

**Dimensjons-
estimering fra
elektroencefa-
logrammer
(EEG)**

Hilde Madsen

Hovedfagsoppgave

15. august 1995

Forord

Denne oppgaven¹ er det skriftlige arbeidet til min Cand.Scient.grad. Oppgaven ble påbegynt i august 1993 og avsluttet i august 1995. Jeg vil gjerne få takke min veileder Nils D. Christophersen for all veiledning på hovedfag og ikke minst Dimitris Kugiumtzis alle tips og for at han alltid har tid til å hjelpe og komme med oppmuntringer. I løpet av hovedfaget fikk jeg anledning til å reise på høstskole til Würzburg, Tyskland, som viste seg å være et nyttig opphold. Turen ble utført med støtte fra Institutt for Informatikk. Jeg vil derfor også rette en takk til instituttet, Nils og Dimitris som gjorde denne turen mulig. Oppgaven er utført i samarbeid med Statens Senter for Epilepsi i Sandvika som har bidratt med de reelle dataene fra EEG (elektroencefalografi) og EKoG (elektrokortikografi). Jeg vil gjerne takke overlege Pål Larsson for å ha skaffet til veie alle data og for alle tips. En takk går også til Riitta Hari ved "The Low Temperature Laboratory", Helsinki, for å ha bidratt med et datasett registrert ved MEG (magnetoencefalografi).

Jeg vil også få takke Svein Bøe for hjelp til problemer i forbindelse med signalbehandling, Geir Linløkken for korrekturlesning og tips av alle slag, Ole Bjørn Hessen, Nenad Ćirić, Jon Erlend Dahlen og Olav T. Tømte for hjelp og tips i forbindelse med Perl, Shell-script, Matlab eller L^AT_EX samt Anne-Gunn Hjellbrekke for korrekturlesning.

Til slutt vil jeg takke alle som har gjort tiden på Ifi til en trivelig tid!

Opgaven er utført med støtte fra NFR til å benytte IBM-klynga ved Universitetet i Oslo.

Oslo 15.august 1995

Hilde Madsen

¹Opgaven er typesatt i L^AT_EX med fonten roman 11pt, tegninger er laget i Idraw og plott i Matlab eller Mathematica.

Notasjon

De fleste tegn og symboler benyttet i oppgaven finnes i tabellen nedenfor. Matriser er skrevet med store bokstaver. Vektorer er understreket og elementer av vektorer eller matriser er indeksert.

Symbol	betydning
$X = \{x_i\}_{i=1}^N$	– en tidsserie
x_i	– elementer i tidsserien
N	– lengden av tidsserien gitt i antall punkter i tidsserien
\underline{x}_i	– en vektor, som oftest et punkt i faserommet rekonstruert fra X .
D	– den fraktale dimensjonen
d_c	– boksdimensjonen
ν	– korrelasjonsdimensjonen
$R(\tau)$	– autokorrelasjonsfunksjonen
$I(\tau)$	– gjensidig informasjon
t_s	– ett samplingsintervall
τ	– tidsforsinkelse, dvs. avstand mellom to etterfølgende elementer i en rekonstruert tilstandsvektor gitt i antall samplingsintervaller
τ_c	– korrelasjonstid gitt i antall samplingsintervaller
τ_0	– første nullpunkt for autokorrelasjonsfunksjonen gitt i antall samplingsintervaller
τ_{min}	– første lokale minimum for autokorrelasjonsfunksjonen gitt i antall samplingsintervaller
τ_I	– første lokale minimum for den gjensidige informasjonen, $I(t)$, gitt i antall samplingsintervaller
m	– imbeddingsdimensjon, antall elementer i en rekonstruert tilstandsvektor
w	– vinduslengde, dvs. lengden av en rekonstruert tilstandsvektor gitt i antall samplingsintervaller, $w = (m - 1)\tau$

Tabellen fortsetter neste side.

Symbol	betydning
w_R	– gjennomsnittlig tid mellom lokale maksima i signalet gitt i antall samplingsintervaller
w_P	– gjennomsnittlig periode i et skalart signal gitt i antall samplingsintervaller
τ_R	– estimat for tidsforsinkelsen beregnet ved $\tau_R = \frac{w_R}{m-1}$
τ_P	– estimat for tidsforsinkelsen beregnet ved $\tau_P = \frac{w_P}{m-1}$
t_c	– korrelasjonstid
t_w	– vinduslengden målt med hensyn på tid, $t_s * w$
K	– autokorrelasjonslengden, parameter i korrelasjonsintegralet
E	– epoken, $E = Nt_s$
Δl	– lengden av skaleringsregionen, $\Delta l = \frac{l_1}{l_0}$.
L	– avstanden mellom to punkter på grafen av korrelasjonsintegralet mhp. l , dvs. $L = \frac{l_{i+1}}{l_i}$.

Forkortelser

Forkortelse	betydning
EEG	Elektroencefalografi
EKoG	Elektrokortikografi
FIR	Finite Impulse Response
IIR	Infinite Impulse Response
MEG	Magnetoencefalografi
MOD	Method of Delay
SSA	Singular Spectrum Approach

Innhold

1 Innledning	1
I Bakgrunn	5
Oversikt over Del I	7
2 Definisjoner og begreper	9
2.1 Kaos	9
2.2 Stasjonaritet	10
2.2.1 Stokastiske systemer	10
2.2.2 Deterministiske systemer	10
2.3 Attraktor	11
2.3.1 Lorenz-attraktoren	11
2.3.2 Rössler-attraktoren	12
2.3.3 Hénon-attraktoren	12
2.4 Fraktal dimensjon	13
2.4.1 Boksdimensjonen	14
2.4.2 Korrelasjonsdimensjonen	14
2.4.3 Punktvis skaleringsdimensjon	15
2.5 Rekonstruering av faserom	16
2.5.1 Method of Delays (MOD)	16
2.5.2 Singular Spectrum Approach (SSA)	17
2.5.3 Takens Imbeddingsdimensjon	18
2.6 Autokorrelasjonsfunksjonen	18
2.7 Generell informasjon (mutual information)	19
2.8 Effekttetthetsspekteret	19
3 Elektromagnetiske signaler i hjernen	21
3.1 Bakgrunnen for oppgaven	21
3.1.1 Epilepsi	21
3.1.2 Elektriske aktivitet i hjernen	22
3.1.3 Kaos i forbindelse med elektromagnetiske signaler fra hjernen	23
3.2 Registreringsmetoder	24
3.2.1 Elektroencefalografi (EEG)	24
3.2.2 Elektrokortikografi (EKoG)	25
3.2.3 Magnetoencefalografi (MEG)	25
3.3 Beskrivelse av elektromagnetiske signaler	26

3.3.1	Normal hjerneaktivitet registrert ved EEG, EKG eller MEG	26
3.3.2	Artefakter	27
3.3.3	Epileptogen aktivitet registrert ved EEG	27
II Dimensjonsestimering fra kunstige data		29
Oversikt over Del II		31
4	Dimensjonsestimering ved Grassberger-Procaccia-algoritmen	33
4.1	Grassberger-Procaccia-algoritmen	33
4.1.1	Skaleringsregionen	34
4.1.2	Beregning av stigningstallet ν	35
4.1.3	Lokalisering av skaleringsregion	36
4.1.4	Lengden av skaleringsregionen	36
4.1.5	Fremgangsmåte for beregning av dimensjonsestimat	36
4.2	Rekonstruering ved MOD	38
4.2.1	Imbeddingsdimensjonen m	38
4.2.2	Tidsforsinkelsen τ	39
4.2.3	Metoder for valg av τ	40
4.2.4	Metoder for å beregne gjennomsnittlig periode	42
4.2.5	Rekonstruksjon og valg av skaleringsregion	44
4.2.6	Oppsummering	46
4.3	Rekonstruering av faserommet ved SSA	46
4.3.1	Redusering av imbeddingsdimensjonen ved singularverdi	46
4.3.2	Konvergens i korrelasjonsintegralet med hensyn på m	47
4.3.3	Vinduslengden w og sammenligning av MOD og SSA	48
4.3.4	Oppsummering	50
4.4	Påliteligheten av dimensjonsestimatene	51
4.4.1	Tettheten av punkter på grafen	52
4.4.2	Antall punkter	53
4.4.3	Epoken	54
4.4.4	Samplingsintervallet	54
4.4.5	Autokorrelasjonslengden	55
4.4.6	Valgte kriterier for godkjenning av dimensjonsestimatene	55
4.5	Oppsummering	56
5	Rekurrensplott	59
5.1	Beregning av rekurrensplott	59
5.2	Tolkning av rekurrensplott i sort-hvitt	60
5.3	Tolkning av rekurrensplott i farger	61
5.4	Følsomhet for rekonstruering av faserommet	64
5.5	Om algoritmen for beregning av rekurrensplott	66
5.6	Alternative stasjonaritetstester	67
5.7	Anvendelse i oppgaven	67
6	Punktvis dimensjon (PD2)	69
6.1	Kriterier for å beholde eller forkaste lokale dimensjonsestimater	69

6.2	Fremgangsmåte for beregning av PD2	70
6.3	PD2 av stasjonære tidsserier	71
6.4	PD2 av ustasjonære tidsserier	71
6.5	Lokalisering av de kastede referansepunktene på attraktoren	74
6.6	Oppsummering	74
7	Dimensjonsestimering fra filtrerte og støyfylte signaler	77
7.1	Kvantifiseringsfeil og hvit støy	77
7.1.1	Kvantifiseringsfeil	77
7.1.2	Normalfordelt hvit støy	79
7.2	Lineære filtre	81
7.2.1	IIR-filtre	81
7.2.2	FIR-filter	81
7.2.3	Filtrering ved SSA	82
7.2.4	Oppsummering	82
7.3	Filtrering av signaler med hvit støy	83
7.4	Oppsummering	86
8	Dimensjonsestimering fra surrogat-data	87
8.1	Surrogatdata fra nullhypotese om lineært korrelert støy	88
8.2	Dimensjonsestimering fra surrogatdataene	90
8.3	Hypotesetesting	90
8.4	Fremgangsmåte	92
9	Oppsummering	93
III	Dimensjonsestimering fra elektromagnetiske hjernesignaler	97
	Oversikt over Del III	99
10	Stasjonaritet og periodisitet i datasettene	101
10.1	Datasett	101
10.1.1	EKoG2	102
10.1.2	EKoG1	102
10.1.3	MEG	102
10.1.4	EEGE	102
10.1.5	EEGN	103
10.2	Et eksempel på stasjonaritetstest ved rekurrensplott	103
10.3	Stasjonaritet	103
10.4	Periodisitet	108
11	Dimensjonsestimering fra elektromagnetiske hjernesignaler	113
11.1	Parametersetting for dimensjonsestimering	113
11.2	Dimensjonsestimering fra normal hjerneaktivitet	115
11.2.1	Dimensjonsestimering fra normal hjerneaktivitet i EEG	115
11.2.2	Dimensjonsestimering fra beta-aktivitet i MEG	116
11.2.3	Oppsummering	117
11.3	Dimensjonsestimering av epileptogen hjerneaktivitet	117

11.3.1	EKoG2	117
11.3.2	EKoG1, MEG og EEGE	121
11.4	Oppsummering	123
12	Håndtering og dimensjonsestimering av ustasjonære signaler	125
12.1	Reduksjon av drift i middelvei av et signal	125
12.1.1	Dimensjonsestimering	127
12.1.2	Oppsummering	127
12.2	Differanse mellom kanaler	128
12.2.1	Eksempler med EEG	129
12.2.2	Dimensjonsestimering av referansefrie signaler	130
12.2.3	Oppsummering	132
12.3	Ujevn periode	133
12.4	Dimensjonsestimering ved PD2 av ustasjonære signaler	134
12.5	Glidende dimensjonsestimater ved G-P	136
12.5.1	Forbedringer	138
13	Dimensjonsestimering fra filtrerte og ufiltrerte signaler	139
13.1	Dimensjonsestimering fra IIR-filtrerte signaler	140
13.2	Dimensjonsestimering fra FIR-filtrerte signaler	141
13.3	Filtrering ved SSA	141
13.4	Korreksjon for temporær korrelasjon	142
13.5	Oppsummering	142
14	Surrogatdata på EEG	145
15	Avsluttende diskusjon	149
15.1	Oppsummering	149
15.2	Videre arbeid	150
15.3	Konklusjon	151
A	Datasettene	153
B	Dimensjonsestimering fra multikanal rekonstruering	167
C	Filtrering ved IIR-filtre	175
D	Autokorrelasjonsfunksjonen	177
E	Matlab-programmer	179

Kapittel 1

Innledning

Elektro-encefalografi (EEG) er en metode for å registrere elektrisk aktivitet i hjernen. Ved normal hjerneaktivitet endrer EEG-signalene seg ved enhver påvirkning i hjernen, for eksempel med bevissthetsforandringer, ved utførelse av mentale oppgaver og ved forskjellige stadier av søvn. Ved enkelte hjerne-skader og -sykdommer som epilepsi har signalet en annen karakter enn ved normal hjerneaktivitet. EEG benyttes derfor som et diagnostisk hjelpemiddel i forbindelse med hjerne-skader og -sykdommer.

I de første årene med EEG-registreringer foregikk mye av bearbeidingen manuelt. Registreringene kan pågå over flere timer, og det er derfor blitt utviklet flere metoder for automatisering av EEG-analysen. Imidlertid søker man etter nye og bedre metoder. EEG blir ansett som et støyfylt signal. Flere metoder for å analysere signalet er derfor basert på teorien for stokastiske prosesser. I denne oppgaven anvendes en metode basert på en antagelse om at det underliggende systemet er deterministisk. Valg av metode har sammenheng med at det i løpet av de siste tiårene har vokst frem et eget fagfelt innen ulineær modellering populært kalt kaosteori. Denne teorien gjør det mulig å beskrive signaler som tidligere er blitt beskrevet som stokastiske, som deterministiske. Oppdagelsen av dette og utviklingen av fagfeltet blir av enkelte ansett som svært viktig;

“The twentieth-century science will be remembered for just three things: relativity, quantum mechanisms and chaos”. [?]

Kaotiske systemer gir uregelmessige og aperiodiske signaler med et bredt frekvensspekter. Dette er egenskaper vi også finner hos stokastiske signaler. De to typer signaler kan ikke skilles visuelt eller ved lineære metoder. Kaotiske systemer kan imidlertid beskrives deterministisk ved ulineære differens- eller differensiallikninger. For å avgjøre om et signal er kaotisk eller stokastisk er det utviklet flere metoder hvorav de mest kjente er basert på ulineær prediksjon, estimering av Lyapunoveksponenter og dimensjonsestimering. I denne oppgaven vil jeg se på to metoder for dimensjonsestimering; Grassberger-Procaccia-algoritmen (G-P) for beregning av korrelasjonsdimensjonen og en metode inspirert av [?] for beregning av punktvis dimensjon (PD2). Grassberger-Procaccia-algoritmen for beregning av korrelasjonsdimensjonen er den metoden som har vært hyppigst brukt i forbindelse med EEG.

I slutten av åttiårene anvendte man G-P samt andre teknikker fra ulineær modellering på EEG for å vise at

“The EEG is not noise, but a quasideterministic signal” [?]

Resultatene ble tolket som positive, og spesielt resultatene fra G-P beregnet på EEG registrert under epileptisk anfall ble benyttet som “bevis” for at systemene var lavdimensjonale og kaotiske [?]. A.Babloyantz mente f.eks. ved dimensjonsestimering å kunne skille mellom søvn og forskjellige patologiske tilstander, som Jacob Creutzfeldt sykdom og epilepsi [?]. For EEG målt under et epileptisk anfall estimerte hun en dimensjon lik 2.05 og foreslo at dimensjonsestimering kunne benyttes som et diagnostisk hjelpemiddel i forbindelse med epileptiske anfall [?].

I 1992 ble det opprettet kontakt mellom Institutt for Informatikk (Ifi) og Statens Senter for Epilepsi (SSE) på bakgrunn av de tidlige positive resultater vi finner rapportert. Med dette ble grunnlaget for denne hovedfagsoppgaven lagt. Hensikten var å kritisk undersøke om dimensjonsestimering virkelig kan brukes til å skille mellom anfall og ikke-anfall, og eventuelt forutsi epileptiske anfall. Under arbeidet med oppgaven er det publisert flere arbeider som er kritiske til tidligere resultater. Dette illustreres av følgende uttalelse

Do not use the Grassberger-Procaccia-algorithm to *prove* that your attractor has a dimension < 3 . You don't need it.

Do not use the Grassberger-Procaccia-algorithm to *prove* that your attractor has a dimension > 3 . You will not trust it. *P.Grassberger*¹

(Matematiske definisjoner som for eksempel attraktor vil bli nærmere forklart i Del I.)

En årsak til at man har blitt skeptisk til tidligere resultater, er at man i de senere år har satt strengere krav til påliteligheten av dimensjonsestimatene, blant annet med hensyn på temporær korrelasjon og lengde av tidsserien. I de senere år har man oppdaget at dimensjonsestimering etter den opprinnelige form av G-P-algoritmen, kan gi lave dimensjonsestimater for lineært korrelert støy på grunn av temporær korrelasjon i tidsserien, (se avsnitt 4.4.5). I oppgaven benyttes en modifikasjon av den opprinnelige G-P-algoritmen hvor vi korrigerer for dette. Vi tar stilling til om det kan beregnes lave dimensjonsestimater som indikerer determinisme, eventuelt kaos, i EEG-signalet når vi benytter denne algoritmen samt aksepterte krav til påliteligheten av dimensjonsestimatene.

Grassberger mener at dimensjonsestimatene er upålitelige som absolutte verdier for dimensjonen. Korrelasjonsdimensjonen kan likevel være en karakteristisk egenskap ved signalet som er interessant i EEG-sammenheng. Under arbeidet med oppgaven ble dette etterhvert også en sentral problemstilling.

For å registrere den elektromagnetiske hjerneaktiviteten, finnes det flere teknikker. I oppgaven anvendes i tillegg til EEG, signaler fra elektrokortikografi (EkoG) og magnetoencefalografi (MEG). Disse registreringsmetodene samt hvordan signalene oppstår forklares i Del I. Signalene er registrert både før og under epileptisk anfall.

¹Foredrag av P.Grassberger, Würzburg september 1994

Ved dimensjonsestimering ved G-P fra reelle data støter vi på problemer som bl.a. skyldes begrenset antall punkter i tidsserien, ustasjonaritet og støy. For å studere slike effekter er det vanlig å bruke kunstige data. Dette er måleserier vi lager fra kjente systemer beskrevet ved differens- eller differensiallikninger hvis egenskaper er godt kartlagt. I Del II benyttes kunstige data for å teste robustheten av metoder som presenteres. Følgende metoder presenteres og anvendes for å teste tidsserier med hensyn på ustasjonaritet og støy –og om mulig unngå problemer som disse to egenskapene medfører– : rekurrensplott for stasjonaritetstesting, punktvis dimensjon (PD2) for dimensjonsestimering fra ustasjonære signaler og filtrering ved lineære filtre. I tillegg ser vi på dimensjonsestimering fra surrogatdata (Surrogatdata-metoden) for å undersøke om tidsserier med et lavt dimensjonsestimat kan være ulineære deterministiske eller lineær korrelert støy.

De nevnte metoder og Grassberger-Procaccia-algoritmen danner til sammen en “pakke” vi kan anvende for dimensjonsestimering fra reelle data. Fremgangsmåten for å bruke denne pakken trekkes ut fra erfaringene med kunstige data i Del II.

Denne fremgangsmåten vil i store trekk bli fulgt i Del III for data fra EEG, EKoG og MEG. I Del III anvendes i tillegg to metoder for dimensjonsestimering fra ustasjonære signaler som ikke presenteres i Del II; korrigeringsmetode for ustasjonaritet i signalet samt beregning av “glidende” dimensjonsestimater.

Fra dimensjonsestimeringen fra de elektromagnetiske signalene ønsker vi å besvare følgende spørsmål:

- Er det mulig å beregne pålitelige dimensjonsestimater fra disse signalene?
- Kan dimensjonsestimering skille mellom normal og epileptogen hjerneaktivitet?
- Kan dimensjonsestimering benyttes til å forutsi epileptisk anfall?

I utgangspunktet var det ønskelig å anvende “pakken” gitt i Del II på mange datasett for å gi et statistisk grunnlag for slutninger. Imidlertid måtte antallet datasett begrenses da hovedfaget er tidsbegrenset.

Del I

Bakgrunn

Oversikt over Del I

Bakgrunnen for denne oppgaven kan deles inn i to deler; en matematisk og en medisinsk.

En del av den matematiske bakgrunnen gis i kapittel 2 i form av definisjoner og begreper fra kaosteori og lineær signalbehandling.

Den medisinske bakgrunnen for oppgaven gitt i kapittel 3 består av hvordan man tror de elektromagnetiske signalene i hjernen oppstår og hvordan de kan beskrives ved modeller. Med i bakgrunnsdelen hører også beskrivelsen av hva slags signaler vi analyserer i oppgaven, det vil si hvordan de registreres og hvilken informasjon man finner i signalene. Deler av denne informasjonen er viktig når vi senere skal utføre dimensjonsestimering fra signalene.

Kapittel 2

Definisjoner og begreper

2.1 Kaos

Kaotiske systemer er ulineære, deterministiske og dissipative. Signalet fra et slik system kjennetegnes ved at det er

- uregelmessig,
- aperiodisk,
- uforutsigbart,
- og har et bredt frekvensspekter (effekttetthetsspekter).

At systemet er aperiodisk betyr at løsningsbanene til systemet aldri kan krysse hverandre. Det minste antall likninger et kaotisk system kan beskrives ved er tre differensiallikninger for kontinuerlige systemer og én differensiallikning for diskrete avbildninger. Ofte ønsker vi å se på løsningsbanene til systemet i rommet utspent av det minste antall variable som må til for å beskrive systemet. Dette rommet kalles faserommet til systemet. For eksempel er \mathbb{R}^2 faserommet til et system beskrevet $\dot{x} = f_1(x, y)$, $\dot{y} = f_2(x, y)$.

Når systemet har nådd sin stasjonærtilstand (stasjonaritet defineres i avsnitt 10.3.), er løsningsbanene til systemet innen et avgrenset område i faserommet hvor de ikke kan unnslipe fra. Legemet dannet av de stasjonære løsningsbanene kalles attraktoren til systemet. Forskjellige typer attraktorer defineres i avsnitt 2.3. For kaotiske systemer er attraktoren global[?], det vil si at uavhengig av initialbetingelsene vil løsningsbanene trekkes til attraktoren.

Lokalt på attraktoren konvergerer og divergerer løsningsbaner. De er hva som kalles “lokalt ustabile”. Dette kommer av at attraktoren foldes og strekkes i forskjellige retninger. Vi kan sammenligne denne prosessen med elting av en bolledeig. To initielt nære punkter på attraktoren vil divergere lik to rosiner vi opprinnelig hadde puttet inn i deigen på samme sted. Ved å følge rosinenes gang gjennom bolledeigen får vi kontinuerlige baner. Disse kan vi sammenligne med to løsningsbaner på en attraktor fra et kontinuerlig system. Denne egenskapen ved attraktoren, at to initielt nære nabopunkter divergerer selv når avstanden initielt er vilkårlig liten, kalles “følsomhet for initialbetingelsene”.

2.2 Stasjonaritet

Hvordan stasjonaritet defineres, avhenger av fagdisiplin. Stasjonaritet defineres her for stokastiske og deterministiske systemer.

2.2.1 Stokastiske systemer

Innen teorien for stokastiske systemer menes med stasjonaritet at de statistiske egenskaper til et signal ikke endres over tid. Vi skiller mellom streng og svak stasjonaritet. Følger vi definisjonene gitt i [?], og lar $Z(t)$ være en stokastisk variabel, er prosessen $\{Z(t), t \in T\}$ *strengt stasjonær* hvis og bare hvis

$$\begin{aligned} P(Z(t_1 + h) \leq z_1, Z(t_2 + h) \leq z_2, \dots, Z(t_n + h) \leq z_n) = \\ P(Z(t_1) \leq z_1, Z(t_2) \leq z_2, \dots, Z(t_n) \leq z_n), \end{aligned} \quad (2.1)$$

for alle h og n .

Hvis vi lar

$E[Z(t)]$ være forventningen av prosessen $Z(t)$,

$Var[Z(t)] = E[Z(t)^2] - E[Z(t)]^2$ være variansen av prosessen

$Cov(s, t) = E[Z(s)Z(t)] - E[Z(s)]E[Z(t)]$ være kovariansfunksjonen

er den stokastiske prosessen $\{Z(t), t \in T\}$ *svakt stasjonær* hvis og bare hvis

$$E[Z(t)] = \mu, \forall t \in T \quad (2.2)$$

$$Var[Z(t)] = \sigma^2, \forall t \in T \quad (2.3)$$

$$Cov(t, t + h) = Cov(h), \forall t \in T, \forall h \quad (2.4)$$

Definisjonen for svak stasjonaritet kunne utledes av definisjonen for streng stasjonaritet. Det medfører at en streng stasjonær prosess også er svak stasjonær. Svak stasjonaritet impliserer imidlertid ikke streng stasjonaritet.

For en stasjonær stokastisk tidsserie er altså middelværdi og varians konstant for hele tidsserien, mens kovariansen er uavhengig av tiden. Dette benyttes til å teste om et signal er empirisk stasjonært, se kapittel 5.

2.2.2 Deterministiske systemer

For deterministiske systemer defineres ingen sannsynlighetsfordelinger. Definisjonene ovenfor for stokastiske systemer er derfor ikke egnet for deterministiske signaler.

For deterministiske systemer defineres stasjonaritet ved oppførselen til systemets stasjonære løsningsbaner i faserommet. De stasjonære løsningsbaner er rekurrente; de returnerer gjentatte ganger til lokale områder innen et avgrenset område i faserommet. Løsningsbanene kan ikke unnsnippe fra dette området, og det avgrensede området endrer seg heller ikke

med tiden. Denne tilstanden kalles “steady-state” hvor systemet defineres som stasjonært, likegyldig hvordan løsningsbanene beveger seg lokalt innen det avgrensede området.

2.3 Attraktor

Det geometriske objekt dannet av mengden av de stasjonære løsningsbaner fra et deterministisk system, kalles en **attraktor**. Systemer som antar en konstant verdi i sin stasjonærtilstand, har ett likevektspunkt (fixed point) som sin attraktor. Periodiske og pseudoperiodiske har en grensesyklus (limit cycle) som attraktor. Attraktorer med uregelmessig form kan være

sær-attraktor (strange attractor) som er en attraktor med fraktal (ikke-heltallig) dimensjon eller

kaotisk attraktor som er en attraktor med lokalt ustabile løsningsbaner.

(Fraktal dimensjon vil bli forklart i avsnitt 2.4.) Jeg har valgt å skille mellom sær-attraktorer og kaotiske attraktorer slik det er gjort i [?] fordi det finnes attraktorer som ikke fyller begge kriteriene. Ved å skille mellom kaotiske attraktorer og særattraktorer på denne måten går det klart frem at fraktal dimensjon ikke impliserer kaos. Eksempler på attraktorer som fyller kun en av definisjonene er gitt ved den logistiske avbildningen $x(k+1) = \lambda x(k)(1-x(k))$ for forskjellige parameterverdier. For parameterverdien $\lambda = 4$ er ifølge [?] attraktoren kaotisk, men fraktaldimensjonen er da heltallig og lik 1. Attraktoren er følgelig ikke en sær-attraktor. For parameterverdien $\lambda = 3.57\dots$ kalles attraktoren Feigenbaum-attraktoren og har i følge [?] fraktal dimensjon mindre enn 1 og større enn 0, men er ikke kaotisk. Feigenbaum-attraktoren, er også beskrevet i [?, side 28].

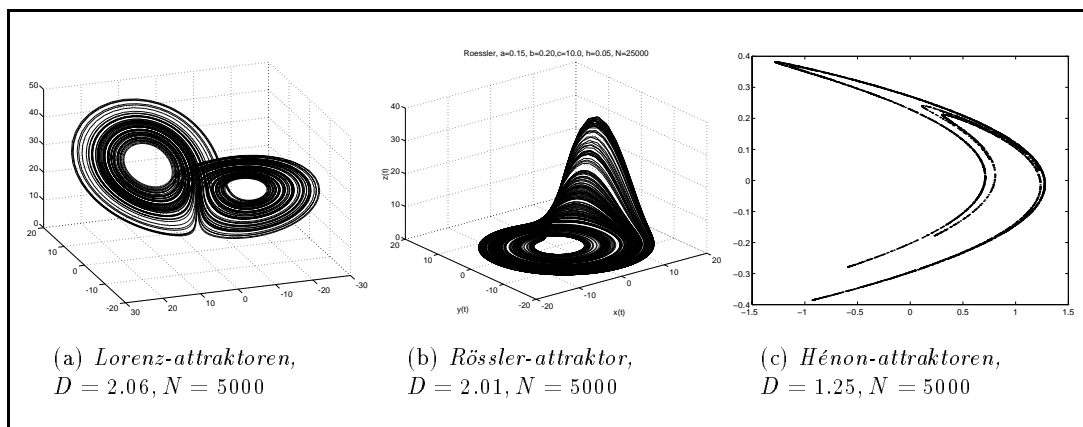
Som oftest har kaotiske attraktorer fraktal dimensjon, og oppfyller følgelig definisjonen for sær-attraktorer. Vi skal se nærmere på tre attraktorer som er kaotiske særattraktorer og altså både har fraktal dimensjon og ustabile løsningsbaner. Disse er Lorenz-, Rössler- og Hénon-attraktoren.

2.3.1 Lorenz-attraktoren

Likningene for Lorenz-systemet er gitt ved

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(x(t) - y(t)) \\ \dot{y} &= (r - z(t))x(t) - y(t) \\ \dot{z} &= x(t)y(t) - bz(t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

hvor systemet er kaotisk for parameterverdiene $\sigma = 10$, $r = 28$ og $b = \frac{8}{3}$ [?]. Likningene kommer opprinnelig av en trunkering av et sett av partielle differensiallikninger (Navier-Stokes-likningene) som beskriver varmetveksling i atmosfæren. Lorenz-systemet er en enkel klimamodell hvor oppførselen er interessant i fysisk sammenheng når parameteren r varieres. Denne parameteren kalles “Rayleigh”-tallet. Imidlertid viste modellen seg å være en dårlig tilnærming til de opprinnelige likningene bortsett fra i et begrenset intervall for r . Kun når



Figur 2.1: Eksempler på kaotiske særattraktorer. D er den fraktale dimensjonen av mengdene og N er antall punkter i mengden som er benyttet for plottet.

$r \approx 1$, beskriver likningene varmeutveksling i atmosfæren. For $r > 27.74 \dots$, viser systemet kaotisk oppførsel og er mye brukt som en modell for kaotisk oppførsel generelt, blant annet for kaotisk laser[?]. Modellen har tre likevektspunkter, origo, $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ og $(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$. Attraktoren er vist i figur 2.1 a). På grunn av dens utseende blir den ofte sammenlignet med en sommerfugl, der de to siste likevektspunktene er midtpunktet i hver sin “vinge”.

2.3.2 Rössler-atraktoren

Rössler-systemet er en modell utviklet for å se hva som skjer i den ene “vingen” av Lorenz-atraktoren, [?], men kan også være en modell for en kjemisk reaksjon. Rössler-atraktoren er gitt ved likningene

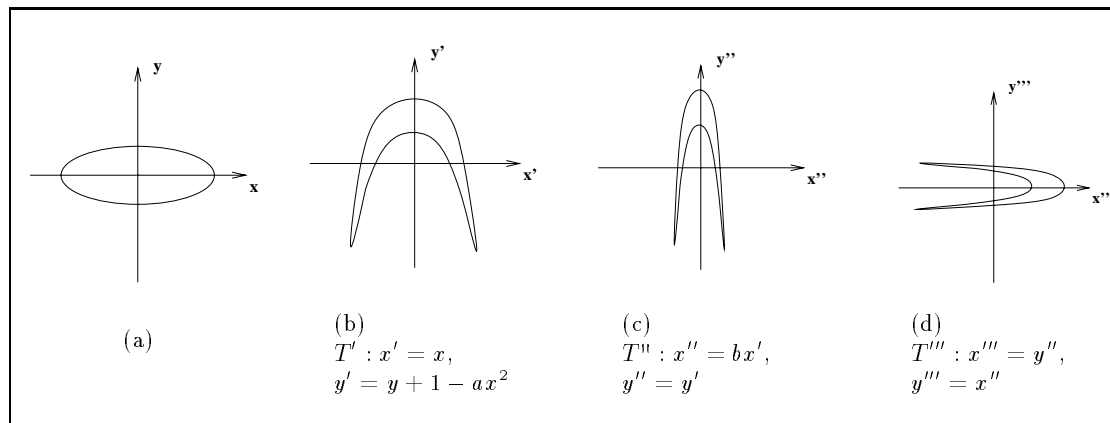
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -z(t) - y(t) \\ \dot{y} &= x(t) + ay(t) \\ \dot{z} &= b + z(t) * (x(t) - c)\end{aligned}\tag{2.6}$$

hvor parameterverdiene $a = 0.15$, $b = 0.20$, $c = 10.0$ gir kaotisk oppførsel. Attraktoren vi får ved disse parameterverdiene er vist i figur 2.1 b).

2.3.3 Hénon-atraktoren

Inspirert av Lorenz-systemet ønsket M. Hénon å finne den enkleste avbildningen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ som gir en attraktor med tilsvarende egenskaper som Lorenz-atraktoren; det vil si en kaotisk attraktor [?]. Resultatet ble den kvadratiske avbildningen

$$\begin{aligned}x(k+1) &= 1 + y(k) - ax(k)^2 \\ y(k+1) &= bx(k)\end{aligned}\tag{2.7}$$



Figur 2.2: En iterasjon av Hénon-avbildningen gitt i likning 2.7 tilsvarende strekking og folding av et legeme utført i fire operasjoner. a) Legemet strekkes langs x -aksen. b) Objektet foldes om y -aksen. c) Det presses sammen langs x -aksen. d) Objektet roteres 90 grader slik at det igjen har lengst utstrekning langs x -aksen. De enkelte transformasjonene er gitt under figurene. Den totale avbildningen er gitt ved $T = T''''T''T'$. [Fra [?]]

For parameterverdiene $a = 1.4$ og $b = 0.3$ får vi (avhengig av initialbetingelsene) Hénon-atraktoren som vist i figur 2.1 c). Den fysiske tolkningen av likningssettet er vist i figur 2.2 hvor strekking og folding av et avgrenset areal i (x, y) -planet utføres i fire operasjoner. Hver transformasjon er vist sammen med en figur som viser tilstanden objektet transformeres til. Kun i tredje operasjon blir arealet redusert, men gjentar vi prosessen i det uendelige får vi i grenseverdien når arealet går mot null, Hénon-atraktoren. To punkter som initielt lå nære hverandre vil i denne prosessen være vilkårlig plassert på atraktoren i forhold til hverandre.

2.4 Fraktal dimensjon

Med dimensjonen av en mengde mener vi vanligvis antall uavhengige retninger i rommet hvor mengden har utstrekning; et punkt har dimensjon lik null, en kurve dimensjon lik en og et plan dimensjon lik to. Dette er **Topologisk dimensjon** og er alltid et heltall. Det finnes imidlertid mange definisjoner for dimensjon, hvorav noen bare kan anta heltallige verdier, mens andre også kan anta ikke-heltallige. I praksis benyttes begrepet **fraktal dimensjon** for enhver definisjon av dimensjon som kan anta ikke-heltallige verdier. Opphavsmannen til ordet *fraktal* er B.Mandelbrot. Med fraktal dimensjon mener han Hausdorff-dimensjonen [?]. Definisjonen for denne er blant annet gitt i [?]. Hvis Hausdorff-dimensjonen er ikke-heltallig, kalles mengden en fraktal.

Felles for enkelte definisjoner av dimensjoner som antar ikke-heltallige verdier er at de følger en skaleringslov av formen

$$V \propto l^D \quad (2.8)$$

hvor dimensjonen er gitt ved D , og l er en dimensjonsløs skaleringskonstant. Avhengig av hvilken definisjon vi ser på, kan V være masse, antall bits, kumulativ sannsynlighetsfordeling eller andre enheter som gjør at skaleringsloven oppfylles, [?].

Nedenfor følger tre definisjoner for dimensjon som antar ikke-heltallige verdier; boksdimensjonen, korrelasjonsdimensjonen og punktvis skaleringsdimensjon.

2.4.1 Boksdimensjonen

Boksdimensjonen estimeres ved å dekke en mengde med et antall $M(l)$ ikke-tomme (hyper)kuber med sider av lengde l . For å dekke mengden må de være av dimensjon høyere enn mengdens fraktale dimensjon. Når l går mot null, skaleres $M(l)$ som

$$M(l) \propto l^{-D} \quad (2.9)$$

hvor D er boksdimensjonen¹. Denne er da definert ved

$$D = \lim_{l \rightarrow 0} -\frac{\log M(l)}{\log l} \quad (2.10)$$

Hvis vi lar D_H være Hausdorffdimensjonen, har vi at $D \leq D_H$ [?]. I resten av oppgaven menes med fraktal dimensjon, boksdimensjonen.

Dette dimensjonsestimatet ser bare på mengdens geometriske struktur og ikke på tettheten av attraktoren. Om en kube inneholder kun ett punkt fra mengden, teller den like mye som en kube som inneholder mange punkter. Det finnes imidlertid andre definisjoner for ikke-heltallige dimensjoner som tar hensyn til dette.

2.4.2 Korrelasjonsdimensjonen

Hvis vi lar $M(l)$ i likning 2.9 være sannsynlighetsfordelingen $C(l)$ for at avstanden mellom to punkter på attraktoren er mindre enn l , finner vi korrelasjonsdimensjonen, ν . Hvis vi har en uendelig mengde støyfrie data vil $C(l)$ følge skaleringsloven $C(l) \propto l^\nu$ når $\lim l \rightarrow 0$. Korrelasjonsdimensjonen er da definert ved

$$\nu = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log C(l)}{\log l} \quad (2.11)$$

Dette dimensjonsestimatet kan beregnes ved Grassberger-Procaccia-algoritmen, [Grassberger,1983a]. For å forklare ideen bak algoritmen dekker vi attraktoren med $U(l)$ ikke-tomme hyperkuber med sider av lengde l og lar P_i være sannsynligheten for at ett vilkårlig punkt er i kuben i , [?]. Hvis μ_i er antallet punkter som er inneholdt i kube i og N er antall punkter totalt i mengden, kan P_i estimeres ved $P_i = \frac{\mu_i}{N}$. P_i^2 er da sannsynligheten for at to vilkårlig valgte punkter er i kuben i . Sannsynligheten for at to vilkårlige punkter er i samme kube, men hvor det er vilkårlig hvilken kube de er havnet i, er gitt ved korrelasjonsintegralet

$$C(l) \approx \sum_{i=1}^{U(l)} P_i^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{U(l)} \mu_i^2 \quad (2.12)$$

La oss anta at kubene kan overlape hverandre og at de har sider av lengde l . Hvis vi lar avstand være definert ved supremumsnormen $\|\underline{x}\|_\infty = \max_k |x_k|$, er sannsynligheten for

¹ Andre navn for boksdimensjonen er den bokstellende dimensjonen, kapasitet eller similaritetsdimensjon.

at to vilkårlige punkter, \underline{x}_i og \underline{x}_j , er i samme kube lik sannsynligheten for at avstanden mellom dem er mindre enn l , $C(l) = P(\|\underline{x}_i - \underline{x}_j\| < l)$. Når kubene er ikke-disjunkte har vi at $C(l) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{U(l)} \mu_i^2$. Korrelasjonsintegralet kan estimeres ved å telle opp antall punktpar i mengden som har avstand mindre enn l ;

$$C(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \theta(\|\underline{x}_i - \underline{x}_j\| - l) \quad (2.13)$$

hvor θ er heavysidefunksjonen, ($\theta(u) = 1, u > 0, \theta(u) = 0, u \leq 0$) og $\|\cdot\|$ er en vektornorm. Hvis kubene med sider l er disjunkte, er det mulig at to vilkårlige punkter har avstand mindre enn l , men at punktene ligger i to nabokuber. Avstanden mellom dem beregnes ikke og vi beregner da kun en tilnærming til korrelasjonsintegralet. Korrelasjonsintegralet er den kumulative sannsynlighetsfordelingen over avstandene mellom punktene i mengden. Den vanlige forklaringen er å legge kuber med sider av lengde $2l$ sentrert om et punkt \underline{x}_i og telle opp antall punkter som er i kuben. Sannsynligheten for at punktet \underline{x}_j også er i kuben er lik sannsynligheten for at avstanden mellom punktene er mindre enn l .

Varianter av både boksdimensjonen og korrelasjonsdimensjonen er å dekke attraktoren med baller istedenfor kuber. Vi benytter da euklidisk norm istedenfor supremumsnormen. Det kan vises at $D \leq \nu$, hvor vi har likhet når punktene er uniformt fordelt på attraktoren, [?]. I kapittel 4 skal vi komme tilbake til korrelasjonsdimensjonen.

2.4.3 Punktvis skaleringsdimensjon

“Punktvis skaleringsdimensjon” har likhetstrekk med korrelasjonsdimensjonen ved at den er definert ved kumulativ tetthetsfordeling av punkter i rommet. Metoden ble først foreslått i [?]. Ideen er å se på tettheten av punkter om ett referansepunkt av gangen, slik at vi får *ett lokalt* dimensjonsestimat, d_p^i , for hvert punkt i mengden. Hvis referansepunktene indekseres med hensyn på tiden, er de lokale dimensjonsestimatene en funksjon av tiden. Hvis de ikke varierer med tiden, beregnes *gjennomsnittlig punktvis dimensjon*, D_p .

Algoritmen for å beregne dimensjonsestimatet kan ses på som en variant av Grassberger-Procaccia-algoritmen nevnt i avsnittet ovenfor. Vi ser nå på sammenhengen mellom disse to dimensjonsestimatene. Vi senterer en kube med sider av lengde $2l$ om ett referansepunkt, \underline{x}_i , og ser på sannsynligheten for at et annet punkt, \underline{x}_j , er i denne kuben. Denne sannsynligheten kan estimeres ved

$$C_i(l) = \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \theta(l - \|\underline{x}_i - \underline{x}_j\|) \quad (2.14)$$

hvor N er antall punkter i mengden og θ igjen er heavyside-funksjonen definert i forrige avsnitt. Av $C_i(l)$ for i 'te referansepunkt \underline{x}_i beregnes dimensjonsestimatet

$$d_p^i = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log C_i(l)}{\log l} \quad (2.15)$$

Gjennomsnittlig punktvis dimensjon er da gitt ved

$$D_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_p^i \quad (2.16)$$

Vi ser at likning 2.14 er korrelasjonsintegralet, $C(l)$, gitt i likning 2.13, hvor den ytterste summen er fjernet. Når alle punktene i mengden benyttes som referansepunkter, har vi at $\langle C_i(l) \rangle_i = C(l)$. Hvis punktene i mengden er uniformt fordelt, har vi for en uendelig mengde støyfrie data at $C_i(l) = C_j(l)$, $i, j = 1, \dots, N$. Vi har da at $d_p^i = \nu$ for alle i og j . Siden $D = \nu$ ved en uniform fordeling av punktene, er

$$D_p = \nu = D \quad (2.17)$$

Hvis punktene ikke er uniformt fordelte, er fortsatt gjennomsnittet av $C_i(l)$ lik $C(l)$, men D_p er ikke nødvendigvis lik ν . Dette ser vi av definisjonene for punktvis dimensjon og korrelasjonsdimensjon gitt under, når vi vet at $\log \frac{(a+b)}{2} = \frac{\log a}{2} + \frac{\log b}{2}$ kun når $a = b$.

$$D_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_p^i = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log C_i(l)}{\log l} \quad (2.18)$$

$$\nu = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{C(l)}{\log l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i(l) \right)}{\log l} \quad (2.19)$$

I kapittel 6 skal vi se på en variant av punktvis skaleringsdimensjon, nærmere bestemt Punktvis dimensjon eller PD2.

2.5 Rekonstruering av faserom

Ulineære metoder for å skille stokastiske og deterministiske signaler baserer seg på transformasjon fra endimensjonale til flerdimensjonale signaler. Ut fra en tidsserie, $\{x_i\}_{i=1}^N$, kan vi rekonstruere faserommet ved forskjellige teknikker. Her presenteres rekonstruksjon ved tidsforsinkelsesvektorer (method of delays, MOD) og rekonstruksjon ved Singular Spectrum Approach (SSA).

2.5.1 Method of Delays (MOD)

Method of Delays er en av de enkleste av teknikkene for rekonstruering av faserommet. Tilstandsvektorene rekonstrueres ved

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 &= \{x_1, x_{1+\tau}, \dots, x_{1+(m-1)\tau}\} \\ \underline{x}_2 &= \{x_{1+j}, x_{1+j+\tau}, \dots, x_{1+j+(m-1)\tau}\} \\ &\vdots \\ \underline{x}_k &= \{x_{1+(k-1)j}, x_{1+(k-1)j+\tau}, \dots, x_{1+(k-1)j+(m-1)\tau}\}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

hvor tidsforsinkelsen, τ , er et antall samplingsintervaller mellom to elementer i vektoren, m er antall elementer i hver rekonstruerte tilstandsvektor lik dimensjonen av det rekonstruerte rommet, j er antall samplingsintervaller mellom første element i etterfølgende tilstandsvektorer og k er antall m -dimensjonale vektorer det er mulig å bygge opp fra datasettet. I beregningene som er utført i oppgaven, er $j = 1$ benyttet. Vi har da at antall rekonstruerte tilstandsvektorer er lik $N - (m - 1)\tau$. Hvis samplingstettheten er stor og $j = 1$, kan to

etterfølgende vektorer \underline{x}_i og \underline{x}_{i+1} være nesten identiske. Å øke j vil si at vi kaster punkter i det rekonstruerte rommet som er sterkt korrelerte i tid, men vi får samtidig færre punkter totalt i mengden. Av statistiske hensyn for de oppgaver som skal utføres på det rekonstruerte faserommet, anbefales det i [?] bare hvis tidsserien er svært lang. Hvis x_j er målinger utført med faste tidsintervaller t_s , kalles \underline{x}_i tidsforsinkelsesvektorer. Imidlertid må ikke elementene i vektorene nødvendigvis være atskilt i tid.

2.5.2 Singular Spectrum Approach (SSA)

Utgangspunktet for rekonstruering med SSA er en initiell imbedding ved MOD med initiell imbeddingsdimensjon $p = w + 1$ og tidsforsinkelsen er $\tau = 1$. Vinduslengden, w , vanligvis definert ved $w = (m - 1)\tau$. Hva som videre utføres med denne mengden kan forklares geometrisk eller algebraisk.

På denne p -dimensjonale mengden finner man ved singulærverdidekomposisjon (SVD) de ortogonale retninger hvor mengden har størst utstrekning eller spredning. Disse retningene kalles prinsipalakser og er ordnet etter utstrekningen i mengden. Mengden har størst utstrekning langs første prinsipalakse og minst utstrekning langs siste akse. Ved å projisere mengden ned på prinsipalaksene utføres en transformasjon av faserommet hvor prinsipalaksene er basisen i det nye rommet. Projeksjonen av den opprinnelige mengden på første prinsipalakse kalles første prinsipalkomponent, projeksjonen på andre prinsipalakse andre prinsipalkomponent, etc. Hver rekonstruert tilstandsvektor inneholder nå ett element fra hver prinsipalkomponent; første element fra første prinsipalkomponent, andre element fra andre prinsipalkomponent, etc.

Fremgangsmåten kan beskrives på følgende måte: Før den initielle imbeddingen ved MOD utføres, sentreres og normaliseres tidsserien slik at den har enhets varians og null i middelverdi. Mengden vi får ved den initielle imbeddingen kan uttrykkes ved en matrise $A \in \mathbb{R}^{N_p \times p}$ hvor hver rad er en rekonstruert tilstandsvektor. Det vil si at vi har $N_p = N - p + 1$ tilstandsvektorer når N er lengden av tidsserien. Vi utfører så singulærverdidekomposisjonen (SVD) av A

$$A = U\Sigma V^T \quad (2.21)$$

Σ er en diagonalmatrise i $\mathbb{R}^{p \times p}$ hvis diagonalelementer, σ_i , $i = 1, 2, \dots, p$ er ordnet i avtakende rekkefølge. Disse er singulærverdiene til A , mens kvadratet av dem er egenverdiene til $A^T A$. Matrisene U og V er begge ortonormale hvor $U \in \mathbb{R}^{N_p \times p}$ og $V \in \mathbb{R}^{p \times p}$. Kolonnene til U er egenvektorene til $A^T A$ og ved å utføre projeksjonen

$$A \rightarrow A' = AU \quad (2.22)$$

får vi en matrise A' med lineært uavhengige kolonner. (Disse kolonnene er prinsipalkomponentene til A , mens kolonnene i U er prinsipalaksene.)

At kolonnene i A' er lineært uavhengige, ser vi av kovariansmatrisa til A' . Denne er en diagonalisering av kovariansmatrisa til A . Kovariansmatrisa til A er gitt ved $\frac{1}{N_p} A^T A$ siden hver kolonne i A har enhets varians og middelverdi null. Kovariansmatrisa til A' er da gitt ved

$$(A')^T A' = (AU)^T AU = \Sigma^T \Sigma \quad (2.23)$$

hvor diagonalelementene σ_i^2 er variansen til kolonnene i både A og A' .

Om man ut fra singularverdiene σ_i finner at de siste prinsipalkomponentene er lite signifikante, kan man kaste disse ved å projisere A på kun de m første kolonnene i U ;

$$A \rightarrow A'' = AU' \quad (2.24)$$

hvor $U \in \mathbb{R}^{N_p \times m}$, $m < p$.

I avsnitt 4.3 kommer vi tilbake til rekonstruering ved SSA i forbindelse med dimensjonsestimering ved Grassberger-Procaccia-algoritmen.

2.5.3 Takens Imbeddingsdimensjon

Vi antar nå at vi har gitt en attraktor på en glatt og kompakt mangfoldighet. Gitt en uendelig lang og støyfri tidsserie fra denne attraktoren utfører vi ved MOD en avbildning fra mangfoldigheten til \mathbb{R}^m . Vi sier at vi har rekonstruert attraktoren i et m -dimensjonalt rom. Hvis $m \geq 2D + 1$ hvor D er den opprinnelige attraktors fraktale dimensjon, garanterer Takens teorem at avbildningen fra en glatt kompakt mangfoldighet til \mathbb{R}^m er deriverbar og har en deriverbar invers (diffeomorfi) og at de topologiske egenskapene til den rekonstruerte attraktoren er identiske med egenskapene til den opprinnelige attraktoren. Teoremet forutsetter en uendelig mengde støyfrie data. Imidlertid har det vist seg at de topologiske egenskapene til den rekonstruerte attraktor er tilnærmet de samme også når rekonstrueringen skjer fra en endelig mengde data. Dette krever et gunstig valg av parametre for rekonstrueringen. I kapittel 4 ser vi på hvordan disse velges i forbindelse med dimensjonsestimering.

2.6 Autokorrelasjonsfunksjonen

Autokorrelasjonsfunksjonen er et mål for lineær sammenheng mellom målinger, $x(t)$ og $x(t + T)$, atskilt av et fast tidsintervall, T , når målingene er fra samme prosess. Autokorrelasjonsfunksjonen er definert ved kovariansfunksjonen, gitt i avsnitt 10.3, og er for stasjonære tidsserier definert ved

$$R(T) = \frac{E[x(t)x(t+T)] - E[x(t)]^2}{Var[x(t)]} \quad (2.25)$$

For $T = 0$ er telleren lik variansen av prosessen og $R(T) = 1$. Den intuitive forklaringen av dette er at vi for $T = 0$ ser på hvor "korrelert en måling er med seg selv". Autokorrelasjonsfunksjonen er definert ved sannsynlighetsfordelinger, men $R(T)$ er et mål for lineær korrelasjon mellom elementer også i tidsserier hvor det ikke er forbundet sannsynlighetsfordelinger til det underliggende systemet (deterministiske systemer). Vedlegg D viser hvordan $R(T)$ beregnes for en vilkårlig tidsserie. $R(T)$ angir hvor lett et signal er å predikere lineært. Jo fortere autokorrelasjonsfunksjonen dør ut, jo mindre korrelert er elementene i tidsserien og desto vanskeligere er signalet å predikere lineært. For eksempel er autokorrelasjonsfunksjonen til hvit støy, som er helt upredikerbart, en δ -puls. Når $R(T) = 0$ antas ingen lineær sammenheng mellom målinger atskilt ved tidsintervallet T . I oppgaven bestemmes en av parameterverdiene for beregning av korrelasjonsintegralet ved hjelp av autokorrelasjonsfunksjonen (se avsnitt 4.4.5).

For periodiske og pseudoperiodiske signaler dør ikke autokorrelasjonsfunksjonen ut, men er periodisk med samme periode som det opprinnelige signalet. Det er naturlig at det for disse signalene er en avhengighet mellom målingene også når $R(T) = 0$, men at denne avhengigheten ikke er lineær og derfor ikke kan måles ved hjelp av autokorrelasjonsfunksjonen. For ulineære deterministiske systemer kunne det derfor være ønskelig å beregne en mer generell eller ikke-lineær avhengighet mellom dataene istedenfor den lineære.

2.7 Generell informasjon (mutual information)

I [?] er et begrep for den generelle avhengigheten mellom to variable innført; gjennomsnittlig gjensidig informasjon (average mutual information). Begrepet bygger på Shannons informasjonsteori hvor vi ser på hvor mye ny viten vi får ved å utføre målingen $x(t + T)$ når vi allerede kjenner målingen $x(t)$. Isteden for å se på *forventet* ny viten vi får ved å måle $x(t + T)$ når vi kjenner $x(t)$, ser vi på den gjennomsnittlige viten vi *allerede har* om en fremtidig måling $x(t + T)$ når målingen ved tidspunktet t er kjent. Ved å benytte \log_2 er den gjennomsnittlige viten gitt i antall bits. Hvis vi lar $\{x_i\}_{i=1}^N$ være målingene $x(t_i)$ og disse kun kan anta et begrenset antall verdier, er den generelle avhengigheten definert ved

$$I(\tau) = \sum_{i=1}^{N-\tau} P(x_i, x_{i+\tau}) \log_2 \left[\frac{P(x_i, x_{i+\tau})}{P(x_i)P(x_{i+\tau})} \right], \quad (2.26)$$

hvor $P(x_i)$ er sannsynligheten for at signalet inneholder verdien av x_i og $P(x_i, x_{i+\tau})$ er den simultane sannsynligheten for å måle verdien av x_i og τ tidsenheter senere måle verdien av $x_{i+\tau}$. Den generelle avhengigheten er ikke en funksjon av målingene x_i , men av den simultane sannsynlighetsfordelingen $P(x_i, x_{i+\tau})$. Forenklet fremgangsmåte for å estimere sannsynlighetsfordelingene er å finne sannsynligheten $P(x_i)$ ved å beregne gjennomsnittlig antall ganger verdier i et område rundt x_i forekommer i datasettet. Den simultane sannsynligheten $P(x_i, x_{i+\tau})$ finner vi ved å plote verdien av x_i mot verdien av $x_{i+\tau}$, og finne gjennomsnittlig antall ganger et kvadrat om punktet $(x_i, x_{i+\tau})$ blir besøkt. (Plottet av x_i mot $x_{i+\tau}$ kalles et faseportrett eller et faseplott.) Intuitivt er $I(\tau) \geq 0$, siden $I(\tau)$ er gjennomsnittlig antall bits vi kjenner av den fremtidige målingen $x_{i+\tau}$. Hvis målingene er statistisk uavhengige, $P(x_i)P(x_{i+\tau}) = P(x_i, x_{i+\tau})$, er $I(\tau) = 0$.

Kaotiske systemer er ikke predikerbare i lang tid fremover og for disse systemene avtar både autokorrelasjonsfunksjonen og den gjensidige informasjonen relativt raskt. Vi kommer tilbake til disse to målene for avhengighet mellom samplene i avsnitt 4.2. I oppgaven er “generell informasjon” også kalt “gjensidig informasjon”.

2.8 Effekttetthetsspekteret

Effekttetthetsspekteret benyttes til å skille periodiske og kvasiperiodiske signaler fra ikke-periodiske signaler. Det gir et mål for hvordan effekten i et signal er konsentrert i ulike frekvensbånd. Mens hvit støy har et flatt spekter og inneholder like mye effekt over alle frekvensene i frekvensbåndet, har periodiske og kvasiperiodiske signaler stor effekt i enkelte frekvenskomponenter. I oppgaven har jeg benyttet periodogrammet som et estimat for effekttetthetsspekteret for å se om signalet inneholder hvit støy og for å finne periodiske

komponenter i signalet. Periodogrammet er den Fouriertransformerte av estimert autokorrelasjonsfunksjon. Det vil si

$$P(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k) e^{-jkw} \xleftrightarrow{DTFT} R(k) \quad (2.27)$$

hvor $P(w)$ er periodogrammet og $R(k)$ er autokorrelasjonsfunksjonen.

Kapittel 3

Elektromagnetiske signaler i hjernen

Som nevnt i innledningen analyseres i oppgaven signaler fra tre ulike registreringsmetoder for elektromagnetisk hjerneaktivitet:

EEG som er ekstrakraniell registrering av elektrisk aktivitet,
EKG som er intrakraniell registrering av elektrisk aktivitet og
MEG som er registrering av magnetisk aktivitet.

De forskjellige registreringsmetodene gir signalene litt ulike egenskaper. I neurofysiologisk sammenheng registreres imidlertid nøyaktig det samme fenomenet ved alle tre målemetoder. Når vi snakker om for eksempel EEG-aktivitet og informasjon i EEG-signalet, er teksten gyldig for signaler fra alle tre registreringsmetoder.

Avsnitt 3.1 er generelt om elektromagnetisk hjerneaktivitet, mens avsnitt 3.2 omhandler målemetodene og avsnitt 3.3 omtaler informasjon som signalene inneholder. (Datasettene presenteres først i kapittel 10.)

3.1 Bakgrunnen for oppgaven

Datasettene anvendt i oppgaven er målinger av elektromagnetisk aktivitet i hjernen hos pasienter med epilepsi. Avsnitt 3.1.1 tar derfor for seg hva epilepsi er. Årsaken til epilepsi er at det oppstår elektriske forstyrrelser i hjernen. Avsnitt 3.1.2 forklarer derfor hvordan elektrisk aktivitet oppstår i hjernen som overførsel av elektriske signaler mellom neuroner. Enkelte modeller for synkron elektrisk aktivitet baserer seg på kaosteori. Avsnitt 3.3 tar derfor for seg kobling mellom kaos og EEG.

3.1.1 Epilepsi

Epilepsi ble fra gammelt av sett på som en egen avgrenset sykdom og ble også kalt “falle-syke”. I dag ser man på epilepsi som et symptom på sykdom som påvirker den elektriske

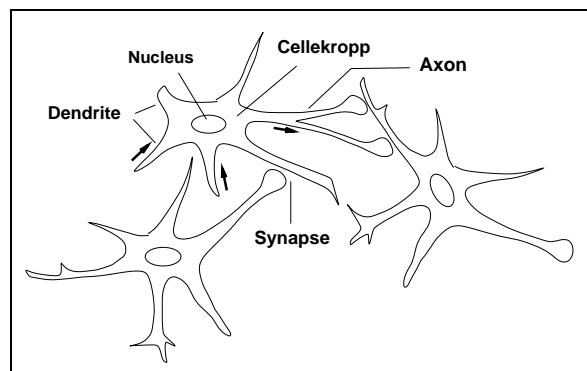
aktiviteten i hjernen. Slike sykdommer er ofte hjernesykdommer. Med hjernesykdommer menes alle former for skader på hjernen og de kan for eksempel være fødselsskader, hodeskader, hjernebetennelse, svulster og forstyrrelser i hjernens blodsirkulasjon. Ordet epilepsi kommer av det greske ordet *epilepsia* som betyr *å angripe plutselig*. Epilepsi arter seg som anfall og er forbigående forstyrrelser av hjernens funksjoner. Hvordan anfallet arter seg, avhenger av hvor i hjernen forstyrrelsene skjer. Vi skiller mellom ca. 60 forskjellige anfallstyper hvor hovedgrupperingen er

- generaliserte anfall hvor det er elektriske forstyrrelser i begge hjernehalvdeler samtidig. Anfallet er med bevissthetstap, men kan være med eller uten krampetrekninger.
- partielle anfall hvor et begrenset område i hjernen er påvirket av forstyrrelser. Disse er med eller uten bevissthetstap.

Epilepsi behandles vanligvis ved medikamering, men i sjeldne tilfeller hvor medikamering ikke hjelper kan noen pasienter gjøres anfallsfrie ved operasjon. Den sykelige delen av hjernen hvor den epileptiske aktiviteten starter, settes da ut av funksjon. Om en operasjon kan utføres avhenger av hvor nøyaktig den sykelige delen av hjernen kan lokaliseres og av tilgjengeligheten til dette området.

3.1.2 Elektriske aktivitet i hjernen

Det er estimert at hjernen består av ca. 10^{11} nerveceller eller neuroner som er organisert i nettverk på en intrikat måte. Hvordan neuronene er organisert for å utveksle signaler seg i mellom er i dag velkjent, se [?]. Figur 3.1 viser en skjematisk skisse av neuroner. Et neuron består av en cellekropp som inneholder en cellekjerne (nucleus), en lang nervefiber (axon) som sender nerveimpulser bort fra celle-kroppen og mange korte grener (dendrites) som sender impulser inn til celle-kroppen. Cellekroppen er omsluttet av en hinne vi kaller cellemembranen. Kontaktflaten hvor neuronet mottar signaler fra andre neuroner kalles en synapse.



Figur 3.1: Figuren viser en forenklet skisse av tre neuroner.

Gjennom membranen skjer det en forflytning av ioner (K^+ og Na^+). Når konsentrasjonen av disse er forskjellig innenfor og utenfor cellemembranen dannes det en differanse i det

elektriske potensiale over cellemembranen. Dette potensialet kan brått utlades og sender da en elektrisk strøm ned den utgående nervefibren. Under denne prosessen endres det elektriske potensiale fra -70mV , til $+30\text{mV}$ for så å returnere til hvilepotensialet ved -70mV . Denne hendelsen kalles et aksjonspotensiale. Et aksjonspotensiale omtales som en “enten-eller-hendelse”, enten skjer den eller inntreffer ikke i det hele tatt. Aksjonspotensialet kan kun bringe informasjon om sin oppstandelse eller tilstedeværelse. Neuronet kan imidlertid sende mer informativ informasjon ved frekvensen som aksjonspotensialene sendes ut ved. I enden av axonet grener axonet seg i flere endegrener som gir kontakt med dendritter og celle-kroppene av andre neuroner. Disse punktene kalles synapser. Et aksjonspotensiale som følger en axon til en synapse endrer det elektriske potensiale i kontaktpunktet i naboneuronen. Disse endringene eller hendelsene kalles Post-Synaptiske Potensialer (PSP). Fra synapsen forplantes et potensiale over cellemembranen til naboneuronet. Blir spenningsforskjellen over cellemembranen tilstrekkelig liten, kan et aksjonspotensiale utløses i naboneuronet. Vanligvis har neuronene kun ett axon, men de kan på grunn av forgreininger i enden av axonet sende signaler til flere andre neuroner og også motta signaler gjennom flere synapser. Antall synapser kan variere fra flere hundre til mange tusen hvor 80000 synapser er det meste som er registrert på ett neuron.

