

Høyoppløselige stråleformingsmetoder

En sammenligning av stråleformingsmetoder ved
parametrisk estimering.

Kjetil Dahl

13. mai 1997

Sammendrag

Denne hovedoppgaven er et resultat av et ønske fra Sverre Holm og Nils Christophersen om å få mer kunnskap om egenskapene til de høyopløselige parametriske stråleformingsmetodene MUSIC og ESPRIT. Både forskjeller mellom egenskaper for disse to metodene, og forskjeller mellom disse to og tidligere metoder studeres i denne oppgaven. De tidligere metodene som benyttes som sammenligningsgrunnlag inkluderer den konvensjonelle metoden og minimum varians metoden.

I kapittel 1 legges først problemstillingen som MUSIC og ESPRIT er spesielt utviklet for frem. Alle metodene plasseres så inn i en sammenheng i en kort historisk oversikt. I kapittel 2 gjøres det rede for grunnleggende matematisk teori som tas i bruk senere i oppgaven. Observasjonenes struktur som antatt av MUSIC og ESPRIT legges frem. Deretter presenteres i kapittel 3 teorien bak hver av fem forskjellige stråleformingsmetoder. Mest vekt legges på presentasjonene av MUSIC og ESPRIT. Hver av disse fem presentasjonene avsluttes med en kort punktvis gjennomgang av algoritmen til den aktuelle metoden. I kapittel 4 presenteres de mer elementære forskjellene mellom MUSIC og ESPRIT. I kapittel 5 gjøres det rede for implementeringene av metodene og motivering for og beskrivelse av simuleringene.

I kapittel 6 sammenlignes først hvor mye datakraft metodene trenger. Understrukturen i observasjonene visualiseres. Resultater fra diverse simuleringsserier ved regulære array presenteres. I kapittel 7 gjøres det rede for tynning av array og resultater fra simuleringsserier ved tynnede array presenteres. I kapittel 8 studeres metodenes egenskaper ved flere andre teknikker.

I kapittel 9 diskuteres resultatene av simuleringene. Resultatene som har blitt funnet i denne oppgaven blir sammenlignet med resultatene funnet i andre artikler. Det argumenteres også omkring årsakene til forskjellene mellom metodenes egenskaper. I kapittel 10 trekkes konklusjoner og avsluttende betraktninger blir gjort.

Så følger tre tillegg. I tillegg A studeres matrisen \mathbf{A}^{id} og prediksjon i tilfellet uten støy. Tillegg B studerer \mathbf{A} -matrisen og blant annet rangen til denne. I tillegg C legges programkoden til implementeringene av algoritmene benyttet i oppgaven frem.

Jeg vil her få takke Sverre Holm og Nils Christophersen for all veiledning og hjelp jeg har fått med denne oppgaven. Takkes skal også de som hjalp meg med korrekturlesning av oppgaven; Kari Dahl, Jo W. Harbitz og Ellen Steen.

Til slutt en stor takk til familien min som har vært veldig tålmodige med meg og hele tiden støttet meg i denne perioden.

Kjetil Dahl

Innhold

1	Introduksjon	6
1.1	Problemstilling	6
1.2	Kort historisk oversikt	7
1.3	Oppgavemål	8
2	Grunnleggende teori	9
2.1	Notasjon og matematiske begreper	9
2.2	Deterministisk modell	11
2.3	Arraymangfold, signalrom og støyrom	12
3	Teorien bak stråleformingsmetodene	15
3.1	Konvensjonell metode	15
3.1.1	Algoritmen for konvensjonell stråleforming	16
3.1.2	Borderline sampling	17
3.1.3	Oppløsning og detaljavstand for konvensjonell metode	17
3.1.4	Estimeringsens avhengighet av innfallsvinkel	19
3.2	Konvensjonell metode med datavindu	20
3.2.1	Algoritmen for konvensjonell stråleforming med datavindu	22
3.3	Adaptive metoder	22
3.4	Teorien bak minimum varians metoden	23
3.4.1	Minimum varians algoritmen	24
3.5	Teorien bak MUSIC	24
3.5.1	MUSIC-algoritmen	29
3.6	Teorien bak ESPRIT	30
3.6.1	ESPRIT-algoritmen	34
3.7	Estimering av \hat{d}	35
3.8	Eksempler på typiske $\mathcal{P}(\theta)$ -funksjoner	36
4	Egenskaper til de høyoppløselige metodene	40
5	Implementering og eksperimenter	42
5.1	Implementering av metodene	42
5.1.1	Implementering av skanning av $\mathcal{P}(\theta)$ -funksjoner	42
5.2	Spesifisering av eksperimenter	44
5.2.1	Notasjon for simuleringsresultater	46

