet i denne studien, ønsker vi videre å påpeke at vi ikke er av den oppfatning av at de utelukkende har en instrumentell forståelse eller prosedural kunnskap for matematikken. Basert på litteraturen til Skemp (1978) angående instrumentell og relasjonell forståelse eller Hiebert & Lefevre (1986) om prosedural og konseptuell kunnskap er det lett å se på de ulike begrepene som to distinkte motpoler. Det er på en måte riktig da begrepene instrumentell og relasjonell forståelse er to ulike begreper og forståelsestyper, men vi ser det som nødvendig å ikke se for svart-hvitt på disse begrepene. Å beskrive en student sin helhetlige forståelse av matematikk krever en mye dypere og kompleks undersøkelse. Hvordan vi oppfatter matematikken og hvordan vi får den til å gi mening er individuelt og sammensatt (Pimm, 1995; Sfard, 2012). Det er likevel rimelig å hevde at en og samme student kan ha både instrumentelle og relasjonelle innslag av forståelse innenfor et matematisk tema.

De to avsnittende ovenfor er ikke ment for å konstatere at en student har instrumentell eller relasjonell forståelse. De er heller ment for å vise hvordan vi tolker studentenes tilnærming til matematikken. Hvordan ser det ut til at elevene jobber når de skal lære seg matematikk? Søker de etter å kunne løse oppgavene eller strekker de seg etter å se sammenhenger? Flere av studentene gir uttrykk for å ha en tilnærming til matematikken som ved første øyekast kan virke instrumentell. Det ser ut som om oppgaveløsning og det å få ned et svar er den motiverende faktoren for elevene. Samtidig er det rimelig å tro at disse studentene neppe har gjennomført matematikken på grunnskolen og videre realfagsmatematikken på videregående uten noen form for dybdekunnskap/relasjonell forståelse. Det kan tenkes at studentene finner den arbeidsmåten vi omtaler som instrumentell/prosedural som en enklere vei mot målet om å få en god karakter eller gjennomført utdanningsløp, slik vi diskuterte i kapittel 5.1. Det kan også tenkes at dette er en taktikk studentene benytter seg av dersom tiden blir knapp eller at det faglige innholdet virker for omfattende, slik Brandell et al. (2008) fant i deres studie. Vi mener det er naturlig å tro at studentene i de aller fleste tilfeller benytter seg av en blanding av instrumentell og relasjonell tilnærming til matematikken. Et funn som illustrerer disse antagelsene er når Per (s. 51) trekker frem at oppgaver hvor han må bruke epsilon og delta er krevende. Han forklarer at han ofte får til å løse oppgavene, men at han ikke vet helt hva han gjør. Det virker altså som om han har en metodisk og algoritmisk tilnærming til å løse oppgavene. Samtidig påpeker han også at han kan se for seg dette grafisk, og for å kunne se for seg dette kreves det en form som relasjonell forståelse.

Flere av studentene gir uttrykk for at tilnærmingen de hadde til matematikken på videregående skole ikke lenger er tilstrekkelig når de nå har beveget seg over til universitetet.

Jon (s. 68-69) gir for eksempel uttrykk for at han skulle ønske at han brukte mer tid på å forstå matematikken på videregående fremfor å lære seg metoder for å løse oppgavene. Han forklarer at han brukte mesteparten av tiden på å forsøke å få god karakter på prøven framfor å forstå det matematiske, noe han videre opplever som en begrensning når han nå har startet på universitetet. Vi ser også tendenser til like refleksjoner hos flere av de andre studentene. Pål (s. 77) opplevde at det på videregående gikk mest i å finne kjennetrekk ved oppgavene og deretter sammenligne disse med løsninger på tidligere oppgaver. Nå på universitetet derimot, opplever han at teorien og bakgrunnen for hvorfor oppgavene kan løses på den aktuelle måten er hva som vektlegges. Per (s. 49-50) sier at matematikken på videregående skole var ganske rett fram, men at det nå er blitt mer mystisk og peker til bevisets rolle i matematikken. Han sier at han ofte syntes slike beviser er vanskelige, men også at matematikken i større grad fremstilles som noe med en mening. Det virker til at flere av studentene følte at en instrumentell tilnærming fungerte bra på videregående skole, men at de nå opplever dette som en begrensning og dermed må strekke seg mot en mer relasjonell tilnærming. Resultatene våre bekrefter at dette oppleves utfordrende for flere av studentene. Dette ser ut til å ha likheter med de tidligere studiene vi viste til gjort av Crawford et al. (1998) og Bosch et al. (2004) referert i Gueudet (2008) hvor de finner at elever på videregående skole i stor grad tilnærmer seg matematikk instrumentelt. Vi finner også likhetstrekk med studien til Winsløw (2007) referert i Gueudet (2008) som finner at studentene på universitetet blir forventet å danne en helhetlig og sammenhengende matematisk forståelse som utfordrende.

## 5.3 Utfordringer med matematisk språk

Som nevnt i de to foregående delkapitlene, finner vi tegn på at det er en prosedural/instrumentell tilnærming til matematikken som er dominerende for studentene vi intervjuet. Resultatene kan også tyde på at det matematiske språket og studentenes opplevelse av dette kan være en faktor som har innvirkning på hvordan studentene tilnærmer seg matematikken, og videre fremstår som et hinder for å utvikle dybdekunnskap og se sammenhenger. Vi vil videre diskutere funnene fra intervjuene som kan knyttes til dette.

Det kommer tydelig frem at samtlige studenter har opplevd en endring i det matematiske språket. Disse endringene blir beskrevet gjennom forskjellige faktorer som alle spiller en rolle i hvordan studentene leser, skriver, snakker og forstår matematikken.
Det første vi ønsker å trekke frem er hvordan studentene opplever at matematikken blir

kommunisert til dem. Både gjennom læreboken og i forelesning sier våre informanter at de har utfordringer med å forstå eller følge den matematiske teorien som presenteres. De argumenterer med at det koster dem mye tid og krefter å lese teori i læreboka eller å forstå et matematisk fenomen som blir presentert for dem i forelesning. Se kapittel 4. I denne sammenheng kan vi se til Niss & Højgaard (2002) sin kommunikasjonskompetanse. Med denne som utgangspunkt kan det se ut som om studentene ikke enda innehar ferdighetene til å tyde de matematiske resonnementene som blir presentert for dem og at både lærebok og foreleser kommuniserer matematikk med en grad av formalitet og presisjon som studentene ikke klarer å tyde. Vi vil diskutere dette mer utdypende i kapittel 5.4. Med utgangspunkt i resultatene våre vil vi videre diskutere noen faktorer som viser seg å være utfordrende for studentene når de skal tyde og forstå matematikken.

Det viser seg at studentene opplever at det har blitt innført en hel del nye skriftsymboler i matematikken. Samtlige studenter beskriver dette som utfordrende og at de ikke alltid forstår hva disse symbolene representerer. Dette kan videre føre til at studentenes arbeid med å lese og forstå matematisk innhold blir en utfordrende og tidkrevende prosess, noe som i disse tilfellene kan knyttes opp mot Kenney (2005) sin beskrivelse av «double decoding». Også fagbegrepene trukket frem som et usikkerhetsmoment for studentene. Særlig når begreper og skriftsymboler blir skrevet om hverandre i en kompakt og tettpakket matematisk utledning. På denne måten kan det virke som om studentene også opplever usikkerhet rundt allerede kjente begreper i den forstand at de nå implementeres i en større kontekst, med flere matematiske sammenhenger. Studentene trekker frem utfordringen med å oversette definisjoner og bevis fra det symbolholdige og begrepsrike språket. Slik Niss & Højgaard (2002) beskriver symbol- og formalismekompetanse virker det klart at studentene ikke enda innehar denne på et nivå som gjør matematikken i stor nok grad tilgjengelig for dem. Gjennom Pimm (1995) sin beskrivelse av matematisk «fluency» gir uttalelsene til studentene et tydelig bilde på at den kognitive belastningen ved å oversette symbolholdig språk til matematisk mening er stor, og at symboler og begreper ikke anses som transparente. Dette virker også til å stemme overens med Rønning (2014) sin analyse av undersøkelsen til UHR. Denne viste blant annet at språk og notasjon på universitetet var faktorer som var med på å gjøre matematikken i større grad utilgjengelig for studentene, selv om de hadde kjennskap til de matematiske temaene fra tidligere skolegang.