Vi har nå forklart hvordan elektriske impulser overføres mellom enkelt-neuroner. Elektriske utladninger fra et neuron blir imidlertid ikke registrert ved registreringsmetoder som EEG, EKG eller MEG. Signalet som registreres antas å skyldes koherent aktivitet fra titusener av neuroner i ett område. Tidligere trodde man at det var aksjonspotensialet som ble registrert. Denne oppfatningen har endret seg på grunn av varighet og styrke av registreringene. I dag er den vanlige oppfatningen at registreringene for en stor del skyldes utladninger i PSP'er.

3.1.3 Kaos i forbindelse med elektromagnetiske signaler fra hjernen

Hvordan den kollektive oppførselen til større populasjoner av neuroner kan beskrives er i dag ikke godt kjent. Ved å modellere denne oppførselen, kan man måle forholdet mellom EEG-aktivitet registrert forskjellige steder under epileptiske anfall. Dette benyttes for bedre å lokalisere opprinnelsen av epileptiske anfall. Enkelte modeller finnes i dag for denne typen oppgaver [?]. Hvordan forskjellige hjerneområder rekrutteres til epileptiform hjerneaktivitet er imidlertid fortsatt uklart. De siste årene har man ønsket å benytte kaosteori som basis for modellering av forskjellige former for hjerneaktivitet. I [?] er en modell for lukteløken presentert. I denne modellen benyttes kaos som basis for den kollektive neurale aktivitet som har med oppfattende prosesser. Senere er andre kaotiske modeller for den kollektive aktiviteten i hjernen blitt utviklet. Et eksempel er en modell basert på koplede oscillatorer i [?]. Avhengig av verdien for en kontrollparameter kan epileptisk hjerneaktivitet modelleres.

Mye arbeid har vært gjort for å vise at hjernen er et ulineært kaotisk system [?]. Hvis hjernen virkelig er et kaotisk system, kunne det tenkes at EEG-signalet danner en kaotisk attraktor i faserommet som kunne beskrives ved enkle ulineære deterministiske ligninger [?]. Dimensjonsestimering har basert seg på denne antagelsen. Når det gjelder rapporterte dimensjonsestimater fra normal hjerneaktivitet varierer de både med tilstand av hjernen og mellom publikasjonene, for eksempel er dimensjonsestimater for alfa-aktivitet på 5-6, mens det for beta-aktivitet ikke har vært mulig å beregne et endelig dimensjonsestimat [?]. Når det gjelder registreringer under epileptisk anfall hos menneske, viser tabell 3.1 viser noen av de rapporterte dimensjonsestimater.

Tilstand	Målemetode	ν	N	f_s	Publikasjon
Epilepsi	EEG	2.05 ± 0.09 ,	6000	1200	[?]
Grand mal	EEG	5.6	15000	200	[?]
Epilepsi	MEG	7	4000-8000	100	Saermark m.fl. ¹
Epilepsi	MEG	ingen metning	4000-8000	100	Saermark m.fl. ¹

Tabell 3.1: Dimensjonsestimering fra EEG eller MEG registrert under epileptisk anfall hos menneske. Symbolet ν er dimensjonsestimat beregnet ved Grassberger-Procaccia-algoritmen, N er lengden av tidserien i antall punkter, mens f_s er samplingstettheten benyttet ved registreringen.

Forskjellen i dimensjonsestimatene kan forklares ved at dimensjonsestimeringen er gjort fra to typer signaler, (EEG og MEG), eller ved at typen anfall og sannsynligvis plassering av elektroder er forskjellig for de ulike eksperimentene. Andre årsaker til forskjell i resultater mellom ulike publikasjoner generelt kan være forskjellig valg av parametre for rekonstruering av faserommet eller forskjellige metoder for å beregne dimensjonsestimatene ut fra korrelasjonsintegralet (definert i avsnitt 2.4). Når det gjelder registreringsmetoder har f.eks. varierende samplingstetthet og antall bits i AD-konverteren vært benyttet. Oversampling har vist seg å kunne føre til underestimering [?].

Det antas som usannsynlig at forskjellene i dimensjonsestimater kun skyldes ytre faktorer som nevnt ovenfor. Babloyantz m.fl. har funnet forskjellige dimensjonsestimater for EEG registrert under våken tilstand, forskjellige stadier av søvn og under patologiske tilstander som Jacob Creutzfeldts sykdom og epileptiske anfall, se referansene [?], [?], [?] og [?]. Vi må derfor se på dimensjonsestimatene som et relativt mål for hjerneaktiviteten, hvor dimensjonsestimatene er beregnet for signaler registrert under samme ytre forhold og metoden for å beregne dimensjonsestimatene er den samme for flere signaler.

Tross en økende skeptisme til tidligere resultater, er det fortsatt ikke avklart om EEG er et deterministisk eller stokastisk signal. Det har vært anslått at hjernen kan vise kaotisk, periodisk eller stokastisk oppførsel avhengig av tilstanden [?]. Det vil derfor utføres en vurdering av påliteligheten av dimensjonsestimatene utover i oppgaven.

3.2 Registreringsmetoder

I dette avsnittet forklares registreringsmetodene EEG, EKoG og MEG. EKoG regnes egentlig som et spesialtilfelle av EEG siden den elektriske aktiviteten registreres ved begge metoder. De behandles her separat fordi datasett registrert ved begge metoder er analysert i oppgaven.

3.2.1 Elektroencefalografi (EEG)

Elektroencefalografi er en metode for å registrere den elektriske aktiviteten i hjernen. Signalene som registreres vises grafisk frem som kurver og kalles elektroencefalogrammer. For

¹Resultatene er gitt hos [?]

begge disse begrepene benyttes forkortelsen EEG. Caton var i 1875 den første til å registrere elektriske signaler fra hjernen, men først i begynnelsen av vårt århundre ble EEG registrert av den menneskelige hjerne. Siden publiseringen av [?] skjøt utviklingen av registreringsmetoder fart og EEG har i flere tiår vært benyttet klinisk og til forskning.

EEG-signalet registreres utenpå hodet (ekstrakranielt) og er en differanse mellom det elektriske potensiale ved en elektrode plassert på hodet og ved en referanse. Referansen kan være et gjennomsnitt av det elektriske potensialet i flere elektroder eller potensialet ved én elektrode. Ved Statens Senter for Epilepsi benyttes en elektrode sentralt plassert oppå hodet som referanse. Plasseringen er valgt fordi man antar at det er små variasjoner i det elektriske potensialet oppå hodet. Vanligvis registreres signaler simultant i flere elektroder, for eksempel i 8, 16, 32 eller 64 elektroder.

Elektroden som benyttes til registrering er 5 til 10 mm i diameter, mens tettheten av neuroner er ca. 10000 neuroner/mm³. Dette i tillegg til avstanden mellom elektrodene og neuronene hvor signalet på veien til elektroden sprer og forplanter seg tilsier at vi ved EEG registrerer en sum av signaler fra et område av hjernen. Spredningen av signalet på vei fra neuronene til elektrodene skyldes at de forskjellige deler av hjernen, cerebro spinal væske (CSF), skallen og skalpen har forskjellig ledningsevne. Skallen og skalpen har minst ledningsevne noe som fører til en filtrering av signalet. Denne filtreringen kan unngås ved å plassere elektroden direkte på hjernebarken.

3.2.2 Elektrokortikografi (EKG)

Ved hjerneoperasjon kan vi fjerne en bit fra skallen og plassere elektrodene direkte på hjernebarken (cortex). Elektrodene er nå nærmere kilden for den elektriske aktivitet enn ved ekstrakranielle EEG og filtreringen fra skalle og skalp er borte. Amplituden i registreringene er derfor opptil 10 ganger høyere enn ved ekstrakranielle målinger.

De intrakranielle elektrodene plasseres i matter å for eksempel 4x1, 5x1, 8x2,..., 8x8. Selv om avstanden mellom elektrodene kun er 5-10 mm, kan aktiviteten i de forskjellige elektrodene være ganske så forskjellig. Forskjellig aktivitet i to naboelektroder kan tyde på at opprinnelsen av den elektriske aktiviteten er i umiddelbar nærhet av elektroden. Similær aktivitet i elektroder atskilt av mer enn et par millimeter antas å skyldes at neuronene i nærheten av de to elektrodene drives av en felles "kilde" eller at det er en kopling mellom regionene som elektrodene dekker. Ved EKG registreres et signal fra et lite område av hjernen i forhold til en registrering ved EEG. Området hvor den elektriske aktiviteten har oppstått i hjernen kan derfor lokaliseres mer nøyaktig ved EKG enn ved EEG. Registrering ved EKG har likevel visse ulemper ved at registreringene skjer ved fysiske inngrep i form av hjerneoperasjon. Dette er forbundet med en viss risiko for bivirkninger for eksempel i form av intrakranielle blødninger. En målemetode som ikke krever fysiske inngrep og som gir minst like god nøyaktighet i lokaliseringen av epileptisk fokus er derfor ønskelig.

3.2.3 Magnetoencefalografi (MEG)

Som følge av den elektriske aktiviteten i hjernen dannes det svake magnetiske felter i hjernen. Siden slutten av 1960-tallet har det vært mulig å registrere disse feltene hvor styrken er i størrelsesorden av 10⁻⁹ gauss. Siden den gang har utstyret for registrering

av den magnetiske aktiviteten vært sterk. Registrering av MEG er i dag en anerkjent vitenskapelig metode for kartlegging og lokalisering av forskjellige typer hjerneaktivitet. Auditivt, visuelt og somatosensoriske utløste potensialer såvel som epileptogen aktivitet kan lokaliseres relativt nøyaktig ved MEG. At metoden ikke krever fysiske inngrep som operasjon, gjør metoden til et nyttig verktøy i forbindelse med diagnostikk av epilepsi.

Ved The Low Temperature Laboratory, Helsinki, benytter de i dag et fjerde-generasjons neuromagnetometer med 121 kanaler. Det store antall av SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) magnetometer gjør det mulig å registrere den magnetiske aktiviteten over hele hodet. Man får derfor aksess til all informasjon tilgjengelig gjennom MEG for studier av normale og skadede hjerner. I neurofysiologisk sammenheng representerer EEG og MEG nøyaktig det samme fysiologiske fenomenet. Det kan imidlertid vises matematisk at informasjonen om dette fenomenet ikke nødvendigvis er den samme i EEG og MEG.[?]. Registrering ved MEG og EEG gir ulik representasjon av signalet. En spike som er synlig i MEG er ikke *nødvendigvis* synlig i EEG og omvendt. I andre tilfeller kan en spike være synlig ved begge registreringsmetoder.

Registreringene av MEG skjer et magnetisk skjermet sted. Det er den absolutte magnetiske styrken av feltet som registreres slik at vi slipper bekymringer for påvirkning i signalet grunnet referanse-elektroden som ved EEG. Dette i tillegg til at skallen virker som et filter av det elektriske signalet, men ikke av det magnetiske, gjør at signal-støy-forholdet er forbedret for MEG mot EEG. Det er derfor interessant å anvende metodene som undersøkes i oppgaven, på MEG i tillegg til EEG og EKOg.

3.3 Beskrivelse av elektromagnetiske signaler

Registreringer ved EEG, EKOg og MEG representerer i neurofysiologisk sammenheng det samme fysiologiske fenomenet. Beskrivelsen av signaler gitt i de neste tre underavsnittene er gyldig også for EKOg og MEG selv om det er EEG som er omtalt i teksten.

3.3.1 Normal hjerneaktivitet registrert ved EEG, EKOg eller MEG

Som nevnt i avsnitt3.1.2 blir ikke utladninger fra ett neuron registrert ved EEG. Hva som registreres er den kollektive aktiviteten fra titusener av neuroner i ett område. Elektriske utladninger skjer uopphørlig og uregelmessig slik at det nesten alltid er “bakgrunnsfyring” fra neuronene. For å beskrive EEG-signalet skiller man mellom denne bakgrunnsaktiviteten og episodiske hendelser eller transienter som oppstår plutselig og som er av kort varighet. Av episodiske hendelser skiller vi mellom

- Spontan hjerneaktivitet, det vil si hjerneaktivitet som ikke er oppstått på grunn av ytre stimuli.
- Fremkalt respons (evoked response) som er utslag i hjernesignalet som følge av ytre stimuli som for eksempel lys, lyd eller elektriske sjokk.

En vanlig måte å beskrive signalet er ved frekvens. Til tross for konstant bakgrunnsfyring fra neuronene er det meste av aktiviteten som registreres rytmisk. Frekvensbåndet deles gjerne inn i fire deler.

Delta-aktivitet hvor frekvensen er mindre enn 4Hz. Delta-aktivitet kan også vise seg som isolerte bølger. Delta-aktivitet er ikke en vanlig egenskap i EEG registrert hos voksne i våken tilstand.

Theta-aktivitet hvor frekvensområdet er fra og med 4 til 8Hz. Theta-aktivitet er ikke utpreget uttalt i EEG, men er tilstede i små mengder, gjerne i tinning-regionen.

Alfa-aktivitet hvor frekvensområdet er fra og med 8 til og med 13 Hz. Denne aktiviteten er mest uttalt over bakhodet og er vanligvis synlig når øynene er lukket. Når øynene åpnes, er ikke aktiviteten synlig.

Beta-aktivitet hvor frekvensene er høyere enn 13 Hz. Denne aktiviteten er tilstede hos nesten alle individer med normal hjerneaktivitet, både under søvn og i våken tilstand.

Vi skal i oppgaven se på ett datasett registrert under normal hjerneaktivitet, se avsnitt 10.1.

3.3.2 Artefakter

Artefakter er elektriske signaler som registreres i EEG, men som ikke har sin opprinnelse i hjernen. Dette kan for eksempel være bidrag fra registreringsutstyret eller fra muskelsammentrekninger i hodebunnen eller ved øyeblikking. Disse og andre artefakter kan vanligvis gjenkjennes ved karakteristisk bølgeform og fordeling. Artefakter som skyldes øyeblikking eller muskelsammentrekninger kalles artefakter av biologisk opprinnelse. Disse artefaktene kan gi nyttig informasjon om tilstand og oppførsel hos subjektet som det registreres fra.

3.3.3 Epileptogen aktivitet registrert ved EEG

Under epileptogen aktivitet ser vi karakteristiske utladninger som er litt forskjellige ved ulike anfallstyper. Ved partielle anfall er endringene i den elektriske aktiviteten lokalisert til ett område i hjernen, mens den sees over hele hjernen samtidig ved generaliserte anfall. Ved epileptogen hjerneaktivitet inneholder signalet

- svingninger på 1.5 til 6Hz under anfall.
- spikes som er epileptiske utladninger.

Spikes kan også komme enkeltvis utenom anfall uten at det merkes av pasienten selv.

I forbindelse med epilepsi benyttes EEG som et diagnostisk hjelpemiddel til å

- avgjøre om bevissthetstap skyldes epilepsi eller andre årsaker, skille mellom forskjellige typer epileptiske anfall
- gi opplysninger om hva slags sykelig tilstand det er og hvordan den arter seg.
- bestemme hvor i hjernen den sykelige tilstand som er årsak til den epileptiske aktiviteten er lokalisert.

I denne oppgaven er datasett registrert ved EEG, ECoG og MEG analysert hvor det er registrert epileptisk aktivitet, se avsnitt 10.1.

Del II

Dimensjonsestimering fra kunstige data

Oversikt over Del II

Denne delen av oppgaven tar for seg dimensjonsestimering ved Grassberger-Procaccia-algoritmen og praktiske detaljer rundt dette når det benyttes kunstige data. Kunstige data anvendes i kapittel 4 for å skape tilnærmet ideelle forhold for dimensjonsestimering. Ideelle forhold i denne sammenheng vil si en uendelig mengde data fra et stasjonært, støyfritt og kaotisk system. Kapitlet tar for seg dimensjonsestimering når de tre siste av de ideelle kriteriene er oppfylt. Både MOD og SSA benyttes til rekonstruering av faserommet. Deretter ser vi på hvordan vi kan undersøke om dimensjonsestimatene er pålitelige.

I kapittel 7 ser vi på hvor følsom dimensjonsestimering ved G-P-algoritmen er for hvit støy i dataene. For å fjerne hvit støy kan forskjellige former for filtre anvendes. Vi begrenser oss her til IIR-, FIR-filtre samt filtrering ved SSA. Vi ser først på hvordan filtrering ved IIR- og FIR-filtre påvirker dimensjonsestimering av støyfrie signaler siden vi ønsker at filtrering skal la dimensjonen forbli uendret. Deretter ser vi på hvordan dimensjonsestimering av støyfylte signaler forbedres ved filtrering av IIR-, FIR-filtre og ved filtrering ved SSA. Resultatene fra de forskjellige filtrene sammenlignes til slutt.

Kapittel 5 tar for seg hvordan visuell inspeksjon av rekurrensplott kan benyttes for å undersøke om en tidsserie er stasjonær. I kapittel 4 skal vi se at periodisitet er en viktig parameter for dimensjonsestimeringen. Kapitlet om rekurrensplott tar derfor også for seg hvordan visuell inspeksjon av rekurrensplott gir oss informasjon om periodisitet i signalet.

For ustasjonære tidsserier er det utviklet egne algoritmer for dimensjonsestimering. I kapittel 6 ser vi på en av disse; PD2, en variant av punktvis dimensjon.

Et av målene i oppgaven er å se om dimensjonsestimering kunne anvendes som en indikasjon på at et signal er fra et lavdimensjonalt kaotisk system. Kapittel 8 tar for seg hvordan dette kan gjøres ved å lage surrogatdata fra de opprinnelige dataene.

Del I avsluttes med en oppsummering av de nevnte kapitler og med et forslag til fremgangsmåte for dimensjonsestimering fra data hvor man på forhånd ikke kjenner til om dataene er stasjonære, støyfrie eller kaotiske. Denne fremgangsmåten vil bli fulgt i Del II på tidsserier fra EEG, EKoG og MEG.

Kapittel 4

Dimensjonsestimering ved Grassberger-Procaccia-algoritmen

Dette kapitlet tar for seg dimensjonsestimering av kunstige data som er støyfrie, stasjonære og fra et kaotisk system. I avsnitt 4.1 presenteres korrelasjonsintegralet med de modifikasjoner som er innført siden den opprinnelige definisjonen. (Den opprinnelige definisjonen er gitt i avsnitt 2.4.) Avsnitt 4.1 ser også på hvordan dimensjonsestimatet, ν , kan beregnes gitt korrelasjonsintegralet. Som nevnt i innledningen er rekonstrueringen av faserommet viktig for påliteligheten av dimensjonsestimatene når vi har en endelig mengde data. Avsnitt 4.2 tar derfor for seg hvordan parametrene for rekonstrueringen bør velges når vi har én skalar tidsserie. Rekonstruering av faserommet skjer i dette avsnittet ved den enkleste teknikken for rekonstruering; Method of Delays (MOD). I avsnitt 4.3 ser vi på en teknikk for rekonstruering som er enklere å benytte men som krever flere beregninger; Singular Spectrum Approach (SSA). Avsnitt 4.4 ser blant annet på påliteligheten av dimensjonsestimatene i forhold til skalering, konvergens og antallet punkter i tidsserien. Kapitlet avsluttes med et forslag til fremgangsmåte for dimensjonsestimering ved Grassberger-Procaccia-algoritmen.

4.1 Grassberger-Procaccia-algoritmen

Grassberger-Procaccia-algoritmen ble først implementert etter definisjonen gitt i avsnitt 2.4 side 14, men er siden blitt modifisert til

$$C(l) = \frac{1}{C_0} \sum_{i=1}^M \sum_{j, |j-i| > K}^N \theta(l - \|X_i - X_j\|), \quad (4.1)$$

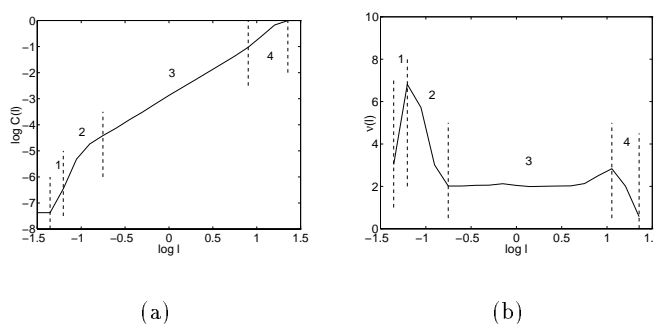
hvor N er som før det totale antall punkter i faserommet, M er antall referansepunkter og skaleringskonstanten C_0 er antall beregnede avstander. I den opprinnelige definisjonen er $M = N$ siden vi beregner avstandene mellom alle punktene i settet. Hvis vi ønsker å spare beregningstid¹, kan antall referansepunkter reduseres. Hvis ν_M er dimensjonsestimatet vi får ved å benytte M referansepunkter og ν er dimensjonsestimatet vi får ved å benytte

¹Programmet som har vært benyttet er beskrevet i [?]. Antall beregnede avstander er typisk av orden $O(N \log N)$.

alle punktene i settet som referansepunkter, har vi at $\lim_{M \rightarrow N} \nu_M = \nu$. Parameteren K er innført for ikke å telle opp hvert punktpar to ganger eller punktpar der punktene er korrelert i tid. Denne parameteren kommer vi tilbake til i avsnitt 4.4.5. Siden vi ikke teller opp punktpar to ganger, er skaleringskonstanten C_0 lik $\frac{N(N-1)}{2}$ når $M = N$ og $K = 0$.

4.1.1 Skaleringsregionen

Når vi har beregnet korrelasjonsintegralet $C(l)$, må vi for å beregne et dimensjonsestimat finne et intervall for l hvor skaleringen $C(l) \propto l^\nu$ gjelder. Tidsserien er endelig, og grensen $l \rightarrow 0$ kan da ikke oppfylles. Vi finner intervallet ved å se på den deriverte av $\log C(l)$ mot $\log l$. Regionen hvor $C(l) \propto l^\nu$ gjelder kalles skaleringsregionen og ν er da stigningstallet til $\log C(l)$ i $\log C(l)$ - $\log l$ -plottet over denne regionen. Følger vi [?], kan den deriverte av korrelasjonsintegralet deles opp i flere regioner som i figur 4.1 b).



Figur 4.1: a) Korrelasjonsintegralet er beregnet for en tidsserie fra x -variabelen fra Lorenz-atraktoren av lengde $N = 5000$ punkter. For Lorenz-atraktoren er korrelasjonsdimensjonen lik $\nu = 2,06$. Faserommet er rekonstruert ved MOD med parameterverdiene $m = 9$ og $\tau = 17$. b) Den deriverte av korrelasjonsintegralet kan deles inn i fire regioner. I a) er de samme regioner markert for korrelasjonsintegralet. Disse regionene er forklart i teksten.

Den første regionen er begrenset nedenfra av den minste avstanden i mengden, l_{min} . I denne regionen øker stigningstallet til $C(l)$ brått til det når en maksimumsverdi. Denne maksimumsverdien er langt høyere enn dimensjonen av atraktoren. Det høye stigningstallet kan ha to årsaker. I [?] er forklaringen at støy dominerer over signalet for små verdier av $\log l$ slik at $C(l) \propto l^m$, hvor m er imbeddingsdimensjonen. Hvis antall punkter i mengden er uendelig, forventes maksimumsverdien å være lik m . Hvis maksimumsverdien er lavere enn m , tilskrives det at mengden inneholder et endelig antall punkter. Imidlertid kan maksimumsverdien i praksis like gjerne være høyere som lavere enn m . Initielt inneholder kubene om referansepunktene kun referansepunktet selv og er ellers tomme, slik at den relative økningen i antall punkter er stor når kubene økes med en liten enhet. Den høye maksimumsverdien er da et resultat av derivasjon av $\log C(l)$.

Den andre regionen begynner i punktet hvor stigningstallet har nådd sitt maksimum. Fra dette punktet avtar stigningstallet til det stabiliserer seg om en verdi tilsvarende korrelasjonsintegralet. Når kubene nå vokser og dataene er støyfylte, blir avstandene mellom

punktene i kubene etterhvert så stor at signalet dominerer over støyen. Om dataene ikke er støyfrie, vil stigningstallet uansett avta. Relativ endring av antall punkter i kubene er ikke lenger så dramatisk når kubene vokser og de etterhvert favner mange punkter. I avsnitt 7.1.2 vil vi se at første og andre region varer lengre jo mer hvit støy dataene inneholder.

I **den tredje regionen** er stigningstallet noenlunde stabilt om en fast verdi. Dette er skaleringsregionen vi må finne for å beregne korrelasjonsdimensjonen. I slutten av denne regionen kan det hende at stigningstallet stiger brått. I figur 4.1 b) kan vi også se en liten stigning i slutten av skaleringsregionen. Korrelasjonsintegralet er her beregnet for et enkelt signal hvor faserommet er rekonstruert ved MOD. I [?] tilskrives denne økningen krumning i ytterkant på attraktoren, og at kubene derfor tilføres flere punkter for store verdier av $\log l$. I avsnitt 4.2.5 skal vi se at denne stigningen skyldes valg av parameterverdier for rekonstrueringen av faserommet.

Den fjerde regionen strekker seg fra slutten av tredje region hvor stigningstallet begynner å avta og til stigningstallet har avtatt til null. Den øvre grensen for denne regionen er lik den største avstanden i mengden l_{maks} lik diameteren av attraktoren. Kubene er nå så store at de favner hele attraktoren, og vil derfor ikke tilføres flere punkter om l økes ytterligere.

4.1.2 Beregning av stigningstallet ν

Det finnes flere fremgangsmåter for å beregne stigningstallet til korrelasjonsintegralet. Siden beregningene foregår numerisk, er korrelasjonsintegralet gitt ved punkter atskilt av faste intervaller for $\log l$. For grafen gjennom disse punktene kan vi bestemme stigningstallet ved lineær regresjon eller derivasjon.

Ved **lineær regresjon** i planet tilpasses en rett linje gjennom en mengde punkter. Hvis mengden antas å være støyfylte med hensyn på både første- og andreaksen, kan man anvende *lineær regresjon ved prinsipalkomponentanalyse* (PCA), se avsnitt 2.5.2. Den rette linja tilpasses mengden ved at summen av kvadratet av avstandene fra punktene vinkelrett på linja minimeres. Ved beregning av korrelasjonsintegralet bestemmer vi på forhånd hvilken avstand punktene på grafen skal ha med hensyn på førsteaksen. Vi kan derfor anvende en metode hvor dataene antas å være støyfrie med hensyn på en av aksene. Ved *minste kvadraters metode* minimeres kvadratet av avstanden fra den rette linja til punktene langs én av aksene. Ved begge disse former for lineær regresjon bidrar alle avstander mellom punktene og den rette linja like mye til beregningen av stigningstallet. Hvis vi antar at støyen dominerer over signalet i nedre del av skaleringsregionen, kan vi isteden benytte *veiet minste kvadraters metode* hvor avstandene mellom punktene og den rette linja for små verdier av $\log l$ gis liten vekt.

Velger vi isteden å benytte **derivasjon**, avhenger hvor store variasjoner vi får i skaleringsområdet av hvilken derivasjonsalgoritme vi benytter siden derivasjon virker støyforsterkende. I denne oppgaven er den deriverte beregnet ved minste kvadraters metode over tre og tre punkter; forrige punkt, det aktuelle punktet og det neste punkt. Denne derivasjonsalgoritmen virker glattende i forhold til å beregne den deriverte ved differansen mellom etterfølgende punkter på grafen.

4.1.3 Lokalisering av skaleringsregion

Metodene for å beregne stigningstallet kan også benyttes til å automatisere lokaliseringen av skaleringsregionen. I oppgaven velger vi lengden av skaleringsregionen manuelt, mens lokaliseringen er automatisert.

Benyttes **lineær regresjon**, velges skaleringsregionen lik den regionen hvor summen av kvadratene av avstanden mellom punktene og den rette linja minimeres. En ulempe ved lineær regresjon er at metoden kan finne lineær skalering uavhengig av om det finnes et skaleringsområde eller ikke [?].

Benyttes derivasjon, kan skaleringsregionen velges lik regionen hvor standardavviket av den deriverte minimeres. Om det virkelig er lineær skalering i denne regionen avsløres det ved et stort standardavvik. Skaleringsområdet og dermed dimensjonsestimatet kan for eksempel forkastes hvis variasjonene i skaleringsregionen overstiger 10% av middelveidien av den deriverte i skaleringsregionen. Denne fremgangsmåten benyttes i resten av oppgaven.

4.1.4 Lengden av skaleringsregionen

Ved en uendelig mengde støyfrie data kan løsningsbanene returnere vilkårlig nær andre løsningsbaner. Nedre grenseverdi for avstanden mellom punktene er da $l_{min} = 0$. Siden dataene er støyfrie og kubene heller aldri vil bli tomme foruten referansepunktet, vil region 1 og 2 i den deriverte av korrelasjonsintegralet ikke eksistere. Nedre grense for skaleringsregionen vil da være $l_0 = 0$. Hvis vi lar l_1 være øvre grense for skaleringsregionen og lar den øvre grensen, l_1 , være en konstant, er lengden av skaleringsregionen gitt ved

$$\lim_{l_0 \rightarrow 0} \log l_1 - \log l_0 = \lim_{l_0 \rightarrow 0} \log \frac{l_1}{l_0} = \infty \quad (4.2)$$

Av dette er det naturlig å anta at lengden av skaleringsregionen, $\Delta l = \frac{l_1}{l_0}$, øker med antall punkter i mengden. Dette er også vist i figur 4.2.

Krav til lengden av skaleringsregionen varierer sterkt i litteraturen, hvor svakeste og strengeste kriterium er gitt ved

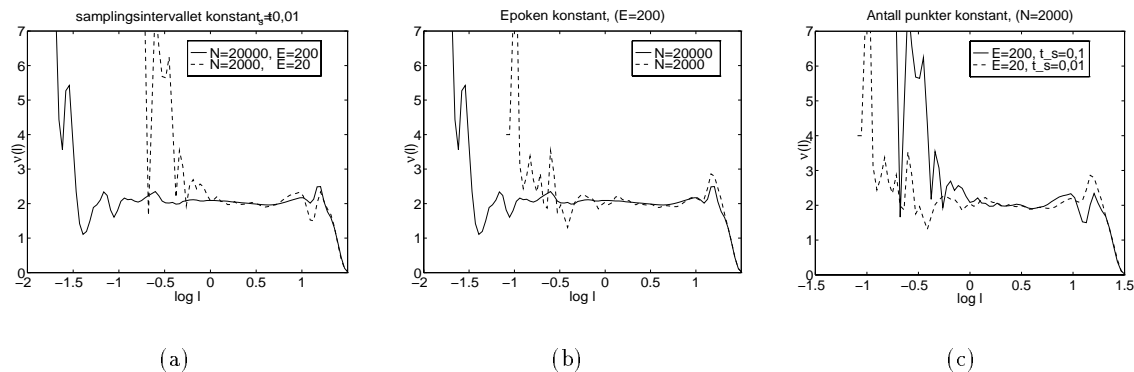
$$\Delta l = 2, \quad [?] \quad (4.3)$$

$$\Delta l = 10, \quad [?] \quad (4.4)$$

Ifølge [?] kan dimensjonen estimeres med mindre enn 5% feil når lengden av tidsserien er $N > 10^{2+0,4m}$ og lengden av skaleringsregionen er $\Delta l = 4$. Dette forholdet gjelder når $m < D$ og D er den fraktale dimensjonen. I forsøkene med kunstige data, er lengden av tidsseriene stort sett $N = 5000$. Jeg har derfor anvendt $\Delta l = 4$ i beregningene av dimensjonsestimatene. I avsnitt 4.4 ser vi mer på det nødvendige antall punkter i tidsserien og påliteligheten av dimensjonsestimatene.

4.1.5 Fremgangsmåte for beregning av dimensjonsestimat

Vi har i dette avsnittet definert et “modifisert” korrelasjonsintegral og sett på detaljer rundt beregningen av et dimensjonsestimat når vi er gitt en mengde i faserommet. Mengden kan



Figur 4.2: Den deriverte av korrelasjonsintegralet er plottet for tidsserier fra x -variabelen fra Lorenz-systemet med varierende samplingstetthet og antall punkter i tidsserien. a) Lengden av tidsseriene er som angitt i plottet $N = 2000$ og $N = 20000$. Samplingstettheten er for disse to plottene konstant slik at epoken, E , er forskjellig for de to signaler. b) Tidsseriene er samlet med samplingstettheten $t_s = 0,01$ og $t_s = 0,1$ henholdsvis slik at de begge har samme epoke. Av dette og forrige plott ser vi at lengden av skaleringsregionen øker med økende antall punkter i tidsserien. c) Tidsseriene er de to korte fra a) og b). Antall punkter er $N = 2000$ for begge mens samplingstetthet og epoke er forskjellig. I dette tilfellet er lengden av skaleringsregionen tilnærmet den samme uavhengig av epoken for tidsserien så lenge antall punkter i tidsseriene er det samme.

være punkter på den opprinnelige attraktoren hvor alle koordinater til hvert punkt er kjent, eller resultatet av en rekonstruering av faserommet ved f.eks. en av teknikkene omtalt senere i kapitlet.

En oppsummering av avsnittene ovenfor gir fremgangsmåten benyttet i [?] for beregning av dimensjonsestimatet:

1. Beregn korrelasjonsintegralet $C(l)$.
2. Beregn den deriverte av korrelasjonsintegralet.
3. Velg en fast lengde av skaleringsregionen. Denne lengden, $\Delta l = \frac{l_1}{l_0}$, velges ut fra kriterier for påliteligheten av dimensjonsestimatene, helst så langt som mulig. For kunstige data har jeg valgt $\Delta l = 4$ (se avsnitt 4.1.4). Dette tilsvarer $\log_{10} 4 \approx 0.6$ enheter på $\log l$ -aksene i plottene.
4. La skaleringsregionen være det intervall i $\log l$ hvor den deriverte av korrelasjonsintegralet har minst variasjon.
5. La dimensjonsestimatet ν være gjennomsnittsverdien av den deriverte over skaleringsregionen. Standardavviket over skaleringsregionen angir usikkerheten av dimensjonsestimatene.

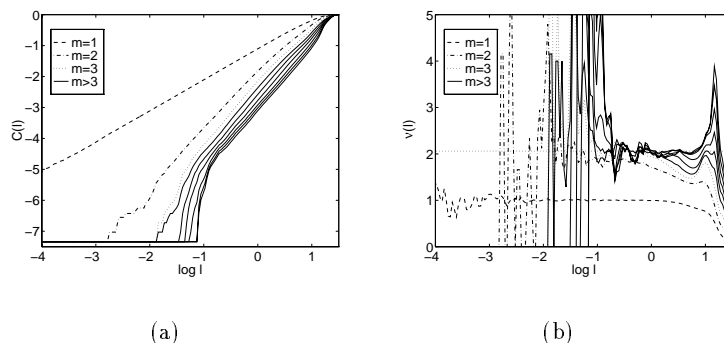
4.2 Rekonstruering ved MOD

Førrige avsnitt baserte seg på at vi var gitt en mengde punkter på en attraktor. Gitt en enkelt tidsserie kan faserommet rekonstrueres ved forskjellige metoder, f.eks. MOD eller SSA som vi skal se nærmere på i dette avsnittet. Ved rekonstruering ved MOD så vi i avsnitt 2.5.1 at rekonstruksjonen var bestemt ved to parametre, tidsforsinkelsen τ og imbeddingsdimensjonen m . I mange tilfeller er det tilstrekkelig med $m > D$ for at den rekonstruerte attraktor skal være topologisk ekvivalent med den opprinnelige. Imidlertid er ifølge Takens teorem (avsnitt 2.5.3) topologisk ekvivalens kun *garantert* når $m \geq 2D + 1$, hvor D er attraktorens fraktale dimensjon. Består mengden av et endelig antall punkter, er topologisk ekvivalens avhengig av rekonstruksjonen. Parametrene for rekonstrueringen må derfor velges med omhu.

Hva som er den beste måten å rekonstruere faserommet på, avhenger av hvilke(n) oppgave(r) som skal utføres på mengden etter rekonstruksjon. For eksempel velges for prediksjon den rekonstruksjon som minimerer prediksjonsfeilen, mens for dimensjonsestimering velges den rekonstruksjon som gir et mest mulig nøyaktig dimensjonsestimat. Det vil si den rekonstruksjonen som maksimerer lengden av skaleringsregionen samt minimerer variasjonene i dette. Her ser vi på en skaleringsregion av fast lengde $\Delta l = \frac{l_1}{l_0} = 4$. Optimal rekonstruksjon er derfor den rekonstruksjonen som minimerer variasjonene i en region av denne lengden.

4.2.1 Imbeddingsdimensjonen m

En gunstig imbeddingsdimensjon kan bestemmes ved å først velge en fast verdi for tidsforsinkelsen. Deretter beregnes korrelasjonsintegralet for økende imbeddingsdimensjoner til $\nu(m)$, dimensjonsestimat beregnet for hver imbeddingsdimensjon, konvergerer. Hvis $\nu(m)$ har konvergert, er korrelasjonsintegralene parallelle over et område for $\log l$, se figur 4.3 a). Dette er synlig ved å se på den deriverte av korrelasjonsintegralet som i figur 4.3 b).



Figur 4.3: a) Korrelasjonsintegralet beregnet for økende m og fast τ . b) Den deriverte av korrelasjonsintegralet i a). Den stiplede linjen tilsvarer attraktorens fraktale dimensjon.

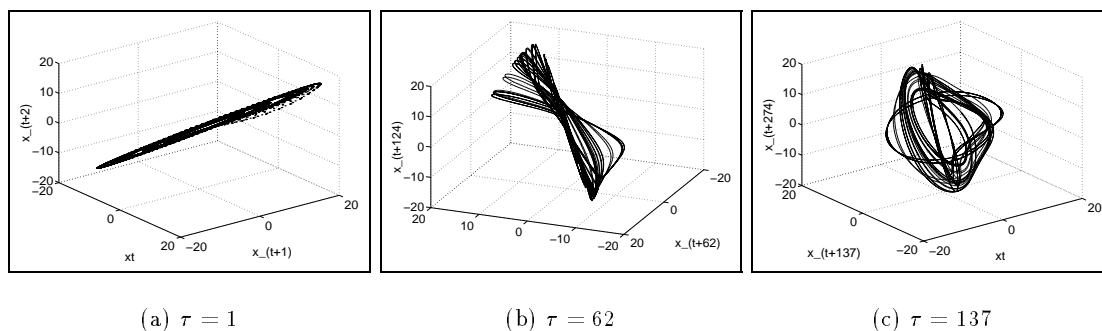
4.2.2 Tidsforsinkelsen τ

Uavhengig av teknikk for rekonstruering av faserommet, ønsker vi at hver rekonstruert tilstandsvektor skal inneholde mest mulig informasjon om dynamikken i det opprinnelige systemet. På den måten får vi mest mulig informasjon om den geometriske struktur av attraktoren.

Dette betyr at ved en lav imbeddingsdimensjon ønskes minst mulig avhengighet mellom elementene i de rekonstruerte tilstandsvektorene. Samtidig ønsker vi heller ikke at første og siste element i vektorene skal være helt ukorrelerte.

Avhengighet og dekorrelasjon mellom elementene i tidsserien

Ved å se på tre-dimensjonale faseportretter av x -variabelen fra Rössler-attraktoren, ser vi blant annet hva det vil si at etterfølgende elementer er avhengige. Samtidig kan vi av plottene se hva det vil si for den geometriske struktur av den rekonstruerte attraktor å velge forskjellige vinduslengder for rekonstrueringen. Vi ser da på $x_t, x_{t+\tau}, x_{t+2\tau}$ som henholdsvis første, midtre og siste element i tidsforsinkelsesvektorer. Lengden av tidsserien er $N = 5000$, mens samplingstettheten er $t_s = 0,1$.



Figur 4.4: Faseportretter fra x -variabelen fra Rössler-attraktoren for forskjellige tidsforsinkelser. a) $\tau = 1$. Vi ser at koordinatene til mengden i det rekonstruerte rommet er sterkt korrelert når $x_j \approx x_{j+1}$. b) $\tau = 62$, den dominante perioden til signalet, c) $\tau = 137$. Når tidsforsinkelsen er stor, er første og siste element i tidsforsinkelsesvektorene ukorrelerte. Dette ser vi ved foldinger i den rekonstruerte attraktoren.

Hvis vi velger $\tau = 1$ og samplingstettheten er høy, har alle elementene, fra første til siste element i den rekonstruerte tilstandsvektoren, stor avhengighet siden de er målt tett i tid, og den rekonstruerte attraktoren vil havne på diagonalen i det m -dimensjonale rommet, figur 4.4 a). Dette gir oss liten informasjon om den geometriske strukturen til den opprinnelige attraktoren.

Hvis τ velges lik en periodisk komponent av attraktoren, vil denne komponenten bli underrepresentert i den rekonstruerte attraktoren, figur 4.4 b). Vi ønsker at alle frekvenser i attraktoren skal være representert i det rekonstruerte rommet, og bør da velge en tidsforsinkelse som representerer flest mulig av disse. Å velge den samme tidsforsinkelsen mellom alle elementene i forsinkelsesvektorene gjør ifølge [?] at τ velges som et kompromiss mellom

å representere de lave og høye frekvensene i signalet. En stor τ vil representere de lave frekvensene, mens en liten τ representerer de høye frekvensene. Dette argumentet forutsetter at samme imbeddingsdimensjon er benyttet for liten og stor tidsforsinkelse. En tilstandsvektor rekonstruert ved en liten τ vil dekke et kort tidsintervall slik at langsomme svingninger i signalet ikke er representert.

Den tredje faren er å velge vinduslengden, $w = (m - 1)\tau$, stor. Når τ er stor, vil første og siste element være ukorrelerte siden de er målt med lang tidsavstand. I et kaotisk system vil to nærliggende løsningsbaner etterhvert divergere. To tilstandsvektorer kan anses på samme måte. De første elementene kan anta noenlunde samme verdier, mens de siste er fjernt fra hverandre. I det m -dimensjonale faserommet havner punktene gitt ved disse vektorene derfor langt fra hverandre. Ser vi på hele faserommet, vil punktene i det rekonstruerte rommet være spredt utover i faserommet og det kan oppstå foldinger på attraktoren, figur 4.4 c). Strukturen som var synlig for kortere tidsforsinkelser blir da skjult. (Figur 4.6 a) og b) viser faseportretter hvor denne strukturen er synlig.) Hvordan vi kan finne en gunstig tidsforsinkelse eller vinduslengde er derfor viktig for rekonstrueringen.

4.2.3 Metoder for valg av τ

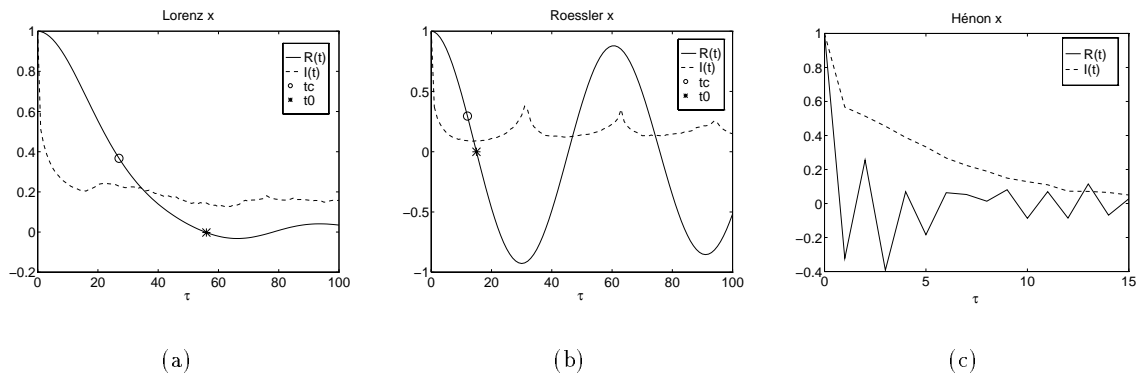
Vanlig fremgangsmåte for å bestemme tidsforsinkelsen, τ , er å finne et mål for hvor fort avhengigheten mellom dataene avtar, bestemme en nedre terskel man ønsker for avhengigheten mellom elementene i vektoren og så beregne tiden det tar før avhengigheten har falt til dette nivået. Eksempler på slike grenser er

τ_c	korrelasjonstiden, som er tiden det tar for autokorrelasjonen å falle til e^{-1} av sin opprinnelige verdi
τ_0	første nullpunkt for autokorrelasjonsfunksjonen
τ_{min}	første lokale minimum for autokorrelasjonsfunksjonen
τ_I	første lokale minimum for gjensidig informasjon

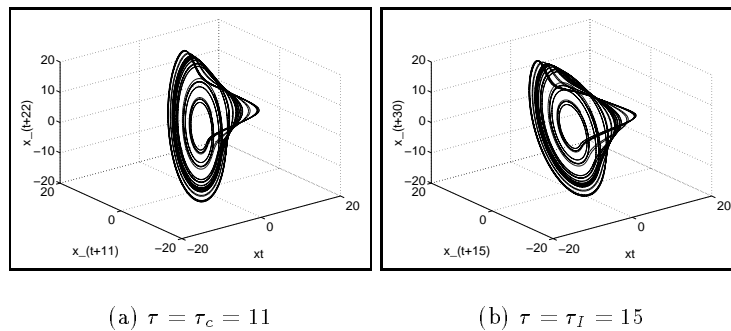
For enkelte systemer som f.eks. Hénon-attraktoren gir ikke den gjensidige informasjonen noe entydig minimum. Det er da naturlig å anta at avhengigheten er liten mellom samplene allerede etter ett tidsskritt.

Avhengighet mellom to sampler

Ved å benytte et av estimatene for τ gitt i forrige avsnitt, ser man kun på avhengigheten mellom to og to sampler i tidsserien. Hvis vi ønsker en todimensjonal imbedding for å lage faseportretter, eller ønsker minimum avhengighet mellom to etterfølgende elementer i tidsforsinkelsesvektorene, er τ_I den optimale tidsforsinkelsen fremfor τ_c , τ_0 eller τ_{min} fra autokorrelasjonsfunksjonen. Dette fordi vi ser på ulineære systemer og autokorrelasjonsfunksjonen kun måler lineær avhengighet.



Figur 4.5: Autokorrelasjonsfunksjonen og gjensidig informasjon for x -variabelen fra a) Lorenz-systemet hvor $t_s = 0,01$ b) Rössler-systemet, $t_s = 0,1$ og c) Hénon-atraktoren. Lengden av tidsserien er $N = 5000$ for alle tidsseriene. t_s står for samplingstetthet.



Figur 4.6: Faseportretter for x -variabelen fra Rössler-atraktoren for tidsforsinkelser, tilsvarende τ antall samplingsintervaller, $t_s = 0,1$, $N = 5000$. a) $\tau = 11$ lik korrelasjonstiden. b) $\tau = 15$, første minimum for gjensidig informasjon og første nullpunkt for autokorrelasjonsfunksjonen. Jo mer attractoren “brettes ut”, jo mindre er korrelasjonen mellom koordinatene til den rekonstruerte mengden. Vi ser at koordinatene i det rekonstruerte rommet er mer korrelert ved korrelasjonstiden enn ved tidsforsinkelsen tilsvarende første minimum for den gjensidige informasjonen.

Flerdimensjonal imbedding

I de fleste tilfeller ønsker vi en imbeddingsdimensjon høyere enn to eller tre. Velger vi da en tidsforsinkelse hvor vi bare ser på avhengigheten mellom to etterfølgende elementer i tidsforsinkelsesvektorene, er det mulig å lage rekonstruerte tilstandsvektorer hvor første og siste element er helt ukorreleerte.

I [?] anbefales derfor å velge τ ved å se på den generelle informasjonen mellom flere sampler i tidsserien. Spørsmålet som stilles er; hva er den gjensidige informasjonen mellom samplene $x(t), x(t + \tau), \dots, x(t + (m - 1)\tau)$ når τ er et fast tidsintervall? Svaret finner vi ifølge [?] ved å generalisere den gjensidige informasjonen til å gjelde i flere dimensjoner. Tiden det tar å nå første minimum for “generalisert gjensidig informasjon” mellom flere sampler forventes å være mindre enn tiden det tar å nå første minimum for den gjensidige informasjonen mellom to sampler. Denne måten å bestemme verdien for τ ville vært å foretrekke fremfor å velge τ_I, τ_c, τ_0 eller τ_{min} . Imidlertid kjenner vi ikke til at det er implementert noen algoritme for beregning av generalisert gjensidig informasjon.

Isteden velger vi å bestemme tidsforsinkelsen ut fra vinduslengden av imbeddingsvektorene. Dette er foreslått i [?]. Det tas da hensyn til tidsavstanden mellom første og siste element i de rekonstruerte tilstandsvektorer. Hvis vi har bestemt imbeddingsdimensjonen, bestemmes τ ved $\tau = \frac{w}{m-1}$, hvor w er vinduslengden $w = (m - 1)\tau$. Optimal vinduslengde antas å være gjennomsnittlig rekurrenstid, τ_R , på den opprinnelige attraktoren. (Rekurrenstiden er tiden det tar før løsningsbanen returnerer til et lokalt område i faserommet.) Som et estimat for denne beregnes gjennomsnittlig periode mellom maksima i signalet (time between peaks).

Et annet forslag til optimal vinduslengde er gjennomsnittlig periode, w_P , i signalet. I de fleste tilfeller gir dette samme resultat, for eksempel for tidsserier fra z -variabelen fra Lorenz-systemet og tidsserier fra Rössler-systemet. Eksempler hvor dette ikke sammenfaller, er x - eller y -variabelen fra Lorenz-systemet, se figur 4.7.

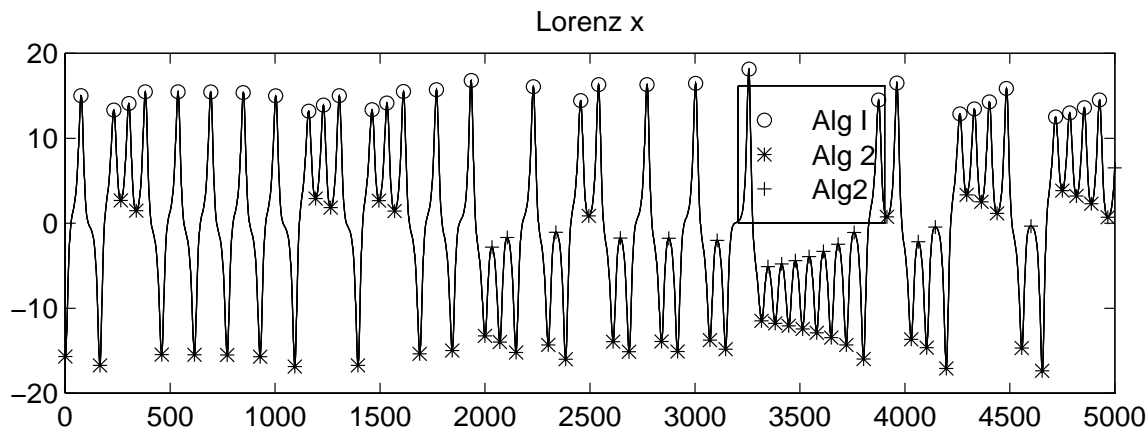
4.2.4 Metoder for å beregne gjennomsnittlig periode

Gjennomsnittlig periode i signalet kan for periodiske signaler estimeres ved effektetthetsspekteret. Dominant periode i signalet er da gitt ved $w_P = \frac{1}{f}$ hvor f_s er samplingstetthet og f er frekvensen for den periodiske komponenten i signalet. For ikke-periodiske signaler, som kaotiske, må vi imidlertid benytte andre metoder.

En mulighet er å se på det kumulative effektetthetsspekteret og finne frekvensen som tilsvarer middelverdien av dette. Bedre er det når vi har klare svingninger i signalet som for tidsserier fra Lorenz-attraktoren. Gjennomsnittlig periode i signalet kan da beregnes ved å lokalisere topper eller bunner i signalet og la τ_P være gjennomsnittlig tid mellom disse.

Algoritmer for lokalisering av topppunkter

Jeg har benyttet to metoder for å lokalisere topp- eller bunn-punkter. Den første krever enten en jevn periode i signalet eller en jevn amplitude for de lokale maksima. Den andre



Figur 4.7: Toppunkter hvor signalet er tersklet ved verdien 10 er funnet ved første metode nevnt i teksten (Alg I) for lokalisering av toppunkter. Ved den andre metoden Alg II, lokaliseres i tillegg alle toppunkter av lavere amplitude samt alle bunnpunkter. Tidsserien er $N = 5000$ punkter fra x -variabelen fra Lorenz-systemet samlet med lengde av samplingsintervallet lik $t_s = 0,01$. Gjennomsnittlig rekurrenstid estimeres for dette signalet ved gjennomsnittlig tid mellom toppene funnet ved Alg I, mens gjennomsnittlig periode kan estimeres ved gjennomsnittlig periode for de raske svingningene. Det vil si at vi ser på gjennomsnittlig periode i signalet før det skifter fra positive til negative verdier og omvendt.

håndterer signaler med ujevn amplitude for lokale maksima, men krever en noenlunde jevn periode.

Metoder anvendt i oppgaven

Den første metoden lokaliserer toppunkter ved å se på differansen mellom etterfølgende punkter i tidsserien. Et punkt er et toppunkt hvis det foregående og etterfølgende punkt har lavere verdi enn punktet selv. Det kreves også at tidsavstand mellom to etterfølgende topper er større enn en bestemt grense som vi må sette på forhånd manuelt. Denne grensen må være mindre enn den minste perioden i signalet. Er tidsavstanden mellom toppene mindre enn denne grensen, beholdes det høyeste av de to topppunktene. Dette fører til at vi forkaster topppunkter som skyldes støy eller lokale variasjoner i signalet. Imidlertid krever dette en jevn periode. En ulempe ved metoden er at den ikke tar hensyn til differanse mellom topp- og bunn-punkter. Dette fører til at den kan finne topppunkter som kun skyldes støy eller lokale variasjoner i signalet når perioden er ujevn. Istedenfor å kreve en jevn periode, kan vi se på den delen av signalet som ligger over en terskelverdi. (Det er mulig jeg vil misbruke terminologien når jeg heretter kaller dette en terskling av signalet.) Dette krever en jevn amplitude for de lokale maksima i signalet. Figur 4.7 viser lokalisering av lokale maksima hvor signalet er tersklet.

For signaler hvor det er varierende amplitude for lokale maksima og det i tillegg er lokale variasjoner i signalet, har jeg anvendt en annen metode. Denne finner både topp- og bunnpunkter hvor et toppunkt alltid er etterfulgt av et bunnpunkt. Disse topp- og bunnpunktene er definert på tilsvarende måte som topppunktene i forrige metode. Å lokalisere

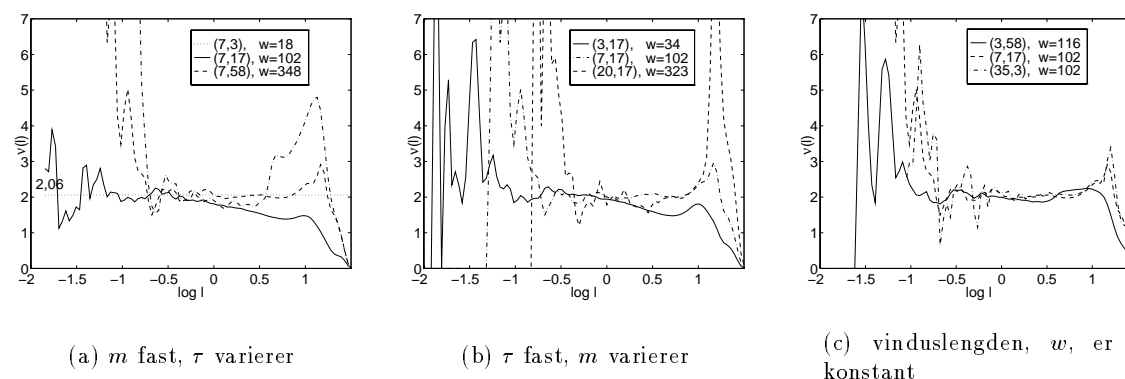
bunn- i tillegg til topppunkter er innført istedenfor terskling for å unngå å lokalisere topppunkter som skyldes støy eller lokale variasjoner i signalet. Det kreves nå ikke en jevn amplitude for de lokale maksima, men en jevn periode. Situasjoner hvor denne metoden feiler, er når signalet har store variasjoner i perioden og amplituden til de lokale maksima varierer. Mulige måter å løse dette på er å lavpassfiltrere signalet eller å sette en nedre grense for differansen mellom etterfølgende topp- og bunnpunkter.

Alternative metoder

Algoritme for deteksjon av toppene i signalet hvor man setter en nedre grense for avstanden mellom toppene er gitt i [?]. En metode som løser det sistnevnte problem i avsnittet ovenfor er gitt i [?]. Metoden kalt “delta-metoden” er utviklet for lokalisering av topp- og bunnpunkter i finansielle tidsserier (aksjekurser). Lokaliseringsmetoden for topppunkter tilsvarer metodene ovenfor, men en nedre grense er satt for differanse i amplitude mellom etterfølgende topp- og bunnpunkter. “Delta-metoden” setter ingen krav til jevnhet i periode, men derimot til jevnhet i differanse i amplitude mellom topp- og bunnpunkter.

4.2.5 Rekonstruksjon og valg av skaleringsregion

For å finne hvilke parameterverdier som er best egnet for rekonstruksjonen kan vi gjøre en sammenligning av den deriverte av korrelasjonsintegralet beregnet for forskjellige valg av parameterverdier. Den kombinasjonen av τ og m som gir minst variasjon av i skaleringsregionen er den beste.



Figur 4.8: Den deriverte av korrelasjonsintegralet for x -variabelen fra Lorenz-atraktoren beregnet for forskjellige kombinasjoner av imbeddingsdimensjon og tidsforsinkelse (m, τ) som angitt i plottene. Vi ser at lengden av skaleringsregionen varierer med valg av parametere når disse ikke gir en konstant vinduslengde.

I figur 4.8 a) er faserommet rekonstruert ved MOD med imbeddingsdimensjon $m = 7$ og forskjellige valg for τ , mens i figur 4.8 b) er faserommet rekonstruert ved MOD med konstant verdi for τ og varierende imbeddingsdimensjoner. Dette gir forskjellige vinduslengder som angitt i plottene.

I figur 4.8 a) er Lorenz-atraktorens fraktale dimensjon $D = 2.06$ avmerket. Vi ser at lengden av skaleringsregionen begrenses ovenfra når rekonstruksjonen er gjort ved en liten vinduslengde; stigningstallet “når ikke opp” til ønsket verdi ved store l . Dette fører til underestimering. Tilsvarende blir dimensjonsestimatene mer usikre for store vinduslengder.

Vi ser i figur 4.8 b) at skaleringsregionen begrenses ovenfra når vinduslengden er stor. Som nevnt i avsnitt 4.1.1 skyldes dette krumning i ytterkant av attraktoren.

Figur 4.8 c) viser at for en konstant vinduslengde er lengden av skaleringsregionen uavhengig av det enkelte valg for τ og m så lenge $m > D$. Dette viser at vinduslengden er en viktigere parameter for rekonstrueringen enn tidsforsinkelsen τ .

Forslag til valg av vinduslengder er

- w noen få ganger lenger enn korrelasjonstiden [?].
- w lik rekurrenstiden for den opprinnelige attraktor [?] .
- w større enn den dominante perioden i signalet [?].

Tabell 4.1 viser estimerte verdier for vinduslengden ved å benytte det kumulative effektthetsspekteret, gjennomsnittlig periode i signalet ved gjennomsnittlig tid mellom de lokale maksima i signalet (signalet er tersklet ved 0) og ved å benytte 3 ganger korrelasjonstiden for tidsserier fra Lorenz-systemet er gitt i tabell 4.1. Det største spriket i verdiene finner

	T_f	T_P	τ_c
Lorenz x	56	88	90
Lorenz y	73	92	66
Lorenz z	76	75	45

Tabell 4.1: *Forskjellige estimater for optimal vinduslengde fra tidsserier fra Lorenz-systemet. T_f er for x - og y -variabelen beregnet fra det kumulative effektthetsspekteret, mens T_f tilsvarende en periodisk komponent for z -variabelen. T_P er*

vi for x -variabelen mellom verdien fra det kumulative effektthetsspekteret og de andre verdiene for samme variabel. Ellers er det forholdsvis liten variasjon mellom de forskjellige estimatene for vinduslengde. En ulempe ved Albanos forslag er at man benytter et lineært mål for avhengighet mellom samplene, mens kaotiske systemer er ulineære. For periodiske signaler sammenfaller rekurrenstid og dominant periode. Kaotiske systemer er ikke periodiske. I oppgaven vil gjennomsnittlig tid mellom lokale maksima i signalet benyttes som estimat for optimal vinduslengde.

Konsekvenser av at vinduslengden er den kritiske parameter

I [?] lot man tidsforsinkelsen avhenge av imbeddingsdimensjon og korrelasjonstid for å beholde en konstant og optimal vinduslengde for økende m . I [?] har man anbefalt en vinduslengde på noen få ganger lenger enn korrelasjonstiden. Pritchard og Duke valgte derfor tidsforsinkelsen lik $\tau = \frac{3\tau_c}{m-1}$ som gir en vinduslengde på $w = \tau(m-1) = 3\tau_c$. Når man nå undersøker om korrelasjonsintegralene konvergerer med økende imbeddingsdimensjon, vil de alltid konvergere fordi vinduslengden er fast. Å velge forskjellig verdi for tidsforsinkelsen på denne måten anbefales derfor ikke.

4.2.6 Oppsummering

Vi har i dette avsnittet sett på hvordan parameterverdiene for rekonstrueringen av faserommet ved MOD kan velges. Ved rekonstruering ved MOD velges verdi for tidsforsinkelse, τ , og imbeddingsdimensjon, m . Vi har sett at vinduslengden er den kritiske parameteren for rekonstrueringen. Lengden av skaleringsregionen er konstant for forskjellige kombinasjoner av m og τ så lenge $w = (m - 1)\tau$ er konstant og imbeddingsdimensjonen tilfredsstillende $m > D$.

Vi følger derfor forslaget i [?] om å velge parameterverdiene for rekonstrueringen av faserommet ut fra optimal vinduslengde. Denne estimeres ved gjennomsnittlig periode mellom lokale maksima i signalet.