6	Metodenes egenskaper	49
6.1	Sammenligninger av tidsbruk	49
6.2	Visualiseringer av underrom	51
6.2.1	Visualisering av støyrommet	51
6.2.2	Visualisering av signal/støyrommet	53
6.3	Sammenligning mellom empiriske resultater.	54
6.3.1	Egenskapene til metodene med stor differanse mellom signalenes vinkler	54
6.3.2	Egenskapene til metodene med en mindre vinkeldifferanse	55
6.3.3	Egenskapene til metodene med liten vinkeldifferanse	57
6.3.4	Egenskapene til metodene ved få sensorer	59
6.3.5	Metodenes egenskaper ved forskjellig signalstyrke.	64
7	Metodenes egenskaper ved tynning	71
7.1	Om tynning	71
7.2	Simuleringer med tynning	75
7.2.1	Tynning av halvparten av elementene ved 6° vinkeldifferanse	76
7.2.2	Tynning av halvparten av elementene ved 2° vinkeldifferanse	77
7.2.3	Stor grad av tynning	78
7.2.4	Ekstrem tynning	80
7.3	Optimal tynning	82
7.4	Metodenes egenskaper ved tynnede array	84
8	Metodenes egenskaper ved diverse teknikker	87
8.1	Ikke-uniform elementavstand	87
8.2	Datavindu	89
9	Diskusjon	94
9.1	A priori informasjon	94
9.2	Parameterestimering ved ekstrem tynning.	94
9.3	Sammenligning mellom resultatene	95
9.4	Metodenes modeller og modellfeil	98
9.4.1	Sammenligning av modellene	99
10	Konklusjon og videre arbeid	105
10.1	Konklusjon	105
10.2	Videre arbeid	106
A	Prediksjon av deterministisk signal.	107
B	A-matrisens egenskaper.	110
C	Programkode	112
C.1	Kode til algoritmen for konvensjonell metode	112
C.1.1	Programmet simkonv.m	112
C.1.2	Programmet dakonv.m	114
C.1.3	Programmet konv.m	115
C.2	Kode til algoritmen for minimum varians	117
C.2.1	Programmet simmv.m	117
C.2.2	Programmet damv.m	119
C.2.3	Programmet mv.m	120

C.3	Kode til algoritmen for MUSIC	122
C.3.1	Programmet simmus.m	122
C.3.2	Programmet damus.m	124
C.3.3	Programmet mus.m	125
C.4	Kode til algoritmen for ESPRIT	127
C.4.1	Programmet simesp.m	127
C.4.2	Programmet daesp.m	128
C.4.3	Programmet esp.m	130
C.5	Programmet peak.m	132

Kapittel 1

Introduksjon

1.1 Problemstilling

I denne oppgaven skal høyoppløselige stråleformingsmetoder studeres. Disse spiller en viktig rolle ved mange applikasjoner innen signalbehandling. Det blir ved disse applikasjonene tatt utgangspunkt i ett sett observasjoner av signaler. Disse observasjonene foretas gjerne med et array av sensorer. I alle problemstillingene i denne oppgaven observeres det med array. Arrayene som benyttes i oppgaven er i tillegg lineære og omnidireksjonale.