En annen bemerkning som kan være interessant er hvordan flere studenter opplever generaliseringer og/eller abstraksjoner i matematikken som en utfordring. Dette kommer særlig frem da vi snakket om definisjoner eller bevis fra MAT1100 og kan illustreres ved følgende sitat fra intervjuet med Gro, i forbindelse med at vi diskuterte sentrale bevis i MAT1100:

> «[...] *Vi velger et tall og kaller det p. Også er man sånn okei hvilket, hva slags tall, er det minus, hva? Neinei det kan være hvilket som helst tall og vi bare velger et tall. Også er man litt sånn, okei, jeg skjønner ikke helt hva det betyr fordi det er veldig vagt. Og jeg er veldig vant til å se beviser med faktiske tall, og se at det går opp.»* (s. 61).

Dette sitatet illustrerer på mange måter en av kjernene innen dybdekunnskap/relasjonell forståelse som vi diskuterte i forrige delkapittel, nemlig det å kunne gjøre de matematiske egenskapene tilgjengelige for alle tall det gjelder. Disse egenskapene blir ofte generalisert gjennom at konkrete tall blir byttet ut med et skriftsymbol fra alfabetet, slik at egenskapene kan gjøres tilgjengelig for alle tall i gyldighetsområdet. Våre resultater tyder på at studentene opplever dette som forvirrende. Det kan tenkes at de opplever en slags distansering fra det de tidligere har forbundet med matematikk, nemlig tall. Dette stemmer overens med hva Borge & Hole (2017) fant i sin analyse av eksamensbesvarelser på MAT1100, hvor en endring fra konkret til mer generell algebra gjorde til at mange studenter ble usikre og svarte feil. Det kan også sees i sammenheng med hvordan Hersh (1997) beskriver matematikk som noe konkret og vagt på samme tid. I samme åndedrag bringer Hersh (1997) inn begrepene abstrakt og ugripelig når han snakker om matematikk. Dette er noe vi finner igjen hos for eksempel Pål (s. 74) som opplever at han ikke lenger jobber med tallverdier og videre omtaler matematikken i MAT1100 som *«hokus pokus»* (s.74). Det kan med andre ord tyde på at der er noe innen matematikken som han ikke helt får taket på, og som ikke gir mening for han. Resultatene våre kan også tolkes dit hen at sammenhengen mellom teori og oppgaver virker mindre klar enn hva den gjorde ved tidligere matematiske kurs. Det vil være naturlig å tenke at studentene som opplever generalisering av matematikken som utfordrende også opplever denne sammenhengen mellom teori og konkrete oppgaver som fraværende. Et sitat fra Gro (s. 57) gir oss et tydelig eksempel på dette: «[...] *Mens her er det litt mer sånn separert, det er veldig tydelig her at det liksom at teorien er noe, også er oppgaven noe annet».*

I tilknytning til forrige avsnitt ser vi også at den matematiske rigiditeten og presisjonen som blir brukt når man argumenterer matematisk, byr på utfordringer for studentene (s. 50-51, 57-58, 60, 62, 66-67, 73 & 76). Som vi skal komme tilbake til i kapittel 5.5, vil det å argumentere matematisk i MAT1100 naturligvis stille høyere krav til studentene enn det som var forventet på videregående. Dette vil følgelig også stille krav til en mer presis og utfyllende argumentasjon hvor begreper og symbolspråk blir presentert med riktig oppbygning og med riktige og relevante premisser (Gueudet, 2008; Shockey & Pindiprolu, 2015). Det vi spør oss er om studentene er tilstrekkelig forberedt på dette? Våre funn kan tyde på at det ikke er tilfellet. Særlig kommer dette frem gjennom samtalene om bevis i MAT1100 hvor flere av studentene gir uttrykk for at det oppleves nærmest nytteløst for dem å prøve og jobbe med disse. Bevisføring er på mange måter lakmustesten for studentenes dybdekunnskap, og i så måte kreves det en form for relasjonell matematisk forståelse for å i det hele tatt være i stand til å følge og forstå et bevis. Det samme gjelder i minst like stor grad om studentene skal argumentere og bygge opp egne bevis. I tillegg vil det kreve at studentene benytter seg av et matematisk språk med høyere grad av formalitet, som inkluderer presisjon og symbolbruk (Brandell et al., 2008; Lew & Mejia-Ramos, 2019). Dette selv om bevisene som presenteres i forelesning og i læreboken på langt nær har samme grad av logistisk tilnærming som matematikken kan ha (Dawson, 2006). Dermed vil våre funn om matematiske symboler, diskutert tidligere i dette delkapittelet, igjen bli en utfordrende faktor.

I tilknytning til studentenes oppfatning av teori, og spesielt bevis, vil vi også her trekke frem deres forståelse av de intuitive forklaringene sammenlignet med de formelle og presise forklaringene. Flere studenter gir uttrykk for å skjønne de matematiske konseptene dersom de får en intuitiv forklaring, men mister tråden dersom disse forklares mer teoretisk. En intuitiv forklaring vil ikke være holdbar som et matematisk argument, men vil ofte være mindre komplisert og mindre tettpakket med abstraksjoner og generaliseringer enn hva et presist og holdbart argument vil være. I så måte finner vi at studentene ikke virker til å ha den kompetansen som kreves for å forstå- eller fremstille holdbare matematiske argumenter i tilstrekkelig grad, basert på hvordan Niss & Højgaard (2002) beskriver dette gjennom hva de kaller tankegangskompetanse. En naturlig del av denne kompetansen, og dermed av matematikk på et høyere nivå, er abstraksjon og generalisering. Dette krever innsikt og forståelse av sammenhenger og strukturer i matematikk, og skal presenteres gjennom presise og formelle strukturer og språklige argumenter. Dette gir flere av studentene (s. 58, 73-74 & 77-78) uttrykk for at de heller ikke ser poenget med, eller at de finner det utfordrende. I så måte kan det også kobles til hvordan Gueudet (2008) hevder disse kravene til argumentasjon øker i takt med det matematiske nivået man opererer på, men at studentene enda ikke er komfortable med dette. Abstraksjon og generalisering vil også utfordre studentenes algebraiske evner i at konkreter byttes ut med generelle sammenhenger, noe Grønmo et al. (2017) finner som en av de største utfordringene til elever i norsk skole.

## 5.4 Matematisk register

Samtlige av studentene vi intervjuet hadde på en eller annen måte opplevd at matematikken endret seg da de kom til universitetet. Da vi ba dem sette ord på hva de opplevde annerledes var det i hovedsak elementer knyttet til det matematiske språket som ble trukket frem. Notasjon og symbolbruk, begreper, abstraksjon, generalisering og presisjon ble nevnt i forhold til hva de hadde merket en endring i siden de hadde matematikk R2 på videregående. Disse elementene inngår alle i det å kommunisere matematikk, og kan i denne sammenheng knyttes opp mot Halliday (1974) sin beskrivelse av det matematiske registeret. I dette registeret vil språket justeres og tilpasses slik at kommunikasjonen er hensiktsmessig i forhold til matematikken som skal forklares og argumenteres for. Dermed er det naturlig å tenke at overgangen fra matematikk R2 til MAT1100 vil innebære *et skift fra et register til et annet*. I hovedsak kan det tyde på at studentene opplever at en større del av det tekniske matematiske registeret nå implementeres i deres kommunikasjon og at de til nå stort sett har oppholdt seg skoleregisteret og til dels i hverdagsregisteret (Pimm, 1987; Prediger et al., 2016).

Videre kan man spørre seg hvordan studentene skal takle et slikt skifte i register? Eller om de er godt nok rustet til å ta steget inn i et mer teknisk matematisk register? Gro (s. 57) føler nå at det er hun som må tilpasse seg matematikken, og at hun videre ikke helt vet hvordan hun skal gjøre dette på en god måte. Per (s. 49-50) omtaler matematikken han nå møter som mystisk, mens Siv (s. 74, 76) rett og slett peker på at hun ikke finner forklaringer på det hun lærer om. Resultatene fra denne studien kan tyde på at de språklige aspektene vi har diskutert tidligere er en del av et register studentene enda ikke mestrer. Som Kranda (2008) poengterer er det ikke nødvendigvis naturlig for studentene å bevege seg inn i dette, og dermed kan det oppleves som et hinder for videre progresjon og utvikling av matematisk kompetanse og dybdekunnskap. I denne sammenheng kan man trekke paralleller til Winsløw (2007) referert i Gueudet (2008) og Brandell et al. (2008) sine studier hvor de finner at mange studenter ikke har verktøyene som skal til for å takle de forventninger og krav som stilles når de går fra videregående skole og over til universitetsmatematikk.