Fremgangsmåte for rekonstruering av faserommet og dimensjonsestimering ved Grassberger-Procaccia-algoritmen er gitt i slutten av kapitlet etter at vi har sett på rekonstruering av faserommet ved SSA samt på parametre for påliteligheten av dimensjonsestimatene.

4.3 Rekonstruering av faserommet ved SSA

Rekonstruering av faserommet ble definert i avsnitt 2.5. Vi ser i dette avsnittet på valg av parameterverdier for rekonstruering av faserommet og sammenligner resultater fra dimensjonsestimering når faserommet er rekonstruert ved MOD og SSA.

Når vi nå ser på om SSA gir en rekonstruert attraktor topologisk ekvivalent med den opprinnelige, forutsetter vi en uendelig mengde støyfrie data. Som nevnt utføres ved SSA en initiell imbedding ved MOD. Mengden vi får, $A \in \mathbb{R}^{N_p \times p}$, er ved Takens Imbeddingsteorem topologisk ekvivalent med den opprinnelige attraktor når $p \geq 2D + 1$. På denne mengden utføres en lineær transformasjon $A \rightarrow A' = AU$. Denne transformasjonen er inverterbar hvis $U \in \mathbb{R}^{p \times p}$ siden $\text{rank}(U) = p$. Topologisk ekvivalens er garantert når transformasjonen er inverterbar og en-til-en, det vil her si at $A = A'U^{-1}$. Attraktoren rekonstruert ved SSA er derfor topologisk ekvivalent med den opprinnelige når $U \in \mathbb{R}^{p \times p}$.

Når mengden A er endelig, viser det seg at det er mulig å beregne et dimensjonsestimat av den rekonstruerte attraktor som tilsvarende dimensjonen av den opprinnelige også når $U \in \mathbb{R}^{p \times m}$, hvor $2D + 1 \leq m \leq p$. I mange tilfeller holder det at $m > D$.

Korrelasjonsdimensjonen er uavhengig av teknikk for rekonstruksjon definert ved

- skalering med hensyn på l
- konvergens med hensyn på m

Som for rekonstruering ved MOD er det ved SSA avhengig av parameterverdiene for rekonstrueringen om dette oppfylles.

4.3.1 Redusering av imbeddingsdimensjonen ved singularverdier

Vi husker fra avsnitt 2.5.2 at etter initiell imbedding ved MOD er imbeddingsdimensjonen $p = w + 1$, men at denne kan reduseres ved å kaste de siste prinsipalkomponentene. Fordelen

ved å redusere imbeddingsdimensjonen for en støyfri mengde er at beregningstiden for de oppgaver som skal utføres på den rekonstruerte mengden reduseres.

Vi husker at kolonnene i A' er prinsipalkomponentene til A hvor de er ordnet etter avtakende standardavvik. Standardavviket i de siste prinsipalkomponentene kan ofte være mye mindre enn i de første. Disse inneholder da mindre informasjon om mengdens geometriske struktur. Vi ser derfor på muligheten for å redusere imbeddingsdimensjonen (samt forbedre filtreringen) ved å kaste de siste prinsipalkomponentene.

Plotter vi standardavviket og det kumulative standardavviket, ser vi i figur 4.9 a) og b) at de første prinsipalkomponentene representerer størstedelen av spredningen i mengden. Standardavviket, σ_i , er skalert ved $\sigma_i = \frac{\sigma_i}{\sum_1^p \sigma_i}$ slik at hver av dem viser andel av mengdens totale spredning. Hvis vi skulle ønske å beholde prinsipalkomponentene som har standardavvik større enn en gitt terskel, eller antall prinsipalkomponenter som representerer mer enn f.eks. 95% av den totale spredningen i mengden, ser vi at antallet beholdte prinsipalkomponenter avhenger av p .

En tredje mulighet er å se på $\log \sigma_i$. I enkelte tilfeller kan standardavviket av de siste prinsipalkomponenter gi et flatt spekter som vist i figur 4.9 c). I dette tilfellet er de i størrelsesorden av maskinnøyaktigheten. De gir oss ingen informasjon om mengdens geometriske struktur men kan anses som støy, og vi kan derfor kaste dem. Imidlertid ser vi av samme plott at antallet beholdte og kastede prinsipalkomponenter avhenger av p . Jo større p er, jo mindre forskjell er det i standardavviket for etterfølgende prinsipalkomponenter og jo flere prinsipalkomponenter beholder vi før spekteret er flatt.

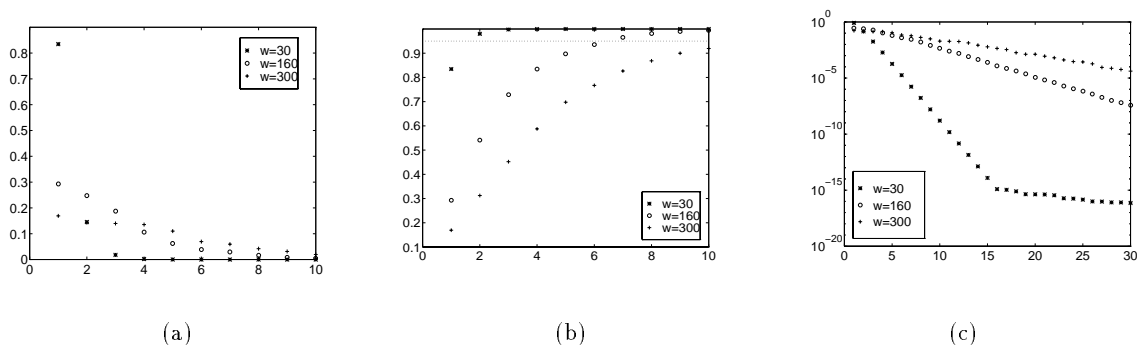
Konklusjonen er at vi plotter logaritmen av singularverdiene for å redusere imbeddingsdimensjonen. De prinsipalkomponentene hvis singularverdier gir et flatt spekter, kastes. Siden vi i oppgaven ønsker å undersøke om et signal er fra et lavdimensjonalt system, det vil si $D < 10$, er det unødvendig å beregne korrelasjonsintegralet for en imbeddingsdimensjon høyere enn 20. Den øvre grensen for imbeddingsdimensjonen velges derfor lik minimum av 20 og den vi fant fra singularverdiene.

4.3.2 Konvergens i korrelasjonsintegralet med hensyn på m

Korrelasjonsintegralet konvergerer alltid med økende imbeddingsdimensjon når vinduslengden er fast, se figur 4.10 a). Ofte konvergerer det ved en lavere imbeddingsdimensjon enn den som vi har kommet frem til ved fremgangsmåten i avsnittet ovenfor. Vi kan definere konvergens i dimensjonsestimatene med hensyn på imbeddingsdimensjon ved at

- usikkerheten av dimensjonsestimatene minimeres
- spredningen av dimensjonsestimatene minimeres med økende imbeddingsdimensjon

Dimensjonsestimatene kan plottes som en funksjon av m . I figur 4.10 b) er dette gjort for rekonstruksjoner ved tre forskjellige vinduslengder. Hvilken verdi for m dimensjonsestimatene konvergerer ved avhenger av w . Figur 4.10 c) viser at det er tilsvarende for usikkerheten av dimensjonsestimatene. Den stabiliserer seg med økende vinduslengde, men ved hvilken avhenger av vinduslengden. Imidlertid ser vi at usikkerheten av dimensjonsestimatene for $w = 300$ har stabilisert seg allerede fra $m = 14$.



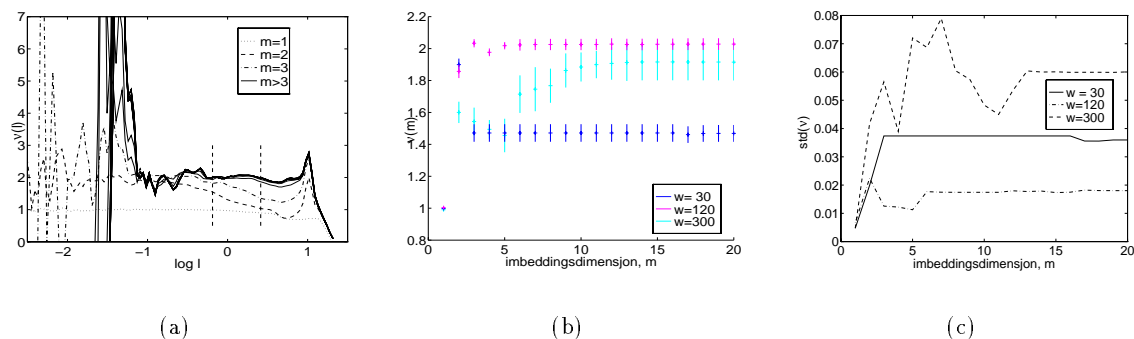
Figur 4.9: Faserommet er rekonstruert ved SSA fra en tidsserie fra x -variabelen fra Lorenz-systemet. Plottene viser standardavviket til de første prinsipalkomponentene hvor vinduslengden er som angitt i plottene. Standardavviket er normalisert som beskrevet i teksten. Andreaksen tilsvarer a) de normaliserte verdiene av standardavviket, det vil si $\sigma_i = \frac{\sigma_i}{\sum_i \sigma_i}$, b) det kumulative standardavviket og c) logaritmen til standardavviket. Førsteaksen er i alle plottene indeksen til prinsipalkomponentene.

Parameterverdi for m velges da ved at vi først beregner korrelasjonsintegralet fra $m_{min} = 1$ til en øvre grense m_{maks} lik minimum av 20 og antall singularverdier over støynivået i signalet. Den endelige verdien for imbeddingsdimensjonen velges lik den verdien hvor korrelasjonsintegralet har konvergert, det vil si den verdi for m hvor standardavviket til dimensjonsestimatene har konvergert. I oppgaven har jeg valgt å benytte en noe høyere imbeddingsdimensjon for å være sikret konvergens. Denne fremgangsmåten benyttes kun for én verdi av w , gjerne estimert optimal vinduslengde, siden vi senere ser på rekonstruksjoner fra vinduslengder i en omegn om denne.

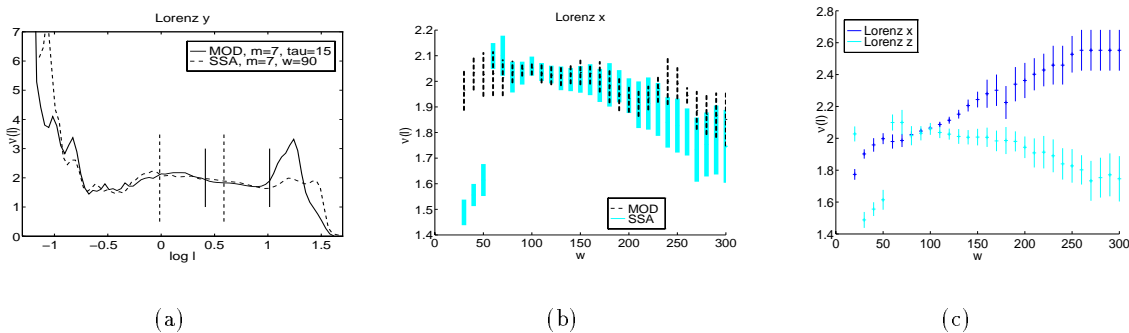
4.3.3 Vinduslengden w og sammenligning av MOD og SSA

Om den initielle imbeddingsdimensjonen p beholdes, er SSA en rotasjon av den initielle mengden rekonstruert ved MOD. Det er da naturlig å anta at optimal vinduslengde for rekonstruering ved MOD også er optimal for SSA. Figur 4.11 a) viser at korrelasjonsintegralene blir tilsvarende for rekonstruering ved MOD og SSA når vinduslengde og imbeddingsdimensjon er den samme for begge rekonstrueringer. I plottet er valg av skaleringsregion markert. For disse to rekonstrueringene velges de forskjellig. Rekonstruering ved SSA og MOD kan derfor gi forskjellige dimensjonsestimater, se tabell 4.2. Dimensjonsestimatene er beregnet ved samme verdier for m og w . For x - og z -variabelen velges skaleringsregionen tilnærmet likt ved rekonstruering med SSA og MOD.

I figur 4.11 b) er dimensjonsestimatene beregnet for økende vinduslengde hvor faserommet er rekonstruert henholdsvis ved SSA og ved MOD. Av plottet ser vi at variasjonene i skaleringsregionen øker med økende og avtakende vinduslengde fra optimal vinduslengde ved $w = 100$. Når vinduslengden er veldig stor, ser vi at dimensjonsestimatene fra SSA og MOD følges ad når vinduslengden vokser. Ved stor vinduslengde gir begge metoder underestimering. Av figur 4.11 c) ser vi at vi like gjerne kan få overestimering som underestimering når vinduslengden er lang. Figuren viser dimensjonsestimater beregnet med økende vindusleng-



Figur 4.10: Dimensjonsestimering fra x -variabelen fra Lorenz-systemet. Lengden av tidsserien er $N = 5000$. a) Den deriverte av korrelasjonsintegralene. Korrelasjonsintegralet er beregnet over økende imbeddingsdimensjoner hvor $w = 120$. Valg av skaleringsregion er markert. For $m > 3$ er det ikke synlig forskjell mellom de deriverte av korrelasjonsintegralene. b) Dimensjonsestimatene er plottet som en funksjon av m . Vinduslengdene for rekonstrueringen er som angitt i plottet. c) Andreaksen viser standardavviket til dimensjonsestimatene, mens førsteaksen er økende imbeddingsdimensjon.



Figur 4.11: a) Den deriverte av korrelasjonsintegralet beregnet fra rekonstruering ved MOD og SSA av en tidsserie fra y -variabelen fra Lorenz-atraktoren. Vi ser at det er liten forskjell i korrelasjonsintegralet om faserommet rekonstrueres ved MOD eller SSA. Parametrene for rekonstrueringen er gitt i plottet. Valg av skaleringsregion er markert fra de to rekonstrueringene. b) Dimensjonsestimater beregnet fra rekonstrueringer av faserommet ved SSA og MOD for økende vinduslengde. Imbeddingsdimensjonen er $m = 11$ for begge teknikker av rekonstruering. c) Dimensjonsestimater for x - og z -variabelen fra Lorenz-systemet når faserommet er rekonstruert ved MOD.

Tidsserie	ν_{SSA}	w	ν_{MOD}	τ
Lorenz x	1.93	84	1.93	14
Lorenz y	2.01	90	1.80	15
Lorenz z	2.00	72	2.00	12

Tabell 4.2: Dimensjonsestimater fra Lorenz-systemet. ν_{SSA} er dimensjonsestimateter fra rekonstruering med SSA, ν_{MOD} er dimensjonsestimater fra rekonstruering med MOD. Vinduslengden w er valgt tilnærmet verdiene for estimert optimal vinduslengde i tabell 4.1). Alle dimensjonsestimatene er beregnet ved $m = 7$. Tidsforsinkelsen τ er valgt slik at vinduslengden er den samme fra rekonstruering ved MOD og SSA. Lengden av skaleringsregionen er $\Delta l = 4$.

de for x - og z -variabelen fra Lorenz-systemet. Hvis vi antar at optimal vinduslengde er ved $w = 100$, ser vi at variasjonene i skaleringsregionen øker ut fra optimal vinduslengde, både i økende og avtakende retning. Vi ser også at variasjonene minimeres ved tilnærmet samme vinduslengde. Plottene bekrefter at samme vinduslengde er optimal for rekonstruksjon ved MOD og SSA. Er vinduslengden liten får vi ved SSA underestimering, mens en stor vinduslengde fører enten til over- eller til underestimering.

4.3.4 Oppsummering

Dette avsnittet har tatt for seg valg av parameterverdi for imbeddingsdimensjonen, og i forbindelse med vinduslengden sammenlignet resultater fra dimensjonsestimering når faseområdet er rekonstruert med MOD og SSA. En fremgangsmåte for å redusere imbeddingsdimensjonen er gitt, først for å finne m_{maks} ved hjelp av logaritmen av singulærverdiene. Deretter ved hjelp av dimensjonsestimater fra økende m . Ved rekonstruering ved SSA konvergerer alltid korrelasjonsintegralene med økende imbeddingsdimensjon når vinduslengden er konstant. Å redusere imbeddingsdimensjonen har derfor kun betydning for beregningstiden.

Når det gjelder valg av vinduslengde, gir rekonstruering med MOD og SSA tilsvarende korrelasjonsintegraler når parameterverdiene for rekonstrueringen gir samme vinduslengde. Vi kan derfor anta at samme vinduslengde er optimal for rekonstruering ved SSA som for MOD. For rekonstruering ved MOD ble optimal vinduslengde estimert ved gjennomsnittlig periode mellom lokale maksimumi signalet. Rekonstruering ved SSA gjøres da på følgende måte:

1. Beregn gjennomsnittlig periode i signalet, τ_P .
2. Utfør en initiell imbedding ved MOD med $\tau = 1$ og $w = \tau_P$. Vi får da mengden $A \in \mathbb{R}^{N_p \times p}$.
3. Utfør singulærverdidekomposisjonen (SVD): $A = U\Sigma V^T$, hvor vi får $U \in \mathbb{R}^{p \times p}$.
4. Forkast de prinsipalaksler hvis singulærverdier gir et flatt spekter, dvs. behold de m første kolonnene av U slik at $U \in \mathbb{R}^{p \times m}$, men maksimum 20.
5. Utfør projeksjonen $A' = AU$, hvor $U \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $m \leq p$.

6. Det rekonstruerte faserommet er nå gitt ved A'

Ved dimensjonsestimering kan rekonstruering ved MOD og SSA gi noe forskjellige dimensjonsestimater. Dette skyldes først og fremst forskjellig valg av skaleringsregion.

Etter at vi har sett på valg av parameterverdier i forbindelse med påliteligheten av dimensjonsestimatet i neste avsnitt, gis i avsnitt 9 en fremgangsmåte for rekonstruering av faserommet og dimensjonsestimering når faserommet rekonstrueres ved SSA og MOD,

4.4 Påliteligheten av dimensjonsestimatene

Når vi har beregnet et dimensjonsestimat, ønsker vi å vite om dette dimensjonsestimatet virkelig er til å stole på. I dette avsnittet ser vi på påliteligheten av dimensjonsestimatene i forhold til skalering og konvergens i korrelasjonsintegralet og antall punkter i tidsserien. Krav til tidsserien er gitt i form av antall punkter og samplingstetthet. Estimerte verdier for dimensjonen regnes ikke som pålitelige hvis det ikke er tatt hensyn til temporær korrelasjon i tidsserien. Vi ser derfor også på hvordan parameterverdien for K , autokorrelasjonslengden, bør velges. Til slutt gis hvilke krav vi setter til et dimensjonsestimat for at det skal regnes som pålitelig.

Konvergens og skalering

Ved rekonstruksjon av faserommet, kan korrelasjonsintegralet uttrykkes som en funksjon av både imbeddingsdimensjonen m og avstandene i mengden l . Ved uendelig mengde støyfrie data er da ν gitt ved

$$\lim_{l \rightarrow 0, m \rightarrow \infty} C(l, m) \propto l^\nu \quad (4.5)$$

hvor det kreves skalering med hensyn på l og konvergens med hensyn på m .

Hvis vi lar $\nu(m)$ være dimensjonsestimatet beregnet ved imbeddingsdimensjonen m , er en enkel test for å se om disse konvergerer gitt ved å se på spredningen av $\nu(m)$. Ved rekonstruering ved MOD kan vi for eksempel velge å godta dimensjonsestimatet om

$$\text{std}(\nu(m)) < 10\%, \quad (4.6)$$

For dimensjonsestimater fra Lorenz-atraktoren ville det si at vi har konvergens ved dimensjonsestimatene 1.85 2.06, 2.25 selv om $\nu(m)$ er økende. Ved rekonstruering ved SSA konvergerer alltid korrelasjonsintegralet med økende imbeddingsdimensjon når vinduslengden er fast. Vi krever isteden at dimensjonsestimatene er samsvarende over et intervall av vinduslengder.

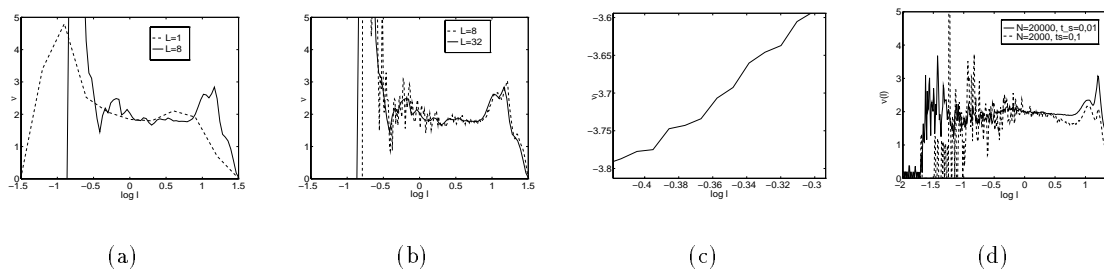
Ved en endelig mengde data vil stigningstallet alltid variere over skaleringsregionen når vi finner dette ved derivasjon. I avsnitt 4.1.5 valgte vi ν til å være gjennomsnittlig stigningstall over en skaleringsregion av lengde $\Delta l = \frac{l}{l_0} = 4$. Toleransegrense for variasjonen i skaleringsregionen er å beholde dimensjonsestimatet om

$$\text{std}(\nu(l)) < 10\% \quad (4.7)$$

Dimensjonsestimatet anses som mer pålitelighet jo lengre Δl er. Imidlertid har også antall punkter på grafen som dimensjonsestimatet er beregnet over innvirkning på påliteligheten av dimensjonsestimatet.

4.4.1 Tettheten av punkter på grafen

Tettheten av punktene på grafen bestemmes i denne implementasjon av Grassberger-Procaccia-algoritmen manuelt. Denne tettheten av punktene på grafen må velges i forhold til dataene slik at skaleringsintervallet ikke blir skjult fordi vi har for store sprang i $\log l$. I figur 4.12 a) ser vi at lokale variasjoner i den deriverte av korrelasjonsintegralet er skjult på grunn av stor avstand mellom punktene. Beregnes korrelasjonsintegralet med svært liten avstand mellom punktene med hensyn på l , får vi store variasjoner i den deriverte av korrelasjonsintegralet. Disse variasjonene blir større dess mindre avstanden vi velger mellom punktene, se figur 4.12 b). Dette skyldes at korrelasjonsintegralet er beregnet ut fra et endelig antall punkter. Vi kan tenke oss at kubene om referansepunktene økes med en liten enhet av gangen. Siden økningen er liten og antallet punkter i mengden er endelig, fylles ikke kubene med nye punkter for hver økning i l . Dette fører til at korrelasjonsintegralet får en “trappeform” som i figur 4.12 c). Variasjonene i skaleringsregionen blir imidlertid noe mindre jo lengre tidsserien er, se figur 4.12 d). Vi ser at tettheten av punktene på



Figur 4.12: a) og b) Korrelasjonsintegralet er beregnet med forskjellige valg for tettheten av punkter på grafen. Plottene viser den deriverte av $\log C(l)$. Med teksten $L=i$, $i=1, 8, 32$ i plottene menes at avstanden mellom punktene på grafen med hensyn på l tilsvarer $L = \frac{l_j+1}{l_j} = 2^{\frac{1}{j}}$ hvor l_j er verdiene langs førsteaksen. a) Hvis avstanden velges stor som for $L=1$ i a), er lokale variasjoner i den deriverte ikke synlig. Velges avstanden svært liten som for $L=32$ i b), blir variasjonene i den deriverte store fordi korrelasjonsintegralet får en “trappeform” som vist i c). Plottet viser et utsnitt av korrelasjonsintegralet beregnet for $L=32$. Trappeformen kommer av et endelig antall punkter i mengden og liten avstand mellom punktene l_j og l_{j+1} , for alle j . d) Plottet viser den deriverte av korrelasjonsintegralet beregnet for to tidsserier hvor $L = 32$. Lengden av tidsseriene er som angitt i plottet.³

grafene påvirker usikkerheten av dimensjonsestimatene når lokalisering av skaleringsregionen og stigningstallet bestemmes ved derivasjon. For å kunne sammenligne usikkerheten av dimensjonsestimatene for forskjellige tidsserier, kan vi velge samme tetthet av punkter for

³Samplingstettheten er henholdsvis $t_s = 0.01$ og $t_s = 0.1$ for de to tidsseriene. Epoken, det vil si tidsintervallet som de to dekker, er derfor det samme. Vi kunne isteden la samplingstettheten være den samme for de to tidsserier, og variere N ved å variere epoken. Vi finner også da mindre variasjon i skaleringsintervallet dess lengre tidsserien er.

alle tidsseriene. For tidsseriene analysert i oppgaven er avstanden $L = \frac{l_{j+1}}{l_j} = 2^{\frac{1}{8}}$ benyttet. En mindre verdi for L medfører at lokale variasjoner i korrelasjonsintegralet blir skjult, mens en større verdi fører til større variasjoner i den deriverte av korrelasjonsintegralet.

4.4.2 Antall punkter

Vi har sett at lengden av tidsserien har betydning for

- lengden av skaleringsregionen, (avsnitt 4.1.4)
- variasjonene i skaleringsregionen som følge av derivasjon og tettheten av punkter på grafen (avsnitt 4.4.1)

Ved å sette betingelser for blant annet variasjon og lengde av skaleringsregionen, har man kommet frem til forskjellige anslag for antall punkter en tidsserie bør inneholde; Felles

	Theiler ⁴	[?]	Smith ⁴
N_{min}	10^D	$10^{2+0.4m}$	42^M
N_{Lorenz}	115	630	1760

Tabell 4.3: M er det største heltall mindre enn fraktaldimensjonen D . N_{min} er anslaget for nødvendig lengde av tidsserien, mens N_{Lorenz} er anslaget beregnet for Lorenz-atraktoren hvor $D = 2.06$.

for disse anslagene for N , er at de skales eksponensielt med hensyn på dimensjon. Det minste anslaget kan synes å være noe optimistisk, mens det strengeste er noe pessimistisk og ifølge [?] ugyldig for korrelasjonsdimensjonen. Anslaget gitt i [?] regnes for å være mer realistisk. Dette gjelder når $m < D$ og baserer seg på at lengden av skaleringsregionen er $\Delta l = \frac{l}{l_0} = 4$ og at feilen i dimensjonsestimatet er mindre enn $0.05m$. Når $m > D$ antar Tsonis at det nødvendige antall punkter i tidsserien skalerer som en funksjon av den fraktale dimensjonen. Denne funksjonen er imidlertid ukjent.

Ut fra kravene til antall punkter i tidsserien kan vi finne kriterier for å teste påliteligheten av dimensjonsestimater.

I [?] er det vist at den øvre grensen for stigningstallet til korrelasjonsintegralet avhenger av N og lengden av skaleringsregionen. Grensen er gitt ved

$$\nu < 2 \log_{\frac{l}{l_0}}(N) \quad (4.8)$$

Beviset finner vi ved å se på stigningstallet over skaleringsregionen $[l_0, l_1]$;

$$\nu = \frac{\log C(l_1) - \log C(l_0)}{\log l_1 - \log l_0} \quad (4.9)$$

Vi har at

$$C(l_0) \geq \log C(l_1) \leq \frac{N(N-1)}{2} < N^2, \quad (4.10)$$

⁴Anslagene er referert fra [?, s.1355]

Dette medfører at

$$\log C(l_1) - \log C(l_0) < \log N^2 \quad (4.11)$$

Vi finner da at

$$\frac{\log C(l_1) - \log C(l_0)}{\log\left(\frac{l_1}{l_0}\right)} < \frac{\log N^2}{\log\left(\frac{l_1}{l_0}\right)} \quad (4.12)$$

$$\nu < 2 \log_{\frac{l_1}{l_0}}(N)$$

Hvis vi ser på minstekravet til antall punkter i tidsserien fra Tsonis og antar at det minste nødvendige antall punkter i tidsserien er gitt ved $N_{min} \propto 10^{2+0.4D}$ når $m > D$, kan vi teste påliteligheten av dimensjonsestimatene ved forholdet

$$\text{int}\nu < \frac{\log_{10}(N) - 2}{0.4} \quad (4.13)$$

hvor $\text{int}(\cdot)$ betyr integerdelen av tallet. Dette forholdet vil i resten av oppgaven bli omtalt som “Tsonis_N-kriteriet”.

Ruelles kriterium er klart mye svakere enn kriteriet vi fant fra Tsonis. I oppgaven vil påliteligheten av dimensjonsestimatene testes mot antall punkter i tidsserien etter Tsonis_N-kriteriet, når lengden av skaleringsregionen er $\Delta l = \frac{l_1}{l_0} = 4$.

4.4.3 Epoken

Forrige avsnitt tok for seg krav til lengden av tidsserien i antall av punkter. Imidlertid er ikke bare antall rådata av betydning for kvaliteten av dimensjonsestimatene, men også antall ganger et lokalt område av faserommet blir besøkt av løsningsbanene til systemet. Epoken er det tidsintervallet som målingene har foregått over. Vi har i dette avsnitt forutsatt at signalet er stasjonært. Siden stasjonaritet er definert ved at løsningsbanene returnerer gjentatte ganger til lokale områder i faserommet, kan vi kreve av tidsserien at den er mange ganger lenger enn den dominante perioden i signalet. (I kapittel 5 ser vi hvordan dette kan testes.)

4.4.4 Samplingsintervallet

Tidligere i kapitlet har vi sett at rekonstruksjonen av attraktoren fra en endimensjonal tidsserie er bestemt ved vinduslengden $w = (m - 1)\tau$. Ut fra optimal vinduslengde kan vi regne oss frem til en øvre grense for lengden av samplingsintervallet. Hvis vi ser på en bestemt imbeddingsdimensjon, \hat{m} , lar tidsforsinkelsen være lik ett samplingsintervall, $\tau = t_s$, og vi ønsker at $w_{opt} > (\hat{m} - 1)t_s$, finner vi

$$t_s < \frac{w_{opt}}{\hat{m} - 1} \quad (4.14)$$

(Hvis man antar at det er en sammenheng mellom korrelasjonstiden og optimal vinduslengde, finner man som i [?] den øvre grensen for samplingsintervallet gitt ved $t_s < \frac{t_c}{\hat{m}}$.) Velges t_s lengre enn denne øvre grensen, vil rekonstruksjon med imbeddingsdimensjonen \hat{m} gi en vinduslengde lenger enn den optimale.

4.4.5 Autokorrelasjonslengden

Oversampling kombinert med en kort tidsserie er kjent for å kunne gi underestimering på grunn av temporær korrelasjon mellom samplene i tidsserien. Ved å benytte parameteren K i beregningen av korrelasjonsintegralet (definisjon i avsnitt 4.1), kan vi unngå dette.

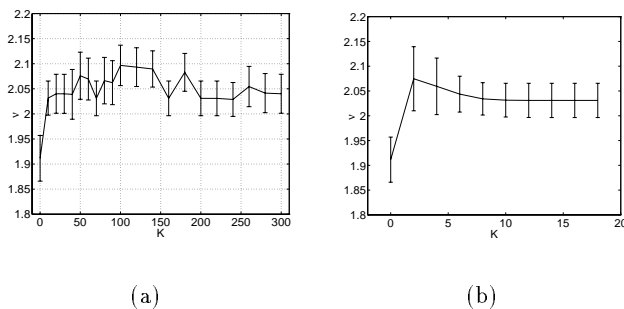
Parameteren K ble innført i [?] hvor det er vist at det er mulig å beregne en endelig korrelasjonsdimensjon for en tidsserie som består av autokorrelert Gaussisk støy når parameteren K ikke er med i beregningen av korrelasjonsintegralet og lengden av tidsserien er $N < 2\tau_c^{\frac{m}{2}}$. Når K blir tilstrekkelig stor, gir ikke korrelasjonsintegralet et endelig dimensjonsestimat for disse tidsseriene. Selv om uttrykket 4.15 gir $K > \tau_c (\frac{2}{N})^{\frac{2}{m}}$ som et estimat for K foreslår Theiler å velge

$$K > \tau_c \quad (4.15)$$

for å utelukke punktpar som er lineært korrelert i tid og rom fra beregningen av korrelasjonsintegralet.

Problemet med temporær og romlig korrelasjon mellom samplene i tidsserien er også tilstede ved tidsserier fra deterministiske systemer. Siden antall punktpar som kastes ved å innføre parameteren K er lite i forhold til det totale antall punktpar i mengden, anbefales det derfor å velge en stor verdi for autokorrelasjonslengden. I [?] foreslås det å kaste alle punktpar som har tidsavstand mindre enn gjennomsnittlig rekurrenstid på attraktoren.

Imidlertid viser det seg at vi kan velge K mindre enn korrelasjonstiden for at de tidskorrelerte punktene ikke skal påvirke dimensjonsestimatene. Dette er illustrert i figur 4.13.



Figur 4.13: a) Dimensjonsestimater er beregnet for korrelasjonsintegral beregnet for økende verdier av K . Lengden av tidsserien er $N = 5000$. Faserommet er rekonstruert ved SSA, $p=120$, $m=8$. K er valgt fra 0 til 300 som er nesten 2 ganger gjennomsnittlig rekurrenstid. b) Dimensjonsestimatet for $K = 0, 2, 4, \dots, 18$, samme rekonstruering. Vi ser at vi kun har underestimering for $K = 0$.

4.4.6 Valgte kriterier for godkjenning av dimensjonsestimatene

Vi har i dette avsnittet sett på krav til tidsserien i forbindelse med dimensjonsestimering. Forhold vi har sett på er blant annet antall punkter, epoken og samplingsintervallet. Når det

gjelder beregningen av korrelasjonsintegralet har vi sett på tettheten av punkter på grafen og valg av autokorrelasjonslengde. Alle disse parametrene har innvirkning på påliteligheten av dimensjonsestimatene. Når det gjelder usikkerheten av dimensjonsestimatene, velger vi å godkjenne dimensjonsestimatene hvis

1. variasjonen gitt ved standardavviket i skaleringsregionen er mindre enn 10%.
2. spredningen i dimensjonsestimatene over 3 etterfølgende imbeddingsdimensjoner er mindre enn 10% når rekonstrueringen er ved MOD.
3. dimensjonsestimatet tilfredsstillter Tsonis_N-kriteriet gitt i avsnitt 4.4.2).

For å undersøke om dimensjonsestimatet har konverget med hensyn på økende imbeddingsdimensjon, kunne vi benytte Takens teorem ($m > 2\nu + 1$) og kreve at dimensjonsestimatet tilfredsstillter

$$\nu < \frac{m - 1}{2}. \quad (4.16)$$

Når $m < D$ forventer vi at $C(l) \propto l^m$. Spredningen av dimensjonsestimatene beregnet for etterfølgende imbeddingsdimensjoner forventes da å være større enn 10%.

4.5 Oppsummering

I dette avsnittet anvendes de viktigste resultatene fra kapitlet til å gi en fremgangsmåte for dimensjonsestimering ved Grassberger-Procaccia-algoritmen fra et endimensjonalt signal. Denne fremgangsmåten omfatter rekonstruering av faserommet ved MOD eller SSA, beregning av dimensjonsestimatet når vi har beregnet korrelasjonsintegralet og hvordan vi undersøker påliteligheten av dimensjonsestimatene. Fremgangsmåten er resultatene. De tidligere avsnittene refereres ikke til sekvensielt, men i den rekkefølgen det er naturlig å utføre de forskjellige stegene i dimensjonsestimeringen.

Rekonstruering

I avsnitt 4.2 og 4.3 så vi på valg av parameterverdier for rekonstruering av faserommet ved MOD og SSA. Samme vinduslengde er optimal for rekonstruering ved de to teknikkene. Vi følger forslaget i [?] om å benytte gjennomsnittlig periode i signalet som estimat for optimal vinduslengde enten faserommet rekonstrueres ved SSA eller MOD.

Ved rekonstruering ved SSA konvergerer alltid korrelasjonsintegralet med økende imbeddingsdimensjon når vinduslengden er fast. Dimensjonsestimatene er derfor ikke avhengig av imbeddingsdimensjonen så lenge den er tilstrekkelig høy. Dette er en av fordelene ved rekonstruering ved SSA fremfor MOD:

- Vi trenger kun bestemme vinduslengden w for rekonstrueringen. Valg av imbeddingsdimensjon gjøres kun for å redusere beregningstiden.
- Elementene i de rekonstruerte tilstandsvektorer er lineært ukorrelerte. (Dette har vi fra beskrivelsen av SSA i avsnitt 2.5.2.) Vi slipper å finne en optimal τ .

Av disse to årsaker anbefales rekonstruering med SSA fremfor MOD. Imidlertid har rekonstruksjon med MOD enkelte fordeler fremfor rekonstruering med SSA i forbindelse med dimensjonsestimering når det gjelder beregningstid og lagringskapasitet. I enkelte tilfeller vil derfor faserommet rekonstrueres med MOD. Fremgangsmåten for rekonstruering av faserommet gis derfor både for MOD og SSA. Parametrene til korrelasjonsintegralet bestemmes som følger:

1. Bestem vinduslengden, w , for rekonstrueringen av faserommet lik gjennomsnittlig periode i signalet.
 - Hvis signalet er periodisk kan perioden estimeres fra effekttetthetsspekteret.
 - Hvis signalet er aperiodisk, beregnes gjennomsnittlig periode ved å beregne gjennomsnittlig tidsintervall mellom lokale maksima eller minima i signalet.
2. Hvis **SSA** benyttes til rekonstruering av faserommet, bestem grenser for imbeddingsdimensjonen som korrelasjonsintegralet skal beregnes over.
 - Den øvre grensen for imbeddingsdimensjonen velges lik antall singulærverdier som er over støynivået i signalet.
 - En nedre grense for imbeddingsdimensjonen velges lik antall singulærverdier som tilsvarer 95-96% av variansen i signalet.

Hvis faserommet rekonstrueres ved **MOD**,

- La nedre grense for imbeddingsdimensjonen være $m_{min} = 1$.
 - La øvre grense være $m_{max} = 20$.
 - Tidsforsinkelsen velges lik $\tau = \frac{2w}{m_{max} - m_{min}}$.
3. Autokorrelasjonslengden, K , velges lik korrelasjonstiden. (Parameteren K er parameter innført i korrelasjonsintegralet for å hindre at tidskorrelerte punkter blir talt opp.)
 4. Finn ut hvor tett punktene som utgjør korrelasjonsintegralet bør beregnes ved å stadig beregne punktene tettere. Punktene beregnes tett nok når den deriverte av korrelasjonsintegralet ikke endrer seg lenger eller når en økning av hvor tett de beregnes kun fører til større variasjoner i skaleringsintervallet.

Denne måten å velge parametre for rekonstruering ved MOD gir ikke nødvendigvis de optimale parametrene. En annen kombinasjon for m og τ kan tenkes å gi mindre variasjon i skaleringsregionen. Dimensjonsestimatene fra rekonstruering hvor parametrene er valgt ved fremgangsmåten ovenfor skulle imidlertid bli tilsvarende som fra optimale parametre siden vinduslengden er den kritiske parameteren for rekonstrueringen.

Hvis faserommet rekonstrueres ved SSA, beregn korrelasjonsintegralet over et intervall av verdier for w om gjennomsnittlig periode i signalet. Ved senere pålitelighetstesting av dimensjonsestimatene ønsker vi at dimensjonsestimatene er samsvarende over et intervall av vinduslengder.)

Dimensjonsestimering

For hvert korrelasjonsintegral følger vi fremgangsmåten for beregning av dimensjonsestimat gitt i avsnitt 4.1.5.

1. Bestem en fast lengde av skaleringsintervallet. Velg det så langt som mulig, benytt gjerne $l_1 = 4l_0$.
2. La skaleringsregionen være det intervallet i $\log l$ hvor den deriverte av korrelasjonsintegralet har minst variasjon.
3. La dimensjonsestimatet være gjennomsnittsverdien av den deriverte over skaleringsintervallet. Standardavviket over skaleringsregionen angir usikkerheten av dimensjonsestimatet.

Pålitelighet

Når vi har beregnet et dimensjonsestimat undersøker vi påliteligheten av det etter kriterier gitt i avsnitt 4.4.2.

1. Dimensjonsestimatet vurderes ut fra usikkerheten gitt ved standardavvik med hensyn på l og ut fra spredning av dimensjonsestimat beregnet over etterfølgende vinduslengder. (For MOD vil det si etterfølgende verdier for m når τ er fast.) Typiske grenser for å kaste dimensjonsestimatene er 10%.
2. Påliteligheten av dimensjonsestimatet vurderes i forhold til antallet punkter i tidsserien ved T_{sonis_N} -kriteriet.

Kapittel 5

Rekurrensplott

I mange tilfeller er det nyttig å vite om et gitt signal er stasjonært. I denne oppgaven er det nyttig fordi stasjonaritet er et av kriteriene tidsserien må oppfylle før dimensjonsestimering ved G-P-algoritmen. Siden vi i oppgaven ser på signaler som er deterministiske eller som antas å være deterministiske, er det gunstig å benytte en metode som undersøker om signalet er stasjonært i deterministisk betydning. Som nevnt i kapittel 2 er deterministisk stasjonaritet definert ved at et systems løsningsbaner gjentatte ganger returnerer til lokale områder i faserommet.

Inspeksjon av rekurrensplott er en metode for å undersøke om et signal er deterministisk stasjonært. Rekurrens (recurrence) betyr tilbakekomst, det vil si at noe returnerer til en tidligere tilstand. Rekurrensplott ble først foreslått i [?], og er blant annet benyttet for å påvise endringer i tidsserier fra elektrokardiogrammer (EKG) [?] og som en stasjonaritetstest for EEG målt under epileptisk anfall [?]. Senere har rekurrensplott også vært benyttet for å påvise determinisme i signalet [?]. Dette kapitlet tar for seg to typer rekurrensplott, rekurrensplott i sort-hvitt og i farger, og forteller hvordan disse to typer rekurrensplott kan tolkes.

5.1 Beregning av rekurrensplott

Et rekurrensplott lages ved at vi først rekonstruerer faserommet ved MOD. Vi får da en mengde av punkter i faserommet og indekserer disse etter rekkefølge med hensyn på tiden. Av disse velger vi enten hele mengden eller en delmengde som referansepunkter. For hvert referansepunkt beregnes avstanden til alle de andre punktene i faserommet. De n nærmeste nabopunktene til referansepunktet kalles “rekurrente”. Disse ønsker vi å markere i rekurrensplottet. Vi lar i være indeksen til nabopunktene og j være indeksen til referansepunktet. I rekurrensplottet er j koordinatene langs førsteaksen og i langs andreaksen. Punktet (i, j) markeres så med en prikk. Det endelige plottet har form av en matrise med boolske elementer. Matrisen har én søyle for hvert referansepunkt. I hver søyle er det n “sanne” elementer, det vil si en markering for hvert rekurrente nabopunkt.

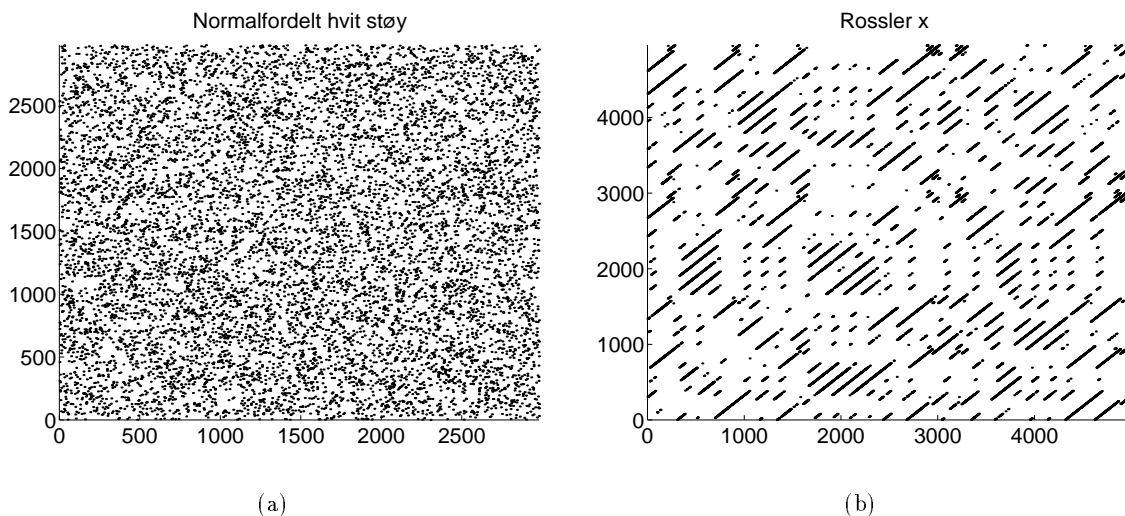
I beregningene for å lage plottene har jeg valgt å bruke supremumsnormen $\|\underline{x}\|_\infty = \max_k |x_k|$. Denne er enkel å beregne numerisk og benyttes også i G-P-algoritmen. Å benytte

supremumsnormen i beregningen av avstandene mellom punktene kan sammenlignes med å legge en m -dimensjonal kube om hvert referansepunkt. Kuben om referansepunktene økes i størrelse til den favner om n nabopunkter. For hvert av de n punktene lages en markering i plottet. Siden antallet punkter i hver kube er konstant, har kubene ikke nødvendigvis samme størrelse. Vi kan tenke oss at kubene om referansepunktene på kanten av attraktoren må være større enn en kube i det indre av attraktoren for at disse skal kunne inneholde like mange punkter. Tilsvarende har kubene forskjellig størrelse også i det indre av attraktoren hvis punktene er ujevnt fordelt. Siden kubene har forskjellige størrelser, kan det hende at kubene om punktet \underline{x}_i inneholder nabopunktet \underline{x}_j , men kubene om \underline{x}_j favner ikke nødvendigvis om \underline{x}_i . Punktet (i, j) er da markert, men ikke punktet (j, i) . Rekurrensplottet er derfor ikke symmetrisk om diagonalen, bare tilsynelatende. Symmetri har vi kun hvis alle kubene er av samme størrelse.

Når kubene varierer av størrelse, går informasjonen om avstand mellom punktene tapt. En annen variant av rekurrensplott er å la alle kuber ha samme størrelse, og la antallet punkter i kubene variere. Plottet blir da symmetrisk om diagonalen.

5.2 Tolkning av rekurrensplott i sort-hvitt

Et rekurrensplott forteller oss hvordan de n nærmeste nabopunktene til referansepunktet fordeler seg i faserommet. Hvis signalet er hvit støy, fylles hele faserommet og vi får et homogent rekurrensplott som i figur 5.1 a). For et stasjonært deterministisk signal kan vi se en viss struktur i plottet, figur 5.1 b).



Figur 5.1: a) For hvit støy får vi et homogent rekurrensplott. Faserommet er rekonstruert ved $m = 6$ og $\tau = 4$ fra en tidsserie av normalfordelt hvit støy av $N = 3000$ sampler. b) Rekurrensplott fra en tidsserie av lengde $N = 5000$ og samplingstetthet $f_s = 10\text{ Hz}$ fra x -variabelen fra Rössler-attraktoren. Rekonstruksjonen er utført med $m = 7$ og $\tau = 7$.

Plottet viser korrelasjon mellom referansepunkt og nabopunkt både i

- tid og
- rom.

Alle markerte punkter er romlig korrelerte. Siden tiden er argument på både første- og andreaksen, viser markeringene langs hoveddiagonalen at referanse- og nabo-punkt også er korrelert i tid. Av rekurrensplottet i figur 5.1 b) ser vi at signalet er *stasjonært* ved at de markerte punkter er både nære og langt unna referansepunktet i tid. Markeringer som er langt fra diagonalen viser at løsningsbanen har returnert til et lokalt område etter lang tid.

I figur 5.2 c) ser vi at selv om signalet er stasjonært, er det store hvite felter i plottet. En veksling mellom hvite felter og felter med rekurrente punkter indikerer *endringer* i signalet. Hvert punkt i den rekonstruerte mengden er en sekvens av målinger. De hvite feltene viser at det for en tidsperiode ikke finnes sekvenser av målinger som ligner referansepunktet. På den rekonstruerte attraktoren vil det si at løsningsbanen er på en annen del av attraktoren enn referansepunktene.

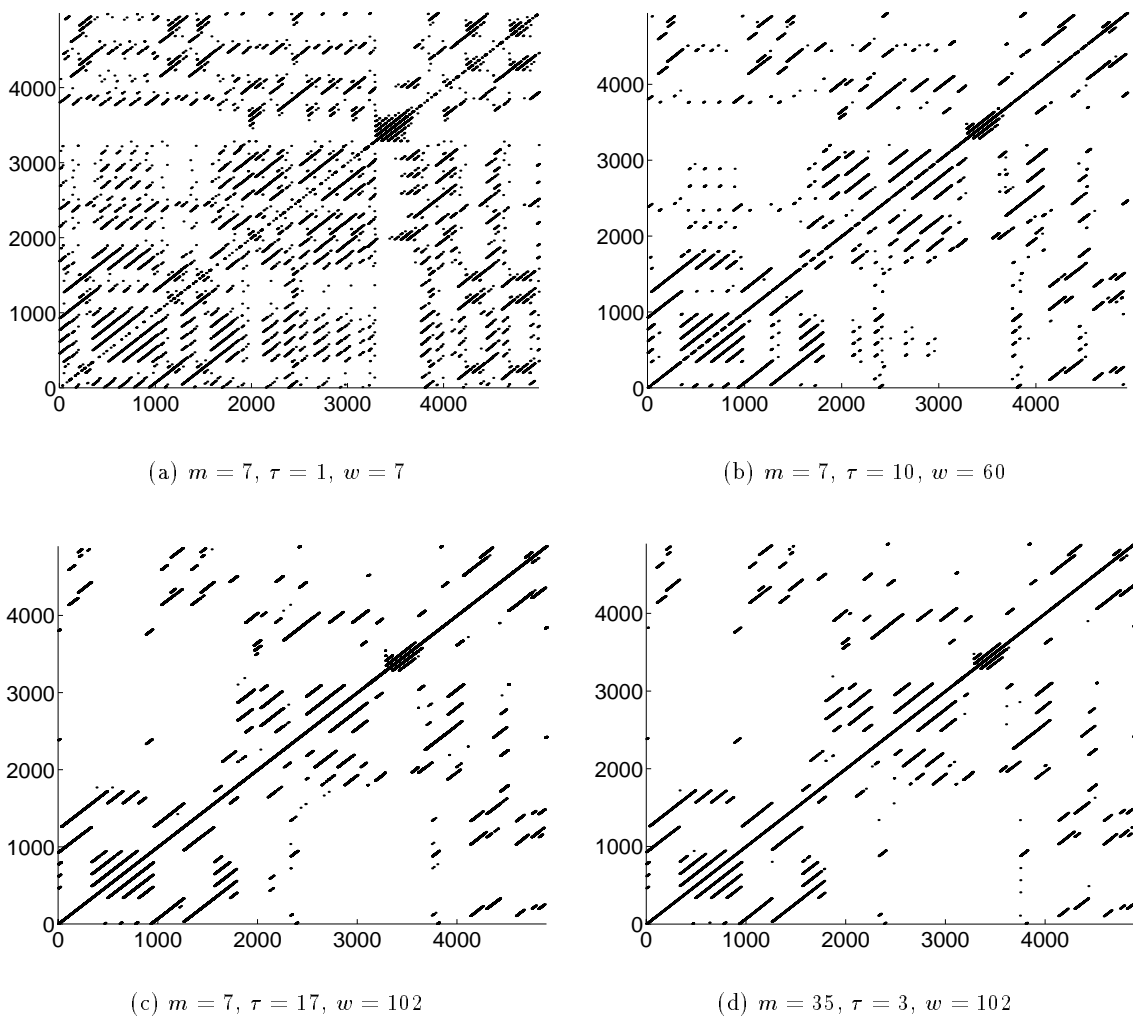
Et rekurrensplott gir også informasjon om *periodisiteten* i signalet. Plottet vil da inneholde rette linjer parallelle med diagonalen. Vi definerer et punktpar til å bestå av et referansepunkt og et nabopunkt. De rette linjene kommer da av at det er liten avstand mellom nabo- og referansepunkt i flere etterfølgende punktpar. Dette viser en deterministisk kopling mellom samplene i tidsserien og er brukt som et mål for determinisme i tidsserien [?]. Flere slike linjer parallelle med diagonalen viser periodisitet i signalet. Perioden til signalet er da lik avstanden mellom linjene langs en av aksene.

5.3 Tolkning av rekurrensplott i farger

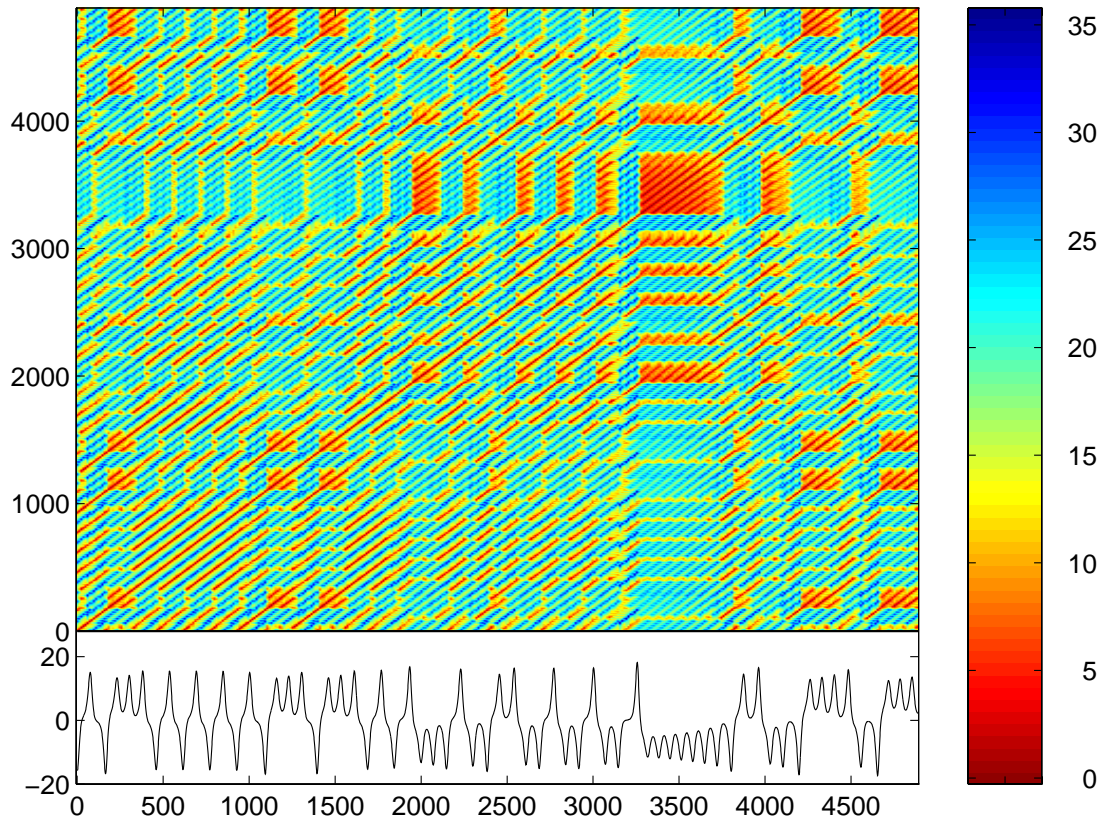
Som nevnt gikk all informasjon om avstanden mellom punktene tapt ved at vi tillot kubene å ha forskjellig størrelse. Denne informasjonen kan vi ta vare på ved å gi hvert punkt i mengden en farge etter avstanden til referansepunktet¹. Dette fører til at plottet er symmetrisk om diagonalen. Sammenhengen mellom farge og avstand gis som en søyle sammen med plottet, se figur 5.3. Rødt betyr her liten avstand, mens blått betyr stor avstand. Siden faserommet er rekonstruert ved MOD er hvert punkt i rommet en sekvens av målinger. At to punkter er nære hverandre vil da si at en sekvens av målinger har gjentatt seg. Rekurrensplottet er derfor en form for mønstergjenkjenning. For å forklare hvordan fargeplottene kan tolkes, ser vi på figur 5.3. Av søylen kan vi se at avstandene går fra 0 til ca. 40. Tidsserien og parametrene for rekonstrueringen, $m = 7$ og $\tau = 17$, er de samme som benyttet i rekurrensplottet i figur 5.2 c).

Vi ser at linjene parallelle med diagonalen i figur 5.2 c) er tilstede som røde linjer i fargeplottet, men at det i fargeplottet er mange flere linjer parallelle med diagonalen. Når de røde linjene parallelle med diagonalen er atskilt av en mørk blå, betyr dette at løsningsbanen går fra den ene ytterkant av den rekonstruerte attraktor til den andre. For at de mørkeste blå markeringene i fargeplottet skal oppstå, må avstand mellom referansepunkt og nabopunkt være tilnærmet diameteren av attraktoren. Det betyr at en av referansepunktets koordinater må inneholde en verdi fra topp- eller bunnpunktene i signalet. Disse referansepunktene vil da naturlig nok ligge på ytterkanten av den rekonstruerte attraktor.

¹G.Mayer-Kress, Würzburg 1994



Figur 5.2: Rekurrensplott av en tidsserie fra x -variabelen fra Lorenz-atraktoren. Lengden av tidsserien er $N = 5000$. Hvert punkt i den rekonstruerte mengden er en sekvens av målinger. Vinduslengden er tidsintervallet som disse målingene strekker seg over. Når vinduslengden er liten som i a), finnes det flere sekvenser av målinger som ligner på hverandre enn når vinduslengden er stor som i c) og d). De rekurrente punktene er derfor mer spredt i rekurrensplottet når vinduslengden er liten som i a). Vinduslengden kan økes ytterligere fra hva som er gitt i c) og d). Plottene har da liten visuell forskjell fra plottene i c) og d).



Figur 5.3: Rekurrensplott for samme tidsserie som i Figur 5.4. Attraktoren er rekonstruert ved $m = 7, \tau = 17$. Tidsserien er vist under rekurrensplottet.

I fargeplottet er det enkelte røde eller blå større felter. Siden det her er en tidsserie fra Lorenz-atraktoren, kommer feltene av at løsningsbanen er i den ene vingen over et lengre tidsintervall. De store blå feltene, omtrent horisontalt ut fra punkt 3500 på andreaksen, er brutt av røde loddrette striper. Disse viser når løsningsbanen returnerer til den andre vingen. De oppstår når det er kort avstand fra referansepunktet til flere etterfølgende nabopunkter.

Innad i både de store røde og blå feltene ser vi linjer parallelle med diagonalen. Avstanden mellom linjene langs en av aksene tilsvarer de minste periodene i signalet. På Lorenz-atraktoren tilsvarer denne perioden et omløp i den ene vingen av atraktoren.

Av dette rekurrensplottet kan vi altså se

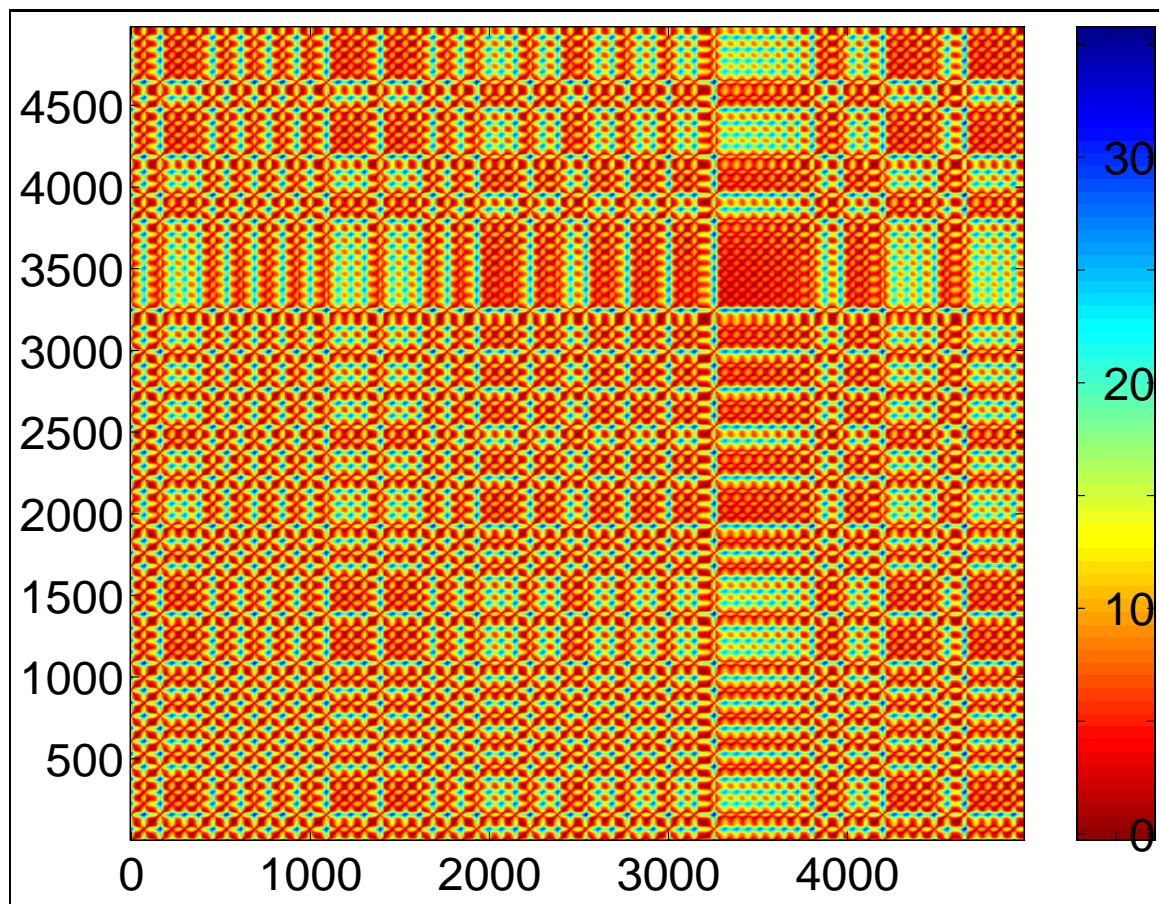
- stasjonaritet ved at løsningsbanene gjentatte ganger returnerer til lokale områder på den rekonstruerte atraktor. Rødt betyr liten avstand mellom referansepunkt og nabopunkt. Stasjonaritet er da gitt ved røde punkter i plottet både nære og langt unna hoveddiagonalen.
- perioden for de raskeste svingningene i signalet. Perioden er lik avstanden mellom rette linjer i plottet parallelle med hoveddiagonalen. (For Lorenz-atraktoren tilsvarer de minste periodene i signalet omløpstiden i en av vingene på atraktoren.)
- perioden for pseudosykluser. At signalet inneholder pseudosykluser vises i plottet som horisontale linjer. (For Lorenz-atraktoren er perioden for en pseudosyklus lik tiden det tar fra løsningsbanen forlater den ene vingen og til den returnerer til denne vingen).