I slike problemstillinger kan ofte formen til de underliggende signalene antas kjent. Om dette er tilfelle kan det eksistere et sett parametre som beskriver signalene. Observasjonene avhenger igjen av disse parametrene. Målet for stråleformingsmetodene i dette tilfellet blir dermed å produsere estimater av settet underliggende parametre. Dette skal gjøres basert på observasjonene fra sensorer i arrayet.

Parameterne som skal estimeres kan være forskjellige størrelser. Hvis signalene for eksempel er planbølger kan de søkte parametrene være bølgenes frekvenser (i tilfeller der bølgenes retning kan anses som kjent) eller bølgenes innfallsvinkel over arrayet (i tilfeller der frekvensene til bølgene anses som kjent).

Disse parametrene antas i utgangspunktet å være konstante. Om parametrene ikke kan antas å være konstante kan en fremdeles bruke disse metodene, gitt følgende forutsetning: En må kunne anta at parametrene endrer seg sakte nok til at det er mulig å estimere dem over et tidsintervall hvor endringen av parametrene ikke er signifikant. Om denne betingelsen er oppfylt kan metodene benyttes til å produsere parameterestimater, med kvaliteten på estimatene avhengig av hvor fort parametrene endrer seg. Her studeres kun systemer der parametrene er konstante.

I denne oppgaven antas observasjonene å bestå av deterministiske signaler i støy. Kildene antas å befinne seg tilstrekkelig langt unna sensorer til at observasjonene blir gjort i fjernfeltet og at det dermed observeres planbølger. Signalene antas videre å være smalbands bølger som propagerer over arrayet. Den stokastiske støyen er generert hvit og antas av metodene å være hvit i simuleringene, selv om flere av metodene har innebygget redskaper for enhver type støy med kjent kovariansmatrise.

Planbølgenes frekvens antas i oppgaven å være kjent. Parameterne som

skal estimeres blir de ukjente innfallsvinklene til planbølgene. Denne type retningsestimering refereres ofte til som DOA-estimering, der DOA står for Direction Of Arrival. Videre ser jeg på det 2-dimensjonale tilfellet, dvs. at parametrene som søkes (som altså her er vinkler) er skalarer. Hovedfokuset i oppgaven er på metoder som er data adaptive og som benytter en modell der observasjonene tenkes å utspenne et rom som kan deles inn i et signal/støyrom og et rent støyrom. Disse metodene refereres til som høyoppløselige metoder. To metoder som ikke benytter denne modellen, en adaptiv og en ikke-adaptiv, er også studert for å gi et sammenligningsgrunnlag.

Metodene som benyttes kan med modifikasjoner brukes ved flere andre problemstillinger. Det er naturlig å nevne det tre-dimensjonale tilfellet av samme problem som skissert ovenfor. Der vil parametrene som søkes være innfallsvinkler til signaler i det tre-dimensjonale rom. To andre muligheter som kan være aktuelle når innfallsvinklene til signalene er kjent, er estimering av propagerende signalers frekvens i to og tre dimensjoner.

1.2 Kort historisk oversikt

I utgangspunktet kan naturligvis parametrene i slike systemer som beskrevet ovenfor estimeres ved den konvensjonelle stråleformingsmetoden som beskrevet i [Johnson 93] med og uten bruk av datavindu. Senere kom andre, adaptive, metoder som ofte hadde bedre egenskaper enn disse to metodene. Disse senere metodene refereres ofte til som høyoppløselige.