## 5.5 Eksamensresultater

Fra eksamensresultatene, presentert i kapittel 4.5, ser vi at studentene jevnt over presterer godt på eksamen som helhet. Gjennomsnittlig fikk studentene 70,6% av poengene som var mulig. Fra tabell 3 kan vi se at den gjennomsnittlige poengsummen varier noe fra oppgave til oppgave for studentene som fikk karakter C, D, E eller F. For studentene som fikk karakter A eller B er det mindre variasjon og naturligvis et jevnt og høyt snitt på oppgavene. Der er imidlertid ett unntak fra denne trenden. På oppgave 8 er det nemlig slik at uansett hvilke resultater vi ser på, så er den gjennomsnittlige poengsummen betraktelig lavere. For å gi et forsøksvis svar på hvorfor det er slik, kan vi se tilbake til kapittel 4.5. Som vi så der, er ikke oppgave 8 et matematisk problem som utfordrer studentene på det regnetekniske/prosedurale innen matematikken. Oppgaven krever derimot at studentene har kjennskap til Rolles teorem og at de videre klarer å se sammenhengen mellom dette teoremet og hvordan det kan brukes til å løse oppgaven. I sensuren ble det påpekt at en feil mange av studentene gjorde var å bruke middelverdisetningen på funksjonen selv og dens deriverte hver for seg (UiO, 2020). Selv om argumentet faller sammen fordi studentene ikke har kontroll over at de to konstantene er like, har studentene som valgte å bruke middelverdisetningen på disse funksjonene absolutt vært i nærheten av noe, da Rolles teorem er et spesialtilfelle av middelverdisetningen (Lindstrøm, 2016). Likevel er det noe overraskende at ikke flere studenter mestrer denne oppgaven, selv om denne krever god innsikt og relasjonsforståelse av kontinuitet i MAT1100.

Som nevnt i kapittel 5.3, har noen studenter problemer med generaliseringer og abstraksjon. Vår analyse av eksamensresultatene i MAT1100 tyder på at flere studenter sliter med dette. Dette kan blant annet ha en sammenheng med at kravet om presisjon og symbolbruk i matematikken endres over tid og skaper forvirring blant studentene (Gueudet, 2008). I det scenarioet at en student har bestemt seg for å bruke middelverdisetningen på de to funksjonene er det essensielt at studenten blir oppmerksom på at disse konstantene kan være forskjellige for å kunne revurdere metodevalget og finne fram til å bruke for eksempel Rolles teorem. I og med at det er vanlig å bruke konstanten $c$ i eksempler og definisjonen av middelverdisetningen kan det tenkes at studenter som ikke har kontroll på slike generaliseringer vil bruke middelverdisetningen på de ulike funksjonene og tenke at disse konstantene $c$ må være like. Studenter som har en mer relasjonell forståelse med tanke på slike generaliseringer ville kanskje benevnt konstantene de finner for eksempelvis $c_1$ og $c_2$ eller $c$ og $d$, for deretter å innse at argumentet faller sammen og revurdere metodevalget sitt deretter. Dette skiftet i krav om matematisk presisjon kan være utfordrende for studentene. Som Kranda (2008) påpeker, faller det ikke elever naturlig å bruke et symbolholdig språk i sine argumenter, og de behøver tett og kontinuerlig oppfølging gjennom matematikkutdanningen for å mestre dette.

En annen ting som skiller oppgave 8 fra de andre oppgavene på denne eksamenen er at ordlyden i oppgaven starter med «Vis at hvis...», mens de resterende oppgavene har ordlyder som «Begrunn at...» eller «Finn en...». Fra intervjuene ser vi at flere av studentene gir uttrykk for å mislike bevis og at de ofte ser bort fra bevisene og konsentrerer seg om å løse mer standardiserte oppgaver. Det kan dermed tenkes at studenter som deler denne erfaringen angående bevis ikke har gjort seg verken erfaringer eller forståelse med denne typen oppgaver. Dette kan igjen ha ført til at de valgte å prioritere tiden på andre eksamensoppgaver og dermed se bort fra oppgave 8. På en annen side ser vi at den gjennomsnittlige poengsummen på denne oppgaven varier mye også for studentene som fikk karakter A eller B. Dermed er det trolig andre faktorer som også spiller en betydelig rolle, uten av vi har grunnlag for å konkludere hva disse kan være.

Som beskrevet i kapittel 2.2.3, poengterer Hemmi (2009) at det i løpet av de siste 20-30 årene har vært stor variasjon i hvilken rolle bevis har hatt i læreplanene for matematikkutdanningen, og i mange land har bevis fått liten plass i undervisningen. I den utgående læreplanen for matematikk på videregående skole har lærerne stor frihet til hvordan de vil introdusere elevene for bevis og bevisføring, men det har ikke vært noen faste krav til hvilke bevis som skal innføres eller grad av formalitet i de matematiske bevisene (Utdanningsdirektoratet, 2006). På bakgrunn av dette er det vanskelig å si noe om hvilke ferdigheter og erfaringer studentene har med seg til universitetet når det gjelder bevis. Vi ser fra intervjudataene at mange av studentene fremstiller både det å følge bevis og konstruere egne bevis som problematisk. Dette, sett opp mot differansen i den gjennomsnittlige poengsummen på oppgave 8, kan tyde på at studenter som kommer fra videregående skole til universitetet har noe begrensede ferdigheter i det å argumentere og konstruere egne matematiske bevis. Som diskutert i kapittel 5.3 vil overgangen fra videregående skole til universitetet by på endringer i hvordan matematikken blir fremstilt og hvordan studentene er forventet å formidle matematikken. Dette gjelder også i bevisene hvor det er et ønske om at studentene skal tilegne seg kompetanse til å følge- og utlede mer formelle bevis. En av tingene som skiller et uformelt bevis fra et bevis med høyere grad av formalitet er kravet om presisjon og bruk av et formelt matematisk språk (Lew & Mejia-Ramos, 2019).

Fra delkapittel 5.3 ser vi også at mange av studentene trekker frem det matematiske språket når de forklarer hva de syntes er vanskelig med bevis og bevisføring. De sier bevisene er skrevet tungvint, vanskelig og at det brukes mange symboler og generaliseringer i bevisene. Samtidig mener noen av informantene at de ofte kan skjønne den intuitive ideen bak beviset når foreleser forklarer dette, men når de selv prøver å lese beviset eller skrive ut et bevis så hindres de av det formelle og kryptiske språket (s. 51, 52, 57-58, 60-61 & 72-73). Der et rimelig å tro at man må ha en form for relasjonell forståelse forstå en intuitiv og geometrisk tolkning av et bevis, men det ser altså ut som om det matematiske språket som brukes i bevisene er med på å hindre studentene i og danne en helhetlig relasjonell forståelse. Dette støttes opp av studien til Moore (1994) som finner at en av hovedutfordringene studenter på universitetet har når de skal lære å skrive mer formelle bevis, er det matematiske språket.

I kapittel 5.3 argumenterer vi for at generalisering og abstraksjon i matematikken et hinder for mange av studentene. Det kommer fram at de foretrekker oppgaver og teori med konkreter framfor mer abstrakte tilnærminger. Vi stiller oss dermed spørsmålet om graden av abstraksjon i oppgave 8 kan være med og forklare den store forskjellen i gjennomsnittlig poengsum på denne oppgaven sammenlignet med de resterende oppgavene på eksamen. Om vi sammenligner eksamensoppgavene viser det seg at oppgave 8 er den eneste som verken tar utgangspunkt i, eller ber studentene finne frem til konkreter. Oppgave 1, 2, 3, 7a, 9a og 9b tar utgangspunkt i konkreter som eksempelvis funksjoner og matriser, mens de resterende oppgavene (4, 5, 6, 7b, 7c) ber studentene finne frem til noe konkret. Vi finner dog ingen indikasjoner på at disse forskjellige oppgaveformuleringene gjør store utslag på poengsummen i de respektive oppgavene. Se tabell 3. Hele oppgavesettet kan sees i vedlegg 5. Imidlertid gjør det store avviket i studentenes poengsum på oppgave 8, sett i lys av studentenes refleksjoner og forklaringer i intervjuene, grunnlag for å tro at abstraksjonsnivået i oppgaven kan være et hinder for flere av studentene.