5.4 Følsomhet for rekonstruering av faserommet

Som nevnt i kapittel 3 avhenger optimal rekonstruering av hvilke oppgaver som skal utføres på mengden. Derfor er ikke den optimale rekonstruering nødvendigvis den samme for rekurrensplott som for dimensjonsestimering.

Som et eksempel ser vi på rekurrensplottene i figur 5.2. Forskjellige valg av parametre er benyttet for rekonstrueringen. Når vinduslengden, $w = (m - 1)\tau$, er liten som i a) er det mange rekurrente punkter i plottet. Økes vinduslengden, forsvinner en del av disse punktene fra plottet. Jo lengre vinduslengden er, jo færre sekvenser av målinger finnes det som ligner på hverandre. Vi finner derfor hvite felter som i figur 5.2 d). I c) og d) er parametrene for rekonstrueringen, m og τ , forskjellige, men gir samme vinduslengde. Plottene kan ikke skilles visuelt. Dette tyder på at vinduslengden er avgjørende for hvilken informasjon vi får av rekurrensplottene om den geometriske struktur av signalet og den rekonstruerte atraktor. For at alle periodene i signalet skal være synlig i det sort-hvite rekurrensplottet er det gunstig å velge en liten vinduslengde, ihvertfall mindre enn den minste perioden i signalet.

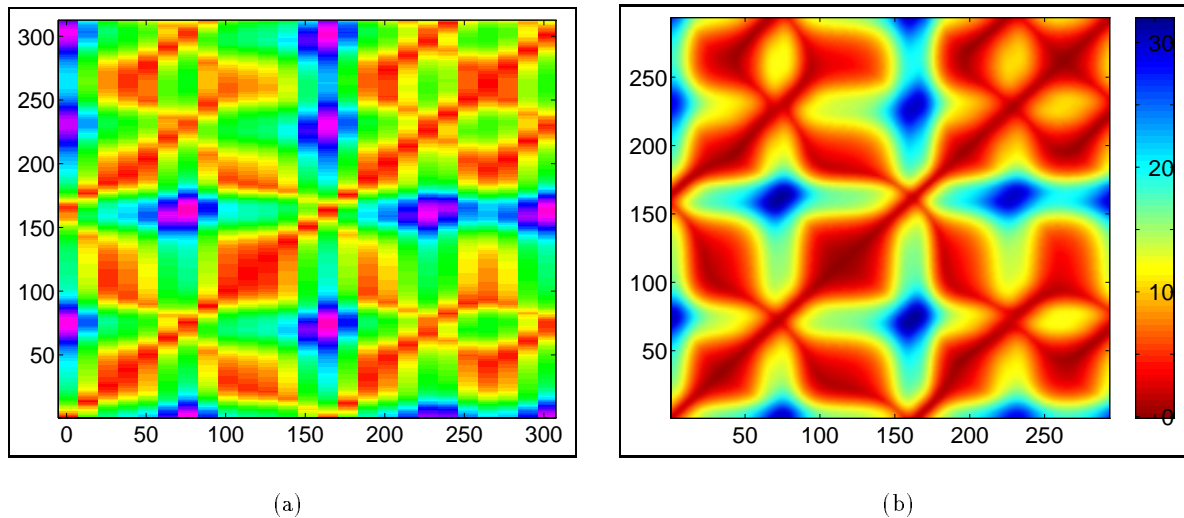
Som et eksempel på betydningen av valg av m og τ når rekurrensplottet er gitt i farger, ser vi på figur 5.4. Rekurrensplottet er fra samme tidsserie som rekurrensplottet i figur 5.3. Forskjellen er at parametrene for rekonstrueringen nå er $m = 7$ og $\tau = 1$, mens de var $m = 7$ og $\tau = 17$ i figur 5.3. De to plottene har store likhetstrekk. Diagonalene som var tilstede



Figur 5.4: Rekurrensplott for en tidsserie av lengde $N = 5000$ fra x -variabelen fra Lorenz-atraktoren. rekonstrueringen er utført med $m = 7$ og $\tau = 1$. $M = 400$ referansepunkter er benyttet.

ved $m = 7$ og $\tau = 17$ er også tilstede i dette plottet. I tillegg er det diagonaler på tvers av hoveddiagonalen. Ved å se på et utsnitt av fargeplottet, figur 5.5, ser vi at disse linjene tilnærmer punktene (i, i) , $(i+1, i-1)$, $(i+2, i-2)$... og punktene $(i-1, i+1)$, $(i-2, i+2)$,... Siden vinduslengden i dette plottet er svært liten, er punktene symmetrisk om det i 'te punktet nære naboer i faserommet.

Den mest iøynefallende forskjellen mellom rekurrensplottene ved $\tau = 17$ og $\tau = 1$ er at alle sekvensene av målinger ligner hverandre mer i det siste plottet (gitt ved rød farge). Periodene som rekurrensplottene viser, er de samme men er vanskeligere å skille ut når vinduslengden er svært liten. Ved $\tau = 17$ er vinduslengden ca. 1.5 ganger den minste perioden i signalet, men disse periodene er likevel synlige. Antagelig er en vinduslengde ikke mindre enn den minste perioden i signalet gunstig for fargeplottene.



Figur 5.5: a) Plottene viser utsnitt av Figur 5.4. b) Samme del av tidsserie hvor alle punkter i mengden er benyttet som referansepunkter.

5.5 Om algoritmen for beregning av rekurrensplott

Samme enkle fremgangsmåte er benyttet for beregning av både sort-hvitt og fargeplott; alle avstander fra ett referansepunkt til de andre punktene i mengden beregnes (Matlab-koden er gitt i vedlegg E.). Antall avstandsberegninger er da av $O(N'M)$ hvor N' er antall punkter i den rekonstruerte mengden og M er antall referansepunkter.

Beregningstiden reduseres ved å begrense antallet referansepunkter. Dette er gjort for samtlige rekurrensplott. Figur 5.5 a) viser et utsnitt av figur 5.4. Vi ser at virkningen av å begrense antall referansepunkter, er at plottet får diskontinuerlige fargeoverganger mellom referansepunktene. Fra hvert referansepunkt er alle avstander i mengden beregnet slik at fargeovergangene er kontinuerlige langs andreaksen. Figur 5.5 b) viser rekurrensplott av samme del av tidsserien hvor alle punkter er benyttet som referansepunkter.

Viktigheten av å redusere beregningstiden forstår vi når vi ser på hvor lang tid beregningene tar. For eksempel tar det $1\frac{1}{2}$ time å lage rekurrensplottet i sort-hvitt for en tidsserie av lengde $N = 5000$ når antall referansepunkter er $M = 1500$. For fargeplottene tar beregningene utført på en Dec-5000/240 en halvtime når lengden av tidsserien er $N = 5000$ og antall referansepunkter er $M = 400$. Matlab-programmet som er benyttet er i vedlegg E.

I beregningene av sort-hvitt-plottet foretas det her en sortering av $N - 1$ verdier for hvert referansepunkt. Beregningstiden kan sannsynligvis reduseres ved å organisere dataene i trær og benytte søk etter nærmeste naboer. I beregningene av fargeplottene foretas det ingen sorteringer. Beregningstiden kan imidlertid reduseres ved å utnytte at plottet er symmetrisk om diagonalen. Hvis alle punktene i mengden benyttes som referansepunkter, halveres da antall beregnede avstander.

Her ble det utført en initiell imbedding ved MOD før avstandene ble beregnet. Om en annen teknikk for rekonstrueringen benyttes, er det enkelt å lage rekurrensplott for en mengde fra en vilkårlig teknikk for imbedding.

5.6 Alternative stasjonaritetstester

Inspeksjon av rekurrensplott er én metode for å undersøke om et signal er stasjonært. Andre metoder for å teste for stasjonaritet kan også benyttes.

En vanlig fremgangsmåte er å dele signalet inn i mindre deler og undersøke om middelerdi, varians eller effekttetthetsspekter er tilnærmet det samme for deler av signalet som for hele. Man undersøker da om signalet er *empirisk stasjonært*. Fremgangsmåten baserer seg på definisjonen for svak stasjonaritet for stokastiske signaler, men benyttes likevel for signaler man antar er deterministiske². Å se på jevnhet i middelerdien av signalet benyttes for reelle data i kapittel 10.

En annen stasjonaritetstest går ut på å beregne korrelasjonsintegralet eller korrelasjonsdimensjonen for hele signalet samt for deler av det. Hvis korrelasjonsintegralet eller dimensjonsestimatene er tilsvarende for delene av tidsserien som for hele, antas signalet å være stasjonært. Denne stasjonaritetstesten har vært foreslått og benyttet i forbindelse med EEG-signaler, [?]. Jeg kan se visse likheter med denne stasjonaritetstesten og definisjonen for streng stasjonaritet definert for stokastiske signaler. Ved korrelasjonsintegralet beregnes kumulativ sannsynlighetsfordeling over avstandene i en mengde i faserommet, mens definisjonen for streng stasjonaritet for stokastiske signaler (definert i kapittel 2) bygger på kumulativ sannsynlighetsfordeling over verdiene i signalet.

Som nevnt har disse stasjonaritetstestene visse likheter med definisjon for stasjonaritet definert for stokastiske signaler. Hvis signalet antas å være deterministisk, kan inspeksjon av rekurrensplott antas å være en mer gunstig stasjonaritetstest siden denne baserer seg på definisjonen for deterministisk stasjonaritet.

5.7 Anvendelse i oppgaven

Rekurrensplott i sort-hvitt anvendes i oppgaven for å finne stasjonære deler av et lengre ustasjonært signal. Signalet antas å være stasjonært når rekurrensplottet har samme struktur over en tidsperiode og det i tillegg er rekurrente punkter både nære og langt unna hoveddiagonalen. Hvite felter i plottet viser at det er endringer i signalet.

Fargeplottene kan vise periodisitet i signalet, både de minste periodene og periodene for pseudosykluser. Fargeplottene benyttes for å se at signalet er periodisk.

²J.Skinner, Würzburg september 1994

Kapittel 6

Punktvis dimensjon (PD2)

I kapittel 2.4 ga vi definisjonen av “punktvis skaleringsdimensjon” slik den er definert i [?]. Denne metoden ble utviklet for dimensjonsestimering av signaler som ikke nødvendigvis er stasjonære. Ved dimensjonsestimering av biologiske og fysiologiske data, f.eks. EEG, er dette spesielt nyttig siden disse dataene ikke er stasjonære over et lengre tidsintervall.

Ved beregning av “punktvis skaleringsdimensjon”, D_p , benyttes alle punktene i faserommet som referansepunkter. Et lokalt dimensjonsestimat beregnes for hvert av punktene. Forutsatt at de lokale dimensjonsestimatene er invariant for tiden, er verdien for D_p gjennomsnittet av *alle* de lokale dimensjonsestimatene. I dette kapitlet skal vi se på en variant av denne “punktvis skaleringsdimensjon” slik den er foreslått i [?]. I Skinners variant, PD2, vurderes påliteligheten av hvert enkelt lokalt dimensjonsestimat med hensyn på skalering og metning. Enkelte lokale dimensjonsestimater forkastes, og verdien av PD2 er lik gjennomsnittet av de godkjente dimensjonsestimatene.

Avsnitt 6.1 tar for seg hvilke kriterier som benyttes i oppgaven for å beholde eller kaste lokale dimensjonsestimater. I avsnitt 6.2 gis en fremgangsmåte for parameterbestemmelse og bruk av PD2. I avsnitt 6.3 er PD2 anvendt på stasjonære tidsserier fra kunstige data for å sammenligne resultater fra G-P og PD2. (De kunstige dataene er beskrevet i avsnitt 2.3.) I avsnitt 6.4 ser vi på dimensjonsestimering av tidsserier sammensatt av kort (stasjonære) tidsserier fra forskjellige dynamiske systemer. Dette er gjort for å teste algoritmen på ustasjonære tidsserier. Avsnitt 6.5 viser hvor referansepunktene for de forkastede lokale dimensjonsestimatene er lokalisert på attraktoren.

6.1 Kriterier for å beholde eller forkaste lokale dimensjonsestimater

Det finnes flere forskjellige måter å beregne punktvis dimensjon, PD2, på. Dette avsnittet tar for seg én fremgangsmåte hvor rekonstrueringen av faserommet utføres ved MOD. For å spare beregningstid har jeg valgt å benytte en delmengde av den totale mengden av punkter i det rekonstruerte faserommet som referansepunkter. For hvert av referansepunktene beregnes lokale korrelasjonsintegraler, $C_i(l)$, over et intervall av imbeddingsdimensjoner. Disse korrelasjonsintegralene testes med hensyn på skalering og metning.

Med **skalering** menes at de lokale korrelasjonsintegralene må tilfredsstill skaleringsloven $C_i(l) \propto l^{d_p^i}$ over en skaleringsregion av gitt lengde. Eksponenten d_p^i er det lokale dimensjonsestimatet for referansepunktet \underline{x}_i , mens l er avstanden fra referansepunktet til de andre punktene i rommet. Lengden av skaleringsregionen er den samme for alle de lokale dimensjonsestimatene.

Med **metning** menes at korrelasjonsintegral beregnet over etterfølgende imbeddingsdimensjoner har samsvarende stigningstall. Ved en uendelig mengde støyfrie data forventer vi at stigningstallene konvergerer med økende imbeddingsdimensjon. Ved en endelig mengde data fører høy imbeddingsdimensjon til at det blir færre punkter i det rekonstruerte rommet. Det kan føre til at skaleringsregionen forsvinner for de høyeste imbeddingsdimensjoner, mens den er tilstede ved lave imbeddingsdimensjoner. Dimensjonsestimatet beregnes derfor ved etterfølgende imbeddingsdimensjoner som minimerer avviket mellom stigningstallet for korrelasjonsintegralene. Antallet imbeddingsdimensjoner er her valgt lik tre.

Skaleringsregionen lokaliseres ved å finne det intervall for $\log l$ som minimerer standardavviket til den deriverte av korrelasjonsintegralene. Standardavviket minimeres både med hensyn på $\log l$ og imbeddingsdimensjon. Dette fører til at stigningstallet til korrelasjonsintegral fra etterfølgende imbeddingsdimensjoner er beregnet over samme skaleringsregion. En øvre grense for hvor skaleringsregionen kan velges er satt lik den verdien for l hvor $C(l)$ favner 10% av avstandene i mengden. Dette tilsvarer hvor $\log C(l) = -1$. Årsaken til denne grensen er gitt i avsnitt 6.4.

Stigningstallene beregnes over den lokaliserte skaleringsregionen ved minste kvadraters metode. Det lokale dimensjonsestimatet forkastes hvis standardavviket av stigningstallene beregnet fra etterfølgende imbeddingsdimensjoner, er større enn 10%. Lineær skalering er gitt hvis standardavviket av avstanden mellom punktene og projeksjonen av dem på den rette linja gitt ved minste kvadraters metode er mindre enn 10%. De lokale korrelasjonsintegralene $C_i(l)$ er beregnet over maksimalt $N - 1$ avstander, mens korrelasjonsintegralet fra G-P, $C(l)$, er beregnet over maksimalt $\frac{N(N-1)}{2}$ avstander. Vi får derfor større variasjoner i grafen for $C_i(l)$ enn for $C(l)$ og lar derfor kriteriene for lineær skalering være mindre strenge for PD2 enn for G-P.

6.2 Fremgangsmåte for beregning av PD2

Nedenfor følger en fremgangsmåte for bruk av PD2. PD2 er en variant av G-P. Valg av parametre for beregning av korrelasjonsintegralene blir derfor tilsvarende som ved dimensjonsestimering ved G-P når rekonstrueringen foregår ved MOD. Følgende fremgangsmåte er fulgt for kunstige og reelle data:

1. Beregn gjennomsnittlig periode i signalet som estimat for optimal vinduslengde, w . Ut fra forholdet $w = (m - 1)\tau$ gis verdi for tidsforsinkelsen τ og imbeddingsdimensjonen m . For m gis et intervall av verdier hvor antall verdier er større enn 3.
2. Beregn korrelasjonstiden fra autokorrelasjonsfunksjonen. Denne benyttes om parameter i beregningen av korrelasjonsintegralet. Hensikten er korrigerer for temporær korrelasjon i tidsserien, se avsnitt 4.4.5.

3. Bestem en avstand, L , mellom punktene på grafen av korrelasjonsintegralet. (For alle utførte forsøk viste $L = 2^{\frac{1}{5}}$ seg å være et passende valg.)
4. Beregn de lokale korrelasjonsintegralene.
5. Bestem en lengde, Δl , for skaleringsregionen, f.eks. $\Delta l = \frac{l_1}{l_0} = 4$ hvor l_1 er øvre grense for skaleringsregionen og l_0 er nedre grense for skaleringsregionen.
6. Beregn de lokale dimensjonsestimatene.

Hvis de lokale dimensjonsestimatene er invariant for tiden, er PD2 lik gjennomsnittet av disse.

6.3 PD2 av stasjonære tidsserier

Algoritmen for PD2 er blitt testet for stasjonære tidsserier fra Hénon-, Lorenz- og Rössler-systemet for å kunne sammenligne resultatene fra G-P-algoritmen. Resultater fra tidsserier av lengde $N = 1500$ fra x -variabelen fra de nevnte systemer er gitt i tabell 6.1. Samplingsintervallet for tidsseriene fra de kontinuerlige systemene tilsvarer tidspunktet for første minimum for den gjensidige informasjonen, det vil si $t_s = 0.17$ for Lorenz- og $t_s = 1.5$ Vi velger derfor samme parametre for rekonstruksjon av faserommet, $\tau = 1$ og $m = 2, \dots, 10$ for alle tidsseriene. Antall referansepunkter er begrenset til 100. Vi ser at PD2 gir store avvik i de lokale dimensjonsestimatene, men at avviket mellom PD2 fra den fraktale dimensjonen er mindre enn 7%.

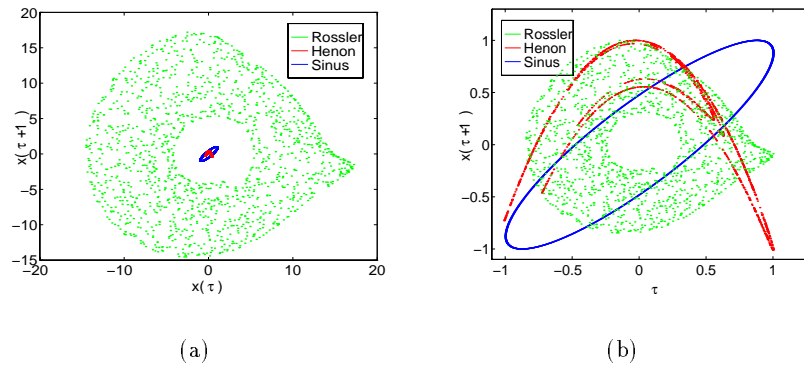
	PD2	ν	D	std	M_G	std(ν)
Hénon	1.23	1.18	1.25	34%	24	2%
Lorenz	2.05	2.11	2.06	25%	74	2%
Rössler	1.87	1.95	2.01	17%	91	2%

Tabell 6.1: Dimensjonsestimater fra PD2 er sammenlignet med dimensjonsestimater fra G-P, ν , og den fraktale dimensjonen, D . std er standardavviket til de lokale dimensjonsestimatene, M_G antall godkjente punkter av totalt 100 referansepunkter, std(ν) er standardavviket av stigningstallet $\nu(l)$ over et skaleringsregion av lengde $\frac{l_1}{l_0} = 4$. Dimensjonsestimatene ν er beregnet ved imbeddingsdimensjon tilsvarende $m \geq 2\nu + 1$.

6.4 PD2 av ustasjonære tidsserier

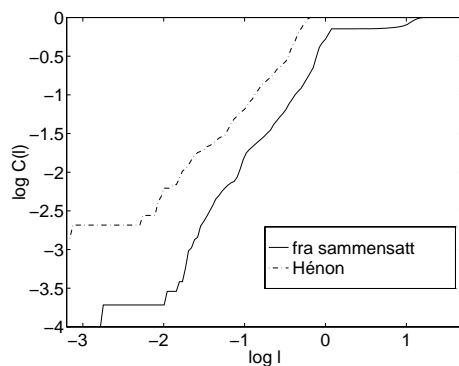
For å teste metoden på ustasjonære tidsserier setter vi sammen flere tidsserier fra forskjellige attraktorer etter hverandre. Vi lar de ustasjonære tidsseriene bestå av de kaotiske tidsseriene anvendt for tabell 6.1 og $N = 1500$ punkter fra en sinuskurve som start, avslutning og som skille mellom de forskjellige kaotiske tidsseriene. For denne sammensetningen ser vi på to tilfeller. I det første tilfellet har tidsseriene fra de forskjellige attraktorene forskjellig amplitude. (Tidsserien er vist i figur 6.3 a.) Punktene havner da langt unna hverandre

i faserommet, se figur 6.1 a). I det andre tilfellet er subtidsseriene skalert til intervallet $[-1, 1]$ slik at den ustasjonære tidsserien har jevn amplitude. Punktene havner da nærmere hverandre i faserommet, se figur 6.1 b).



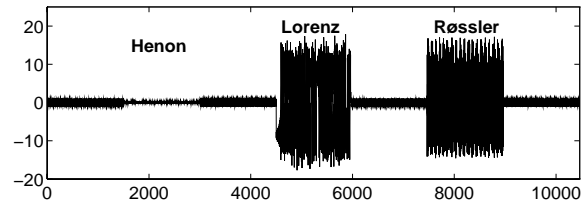
Figur 6.1: a) Ved rekonstruksjon av faserommet ser vi at punktene fra de forskjellige attraktorene havner på forskjellige steder i faserommet når amplituden i signalene er den samme for alle signalene. b) Når signalene er skalert til samme amplitude derimot, kan punkter fra forskjellige attraktorer havne nære hverandre i faserommet. Plottene er forøvrig omtalt i teksten.

I det første tilfellet vil det lokale korrelasjonsintegralet for et referansepunkt på én attraktor kun påvirkes av punktene på de andre attraktorene ved store verdier for $\log l$, se figur 6.4. Dette er årsaken til at det er satt en øvre grense for hvor skaleringsregionen kan lokaliseres.

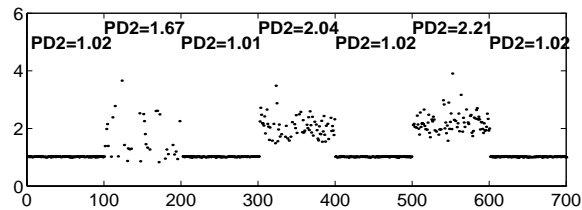


Figur 6.2: a) Plottet viser to korrelasjonsintegral. Det heltrukne er beregnet fra det sammensatte signalet vist i figur 6.3 a) hvor referansepunktet er på Hénon-attraktoren. Det andre korrelasjonsintegralet er beregnet kun på den delen av tidsserien som er fra Hénon-attraktoren. Diameteren av Hénon-attraktoren er her omtrent 1.5 som tilsvarer 0.17 på $\log l$ -aksen. Det betyr at de store avstandene i korrelasjonsintegralet for det sammensatte signalet skyldes avstanden fra referansepunktet til punkter på de andre attraktorene.

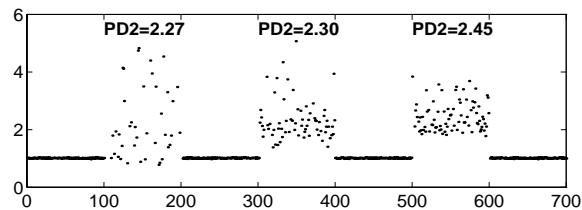
Dimensjonsestimering fra de sammensatte tidsseriene viser at PD2 kan skille mellom subtidsseriene når de har forskjellig amplitude, se figur 6.3 b). Når den ustasjonære tidsserien har jevn amplitude derimot, skiller PD2 mellom de kaotiske tidsseriene og tidsserien fra sinus-funksjonen, men ikke mellom de forskjellige kaotiske tidsseriene, se figur 6.3 c).



(a)



(b)

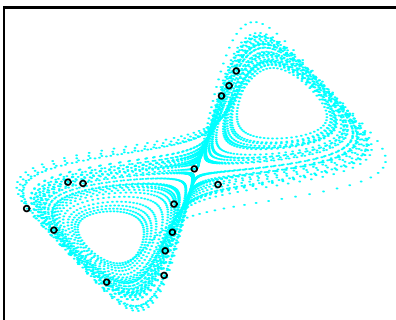


(c)

Figur 6.3: a) Den sammensatte tidsserien omtalt i teksten. b) De lokale dimensjonsestimatene med gjennomsnitt for hver av enkeltseriene. c) Lokale dimensjonsestimater for samme tidsserie som i a) og b) hvor alle tidsseriene er skalert ned til intervallet $[-1, 1]$. Vi ser at dimensjonsestimatene for Hénon-attraktoren påvirkes av omskaleringen.

6.5 Lokalisering av de kastede referansepunktene på attraktoren

At enkelte lokale dimensjonsestimater forkastes antas i [?] å skyldes lokaliseringen av referansepunktene på attraktoren. Det antas at korrelasjonsintegralet for de forkastede referansepunkter ikke følger skaleringen $C_i(l) \propto l^d$. En naturlig antagelse er at disse punktene ligger i ytterkant på attraktoren. Lokalisering av forkastede referansepunkter ble undersøkt for tidsserier fra Hénon og Lorenz-attraktoren. For versjonen av PD2 anvendt i oppgaven viste det seg at de var spredt over hele attraktoren, se figur 6.4.



Figur 6.4: a) Tidsserien er $N = 5000$ punkter fra x -variabelen fra Lorenz-attraktoren med samplingsintervallet er $t_s = 0.01$. Figuren viser en projeksjon til første og andre koordinat fra rekonstruksjonen $\tau = 17$ og $m = 10$ ved MOD. Av 100 referansepunkter jevnt fordelt i datasettet er de 14 avmerkede kastede av PD2.

6.6 Oppsummering

Dette kapitlet har presentert en versjon av PD2 for dimensjonsestimering fra ustasjonære signaler. Metoden har blitt testet for både stasjonære og ustasjonære tidsserier fra kunstige data. For stasjonære tidsserier ga PD2 dimensjonsestimater med tilsvarende avvik fra den fraktale dimensjonen som dimensjonsestimering ved G-P-algoritmen.

For ustasjonære tidsserier er metoden testet for to tilfeller. I det første tilfellet består den ustasjonære tidserien av flere stasjonære subtidsserier med forskjellig amplitude. I det andre tilfellet har alle de stasjonære subtidsseriene samme amplitude. Metoden ga best resultater for det første tilfellet. I kapittel 12 vil metoden anvendes på reelle data som antas å tilfredsstillende det første tilfellet.

Mulige forbedringer: I beregningen av PD2 beregnes alle de lokale korrelasjonsintegralene før de lokale dimensjonsestimatene beregnes. Dette er noe plasskrevende. En forbedring vil være å beregne et lokalt korrelasjonsintegral og dets stigningstall før man går videre til neste referansepunkt. Man trenger da ikke å lagre alle de lokale korrelasjonsintegralene, kun dimensjonsestimatene.

Som nevnt er PD2 en variant av G-P-algoritmen. For G-P-algoritmen fungerte rekonstruering ved SSA som en filtrering mot hvit støy. Hvis dataene antas å inneholde hvit støy, kan PD2-algoritmen endres slik at den benytter SSA istedenfor MOD til rekonstruering av faserommet.

Kapittel 7

Dimensjonsestimering fra filtrerte og støyfylte signaler

Ved reelle målinger er det alltid støy i dataene. Støyen kan for eksempel skyldes usikkerhet i måleinstrumentene eller ytre påvirkninger som for eksempel bidrag fra nettspenningen. For kunstige data er støyen ubetydelig siden denne er i størrelsesorden av maskinnøyaktigheten. Vi ønsker å vite hvor følsom G-P-algoritmen er for målestøy. I avsnitt 7.1 genererer vi derfor støy kunstig og legger til dataene før dimensjonsestimering.

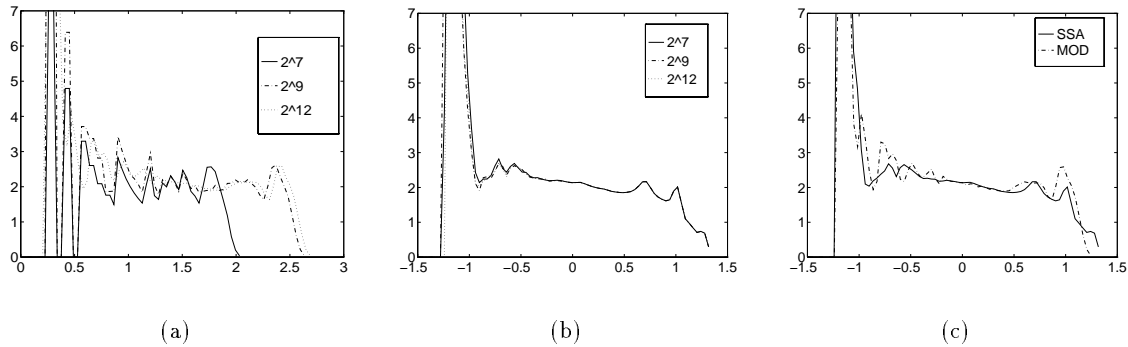
Hvis støyen i reelle data ikke er ubetydelig, kan det være ønskelig med filtrering før behandling av dataene. I forbindelse med dimensjonsestimering er det viktig å vite om filtrering med forskjellige filtre kan endre dimensjonsestimatene. I denne oppgaven anvendes kun lineære filtre. I avsnitt 7.2 ser vi på hvordan filtrering ved IIR- og FIR-filtre påvirker dimensjonsestimering fra støyfrie kunstige data.

Vi skal i dette kapitlet se at rekonstruksjon ved SSA innebærer en filtrering av data inneholdende hvit støy. I avsnitt 7.3 anvendes SSA, IIR- og FIR-filtre på kunstige data med hvit støy for å sammenligne filtrene i forbindelse med dimensjonsestimering.

7.1 Kvantifiseringsfeil og hvit støy

7.1.1 Kvantifiseringsfeil

De reelle måledataene vi skal se på i Del III stammer fra en A/D-omformer med kvantifiseringsfeil. Kvantifiseringsfeil er en uniformfordelt støy som er direkte proporsjonal med antall bits i signalet [?]. For å finne ut hvor følsom algoritmen er for denne typen støy, kan vi begrense antall forskjellige verdier i tidsserier fra kunstige data. Vi ser her på tre tidsserier fra x -variabelen fra Lorenz-systemet hvor antall forskjellige verdier i tidsserien er begrenset til 7, 9 og 12 bits. Verdiene i de nye tidsseriene er heltallene fra 1 til antall forskjellige verdier i tidsserien. Antall forskjellige verdier i signalet tilsvarer henholdsvis 128, 512 og 4096. Disse verdiene er valgt ut fra kvantifiseringsfeilen i EEG-dataene vi skal se på i Del III.



Figur 7.1: Den deriverte av korrelasjonsintegralet for x -variabelen fra Lorenz-systemet, $N = 5000$, $t_s = 0.01$ for varierende antall bits i signalet. a) Av rekonstrueringen ved MOD for 7, 9 og 12 bits ser vi at jo færre bits i signalet, jo kortere skaleringsregion og større variasjoner er det i det. b) Ved rekonstruering ved SSA fra 7, 9 og 12 bits er det ingen forskjeller mellom korrelasjonsintegralene. c) Mellom grafene funnet ved MOD fra signalet gitt i 12 bits og signalene i MOD, er det liten forskjell.

Når faserommet rekonstrueres ved **MOD**, er den største avstanden, l_{maks} , i den rekonstruerte mengden aldri større enn den største verdien i signalet. Vi får derfor kortere skaleringsregion når signalet inneholder få forskjellige verdier. Dette kan vi se i figur 7.1 a). Figuren viser også at vi har større variasjoner i skaleringsregionen når kvantiseringsfeilen er stor. Dette ser vi også ved dimensjonsestimering, se tabellen under.

“bits”	7	9	12
ν	2.02	2.02	2.02
$\text{std}(\nu)$	14%	5%	4%

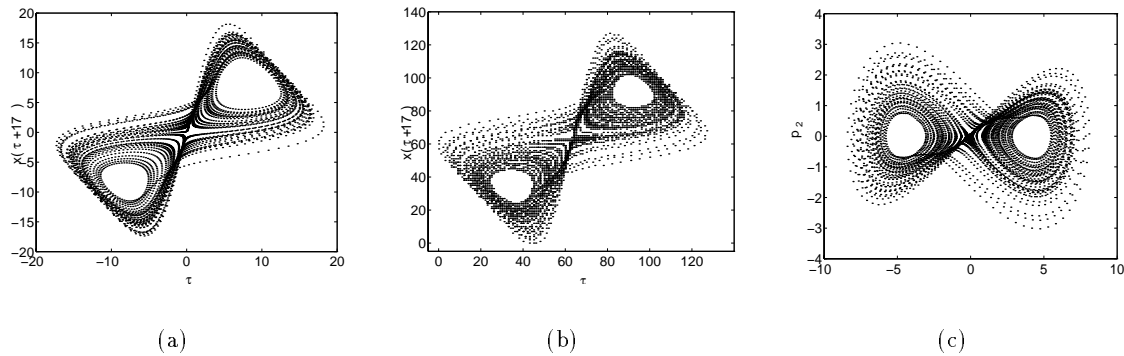
Tabell 7.1: Faserommet er rekonstruert ved MOD med parameterverdiene $m = 8$ og $\tau = 7$ som gir vinduslengden $w=119$.

Vi kan rekonstruere faserommet ved **SSA** istedenfor ved MOD. Ved SSA lagres hver koordinat til punktene i den rekonstruerte mengden i 16 siffer. Korrelasjonsintegralene er nå identiske for de tre tidsseriene uavhengig av hvor mange forskjellige verdier tidsseriene inneholdt opprinnelig, se figur 7.1 b). SSA har her virket som en filtrering og glattet ut signalet. Se også figur 7.2.

Dimensjonsestimatet fra rekonstruering med SSA med parameterverdiene $m = 8$ og $w = 119$ gir $\nu = 2.18$ med 3% i standardavvik. Forskjellen i dimensjonsestimat fra rekonstruering med MOD skyldes imidlertid at dimensjonsestimatene fra SSA og MOD ikke er beregnet over samme skaleringsregion. Dimensjonsestimatet fra rekonstruering med SSA beregnet over samme region av $\log l$ som for MOD, får vi $\nu = 2.00$ med 6% i standardavvik. Sammenligner vi den deriverte av korrelasjonsintegralet for tidsserien gitt i 12 bits, ser vi liten forskjell, se figur 7.1 c).

Oppsummering: Rekonstruering ved MOD og SSA gir tilsvarende resultater for dimensjonsestimering når kvantiseringsfeilen i tidsserien er liten. Når kvantiseringsfeilen er betydelig, virker SSA som en form for glatting. Rekonstruering ved SSA er derfor å foretrekke

fremfor rekonstruering ved MOD når formålet med rekonstrueringen er dimensjonsestimering.



Figur 7.2: Faseportrettene viser en to-dimensjonal imbedding fra x -variabelen fra Lorenz-atraktoren, $w = 16$. a) MOD fra signalet i 16 siffer b) MOD fra signalet i 7 bits, 128 mulige verdier i signalet. c) Signalet i b) filtrert ved SSA ($w = 17$). Første og andre prinsipalkomponent (p_1, p_2 hhv.) plottet mot hverandre. Signalet synes å være glattet.

7.1.2 Normalfordelt hvit støy

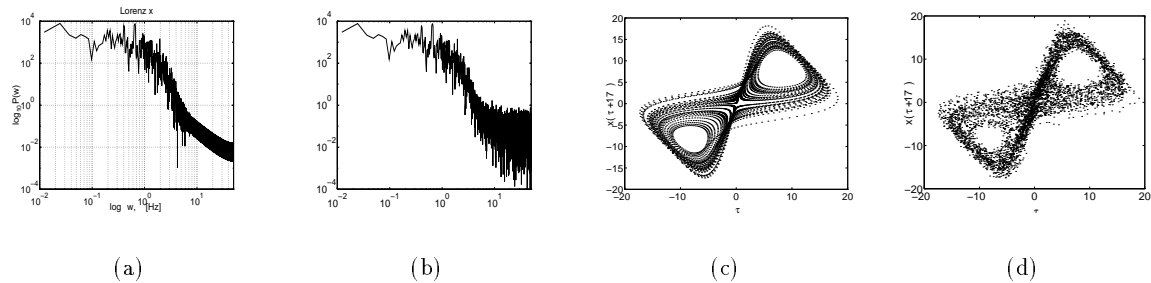
I avsnittet ovenfor så vi på hva antall bits som signalet lagres i har å si for dimensjonsestimering. Hvor mange bits signalet er lagret i (“presisjon”), er imidlertid ikke det samme som nøyaktigheten av signalet (“accuracy”). Nøyaktigheten av målingene er ofte mindre enn antall sifre som målingene presenteres i. For å undersøke hvor robust algoritmen er for denne typen støy, kan vi generere støy kunstig som tilsvarende denne målestøyen og legge på dataene.

Målefeil modelleres ofte som normalfordelt hvit støy og kan genereres kunstig ved en random-generator. Vi lar støyen ha middelvei null og standardavvik i %-andel av standardavviket til den opprinnelige støyfrie tidsserien.

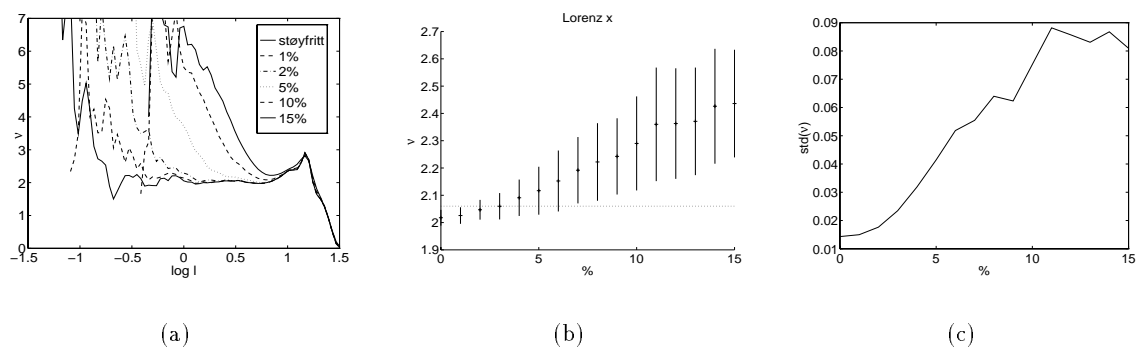
Når vi har lagt støyen til signalet, kan vi som i figur 7.3 b) se i effektetthetsspekteret at støyen dominerer over signalet ved høye frekvenser. Der støyen dominerer, er spekteret flatt. Hvordan støy skjuler signalet kan vi også se ved å lage faseportretter av støyfylt og støyfritt signal som i figur 7.3 c) og d).

Når vi rekonstruerer faserommet ved MOD for å estimere dimensjonen fra disse signalene, skjules skaleringsregionen gradvis med økende amplitude i støyen, se figur 7.4 a). Når skaleringsregionen forsvinner, øker dimensjonsestimatene og usikkerheten av dem, se figur 7.4 b) og c). Allerede ved 6% støy er variasjonene i skaleringsregionen mer enn 5%. Uniformfordelt hvit støy gir tilsvarende resultater som når støyen er normalfordelt.

Oppsummering at dimensjonsestimering ved G-P kombinert med rekonstruering ved MOD er svært følsomt for hvit støy. Rekonstruering med SSA utsettes til avsnitt 7.3 hvor vi også filtrerer støyfylte signaler med IIR- og FIR-filtre.



Figur 7.3: Periodogrammet for tidsserie fra x -variabelen fra Lorenz-systemet hvor a) signalet er uten støy og b) lagt på 5% støy. Vi ser at for høye frekvenser dominerer støyen over signalet. c) Faseportretter for $\tau = 17$ av x -variabelen fra Lorenz-atraktoren hvor signalet er støyfritt, mens det i d) er lagt på 5% støy.



Figur 7.4: a) Den deriverte av korrelasjonsintegralet for tidsserie av lengde $N = 5000$ fra x -variabelen fra Lorenz-systemet. Andelen støy er som oppgitt i plottet. b) Dimensjonsestimater for tidsserien med støy fra 0 til 15%. Parametrene for rekonstrueringen er $m = 7$ og $\tau = 17$. c) Standardavviket til dimensjonsestimatene oppgitt i prosent.

7.2 Lineære filtre

For å fjerne støy fra signalet, benyttes filtre av forskjellige slag. Valg av filter avhenger av hva slags støy vi ønsker å fjerne fra signalet og av hvilke egenskaper vi ønsker at filtreringen skal bevare ved det opprinnelige signalet. For eksempel velger vi et lavpassfilter når støyen er høyfrekvent. Når formålet med filtreringen er å forbedre dimensjonsestimeringen, ønsker vi at dimensjonen skal være invariant for filtreringen. Dette avsnittet tar for seg hvordan filtrering ved lineære filtre som FIR- og IIR-filtre påvirker dimensjonsestimeringen av støyfrie data. Til slutt ser vi på SSA som et filter.

IIR- og FIR-filtre som gir et en-dimensjonalt utgangssignal kan generelt skrives på formen

$$z(k) = b_0x(k) + b_1x(k-1) + \dots + b_nx(k-n) - a_1z(k-1) - \dots - a_nz(k-n). \quad (7.1)$$

hvor filteret er bestemt ved koeffisientene a_i og b_i , $x(i)$ er det ufiltrerte signalet og $z(i)$ det filtrerte. (For lettforståelig filterteori se [?].)

7.2.1 IIR-filtre

Når $b_0 = 1, b_i = 0, i = 1, \dots, n$, kalles filteret et IIR-filter (Infinite Impulse Response), av statistikere et AR-filter (AutoRegressive). Alle tidligere verdier av inngangssignalet til og med initialverdiene benyttes til å bestemme hver ny verdi av det filtrerte signalet. Av IIR-filtre har Chebychev-filtret vært benyttet.

Chebychevfilteret

Av høyereordens IIR-filtre er de mest vanlige Bessel-, Butterworth, Chebychev- og elliptisk filter. Av disse er Chebychev-filteret et av de mest effektive, det vil si at det er få frekvenskomponenter høyere enn knekkfrekvensen som slippes igjennom filteret (bratt “roll-off”). For frekvenser fra 0Hz til knekkfrekvensen av filteret (passbåndet) har filteret variasjoner (ripler) i amplituderresponsen. Amplituderresponsen viser hvordan de forskjellige frekvenser blir dempet i filtreringen. Riplene er like store i hele passbåndet og filteret kalles derfor ofte for “equi-ripple-filter”.

Chebychev-filteret gir også ulineær fase. Imidlertid er det mulig for ethvert filter å gi null faseforskyvning ved å “reversere” filtreringen. Signalet filtreres først på vanlig måte hvor fasen ved filtrering ved Chebychev-filteret blir ulineær. Deretter reverseres signalet og kjøres gjennom filteret en gang til¹. Dette doubler ordenen av filteret og gir null faseforskyvning. Chebychev-filtre av varierende orden benyttes både for filtrering på vanlig måte og ved “reversibel filtrering” i avsnitt 7.3.

7.2.2 FIR-filtre

Ved å velge koeffisientene $a_i = 0, i = 1, \dots, n$ i likning (7.2), får vi et FIR-filter, av statistikere kalt MA-filter (moving average). (Hvis $a_i, b_i \neq 0, i > 1$, kalles filteret et ARMA-filter.)

¹Filtrering og “reversibel” filtrering hvor ordenen av filteret dobles og faseforskyvningen blir null for det filtrerte signalet gjøres ved kommandoen `filtfilt` i Matlab.

Hver utgangsverdi av filteret er et vektert gjennomsnitt av de n tidligere inngangsverdiene;

$$z(k) = [x(k) \ x(k-1) \ \cdots \ x(k-n)] \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

I motsetning til filtrering ved et IIR-filter, innføres ingen nye tilstandsvariable ved filtreringen. Siden filtreringen kun er en lineær transformasjon av signalet, forblir dimensjonen uendret. Se ellers [?].

7.2.3 Filtrering ved SSA

I avsnitt 2.5.2 ble SSA presentert som en metode for rekonstruering av faserommet. Imidlertid er SSA også en filtrering av den rekonstruerte mengden, [?]. Fremgangsmåten for SSA er som nevnt en initiell imbedding ved MOD med $\tau = 1$. Deretter utføres avbildningen $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \leq p$ av den initielle mengden $A \in \mathbb{R}^{N \times p}$ ved

$$A \rightarrow A' = AU \tag{7.2}$$

Hver rad i A er en tilstandsvektor eller en sekvens av p målinger $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p-1}\}$ og hvert element på i 'te rad av A' er følgelig et vektert gjennomsnitt av denne sekvensen. Når vi husker at FIR-filtre også kalles et “flytende gjennomsnitt-filter”, ser vi at kolonnene i U inneholder koeffisientene til en samling FIR-filtre. Hver kolonne i A' er da en filtrering, z_i , av det opprinnelige signalet $\{x_i\}_{i=1}^N$;

$$\begin{array}{c} z_1 \ z_2 \quad \dots \quad z_m \\ \left| \right| \left| \right| \quad \dots \quad \left| \right| \\ \left| \right| \left| \right| \quad \dots \quad \left| \right| \end{array} = \begin{array}{c} A \\ \left| \right| \left| \right| \left| \right| \left| \right| \\ \left| \right| \left| \right| \left| \right| \left| \right| \end{array} \begin{array}{c} U \\ \left| \right| \left| \right| \left| \right| \left| \right| \\ \left| \right| \left| \right| \left| \right| \left| \right| \end{array}$$

SSA er følgelig en filtrering av et en-dimensjonalt inngangssignal ved en samling FIR-filtre (eller en filterbank) og gir et m -dimensjonalt utgangssignal. Som nevnt i avsnitt 4.3 er dimensjonen invariant for rekonstruering eller filtrering ved SSA.

7.2.4 Oppsummering

Dette avsnittet tok for seg filtrering av støyfrie data ved lineære filtre. Filtrering ved IIR-filtre kan føre til at dimensjonen øker, mens dimensjonen er invariant for filtrering ved FIR-filtre og SSA.

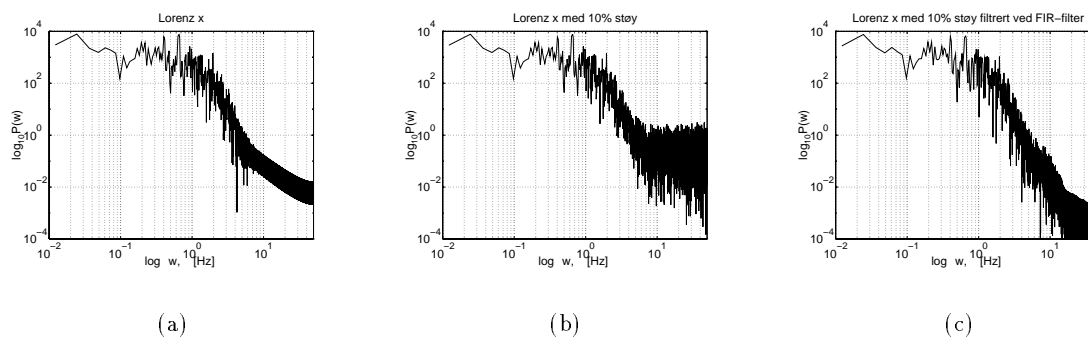
7.3 Filtrering av signaler med hvit støy

I dette avsnittet ønske vi å se om på effekten av filtrering ved FIR- og IIR-filtre samt filtrering ved SSA av hvit støy. Målet er å se hvilket filter vi bør velge i Del II hvis vi forventer hvit støy i de reelle dataene.

I enkelte tilfeller kan effektthetsspekteret avsløre om et signal inneholder hvit støy, som i figur 7.5 b). For å fjerne noe av støyen, kan vi lavpassfiltrere signalet ved filtrene definert i forrige avsnitt. Jeg har her anvendt

- 15.ordens FIR-filtre
- 3.ordens Chebychevfilter
- samt “reversibel” filtrering ved de to filtrene nettopp nevnt²
- SSA

For filtrene med et en-dimensjonalt utgangssignal, er knekkfrekvensen valgt ut fra periodogrammet. For frekvenser høyere enn 5-6 Hz er spekteret for det støyfylte signalet tilnærmet flatt, og jeg har derfor valgt knekkfrekvensen $\eta = 5.5$. Av periodogrammet i figur 7.5 ser vi at støyen er fjernet ved høye frekvenser. Vi kan også se forbedringen av filtreringen ved å se på faseportrettene av støyfylt og filtrert signal, se figur 7.6. Imidlertid kan vi i figur 7.6 d) at kombinasjon av filt³ og Chebychev-filtre har endret signalet.

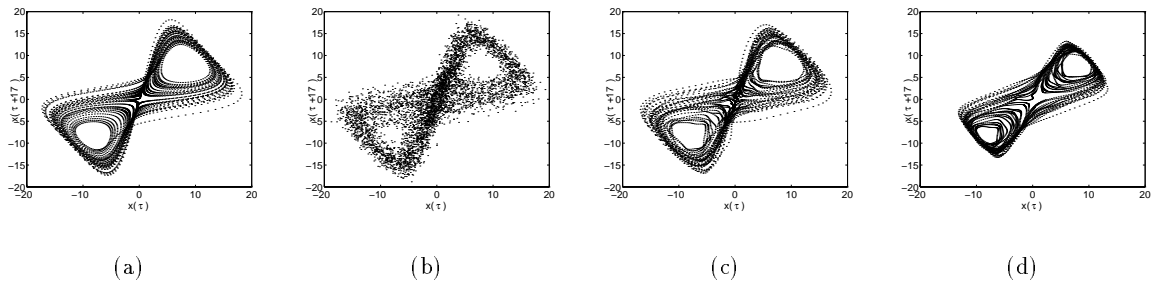


Figur 7.5: Periodogrammet for en tiddserie fra x -variabelen fra Lorenz-systemet hvor $N = 5000$ og $t_s = 0.01$. I a) er signalet støyfritt, i b) med 10% støy, i c) er det støyfylte signalet filtrert ved et 15.ordens FIR-filtre med knekkfrekvens $\eta = 5.5$.

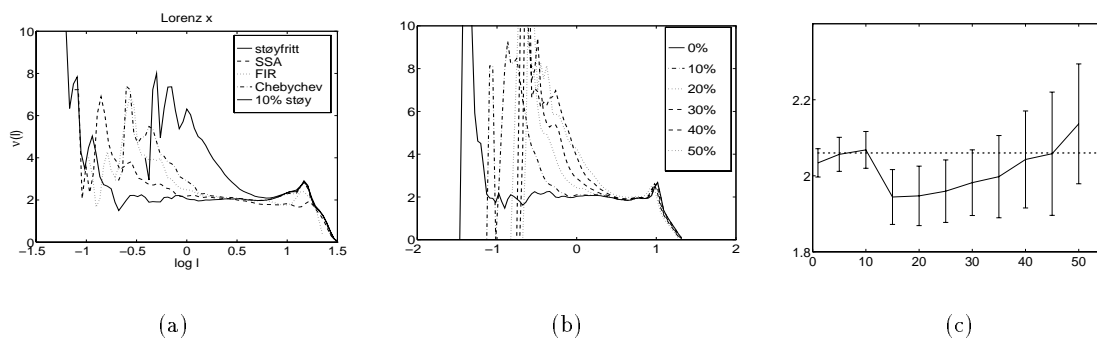
Ved å sammenligne den deriverte av korrelasjonsintegralet for de forskjellige filtrene, figur 7.7 a), ser vi at filtrene som ble prøvet påvirker korrelasjonsintegralet ved store l . Skaleringregionen er lenger etter filtrering enn før filtrering. Bortsett fra endringen av amplitude ble det liten forskjell mellom signalene fra FIR og Chebychev-filtret for det støyfylte signalet. At det er liten forskjell mellom signalene fra filtrering med FIR- og Chebychev-filtret kan

³Funksjonen `filtfilt` i Matlab filtrerer signalet to ganger, siste gangen reversibelt, slik at det filtrerte signalet får 0 i faseforskyvning

⁴Plottene i a) og b) er fra forskjellige realiseringer av x -variabelen fra Lorenz-systemet.



Figur 7.6: Faseportretter av tidsserien fra x -variabelen fra Lorenz-systemet hvor $N = 5000$ og $t_s = 0.01$. Signalet er i a) støyfritt, i b) med 10% støy, i c) støyfylt filtrert ved 15.ordens FIR-filter, i d) støyfylt filtrert ved 3.ordens Chebychev-filter og filtfilt^3 .



Figur 7.7: a) Den deriverte av korrelasjonsintegralet fra tidsserie fra x -variabelen fra Lorenz-systemet. Tidsserien er lagt på 10% støy og filtrert med filtrene som i plottet. b) Den deriverte av korrelasjonsintegralet fra tidsserie med økende støy. Signalet er filtrert ved SSA. c) Dimensjonsestimater fra tidsseriene i forrige plott⁵. Variasjonene i skaleringsregionen for 50% støy er kun 5%.

forklares ved at filtreringen av støyfritt signal kun påvirker signalet ved mindre l . Denne regionen er fortsatt skjult av støyen i det filtrerte støyfylte signalet. Den andre forklaringen er at knekkfrekvensen er valgt liten i forhold til den minste Lyapunov-eksponenten i systemet. Ved innføring av ny Lyapunoveksponent ved filtrering, har denne lite å si for dimensjonen.

Ser vi på dimensjonsestimatene i tabellen under, gir filtrering ved SSA 10% underestimering, langt større feilestimering enn filtrering ved FIR- og Chebychev-filteret gir.

	Støyfritt (MOD)	10 % støy	FIR	Chebychev	SSA
ν	2.02	2.28	2.07	2.01	1.81
$\text{std}(\nu)$	1%	7%	3%	4%	4%

Tabell 7.2: Dimensjonsestimater fra tidsserie fra Lorenz-atraktoren med 10% støy. Lengden av tidsserien og samplingsintervallet er henholdsvis $N = 5000$ og $t_s = 0.01$. Etter filtrering ved FIR- og Chebychev-filter er faserommet rekonstruert ved MOD med $m = 7$ og $\tau = 17$. Ved SSA er $m = 7$ og $w = 102$.

Imidlertid ser vi i figur 7.7 b) at det er liten forskjell i korrelasjonsintegralet for støyfylt og støyfritt signal i region for l hvor støyen er fjernet. Filtrering ved SSA avdekker altså skaleringsregionen, men kan gi noe feilestimering.

SSA er i seg selv en metode for rekonstruksjon og er derfor testet med hensyn på følsomheten for hvit støy. Hvor stort signal-støy-forhold som algoritmen takler er ikke undersøkt for FIR- eller IIR-filtre. Ved SSA ser vi derimot at korrelasjonsdimensjonen kan estimeres når det er opptil 50% støy i signalet, figur 7.7 b).

Oppsummering

Avsnittet har tatt for seg filtrering av signaler med hvit støy, ved IIR- og FIR-filtre samt ved SSA.

Lavpassfiltrering ved både IIR- og FIR-filtrering førte til forbedrede dimensjonsestimater. Imidlertid så vi at filtrering ved Chebychev-filteret kombinert med ‘reversert’ filtrering endret signalet. Filtrering ved FIR-filtre er derfor å foretrekke fremfor filtrering ved IIR-filtre. Det viktigste argumentet er dog at dimensjonen er invariant for FIR-filtrering men ikke for IIR-filtrering.

Filtrering ved SSA er i seg selv en rekonstruksjon av faserommet. Ved SSA må kun én parameter bestemmes; vinduslengden w for rekonstruksjonen. (Eventuelt kan imbeddingsdimensjonen reduseres for å spare beregningstid.) Ved filtre som gir en-dimensjonale utgangssignaler må blant annet knekkfrekvens og orden av filter bestemmes. Deretter må parametrene for rekonstruksjon ved MOD velges. SSA er derfor en langt enklere metode for å filtrere signalet for hvit støy enn filtre som gir en-dimensjonale utgangssignaler.

Filtrering og rekonstruksjon ved SSA avslørte et lengre skaleringsintervall enn hva som er synlig ved rekonstruksjon ved MOD. Ved støyfrie data ga rekonstruksjon ved SSA og MOD langt på vei de samme dimensjonsestimater. Hvis signalet mistenkes å inneholde hvit støy, er rekonstruksjon ved SSA å foretrekke fremfor rekonstruksjon ved MOD.

Filtrering ved SSA ga i dette tilfellet underestimering. Det kan derfor synes som om FIR-filtrering med et en-dimensjonalt utgangssignal er å foretrekke fremfor filtrering ved SSA ved hvit støy i signalet.

Filtrering anbefales imidlertid i [?] kun hvis støyen skyldes kvantiseringsfeil.

7.4 Oppsummering

I dette kapitlet har vi sett på følsomheten i G-P-algoritmen for hvit i kunstige data. Algoritmen er svært følsom for støy siden dimensjonsestimatene forkastes allerede ved 6% støy.

Ved lavpassfiltrering kan imidlertid en del av støyen fjernes. De støyfylte kunstige dataene ble filtrert ved FIR- og IIR-filtre (Chebychev) samt ved SSA. Når dataene er støyfylte, avdekker alle filtrene noe av skaleringsintervallet ved store l .

Når dataene inneholder *uniformfordelt* eller *normalfordelt hvit støy* laget ved en random generator, fører både filtrering ved FIR- og IIR-filte til at vi noe av støyen fjernes ved store l og vi får et lengre skaleringsintervall enn før filtrering. Imidlertid kan det synes som om filtrering ved SSA er FIR- og IIR-filtre langt overlegen når støyen er hvit.

Ved filtrering ved FIR- og IIR-filtre defineres et stoppbånd hvor frekvenskomponenter av signalet ikke slipper igjennom. Filtrering ved SSA gir ingen slike stoppbånd og filtrering ved SSA er derfor ikke egnet for lavpass-, høypass- eller båndpassfiltrering hvor man ønsker å fjerne alle frekvenskomponenter i et frekvensområde. Når formålet er å forbedre dimensjonsestimatene anbefales i slike tilfeller å anvende et FIR-filter siden dimensjonen er invariant for denne typen filtrering. (I Del 2 skal vi se at periodiske komponenter i signalet ikke lar seg fjerne ved filtrering ved SSA.)

Inneholder signalet hvit støy derimot, forventes en lengre skaleringsregion ved rekonstruering ved SSA enn MOD. Slik er det kanskje mulig å undersøke om signalet inneholder hvit støy.

Kapittel 8

Dimensjonsestimering fra surrogat-data

Senere i oppgaven ønsker vi å undersøke ved dimensjonsestimering om elektromagnetiske hjernesignaler er deterministiske eller stokastiske. Lave dimensjonsestimater anses som et tegn på at et signal stammer fra et lavdimensjonalt deterministisk system. Imidlertid kan farget støy også ha lav dimensjon. Vi ønsker derfor å benytte et verktøy som avgjør om et lavdimensjonalt system er stokastisk eller deterministisk. Å lage surrogatdata er de siste årene blitt et populært hjelpemiddel for å avgjøre om et verktøy kan skille mellom deterministiske prosesser og støy av forskjellige former, [?] og [?].

Arbeidet kan deles inn i tre deler, utforming av nullhypotese, dimensjonsestimering og hypotesetesting. Utforming av nullhypotesen går ut på å finne ut hva slags system dataene kan være fra og hvordan signaler fra denne typen system kan genereres kunstig. Forslag til nullhypoteser kan være

- hvit støy
- lineær korrelert støy
- ulineær transformasjon av lineær korrelert støy
- støyfylt periodisk system

For å kunne utføre hypotesetestingen, genereres mange nye tidsserier som oppfyller nullhypotesen. Tidsseriene må også ha samme trivielle statistiske egenskaper som de opprinnelige dataene, det vil si samme middelerdi, varians og gjerne effektthetsspekter eller autokorrelasjon. De nye dataene kalles surrogatdata. Hvis de opprinnelige dataene er heltall, kan det kreves at de nye dataene også er det [?]. Dette benyttes i kapittel 14 hvor vi lager surrogatdata fra EKG-signaler. EKG- (og EEG-)dataene er heltall i intervallet 0 til 4096.

Etter at surrogatdataene er generert, utføres samme oppgaver på surrogat- og opprinnelige data. Her vil det si dimensjonsestimering ved G-P-algoritmen. I andre tilfeller hvor man leter etter kaos, kunne verktøyet vært f.eks. prediksjon eller estimering av Lyapunoveksponenter, se f.eks.[?]. Resultatene for surrogatdata og opprinnelige data sammenlignes. Hvis

det er signifikant forskjell, er det ikke sannsynlig at dataene kommer fra samme type prosess som nullhypotesen foreslår. Nullhypotesen forkastes. Det er likevel ikke gitt at dataene er fra et deterministisk ulineært system. Nullhypotesen dekket kun én type støyfylt signal. Det er mulig at andre nullhypoteser ikke kan forkastes.

I det andre tilfellet hvor nullhypotesen ikke kan forkastes, er det imidlertid ikke gitt at surrogat- og opprinnelige data er fra samme type dynamiske system, men det er mulig at de er det. Det er også mulig at andre verktøy hadde kunnet skille mellom surrogat- og opprinnelige data. Som et eksempel benyttes i dette kapitlet en tidsserie av lengde $N = 5000$ fra x -variabelen fra Lorenz-systemet.

8.1 Surrogatdata fra nullhypotese om lineært korrelert støy

Av de mange nullhypoteser man kan lage seg, ser vi her kun på nullhypotesen om at dataene er lineært korrelert støy. Det undersøkes om det er mulig at dimensjonsestimering ved G-P kan skille mellom de analyserte signaler og lineært korrelert støy med identisk effektthetsspekter. Lineær korrelasjon mellom dataene er gitt ved effektthetsspekteret siden dette er den fouriertransformerte av autokorrelasjonen.