# 6 Konklusjon og implikasjoner

I denne oppgaven har vi tatt utgangspunkt i problemstillingen *«Hvordan opplever matematikkstudenter det matematiske språket i overgangen fra videregående skole til universitet, og hvilken rolle spiller dette i studenters utvikling av relasjonsforståelse i matematikk?»*. Gjennom åtte intervjuer med studenter som tar emnet MAT1100 ved UiO og en analyse av eksamensresultatene for alle studenter som fullførte emnet i år 2020, har vi funnet mulige sammenhenger mellom språk og matematisk forståelse knyttet til overgangen mellom disse to utdanningsinstitusjonene.

Fra funnene våre ser vi at studentenes rasjonale for å studere matematikk i hovedsak ser ut til å være knyttet til valg av utdanningsløp eller fremtidsutsikter. Kun en student gav uttrykk for at matematikken i seg selv er noe som oppleves spennende og motiverende å fordype seg i. Blant de andre studentene fremstår matematikken som noe de først og fremst måtte overkomme for å videre skaffe seg den kompetansen de trenger for å gå videre i utdanningen. I denne sammenheng er det naturlig å tenke at eksamen blir en motiverende faktor for studentene. Dette kan vise seg å stemme med bakgrunn i hva vi fant i kapittel 5.1 og 5.2, hvor eksamensresultatene er hva som virker til å drive studentene fremover, samt at de finner en større glede og motivasjon gjennom å jobbe med konkrete oppgaver enn hva de gjør gjennom å søke etter forståelse og matematiske sammenhenger.

I lys av forrige avsnitt finner vi indikasjoner på at studentene har en instrumentell/prosedural tilnærming til matematikken. Se kapittel 5.2. Denne tilnærmingen kan se ut til å begrense studentene dersom de blir bedt om å løse eller tyde matematiske problemer hvor de ikke har mulighet til å gjenkjenne et mønster eller en algoritme for å løse disse. Her finner vi også indikasjoner på at abstraksjon og generalisering i matematikken er med på å forvirre og «sette ut» studentene i stor grad, noe som særlig fremkommer gjennom arbeid med bevis og teori. Med dette ser vi også en sammenheng i resultatene som tyder på at studentene opplever utfordringer med å tilegne seg relasjonell kunnskap om de matematiske tema som blir introdusert og behandlet i MAT1100.

Resultatene viser at det er flere aspekter innen det matematiske språket som oppleves fremmed eller utfordrende for studentene som nå har begynt å studere matematikk på universitetsnivå. Symbol- og begrepsbruken i både lærebok og forelesning forvirrer studentene og gjør dem usikre. På en side viser resultatene at dette er på grunn av at flere av de matematiske symbolene er ukjente for studentene, men det viser seg også at de symboler og begreper som studentene allerede kjente til nå oppleves utfordrende. Våre funn tyder på at en av grunnene til dette er at studentene møter en mer presis og rigid fremstilling av det matematiske innholdet, hvor det i større grad enn tidligere tas for gitt at premisser, begreper og notasjon er kjent og dermed ikke forklares på nytt. Sammen kan dette implisere en forventningsbrist mellom universitetets forventninger til studentenes relasjonelle forståelse av matematikken og hva studentene faktisk har tilegnet seg av kunnskap på videregående skole. Det kan videre sees i sammenheng med at studentene ser ut til å oppleve et skift i det matematiske registeret. Basert på våre resultater kan det se ut som om dette skiftet er for stort til at studentene opplever det som gjennomførbart med tanke på å forstå helheten og sammenhengene i matematikken på MAT1100.

Funnene våre gir med dette indikasjoner på at studentene opplever overgangen mellom videregående- og universitetsmatematikk som utfordrende og til en viss grad uoverkommelig. I alle fall dersom de ønsker å tilegne seg en mer helhetlig relasjonsforståelse av matematikken. Deres tilnærming til matematikken virker til å styres i større grad av en målsetning om å komme seg gjennom faget enn å faktisk forstå matematikken. Om dette skyldes at studentene har jobbet instrumentelt og resultatorientert på videregående og tar med seg denne tilnærmingen videre til universitetet eller om det matematiske språket er en forstyrrende faktor for utvikling av relasjonsforståelse, kan vi ut fra våre funn ikke konkludere med. Derimot kan vi si at det matematiske språket oppleves utfordrende for studentene vi intervjuet og at det er elementer i overgangen fra videregående til universitetet som gjør relasjonsforståelse vanskelig å oppnå.

Vår analyse av eksamensresultater kan tyde på at funnene vi gjorde i intervjuene kan gjelde flere studenter enn de som deltok i vår studie. I oppgave 8 finner vi innslag av samtlige språklige aspekter som til nå har blitt beskrevet, samt et tydelig krav om helhetlig og relasjonell forståelse for å forstå og løse oppgaven på en tilfredsstillende måte.

## 6.1 Didaktiske implikasjoner

Med innføringen av Fagfornyelsen (LK20), nærmere beskrevet i kapittel 1.1, vil det være naturlig å tro at elevene ved videregående skole får mer tid til å fordype seg i, og utforske matematiske sammenhenger og egenskaper (Kunnskapsdepartementet, 2017). Resultatene våre gir indikasjoner på at det matematiske språket bør ha en tydelig tilstedeværelse i denne fordypningen og bør ilegges vekt i form av utforsking og erfaring. Slik Pimm (1987) og Prediger et al. (2016) beskriver matematiske registre, gir våre funn grunnlag for å tro at studentene opplever et for stort skifte i register mellom videregående skole og universitet. Slik som eksempelvis Borge & Hole (2017) og Rønning (2014), finner også vi tegn på at det matematiske språket oppleves utfordrende for studentene som tar matematiske fag på universitetet. Vi tenker det er naturlig at overgangen mellom de to utdanningsinstitusjonene ikke skal hindres av språklige aspekter heller enn av faglig kompetanse. Misforstå oss rett når vi sier dette, da vi ved hjelp av Niss og Højgaard (2002) selv definerer språklige aspekter som en del av det å være matematisk kompetent. Det vi mener er at denne kompetansen på mange måter kan justeres i forhold til hvem man underviser og hvordan man underviser (Niss & Højgaard, 2002). Dermed er det mulig for lærere på videregående å undervise mange av kompetansemålene på en slik måte at innholdet blir relevant samtidig som språket justeres eller utvides. Det samme gjelder universitetsmatematikken, hvor lærebøker og forelesere har mulighet til å lære studentene samme matematiske egenskaper og sammenhenger, samtidig som de språklige innslagene justeres i henhold til mottakerne. Dette er i tråd med hvordan Wade et al. (2018) beskriver støtten som elevene trenger for å tre inn i, og tilegne seg forståelse av språklige aspekter i matematikken.

Med andre ord retter vi ikke pekefingeren verken oppover eller nedover i utdanningsløpet, men påpeker heller at våre funn kan tyde på at det ikke er en god nok sammenheng mellom det matematiske språket som blir kommunisert og lært på videregående og hvilket som kommuniseres på universitetet. Samtidig er det interessant å se om fagfornyelsen vil gi større rom for didaktiske grep og om elevene på videregående skole videre får en større mulighet til å fokusere på relasjonell forståelse i matematikken. Våre funn tyder på at det finnes elever på videregående skole som i hovedsak benytter seg av en instrumentell og algoritmisk metode for å lære seg matematikk, slik også Brandell et al. (2008) finner i sin studie. Ved å ha færre tema som skal undervises og mer tid til fordypning vil dette kunne gi elevene bedre innsikt og en mer relasjonell forståelse. Dette kan igjen spille inn som en positiv faktor for de elevene som velger å fordype seg i matematikk på universitet i senere tid. Kanskje vil det også gjøre til at det matematiske språket virker mindre fremmed da de matematiske sammenhengene er tydeligere for studentene, og dermed gir det skiftet i register som nå oppleves en mer «naturlig» plass i matematikken?

## 6.2 Videre forskning

I kapittel 2.1.1 nevnte vi at det finnes en relativt begrenset mengde forskning på overgangen mellom sekundær og tertiær utdanning, i alle fall dersom man velger å fokusere på matematikk og videre matematisk språk. Dermed håper vi denne oppgaven kan fungere som en inspirasjon til videre forskning rundt dette. Vi er klar over at oppgaven vår har sine begrensninger, noe vi vil diskutere videre i de kommende avsnittene.

Det første vi ønsker å bemerke er at problemstillingen vår er både vid og komplisert, som bemerket i innledningen av dette kapittelet. Dermed vil det i videre forskning kunne være fordelaktig å bryte denne ned i mindre fraksjoner, dersom ønsket er en dypere og mer helhetlig forståelse av fenomener som omhandler studenters opplevelse av matematisk språk og deres forståelse av matematikk. Særlig gjelder dette kanskje de språklige aspektene i matematikken, da disse er både kompliserte og vanskelige å få et godt grep om både for forskere og studenter. Samtidig vil dette kunne stå i veien for en mer helhetlig forståelse da aspekter som eksempelvis symbolbruk, begreper og matematisk presisjon er tett forbundet med hverandre.

I kapittel 3.2 og delkapittel 3.7.3 argumenterte vi for at utvalget i vår kvantitative forskning ikke er forsvinnende lite basert på hvor mange studenter som uteksamineres fra matematikk R2 i løpet av et skoleår og som videre tar et introduksjonskurs tilsvarende MAT1100 på universiteter i Norge. Dette betyr på ingen måte at vi ser på utvalget som representativt. I tillegg er det kvalitative utvalget til en viss grad basert på bekvemmelighet, noe som heller ikke taler til studiens fordel. Med dette vil vår første implikasjon omhandle nettopp størrelse og utvalg. Dersom en slik studie hadde blitt gjennomført, for eksempel på alle de store universitetene i Norge og med et større og mer strategisk utvalg, vil denne studien kunne gi oss et mye bedre bilde av hvordan universitetsstudenter på begynnerkurs i matematikk faktisk opplever overgangen fra matematikk R2 til universitetsmatematikk. Det samme kunne man gjort ved å analysere tilhørende eksamenskarakterer for disse studiestedene.

En annen interessant vinkling ville vært å følge elever gjennom denne overgangen. Altså en studie som følger opp elevene over tid og henter inn data både fra tidspunktet hvor de går på videregående skole og senere fra tiden på universitetet - for de elevene som velger å ta høyere utdanning innen matematikkrevende studier. På denne måten ville man fått et dypere innblikk i elevenes utvikling og kompetanse over tid, både med tanke på matematisk språk og forståelse. Det vi foreslår her vil være et prosjekt som krever betraktelig større og mer omfattende rammer, men som har potensiale til å avdekke mange spørsmål som fremdeles er ubesvart med tanke på de lange linjene i det norske utdanningsløpet i matematikk. En mindre, men kanskje mer realistisk mulighet er å gjennomføre en oppfølgingsstudie på studentene senere i utdanningsløpet for å undersøke om deres opplevelse av matematikken som begynnerstudenter har endret seg med tid og trening i å jobbe mer selvstendig.

Med innføringen av fagfornyelsen (2020) er målsetningen at grunnleggende ferdigheter, dybdekunnskap og relasjonsforståelse skal få en mer sentral rolle i matematikkundervisningen på videregående skole. Dermed vil det være av stor interesse å gjennomføre en større studie innen denne tematikken både før og etter at de elevene som nå går inn på videregående med ny læreplan kommer over på universitetet. Dette kan gi gode indikasjoner og et relevant sammenligningsgrunnlag rundt undervisningspraksis, og om den har endret seg eller ikke med tanke på utvikling av elevers matematiske kompetanse og relasjonsforståelse.

Gjennom kvalitative intervjuer får man et godt innblikk i informantenes subjektive vurderinger og opplevelser av denne overgangen mellom videregående skole og universitet. Dette har sine fordeler, men samtidig finner vi det interessant å se på mulighetene for en bredere kvantitativ analyse av den matematiske kompetansen til studentene. Dette kan for eksempel gjøres gjennom mer omfattende analyser av eksamensbesvarelser, slik Borge & Hole (2017) gjør i sin studie. Slike studier vil gi et dypere innblikk i de faktiske prestasjonene til studentene, men samtidig gi større rom for tolkning rundt oppgavesettet studentene får utdelt. Med dette har vi en tanke om at vår problemstilling kan undersøkes nærmere gjennom en mer omfattende og gjennomført kombinasjon av kvalitative og kvantitative metoder. For eksempel vil en intervjuform med et større innslag av oppgaveløsning kunne gi studentene et bedre grunnlag for å peke på deres utfordringer med disse, samt gi forskere bedre innsikt i deres matematiske forståelse. En slik løsning kombinert med for eksempel analyse av eksamensresultater i større skala, ville vært spennende med tanke på å finne ut mer om studenters relasjonsforståelse og opplevelse av det matematiske språket i overgangen fra videregående skole til universitetsmatematikk.

# Litteraturliste

Adams, A., Karunakaran, M. S., Klosterman, P., Knott, L., & Ely, R. (2016). Using Precise Mathematics Language to Engage Students in Mathematics Practices. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Austin, J. L., & Howson, A. G. (1979). Language and Mathematical Education. *Educational Studies in Mathematics*, *10*(2), 161–197. JSTOR.

Bahn, S., & Barratt-Pugh, L. (2013). Getting reticent young male participants to talk: Using artefact-mediated interviews to promote discursive interaction. *Qualitative Social Work*, *12*(2), 186–199. https://doi.org/10.1177/1473325011420501

Bampili, A.-C., Zachariades, T., & Sakonidis, C. (2017, februar). The transition from high school to university mathematics: A multidimensional process. *CERME 10*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01941656

Befring, E. (2015). *Forskningsmetoder i utdanningsvitenskap*. Cappelen Damm akademisk.

Borge, I. C., & Hole, A. (2017). Et universitetsperspektiv på matematikk i TIMSS Advanced. I A. Hole & L. S. Grønmo (Red.), *Prioritering og progesjon i skolematematikken: Nøkkelen til å lykkes i realfag. Analyser av data fra TIMSS Advanced og TIMSS* (s. 239–256). Cappelen Damm Akademisk.

Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*, 205–250.

Brandell, G., Hemmi, K., & Thunberg, H. (2008). The widening gap—A swedish perspective. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(2), 38–56. https://doi.org/10.1007/BF03217476

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative research in psychology*, *3*(2), 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. R. B. (2018). *Research methods in education* (8th ed.). Routledge.

Colley, H. (2007). Understanding time in learning transitions through the lifecourse. *International studies in sociology of education*, *17*(4), 427–443. https://doi.org/10.1080/09620210701667103

Crawford, K., Gordon, S., Nicholas, J., & Prosser, M. (1998). Qualitatively different experiences of learning mathematics at university. *Learning and Instruction*, *8*(5), 455–468. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(98)00005-X

Creamer, E. (2016). A Primer About Mixed Methods for Research in an Educational Context. *International Journal of Learning, Teaching, and Educational Research*.

Creswell, J. W., & Miller, D. L. (2000). Determining Validity in Qualitative Inquiry. *Theory Into Practice: Getting Good Qualitative Data to Improve Eduational Practice*, *39*(3), 124–130. https://doi.org/10.1207/s15430421tip3903_2

Dalen, M. (2011). *Intervju som forskningsmetode* (2. utg.). Universitetsforlaget.

Dawson, J. W., Jr. (2006). Why Do Mathematicians Re-prove Theorems? *Philosophia Mathematica*, *14*(3), 269–286. https://doi.org/10.1093/philmat/nkl009

Everett, E. L., & Furseth, I. (2012). *Masteroppgaven: Hvordan begynne—Og fullføre* (2. utg.). Universitetsforlaget.