Lineær stokastiske prosesser kan beskrives ved en lineær autoregressiv (AR) modell

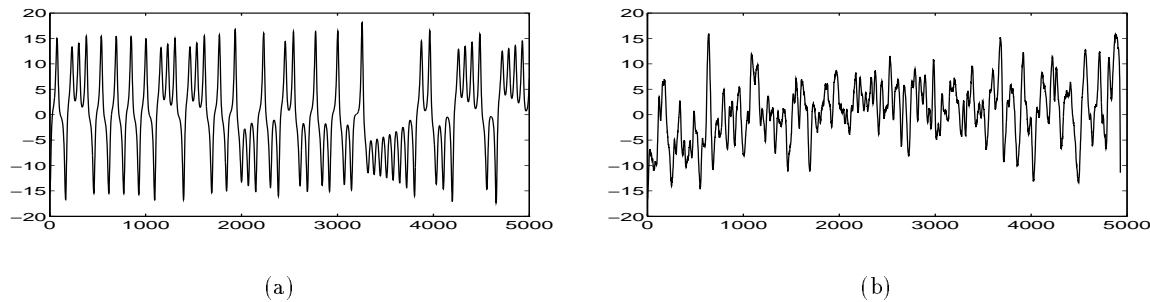
$$x_t = \sum_{k=1}^q a_k x_{t-k} + \sigma e_t \quad (8.1)$$

hvor e_t er ukorrelert gaussisk støy med varians lik en og null i middelvei. Koeffisientene a_i og σ velges slik at de nye tidsseriene fra prosessen har tilsvarende varians og autokorrelasjon som den opprinnelige tidsserien. I stedet for å lage en AR-modell, kan vi generere surrogatdata med identisk effektthetsspekter som de opprinnelige, ved å endre fasen til det opprinnelige signalet. Fasen er den imaginære delen av den fouriertransformerte til signalet, mens effektthetsspekteret er gitt ved realdelen. Surrogatdataene lages ved

1. å utføre en Fast Fourier Transformasjon (FFT) av de opprinnelige dataene.
2. å randomisere eller permutere imaginærdelen av den fouriertransformerte. Vi lar fasen beholde symmetriegenskapene.
3. å utføre en Inverse Fast Fourier Transform (IFFT) på den "nye" fouriertransformen. Den invers-fourierte tidsserien er surrogatdataene.

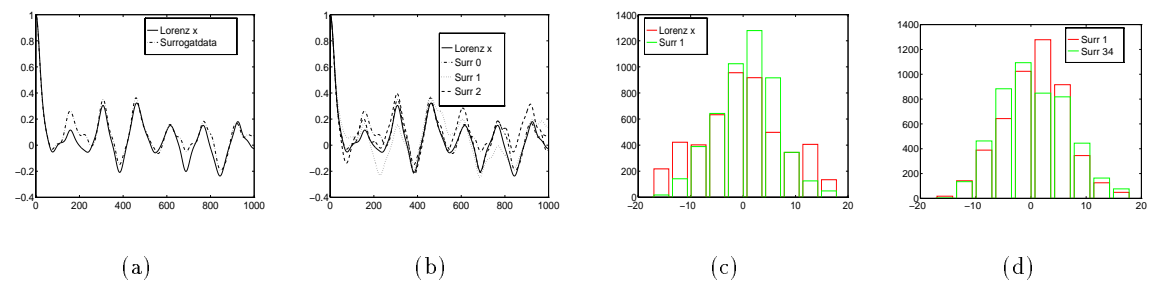
Ved å la fasen beholde symmetriegenskapene etter randomisering eller permutering, får vi etter IFFT en reell tidsserie (eller i det minste vil den imaginære delen være minimert etter at de numeriske beregningene ved FFT og IFFT er utført). Ved randomisering av fasen legger vi til en random variabel som antar verdier fra intervallet fra 0 til 2π til den opprinnelige fasen, mens ved permutering av fasen beholdes de verdiene fasen har, men vi setter de i en ny tilfeldig rekkefølge.

I denne oppgaven benyttes siste fremgangsmåte for å lage surrogatdata. Når vi lager surrogatdata fra x -variabelen fra Lorenz-systemet, kan surrogatdataene lett skilles fra de



Figur 8.1: a) Opprinnelige data er en tidsserie fra x -variabelen fra Lorenz-attraktoren. b) Surrogatdata med tilnærmet samme effekttetthetsspekter som tidsserien i a).

opprinnelige dataene, se figur 8.1. Imidlertid har surrogat- og opprinnelige data identisk effekttetthetsspekter og dermed identisk autokovarians. På grunn av alle numeriske regneoperasjoner oppstår det forskjeller i estimert autokorrelasjon, se figur 8.2 a). Disse forskjellene er likevel ikke større enn forskjellene mellom autokorrelasjonen for forskjellige realiseringer av surrogatdata, se figur 8.2 b).



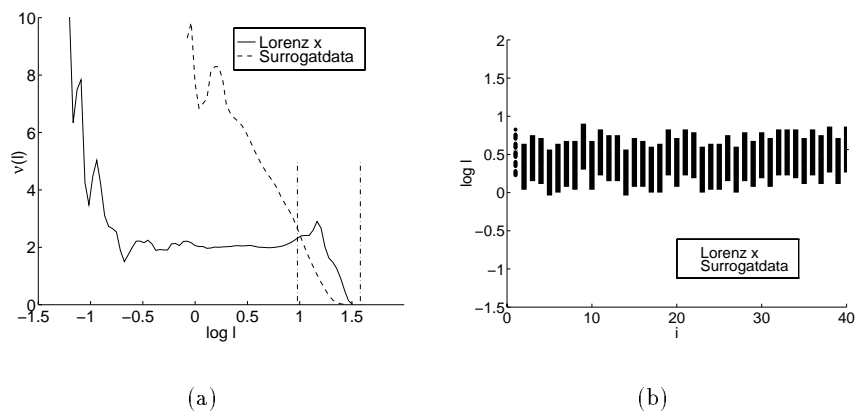
Figur 8.2: a) Autokorrelasjonsfunksjon for tidsserie fra x -variabelen fra Lorenz-systemet og en realisering av surrogatdata. b) Autokorrelasjonsfunksjon for samme tidsserier som i a) og i tillegg for flere realiseringer av surrogatdata. c) Histogrammet for den opprinnelige tidsserien samt 1. realisering av surrogatdataene. d) Histogrammet for to realiseringer av surrogatdata hvorav den ene er den samme som i c). Selv om det er forskjeller i histogrammene for opprinnelige data og surrogatdata, er forskjellene i histogrammene for forskjellige realiseringer av surrogatdata av samme størrelsesorden.

Når vi lager surrogatdataene oppstår det svært lave verdier i begynnelsen og slutten av hver tidsserie av surrogatdata. For at ikke surrogatdataene skal inneholde verdier som er altfor langt unna verdiene i det opprinnelige signalet, trunkeres surrogatdatene i begynnelsen og slutten av tidsserien. Sammenligner vi histogrammene for hvilke verdier signal og surrogatdata inneholder finner vi igjen forskjeller, se figur 8.2 c). Forskjellene er likevel ikke større enn forskjellene mellom forskjellige realiseringer av surrogatdata, se figur 8.2 d).

8.2 Dimensjonsestimering fra surrogatdataene

I dette avsnittet grunngis de forskjellige valg som er gjort for blant annet parameterverdier. For å spare beregningstid og lagringskapasitet rekonstrueres faserommet ved MOD. Dessuten beregnes korrelasjonsintegralet for kun én kombinasjon av parameterverdier for imbeddingsdimensjon og tidsforsinkelse for hver realisering av surrogatdata. For at resultatene fra surrogat- og opprinnelige data skal være sammenlignbare, benyttes parameterverdiene som var optimale for de opprinnelige dataene.

Dimensjonsestimatet beregnes over det intervallet for l hvor det er minst variasjoner i stigningstallet til korrelasjonsintegralet. Ved enkelte tilfeller er dette intervallet ved store verdier for l , mens vi ønsker at dimensjonsestimatet skal beregnes ved mindre l , se figur 8.3 a). Vi setter derfor en øvre grense for hvor skaleringsregionen kan lokaliseres. Denne velges til den verdien for l hvor korrelasjonsintegralet favner 10% av alle punktene i mengden, det vil si den verdien for l som gir $C(l) = -1$. Figur 8.3 b) viser at alle dimensjonsestimatene beregnes ved tilnærmet samme skaleringsregion når surrogatdataene lages fra x -variabelen fra Lorenz-systemet.



Figur 8.3: a) Den deriverte av korrelasjonsintegralet fra x -variabelen fra Lorenz-systemet og fra en realisering av surrogatdata. Markeringene viser valg av skaleringsregion når det ikke settes en øvre grense for lokaliseringen mhp. l . b) Andreaksen angir skaleringsregionen som dimensjonsestimatene er beregnet over, mens førsteaksen er indeksen til realiseringene av surrogatdata. Skaleringsregionen for de opprinnelige dataene er angitt først. Skaleringsregionen er tilnærmet den samme for alle realiseringene.

8.3 Hypotesetesting

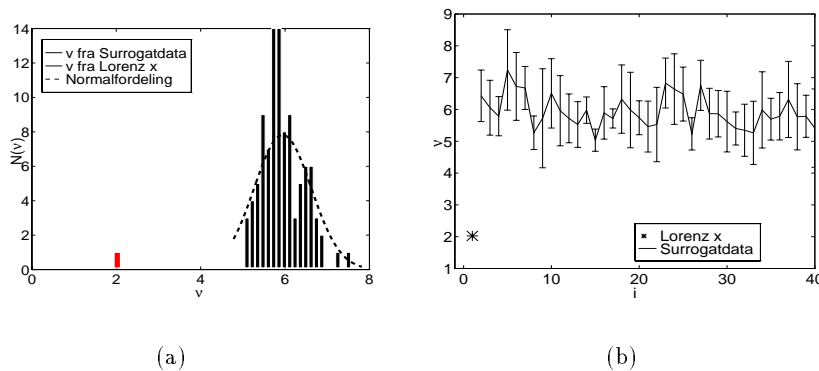
For at testingen skal gi statistisk signifikans lager vi mange realiseringer av surrogatdata. For hver realisering beregner vi så et dimensjonsestimat, slik at vi får en fordeling over dimensjonsestimatene fra surrogatdata. Hvis vi har flere realiseringer fra det virkelige systemet, kan vi teste statistisk signifikans ved en Kolmogorov-Smirnov-test hvor fordelingen over dimensjonsestimater for de opprinnelige dataene sammenliknes med fordelingen over dimensjonsestimatene fra surrogatdataene [?].

I det tilfellet hvor vi har kun én realisering av det virkelige systemet undersøker vi om dimensjonsestimatet fra denne realiseringen kan stamme fra samme fordeling som dimensjonsestimatene fra surrogatdataene. Hvis vi er strenge, forlanger vi at dimensjonsestimatet fra de opprinnelige dataene er mindre enn alle dimensjonsestimatene fra surrogatdata. (Vi forventer at dimensjonsestimatene fra lineær korrelert støy er høyere enn dimensjonsestimatene fra et deterministisk signal når effektetthetsspektrene er identiske.)

Hvis vi antar at dimensjonsestimatene over surrogatdataene er normalfordelte om middelverdien $\bar{\nu}_S$ med variansen σ_S^2 , kan vi benytte enheten “sigma”, S , for om vi skal kaste eller beholde nullhypotesen. Sigma beregnes ved

$$S = \frac{\nu - \bar{\nu}_S}{\sigma_S} \quad (8.2)$$

hvor ν er dimensjonsestimatet for de opprinnelige dataene. Sigma er avstand mellom ν og $\bar{\nu}_S$ i antall standardavvik. Hvis dimensjonsestimatene er normalfordelte og differansen mellom ν og $\bar{\nu}$ er $2\sigma_S$, det vil si $S = 2$, er konfidensintervallet på 95%. Nullhypotesen forkastes dermed når Sigma er større enn 2.



Figur 8.4: a) Fordelingen av dimensjonsestimater fra 100 realiseringer av surrogatdata samt dimensjonsestimatet for de opprinnelige dataene. b) Dimensjonsestimater fra opprinnelige data og fra 39 realiseringer surrogatdata med standardavvik mhp. l . Dimensjonsestimatene for surrogatdataene er høyere og har større usikkerhet enn dimensjonsestimatet for de opprinnelige dataene.

I oppgaven utføres hypotesetestingen ved å sammenligne dimensjonsestimatet fra de opprinnelige dataene med fordelingen av dimensjonsestimatene fra surrogatdata. I figur 8.4 a) er dette gjort for x -variabelen fra Lorenz-systemet og 100 realiseringer av surrogatdata. Dimensjonsestimatet fra Lorenz-systemet er godt utenfor fordelingen. Dette viser en signifikant forskjell mellom dimensjonsestimatet fra surrogatdataene og fra de opprinnelige data.

En enkel test for å undersøke om dimensjonsestimatene fra surrogatdataene er normalfordelte kan utføres ved å sammenligne fordelingen med en gausskurve av samme middelverdi og standardavvik.

Med 100 realiseringer av surrogatdata fra fra Lorenz-systemet viser en slik gausskurve god tilpasning til fordelingen av dimensjonsestimatene, se figur 8.4 a). Vi kan da kvantifisere

re forskjellen mellom dimensjonsestimatet for opprinnelige data og surrogatdata i antall Sigma. Forskjellen for denne tidsserien er $S = 8$, noe som er svært signifikant.

Dimensjonsestimatene for opprinnelige data og surrogatdata atskiller seg også ved usikkerheten i dimensjonsestimatene. Denne er høyere for surrogatdataene, se figur 8.4 b).

8.4 Fremgangsmåte

Senere i oppgaven vil surrogatdata-metoden anvendes når vi har funnet et lavt (og godkjent) dimensjonsestimat og vi ønsker å undersøke om tidsserien er linært korrelert støy. Fremgangsmetoden er som følger:

1. Lag mange realiseringer av surrogatdata ved å permutere fasen til den opprinnelige tidsserien. (I oppgaven benyttes 39 realiseringer.)
2. Beregn ett korrelasjonsintegral for hver av realiseringene. La alle parameterverdier være de samme som ble benyttet for den opprinnelige tidsserien (helst de optimale).
3. Beregn dimensjonsestimater fra surrogatdataene slik det er gitt i avsnitt 4.1.5, men benytt den l som gir $C(l) = -1$ som øvre grense for hvor skaleringsregionen kan lokaliseres.
4. Beregn fordelingen av dimensjonsestimatene fra surrogatdataene.
5. Undersøk om dimensjonsestimatet for de opprinnelige dataene er innen denne fordelingen. Hvis fordelingen synes å være normalfordelt, kvantifiser forskjellen i antall Sigma.

Kapittel 9

Oppsummering

I dette kapitlet gis først de viktigste resultatene fra de foregående kapitlene i Del II. Deretter gis en “oppskrift” eller et forslag til fremgangsmåte for dimensjonsestimering fra reelle data. Denne fremgangsmåten anvendes i Del III.

Fra I kapittel 4 anvendte vi G-P-algoritmen på støyfrie kunstige data fra et kaotisk system. To teknikker for rekonstruering av faserommet ble anvendt; Method of Delay (MOD) og Singular Spectrum Approach (SSA). For hver av disse to metodene ble en fremgangsmåte for rekonstruering av faserommet i forbindelse med dimensjonsestimering gitt. Ved rekonstruering av faserommet med SSA er det kun nødvendig å bestemme én parameter; vinduslengden w . Ved rekonstruering med MOD er det nødvendig å bestemme to parametre; imbeddingsdimensjonen m og tidsforsinkelsen τ .

I kapittel 5 ble rekurrensplott presentert. Disse benyttet i Del III til å gi oss informasjon om periodisitet i et signal og som en test for at signalet er deterministisk stasjonært. Parametrene for rekonstrueringen av faserommet bestemmes ut fra gjennomsnittlig periode i signalet.

I kapittel 6 ble en variant av punktvis dimensjon, PD2, presentert for dimensjonsestimering av ustasjonære signaler. Dette er en variant av G-P-algoritmen. Parametrene for rekonstruering av faserommet velges derfor tilsvarende som ved dimensjonsestimering ved G-P.

I kapittel 7 ble G-P-algoritmen testet for robusthet mot hvit støy. Ved rekonstruering av faserommet med MOD viste algoritmen seg å være svært følsom. Det utføres ved MOD ingen filtrering av den rekonstruerte mengden. Rekonstruering av faserommet med SSA derimot, viste seg å være et effektivt filter mot hvit støy.

Kapittel 8 presenterte dimensjonsestimering ved G-P fra surrogatdata som en metode for å undersøke om et lavt dimensjonsestimat kan skyldes lineær korrelasjon i tidsserien.

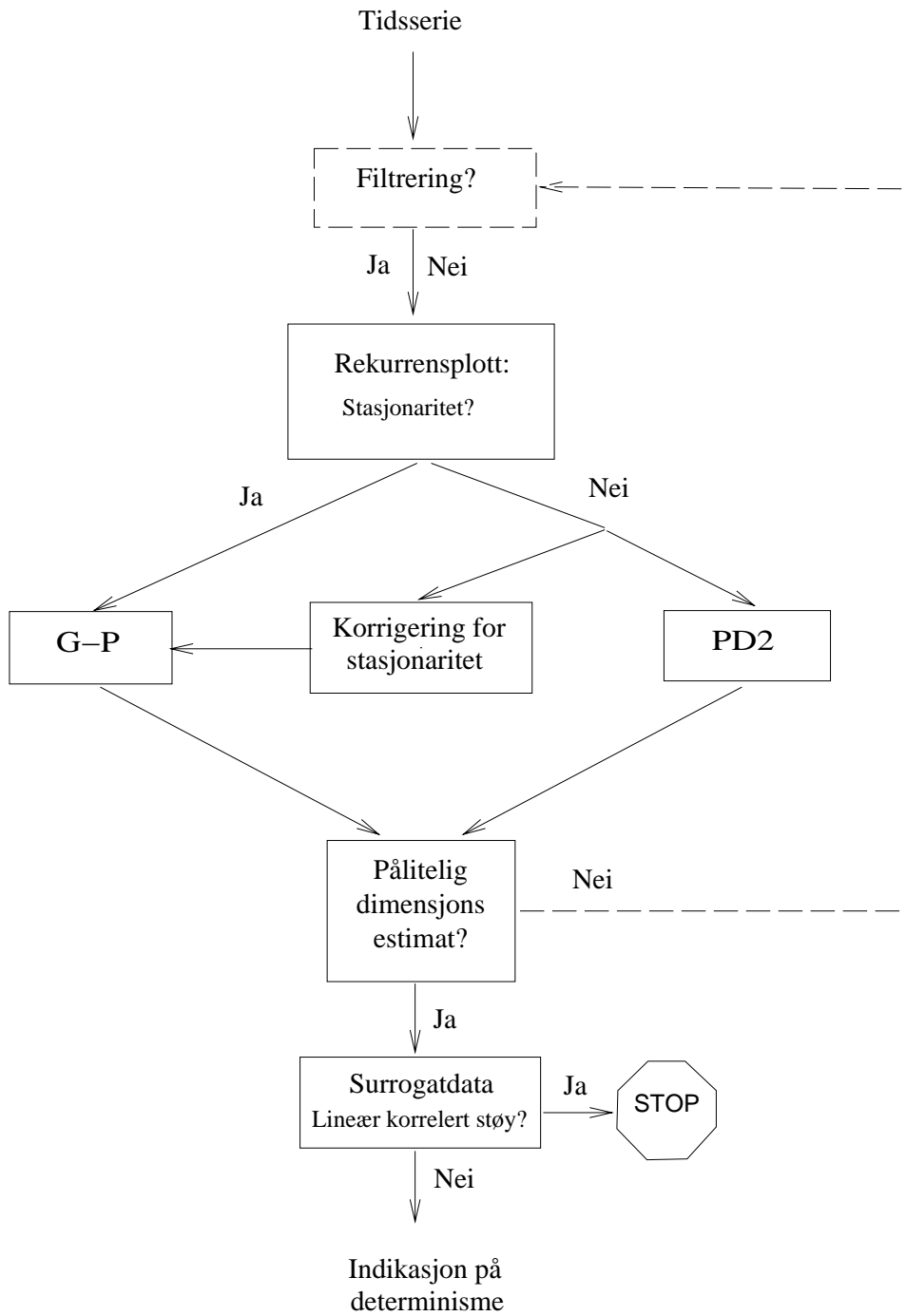
På bakgrunn av resultatene fra kapittel 4 og 7 anbefales rekonstruering av faserommet ved SSA fremfor MOD enten dataene er støyfrie eller de antas å inneholde hvit støy.

Selv om SSA anbefales for rekonstruering av faserommet fremfor MOD, anbefaler jeg at faserommet også rekonstrueres ved MOD før dimensjonsestimering. Dette fordi de to teknikker for rekonstruering viste seg å føre til noe forskjellige dimensjonsestimater for reelle data. Dette kommer vi til i Del III.

Av metodene presentert i Del II lager vi en fremgangsmåte vi kan følge for dimensjonsestimering av reelle data når målet er å undersøke om dataene er fra et deterministisk ulineært system. Denne fremgangsmetoden er skissert i figur 9.1. I ord går denne fremgangsmåten ut på

1. Hvis tidsserien er støyfylt, filtrer signalet.
2. Bestem gjennomsnittlig periode i signalet.
 - Hvis signalet er periodisk, kan gjennomsnittlig periode estimeres fra effektthetsspekteret.
 - Hvis signalet er aperiodisk, beregn gjennomsnittlig periode ved gjennomsnittlig tidsintervall mellom lokale maksima i signalet.
 - Hvis det er mistanke om at det er flere periodiske komponenter i signalet, beregn rekurrensplott for å avsløre dette. Hvordan rekurrensplott gir informasjon om periodisitet i signalet er beskrevet i kapittel 5. Parametrene for rekonstruering av faserommet i forbindelse med rekurrensplott bestemmes imidlertid ut fra gjennomsnittlig periode i signalet.
3. Utfør stasjonaritetstest ved visuell inspeksjon av rekurrensplott. Metoden er presentert i kapittel 5. Parametrene for rekonstruering av faserommet bestemmes ut fra gjennomsnittlig periode i signalet.
4.
 - Hvis tidsserien er ustasjonær, utføres dimensjonsestimering ved PD2. Metoden er beskrevet i kapittel 6.
 - I stedet for å benytte PD2 er det mulig å korrigere for ustasjonaritet i signalet slik at vi får en stasjonær tidsserie. (Dette er ikke gjennomgått for kunstige data.)
5. Hvis tidsserien er stasjonær, utfører vi dimensjonsestimering ved G-P-algoritmen. Fremgangsmåte er gitt i kapittel 4.
6. Utfør en pålitelighetstest av dimensjonsestimatet. Denne er beskrevet nedenfor.
7. Hvis dimensjonsestimatene er upålitelige, undersøk om de er upålitelige på grunn av støy i signalet, det vil si undersøk om dimensjonsestimeringen kan forbedres ved filtrering.
8. Hvis dimensjonsestimatet kan anses som pålitelig: utfør en test med surrogatdata for å undersøke om dimensjonsestimatet kan skyldes lineær korrelasjon i tidsserien, det vil si at vi undersøker om tidsserien er lineær korrelert støy, se kapittel 8.

Dimensjonsestimering fra rekonstruering med MOD krever mindre beregningstid og mindre lagringskapasitet enn dimensjonsestimering fra rekonstruering ved SSA. Rekonstruering ved MOD kan derfor være å foretrekke i enkelte tilfeller fremfor rekonstruering ved SSA.



Figur 9.1: Skisse av fremgangsmåten for å undersøke om en tidsserie er fra et lavdimensjonalt system.

Del III

Dimensjonsestimering fra elektromagnetiske hjernesignaler

Oversikt over Del III

I denne delen anvendes metodene presentert i Del II på reelle data. Dataene er registrert ved EEG, EKG eller MEG. Disse registreringsmetodene er forklart i kapittel 3. I kapittel 10 presenteres datasettene. Fra Del II har vi at gjennomsnittlig periode i signalet er viktig for å bestemme parametrene for rekonstruering av faserommet. Vi finner derfor gjennomsnittlig periode for de periodiske delene av datasettene. Som nevnt i innledningen er et av målene med oppgaven å undersøke om dimensjonsestimering ved G-P kan avgjøre om hjernesignalene er deterministiske og eventuelt kaotiske. Siden G-P krever et stasjonært signal, anvendes i samme kapittel rekurrensplott for å finne tidsintervaller hvor signalene er stasjonære.

På tidsseriene vi har plukket ut utføres i kapittel 11 dimensjonsestimering ved G-P. Enkelte av tidsseriene registrert under epileptisk anfall er ustasjonære. Dimensjonsestimering utføres likevel ved G-P på disse tidsseriene for å kunne sammenligne resultatene med resultater i senere kapitler.

På de ustasjonære tidsseriene fra epileptogen hjerneaktivitet kunne vi utført dimensjonsestimering ved PD2. Fordi resultatene fra PD2 på kunstige data ikke var overbevisende velger vi i kapittel 12 isteden å korrigere for ustasjonaritet slik at dimensjonsestimering kan utføres ved G-P. Resultatene for ustasjonære og stasjonære tidsserier sammenlignes for å se om korrigeringen for ustasjonaritet forbedret dimensjonsestimeringen.

Et av målene med oppgaven var å undersøke om dimensjonsestimering kan benyttes til prediksjon av epileptisk anfall. I kapittel 12 ser vi derfor på dimensjonsestimering av tidsserier som er registrert under overgang fra normal til epileptogen hjerneaktivitet. Disse tidsseriene er ustasjonære. Vi kan ikke korrigere for ustasjonaritet i disse tidsseriene. Som nevnt i kapittel 6 er punktvis dimensjon, PD2, utviklet for dimensjonsestimering av ustasjonære signaler. Vi benytter derfor denne metoden på de ustasjonære signalene for om mulig se endringer i dimensjonsestimatene i overgangen fra normal til epileptogen hjerneaktivitet. I tillegg til PD2 beregner vi “glidende dimensjonsestimater” ved G-P av signalet for å se hvordan dimensjonsestimatene endrer seg i signalet.

En kilde til upålitelige dimensjonsestimater er støy. I kapittel 13 filtreres signalene før dimensjonsestimering for å se hvordan filtreringen påvirker dimensjonsestimering av de reelle dataene.

Hvis vi har beregnet lave dimensjonsestimater for et signal, er det interessant å vite om det lave dimensjonsestimatet er et tegn på determinisme i signalet. I kapittel 8 ble surrogatdata presentert som en metode for å undersøke om et lavt dimensjonsestimat kan skyldes lineær korrelasjon mellom dataene. I kapittel 14 anvendes denne metoden på EEG registrert under

epileptisk anfall.

Kapittel 10

Stasjonaritet og periodisitet i datasettene

I dette kapitlet gis en beskrivelse av de forskjellige datasettene som analyseres i oppgaven. Avsnitt 10.1 forteller om dataene er registrert under normal eller epileptogen hjerneaktivitet. I senere kapitler ønsker vi å utføre dimensjonsestimering fra datasettene. Dimensjonsestimering ved Grassberger-Procaccia-algoritmen krever at signalet er stasjonært. De fleste datasettene er ustasjonære, men kan være stasjonære over kortere tidsintervaller. Flere tidsserier er plukket fra alle datasettene. Et av kriteriene som vurderes for utplukking, er deterministisk stasjonaritet ved rekurrensplott. Hvordan dette er utført vises i avsnitt 10.2 for et av datasettene (EKoG2). For de utplukkede tidsserier undersøker vi

Stasjonaritet, det vil si vi undersøker om signalet har

- jevn middelvei,
- jevn periode og om det er
- deterministisk stasjonært.

Periodisitet, hvilke perioder syklene i signalet har og hvilke periodiske komponenter signalet inneholder.

Stasjonaritetstesting er beskrevet i avsnitt 10.3, periodisitet i avsnitt 10.4. Periodisitet undersøkes fordi gjennomsnittlig periode i signalet benyttes som parameterverdi for rekonstruering av faserommet ved dimensjonsestimering. Avsnittet avsluttes med en tabell over de utplukkede tidsseriene. Muligens er det lurt å lese tabellen underveis i kapitlet.

10.1 Datasett

Dette avsnittet gir en oversikt over datasettene jeg har plukket tidsserier fra. Fordi disse tidsseriene senere benyttes til å undersøke om dimensjonsestimering kan skille mellom normal og epileptogen hjerneaktivitet har jeg søkt å unngå å plukke ut tidsserier fra overgang mellom normal og epileptogen hjerneaktivitet. Plott av rådataene er vist i vedlegg A. Noen av de utplukkede tidsseriene er vist i figur 10.2 i avsnitt 10.3.

EEG- og EKoG-signalene er samlet ved 200 Hz. Signalene er båndpassfiltrert mellom 0.5 Hz og 70 Hz. De har passert en 12 bits AD-konverter, det vil si at antall forskjellige verdier i signalet kan være maksimalt 4096. Dataene fra MEG er samlet ved 297 Hz og båndpassfiltrert mellom 0.3 Hz og 100 Hz.

10.1.1 EKoG2

Datasettet EKoG2 er registrert interkranielt. Måleelektrodene har vært plassert subtemporalt, det vil si under tinninglappen. Datasettet består av 18049 simultane målinger i 5 kanaler hvorav det er registrert epileptisk aktivitet i de 4 første. Tidlig i signalet er det spikes som kommer tettere og tettere inntil signalet er periodisk i den siste delen. I den siste delen av signalet danner tre og tre svingninger i signalet pseudosykluser. Den periodiske delen fra sampel 12100 til 15450 er plukket ut fra dette datasettet.

10.1.2 EKoG1

Datasettet EKoG1 er registrert interkranielt og subtemporalt. Datasettet EKoG1 består av $N = 12000$ simultane målinger i 11 kanaler hvor det er registrert epileptisk anfall i alle kanaler. I begynnelsen av datasettet synes det å være registrert normal hjerneaktivitet. Fra sampel 3500 og til anfallet starter ved sampel 7500, har signalet en lav amplitude i forhold til den første delen. Etterhvert synes signalet å være periodisk og regelmessig i de fleste kanalene på grunn av epileptogen hjerneaktivitet. Unntakene er kanal 8 og 10 hvor det ikke er noen klart definerte sykler i signalet. For dette datasettet ser vi senere nærmere på den regelmessige delen av signalet fra sampel 9800 til 11899.

10.1.3 MEG

Datasettet MEG er et skalart signal av 70000 målinger. Registreringene er utført i løpet ca. 236 sekunder hvorav det epileptiske anfallet varer i underkant av 22 sekunder. Forut for anfallet er signalet uten spikes. Omtrent fra sampelnummer 35600 til 38600 som er før anfallet er det registrert beta-aktivitet ved 9Hz. Det epileptiske anfallet starter omtrent ved sampel 47500 og har en varighet av 6500 sampler. Deretter viser signalet normal hjerneaktivitet. Fra dette datasettet ser vi på det nevnte intervallet fra beta-aktivitet og fra epileptisk anfall.

10.1.4 EEGE

Datasettet EEGE er registrert ekstrakranielt. Det består av simultane målinger i 6 kanaler hvor hver kanal inneholder 63552 målinger. Det vil si at målingene er foretatt over ca. 5 minutter og 18 sekunder. I kanal 4 og 6 er det i første halvdel av signalet pseudosykluser med en periode på 30 samplingsintervaller. Avstanden mellom disse pseudosyklusene er fra 500 til 3000 samplingsintervaller. Etter ca 36900 sampler er epileptisk aktivitet registrert i alle kanaler. Signalet inneholder nå sekvenser med høy amplitude og raske svingninger som kommer igjen etter litt over 200 sampler. Kun i kanal 4 og 6 er sykluser synlig mellom disse "utbruddene". Perioden for disse syklusene er den samme som for syklusene i begynnelsen

av datasettet, ca. 30 samplingsintervaller. I de 4000 siste elementene av signalet har vi igjen normal hjerneaktivitet. Vi ser senere nærmere på et intervall fra kanal 6 hvor syklene er mest synlige.

10.1.5 EEGN

Datasettet EEGN er målt ekstrakranielt under normal hjerneaktivitet. Det består av $N = 30000$ målinger i 5 kanaler og inneholder ingen spikes. Fra dette signalet ser vi nærmere på et tidsintervall av lengde $N = 3000$.

10.2 Et eksempel på stasjonaritetstest ved rekurrensplott

Datasettet EKoG2 er ustasjonært da det er registrert under overgang fra normal til epileptogen hjerneaktivitet. For å plukke ut lengst mulig stasjonære tidsserier fra datasettet har jeg beregnet rekurrensplott fra overlappende deler av signalene. Figur 10.1 viser rekurrensplott av overlappende deler av lengde $N = 3000$ fra kanal 1.

Parametrene for rekurrensplottene er funnet ved først å finne en periodisk bit av signalet. Vinduslengden for rekonstrueringen av faserommet velges noe mindre enn gjennomsnittlig periode i denne biten. Parametrene m og τ velges vilkårlig så lenge de gir den valgte vinduslengden ved $w = (m - 1)\tau$. For EKoG2 er parameterverdiene valgt lik $m = 7$ og $\tau = 4$.

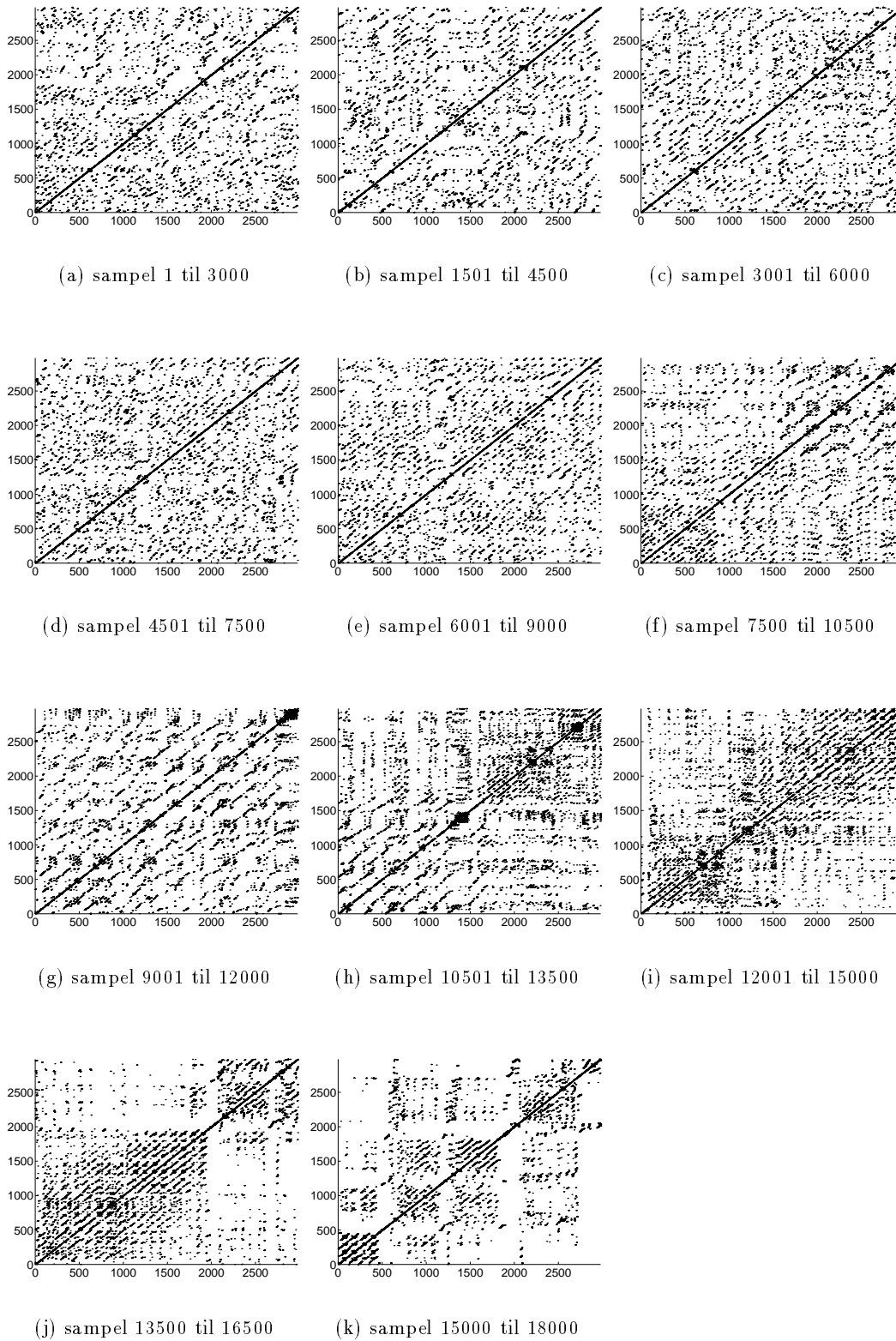
De stasjonære tidsseriene plukkes ut subjektivt etter to **kriterier**. Signalet er stasjonært over et tidsintervall så lenge strukturen i rekurrensplottene ikke endres i løpet av dette tidsintervallet. Det må være rekurrente punkter både nære og langt unna diagonalen som viser at løsningsbanene til den rekonstruerte attraktor returnerer gjentatte ganger til forskjellige områder i faserommet.

Ifølge rekurrensplottene anses kanal 1 fra **EKoG2** som stasjonært i tidsintervallet fra sampel 1 til 9000, fra 9000 til 12100 og fra 12100 til 15450. Den siste stasjonære biten er registrert under den periodiske delen av anfallet. Samme tidsintervall er plukket ut som stasjonært for kanal 2, 3 og 4 fra datasettet. Rekurrensplott er benyttet for de andre datasettene på samme måte som vist ovenfor som hjelp til å plukke ut stasjonære tidsserier. Dette vises imidlertid ikke.

En **svakhet** ved denne metoden er at den medfører en viss grad av subjektivitet. Den siste biten kunne ifølge rekurrensplottene være ustasjonær og deles inn i to stasjonære deler, fra 12100 til 13000 og fra 13000 til 15450.

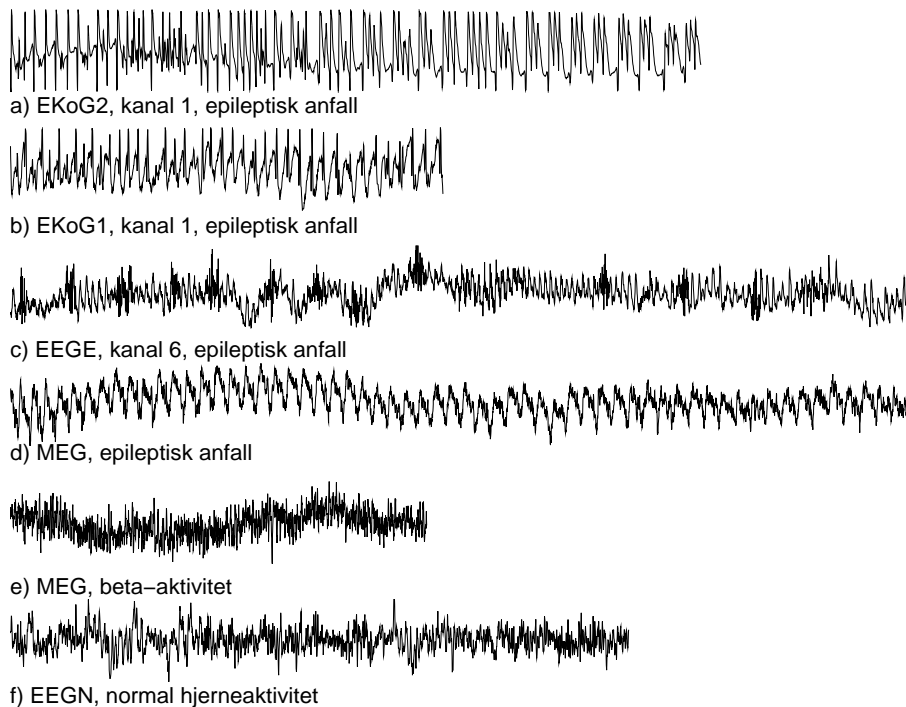
10.3 Stasjonaritet

Fra alle datasettene er flere tidsserier plukket ut for dimensjonsestimering. Dette avsnittet tar for seg noen av tidsseriene hvor vi ser på stasjonaritet ved jevnhet i middelvei og periode samt at vi anvender rekurrensplott som en test for deterministisk stasjonaritet.



Figur 10.1: Figuren viser de rekurrensplottene for første kanal fra datasettet EKG2. Hvert rekurrensplott er fra en tidsserie av lengde $N = 3000$. Faserommet er rekonstruert ved MOD med parameterverdiene $m = 6$ og $\tau = 4$. Fra den siste og periodiske delen av tidsserien er epoken fra sampel 12100 til 15450 plukket ut som stasjonær.

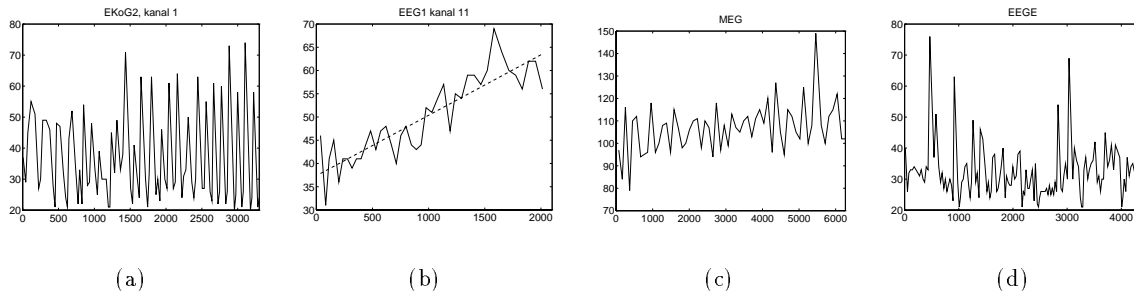
Figur 10.2 viser tidsserier fra alle datasettene. **Jevnhet i middelværdi** er en metode for å undersøke om signalet er empirisk stasjonært, se avsnitt 5.6. Dette kan undersøkes ved å beregne et glidende gjennomsnitt av tidsseriene, men er imidlertid unødvendig for å se at tidsseriene fra EEGE og MEG i figur 10.2 c), d) og e) er ustasjonære med hensyn på middelværdi. De øvrige tidsseriene er jevnere i middelværdi. I kapittel 12 skal vi se på dimensjonsestimering av signalet fra MEG registrert under epileptisk anfall, før og etter at drift i middelværdi er fjernet fra signalet.



Figur 10.2: Figuren viser tidsserier fra de nevnte datasettene. Datasettene fra MEG har en samplingstetthet på $f_s = 297$ Hz, mens de andre er samlet ved 200 Hz. Tidsseriene fra MEG er skalert om slik at plottene viser utstrekning i tid og ikke i antall punkter i tidsserien.

Signalene registrert under epileptisk anfall inneholder sykler. For disse signalene undersøker vi **jevnhet i periode** ved å plote tidsintervallet mellom lokale maksima i signalet som en funksjon av tiden, se figur 10.3. Signalet fra EKG2 og MEG anses som stasjonært med hensyn på periode, se figur 10.3 a) og c) henholdsvis. Signalene fra EKG1 er ustasjonært i periode ved at perioden øker lineært, se figur 10.3 b). Perioden i EEGE er også ujevn, se figur 10.3 d). Algoritmen som er benyttet for å lokalisere toppunkter i signalet, krever at toppunktene er tydeligere definert enn hva de er under beta-aktivitet i MEG. Datasettet EEGN inneholder ingen synlige sykler. Stasjonaritet ved perioden i signalet er derfor ikke vurdert for disse signalene.

For å teste om signalet er **deterministisk stasjonært** anvender vi **rekurrensplott**. Hvor-



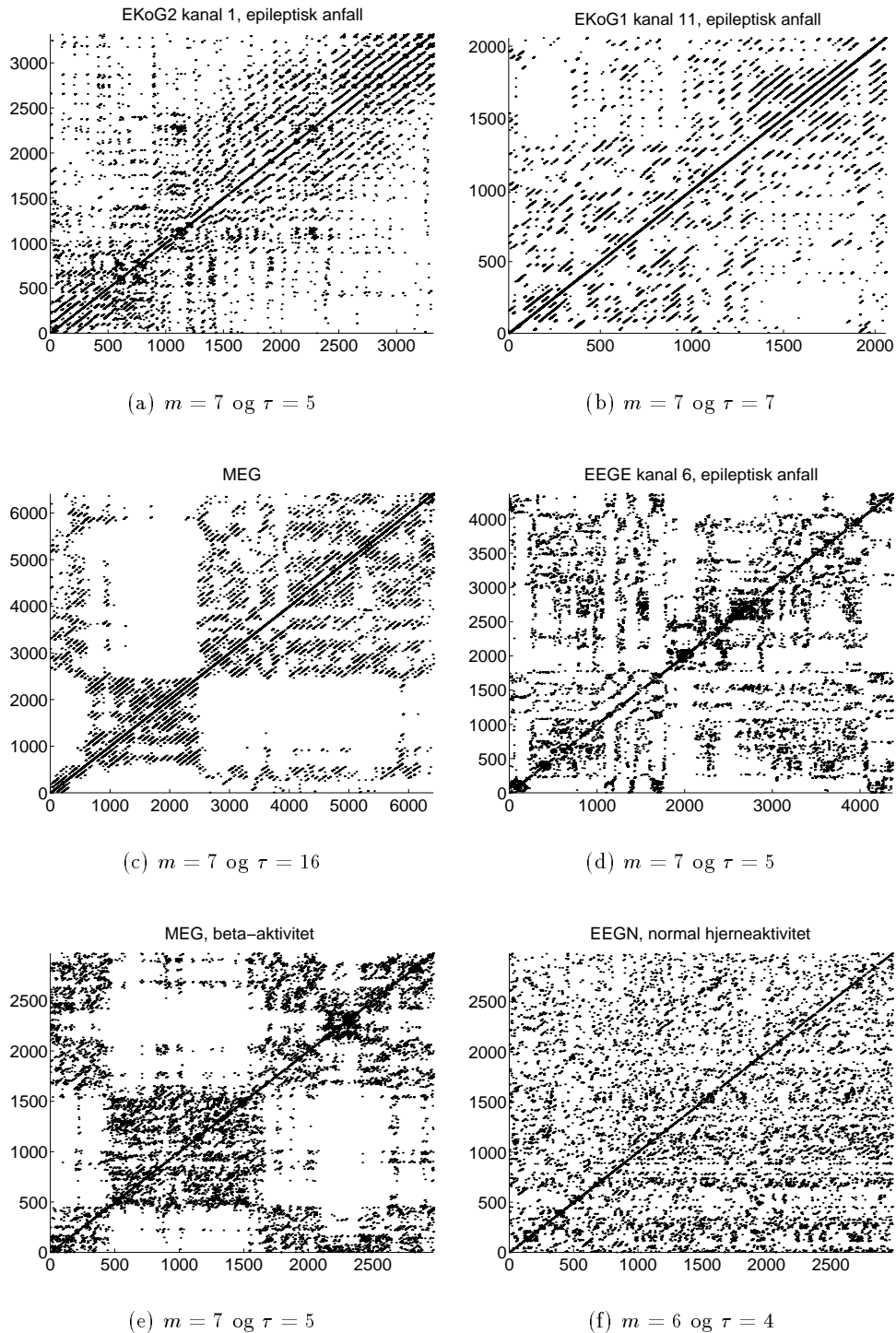
Figur 10.3: Plottene viser tidsintervallet mellom lokale maksima i signalet som en funksjon av tiden for tidsserier registrert under epileptisk anfall fra datasettene a) EKoG2, b) EKoG1, c) MEG og d) EEGE. Førsteaksen er punktene i tidsserien, mens andreaksen er antall punkter mellom de lokale maksima i signalet.

dan de kan tolkes er forklart i kapittel 5. Av rekurrensplottene gitt i figur 10.4 antar vi at tidsseriene fra EKoG2, EKoG1 og EEGN er stasjonære fordi strukturen ikke endres stort med tiden, se henholdsvis figur 10.4 a), b) og e). (Begge aksene i rekurrensplottet er med hensyn på tiden, men enheten er antall punkter fra tidsserien.) Rekurrensplottene for tidsseriene fra MEG viser at signalet er ustasjonært, både når det viser epileptogen aktivitet og beta-aktivitet, se henholdsvis figur 10.4 c) og e). De hvite feltene i plottene viser ustasjonaritet og skyldes at middelveiden drifter i signalet. Tidsserien fra EEGE havner i grenseland. Det er viser deterministisk stasjonaritet ved at det er rekurrente punkter i hele plottet. Strukturen er imidlertid ikke den samme i hele plottet. Av siste argumentet klassifiserer vi signalet til ustasjonært.

Resultatene fra stasjonaritetstestene i dette avsnittet er oppsummert i tabell 10.1. Tabellen viser at tidsseriene fra ekstrakranielle EEG, EEGE, er taperen blant datasettene fra epileptogen hjerneaktivitet. For å avgjøre om dette gjelder generelt, at signaler fra EKoG og MEG er mer stasjonære enn ekstrakranielle EEG, trengs imidlertid et langt større datagrunnlag.

Stasjonært	ved	middelvei	periode	rekurrensplott
EKoG2,	epilepsi	X	X	X
EKoG1,	epilepsi	X	–	–
EEGE,	epilepsi	–	–	–
MEG,	epilepsi	–	X	–
MEG,	beta-akt.	–	o	–
EEGN,	normal hj.akt.	X	o	X

Tabell 10.1: Symbolene “X” og “–” er henholdsvis svaret ja og nei på spørsmålet om signalet er stasjonært ifølge stasjonaritetstesten som er utført. Med “o” menes at testen ikke er utført for dette signalet.



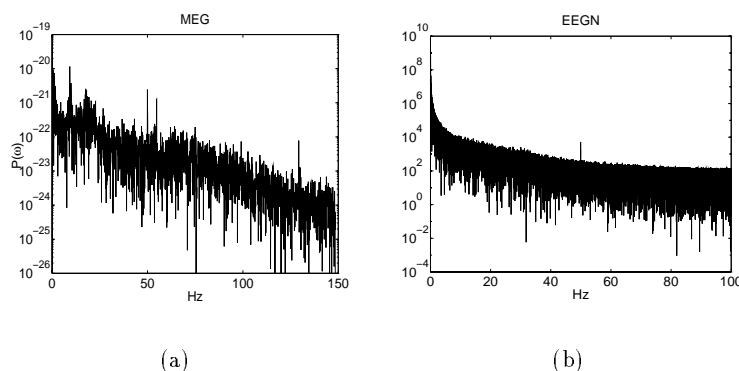
Figur 10.4: a) Rekurrensplott fra tidsserier fra alle datasettene. Jevn struktur i hele plottet viser at signalet er stasjonært. Linjer parallele med hoveddiagonalen viser periodisitet i plottet. Datasettene er a) EKoG2, b) EKoG1, c) MEG, d) EEGE, e) MEG og f) EEGN. Parameterverdiene for rekstruering av faserommet er gitt under hvert plott. For alle plottene er antall referansepunkter begrenset til $M = 1500$. De 10 nærmeste naboene til hvert referansepunkt er avmerket.

10.4 Periodisitet

I avsnitt 10.1 ble signalene beskrevet ved sykler og pseudosykler. En måte å undersøke om det er sykler og pseudosykler i signalet er å lage **rekurrensplott i farger**. Linjer parallelle med hoveddiagonalen viser periodisitet i signalet. Likeledes viser gjentakelse av mønstre ved f.eks. vertikale linjer at signalet inneholder pseudosykluser. Figur 10.4 viser rekurrensplott for en del av signalet fra hver av datasettene registrert under epileptisk anfall.

For EKoG2 viser linjer parallelle med hoveddiagonalen at signalet inneholder sykler. Røde felter atskilt av omtrent faste tidsintervaller viser at signalet inneholder pseudosykluser, se figur 10.6 a). Signalene fra EKoG1 og MEG inneholder kun sykler, se figur 10.6 b) og c) henholdsvis. For datasettet EEGE viser linjene parallelle med hoveddiagonalen periodisitet. Ved å sammenholde rekurrensplott og signal, ser vi at de vertikale linjene viser når “utbruddene” i signalet er i tid.

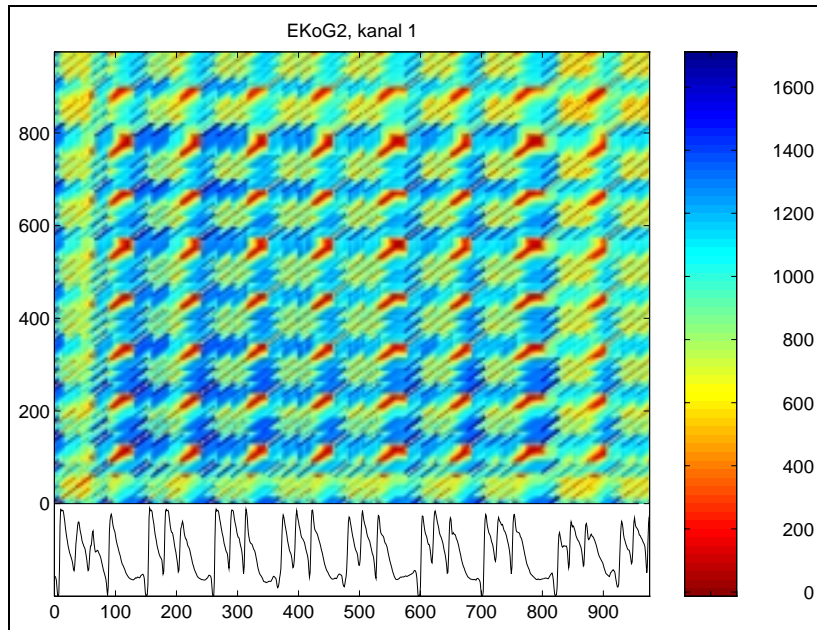
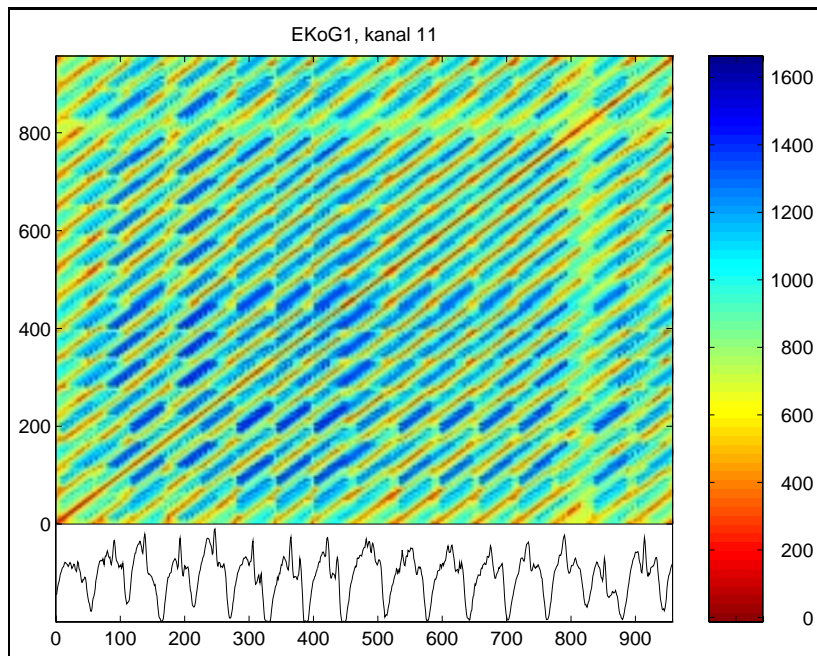
Rekurrensplottene er best egnet til å vise perioder av en viss varighet. For periodiske signaler hvor perioden er kort, er **effekttetthetsspekteret** bedre egnet enn rekurrensplott til å påvise periodiske komponenter. Effekttetthetsspekteret ved periodogrammet for signalene fra normal hjerneaktivitet fra MEG og EEGN er vist i henholdsvis figur 10.7 a) og b).



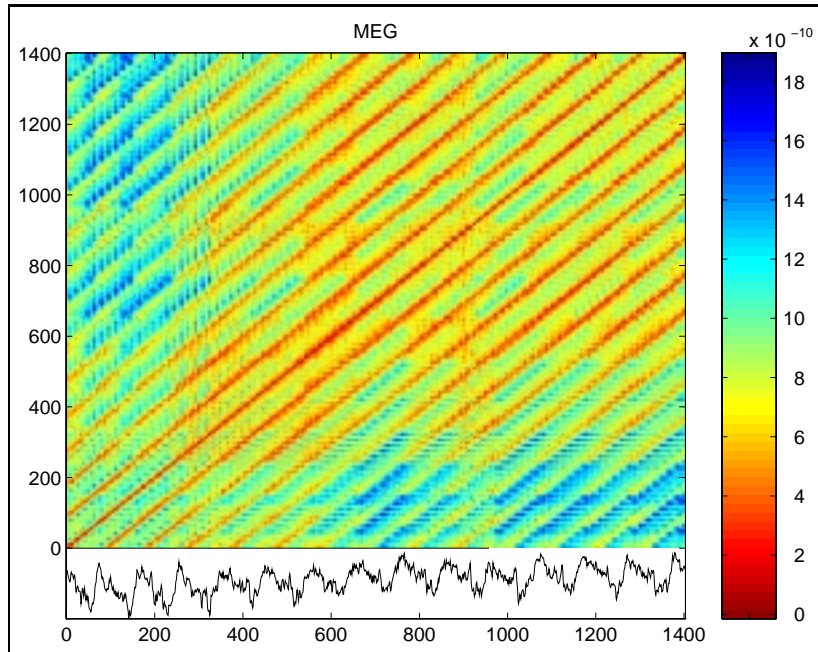
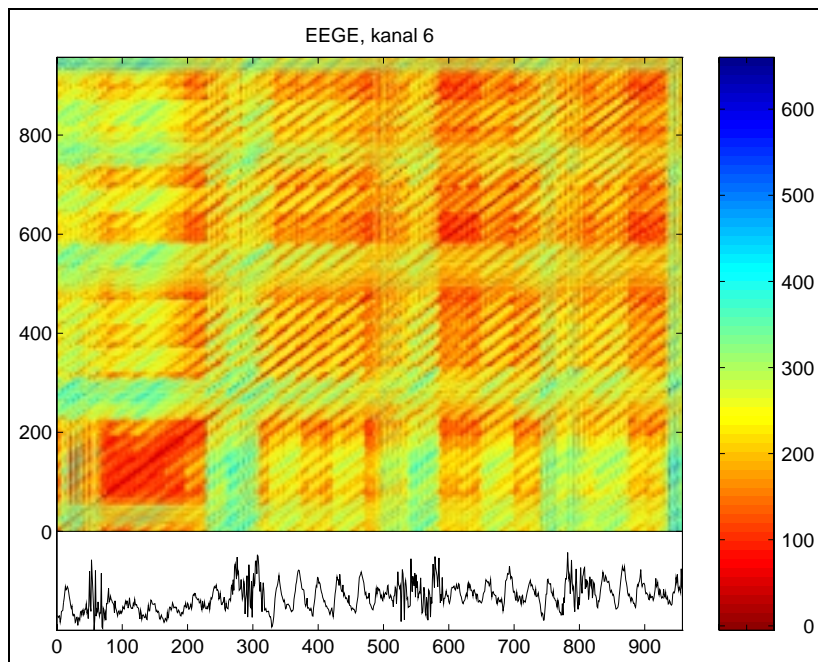
Figur 10.7: a) Periodogrammet for tidsserie fra MEG registrert ved beta-aktivitet. Periodiske komponenter er ved 9Hz, 50Hz, 55Hz og 130Hz. Begge plottene er semilogaritmiske, det vil si at kun y-aksen er logaritmisk. b) Periodogrammet for en tidsserie fra EEGN. En periodisk komponent ved 50Hz er synlig.

For signalet fra MEG med beta-aktivitet er periodiske komponenter ved 9Hz, 50 Hz, 55 Hz og 130 Hz synlig. For signalet fra EEGN er en periodisk komponent ved 50Hz synlig. Den periodiske komponenten ved 50Hz antas imidlertid å skyldes bidrag fra nettet.

For **beregning av gjennomsnittlig periode** i signalet benyttes for signalene fra epileptogen hjerneaktivitet gjennomsnittlig tid mellom topppunktene i signalet. For signalet fra MEG fra beta-aktivitet beregnes gjennomsnittlig periode, τ_P , fra den periodiske komponenten ved 9Hz i periodogrammet. Beregningsmåte er ved $\tau_P = \frac{f_s}{f_P}$ hvor f_s er samplingstettheten og f_P er frekvensen til den periodiske komponenten. Siden det ikke er funnet noen periodiske komponenter for datasettet EEGN, beregnes et estimat for gjennomsnittlig periode ved

(a) $m = 7$ og $\tau = 5$ (b) $m = 7$ og $\tau = 7$

Figur 10.5: Fargerekurrenssplott av tidsserier registrert under epileptisk anfall. Datasettene er i a) EKoG2 og b) EKoG1. Parameterverdiene anvendt for rekonstruering av faserommet er gitt under hvert plott. Det er benyttet $M = 400$ referansepunkter. Plottene er laget for å finne perioder i signalet. Se teksten for tolkning av plottene.

(a) $m = 7$ og $\tau = 16$ (b) $m = 7$ og $\tau = 5$

Figur 10.6: Fargerekurrensplokk av tidsserier registrert under epileptisk anfall. Datasettene er i a) MEG og b) EEGE, Parameterverdiene anvendt for rekonstruering av faserommet er gitt under hvert plott. Det er benyttet $M = 400$ referansepunkter. Plottene er laget for å finne perioder i signalet. Se teksten for tolkning av plottene.

det kumulative effekttetthetsspekteret gitt ved periodogrammet. (Det kumulative effekttetthetsspekteret er omtalt i avsnitt 4.2.4. Beregnede verdier for gjennomsnittlig periode er gitt i tabellen nedenfor.

I tillegg inneholder tabellen beregnet verdi for korrelasjonstid siden denne benyttes som parameterverdi ved dimensjonsestimering.

Datasett	N	Kanal	Beskrivelse	τ_R	τ_P	τ_c
EKoG2	3350	1	Epileptogen aktivitet	36	109	6
		2		38	120	4
		3		32	117	7
		4		32	–	8
		5		–	–	6
EKoG1	2100	1,2,3,4,5,6,7,9,11	Epileptogen aktivitet	50 ± 2	–	9 ± 2
		8		–	–	14
		10		–	–	18
MEG	6500	1	Epileptogen aktivitet	100	–	21
	3100		Beta-aktivitet	33	–	10
EEGE	5000	1	Epileptogen aktivitet	–	200	20
		2,3 og 5		–	200	33
		4 og 6		30	200	7
EEGN	3000	1 til 5	Normal hjerneaktivitet	20	–	5
	30000					

Tabell 10.2: Verdien for N er lengden av tidsseriene i antall punkter, τ_R og τ_P er begge gjennomsnittlig perioder i signalet. Verdien for τ_R er gjennomsnittlig tid mellom raske svingninger i signalet, mens τ_P er gjennomsnittlig periode for pseudosykluser i signalet. Disse verdiene er beregnet ved Matlab-programmet “topp2.m” gitt i vedlegg E. Unntaket er for datasettet EEGN hvor gjennomsnittlig periode i signalet er beregnet ved det kumulative effekttetthetsspekteret, se avsnitt 4.2.4. Verdien for τ_c er korrelasjonstiden. Enhetene for τ_P , τ_R og τ_c er antall samplingsintervaller.