Farrugia, M. T. (2013). Moving from informal to formal mathematical language in Maltese classrooms. *International Journal of Bilingual Education and Bilingualism*, *16*(5), 570–588. https://doi.org/10.1080/13670050.2012.716814

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, 517–545.

Grønmo, L. S., & Hole, A. (2016). Matematikk i videregående skole. I L. S. Grønmo, A. Hole, & T. Onstad (Red.), *Ett skritt fram og ett tilbake: TIMSS Advanced 2015, matematikk og fysikk i videregående skole* (s. 31–54). Cappelen Damm Akademisk.

Grønmo, L. S., Hole, A., & Onstad, T. (2017). Hovedresultater i matematikk i TIMSS Advanced, TIMSS og PISA. I L. S. Grønmo & A. Hole (Red.), *Prioritering og progresjon i skolematematikken* (s. 31–44). Oslo: Cappelen Damm Akademisk/NOASP (Nordic Open Access Scholarly Publishing). https://doi.org/10.23865/noasp.26

Grønmo, S. (2004). *Samfunnsvitenskapelige metoder*. Fagbokforlaget.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational studies in mathematics*, *67*(3), 237–254. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9100-6

Halliday, M. A. K. (1974). Aspects of Sociolinguistics. I *Interactions between linguistics and mathematical education* (s. 64–73).

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*, 6–13. https://doi.org/10.1007/BF01809605

Hanna, G. (2014). Mathematical Proof, Argumentation, and Reasoning. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 404–408). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_102

Hanna, G., & Villiers, M. de. (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (1. Aufl., Bd. 15). Dordrecht: Springer Netherlands.

Hemmi, K. (2009). Bevis – en osynlig del av matematikundervisningen? I G. Brandell, B. Grevholm, K. Wallby, & H. Wallin (Red.), *Matematikdidaktiska frågor: Resultat från en forskarskola* (s. 92–104). Nationellt centrum för matematikutbildning NCM, Göteborgs Universiet.

Hernandez-Martinez, P., Williams, J., Black, L., Davis, P., Pampaka, M., & Wake, G. (2011). Students' views on their transition from school to college mathematics: Rethinking «transition» as an issue of identity. *Research in mathematics education*, *13*(2), 119–130. https://doi.org/10.1080/14794802.2011.585824

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* Jonathan Cape.

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(3), 333–355. https://doi.org/10.1007/BF00312451

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. I J. Hiebert (Red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates.

Iannone, P., & Nardi, E. (2008). *The interplay between syntactic and semantic knowledge in proof production: Mathematicians' perspectives* [Paperpresentasjon]. Proceedings of the 5th Conference on European Research in Mathematics Education (CERME 5), Larnaca, Kypros. http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME5b/WG14.pdf

Johannessen, A., Christoffersen, L., & Tufte, P. A. (2016). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (5. utg.). Abstrakt forlag.

Johnsen-Høines, M. (2006). *Begynneropplæringen: Fagdidaktikk for barnetrinnets matematikkundervisning* (2. utg., 4. oppl.). Caspar forlag.

Johnson, B., & Christensen, L. B. (2012). *Educational research: Quantitative, qualitative, and mixed approaches* (4th ed.). Sage.

Jørgensen, K. O., & Goodchild, S. (2009). Utvikling av unge elevers relasjonelle forståelse i matematikk. I E. K. L. Reikerås, R. Mosvold, & J. Fauskanger (Red.), *Å regne i alle fag*. Universitetsforlaget.

Kenney, J. M. (2005). *Literacy strategies for improving mathematics instruction*. Association for Supervision and Curriculum Development.

Kranda, J. (2008). *Precise Mathematical Language: Exploring the Relationship Between Student Vocabulary Understanding and Student Achievement*.

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/?kode=mat03-02&lang=nob

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (T. M. Anderssen & J. Rygge, Overs.; 3. utg.). Gyldendal akademisk.

Larsen, A. K. (2017). *En enklere metode: Veiledning i samfunnsvitenskapelig forskningsmetode* (2. utg.). Fagbokforlaget.

Lew, & Mejia-Ramos, J. (2019). Linguistic Conventions of Mathematical Proof Writing at the Undergraduate Level: Mathematicians' and Students' Perspectives. *Journal for Research in Mathematics Education*, *50*, 121. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.50.2.0121

Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Sage.

Lindstrøm, T. L. (2016). *Kalkulus* (4. utg.). Universitetsforlaget.

Lødding, B., Markussen, E., & Wollscheid, S. (2016). *Kvalitet, innhold og relevans i de studieforberedende utdanningsprogrammene.* (Nr. 1; s. 122). https://www.udir.no/globalassets/filer/tall-og-forskning/forskningsrapporter/kvalitet-innhold-og-relevans.pdf

Manger, T. (2013). Motivasjon for skulearbeid. I R. Säljö & R. J. Krumsvik (Red.), *Praktisk-pedagogisk utdanning: En antologi* (s. 145–169). Fagbokforlaget.

Mellin-Olsen, S. (1981). Instrumentalism as an educational concept. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 351–367. https://doi.org/10.1007/BF00311065

Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet: En undervisninglære*. NKI-forlaget.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(3), 249–266. https://doi.org/10.1007/BF01273731

Nardi, E., & Iannone, P. (2006). *To appear and to be: Acquiring the genre speech of university mathematics* [Paperpresentasjon]. Proceedings of the 4th Conference on European Research in Mathematics Education (CERME 4), San Feliu de Guixols, Spania. http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME4/CERME4_WG14.pdf

NESH. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi* (4. utgave). Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora.

Nilssen, V. L. (2012). *Analyse i kvalitative studier: Den skrivende forskeren*. Universitetsforlaget.

Niss, M., & Højgaard, T. (2002). Kompetencer og matematiklæring, Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark. Utdannelsesstyrelsens temahæfteserie. *Undervisningsministeriet (Ministry of Education)*, *18*, 1–334.

Otten, S., Keazer, L. M., & Karaman, R. (2019). Teachers' talk about the mathematical practice of attending to precision. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *22*(1), 69–93. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9375-1

Parameswaran, R. (2009). Understanding Rolle's Theorem. *The Mathematics educator*, *19*(1), 18.

Patton, M. Q. (2015). *Qualitative research & evaluation methods: Integrating theory and practice* (4th ed.). Sage.

Percy, W. H., Kostere, K., & Kostere, S. (2015). Generic qualitative research in psychology. *Qualitative report*, *20*(2), 76.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms*. Routledge & Kegan Paul.

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. Routledge.

Prediger, S., Clarkson, P., & Boses, A. (2016). Purposefully Relating Multilingual Registers: Building Theory and Teaching Strategies for Bilingual Learners Based on an Integration of Three Traditions. I R. Barwell, P. Clarkson, A. Halai, M. Kazima, J. Moschkovich, N. Planas, M. Setati-Phakeng, P. Valero, & M. Villavicencio Ubillús (Red.), *Mathematics Education and Language Diversity: The 21st ICMI Study* (s. 193–215). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-14511-2_11

Rav, Y. (1999). Why Do We Prove Theorems? *Philosophia mathematica*, *7*(1), 5–41. https://doi.org/10.1093/philmat/7.1.5

Riccomini, P. J., Smith, G. W., Hughes, E. M., & Fries, K. M. (2015). The Language of Mathematics: The Importance of Teaching and Learning Mathematical Vocabulary. *Reading & Writing Quarterly*, *31*(3), 235–252. https://doi.org/10.1080/10573569.2015.1030995

Rønning, F. (2014). *Overgang fra videregående opplæring til universitet/høgskole—UHRs undersøkelse* [Lysarkpresentasjon]. https://docplayer.me/1976481-Overgang-fra-videregaende-opplaering-til-universitet-hogskole-uhrs-undersokelse.html

Rønning, F. (2015). Innovativ utdanning i matematikk. *Uniped, 38*(4), 319–326. idunn.no. https://doi.org/10.18261/ISSN1893-8981-2015-04-08

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse—Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, *51–52*, 1–9. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.013

Shockey, T., & Pindiprolu, S. (2015). Uniquely Precise: Importance of Conceptual Knowledge and Mathematical Language. *Journal on School Educational Technology*, *11*(1), 28.

Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *The Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9–15. JSTOR.

Skemp, R. R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics: Expanded American Edition*. Routledge. https://www.routledge.com/The-Psychology-of-Learning-Mathematics-Expanded-American-Edition/Skemp/p/book/9780805800586

Solbakken, S. S. (2019). *Statistikk for nybegynnere* (Bd. 1–4). Fagbokforlaget.

Solvang, R. (1986). *Matematikk-didaktikk*. NKI-forlaget.

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y.-H. (2011). *Cognitive Development of Proof*. *15*. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_2

Thagaard, T. (2009). *Systematikk og innlevelse en innføring i kvalitativ metode* (3. utgave). Fagbokforlaget.

Thomas, M. O. J., de Freitas Druck, I., Huillet, D., Ju, M.-K., Nardi, E., Rasmussen, C., & Xie, J. (2015). Key Mathematical Concepts in the Transition from Secondary School to University. I S. J. Cho (Red.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (s. 265–284). Springer International Publishing.

Tjora, A. (2017). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis. 3. Utgave.*

UiO. (u.å.). *MAT1100 – Kalkulus—Universitetet i Oslo*. Hentet 11. mai 2021, fra https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT1100/index.html

UiO. (2020). *Løsningsforslag avsluttende eksamen MAT1100 høsten 2020*. https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT1100/h20/losnforslagavsluttende.html

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplan i matematikk for realfag—Programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering*. https://www.udir.no/kl06/MAT3-01

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk for realfag (matematikk R)* (MAT03-02). https://www.udir.no/lk20/mat03-02

Wade, C., Cimbricz, S., Sonnert, G., Gruver, M., & Sadler, P. (2018). The Secondary-Tertiary Transition in Mathematics: What High School Teachers Do to Prepare Students for Future Success in College-Level Calculus. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, *9*, 1. https://doi.org/10.7916/jmetc.v9i2.583

Winsløw, C. (2007). Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse et la complémentarité des approches diverses de la didactique. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, *12*, 189–204.

Woolfolk, A., Hughes, M., & Walkup, V. (2013). *Psychology in education* (2nd ed.). Pearson.

Wæge, K., Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, & Institutt for matematiske fag. (2007). *Elevenes motivasjon for å lære matematikk og undersøkende matematikkundervisning*. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen, Fakultet for informasjonsteknologi, matematikk og elektroteknikk, Institutt for matematiske fag.

# Vedlegg 1 – Vurdering fra NSD

**29.07.2020 - Vurdert**
Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet 29.07.2020 med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:
https://nsd.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html

Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 01.08.2022.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20).

NSD vurderer at informasjonen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art.

13. Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Kajsa Amundsen
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

# Vedlegg 2 – Informasjons- og samtykkebrev

## Vil du delta i forskningsprosjektet

## *"Matematisk språk – overgangen fra videregående skole til universitetet"*

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å *undersøke hvordan det matematiske språket påvirker nye studenter i overgangen fra videregående skole til matematikk på universitetsnivå*. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

**Formål**
Prosjektets formål er å undersøke hvordan studenter opplever overgangen fra videregående skole til universitetet med tanke på matematisk språk. Vi ønsker å bruke resultatene fra studien til å diskutere om det kan gjøres noen tilpasninger ved matematikkundervisningen i videregående skole som kan bidra til å forberede fremtidige studenter på denne overgangen.

Dette er en masterstudie som skal gjennomføres av to lektorstudenter med fordypning i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Oslo.

**Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?**
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo er ansvarlig for prosjektet.

**Hvorfor får du spørsmål om å delta?**
Du blir spurt om å delta i dette forskningsprosjektet på grunn av din deltagelse i kurset MAT1100 ved Universitetet i Oslo, samt på grunn av din matematiske bakgrunn hvor du nylig fullførte faget matematikk R2 på videregående skole.
Vi ønsker å intervjue 5-10 studenter som oppfyller kriteriene for deltagelse i denne studien.

**Hva innebærer det for deg å delta?**
Dersom du velger å delta i prosjektet innebærer dette at du deltar i et intervju. Intervjuet vil ta omtrent 60 minutter og vil handle om dine erfaringer og refleksjoner rundt matematikk og det matematiske språket på både videregående skole og universitetet. Intervjuet vil også omhandle spørsmål rundt en matematisk oppgave, hvor vi er interessert i å høre om dine refleksjoner rundt denne.

Det vil bli tatt lydopptak og gjort notater fra intervjuet. Lydopptak vil bli slettet etter at intervjuet er transkribert og din deltagelse vil bli anonymisert ved transkribering.

**Det er frivillig å delta**
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Intervjuet du gjør vil bli anonymisert. Din deltagelse og dine uttalelser vil ikke påvirke ditt forhold til foreleser, gruppelærer eller andre ansatte ved Universitetet i Oslo.

**Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger**

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Før intervjuet er transkribert og anonymisert er det kun prosjektdeltakerne som har tilgang til dine opplysninger.

Studenter som deltar i studien vil ikke kunne gjenkjennes ved publikasjon av oppgaven. All informasjon vil anonymiseres og annen informasjon som vil kunne identifisere deltakere vil bli utelatt fra oppgaven.

**Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?**
Personopplysninger og lydopptak slettes senest ved prosjektslutt.

**Dine rettigheter**
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

**Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?**
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

**Hvor kan jeg finne ut mer?**
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- *Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo* ved:
  Veileder: Arne Hole, tlf 22855048 eller e-post arne.hole@ils.uio.no
  Medveileder: Helmer Aslaksen, tlf 22844482 eller e-post helmer.aslaksen@ils.uio.no
  Masterstudent: Lars Retterholt, tlf 90946010 eller e-post larstr@student.uv.uio.no
  Masterstudent: Brede Martinussen, tlf 98481804 eller e-post bredema@student.uv.uio.no
- Vårt personvernombud: Roger Markgraf-Bye, e-post personvernombud@uio.no

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

| | | |
|---|---|---|
| *Prosjektansvarlig* | Masterstudent | Masterstudent |
| Arne Hole | Lars Retterholt | Brede Martinussen |

-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## Samtykkeerklæring.

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Matematisk språk – overgangen fra videregående skole til universitetet*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ å delta i *intervju*

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

# Vedlegg 3 – Obligatorisk oppgave

## MAT 1100
## Obligatorisk oppgave 2 av 2, høsten 2020

**Innlevering**

Muntlig presentasjon (30 minutter) sammen med en medstudent. Presentasjonen gjøres via Zoom eller ved fysisk oppmøte, etter avtale med gruppelærer. Gruppelærer setter opp tidsplan for presentasjonene, og avgjør under hver enkelt presentasjon hvilke deler av oppgavene dere skal presentere.

Studenter som ikke får sin presentasjon godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert, skriftlig besvarelse. Manglende oppmøte på presentasjonstidspunktet, uten søknad om utsettelse/skriftlig levering, gir ikke mulighet til å levere skriftlig besvarelse til utsatt frist. Studenter som presenterer sammen, vurderes individuelt. Det er derfor mulig at den ene kan få presentasjonen godkjent og den andre ikke. Hvis du på grunn av akutt sykdom eller andre tungtveiende grunner ønsker å søke om skriftlig innlevering, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) innen fredag 23. oktober kl. 12.00. Alle søknader må ha vedlagt dokumentasjon i form av legeattest eller bekreftelse på lengde på idrettsarrangement. Studenter som får innvilget skriftlig innlevering, har bare ett forsøk og må overholde innleveringsfristen i neste avsnitt. Foreleser, plenumsregner og gruppelærere har ikke anledning til å gi utsettelse på innlevering eller fritak fra muntlig presentasjon.

**Annen gangs innleveringsfrist (skriftlig) for dem som ikke får første forsøk godkjent:**

Torsdag 5. november kl. 14.30 i Canvas.

Denne fristen gjelder også for studenter som har fått innvilget skriftlig innlevering. For skriftlig innlevering gjelder ellers de samme reglene som for Oblig 1.

**For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:**
uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

**Oppgave 1**

La $f$ være funksjonen definert for alle reelle tall $x$ ved

$$f(x) = \sqrt{\frac{\arctan x}{1 + x^2}}$$

Finn volumet som framkommer når grafen til $f$ på intervallet [10, 11] roteres om $x$-aksen.