Kapittel 11

Dimensjonsestimering fra elektromagnetiske hjernesignaler

I dette kapitlet skal vi se på om det er mulig å beregne pålitelige dimensjonsestimater fra tidsseriene omtalt i kapittel 10. De ble testet med hensyn på tre kriterier for stasjonaritet. Noen av tidsseriene er stasjonære, andre er ustasjonære ved ett eller flere av kriteriene, mens noen er ustasjonære med hensyn på alle tre kriterier. Selv om dimensjonsestimering ved Grassberger-Procaccia-algoritmen krever et stasjonært signal utføres det likevel på alle tidsseriene. Før dimensjonsestimeringen er utført vet vi ikke om det er mulig å beregne pålitelige dimensjonsestimater.

I avslutningen av Del I ble rekonstruering av faserommet anbefalt utført ved SSA fremfor MOD. Vi benytter derfor fremgangsmåten for dimensjonsestimering slik den er gitt i avsnitt 4.5 når faserommet rekonstrueres ved SSA. Avsnitt 11.1 tar for seg parametersettingen og noen av de valgte parameterverdier for dimensjonsestimeringen. I [?] er gjennomsnittlig periode i signalet foreslått som parameterverdi for vinduslengden. For de analyserte tidsserier ser vi på om det er noen sammenheng mellom disse verdiene. Tidsseriene som analyseres er enten fra normal eller epileptogen hjerneaktivitet fordi vi ønsker å undersøke om dimensjonsestimeringen kan skille mellom disse to hjernetilstander. I avsnitt 11.2 utføres dimensjonsestimering på tidsseriene fra normal hjerneaktivitet, mens avsnitt 11.3 tar for seg tidsseriene fra epileptogen hjerneaktivitet. Når vi har simultane måleserier ser vi også på spredningen av dimensjonsestimater mellom kanalene.

11.1 Parametersetting for dimensjonsestimering

Ved dimensjonsestimering etter fremgangsmåten gitt i avsnitt 4.5 er det en rekke parametre som vi må bestemme verdier for. Dette avsnittet gir en oversikt over valg av parameterverdier for de reelle dataene.

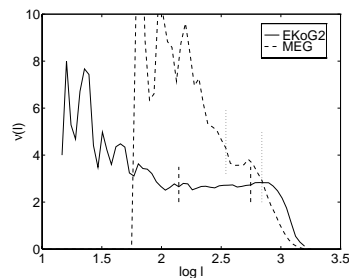
Når faserommet rekonstrueres ved SSA må vi bestemme vinduslengden w og en øvre grense for imbeddingsdimensjonen m . Fra kapittel 4.3 har vi at vinduslengden for rekonstruering ved SSA velges ut fra gjennomsnittlig periode i signalet. For tidsseriene vi skal dimensjonestimere fra i resten av oppgaven er denne verdien gitt i tabell 10.2 i avsnitt 10.4.

Når det gjelder imbeddingsdimensjonen er fremgangsmåten for å finne denne gitt i avsnitt 4.3. Ved rekonstruering med SSA har vi initielt en mengde i faserommet hvor imbeddingsdimensjonen er $p = w + 1$. Ved å redusere imbeddingsdimensjonen reduserer vi samtidig beregningstiden. Vi finner derfor singularverdiene til den initielle mengden. Disse tilsvarer spredningen av mengden. Vi kaster de retningene hvor singularverdiene tilsvarer støynivået i signalet. Imbeddingsdimensjonen er da antallet gjenværende retninger, men siden vi ønsker å undersøke om signalet er fra et lavdimensjonalt system, lar vi imbeddingsdimensjonen være maksimalt lik 20. Imbeddingsdimensjonen fastsettes for hvert signal i løpet av dette kapitlet.

I beregningen av korrelasjonsintegralet kastes tidsskorrelerte punktpar selv om det ikke er oppgitt under dimensjonsestimeringen for hvert enkelt datasett. Vi krever at punktene må ha en avstand større enn korrelasjonstiden fra referansepunktene. Korrelasjonstiden til tidsseriene er gitt i tabell 10.2 i avsnitt 10.4.

Før beregning av korrelasjonsintegralet må vi bestemme tettheten av punktene på grafen gitt ved korrelasjonsintegralet. Denne tettheten er omtalt i avsnitt 4.4.1. Den velges empirisk. For datasettene analysert i oppgaven, både fra kunstige og reelle data, viste en avstand mellom punktene tilsvarende $L = \frac{l_{i+1}}{l_i} = 2^{\frac{1}{8}}$ seg å være gunstig.

Den siste parameteren vi må gi en verdi er lengden av skaleringsregionen. Denne parameteren er omtalt i avsnitt 4.1.4. I utgangspunktet ønskes en lengde av skaleringsregionen tilsvarende $\Delta l = \frac{l_1}{l_0} = 4$ eller større. Hvilken lengde som er mulig å finne varierer imidlertid mellom de enkelte tidsserier. Den er ofte kortere for de reelle dataene slik at vi må slakke av på kravene for å kunne beregne noe dimensjonsestimat. Figur 11.1 viser hvordan lengden av skaleringsregionen er valgt for to av tidsseriene registrert under epileptisk anfall. Når lengden av skaleringsregionen er kortere enn $\Delta l = 4$, anses dimensjonsestimatene som



Figur 11.1: Plottet viser valg av skaleringsregion for tidsserien fra MEG og for tidsserie fra EKOg2 kanal 1 registrert under epileptisk anfall. For EKOg2 velges lengden av skaleringsregionen lik $\Delta l = \frac{l_1}{l_0} = 4$ og for MEG lik $\Delta l = \frac{l_1}{l_0} = 2$. Skaleringsregionene er markert.

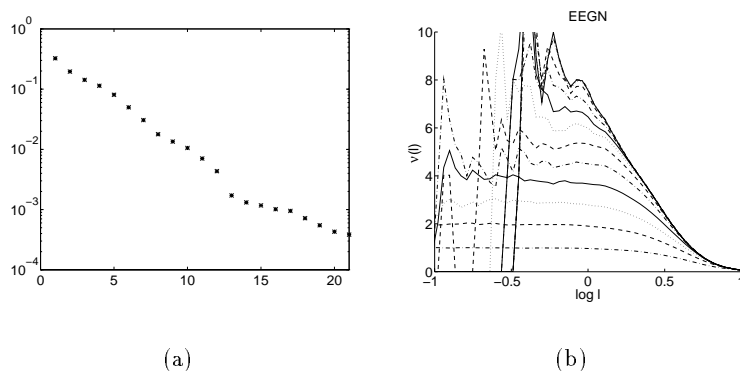
upålitelige. For enkelte tidsserier må vi slakke kravet om lengden av skaleringsregionen. Vi beregner likevel et dimensjonsestimat for disse tidsseriene. Selv upålitelige dimensjonsestimater er en karakteristisk egenskap som kan benyttes til å sammenligne forskjellige signaler.

11.2 Dimensjonsestimering fra normal hjerneaktivitet

Tidligere rapporterte dimensjonsestimater fra normal hjerneaktivitet har variert med tilstand av hjernen samt fra publikasjon til publikasjon. Dimensjonsestimatene har variert fra 5-6 under alfa-aktivitet til ingen metning for beta-aktivitet. I avsnitt 11.2.1 utføres dimensjonsestimering fra normal hjerneaktivitet fra datasettet EEGN. Avsnitt 11.2.2 gir resultatene fra dimensjonsestimering fra beta-aktiviteten registrert ved MEG.

11.2.1 Dimensjonsestimering fra normal hjerneaktivitet i EEG

For en tidsserie av lengde $N = 3000$ fra EEGN rekonstrueres faserommet med SSA ved en vinduslengde lik gjennomsnittlig periode i signalet, ($w = 20$). Initiell imbeddingsdimensjon er nå $p = 21$. Ved å se på logaritmen av singularverdiene til den initielle imbeddingen forsøker vi å redusere imbeddingsdimensjonen ved å kaste de retninger i rommet som representerer støy. Figur 11.2 a) viser logaritmen til singularverdiene. For singularverdiene

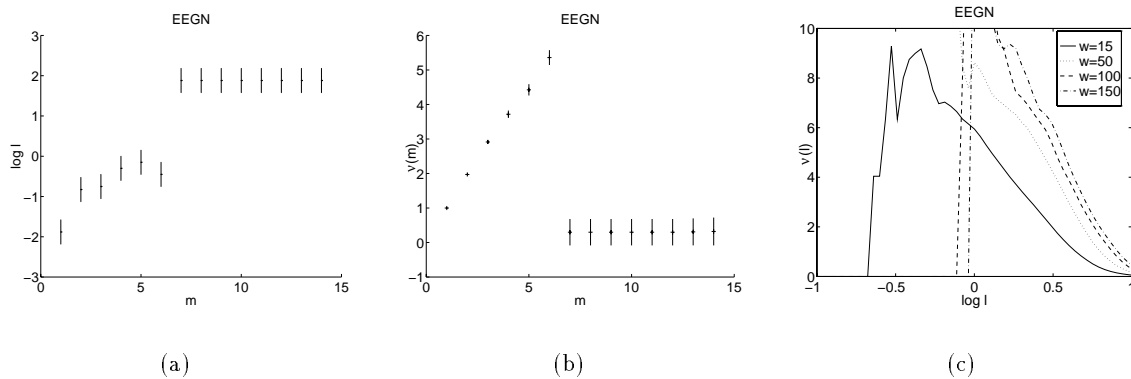


Figur 11.2: a) Logaritmen av singularverdiene til en initiell imbedding hvor $m = 21$. Indeksen til singularverdiene er gitt langs førsteaksen. b) Den deriverte av korrelasjonsintegralet fra rekonstruksjon ved SSA hvor $w = 20$. Stigningstallet øker med økende imbeddingsdimensjon.

med indeks høyere enn 13 flater verdiene ut. Det bør derfor være unødvendig å beregne korrelasjonsintegralet for høyere imbeddingsdimensjon enn $m = 14$. For dette signalet er det ikke visuelt mulig å skille korrelasjonsintegralene for $m > 11$, se figur 11.2 b). Selv om korrelasjonsintegralet konvergerer med økende imbeddingsdimensjon, er det ikke noen synlig skaleringsregion ved de høyeste imbeddingsdimensjoner skaleringen $C(l) \propto l^\nu$ tilfredsstilles.

Vi kan følge fremgangsmåten for beregning av dimensjonsestimat fra korrelasjonsintegralet gitt i avsnitt 4.1.5. Lengden av skaleringsregionen velges lik $\Delta l = \frac{l}{l_0} = 4$. Regionen hvor variasjonene i skaleringsregionen minimeres er da ved store l når imbeddingsdimensjonen er høy, se figur 11.2.1 a). Dimensjonsestimatene blir derfor lave for store m , nærmere bestemt $\nu = 0.3$, se figur 11.2.1 b). I plottet vises også standardavviket til dimensjonsestimatene over skaleringsregionen. For $m = 7$ er variasjonene på over 100%.

For å undersøke om liten eller stor vinduslengde er årsaken til at det ikke fantes noe skaleringsintervall, ble faserommet også rekonstruert ved SSA hvor vinduslengden varierte fra



Figur 11.3: Dimensjonsestimering for tidsserie fra EEGN. a) Intervallet for $\log l$ hvor dimensjonsestimatene er beregnet over. For store m er dimensjonsestimatene beregnet over store verdier for l . b) Dimensjonsestimater beregnet for økende m . c) Den deriverte av korrelasjonsintegralet for rekonstruksjon med SSA hvor $m = 11$ og vinduslengdene er som angitt i plottet. Maksimum av stigningstallet blir høyere jo lengre vinduslengden er.

10 til 200. For $m = 11$ er det ikke synlig forskjell mellom korrelasjonsintegralene uansett vinduslengde. Figur 11.2.1 c) viser den deriverte av korrelasjonsintegralet for noen av vinduslengdene. Maksimumsverdien av stigningstallet blir høyere jo lengre vinduslengden er. Valg av parameterverdier er ikke årsaken til at det ikke finnes noen skaleringsregion. Uansett vinduslengde forkastes dimensjonsestimatene.

Dimensjonsestimering ble også utført på forskjellige andre tidsserier fra samme datasett hvor lengden av tidsseriene er $N = 3000$ og $N = 30000$. Plottene for de andre korte tidsseriene er ikke vist da resultatene fra dimensjonsestimeringen var tilsvarende som vist ovenfor. Faserommet ble for enkelte av tidsseriene rekonstruert ved MOD istedenfor SSA fordi denne teknikken er mindre plass- og tidkrevende. Rekonstruering ved SSA er for eksempel ikke mulig å utføre med Matlab-scriptet¹ som er anvendt, for en tidsserie av lengde $N = 30000$. Når faserommet ble rekonstruert ved MOD konvergerer ikke korrelasjonsintegralet med økende imbeddingsdimensjon.

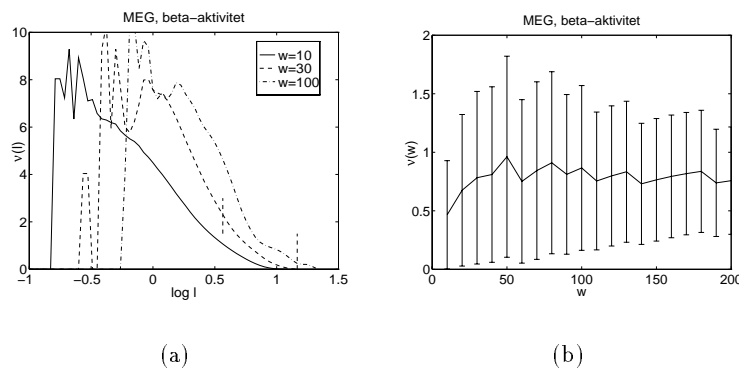
Konklusjonen er at det ikke er mulig å estimere noe pålitelig dimensjonsestimat fra dette datasettet.

11.2.2 Dimensjonsestimering fra beta-aktivitet i MEG

Fra datasettet MEG ble dimensjonsestimering utført på en tidsserie av lengde $N = 3100$ hvor signalet viser beta-aktivitet. Figur 11.4 a) viser de deriverte av korrelasjonsintegralet fra forskjellige vinduslengder for rekonstruksjonen. Valg av skaleringsregion er markert for $w = 30$. Dimensjonsestimatene beregnes ved store verdier for l siden det ikke finnes noen skaleringsregion hvor skaleringen $C(l) \propto l^\nu$ oppfylles. Dimensjonsestimatene blir derfor lave. Figur 11.4 viser dimensjonsestimatene fra rekonstruering ved SSA hvor imbeddings-

¹Matlab-scriptet som er anvendt for rekonstruering ved SSA er gitt i vedlegg E

dimensjonen er $m = 9$ og vinduslengden varierer fra 10 til 200. Uavhengig av vinduslengde forkastes dimensjonsestimatene på grunn av store variasjoner i skaleringsregionen.



Figur 11.4: Dimensjonsestimering for beta-aktivitet i MEG. a) De deriverte av korrelasjonsintegralene fra rekonstruksjon ved SSA ved $m = 9$ og vinduslengde som angitt i plottet. b) Dimensjonsestimatene beregnet fra rekonstruksjon av faserommet ved SSA ved $m = 9$. De vertikale linjene viser standardavviket til dimensjonsestimatene over skaleringsregionen.

11.2.3 Oppsummering

Selv om det statistiske grunnlaget er noe tynt med tidsserier fra kun to datasett, synes det som om det ikke er mulig å beregne pålitelige dimensjonsestimater for EEG- eller MEG-data registrert under normal hjerneaktivitet. Signalene kan antas å stamme fra høyere-dimensjonale systemer, deterministiske eller stokastiske.

11.3 Dimensjonsestimering av epileptogen hjerneaktivitet

Som nevnt i kapittel 2 er det tidligere rapportert lave dimensjonsestimater for hjernesignaler registrert under epileptisk anfall. Som et eksempel på dimensjonsestimering av hjernesignaler registrert under epileptogen hjerneaktivitet skal vi se på simultane tidsrekker fra kanal 1 til 4 fra datasettet EKoG2. Resultatene fra dimensjonsestimering av tidsrekker fra epileptogen hjerneaktivitet registrert i de andre datasettene, EKoG1, MEG og EEGE vil bli gitt til slutt.

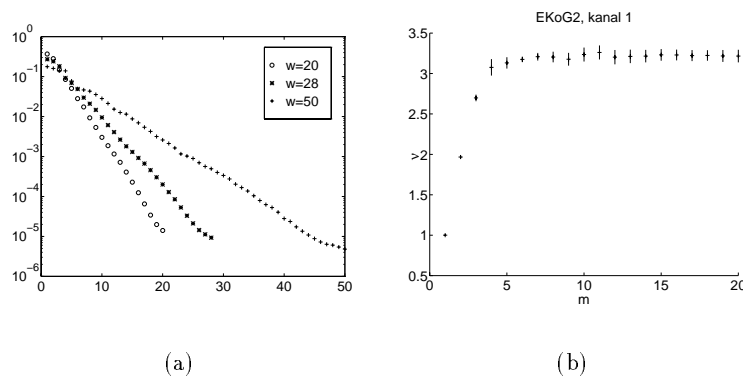
11.3.1 EKoG2

Tidsseriene fra EKoG2 under epileptisk anfall ble klassifisert som stasjonært i avsnitt 10.3. Tidsseriene atskiller seg fra tidsseriene fra de andre datasettene registrert under epileptisk anfall ved at det i disse tidsseriene finnes både sykler og pseudosykluser hvor pseudosykluser består av 3 raske svingninger (sykler). De andre tidsseriene inneholdt ingen pseudosykluser. Ved rekonstruksjon av faserommet vet vi nå ikke hvilken av de to verdiene for perio-

dene i signalet som er optimal. Dimensjonsestimeringen utføres derfor for et intervall av vinduslengder for å se hvilken vinduslengde som er best egnet. Fremgangsmåten er som ved dimensjonsestimering av tidsserier registrert under normal hjerneaktivitet.

Valg av imbeddingsdimensjon

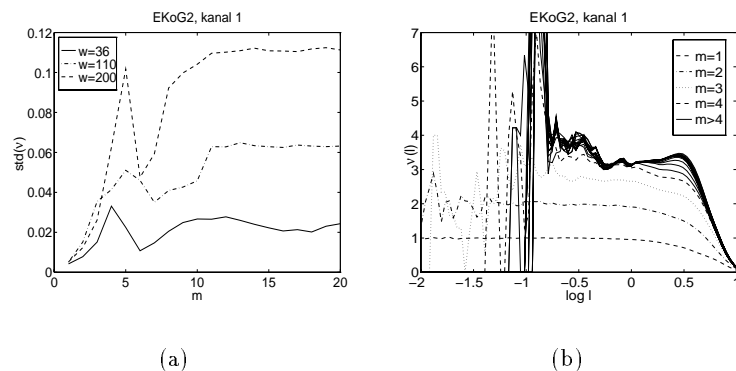
Faserommet rekonstrueres ved SSA med vinduslengde lik gjennomsnittlig periode mellom de raske svingningene i signalet. Den korte periodetiden ble valgt fremfor den lange fordi formålet i første omgang kun er å finne en liten verdi for imbeddingsdimensjonen. Imbeddingsdimensjonen søkes redusert ved hjelp av singularverdiene til matrisen som representerer den rekonstruerte mengden. Det er større variasjon mellom singularverdiene når vinduslengden er kort enn når den er lang. De siste singularverdiene gir imidlertid ikke et flatt spekter, se figur 11.5 a). Imbeddingsdimensjonen reduseres derfor ikke ut fra singularverdiene. Siden vi ønsker å undersøke om signalet er fra et lavdimensjonalt system, settes den øvre grensen for imbeddingsdimensjonen lik $m_{maks} = 20$.



Figur 11.5: Fra datasettet EKG2 kanal 1: a) Singularverdier fra rekonstruksjon ved SSA hvor vinduslengdene er som angitt i plottet. b) Dimensjonsestimater som en funksjon av imbeddingsdimensjon fra rekonstruksjon av faserommet hvor $w = 36$.

For å se om det er mulig å redusere imbeddingsdimensjonen ytterligere, beregner vi dimensjonsestimatene ved økende imbeddingsdimensjon, se figur 11.5 b). Vi lar imbeddingsdimensjonen øke til dimensjonsestimatene konvergerer. Vi kan da finne den imbeddingsdimensjon som minimerer variasjonene i skaleringsregionen, se figur 11.6 a).

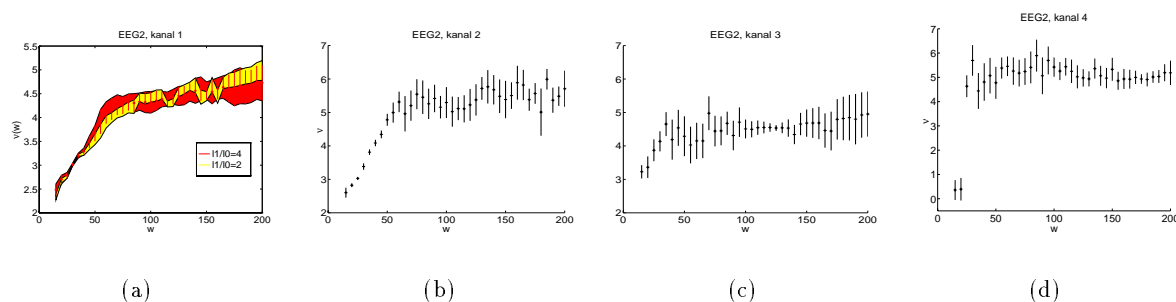
Uavhengig av vinduslengden gir dette tilnærmet samme imbeddingsdimensjon, dvs. $m = 6-7$. For å være sikker på at vi har konvergens med hensyn på økende imbeddingsdimensjon, er det valgt å benytte en noe høyere imbeddingsdimensjon, $m = 9$. Det er da ikke mulig å skille mellom de deriverte av korrelasjonsintegralene visuelt, se figur 11.6 b).



Figur 11.6: Fra datasettet EKoG2 kanal 1: a) Variasjonene i skaleringsregionen for forskjellige vinduslengder. b) Den deriverte av korrelasjonsintegralene kan ikke skilles visuelt når $m > 8$.

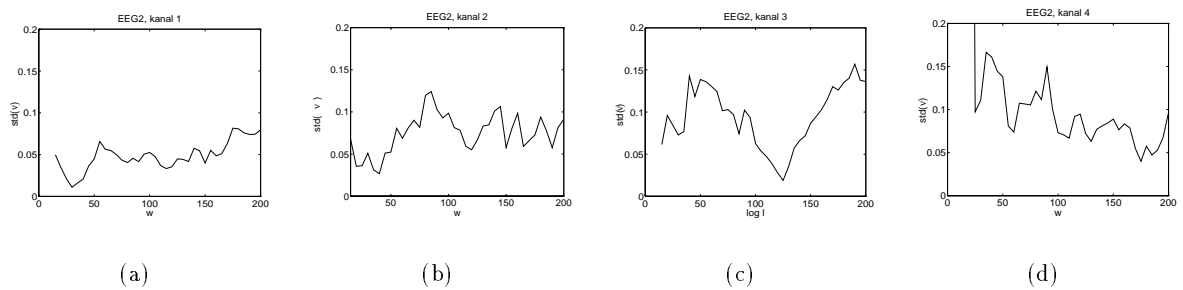
Beregning av dimensjonsestimatene

For beregning av dimensjonsestimatene benyttes fremgangsmetoden gitt i avsnitt 4.1.5. Lengden av skaleringsregionen er valgt empirisk, $\Delta l = \frac{l_1}{l_0} = 4$. For å spare beregningstid, beregner vi korrelasjonsintegralet over kun én verdi for imbeddingsdimensjonen; verdien vi kom frem til ovenfor, $m = 9$.



Figur 11.7: a) Dimensjonsestimater for 1.kanal fra EEG for lengden av skaleringsintervallet tilsvarende $l_1 = l_0 = 4$ og $l_1 = 2l_0$. For skaleringsintervallet av lengde $l_1 = 4l_0$ gir vinduslengden $w = 30$ minst variasjon i skaleringsintervallet. Figur b), c) og d) viser dimensjonsestimatene for kanal 2, 3 og 4 henholdsvis, hvor lengden av skaleringsintervallet tilsvarende $l_1 = 4l_0$.

Dimensjonsestimatene konvergerer med økende vinduslengde, men samtidig øker variasjonene i skaleringsregionen. Som nevnt velges optimal vinduslengde som den vinduslengde som minimerer variasjonene i skaleringsregionen. Figur 11.8 viser standardavviket av stigningstallet til korrelasjonsintegralet over skaleringsregionen. Plottene viser at optimal vinduslengde er forskjellig for de forskjellige kanalene i datasettet. For kanal 1 og 2 er optimal vinduslengde nær gjennomsnittlig periode i signalet, mens den for kanal 3 er nær gjennomsnittlig periode for pseudosyklusene i signalet. For kanal 4 kan det vanskelig plukkes ut en vinduslengde som er optimal fremfor andre vinduslengder. Optimal vinduslengde og dimensjonsestimater for de fire tidsseriene er gitt i tabell 11.1.



Figur 11.8: Standardavviket av stigningstallet over skaleringsintervallet er plottet mot økende vinduslengde for den mest periodiske delen av kanal 1,2,3 og 4 fra EKO_{G2}. Hvilken vinduslengde som gir minst usikkerhet i dimensjonsestimatene er forskjellig for de fire kanalene.

	τ_R	τ_P	w_{opt}	ν	std
Kanal 1	36	129	30	3.0	1%
Kanal 2	38	100	25	3.0	1%
Kanal 3	32	120	125	4.5	2%
Kanal 4	32	–	100-200	5.1	4-10%

Tabell 11.1: Optimal vinduslengde og dimensjonsestimater for EKO_{G2}. Første verdien for τ_R er her perioden for svingningene i signalet, mens andre verdi er gjennomsnittlig periode for pseudosykklusen i signalet. w er vinduslengden som dimensjonsestimatet ν er beregnet ved. std er standardavviket av stigningstallet ν over et skaleringsintervall av lengde $\Delta l = \frac{l_1}{l_0} = 4$.

Pålitelighet

Med hensyn på pålitelighet av de beregnede dimensjonsestimater kan vi si:

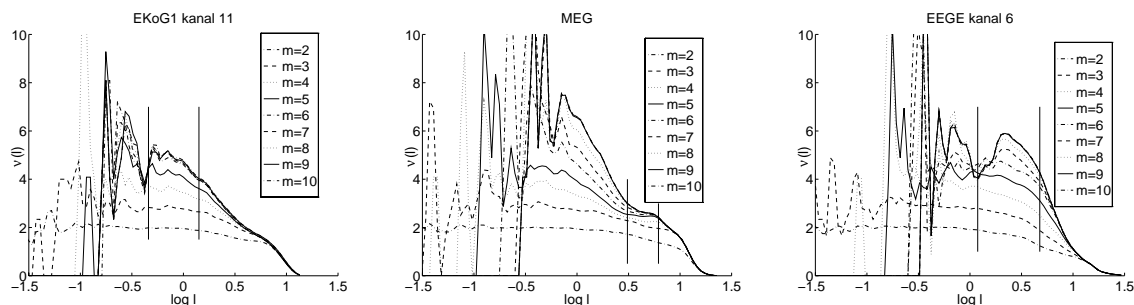
- Lengden av skaleringsregionen er $\Delta l = \frac{l_1}{l_0} = 4$. Variasjonene i skaleringsregionen er 1 til 2% for kanal 1, 2 og 3 ved optimal vinduslengde. Dette anses som liten variasjon. Variasjonene for kanal 4 er innenfor 10% som var kast-kriteriet.
- Lengden av tidsseriene er $N = 3350$. Vi benytter kriteriet om pålitelighet av dimensjonsestimatet i forhold til antallet punkter i tidsserien gitt i kapittel 4. Dimensjonsestimatet bør da tilfredsstillende $\text{int}(\nu) < 4$. Dette er tilfredsstillende for kanal 1 og 2. Dimensjonsestimatene for kanal 3 og 4 derimot forkastes.

Oppsummering

Vi har i dette avsnittet sett for datasettet EKoG2 at optimal vinduslengde og dimensjonsestimater kan være forskjellig for de forskjellige kanalene fra ett og samme datasett. Dimensjonsestimatene fra kanal 1 og 2 ble godkjent, mens dimensjonsestimatene fra kanal 3 og 4 ble forkastet.

11.3.2 EKoG1, MEG og EEGE

Tidsseriene fra epileptogen hjerneaktivitet fra datasettene EKoG1, EEGE og MEG atskiller seg fra tidsseriene fra EKoG2 ved at de er ustasjonære i følge en eller flere av stasjonaritets-testene som ble anvendt i kapittel 10. Tidsseriene fra EKoG1 er ustasjonære ved at perioden øker lineært (fra 30 til $60t_s$), tidsserien fra MEG ved at middelverdien drifter og tidsserien fra EEGE er ustasjonær både med hensyn på periode og gjennomsnittlig middelverdi. Tidsseriene fra EEGE og MEG er også ustasjonære ifølge rekurrensplottene.



Figur 11.9: Den deriverte av korrelasjonsintegralet for tidsserier fra epileptogen hjerneaktivitet. Faserommet er rekonstruert med SSA ved a) $w = 36$ for EKoG1, b) $w = 100$ for MEG og c) $w = 140$ for EEGE. Valg av skaleringsregion er markert i hvert av plottene.

Vi utfører først en initiell imbedding av faserommet ved SSA hvor vinduslengden velges lik gjennomsnittlig periode i signalet. De siste singularverdiene til tidsseriene gir et flatt spekter. Imidlertid er antall singularverdier som er over støynivået i signalene mer enn 20 som jo er maksimumsverdien vi setter for imbeddingsdimensjonen. Korrelasjonsintegralene konvergerer imidlertid ved lavere verdier. Ved å velge $m = 9$ for EKoG1, $m = 10$ for MEG og $m = 11$ for EEGE er vi sikret konvergens i korrelasjonsintegralene, se plottene i figur 11.9. Plottene viser den deriverte av korrelasjonsintegralene når vinduslengden er optimal. Valg av skaleringsregion er markert i hvert av plottene. I utgangspunktet ønskes en så lang skaleringsregion som mulig, helst $\Delta l = 4$. Imidlertid må vi fire på kravene. For EKoG1 velges $\Delta l = 3$, for MEG velges $\Delta l = 2$ og for EEGE velges $\Delta l = 4$. Velges en kortere lengde av skaleringsregionen for EEGE, lokaliseres skaleringsregionen automatisk til store l hvor stigningstallet er nære 0.

Datasett	Kanal	τ_R	w	ν	std
EKoG1	1	51	60	4.7	9%
	2	50	50	4.1	5%
	3	50	35	4.6	5%
	4	48	45	4.9	5%
	5	50	30	4.9	10%
	6	50	35	5.2	12%
	7	50	70	4.5	11%
	8	–	50	3.6	6%
	9	49	50	5	8%
	10	–	10	0.3	92%
	11	50	36	4.9	7%
MEG		100	100	2.7	6%
EEGE	6	30/200	140	5.8	9%

Tabell 11.2: Dimensjonsestimater for tidsserier fra epileptogen hjerneaktivitet fra datasettene EKoG1, EEGE og MEG. For kanal 8 og 10 er det ikke beregnet gjennomsnittlig periode. Verdiene til τ_R er gjennomsnittlig periode i signalet. For EEGE er henholdsvis perioden syklene og for pseudosyklene oppgitt. Verdiene for w er vinduslengden hvor dimensjonsestimatet ν er beregnet ved, std er standardavviket av ν over skaleringsregionen. Lengden av skaleringsregionen er for EKoG1 $\Delta l = \frac{l_1}{l_0} = 3$, for EEGE er $\Delta l = 4$ og for MEG er $\Delta l = 2$. Enhetene for w og τ_R er antall samplingsintervaller. (Tabellen er nærmere omtalt i teksten.)

Tabell 11.2 viser dimensjonsestimatene fra tidsseriene fra de tre datasettene. For EKoG1 er det ikke beregnet gjennomsnittlig periode i signalet for kanal 8 og 10. For kanal 10 var det ikke mulig å beregne noe dimensjonsestimat. For de andre kanalene ser vi av tabellen at det for EKoG1 er

- godt samsvar mellom optimal vinduslengde og gjennomsnittlig periode i signalene. Optimal vinduslengde har et gjennomsnitt på 46 samplingsintervaller med et standardavvik på 30% mot 50 samplingsintervaller i snitt for gjennomsnittlig periode.
- liten spredning av dimensjonsestimatene for de forskjellige kanalene (kun 7%).

Ved beregning av dimensjonsestimater fra MEG gir et langt intervall av vinduslengder om

$w = 100$ tilnærmet samme dimensjonsestimater og standardavvik av skaleringsregionen. Det er da et helt intervall av “optimale” vinduslengder for denne tidsserien i forbindelse med dimensjonsestimering.

Tidsserien fra EEGE inneholder både sykler av periode $\tau_R = 30$ og pseudosykluser av periode $\tau_R = 200$. Den optimale vinduslengden har størst nærhet til perioden for pseudosyklusen.

Pålitelighet

Når vi ser på påliteligheten av beregnede dimensjonsestimater ønsker vi en lengde av skaleringsregionen større eller lik $\Delta l = 4$. Alle dimensjonsresultatene i tabell 11.2 foruten dimensjonsestimatet fra EEGE er da upålitelige. Å teste de forkastede dimensjonsestimater ved andre kriterier for pålitelighet er unødvendig. Dimensjonsestimatet fra EEGE testes ved T_{sonis_N} -kriteriet. Siden lengden av tidsserien er $N = 5000$ punkter, bør dimensjonsestimatet tilfredsstillende $\nu < 4.3$. Dette er ikke tilfredsstillende. Alle dimensjonsestimater fra epileptogen hjerneaktivitet fra EKoG1, MEG og EEGE er dermed forkastet.

11.4 Oppsummering

Dette kapitlet har tatt for seg dimensjonsestimering fra tidsserier fra normal og epileptogen hjerneaktivitet registrert ved EEG, EKoG og MEG. I den forbindelse har vi sett på sammenhengen mellom optimal vinduslengde og gjennomsnittlig periode i signalet. Enkelte signaler kan inneholde sykler og pseudosykluser slik at flere gjennomsnittlige periodetider beregnes. For de undersøkte datasettene er det et godt samsvar mellom optimal vinduslengde og en av periodetidene i signalet.

For tidsseriene fra normal hjerneaktivitet fantes det ikke noen skaleringsregion i korrelasjonsintegralet som gjorde det mulig å estimere pålitelige dimensjonsestimater.

For tidsseriene registrert under epileptogen hjerneaktivitet er det mulig å beregne lave dimensjonsestimater hvis vi lar lengden av skaleringsregionen avhenge av dataene. Dette er en egenskap som skiller signalene fra epileptogen hjerneaktivitet fra signalene fra normal hjerneaktivitet.

Når det gjelder dimensjonsestimater fra simultane måleserier fra ett epileptisk anfall, ser vi fra EKoG2 at dimensjonsestimatene ikke nødvendigvis er samsvarende.

Av de beregnede dimensjonsestimater ble de godkjent for EKoG2 kanal 1 og 2 mens de øvrige ble forkastet. Tidsseriene fra de øvrige datasettene er imidlertid ustasjonære.

Kapittel 12

Håndtering og dimensjonsestimering av ustasjonære signaler

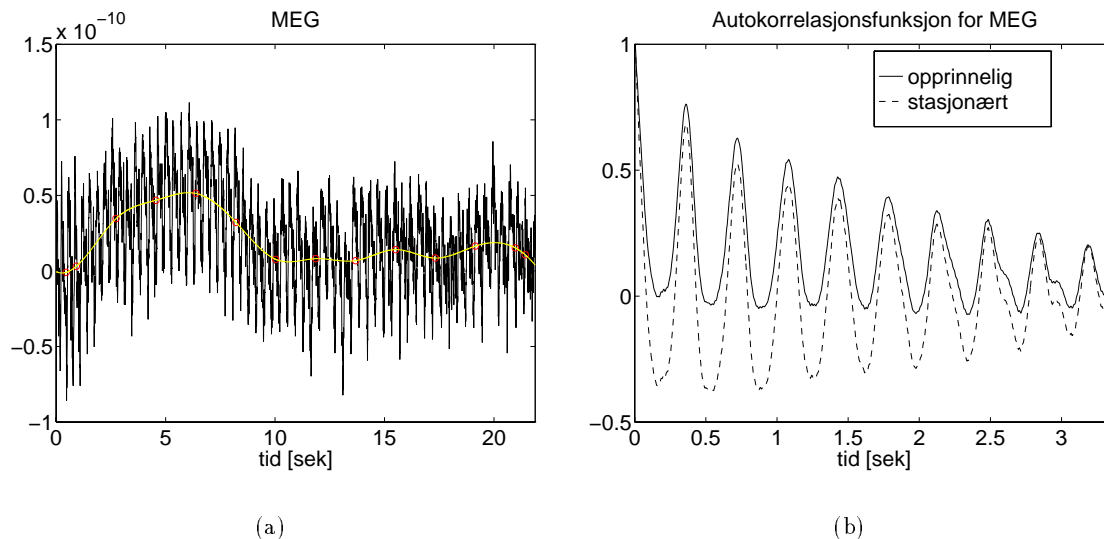
Stasjonaritet er ett av kravene en tidsserie må oppfylle før estimering av korrelasjonsdimensjonen. Med stasjonaritet menes vanligvis at de statistiske egenskapene til signalet ikke endres over tid. Avsnitt 12.1 ser på hvordan ustasjonaritet lik drift i middelvei kan fjernes fra signalet. Avsnitt 12.2 tar for seg en metode for å fjerne ustasjonaritet i signalet som skyldes måten dataene registreres på. Ustasjonaritet i signalet må ikke nødvendigvis skyldes ytre påvirkninger, men kan også skyldes endringer i systemet. Avsnitt 12.3 tar for seg hvordan drift i periode kan fjernes fra signalet. I disse avsnittene er ikke metoden for å korrigere for ustasjonaritet det sentrale, men hvordan denne korrigeringen for ustasjonaritet innvirker på dimensjonsestimeringen. Dette gjøres ved å sammenlikne korrelasjonsintegralene og dimensjonsestimatene for stasjonære og ustasjonære signaler.

Imidlertid er det ikke alle former for ustasjonaritet som vi ønsker eller kan korrigere for. For eksempel kan ustasjonaritet skyldes at systemet går fra en tilstand til en annen. I avsnitt 12.5 og 12.4 skal vi se på dimensjonsestimering for signaler som er registrert i overgangen fra normal til epileptogen hjerneaktivitet og hvordan dimensjonsestimering kan påvise endringer i signalet. Avsnitt 12.4 tar for seg dimensjonsestimering ved PD2, en metode presentert i kapittel 6. PD2 er utviklet for dimensjonsestimering av ustasjonære signaler slik at den kan anvendes på hele signalet under ett. I avsnitt 12.5 anvendes Grassberger-Procaccia-algoritmen til beregning av "glidende dimensjonsestimater". Grassberger-Procaccia-algoritmen krever som kjent et stasjonært signal. Imidlertid kan vi anta stasjonaritet for kortere tidsintervaller slik at dimensjonsestimering kan utføres på disse delene. Dimensjonsestimatene vi finner for enkeltdelene forteller oss da hvordan dimensjonen endres med tiden.

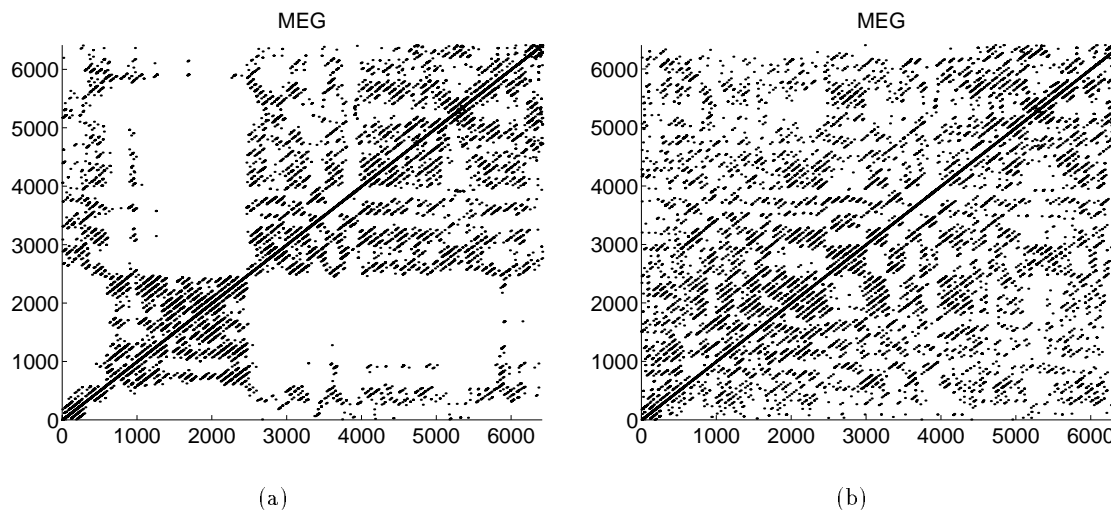
12.1 Reduksjon av drift i middelvei av et signal

Som nevnt er drift i middelvei en form for ustasjonaritet i signalet. En metode for å fjerne denne driften når middelveien øker eller avtar lineært, er å la det nye signalet

være differansen mellom etterfølgende målinger. Hvis signalet inneholder støy, er imidlertid denne metoden støyforsterkende. Isteden kan vi subtrahere en linje som tilsvarer drift i middelverdi av signalet. I dette avsnittet fjerner vi drift i middelverdi av signalet når denne driften er ulineær.



Figur 12.1: a) Under anfall drifter MEG-signalet. Ved å subtrahere linjen avmerket i plottet fra signalet kan vi korrigere for denne ustasjonariteten. b) Etter at kurven er subtrahert, viser autokorrelasjonsfunksjonen større periodisitet.



Figur 12.2: a) Rekurrensplottet av MEG-signal under epileptisk anfall viser en endring i signalet som skyldes at signalet drifter, se figur 12.1. I b) er signalet gjort "stasjonært" ved at en kurve er trukket fra signalet. I begge plottene er parametrene for rekonstrueringen av faserommet ved MOD valgt lik $m = 7$ og $\tau = 15$. $M = 1500$ referansepunkter benyttet i begge plottene.

I datasettet MEG ser vi i figur 12.1 a) hvordan middelveidien av signalet drifter i målingene registrert under epileptisk anfall. Dette kan vi se som en brå endring i rekurrensplottene for signalet, se figur 12.2 a). Driften i signalet tilsvarer endringene i et glidende gjennomsnitt av signalet. Denne er for MEG-dataene estimert ved kubisk spline-interpolasjon og -ekstrapolasjon gjennom gjennomsnittsverdier av signalet. Driften er da gitt som en kurve hvor gjennomsnittsverdiene er punkter på denne kurven. De indre punktene er beregnet for ikke-overlappende deler av signalet. De ytre er beregnet for overlappende deler av signalet for å få en god ekstrapolasjon av kurven i endepunktene. Antall punkter på kurven er valgt empirisk. Forsøk viste at det hadde liten betydning for den estimerte driften å velge punktene flere og tettere. En bedre og enklere metode for å finne driften ville imidlertid vært å beregne et glidende gjennomsnitt direkte fra signalet. For dimensjonsestimeringen har det imidlertid liten betydning.

Når driften er estimert, subtraheres denne fra signalet. Dette tilsvarer en høypassfiltrering av signalet hvor den langsomme svingningen i signalet fjernes. Egenskaper for det nye signalet er at middelveidien ikke drifter og at signalet synes å være stasjonært i følge rekurrensplottet, se figur 12.2 b). Det nye signalet synes også, i følge autokorrelasjonsfunksjonen i figur 12.1 b), å ha sterkere periodisitet enn det opprinnelige.

12.1.1 Dimensjonsestimering

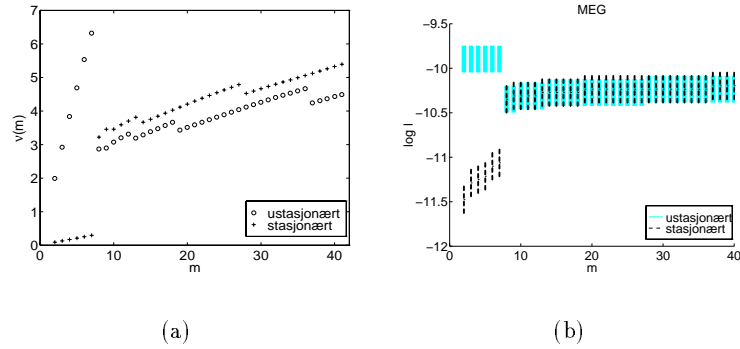
For å se hva korrigeringen av ustasjonaritet har å si for dimensjonsestimeringen, sammenligner vi dimensjonsestimatene for stasjonært og ustasjonært signal, se figur 12.1.1 a). Faserommet er her rekonstruert ved MOD fordi rekonstruksjon ved SSA synes å endre dimensjonsestimatet for dette signalet, se kapittel 13. Av plottet ser vi at dimensjonsestimatene er lavere for det stasjonære signalet enn for det opprinnelige. Variasjonene i skaleringsregionen har for det opprinnelige signalet et lokalt minimum ved $m = 11$. Dimensjonsestimatene er ved denne imbeddingsdimensjonen henholdsvis

$$\begin{array}{ll} \text{ustasjonært signal} & \text{stasjonært signal} \\ \nu = 3.6 & \nu = 3.2 \end{array}$$

Skaleringsregionen velges lik det intervallet for $\log l$ som minimerer variasjonene i den derivate av korrelasjonsintegralet. Dimensjonsestimatene for de to signaler må derfor ikke nødvendigvis beregnes over samme skaleringsregion. Imidlertid ser vi i figur 12.1.1 b) at dette er tilfelle når $m > 6$.

12.1.2 Oppsummering

Ved å subtrahere en kurve tilsvarende driften i signalet fikk vi for MEG et signal som synes å være stasjonært ifølge rekurrensplottene og som synes ifølge autokorrelasjonsfunksjonen å være mer periodisk enn det opprinnelige. I dette tilfellet avtok dimensjonsestimatene med 11% for det stasjonære signalet. For å se om det gjelder generelt at signaler som er ustasjonære ved drift i middelveidie har høyere dimensjon enn stasjonære, trengs det mer uttesting. Dimensjonsestimatene beregnet i dette avsnittet vil ikke anses som svært pålitelige da lengden av skaleringsregionen er kort ($\frac{l}{l_0} = 2$) og variasjonene i skaleringsregionen er store (minimum på 10% ved $m = 11$).



Figur 12.3: a) Dimensjonsestimater beregnet for stasjonært og ustasjonært signal. Vi ser at dimensjonsestimatene er lavere for det stasjonære signalet enn for det ustasjonære. b) Plottet viser at dimensjonsestimatene for ustasjonært og stasjonært signal ble beregnet over tilnærmet samme skaleringsregionen når $m > 6$. Faserommet er her rekonstruert ved MOD med $\tau = 10$ og $m = 2, 3, \dots, 41$. Dette gir vinduslengdene $10, 20, \dots, 400$. Dimensjonsestimatene er beregnet over et skaleringsintervall av lengde $l_1 = 2l_0$.

12.2 Differanse mellom kanaler

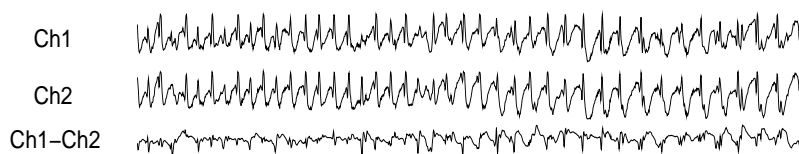
Ved måling av EEG-signalet benyttes som nevnt i kapittel 2 en referanseelektrode sentralt plassert på hodet. Signalet som registreres er differansen mellom det elektriske potensiale ved referanse-elektroden og ved måle-elektroden. Imidlertid er det uvisst hvor stort bidraget fra referanseelektroden er tilsignalet. Siden vi benytter samme referanseelektrode for alle måle-elektroden, er bidraget fra referanse-elektroden det samme i alle kanaler. En metode for å fjerne bidraget fra referanse-elektroden, er å lage et nytt signal som er en differanse mellom forskjellige kanaler¹. Dette signalet kalles er referansefritt. Avstanden mellom måleelektroden må antas å være liten i forhold til avstanden fra måleelektroden til referanseelektroden, slik at bidraget fra referanseelektroden ikke er tidsforskjøvet mellom de forskjellige kanalene.

Det er i denne sammenheng interessant å vite hva bidraget fra referanseelektroden har å si for dimensjonsestimeringen. I dette avsnittet ser vi på om det er noen sammenheng mellom optimale parametre for rekonstruksjonen av faserommet fra et referansefritt signal og optimale parametre for rekonstruksjon av faserommet fra de opprinnelige signalene. En annen problemstilling, er om det er en sammenheng mellom dimensjonsestimatet for det referansefrie signalet og dimensjonsestimatene for de opprinnelige signalene.

Et problem som kan tenkes å oppstå når vi lager et referansefritt signal, er om måleelektroden er tett plassert i stor avstand fra referanseelektroden og det elektriske potensialet er tilnærmet det samme ved de to måleelektroden. En differanse mellom disse måleelektroden ville da representere støyen i signalene. Som et eksempel kan vi se på det referansefrie signalet i figur 12.4. Plottet viser en sekvens fra to kanaler fra datasettet EKoG1 samt differansen mellom dem. Det er ikke undersøkt om dette signalet har likheter med støy, men vi ser at den geometriske struktur i signalet er endret ved at syklusene i det nye signalet

¹G.Mayer-Kress, Würzburg, september 1994

er mindre regelmessige i det nye signalet enn i de opprinnelige.



Figur 12.4: Første og andre kanal fra EKO_{G1}, Ch_1 og Ch_2 henholdsvis, samt referansefritt signal ved differansen mellom dem.

12.2.1 Eksempler med EEG

For at de referansefrie signalene ikke skal representere støyen i signalene, lages de referansefrie signalene i dette avsnittet fra et datasett hvor forskjellen mellom kanalene er så stor at kanalene lett kan skilles visuelt. Datasettet EKO_{G2} er presentert i avsnitt 10.1. Fra dette datasettet plukkes perioden fra 12100 til 15450 ut som tilnærmet stasjonær ved hjelp av rekurrensplott. Når vi lager referansefrie signaler, må vi bestemme hvilke kanaler vi ønsker skal bidra og hvor mye disse skal bidra til det referansefrie signalet. Fra datasettet EKO_{G2} er følgende lineær-kombinasjoner valgt

- $S_1 = Ch_1 - Ch_2$
- $S_2 = Ch_1 - \frac{Ch_2 + Ch_3}{2}$
- $S_3 = \frac{Ch_1 + Ch_2}{2} - \frac{Ch_3 + Ch_4}{2}$
- $S_4 = Ch_3 - \frac{Ch_1 + Ch_2}{2}$
- $S_5 = Ch_1 - Ch_5$

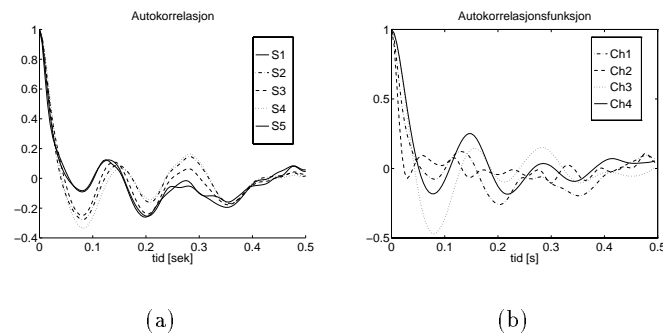
Symbolene S_i står for det referansefrie signalet og Ch_i er signalet i i 'te kanal. Det første av de referansefrie signalene, S_1 , er valgt slik fordi vi i avsnitt 11.3.1 så at optimal vinduslengde var omtrent den samme for Ch_1 og Ch_2 når formålet med rekonstrueringen var dimensjonsestimering. For dette signalet er det interessant å se om optimal vinduslengde er den samme for det referansefrie signalet som for de opprinnelige. Kombinasjonene som gir S_2 og S_3 er vilkårlig valgt. Signalet S_4 er en kombinasjon av de samme kanalene som gir S_2 , men vektleggingen av kanalene er annerledes. For disse to signalene er det interessant å se om vektleggingen påvirker dimensjonsestimatet. Signalet S_5 er en kombinasjon av Ch_1 hvor det er registrert epileptisk aktivitet og av Ch_5 hvor signalet ikke viser tegn til epileptisk hjerneaktivitet. For kanal 5 er det følgelig ikke mulig å gi et endelig dimensjonsestimat.

Visuelt kan de opprinnelige signalene lett skilles fra hverandre, se figur 12.5. De referansefrie signalene blir da også forskjellige avhengig av hvilke kanaler vi kombinerer og av hvordan kanalene vektlegges, se figur 12.5. Ved første blick synes S_1 og S_2 å være svært like, mens S_4 ligner på $-S_3$. Sammenligner vi autokorrelasjonsfunksjonen for de referansefrie signalene



Figur 12.5: De referansefrie signalene S_1, S_2, S_3, S_4 og S_5 som beskrevet i teksten samt de opprinnelige signalene Ch_1, Ch_2, Ch_3 og Ch_4 .

og de opprinnelige signalene, ser vi i figur 12.6 at det er større variasjoner mellom autokorrelasjonsfunksjonen for de opprinnelige enn for de referansefrie. Tilsvarende er det om vi ser på den gjensidige informasjonen. Dette er naturlig siden de referansefrie signalene er lineærkombinasjoner av de opprinnelige. De er derfor mer korrelerte innbyrdes enn de opprinnelige.



Figur 12.6: Autokorrelasjon av a) de referansefrie signalene S_1, S_2, S_3, S_4 og S_5 samt i b) de opprinnelige signalene, kanal 1 til 4 av EKG_2 .

12.2.2 Dimensjonsestimering av referansefrie signaler

I dette avsnittet ser vi på om det er noen sammenheng mellom dimensjonsestimatene fra de referansefrie signalene og de opprinnelige signalene. For de forskjellige referansefrie signalene vi har laget, rekonstrueres faserommet ved SSA med imbeddingsdimensjonen $m = 9$ og økende vinduslengde.

For hvert signal finner vi den rekonstruksjon som minimerer variasjonene i en skaleringsregion av lengde $\frac{L}{l_0}$, og lar dimensjonsestimatet fra signalet være gjennomsnittlig stigningstall over denne regionen. Dimensjonsestimatene for referansefrie og opprinnelige kanaler er gitt i tabell 12.1.

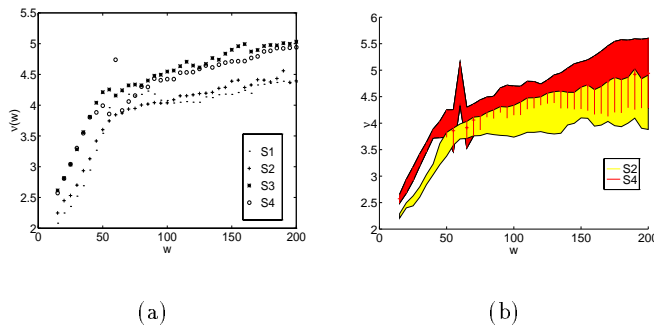
	ν	std	w	τ_R/τ_P
S_1	3.5	3%	50	40/120
S_2	3.1	3%	40	40/120
S_3	3.0	1%	25	40/120
S_4	3.8	2%	40	40/120
S_5	4.0	2%	90	40/120

	ν	std	w	τ_R/τ_P
Ch_1	3.0	1%	30	
Ch_2	3.0	1%	25	38/100
Ch_3	4.5	2%	125	32/120
Ch_4	5.1	4-10%	?	32

Tabell 12.1: Dimensjonsestimatene for de referansefrie signalene beskrevet i teksten når lengden av skaleringsregionen er $\frac{L}{l_0} = 4$. Faserommet er rekonstruert ved SSA hvor $m = 9$ og vinduslengden som oppgitt i tabellen. Verdien for τ_R tilsvarer gjennomsnittlig tid mellom lokale maksimum i signalet, mens verdiene for τ_P tilsvarer gjennomsnittlig periode for pseudosykluser i signalet.

Av tabell 12.1 ser vi at dimensjonsestimatene for de referansefrie signalene varierer mindre enn dimensjonsestimatene for de opprinnelige kanalene. For de referansefrie signalene S_1 til S_4 , er optimal vinduslengde ved små w nær gjennomsnittlig periode i signalet. Imidlertid ser vi for S_1 at optimal vinduslengde ikke er den samme for det referansefrie signalet og de opprinnelige selv om omtrent samme vinduslengde er optimal for de opprinnelige.

Når det gjelder S_2 og S_4 , er disse som nevnt lineærkombinasjoner av de samme signalene, Ch_1, Ch_2 og Ch_3 . Likevel ser vi av tabellen at dimensjonsestimatene for disse er forskjellige. I figur 12.7 ser vi at dimensjonsestimatene for S_4 er høyere enn dimensjonsestimatene for S_2 uavhengig av parametrene for rekonstruksjon.



Figur 12.7: a) Dimensjonsestimatene for de referansefrie signalene stiger raskt for $w < 50$. Vi ser at dimensjonsestimatene for S_3 og S_4 er høyere enn for S_1 og S_2 . b) Selv om S_2 og S_4 er lineær kombinasjoner av de samme kanalene, er dimensjonsestimatene for S_4 høyere enn for S_2 . Ser vi på avviket av dimensjonsestimatene, finner vi for S_4 , men ikke for S_2 , et lokalt minimum ved $w = 80$ og $w = 120$. Den siste vinduslengden er omtrent tilsvarende gjennomsnittlig periode for pseudosykluser i signalet og optimal vinduslengde for kanal 3.

Det siste av de referansefrie signalene, S_5 er som nevnt en differanse mellom Ch_1 hvor

det er registrert epileptisk aktivitet og Ch_5 hvor det ikke er registrert epileptisk aktivitet i signalet. Hvis vi antar at hjernesignalet danner en kaotisk attraktor i faserommet og at attraktoren er forskjellig for forskjellige tilstander av hjernen, vil de opprinnelige signalene Ch_1 og Ch_5 være fra forskjellige attraktorer. En differanse mellom disse signalene vil fjerne eventuell drift fra referanseelektroden, men vil også føre til at struktur i det opprinnelige signalet registrert under epileptisk anfall endres. En lineærkombinasjon av et lavdimensjonalt signal og et høydimensjonalt signal kan sammenlignes med å tilføre det lavdimensjonale signalet farget støy. Vi forventer da, som det ble funnet for S_5 , at det beregnes et høyere dimensjonsestimat for lineærkombinasjonen enn for det lavdimensjonale opprinnelige signalet.

12.2.3 Oppsummering

Sekvensen som ble plukket ut fra datasettet EKoG2 og analysert i dette avsnittet synes å være stasjonært i følge rekurrensplottene. Det er ikke mulig å visuelt se noen drift i signalet som skyldes bidraget fra referanseelektroden.

Referansefrie signaler har også vært laget fra datasettet EKoG1 og fra EEG registrert ekstrakranielt (datasettet EEGE). Sekvensene som ble plukket ut var registrert i overgangen mellom normal og epileptogen hjerneaktivitet. Når faserommet ble rekonstruert ved MOD var det ikke mulig å estimere dimensjonen verken fra det referansefrie eller de opprinnelige signalene da stigningstallet for korrelasjonsintegralet ikke konvergererte med økende imbeddingsdimensjon for noen av signalene.

Det statistiske grunnlaget er tynt for å trekke konklusjoner. Fra resultatene fra datasettet EKoG2, EEGE, og EEG1 virker det som

- Det referansefrie signalet bør være en kombinasjon av signaler som viser samme tilstand av hjerneaktivitet. En lineær-kombinasjon av lavdimensjonalt og høydimensjonalt signal kan sammenlignes med å tilføre det lavdimensjonale farget støy.
- For de analyserte datasettene ble dimensjonsestimeringen ikke forbedret ved å se på lineær-kombinasjoner av de opprinnelige signaler. Med forbedret dimensjonsestimering menes mer pålitelige dimensjonsestimater.
- Optimal vinduslengde er ikke nødvendigvis den samme for en lineær-kombinasjon av simultane måleserier og for de opprinnelige måleseriene, selv ikke når optimal vinduslengde er den samme for de opprinnelige signaler.
- Hvis dimensjonsestimatene for de opprinnelige signalene er forskjellige, er dimensjonen av lineær-kombinasjonen høyere jo større vekt vi gir kanalene av høyest dimensjon.

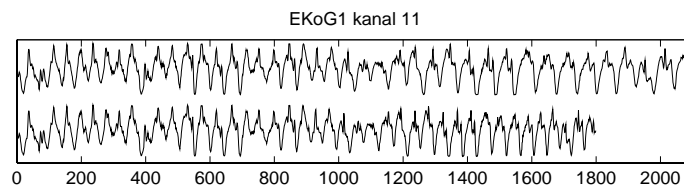
Selv om dimensjonsestimeringen ikke ble forbedret ved lineærkombinasjoner av kanalene fra de undersøkte datasettene, skal det likevel ikke utelukkes at det er *mulig* å lage et stasjonært signal ut fra lineærkombinasjoner av ustasjonære simultane måleserier.

12.3 Ujevn periode

Ved dimensjonsestimering ser vi ikke på hvordan signalet utvikler seg med tiden, men på den geometriske struktur som vi antar at de stasjonære løsningsbanene til det underliggende systemet danner i faserommet. Disse løsningsbanene er kurver parametrisert ved tiden. Et eksempel på en parametrisert kurve er $(\sin(u), \cos(u))$ hvor u er en vilkårlig funksjon. Hvis u er en varierende funksjon, monoton, ikke-monoton, lineær eller ulineær, vil attraktoren være lik enhets sirkelen uavhengig av tidsfunksjonen, men tidsutviklingen av $\sin(u)$ og $\cos(u)$ vil avhenge av u .

Tilsvarende kan vi anta at løsningsbanene til et dynamisk system kan ha varierende hastighet på attraktoren. Benytter vi en fast samplingstetthet ved måling av en variabel fra systemet, vil vi få en ustasjonær tidsserie. Ved å omskalere tidsaksen kan vi få et stasjonært signal. I noen tilfeller vil en rekonstruksjon fra dette signalet gi en rekonstruert attraktor topologisk ekvivalent med den opprinnelige. Hvis transformasjonen mellom gammel og ny tidsakse er monoton, er den også inverterbar.

I dette avsnittet ser vi på om en omskalering av tidsaksen vil føre til forbedret dimensjonsestimering for signalet fra epileptogen hjerneaktivitet i EKoG1.



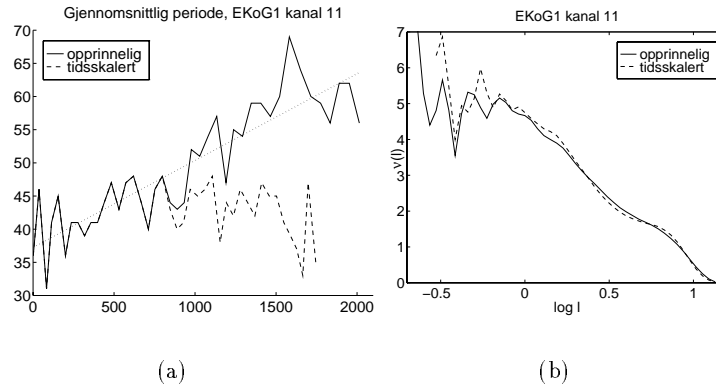
Figur 12.8: Det opprinnelige signalet fra EKoG1 kanal 11 øverst og det tidsskalerte signalet under.