**Oppgave 2**

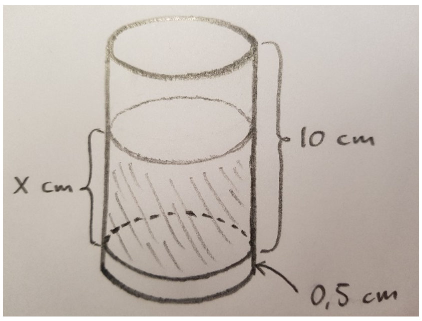
La $f$ være funksjonen definert for alle reelle tall $x$ ved

$$f(x) = xe^{-|x|}$$

a) Avgjør om $f$ er deriverbar i 0.
b) Avgjør hvor $f$ vokser og avtar, og finn eventuelle lokale eller globale ekstremalpunkter for $f$.
c) Avgjør hvor $f$ er konveks og konkav, og finn eventuelle vendepunkter for $f$.
d) Undersøk om $f$ har vertikale, horisontale eller skrå asymptoter. Skisser grafen til $f$.

**Oppgave 3**

Arne sitter på et fly og har fått servert mat med et glass drikke. Det er litt turbulens, så Arne lurer på hvor mye han må drikke for at glasset skal stå så stødig som mulig. Han tenker da at det gjelder å få tyngdepunktet til glasset, inkludert innhold, så lavt ned som mulig. Glasset er formet som en rett, sirkulær sylinder med en bunn som har tykkelse 0,5 cm. Veggen i glasset er et sylinderskall med indre radius 3 cm og høyde 10 cm. Glasset står på et horisontalt bord.




Arne gjetter at bunnen i glasset veier 30 gram, og at glassveggen veier 70 gram. La $T(x)$ være høyden til tyngdepunktet for glasset med innhold over bordet målt i cm, når innholdet har dybde $x$ cm.

(Oppgave 3 forts.)

Arne vet at vi har denne sammenhengen:

(Total masse for glasset med innhold) · $T(x)$

= (Bunnens masse) · (Høyden til bunnens tyngdepunkt)

+ (Glassveggens masse) · (Høyden til glassveggens tyngdepunkt)

+ (Innholdets masse) · (Høyden til innholdets tyngdepunkt)

a) Arne antar at massetettheten for innholdet i glasset er omtrent som for vann, altså 1 gram per kubikkcentimeter. Ved hjelp av dette regner Arne ut at

$$(30 + 70 + \pi \cdot 3^2 \cdot x \cdot 1) \cdot T(x) = 30 \cdot 0{,}25 \; + \; 70 \cdot 5{,}5 \; + \; \pi \cdot 3^2 \cdot x \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right)$$

Forklar hvorfor. Bruk dette til å vise at

$$T(x) = \frac{9\pi x^2 + 9\pi x + 785}{18\pi x + 200}$$

b) Regn ut $T(0)$ og $T(10)$. Hvordan kan disse funksjonsverdiene tolkes?

c) Avgjør hvor $T(x)$ vokser og avtar på definisjonsområdet $D_T = [0{,}10]$. Finn eventuelle lokale og globale ekstremalpunkter for $T(x)$.

d) Hvilken dybde $x$ i glasset gir lavest høyde $T(x)$ for tyngdepunktet?

e) Regn ut funksjonsverdien $T(x)$ tilhørende verdien for $x$ som du fant i d). Kalkulator er tillatt her. Hva oppdager du?

LYKKE TIL!

# Vedlegg 4 – Definisjoner fra læreboken

**Artefakter til intervju. Definisjoner og setninger fra MAT1100 læreboken.**

**5.3.5 Ekstremalverdisetningen** La $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon definert på et lukket, begrenset intervall. Da har $f$ både maksimums- og minimumspunkt(er).

**6.2.3 Middelverdisetningen** Anta at funksjonen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, og at den er deriverbar i alle indre punkter $x \in (a, b)$. Da finnes det et punkt $c \in (a, b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**5.1.1 Definisjon**

En funksjon $f$ er *kontinuerlig* i et punkt $a \in D_f$ dersom følgende gjelder: For enhver $\epsilon > 0$ (uansett hvor liten), finnes det en $\delta > 0$ slik at når $x \in D_f$ og $|x - a| < \delta$, så er $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Vi kan altså få avstanden mellom $f(x)$ og $f(a)$ mindre enn $\epsilon$ ved å kreve at avstanden mellom $x$ og $a$ er mindre enn $\delta$.

**5.4.10 Definisjon**

Vi sier at $f(x)$ *går mot b som grenseverdi når $x$ går mot* $\infty$ dersom det til enhver $\epsilon > 0$, finnes en $N \in \mathbb{R}$ slik at $|f(x) - b| < \epsilon$ for alle $x \geq N$. Vi skriver $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$. Tilsvarende sier vi at $f(x)$ nærmer seg $b$ som grenseverdi når $x$ går mot $-\infty$ dersom det til enhver $\epsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{R}$ slik at $|f(x) - b| < \epsilon$ når $x \leq N$. Vi skriver $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Alle utklipp er hentet fra boken til Lindstrøm (2016).

# Vedlegg 5 – Avsluttende eksamen MAT1100 høsten 2020

## UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Eksamen i: | MAT1100 — Kalkulus |
| Eksamensdag: | Mandag 30. november 2020 |
| Tid for eksamen: | 15.00 – 19.00 |
| Oppgavesettet er på 3 sider. | |
| Vedlegg: | Ingen |
| Tillatte hjelpemidler: | Alle hjelpemidler tillatt |

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 12 deloppgaver som teller 6 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

**Oppgave 1.** La $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ være gitt ved

$$f(x, y, z) = xy^2z^3.$$

I hvilken retning ut fra punktet $(1, 1, 1)$ er den retningsderiverte av $f$ størst?

**Oppgave 2.** La $0 < a < b$. Finn volumet av omdreiningslegemet som fås når området under grafen til

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

på intervallet $[a, b]$ dreies om $x$-aksen. Finn også $0 < a < b$ slik at volumet er 100.

**Oppgave 3.** Finn et eksempel på et ubestemt integral som kan løses ved å bruke substitusjonen

$$u = \arctan 7x$$

Løs så integralet ditt.

**Oppgave 4.** Finn et eksempel på en følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ av reelle tall som er strengt voksende og som konvergerer mot 5.

*(Fortsettes på side 2.)*

**Oppgave 5.** Finn det komplekse tallet $z$ som er slik at modulus til $z$ er $|z| = 4$, og den ene kvadratroten til $z$ har argument $\theta = \pi/3$. Skriv $z$ på formen $z = a + ib$.

**Oppgave 6.** Finn en funksjon $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ slik at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = y \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = x$$

**Oppgave 7.** Vi studerer et plantesamfunn, og vi deler plantene i tre aldersklasser: Nyspirte, unge og voksne. La $x_n$, $y_n$ og $z_n$ være antall nyspirte planter, unge planter og voksne planter ved tidspunkt $t = n$, der tiden $t$ regnes i år og $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

I modellen vår antar vi at hver ungplante og voksen plante gir frø til 1 nyspirt plante neste år. Nyspirte planter gir ikke frø til nye planter. Alle de nyspirte plantene overlever til neste år, og de er da ungplanter. Videre overlever 80 % av ungplantene til neste år, og disse er da voksne. Av de voksne plantene overlever 60 % til neste år.

a) Begrunn at overgangsmatrisen $M$ slik at

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad \text{for } n \geq 0.$$

er gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

b) Fins det en matrise $N$ slik at

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = N \cdot \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$$

for alle $n \geq 0$? (Husk at du må begrunne svaret og vise eventuell regning som brukes underveis.)

c) Anta nå i stedet at hver ungplante gir frø til 2 nyspirte planter neste år, men at kun halvparten av de unge plantene overlever til neste år. Ellers er modellen som før. Finn overgangsmatrisen $M$ i dette tilfellet.

**Oppgave 8.** Vis at hvis $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er en to ganger deriverbar funksjon slik at $f'(0) = f(0)$ og $f'(1) = f(1)$, så fins $c \in (0, 1)$ slik at

$$f'(c) = f''(c).$$

*(Fortsettes på side 3.)*

**Oppgave 9.** La $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være funksjonen gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \dfrac{1}{x^2} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

a) Begrunn at $f$ er kontinuerlig i $x = 0$.

b) Avgjør om $f$ er deriverbar i $x = 0$.

SLUTT