Fra kapittel har vi at signalene fra epileptogen hjerneaktivitet i EKoG1 er ustasjonært ved at periodene øker lineært. Signalet kan gjøres stasjonært ved en omskalering av tidsaksen. Dette gjør vi ved å lage en ny akse hvor avstanden mellom enhetene avtar lineært i forhold til den gamle aksen. Transformasjonen fra gammel til ny akse er monoton. Den er derfor en-til-en og inverterbar. Når tidsserien vår transformeres over til den nye aksen vil signalet være uendret i begynnelsen. Etterhvert vil samplene ligge tettere og tettere.

På den nye tidsaksen ønsker vi også en jevn samplingstetthet. En enkel måte å lage jevnere avstand mellom punktene på den nye aksen, er å kaste punkter hvor de ligger for tett. Samplingstettheten blir bare tilnærmet jevn. For at den skal bli jevn må vi interpolere mellom verdiene i den gamle tidsserien. Å kaste punkter er en enklere metode. Vi velger derfor denne fremgangsmåten. Den nye tidsserien er kortere enn den gamle, se figur 12.8. Den har også jevnere periode, se figur 12.9 a)

For å sammenligne resultatene mellom gammelt og nytt signal, kan vi plote de deriverte av korrelasjonsintegralene sammen. Imidlertid ser vi i figur 12.9 liten forskjell i korrelasjonsintegralene.

Konklusjon: Omskalering av tidsaksen førte ikke til forbedret dimensjonsestimering for dette datasettet. En mulig årsak tidsserien omskaleres ved at vi kaster punkter og dermed innfører vi støy med hensyn på førsteaksen.



Figur 12.9: a) Gjennomsnittlig periode for opprinnelig signal og tidsskalert signal. En minste kvadraters tilpasning til periodene i det opprinnelige signalet er markert. b) Den deriverte av korrelasjonsintegralet for det opprinnelige signalet og det tidsskalerte.

12.4 Dimensjonsestimering ved PD2 av ustasjonære signaler

Vi har i kapittel 11 sett at dimensjonsestimering ved G-P kan skille mellom normal og epileptogen hjerneaktivitet. Signalet registrert under overgang fra normal til epileptogen hjerneaktivitet er et ustasjonært signal. Vi ønsker i dette avsnittet å undersøke om dimensjonsestimering ved PD2 kan påvise endring i EEG-signaler når hjerneaktiviteten endres fra normal til epileptogen aktivitet. Først refereres resultater fra dimensjonsestimering ved PD2 på stasjonære signaler fra normal og epileptogen hjerneaktivitet. Ved dimensjonsestimering med PD2 fra ustasjonære signaler, ser vi på PD2 som en form for mønstergjenkjenning. Vi forventer at PD2 gir samme lokale dimensjonsestimater ved referansepunkter som ligger nære hverandre i faserommet. Hvert referansepunkt representerer et hendelsesforløp og altså et mønster i signalet. Selv om det ikke kreves et stasjonært signal for dimensjonsestimering ved PD2, fant vi i kapittel 6 best resultater når signalet var stasjonært. For et signal registrert før og under epileptisk aktivitet utfører vi derfor dimensjonsestimering både fra hele signalet under ett og for etterfølgende deler av det. Når vi utfører dimensjonsestimering fra etterfølgende deler av signalet, kan vi ikke lenger se på PD2 som en form for mønstergjenkjenning, men ser på om PD2 skiller mellom forskjellige deler av signalet. Fremgangsmåten for dimensjonsestimering ved PD2 er gitt i avsnitt 6.2.

Dimensjonsestimering ved PD2 fra normal og epileptogen hjerneaktivitet

Fra normal hjerneaktivitet har dimensjonsestimering ved PD2 vært utført på en tidsserie av lengde $N = 3000$ fra datasettet EEGN. Fra epileptogen hjerneaktivitet er dimensjonsestimering ved PD2 utført på en tidsserie fra EKoG2 kanal 1. Tidsseriene er omtalt i kapittel 10. Resultatene samt parameterverdier er gitt i tabell 12.2.

Parameterverdiene er for EEGN valgt slik at de gir vinduslengder i en omegn om gjennomsnittlig periode i signalet, ($w = 20$). Denne er beregnet i kapittel 10. For EKoG2 er parameterverdiene valgt slik de gir optimal vinduslengde, $w = 30$, funnet ved dimensjonsestimering i avsnitt 11.3.1.

Tidsserie	PD2	τ	M_G	std	ν_{SSA}
EEGN	5.5	4	2		–
EKoG2 kanal 1	3.5	5	184	33%	3.0

Tabell 12.2: Dimensjonsestimater fra PD2 fra normal og epileptogen hjerneaktivitet. De er beregnet ved $m = 5$ til 15 og fra $M = 300$ referansepunkter. τ er tidsforsinkelsen, M_G antall godkjente lokale dimensjonsestimater, std er standardavviket av de godkjente dimensjonsestimater og ν_{SSA} er dimensjonsestimatet beregnet ved G-P ved optimal vinduslengde når faserommet er rekonstruert ved SSA.

For EEGN er alle lokale dimensjonsestimater forkastet unntatt to. Det betyr i praksis at et gjennomsnittlig dimensjonsestimat forkastes. For tidsserien fra epileptogen hjerneaktivitet godkjennes dimensjonsestimatet. Resultatene er i overensstemmelse med resultatene fra G-P. Forskjellen på ca. 15% for epileptogen aktivitet er ikke avskrekkende.

PD2 kunne i dette tilfellet skille mellom normal og epileptogen hjerneaktivitet.

Dimensjonsestimering ved PD2 fra langt ustasjonært signal

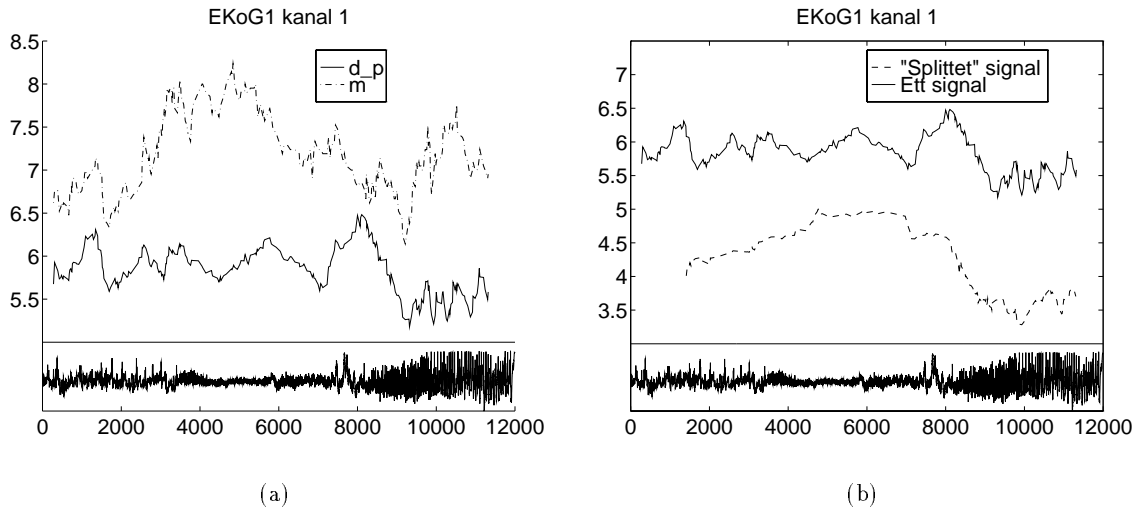
Vi tar for oss kanal 1 fra datasettet EKoG1. Årsaken til at vi velger å se på akkurat dette signalet er at vi lett kan skille forskjellige deler av tidsserien fra hverandre. Resultatene fra dette datasettet ble dessuten bedre enn fra EKoG2. I den første delen av tidsserien fra EKoG1 er amplituden varierende. I den midtre delen fra sampel 4000 til 7500 er amplituden lav. Deretter øker amplituden og signalet inneholder sykler som øker lineært i periode. For dette signalet ønsker vi å se om dimensjonsestimering ved PD2 kan skille mellom de ulike deler av signalet. Fra avsnitt 11.3.1 har vi at optimal vinduslengde var $w = 60$ for den siste delen av signalet når faserommet ble rekonstruert ved SSA. Fra kapittel 4 har vi at rekonstrueringer ved MOD og SSA er topologisk ekvivalente. Denne versjonen av PD2 benytter MOD for rekonstruering av faserommet. Vi velger parameterverdiene for rekonstrueringen av faserommet slik at de dekker optimal vinduslengde, $w = 60$, det vil si vi velger tidsforsinkelsen $\tau = 6$ og lar imbeddingsdimensjonen gå fra $m = 5$ til 15. Det er mulig dette ikke gir optimale parameterverdier for første del av signalet, men endringer i dimensjonsestimater skyldes da ikke endring i parameterverdi for τ . Om de lokale dimensjonsestimatene beregnes ved forskjellige imbeddingsdimensjoner kan vi undersøke ved å plote imbeddingsdimensjonen sammen med de lokale dimensjonsestimatene.

Figur 12.10 a) viser signalet, de lokale dimensjonsestimatene og imbeddingsdimensjonen som en funksjon av tiden. Både dimensjonsestimatene og verdiene for imbeddingsdimensjonene er glattet ved en lavpassfiltrering. De lokale dimensjonsestimatene varierer med et standardavvik på 13% om en middelværdi på 5.9 i de to første delene av signalet, omtrent fram til sampel 8000. Deretter synker middelværdien av dimensjonsestimatene til 5.5 for den siste delen av signalet.

Forskjellen i middelværdi av dimensjonsestimatene er mindre enn 10%, noe som er svært lite. Dimensjonsestimering ved PD2 kunne ikke skille mellom de forskjellige delene av signalet.

Dimensjonsestimering av “splittet” signal

For å spare beregningstid og for å la PD2 jobbe med tilnærmet stasjonære signaler kan vi spalte signalet i deler på $N = 2000$ sampler. Vi lar delene være ikke-overlappende. Dimensjonsestimering ved PD2 er da ikke mønstergjenkjennende, men skiller lettere mellom forskjellige deler av signalet. Figur 12.10 b) viser de lokale dimensjonsestimatene beregnet



Figur 12.10: Dimensjonsestimater ved PD2 for EKoG1 kanal 1. a) Dimensjonsestimeringen er utført på hele signalet under ett. Plottet viser de lokale dimensjonsestimatene, d_p , imbeddingsdimensjonen m som de er beregnet ved, samt signalet. b) Den ene grafen viser de lokale dimensjonsestimatene fra korte etterfulgte deler av signalet, mens den andre viser lokale dimensjonsestimater ved PD2 fra det "usplittede" signalet. De lokale dimensjonsestimatene og verdiene for imbeddingsdimensjonen er glattet ved lavpassfiltrering.

fra hele det ustasjonære signalet og fra stasjonære korte deler av signalet. Dimensjonsestimatene er glattet ved lavpassfiltrering.

De filtrerte dimensjonsestimatene avtar fra en verdi om 5 for midtre del av signalet til ca. 3.5 under anfall. Dimensjonsestimering ved PD2 skiller mellom delene av signalet fra EKoG1 fra før anfall og under anfallet.

Konklusjon

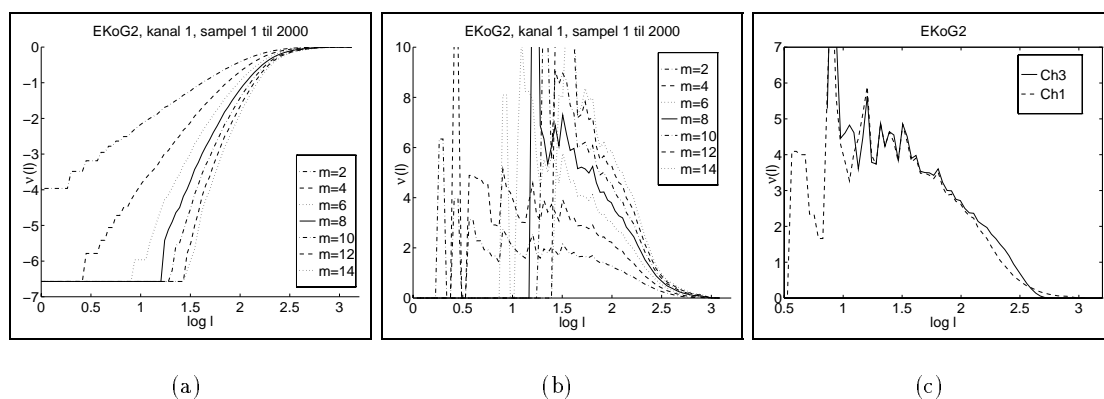
Ved dimensjonsestimering med PD2 fra signaler registrert før og under epileptisk anfall har vi nå sett at PD2 skiller mellom forskjellige deler av signalet når signalet deles opp i kortere deler. For kortere tidsintervaller kan vi imidlertid anta stasjonaritet i dataene. Hvis vi ønsker et gjennomsnittlig dimensjonsestimat over dette tidsintervallet kan dimensjonsestimering utføres ved Grassberger-Procaccia-algoritmen isteden. Dette benyttes i neste avsnitt (og viste seg å skille bedre mellom forskjellige deler av signalet enn hva PD2 gjorde).

12.5 Glidende dimensjonsestimater ved G-P

Dimensjonsestimering ved Grassberger-Procaccia-algoritmen krever som kjent et stasjonært signal. Imidlertid kan et ustasjonært signal inneholde stasjonære subepoker hvor dimensjonsestimering kan utføres. Hjernesignaler registrert under overgangen fra normal til epileptogen hjerneaktivitet kan derfor deles opp i mindre deler hvor vi estimerer dimensjonen ved G-P. Ved å la disse delene av signalet være overlappende, kan vi se hvordan dimensjonen endrer seg med tiden. Disse dimensjonsestimatene kaller vi glidende dimensjonsestimater.

I denne delen av oppgaven lar vi faserommet være rekonstruert ved MOD fordi denne teknikken for rekonstruksjon er mer tids- og plassbesparende enn rekonstruksjon ved S-SA. Videre lar vi parametrene for rekonstruksjon være de samme for alle deler av signalet. Vi velger de parametrene som er optimale for signalet registrert under epileptisk anfall. Disse parametrene er antakelig ikke optimale for den delen av signalet som er registrert forut for anfallet, men ved å benytte samme parametre for alle deler av signalet er vi sikret at endringer i dimensjonsestimatene skyldes endringer i signalet og ikke endring av parametre. For å spare beregningstid beregnes korrelasjonsintegralet for kun én imbeddingsdimensjon.

Vi tar for oss kanal 1 og 3 fra datasettet EKoG2, se nederste del av figur 12.12 a) og d). Signalene deles inn i overlappende deler av lengde $N = 2000$. Når signalet inneholder enkelte spikes, men ellers har lav amplitude som i kanal 1, er det i det rekonstruerte faserommet enkelte punkter med stor avstand til de andre punktene. Dette gir liten stigning ved store l i korrelasjonsintegralet, se figur 12.11 a). Når signalet ikke inneholder spikes, som kanal 3, er regionen i korrelasjonsintegralet med lavt stigningstall ikke tilstede, se figur 12.11 c). Parametrene som er optimale for rekonstruksjon av faserommet ved MOD fra signalet

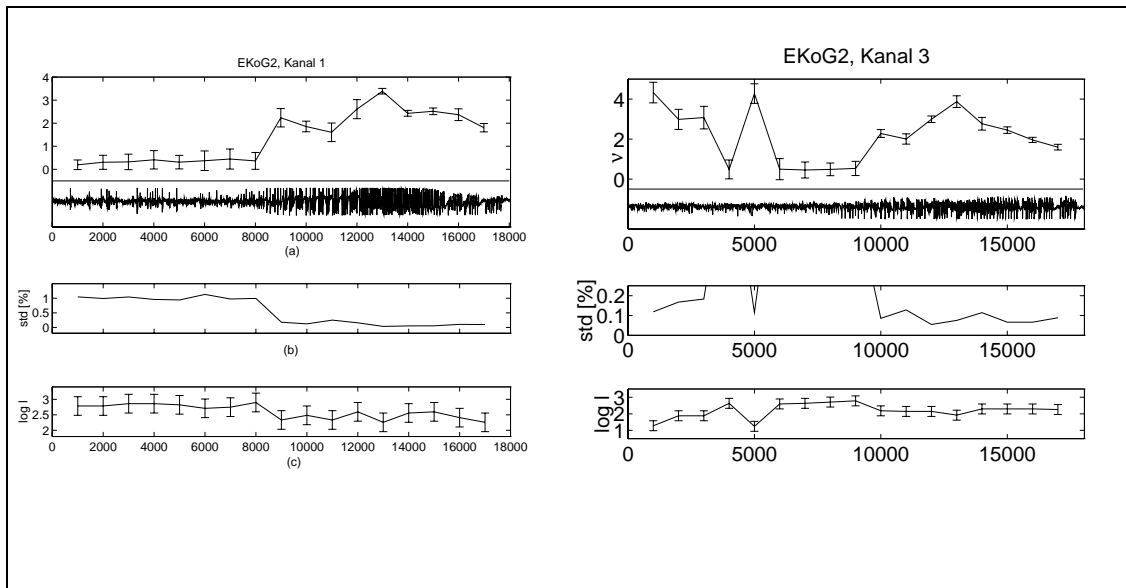


Figur 12.11: a) Korrelasjonsintegralet for første 2000 sampler fra første kanal i datasettet EKoG2. b) Den deriverte av korrelasjonsintegralet i a). c) Den deriverte av korrelasjonsintegralene for kanal 1 og 3. Faserommet er rekonstruert ved parameterverdiene $m = 15$, $\tau = 5$. Det er kun forskjell i korrelasjonsintegralene ved store verdier for l . Dette skyldes at kanal 1 inneholder enkelte spikes om ikke finnes i kanal 3.

registrert under epileptisk anfall er $m = 7$ og $\tau = 5$. Dimensjonsestimatene for hver del av signalet beregnes over en skaleringsregion av lengde $\frac{l}{l_0} = 4$.

Ved å plote dimensjonsestimatene for de overlappende delene av signalet som en funksjon av tiden, kan vi se hvordan dimensjonen endres når hjerneaktiviteten endres fra normal til epileptogen, se figur 12.12 a). For den første delen av signalet hvor signalet inneholder enkelte spikes, beregnes dimensjonsestimatene ved store verdier for $\log l$, se figur 12.12 c). Dette gir lave dimensjonsestimater med usikkerhet opp mot 100%, se figur 12.12 b). For signalet uten spikes faller som nevnt stigningstallet brått også ved store l . Dimensjonsestimatet beregnes da ved mindre verdier av l som gir høyere dimensjonsestimater, se figur 12.12 d). Imidlertid er usikkerheten av disse dimensjonsestimatene stor i forhold til dimensjonsesti-

matene for senere del av signalet. Når epileptisk anfall er synlig i signalet ved at det er periodisk og har jevnere amplitude, beregnes dimensjonsestimatene ved lavere verdier for l , og vi får dimensjonsestimater med lite avvik. For disse signalene er minimum i usikkerheten på 4-6% for dimensjonsestimatene beregnet over sampl 12000 til 16000. Dette tilsvarer den delen av signalet vi anså som stasjonær i avsnitt 11.3.



Figur 12.12: a) Dimensjonsestimater som en funksjon av tiden. Signalet, første kanal fra datasettet EKoG2, er vist under dimensjonsestimatene. b) Standardavviket til dimensjonsestimatene beregnet i prosent. I første del av signalet er avviket 100%. c) Nederste plottet viser hvilke verdier for $\log l$ som dimensjonsestimatene er beregnet over. Se teksten for nærmere forklaring.

12.5.1 Forbedringer

I dette avsnittet har vi rekonstruert faserommet for kun ett sett av parametere for alle deler av hvert signal. Når imbeddingsdimensjonen velges svært liten som for kanal 1 fra datasettet EKoG2 her, kan vi finne dimensjonsestimater som tilsvarer imbeddingsdimensjonen om signalet ikke inneholder spiker men har en jevnere amplitude. Vi vil da ikke få vite om det er mulig å beregne et dimensjonsestimat ved en høyere imbeddingsdimensjon hvor dimensjonsestimatet ikke følger skaleringen $C(l) \propto l^m$. Hvis faserommet rekonstrueres ved parametre som ikke er optimale for tidsserien, er det mulig at dimensjonen er liten for denne tidsserien, men at dimensjonsestimering ikke gir noe dimensjonsestimat likevel på grunn av feil valg av parametre. Det er derfor mulig at det er gunstig å rekonstruere faserommet fra flere sett av parameterverdier og finne det parametersett som minimerer variasjonene i skaleringsregionen for hver del av signalet. Dette krever både mer lagringskapasitet og beregningstid. Imidlertid er det ved denne fremgangsmåten mulig å finne mer pålitelige dimensjonsestimater for alle deler av signalet.

Kapittel 13

Dimensjonsestimering fra filtrerte og ufiltrerte signaler

Dette kapitlet tar for seg hvordan lineær lavpassfiltrering påvirker dimensjonsestimering fra tidsserier fra EEG, EKoG og MEG. Tidsseriene som anvendes er fra epileptogen hjerneaktivitet registrert i datasettene EEGE (kanal 1), MEG og EKoG2 (kanal 1). Datasettene er omtalt i kapittel 10.

Filtrering på kunstige data samt en vurdering av de forskjellige filtrene som benyttes i dette kapitlet er gitt i kapittel 7. Fra kapittel 7 har vi at IIR-filtrering frarådes fordi det fører til en økning i dimensjonsestimatene. Fordi empiriske forsøk med IIR-filtrering av EEG-data har gitt positive resultater [?], anvendes IIR-filtre likevel før dimensjonsestimering i avsnitt 13.1. Avsnitt 13.2 tar for seg dimensjonsestimering av dataene etter filtrering ved FIR-filtre. I avsnitt 13.3 ser vi på om rekonstruering ved SSA har noen filtereffekt i forbindelse med dimensjonsestimering på tidsseriene. Tidlige resultater hvor filtrering har ført til en reduksjon av dimensjonsestimatene kan skyldes at det ikke er tatt hensyn til temporær korrelasjon i tidsserien. Avsnitt 13.4 ser på hvordan filtreringen påvirker dimensjonsestimeringen når det ikke tas hensyn til temporær korrelasjon i tidsserien. Resten av dette avsnittet er generelt om støy og filtrering av dataene.

EEG er ansett for å være et støyfylt signal. I denne sammenheng definerer jeg støy til å være bidrag til signalet som gjør dimensjonsestimeringen vanskeligere. Dette kan være:

- Avrundingsfeil (kvantiseringsfeil) som skyldes endelig oppløsning i signalet. Øvre grense for antall verdier inneholdt i signalet er bestemt av AD-konverteren (her 12-bits).
- Målefeil på grunn av usikkerhet i måleutstyret.
- Bidrag fra omgivelsene, f.eks. bidrag fra nettfrekvensen på 50Hz.
- Artefakter, utslag i signalet som skyldes at muskler strammes og avslappes som f.eks. blinking med øynene.

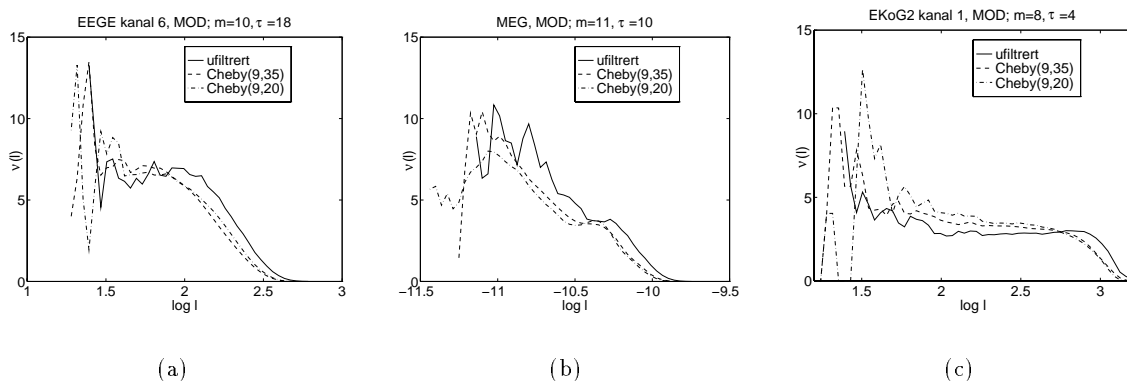
For et EEG-signal registrert under epileptisk anfall er det de langsomme svingningene fra 1.5 til 6 Hz vi er interessert i. For disse signalene kan vi definere den delen av signalet med frekvens høyere enn 10 Hz som støy.

På grunn av registreringsmetode antas MEG-dataene og de intrakranielle målingene å være fri for biologiske artefakter. De kan imidlertid inneholde støy som skyldes kvantiseringsfeil, målefeil eller bidrag fra omgivelsene. Bidraget fra nettfrekvensen er synlig i effektetthets-spekteret ved periodogrammet for datasettene EEGN og MEG, men ikke for de andre datasettene. (Periodogrammet er beregnet for tidsserier fra datasettene EEGN og MEG i avsnitt 10.4.)

Lo og Principe fant empirisk at dimensjonen i EEG-signaler går ned etter lavpassfiltrering, uavhengig av om filteret som benyttes er et IIR eller FIR-filter [?]. De benyttet 9.ordens Chebychev- og Butterworth-filter som er IIR-filtre samt et 9.ordens FIR-filter. Knekkfrekvensene for filterne var 20, 50 og 80 Hz. De fant lignende resultater for alle tre filtertypene. Siden det meste av effekten i EEG-signalet er ved lave frekvenser, anbefaler de lavpassfiltrering ved en knekkfrekvens lavere enn nettfrekvensen før dimensjonsestimering.

13.1 Dimensjonsestimering fra IIR-filtrerte signaler

IIR-filtre regnes for å være fem til ti ganger så effektive som FIR-filtre slik at ordenen av et FIR-filter må økes med en faktor opptil ti for at filtreringen ved FIR-filteret skal være like effektiv som for IIR-filteret [?]. Denne forskjellen i effektivitet av filterne gjør det ønskelig å undersøke muligheten for å kunne anvende IIR-filtre på de reelle dataene. For å fjerne mulig høyfrekvent støy fra signalene fra epileptogen hjerneaktivitet er tidsseriene filtrert ved et 9.ordens Chebychev-filter med knekkfrekvens 20 og 35 Hz. Chebychevfilteret er kort omtalt i avsnitt 7.2.



Figur 13.1: En tidsserie fra datasettene a) EEGE b) MEG og c) EKoG2 er filtrert med et 9.ordens Chebychev-filter ved knekkfrekvensene 20 og 35 Hz før beregning av korrelasjonsintegralet. Orden, N , og knekkfrekvens, f , er angitt i plottene ved (N, f) .

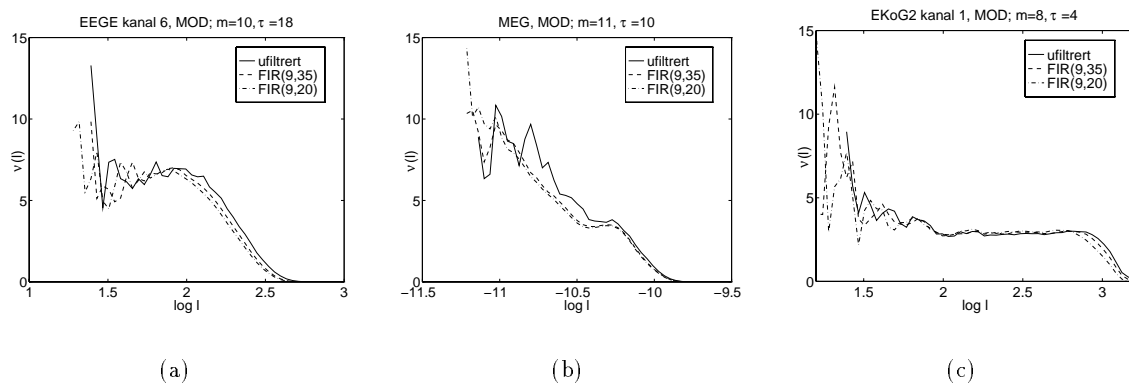
For tidsseriene fra EEGE og MEG fører filtreringen med Chebychev-filteret til liten endring i korrelasjonsintegralene bortsett fra at korrelasjonsintegralet er forskjøvet med hensyn på l , se figur 13.1 a) og b). Forskyvningen skyldes at amplituden i signalet er endret i filtreringen. Dimensjonsestimatene for disse tidsseriene var i utgangspunktet svært usikre slik at de ble forkastet på grunn av upålitelighet. Dimensjonsestimeringen ble altså ikke

forbedret av filtreringen. For tidsserien fra EKOg2 fører filtreringen til høyere stigningstall i korrelasjonsintegralet jo lavere knekkfrekvensen er, og skaleringsregionen forsvinner med avtakende knekkfrekvens, se figur 13.1 c).

Resultatene for EKOg2 er i overensstemmelse med hva vi kunne forvente ut fra kapittel 7. Vi ønsker ikke at dimensjonen endres ved filtreringen. Vi anvender derfor FIR-filtre på de samme dataene isteden.

13.2 Dimensjonsestimering fra FIR-filtrerte signaler

Filtrering av kunstige data med hvit støy førte i kapittel 7 til forbedret dimensjonsestimering. Forbedringen besto i at vi fikk en lengre skaleringsregion uten at dimensjonen ble endret. Hvis dataene fra EEG, MEG eller EKOg inneholder hvit støy, forventer vi en lengre skaleringsregion for dimensjonsestimering etter filtrering. Tidsseriene er filtrert ved et 9.ordens FIR-filter ved 20 og 35 Hz. Av figur 13.2 ser vi at endringene i korrelasjonsintegra-



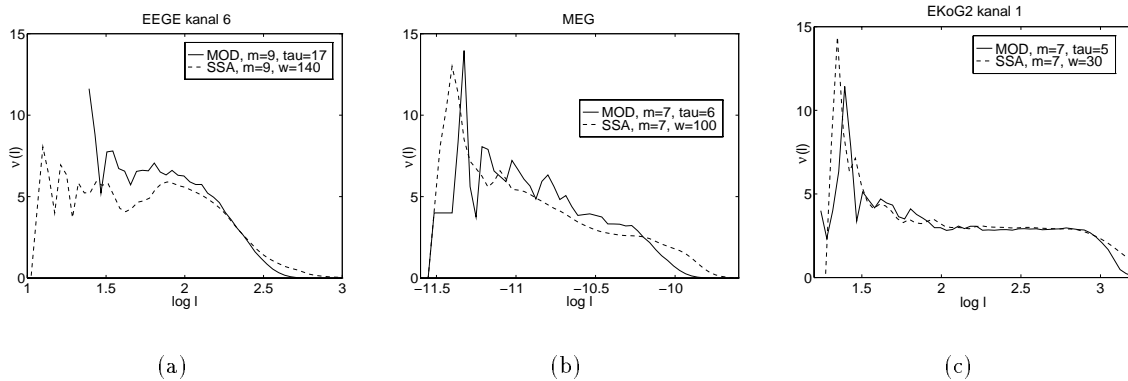
Figur 13.2: Den deriverte av korrelasjonsintegralet fra tidsserie fra a) EEGE, b) MEG og c) EKOg2. Signalene er filtrert ved et 9.ordens FIR-filter ved 20 og 35 Hz.

lene er ubetydelige. Filtreringen forbedret ikke dimensjonsestimeringen for tidsseriene fra EEGE og MEG. At filtreringen ikke endret stigningstallet til korrelasjonsintegralet gjør at FIR-filtrering anbefales fremfor IIR-filtrering.

13.3 Filtrering ved SSA

I kapittel 7 ble SSA presentert som et lineært filter mot hvit støy. Lengden av skaleringsregionen økte ved rekonstruering ved SSA i forhold til rekonstruering ved MOD. En sammenligning mellom disse to metoder for rekonstruering av faserommet skulle da gi oss en pekepinn på om dataene inneholder hvit støy.

Fra kapittel 4 har vi at rekonstruering ved MOD og SSA gir samme dimensjonsestimat når rekonstrueringen er den samme. Dette er imidlertid ikke tilfelle for tidsseriene fra EEGE



Figur 13.3: Den deriverte av korrelasjonsintegralet fra a) kanal 6 fra EEGE, b) MEG og c) kanal 1 fra EKoG2. Faserommet er rekonstruert ved MOD og SSA med parameterverdier som angitt i plottene.

og MEG, se figur 13.3 a) og b). Rekonstruering ved SSA har gitt et lavere stigningstall i korrelasjonsintegralet enn rekonstruering ved MOD. I kapittel 11 var det ikke mulig å beregne pålitelige dimensjonsestimater for disse signalene. Tidsseriene ble i avsnitt 10.3 klassifisert som ustasjonære, noe som kan være årsak til forskjell i resultatene fra MOD og SSA.

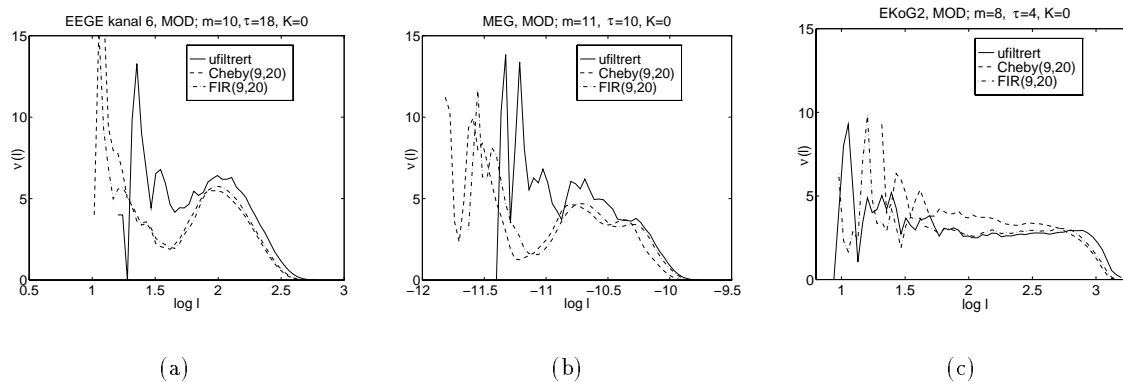
13.4 Korreksjon for temporær korrelasjon

Dette avsnittet viser ved eksempler av filtrering av EEGE, MEG og EKoG2 hvor viktig det er å korrelere for temporær korrelasjon i tidsserien. Figur 13.4 viser den deriverte av korrelasjonsintegralet for tre tidsserier hvor det ikke er tatt hensyn til slik korrelasjon. Tidsseriene er filtrert ved 9.ordens Chebychev-filter og 9.ordens FIR-filter hvor knekkfrekvensen er 20 Hz. For tidsseriene fra EEGE og MEG førte filtreringen til en reduksjon i stigningstallet til korrelasjonsintegralet når det ikke tas hensyn til temporær korrelasjon, se figur 13.4 a) og b) henholdsvis. Dimensjonsestimering fra disse korrelasjonsintegralene ville ha ført til underestimering. For tidsserien fra EKoG2 derimot har filtreringen liten betydning for temporær korrelasjon i tidsserien, se figur 13.4 c).

13.5 Oppsummering

I dette kapitlet har tidsserier fra EEG, MEG og EKoG blitt filtrert ved IIR-filtre, FIR-filtre og ved SSA før dimensjonsestimering. Datagrunnlaget er for tynt til å si noe generelt om filtrering av signaler fra de forskjellige registreringsmetodene EEG, EKoG og MEG. Vi må nøye oss med å se på resultatene for de enkelte datasettene.

Resultatene for EKoG2 er i overensstemmelse med forventningene vi hadde fra kapittel 7 om at IIR-filtrering fører til en økning i dimensjonsestimatene og FIR-filtrering og filtrering ved SSA lar dimensjonen forbli uendret.



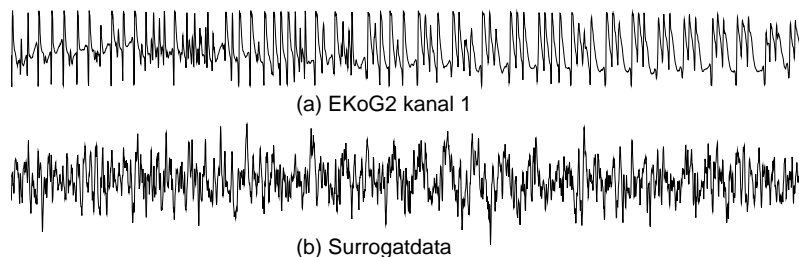
Figur 13.4: Plottene viser den deriverte av korrelasjonsintegralet for tidsserier fra a) EEGE, b) MEG, c) EKoG2. Tidsseriene er filtrert ved 9.ordens Chebychev-filter og FIR-filter ved 20 Hz. Parameterverdi for korrelasjonslengden K i beregning av korrelasjonsintegralet er satt lik 0.

For de ustasjonære tidsseriene fra EEGE og MEG førte filtreringen ikke til forbedret dimensjonsestimering. Noe vi ikke hadde forventet på grunn av forsøkene med kunstige data i Del III var at rekonstruering med SSA fra noen av de reelle dataene førte til et lavere stignings-tall i korrelasjonsintegralet i forhold til rekonstruering ved MOD når parameterverdiene for rekonstrueringen er de samme. Fordi vi forventer tilsvarende dimensjonsestimater fra rekonstruering ved SSA og MOD (vi fant dette for kunstige data i kapittel 4) fortjener årsaken til denne forskjellen en nærmere undersøkelse. Dette vil ikke bli utført i denne oppgaven.

Kapittel 14

Surrogatdata på EEG

I kapittel 10 beregnet vi dimensjonsestimater lik $\nu = 3.0$ fra epileptogen hjerneaktivitet i kanal 1 og 2 i datasettet EKoG2. (Se kapittel 10 for beskrivelse av tidsseriene.) For å teste om G-P-algoritmen kan skille mellom disse signalene og støy-signaler med tilsvarende effektetthetsspekter, anvender vi algoritmen for surrogatdata gitt i kapittel 8. Surrogatdata-metoden anvendes ikke for de øvrige datasettene da dimensjonsestimatene fra disse ble forkastet i kapittel 11.

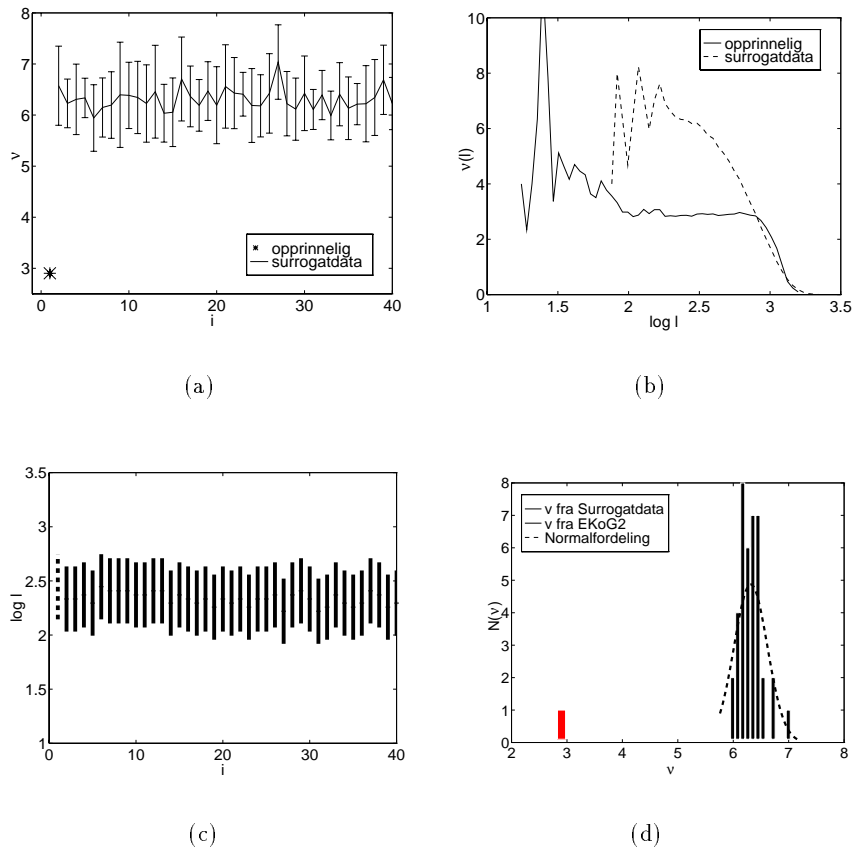


Figur 14.1: a) *Epileptisk aktivitet i EkoG2 kanal 1.* b) *Surrogatdata fra tidsserien i a).*

Figur 14.1 viser at opprinnelige data og surrogatdata lett kan skilles fra hverandre. De har imidlertid samme effektetthetsspekter og dermed også samme autokovarians. Antall realiseringer av surrogatdata velges lik 39. De opprinnelige dataene testes mot disse ved G-P-algoritmen. For å spare beregningstid rekonstrueres faserommet ved MOD. Av samme årsak benyttes kun én verdi for imbeddingsdimensjon og tidsforsinkelse. For tidsserien fra EKoG2 er de valgte parameterverdier $m = 7$ og $\tau = 5$. Denne kombinasjonen gir den optimale vinduslengden vi fant for tidsserien i avsnitt 11.3.1.

For de opprinnelige dataene er dimensjonsestimatet fra rekonstruering med MOD noe lavere enn fra rekonstruering med SSA, $\nu_{MOD} = 2.9$ mot $\nu_{SSA} = 3.0$. Sammenligner vi ν_{MOD} med dimensjonsestimatene for surrogatdataene, finner vi at dimensjonsestimatene for surrogatdataene er høyere og har større usikkerhet, se figur 14.2 a). En øvre grense for hvor skaleringsregionen kan velges er satt til den verdien for l hvor korrelasjonsintegralet favner 10% av punktene i mengden, det vil si for den l hvor $C(l) = -1$. For å undersøke om det

virkelig finnes en skaleringsregion for surrogatdataene, kan vi sammenlikne den deriverte av korrelasjonsintegralet for de opprinnelige dataene med den deriverte av korrelasjonsintegralet for hver av realiseringene av surrogatdata, se figur 14.2 b). Skaleringsregionen for surrogatdataene er klart mye kortere. Uavhengig av om det faktisk finnes en skaleringsregion eller ei for surrogatdataene, beregnes det et dimensjonsestimat lik gjennomsnittet av den deriverte over det intervallet hvor den deriverte varierer minst. Av figur 14.2 c) ser vi at alle dimensjonsestimatene er beregnet over noenlunde samme skaleringsregion.



Figur 14.2: Resultater fra surrogatdata-metoden for EKG1 kanal 1 a) Dimensjonsestimater med standardavvik fra skaleringsregionen. b) Den deriverte av korrelasjonsintegralet for opprinnelig data og for en av realiseringene av surrogatdata. c) Plottet viser hvilken skaleringsregion dimensjonsestimatene er beregnet over (på andre aksene). Førsteaksen er indeksen til realisering av surrogatdata. d) Dimensjonsestimat for opprinnelige data samt fordelingen av dimensjonsestimater for surrogatdata. Den stiplede kurven er normalfordelingen med samme middelværdi og standardavvik som dimensjonsestimatene.

Figur 14.2 d) viser dimensjonsestimatet for de opprinnelige dataene og fordelingen av dimensjonsestimatene for surrogatdataene. Vi ser at ν_{MOD} ligger godt utenfor fordelingen av dimensjonsestimatene for surrogatdataene. For å kvantifisere forskjellen mellom dimensjonsestimatene er fordelingen av dimensjonsestimatene for surrogatdataene sammenlignet med en normalfordeling av samme middelværdi og standardavvik. Fordelingen til dimensjonsestimatene synes å være trangere, men med kun 39 realiseringer kan vi likevel ikke

utelukke at de stammer fra en normalfordeling. Antar vi at de er normalfordelte, finner vi at forskjellen mellom dimensjonsestimat for opprinnelige data og surrogatdata er over 14 sigma. Dette er svært signifikant.

Oppsummering: Nullhypotesen for surrogatdata-metoden var at de opprinnelige dataene er lineært korrelert støy. Dimensjonsestimatene for surrogatdataene er signifikant mye høyere enn dimensjonsestimatet for de opprinnelige. Nullhypotesen forkastes. Dette tolkes som en indikasjon på at tidsserien er deterministisk.

Videre testing: For å vise at tidsserien virkelig er deterministisk må andre tester for determinisme utføres. For eksempel kunne vi stille en nullhypotese om at dataene er en ulineær transformasjon av lineær korrelert støy. En algoritme for å generere surrogatdata etter denne nullhypotesen er gitt i [?].

Kapittel 15

Avsluttende diskusjon

Temaet for denne oppgaven var dimensjonsestimering ved Grassberger-Procaccia-algoritmen fra elektromagnetiske hjernesignaler. I forbindelse med dimensjonsestimeringen har andre metoder fra ulineær signalbehandling blitt tatt i bruk. Disse er

- Rekurrensplott for testing av stasjonaritet og for å påvise periodisitet i signalet.
- PD2 for dimensjonsestimering fra ustasjonære signaler.
- Surrogatdata-metoden, det vil si dimensjonsestimering fra surrogatdata, for å undersøke om en gitt tidsserie kan beskrives som ulineær deterministisk eller lineær stokastisk.

Disse metodene samt hvordan lineær filtrering påvirker dimensjonsestimering danner grunnlaget for en pakke vi anvender for dimensjonsestimering fra reelle data. Metodene og fremgangsmåten for å bruke denne pakken er gitt i Del II. I Del III av oppgaven ga vi også to andre fremgangsmåter for dimensjonsestimering fra ustasjonære signaler; korrigeringsmetode for ustasjonaritet og beregning av glidende dimensjonsestimater. I oppsummeringen i avsnitt 15.1 tar vi for oss resultatene vi har fått ved å anvende pakken og metodene for behandling av ustasjonære signaler, på data fra EEG, ECoG og MEG. I avsnitt 15.2 ser vi på mulig videre arbeid. Til slutt gis i avsnitt 15.3 en konklusjon på oppgaven.

15.1 Oppsummering

I Del II presenterte vi en verktøypakke for dimensjonsestimering av reelle data. Denne pakken ble anvendt i Del III på data fra EEG, ECoG og MEG. Datasettene fra disse registreringsmetodene er presentert i kapittel 10. I det kapitlet ble det utført to eller tre tester for stasjonaritet på de ulike datasettene. Disse testene ga grunnlaget for den videre behandlingen av dataene.

Hovedtyngden av arbeidet har vært utført på signalene fra epileptogen hjerneaktivitet da det tidligere har vært rapportert lave dimensjonsestimater for slike signaler, men ikke for normal hjerneaktivitet. Det var dermed størst håp om å kunne beregne lave dimensjonsestimater fra epileptogen hjerneaktivitet.

I kapittel 11 utførte vi dimensjonsestimering på tidsserier fra de forskjellige datasettene registrert under normal og epileptogen hjerneaktivitet. For signalene fra normal hjerneaktivitet er ingen pålitelige dimensjonsestimater beregnet. Dimensjonsestimeringen tyder på at signalene stammer fra et høydimensjonalt system, det vil si at dimensjonen er høyere enn 10. På grunnlag av dette kan vi ikke si noe om signalene registrert under normal hjerneaktivitet stammer fra et høydimensjonalt kaotisk eller ulineært system.

For signaler registrert under epileptisk anfall var det mulig å beregne dimensjonsestimater fra alle datasettene. Dimensjonsestimater fra to tidsserier fra datasettet EKoG2 ble godkjent, mens dimensjonsestimatene fra to av nabokanalene ble forkastet. Dette viser at dimensjonsestimering fra nabokanaler fra ett anfall kan gi forskjellig resultater.

De fleste dimensjonsestimatene ble forkastet på grunnlag av kriteriene vi satte for pålitelighet. Datasettene hvor alle dimensjonsestimater ble forkastet, var ustasjonære ved en eller flere av kriteriene for stasjonaritet fra kapittel 10.

Kapittel 12 tok for seg dimensjonsestimering fra ustasjonære signaler. For de ustasjonære signalene registrert under epileptisk anfall hadde vi to muligheter for videre behandling; dimensjonsestimering ved PD2 eller korrigerende av stasjonaritet. Den siste fremgangsmåten ble valgt for tidsserien fra MEG da dimensjonsestimering ved PD2 på kunstige data ikke ga overbevisende resultater for kunstige data. Dimensjonsestimatet gikk ned etter korrigerende for stasjonaritet, men oppfyller likevel ikke kriteriene for pålitelighet. Muligens fører ustasjonaritet i tidsserien til en økning i dimensjonsestimatene. Dette bør undersøkes nærmere.

I kapittel 12 utførte vi dimensjonsestimering fra ustasjonære signaler. For tidsserier registrert under overgang fra normal til epileptogen hjerneaktivitet utføres ingen korrigerende for stasjonaritet. For disse signalene er det når endringer inntreffer i signalet som er det interessante. For disse signalene ble to teknikker for dimensjonsestimering anvendt for å påvise endringer; PD2 og beregning av glidende dimensjonsestimater. PD2 ga ikke signifikant forskjell mellom de forskjellige delene av det ustasjonære signalet. Sistnevnte metode var mer lovende. Imidlertid kan vi ikke ut fra forsøkene se at dimensjonsestimeringen kan forutsi anfall.

I kapittel 14 ble et av de pålitelige dimensjonsestimatene fra datasettet EKoG2 testet ved surrogatdata-metoden mot nullhypotesen om at dataene var lineær korrelert støy. Nullhypotesen ble forkastet. Dette er en *indikasjon* på at dataene er ulineære og deterministiske. Imidlertid er ikke det nok til å *vise* at systemet er ulineært. Dataene kan for eksempel være en ulineær transformasjon av lineær støy, se forøvrig avsnittet om videre arbeid.

15.2 Videre arbeid

Forslag til videre arbeid deles inn i to deler; testing av om de elektromagnetiske signalene er fra ulineære deterministiske systemer og anvendelse av andre teknikker for rekonstruering av faserommet.

Metoder for å teste om et signal er kaotisk/stokastisk

For å avgjøre om det underliggende systemet er ulineært og eventuelt kaotisk finnes det flere metoder.

Som nevnt i forrige avsnitt må vi supplere dimensjonsestimering fra surrogatdatametoden med andre metoder for å påvise at signalet er ulineært deterministisk og eventuelt kaotisk. Andre metoder kan være prediksjon eller estimering av Lyapunoveksponenter, gjerne kombinert med forskjellige former for surrogatdata. Ved beregning av Lyapunoveksponenter har vi imidlertid igjen problemer med lengden av tidsserien, da denne metoden krever et visst antall punkter i tidsserien og de stasjonære epokene fra våre datasett er forholdsvis korte.

En nyere metode som kunne være mulig å benytte for å avgjøre om et signal stammer fra et deterministisk, stokastisk eller periodisk system, er “false nearest strands” [?]. (Denne metoden er også brukt for å teste om et signal er stasjonært¹.)

Multikanal rekonstruering

Vi har i denne oppgaven kun sett på dimensjonsestimering ved rekonstruering av faserommet fra endimensjonale signaler. Et problem ved dimensjonsestimering fra reelle data er et endelig og lite antall punkter i tidsserien. En måte å øke datamengden på er å benytte multivariat rekonstruering (MR) av faserommet. Denne teknikken for rekonstruering av faserommet er forklart i vedlegg B. EEG- og EKoG-signalene registreres simultant i flere kanaler og er derfor velegnet for denne typen rekonstruering av faserommet. Å kombinere MR og MOD er i [?] foreslått som optimal imbedding når vi har flere simultane måleserier. I vedlegget har vi foreslått å kombinere MR og SSA. Denne teknikken er ikke anvendt tidligere. Den kan antas å være en bedre teknikk for rekonstruering enn en kombinasjon av MR og MOD siden SSA virker som et effektivt filter mot hvit støy.

15.3 Konklusjon

Temaet for denne oppgaven har vært dimensjonsestimering av data fra EEG, EKoG og MEG registrert under epileptogen hjerneaktivitet. Målet var å undersøke om dimensjonsestimering kan benyttes til å skille mellom epileptogen og normal hjerneaktivitet registrert i signalet, deretter å undersøke om dimensjonsestimering også kan benyttes til å forutsi anfall. Dessuten har vi sett på om det er mulig å gi en indikasjon på om en tidsserie er deterministisk, eventuelt kaotisk, ved å bruke aksepterte krav til påliteligheten av dimensjonsestimatene samt surrogatdata.

Dataene analysert i oppgaven er fra forskjellige registreringsmetoder og forskjellige typer epileptiske anfall. Dette i tillegg til at vi bare har undersøkt et lite antall datasett gjør at vi har et tynt statistisk grunnlag for å trekke konklusjoner. Imidlertid er hva vi har sett fra de analyserte datasettene at

- Dimensjonsestimering ved Grassberger-Procaccia-algoritmen kan skille mellom normal og epileptogen hjerneaktivitet.
- Vi har ved dimensjonsestimering ikke kunnet forutsi epileptisk anfall.
- Godkjente dimensjonsestimater har vært beregnet fra to tidsserier fra epileptisk anfall i EKoG. Ved å anvende surrogatdatametoden i kapittel 8 har vi funnet en indikasjon på at tidsserien er ulineær og deterministisk.

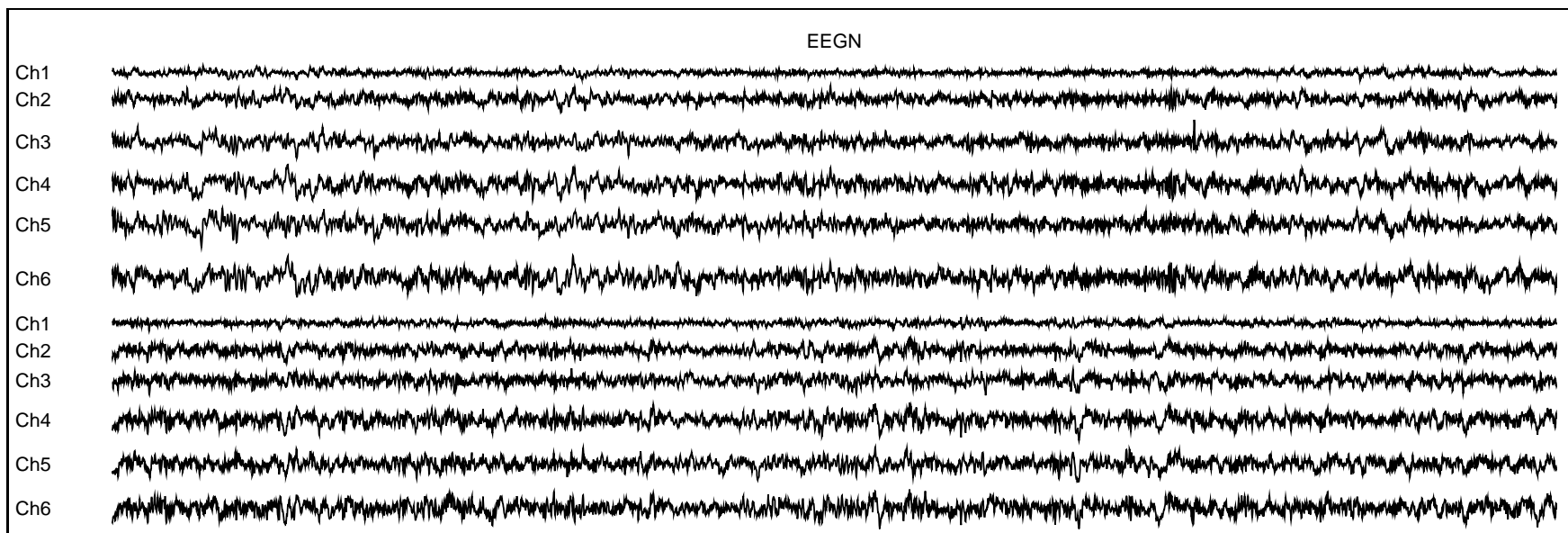
¹Foredrag av M.Kennel, Workshop i Montreal, 1995

Vi kan imidlertid ikke påstå at tidsserien er kaotisk, da surrogatdatametoden kun er en test for én type støy. For å vise at den er kaotisk, må det anvendes andre tester i tillegg.

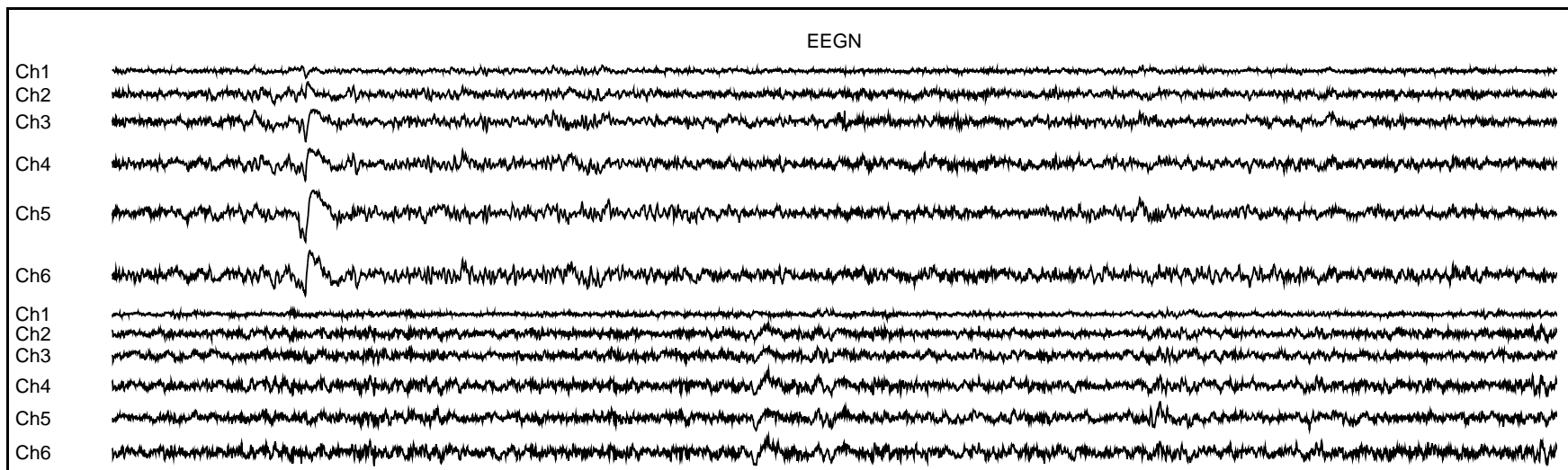
Vedlegg A

Datasettene

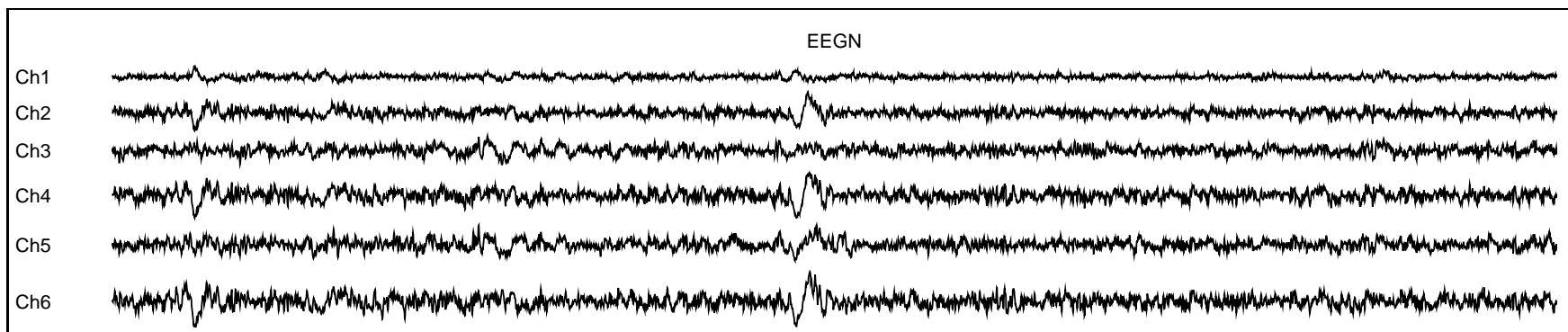
Dette vedlegget inneholder plott av datasettene som er analysert i oppgaven. Datasettene er beskrevet i kapittel 10.



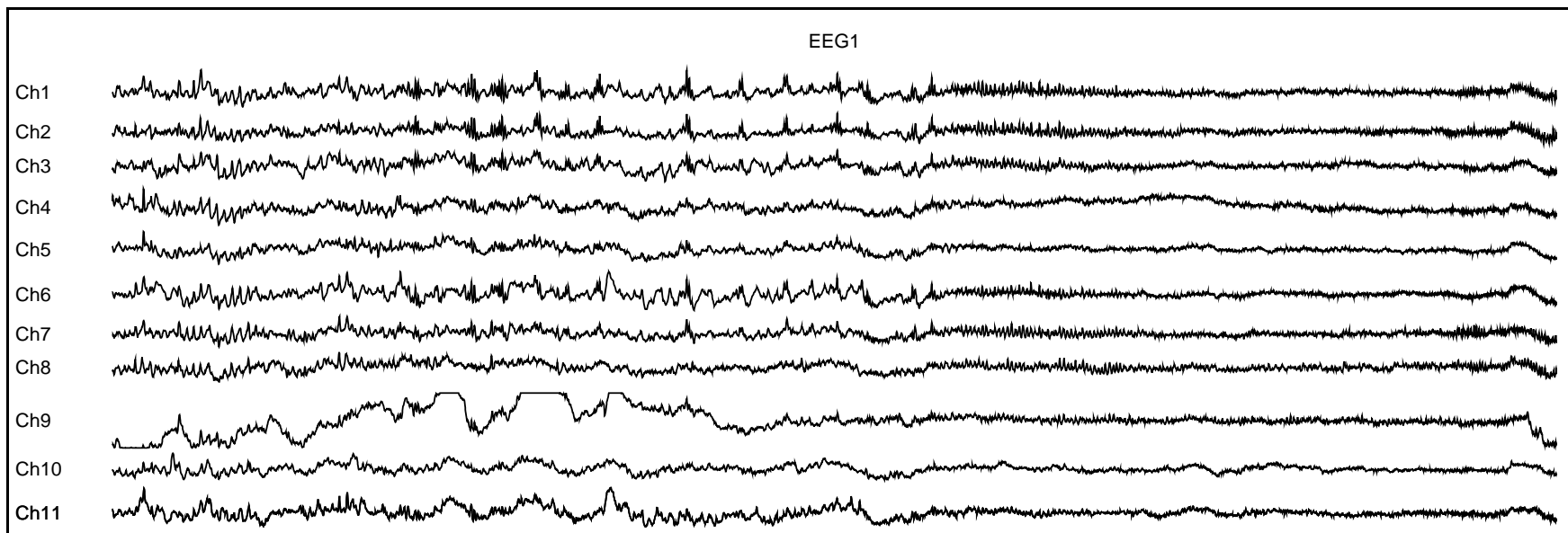
Figur A.1: Første del av datasettet EEGN



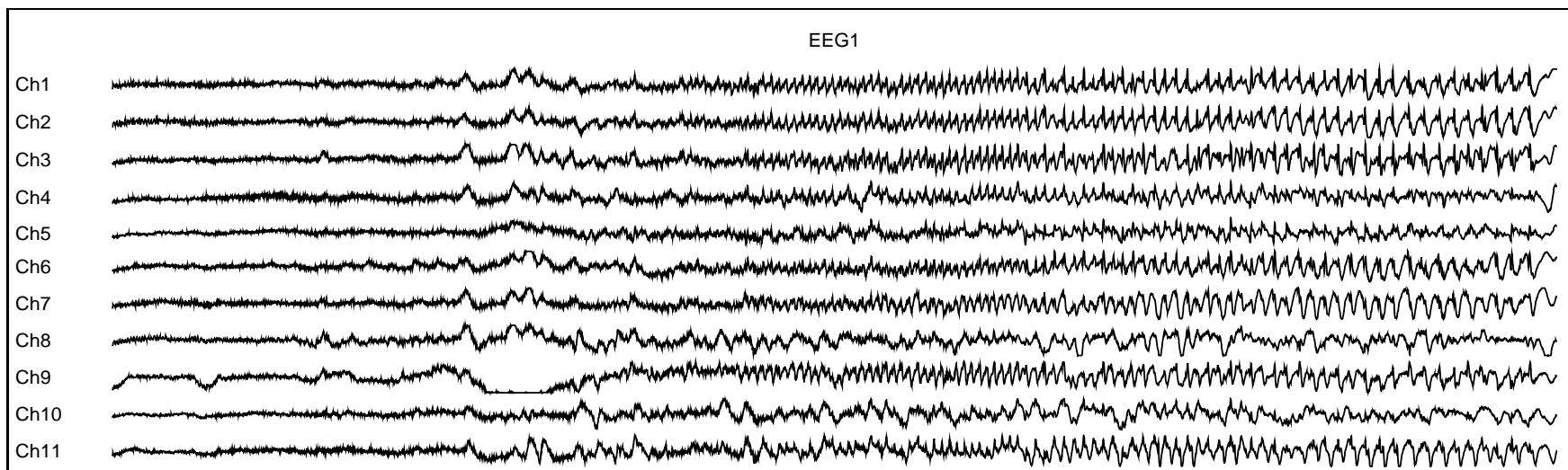
Figur A.2: Andre del av datasettet EEGN



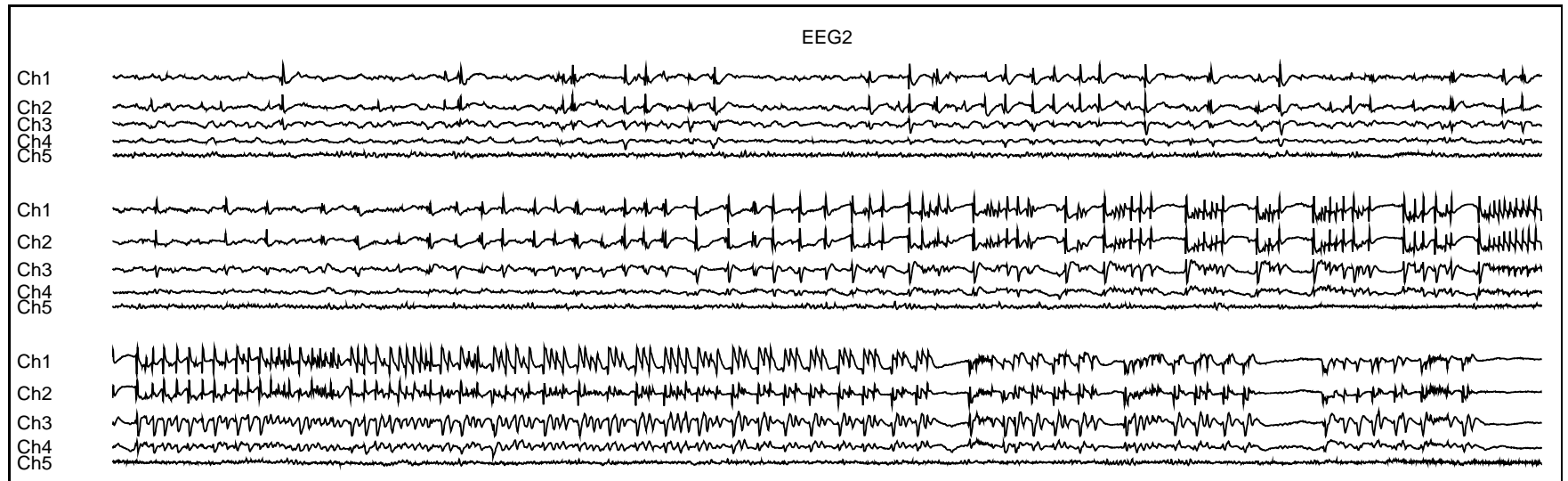
Figur A.3: Siste del av datasettet EEGN



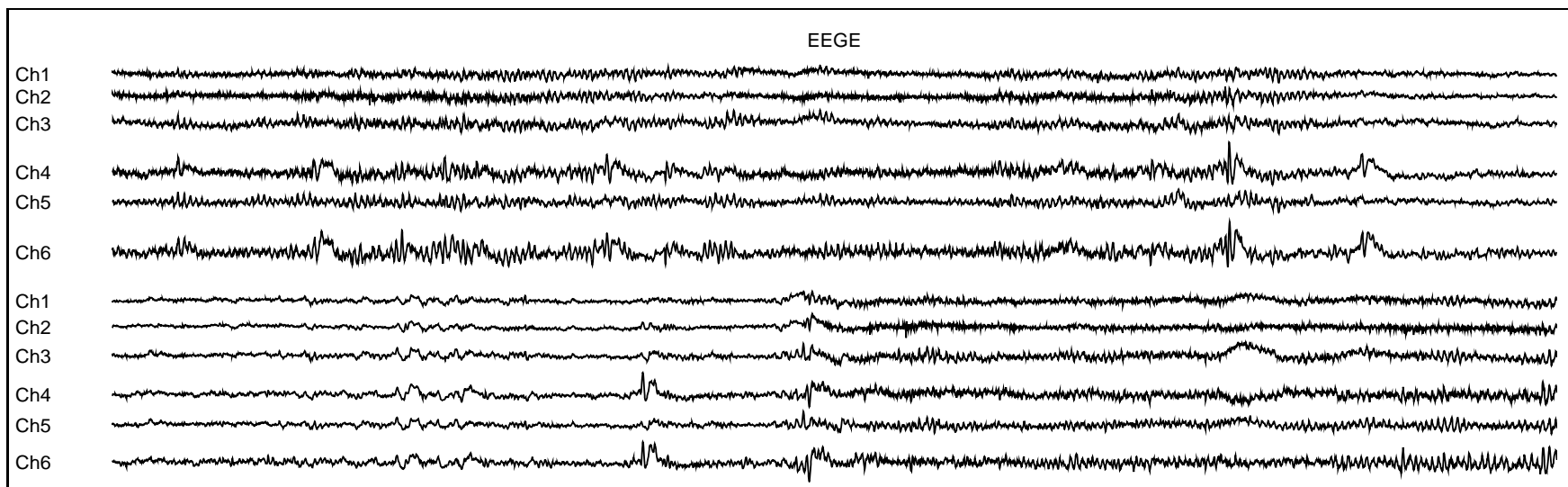
Figur A.4: Datasettet EEG1 består av 12000 simultane målinger registrert i 11 kanaler. Plottet viser de første 6000 sampler = 30 sekunder av datasettet.



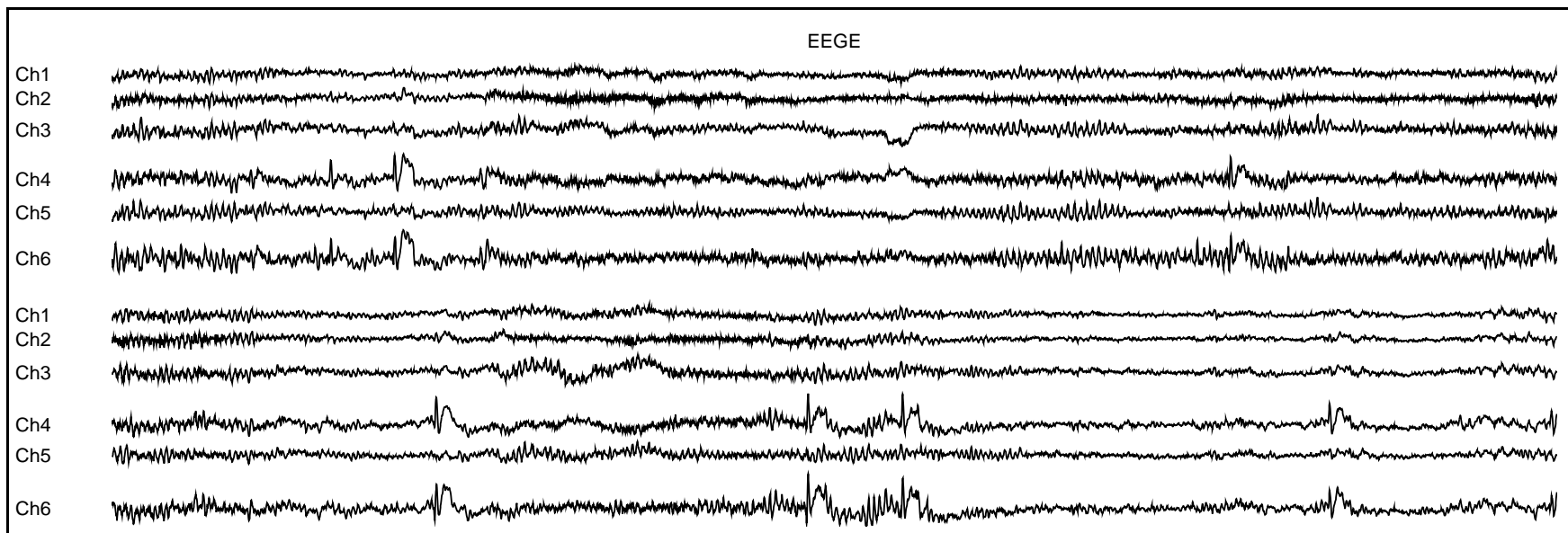
Figur A.5: a) Siste halvpart av datasettet EEG1.



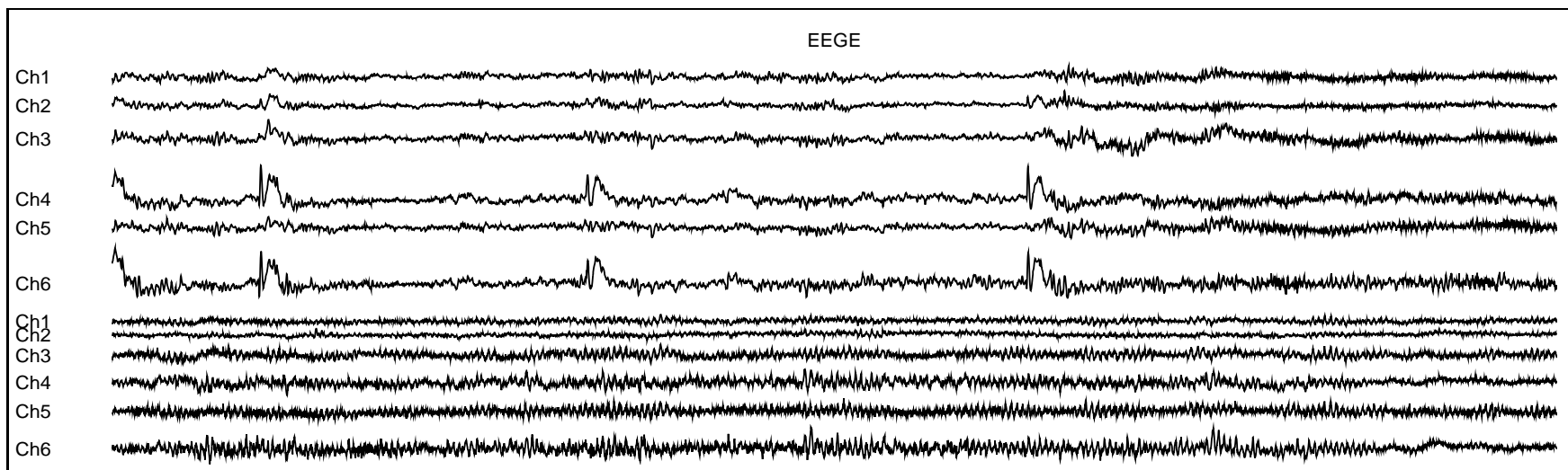
Figur A.6: Datasettet EEG2 hvor 6000 sampler = 30 sekunder er vist på hve linje.



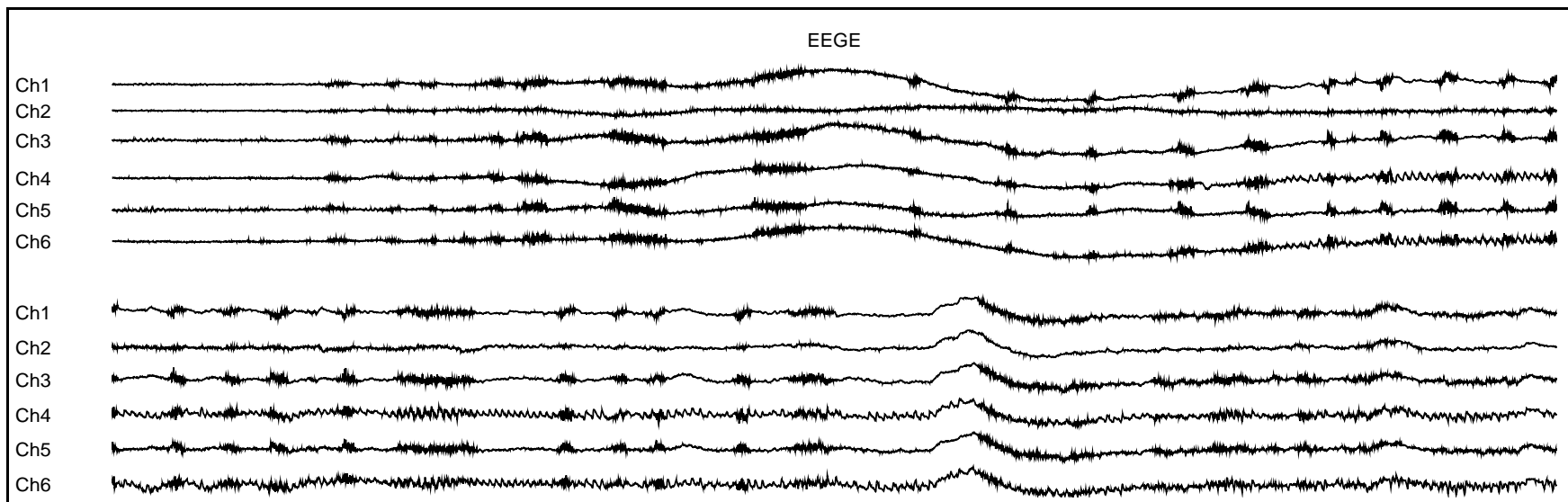
Figur A.7: Første del av datasetet EEGE. Hver rad viser 6000 sampler = 30 sekunder



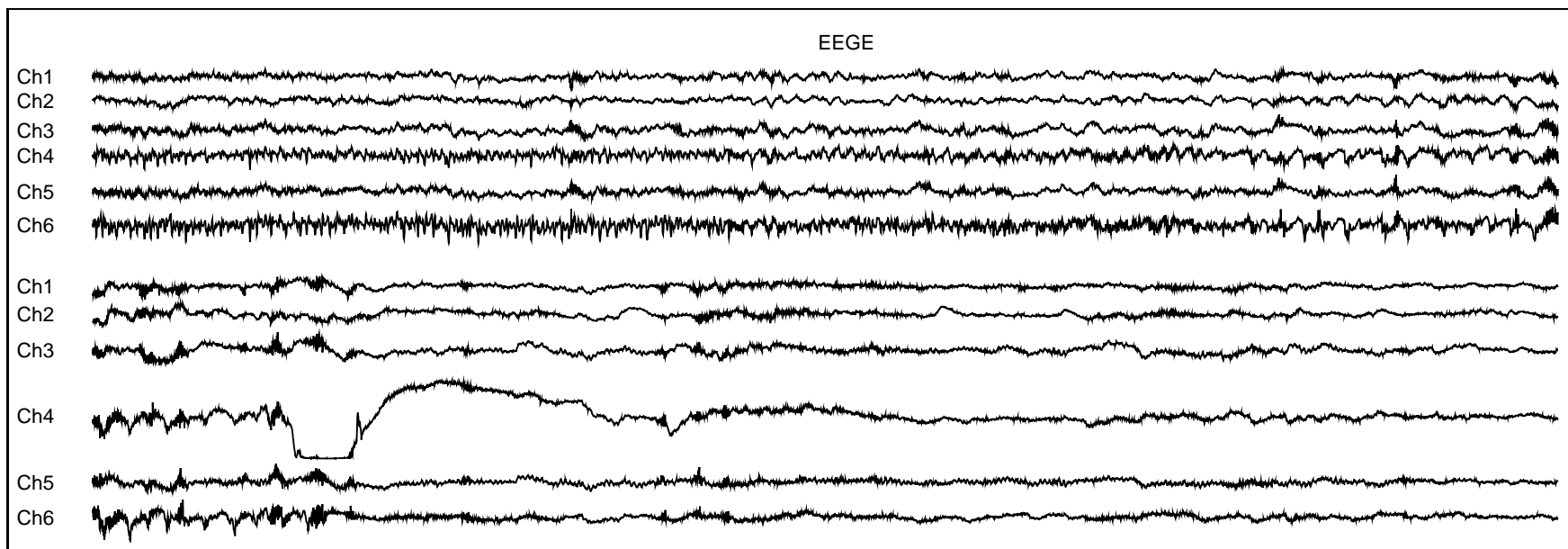
Figur A.8: Andre del av datasetet EEGE. Hver rad viser 6000 sampler = 30 sekunder



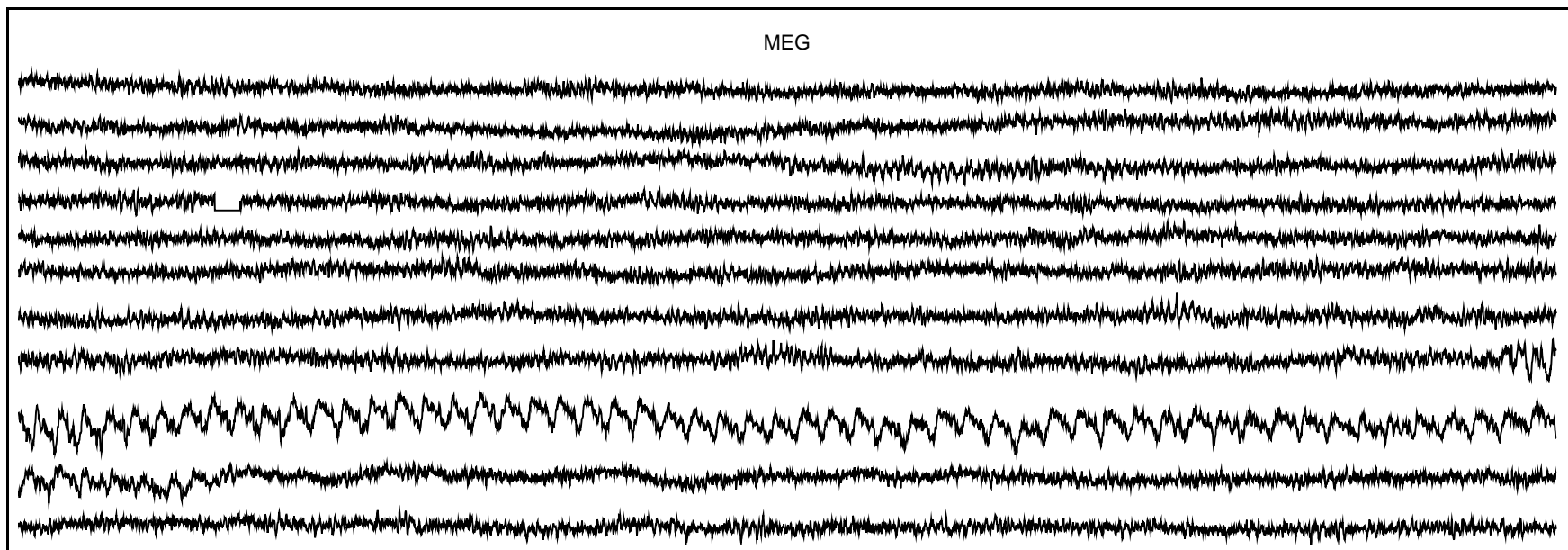
Figur A.9: Tredje del av datasetet EEGE. Hver rad viser 6000 sampler = 30 sekunder



Figur A.10: Fjerde del av datasetet EEGE. Hver rad viser 6000 sampler = 30 sekunder



Figur A.11: Siste del av datasetet EEGE. Hver rad viser 7776 sampler = 38,88 sekunder



Figur A.12: Datasettet MEG hver rad viser 6000 sampler som tilsvarer ca. 20 sekunder.

Vedlegg B

Dimensjonsestimering fra multikanal rekonstruering

Dette vedlegget var ment å være endel av oppgaven. På grunn av tidsnød ble det arbeidet aldri fullført. Hvis man har flere simultane måleserier, kan flere av disse benyttes til rekonstruering av faserommet. Avsnitt B forklarer hvordan rekonstrueringen utføres. Denne teknikken fra rekonstruering har vært benyttet på reelle data, se avsnitt B. Avsnitt B tar for seg dimensjonsestimering fra kunstige data når faserommet har vært rekonstruert fra flere kanaler.

Forkortelser som er benyttet i dette kapitlet er

Forkortelse	betydning
MOD	Method of Delay
MR	Multikanal Rekonstruering
MRMOD	Multikanal Rekonstruering ved MOD
SSA	Singular Spectrum Approach
SSAMR	Multikanal Rekonstruering ved SSA
UR	Univariat Rekonstruering

Multikanal rekonstruering (MR) av faserommet

I [?] er elementene i de rekonstruerte tilstandsvektorene foreslått å være atskilt i rom istedenfor i tid. Gitt n simultane måleserier $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ hvor $X_i = \{x^i(k)\}_{k=1}^N$, kan vi lage et n -dimensjonalt faserom ved å la alle elementene i en tilstandsvektor være målt ved samme tidspunkt men ved forskjellige målepunkter. De rekonstruerte tilstandsvektorene er da gitt ved

$$\underline{x}(k) = \{x^1(k), x^2(k), \dots, x^n(k)\} \quad (\text{B.1})$$

hvor $x^i(k)$ er den k 'te målingen fra i 'te målepunkt. Istedenfor å bestemme en tidsforsinkelse τ som vi gjør ved MOD, bestemmes avstanden mellom elementene i tilstandsvektoren av

den fysiske avstanden mellom målepunktene. Den nedre grensen for avstanden mellom elementene er da bestemt ved hvor fysisk tett det er mulig å plassere målepunktene.

Tidligere resultater fra multikanal rekonstruering av faserommet

EEG registreres i flere kanaler simultant og er derfor et velegnet signal for flerkanal rekonstruering av faserommet (MR). Første publikasjon av dette er sannsynligvis [?]. Senere har det også kommet andre publikasjoner hvor hensikten har vært å påvise at EEG er deterministisk eller kaotisk, en av dem er [?]. I begge publikasjoner fant man ved MR lavere dimensjonsestimater enn ved univariat rekonstruering. Resultatene er gjengitt i tabell B.1. I [?] er EEG registrert i 16 kanaler plassert over hele hodet. 8 kanaler er benyttet til rekonstruering av faserommet av gangen, slik at halve hodet er dekket ved hver rekonstruering. I alt ga dette 4 kombinasjoner av kanaler, hvor de dekket høyre og venstre hjernehalvdel samt front og bakhode. Dimensjonsestimatene gitt i tabell B.1 er beregnet fra disse fire rekonstruksjoner.

Målemetode og tilstand	MOD	MR	Publikasjon
EEG, Jacob Creutzfeldts sykdom	3.7 til 5.4	3.8	[?]
EKG ¹	3.6	2.9	[?]
EEG, avslappet med øynene lukket	ingen metning	4.61, 4.78, 4.94 5.32	[?]

Tabell B.1: Dimensjonsestimater fra rekonstruering av faserommet ved MOD og multikanal rekonstruering (MR).

I følge [?] har vi ingen garanti for at EEG-signalet registrert i to naboelektroder er fra samme attraktor. Som nevnt fanger hver elektrode opp aktivitet over et større område når elektrodene er plassert på skalpen. Hun anbefaler derfor univariat rekonstruering av faserommet for alle kanalene forut for MR. På denne måten kan vi forsikre oss om at det er registrert samme dynamikken i alle kanaler som inngår i den multikanale rekonstrueringen. Ved univariat rekonstruering av faserommet ser man på dynamikken lokalt, mens man ved MR ser på dynamikken over et større område. Relasjonen mellom dynamikken av de globale prosessene og de lokale prosessene er foreløpig ukjent. Artikkelforfatterene forsøker derfor ikke å gi en neurologisk forklaring av forskjellene man finner mellom univariat og multikanal rekonstruering.

Multikanal rekonstruering fra kunstige data

Den eneste måten å utføre multivariabel rekonstruering fra kunstige data, er å benytte simultane måleserier fra alle systemets variable. Tabell B.2 viser resultatene fra dimensjonsestimering som ble utført for å teste algoritmen². Dimensjonen er noe underestimert for Rössler- og Hénon-attraktoren.

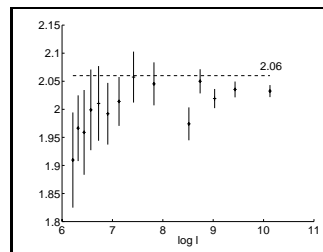
¹EKG eller elektrokardiogram er registreringer av den elektriske aktivitet i hjertemuskelen.

²D.Kugiumtzis har laget en modifikasjon av programmet som er benyttet tidligere i oppgaven for beregningen av korrelasjonsintegralet. Det modifiserte programmet krever at faserommet allerede er

(m, τ)	ν	$\text{std}(\nu)$	D
Lorenz	2.05	(2%)	2.06
Rössler	1.86	(1%)	2.01
Hénon	1.18	(4%)	1.25

Tabell B.2: Faserommet er rekonstruert fra simultane målinger av alle systemets variable. Lengden av de skalare tidsseriene er $N = 2500$. Samplingstettheten for tidsseriene fra Lorenz- og Rössler-systemet er henholdsvis $t_s = 0.1$ og $t_s = 2.0$. Dimensjonsestimatet ν er beregnet over en skaleringsregion av lengde $\frac{L}{l_0} = 4$. Standardavviket til ν over denne skaleringsregion er gitt ved $\text{std}(\nu)$.

Ved å benytte varierende samplingstetthet under én verdi for epoke, kan vi finne hvor følsom algoritmen er for antall punkter i tidsserien. Figur B.1 viser dimensjonsestimater fra varierende antall punkter i tidsserien hvor faserommet består av tidsserier fra x -, y -, og z -variabelen fra Lorenz-systemet. Epoken er av lengde $E = 250$ mens lengden av samplingintervallet varierer fra $t_s = 0.01$ til 0.05 . Antall punkter i tidsseriene varierer da fra 500 til 25000. Som forventet øker usikkerheten av dimensjonsestimatene med avtakende antall punkter i tidsserien. I tillegg får vi underestimering. Selv for $N = 550$ er et skaleringsintervall tilsvarende $\frac{L}{l_0} = 4$ at både variasjonene i skaleringsintervallet og underestimeringen er mindre enn 5%.



Figur B.1: a) Førsteaksen angir \log_{10} av antall punkter i tidsseriene, men andreaksen er dimensjonsestimater med standardavvik av skaleringsintervallet. Faserommet består av tidsserier fra x -, y - og z -variabelen fra Lorenz-atraktoren.

Kombinasjon av MR og MOD (MRMOD)

I [?] er en kombinasjon av MOD og MR foreslått som “den optimale” imbedding når vi har flere simultane måleserier. Om vi har for få simultane måleserier, kan vi øke imbeddingsdimensjonen ved å anvende MOD på hver enkelt tidsserie. For hver tidsserie får vi et lavdimensjonalt faserom. Disse kombinerer vi så til et faserom av høyere dimensjon. Øns-

rekonstruert slik at beregningen av korrelasjonintegralet er uavhengig av hvilken metode man velger for å rekonstrueringen.

ker vi å beskrive dette matematisk, er hvert lavdimensjonale faserom R^i , rekonstruert fra tidsserien $X_i = \{x_j^i\}_{j=1}^N$ hvor i betegner i 'te målepunkt, et gitt ved

$$R^i = \begin{bmatrix} x_1^i & x_{1+\hat{\tau}}^i & \cdots, x_{1+(\hat{m}-1)\hat{\tau}}^i & \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ x_{N-(\hat{m}-1)\hat{\tau}}^i & x_{N-(\hat{m}-1)\hat{\tau}}^i & \cdots & \cdots, x_N^i \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Dette er et underrom av den endelige rekonstrueringen

$$R = [R_1 | R_2 | \dots | R_n] \quad (\text{B.3})$$

Parametrene \hat{m} og $\hat{\tau}$ er imbeddingsdimensjon og tidsforsinkelsen for rekonstruering ved MOD av underrommet R^i . Imbeddingsdimensjonen til R er gitt ved $m = \hat{m} * n$. Ved denne teknikken for rekonstruering er det to parametre som vi må velge parameterverdier for; \hat{m} og $\hat{\tau}$.

Valg av parameterverdier for \hat{m} og $\hat{\tau}$

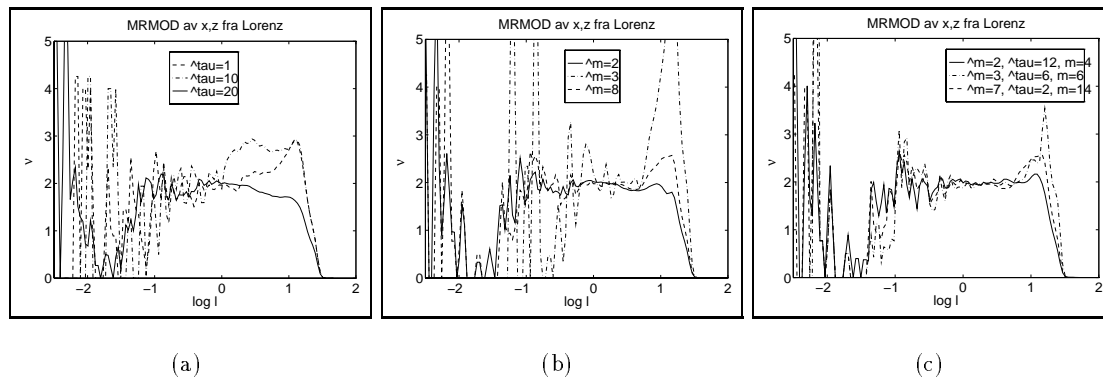
Parameteren \hat{m} bestemmes ut fra antall tilgjengelige simultane måleserier, n , og ut fra hvilken dimensjon, m , vi ønsker for det endelige rekonstruerte faserommet. Takens teorem ($m \geq 2D+1$) gjelder for rekonstruering fra en uendelig mengde støyfrie data fra én variabel. Det er naturlig å anta at Takens teorem også skulle gjelde for rekonstruering av faserommet fra simultane målinger fra flere av systemets variable når mengden data er uendelig og støyfri. Den nedre grensen for m velges derfor ut fra Takens teorem og hvilken dimensjon vi tror at attraktoren har.

Ved valg av parameterverdi for $\hat{\tau}$ gjelder de samme kriterier som for valg av τ for vanlig rekonstruering ved MOD. Vi ser på tidsforsinkelsesvektoren $\underline{x}_j^i = \{x_j^i, x_{j+\hat{\tau}}^i, \dots, x_{j+(\hat{m}-1)\hat{\tau}}^i\}$. Parameterverdien for $\hat{\tau}$ velges ikke slik at første og siste element i vektoren er så korrelerte at de nesten er identiske. Verdien for $\hat{\tau}$ velges heller ikke så stor at første og siste element er dekorrelerte.

Vi forventer at samme kriterier for valg av parameterverdier gjelder for rekonstruering ved MRMOD som ved vanlig rekonstruering ved MOD. Det vil si at vinduslengden $\hat{w} = (\hat{m}-1)\hat{\tau}$ er den kritiske parameter for rekonstrueringen. Dette bekreftes av plottene i figur B.2.

Figur B.2 viser den deriverte av korrelasjonsintegralet beregnet fra rekonstruksjoner med MRMOD av tidsserier fra x - og z -variabelen fra Lorenz-attraktoren. Lengden av tidsseriene er $N = 2500$ mens samplingstettheten er $t_s = 0, 1$. Figur B.2 a) viser at skaleringsintervallet forsvinner med økende vinduslengde når \hat{m} er konstant og $\hat{\tau}$ øker. Siden \hat{m} er konstant er også imbeddingsdimensjonen m den samme for alle rekonstruksjonene vist i dette plottet. Å holde $\hat{\tau}$ konstant og øke \hat{m} fører også til at vinduslengden øker. Vi ser i figur B.2 b) at skaleringsintervallet forsvinner også ved dette tilfellet. I det siste plottet, figur B.2 c), ser vi at stigningstallet er uavhengig av rekonstrueringen så lenge vinduslengden \hat{w} er den samme.

Å øke \hat{m} medfører at imbeddingsdimensjonen m også øker. Korrelasjonsintegralene som figur B.2 b) og c) er laget fra, er alle beregnet ved $m = 2\hat{m}$. Det er naturlig at samme verdi for vinduslengden \hat{w} er optimal for rekonstruering ved MRMOD som ved vanlig rekonstruering med MOD. Dette er imidlertid ikke undersøkt nærmere her.



Figur B.2: Fra x - og z -variabelen fra Lorenz-attraktoren er faserommet rekonstruert ved MRMOD. I a) er $\hat{m} = 6$ og $\hat{\tau}$ som gitt i figuren. I b) er $\hat{\tau} = 6$ og \hat{m} som gitt i figuren. I c) er vinduslengden konstant lik $\hat{w} = 12$.

Samplings tettheten

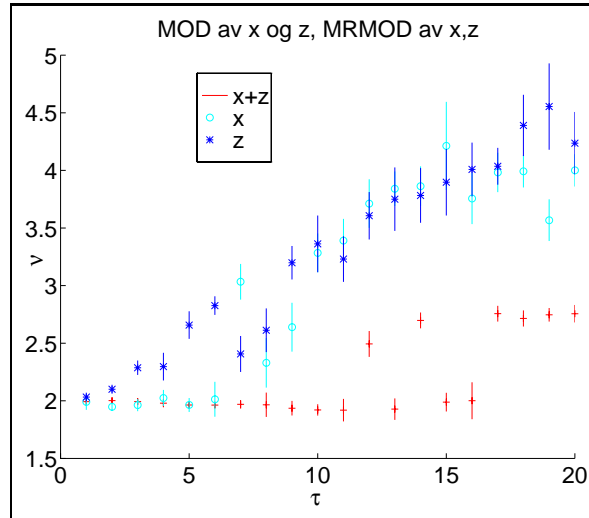
At rekonstrueringen med MRMOD er bestemt ved vinduslengden, \hat{w} , gir MRMOD en fordel fremfor MOD når samplingstettheten er liten. Ved rekonstruering med MOD fra ett skalart signal, må vi i tillegg til å velge en gunstig vinduslengde, velge en imbeddingsdimensjon stor nok til å tilfredsstille $m \geq 2D + 1$. Hvis samplingstettheten er liten, lar ikke disse to kriteriene seg alltid kombinere. En høy imbeddingsdimensjon vil føre til en for stor vinduslengde. Ved MRMOD trenger vi imidlertid ikke velge $\hat{m} \geq 2D + 1$, men $m \geq 2D + 1$. Siden imbeddingsdimensjonen m avhenger av antall simultane målinger ved sammenhengen $m = n\hat{m}$, bestemmes parametrene $\hat{\tau}$ og \hat{m} ut fra

$$\hat{m} = \frac{m}{n} \quad \text{og} \quad \hat{\tau} = \frac{\tau(m-1)}{\frac{m}{n} - 1}. \quad (\text{B.4})$$

Ved MRMOD er det mulig å velge en mindre vinduslengde enn ved MOD og likevel ha en tilstrekkelig høy imbeddingsdimensjon. Dette er illustrert i figur B.3. Vi ser at ved MRMOD gir underestimering, men at avviket fra Lorenz-attraktorens fraktale dimensjonen er langt mindre for større tidsforsinkelser ved MRMOD enn ved MOD.

Oppsummering

Parameterverdi for $\hat{\tau}$ for rekonstruering av faserommet ved MRMOD bør velges etter samme kriterier som τ for vanlig rekonstruering med MOD. Hvis samplingstettheten er liten, synes rekonstruering ved MRMOD å være fordelaktig fremfor rekonstruering vanlig rekonstruering ved MOD.



Figur B.3: I figuren betyr x at faserommet er rekonstruert ved MOD fra tidsserier fra x -variabelen fra Lorenz-systemet. Tilsvarende er det for symbolet z . Tegnet $x + z$ betyr at faserommet er rekonstruert ved MRMOD fra tidsserier fra x - og z -variabelen fra Lorenz-systemet. Plottet viser dimensjonsestimater fra de nevnte rekonstrueringer av faserommet. Parameterverdiene for rekonstrueringen er $m = 6$ for MOD og \hat{m} for MRMOD. Førsteaksen i plottet er tidsforsinkelsen τ . For MRMOD er $\hat{\tau} = \tau$.

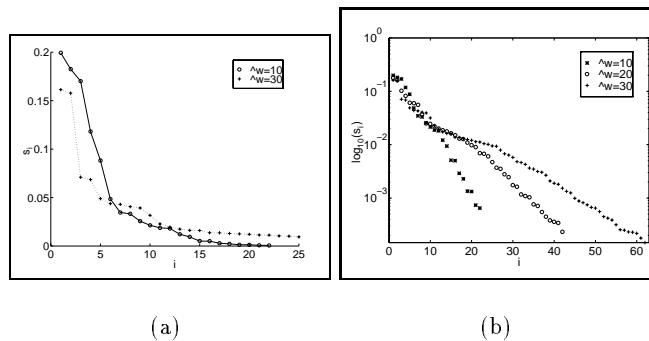
Kombinasjon av SSA og MR (SSAMR)

Som for de skalare tidsrekkene kan vi rekonstruere faserommet med SSA når vi benytter flere simultane måleserier. For hver tidsserie lager vi en initiell imbedding med MOD hvor tidsforsinkelsen velges lik $\hat{\tau} = 1$ og $\hat{m} = \hat{w} + 1$. Vi har nå like mange mengder av dimensjon \hat{m} som antall simultane måleserier. Disse mengdene kombinerer vi til et høydimensjonalt faserom som gitt i likning B.3. På dette faserommet utfører vi så en SVD og projiserer den initielle imbeddingen på prinsipalaksene. Dette kan sammenlignes med en rotasjon av faserommet. Av det roterte faserommet beholder vi prinsipalkomponentene med størst varians.

Valg av parametre

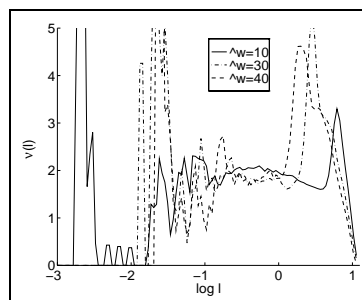
Som ved de tidligere nevnte metoder for rekonstruering av faserommet ønsker vi $m \geq 2D + 1$. Når vi benytter SSA konvergerer alltid korrelasjonsintegralet med økende imbeddingsdimensjon. Vi trenger derfor kun å velge m tilstrekkelig stor. Ved støyfylte data viser de siste singularverdiene ett flatt spekter, og vi reduserer imbeddingsdimensjonen ved å kaste de prinsipalkomponenter hvis singularverdier gir et flatt spekter. Ved støyfrie data er det ikke like opplagt ut å velge en øvre grense for imbeddingsdimensjonen, m , ut fra singularverdiene. Figur B.4 viser singularverdiene for en rekonstruering av faserommet ved SSAMR fra tidsserier fra y - og z -variabelene fra Lorenz-atraktoren. Lengden av tidsseriene er $N = 2500$, og samplingstettheten er $t_s = 01$. De minste singularverdiene gir tilsynelatende ett flatt spekter, figur B.4 a). Ser vi på den logaritmiske verdien av singularverdiene, er imidlertid ikke spekteret flatt, figur B.4 b). Singularverdiene gir et lite platå. Prinsipalkomponentene

til singularverdiene etter platået kastes, dvs. med indeks større enn 10.



Figur B.4: Faserommet er rekonstruert med SSAMR for tidsserier fra y - og z -variabelen fra Lorenz-atraktoren. Plottene viser i a) absoluttverdiene av singularverdiene, i b) $\log_1 0$ av singularverdiene.

For MRMOD så vi at dimensjonsestimatene ble dårlige når vinduslengden ble for stor. Vi forventer at rekonstruering av faserommet bestemmes ved vinduslengden \hat{w} også for rekonstruering ved SSAMR. Figur B.5 viser at skaleringsintervallet forsvinner ovenfra når vinduslengden økes.



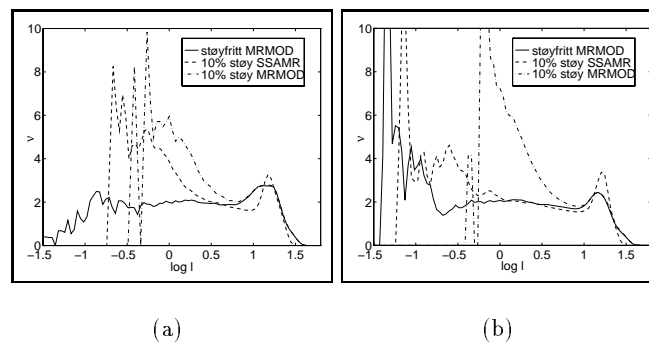
Figur B.5: a) Den deriverte av korrelasjonsintegralet for tidsrekker fra y og z -variabelen fra Lorenz-systemet når faserommet er rekonstruert ved SSAMR med imbeddingsdimensjon $m = 7$. Vinduslengden \hat{w} er angitt i plottet.

Oppsummering: Fremgangsmåten for rekonstruering av faserommet ved SSAMR velges tilsvarende fremgangsmåten for rekonstruering av faserommet ved SSA. Vinduslengden \hat{w} er den kritiske parameter. Denne velges lik gjennomsnittlig periode i signalet fordi dette var gunstig ved rekonstruering ved SSA i forbindelse med dimensjonsestimering. Etter rekonstrueringen kastes de prinsippkomponentene hvis singularverdier gir et flatt spekter.

MRMOD og SSAMR fra tidsserier med hvit støy

I dette avsnittet gjøres en liten sammenligning av teknikkene MRMOD og SSAMR for rekonstruering av faserommet når tidsseriene inneholder hvit støy. Ved univariat rekonstruering ved SSA så vi i kapittel 7 at SSA er et effektivt filter mot hvit støy. Vi forventer derfor at SSAMR er mer robust mot hvit støy enn MRMOD.

Når samplingstettheten er stor som ved tidsseriene benyttet ellers i dette kapitlet ($t_s = 0.1$), består vinduslengden \hat{w} av få elementer. Når samplingstettheten er stor, er forskjell i korrelasjonsintegralene fra rekonstruering ved MRMOD og SSAMR liten, se figur B.6 a). Ved større samplingstetthet er filtereffekten av rekonstruering ved SSAMR større, se figur B.6 b).



Figur B.6: Plottene viser de deriverte av korrelasjonsintegralene fra et forsøk hvor faserommet er rekonstruert ved MRMOD og SSAMR fra tidsserier av lengde $N = 5000$ fra y - og z -variabelen fra Lorenz-systemet. Tidsseriene er tilført 10% støy. Realiseringene av støy er forskjellige for de forskjellige tidsseriene. a) Samplingstettheten av tidsseriene er $t_s = 0.1$. Parametrene for rekonstruering av faserommet er $\hat{w} = 10$, $m = 6$ ved SSAMR, $\hat{m} = 3$ og $\hat{\tau} = 5$ for MRMOD. b) Samplingstettheten er $t_s = 0.01$. Faserommet er rekonstruert ved $\hat{w} = 104$, $m = 8$ for SSAMR, $\hat{\tau} = 13$, $\hat{m} = 4$ for MRMOD.

Oppsummering: Rekonstruering ved SSAMR anbefales fremfor rekonstruering ved MRMOD hvis tidsseriene antas å inneholde hvit støy, spesielt hvis samplingstettheten er stor.

Vedlegg C

Filtrering ved IIR-filtre

IIR-filtre (Infinite Impulse Response) er 10 ganger så effektive som FIR-filtre (Finite Impulse Response), men gir ulineær faseforskyvning.

I forbindelse med dimensjonsestimering ønsker vi at dimensjonen skal være invariant for filtreringen. I [?] er det vist teoretisk og empirisk at filtrering ved IIR-filtre fører til en økning i dimensjonsestimatene. Teoretisk gjør de det ved å se på Lyapunovdimensjonen. Denne dimensjonen samt definisjonen for Lyapunoveksponenter blir gitt til slutt i dette avsnittet.

Den enkleste formen av et IIR-filter er et første ordens lineært lavpassfilter, på diskret form gitt ved

$$z(k+1) = e^{\eta t_s} z(k) + x(k+1) \quad (\text{C.1})$$

hvor η er knekkfrekvensen.

I [?] er det vist at lavpassfiltrering ved et slikt filter tilsvarer å innføre en ny tilstandsvariabel, $\hat{z}(k)$, til systemet. Hvis vi filtrerer målingene fra x -variabelen fra Hénon-systemet og lar $z(k)$ være det filtrerte signalet, kan system og filter uttrykkes som

$$\begin{aligned} x(k+1) &= 1 + y(k) - ax(k)^2 \\ y(k+1) &= bx(k) \\ \hat{z}(k+1) &= e^{\eta t_s} \hat{z}(k) \end{aligned} \quad z(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \\ \hat{z}(k) \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Siden et dynamisk system har like mange Lyapunoveksponenter som tilstandsvariable, har vi ved dette lavpassfilteret innført en ny Lyapunov-eksponent, $\lambda_f = -\eta$. Ved å se på Lyapunovdimensjonen D_L , kan det vises at dimensjonen beregnet fra det lavpassfiltrerte signalet avhenger av η , [?] og [?].

I dette kapitlet er tidsserier fra Lorenz-systemet benyttet for å teste støyfølsomheten av algoritmen. Lorenz-systemet har opprinnelig tre Lyapunoveksponenter¹; $\{0.85, 0, -14.52\}$ Lyapunovdimensjonen som funksjon av knekkfrekvensen av filteret er for et system med

¹Lyapunoveksponentene er beregnet ved programpakken `insite` når parameterverdiene for Lorenz-atraktoren er som i avsnitt 2.3.1.

opprinnelig tre LyapunovekspONENTER gitt ved

$$D_L(\eta) = \begin{cases} 2 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_3|} & \text{for } -\eta < \lambda_3 \\ 2 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_3|} & \text{for } \lambda_3 < -\eta < -\lambda_1 \\ 3 + \frac{\eta}{|\lambda_3|} & \text{for } -\lambda_1 < -\eta < 0 \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Ved filtrering med førsteordens lavpassfilteret gitt i likning C.1 med knekkfrekvens $\eta = 5.5$, innføres en ny LyapunovekspONENT $\lambda_f = 5.5$. Lyapunovdimensjonen blir da $D_L(5.5) = 2.15$.

LyapunovekspONENTER

Hvor fort to løsningsbaner divergerer eller konvergerer på attraktoren kan variere med lokaliseringen. LyapunovekspONENTene er et gjennomsnittlig mål for denne divergensen og konvergens og følgelig uavhengig av initialbetingelsene. Vi beregner dem ved å linearisere systemet og beregne Jacobimatrisa og dens egenverdier, Λ_k , i hvert punkt på løsningsbanen. LyapunovekspONENTene, $\{\lambda_k\}_{i=1}^n$ hvor n er systemets antall LyapunovekspONENTer, er da definert ved

$$\lambda_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\Lambda_k| \quad (\text{C.4})$$

forutsatt at grensen eksisterer [?]. Denne definisjonen gjelder både for kontinuerlige og diskrete systemer [?].

Siden hver LyapunovekspONENT er gitt ved en egenverdi fra Jacobimatrisa, er den også forbundet med retningen i rommet gitt ved den tilhørende egenvektoren. At to løsningsbaner konvergerer eller divergerer i en retning vil si at attraktoren kontraheres eller ekspanderes i denne retningen. Hvis LyapunovekspONENTen er negativ, er retningen til egenvektoren stabil og attraktoren kontraheres. Hvis LyapunovekspONENTen er positiv er retningen ustabil og attraktoren ekspanderer. De stabile retningene vil imidlertid sørge for at løsningsbanene holder seg innenfor det avgrensede området som attraktoren er definert ved. Eksempler på systemer hvor alle LyapunovekspONENTene er negative, er systemer som har et likevektspunkt som sin stasjonærtstand. Periodiske systemer i planet har en negativ LyapunovekspONENT og en lik null, og stasjonærtstanden er da en grensesyklus. Hos systemer hvor to LyapunovekspONENTer er lik null og resten negative, danner de stasjonære løsningsbanene en todimensjonal torus. Hos kaotiske systemer er alltid den største LyapunovekspONENTen positiv. Hvis systemet er kontinuerlig kaotisk, vil alltid én LyapunovekspONENT være lik null, og siden systemet er dissipativt vil $\sum_j \lambda_j < 0$.

Lyapunovdimensjonen

blir også kalt Kaplan-Yorke-dimensjonen. Hvis vi ordner mengdens LyapunovekspONENTer etter avtakende verdi $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n$ er Lyapunovdimensjonen definert ved

$$D_{KL} = j + \sum_{k=1}^j \frac{\lambda_k}{|\lambda_{j+1}|} \quad (\text{C.5})$$

hvor j er den største indeksen som gir at $\sum_{k=1}^j \lambda_k \geq 0$. I de fleste tilfeller er $D_{KL} \geq \nu$ [?] slik at vi har forholdene $D \leq \nu \leq D_{KL}$.

Vedlegg D

Autokorrelasjonsfunksjonen

Autokorrelasjonsfunksjonen er i oppgaven beregnet ved hjelp av funksjonen `xcorr` i Matlab. Vi finner estimert autokorrelasjonsfunksjon for en tidsserie ved å anta at det er en lineær sammenheng mellom de verdiene som er målt ved tidspunktene $t_i, i = 1, \dots, N - \tau$ og de målingene som er tatt ved tidspunktene $t_{i+\tau}$, altså τ tidsenheter senere. Hvis vi antar at $x_i = x(t_i)$ er målingene tatt ved tidspunktene t_i , får vi

$$x_{i+\tau} - \bar{x} = R(\tau)[x_i - \bar{x}] \iff \begin{bmatrix} x_{1+\tau} - \bar{x} \\ x_{2+\tau} - \bar{x} \\ \vdots \\ x_N - \bar{x} \end{bmatrix} = R(\tau) \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x} \\ x_2 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_{N-\tau} - \bar{x} \end{bmatrix},$$

hvor $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ er middelverdien over alle målingene.

Når vi nå ønsker å minimere variansen av feilen som dette gir, får vi et minste kvadraters problem. Variansen av feilen er gitt ved:

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(x_{i+\tau} - \bar{x}) - R(\tau)(x_i - \bar{x})]^2$$

Minimerer vi med hensyn på $R(\tau)$ får vi definisjonen av autokorrelasjonsfunksjonen:

$$R(\tau) = \frac{\frac{1}{N-\tau} \sum_{i=1}^{N-\tau} (x_{i+\tau} - \bar{x})(x_i - \bar{x})}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Hvis autokorrelasjonsfunksjonen benyttes til lineær predikering er den predikerte verdi $x_{i+\tau}$ basert på x_i gitt ved

$$x_{i+\tau} = \bar{x} + R(\tau)(x_i - \bar{x}) \quad (\text{D.1})$$

når $\{x_i\}_{i=1}^N$ er målingene $x(t_i)$. Når $R(\tau) = 0$, antas ingen lineær sammenheng mellom målingene som er tatt med τ tidsenheters avstand og den beste lineære prediktor basert på $R(T)$ er middelverdien $E[x(t)]$.

Vedlegg E

Matlab-programmer

Rekurrensplott i sort-hvitt

```
function [sp,avst] = rekurrensplotantpkt(tidsserie,antpkt,m,tau, K, M,navn)
%[sp,avst] = rekurrensplotantpkt(tidsserie,antpkt,m,tau, K, M,navn)
% Lager et rekurrensplott for gitt tidserie, hvor tau er tidsforsinkelsen
% i det rekonstruerte faserommet og m er dimensjonen for dette.
% Her fra en tidserie!
% hvis vi ikke ønsker å telle med de punktene som kastes pga
% autokorrelasjonslengden ...
% Setter antall referansepunkter M, avstand mellom referansepunktene er delta=
% anse verdien på 1.akse som referansepunktnr. og y-aksen so indeksen til
% nabopunktene
% Lar hver hyperkube inneholde et fast antall punkter => ikke nødvendigvis
% r(i)==r(j), hvor r(i) er radien i ballen. antpkt er antall punkter i hver
% kube

if nargin < 7,
    navn = ' ';
end;

clf, hold off
N=length(tidsserie);

% setter default verdier for K og M
if nargin == 4,
    K=0;
    M=N-(m-1)*tau;
elseif nargin == 5,
    M=N-(m-1)*tau;
end

if M > N-(m-1)*tau,
```

```

M=N-(m-1)*tau;
end

delta= (N-tau*(m-1)-1)/(M-1); % (num_embedded_pts -1)/(num_ref_pts - 1)
if K==0, K=1; end;
a=[0, N-(m-1)*tau, 0, N-(m-1)*tau]
axis(a)
hold
% bygger opp m tidsforsinkelsesvektorer:
for indeks = 1:delta:N-(m-1)*tau,
    indeks=round(indeks);
    x = tidsserie(indeks:tau:indeks+(m-1)*tau);
    for k = 1:N-(m-1)*tau,
        maks(k)=max(abs(tidsserie(k:tau:k+(m-1)*tau) - x)); %beregner _alle_
                                                                %avstander fra x
    end;

    [Y,ksort] = sort(maks);
    f=find(abs(ksort -indeks) < K);
    if ~isempty(f),
        ksort(f)=[];
        Y(f)=[];
    end

    avst(indeks,:)= Y(1:antpkt);
    plot(indeks*ones(1,antpkt),ksort(1:antpkt),'.')

end;

title(navn)
%xlablet([ntex(['m='],int2str(m),' ']),gtex('t ='),ntex([' '],int2str(tau),' ', M=',int2str(
%xlabel(['ref punkter j, tau=',int2str(tau),' ', m=',int2str(m),' ', K=',int2str(K),' ', antpkt
%ylabel('nabopunkter i')

%print -dps /hom/hildem/matlab/Plott/rekanf4del1.ps

```

Rekurrensplott i farger

```

function [cdist,avst] = rekfarge(tidsserie,m,tau,M,navn);
% [cdist,avst] = rekfargeny(tidsserie,m,tau,M,navn);

```

```

N=length(tidsserie);
if nargin < 4,
    M=N-(m-1)*tau;
    navn = ' ';
elseif M > N-(m-1)*tau,
    M=N-(m-1)*tau;
end

[cdist,v,avst]= comp_dist(tidsserie,m,tau,M); % beregner alle avstander i datasettet
% NB!!! satt inn dette for kun aa plotte triangulaer-matrisa %%%
%cdist = avst;
%max(abs(cdist-avst))
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Lager nå rekurrensplottet:
[m,n]=size(cdist);

delta=m/n;
v=1:delta:m;
imagesc(v,flipud(v'),cdist)
colormap(flipud(jet))
a=axis;
a(3)=-200;
axis(a)
hold
tidsserie=tidsserie-(min(tidsserie));
z=-200+(tidsserie/max(tidsserie))*190;
h=plot(z,'w');
h2=plot(zeros(1,958),'k');
yt=get(gca,'ytick');
yt(1)=[];
set(gca,'ytick',yt);
ytick=get(gca,'yticklabels');
ytick(1,:)=[];

colorbar

%title(navn);
%xlabel(['referansepunkter, N=',int2str(length(tidsserie)),', m=',int2str(m),', tau=',int2str(tau)
%ylabel('indekser til nabopunktene')

function [loc_dist,v,dist]=comp_dist(tidsserie,m,tau,M);

N=length(tidsserie);
if nargin ==3,
    M=N-(m-1)*tau;

```

```

elseif M > N-(m-1)*tau,
    M=N-(m-1)*tau;
end
M
delta= (N-tau*(m-1)-1)/(M-1); % (num_embedded_pts -1)/(num_ref_pts - 1);
v = 1:delta:N-(m-1)*tau-1;

if M==N-(m-1)*tau,% hvis alle pt er refpt: benytter at det blir en diagonalmatr
    for teller=1:M-1,
        i = round(v(teller));
        x = tidsserie(i:tau:i+(m-1)*tau);
        for j=1+i:N-(m-1)*tau,
            maks=max(abs(tidsserie(j:tau:j+(m-1)*tau)-x));
            dist(j-1,teller) = maks;
        end
    end
    loc_dist = dist + tril(dist)';
else % beregner avstanden mellom alle punktene (også flere ganger)
    for teller=1:M-1,
        i = round(v(teller));
        x = tidsserie(i:tau:i+(m-1)*tau);
        for j=1:N-(m-1)*tau,
            maks=max(abs(tidsserie(j:tau:j+(m-1)*tau)-x));
            dist(j,teller) = maks;
        end
    end
    loc_dist = dist;
end

%loc_dist(:,M)=dist(1,:)';

```

Toppunktsalgoritme

```

function[topp,anttopp] = topp2(tidsserie,terskel,dmin);
% skal plukke ut den høyeste verdi for hvert "utslag" (eeg-målinger)

if nargin < 2,
    terskel = 30% 2000 ;%2400; % tar ikke med topper med amplitude < 2200
    dmin     = 19;
elseif nargin <3,
    dmin     = 19; % tar ikke med "småtopper tett opp til en topp ~støy?
end
dmin

N=length(tidsserie);
anttopp=0;

```

```

i=1;

while anttopp ==0,
    while tidsserie(i) < tidsserie(i+1), i=i+1; end;
    if tidsserie(i) > terskel,
        anttopp = 1;
        topp(anttopp) = i;
    end;
    i=i+1;
end;

while i < N-1,
    if tidsserie(i) > terskel & tidsserie(i) > tidsserie(i+1),
        if tidsserie(i) > tidsserie(toppp(anttopp)) & i-toppp(anttopp) > dmin,
            anttopp=anttopp+1;
            topp(anttopp)=i;
        elseif tidsserie(i) > tidsserie(toppp(anttopp)) & i-toppp(anttopp) < dmin,
            topp(anttopp)=i;
        elseif tidsserie(i)< tidsserie(toppp(anttopp)) & i-toppp(anttopp) > dmin,
            anttopp=anttopp+1;
            topp(anttopp)=i;
        end; % fi
    end; %fi
    i=i+1;
end; %while

subplot(2,1,1)
plot(1:N, tidsserie, topp,tidsserie(toppp),'o')

subplot(2,1,2)
f=200;
td= diff(toppp)./f;
mintd = min(td);
maxtd=max(td);
meantd = mean(td);
plot(toppp(1:length(toppp)-1)./f,td)
xlabel(['time [sec], mean = ',num2str(meantd),' (',int2str(meantd*f),' ts) min= ',num2str(mintd),
title('tidsintervallet mellom toppene'));

```

SSA

```

function [xout, eigval, eigvec,xnorm] = SSA(ser, res, p, m, tau);
% [xout, eigval, eigvec,xnorm] = SSA(ser, res, p, m, tau);
% SSA reconstructs the state space from the time series 'ser'.
% The variabel 'xout' is the first m prinsipal components from an
% initial imbedding by MOD where tau=1 and the imbedding dimension
% is p=w+1.

```

```

%
% Written by Dimitris Kugiumtzis, optimized by Hilde Madsen.

n1 = length(ser);
if res ~= 1                                % Resampling the time series
    n2 = floor((n1-1)/res) + 1;
    news = zeros(n2,1);
    for i=1:n2
        news(i) = ser(res*(i-1)+1);
    end
else
    news = ser;
    n2 = n1;
end
nvec = n2 - (p-1)*tau;                    % The length of the reconstructed set

disp('== SSA starts ...')
mn = mean(news);                          % Normalization of the data
sd = std(news);
cent = (news - mn)/sd;

xnorm = zeros(nvec,p);
for j=0:p-1                                % Initial embedding with p
    xnorm(:,j+1)=cent(j*tau+1:nvec+j*tau);
end
theta = (xnorm' *xnorm)/nvec;
[U,S,V] = svd(theta);                    % The SVD

[s1,s2]=size(xnorm);
if m==0 | m>s2,
    m=p;
end

xSSA=xnorm*U(:,1:m);                    % Projection on the m singular axes

%for j=1:m                                % Projection on the m singular axes
% for i=1:nvec
%     xSSA(i,j)= xnorm(i,:) * U(:,j);
% end
%end

xout = xSSA;
eigval = diag(S);
eigvec = U;

```

skj

```
function [y,a,b] =skj(tidsserie);
% [y,a,b]=skj(tidsserie);
% omskalerer tidsaksen for tidsserie

N=length(tidsserie)
dk=0:1.295/(N-1):2;    % tallet 1.295 gir stigningstallet 0 for tbp
d=cumsum(dk);         % dette er den nye tidsaksen
d=floor(d);           % enhetene på aksen er indeksen til tidsserien
f=find(d<eps);        %
d(f)=[];              %
f=find(diff(d)<eps);  %
d(f)=[];              % fjerner "doble" elementer
f=find(d>2100);       %
d(f)=[];              % fjerner indekser som er utenfor tidsserien

y=tidsserie(d);
t=topp2(k,2000,23);
t(1)=[];

% stigningstall for periodene
[a,b]=minstekvadraters(t(1:length(t)-1),diff(t));
```


Referanser