Minimum varians metoden, som er identisk med maksimum likelihood metoden (MLM) til Capon ([Capon 69]), og maksimum entropi metoden (MEM) til Burg (publisert 1967) var to tidlige høyoppløselige stråleformingsmetoder. Disse metodene var mye brukt og ofte med suksess, men de har visse fundamentale begrensninger. For det første er metodene ikke forventningsrette. Videre er metodene sensitive for feil i antatt kjente størrelser som f.eks. sensorenes plassering i arrayet. Med andre ord er de lite robuste. Hovedgrunnen til disse ulempene er at begge metodene bygger på feil modell; de bygger ikke på den korrekte ARMA-modellen. Den korrekte modellen studeres nærmere i delkapittel 9.4.

Pisarenkos metode var en av de første metodene til å utnytte den korrekte underliggende datastrukturen med suksess [Pisarenko 73]. Observasjonene tenkes her utspent av to underrom, ett utspent av de deterministiske signalene og støyen og ett utspent av støyen alene.

MUSIC, som er et akronym for MULTiple Signal Classification, ble utviklet av Schmidt (i 1977) og Bienvenu (i 1979), uavhengig av hverandre. [Schmidt 79] og [Roy 89]. Denne metoden benytter de samme underrombetraktningene som Pisarenkos metode.

Pisarenkos metode hadde en viss utbredelse, men er i dag uaktuell i de fleste henseender. Dette siden MUSIC kan sees på som en videreutvikling som utnytter informasjon fra alle egenvektorene til støyrommet. Pisarenkos metode utnytter derimot kun informasjonen i en av disse egenvektorene.

En metode med egenskaper svært lik MUSIC, egenverdimetoden, kom noe senere. Den ble publisert av Johnson og DeGraaf i 1982, [Johnson 82]. Forskjellen mellom denne denne metoden og MUSIC består i at egenverdimetoden beholder alle de opprinnelige egenverdiene som korresponderer ett sett egenvektorer som utspenner støyrommet. MUSIC normaliserer derimot alle disse egenverdiene til

en. Dette har effekten at støyen ved estimering med MUSIC blir gjort hvitere. Forskjellene blir beskrevet nærmere i delkapittel 3.5.

ESPRIT er den nyeste av stråleformingsmetodene som sees på i denne oppgaven. Navnet er et akronym for Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques. Denne metoden benytter også de samme underromsbetraktninger som MUSIC. Metoden ble beskrevet i en artikkel første gang i 1985. Denne metoden er dermed anslagsvis 10 år yngre enn MUSIC. Paulraj, Roy og Kailath er opphavsmenn til teknikken og har tatt patent på deler av den. [Roy 85], [Roy 86] og [Roy 89].

Den vesentligste forskjellen mellom denne og de andre høyoppløselige metodene er at denne bygger på generalisert egenverdianalyse og ikke konstruerer en effektethetsfunksjon slik alle de andre metodene her gjør. Plasseringene til sensorene i arrayet kan også her være vilkårlige, med den viktige begrensningen at arrayet må bestå av sensorpar. En identisk vektor må angi posisjonsforskjellen mellom de to sensorene i alle par. En videre viktig egenskap ved denne metoden er at selve elementposisjonene faktisk ikke trenger være kjent.

1.3 Oppgavemål

I denne oppgaven er simuleringer presentert og sammenlignet for konvensjonell metode med og uten datavindu, minimum varians metode, MUSIC og ESPRIT.

Målet med simuleringene er å få forståelse av hvordan egenskapene til metodene arter seg innbyrdes i forskjellige situasjoner. Regulære array og tynnede array er studert relativt grundig med mange simuleringsserier. Forskjeller søkes mellom metodenes egenskaper som fremgår av disse simuleringene. Teknikkene med vektete array og array med ikke-uniform sensoravstand er også studert. Dette er for å vurdere hvilke konsekvenser disse teknikkene har for egenskapene til metodene og når disse teknikkene kan være attraktive. Disse forskjellige resultatene er så diskutert.

Kapittel 2

Grunnleggende teori

2.1 Notasjon og matematiske begreper

Definering av notasjonen som anvendes i oppgaven.

I relasjoner der en størrelse defineres benyttes tegnet \triangleq med betydningen “definert lik”. Små bokstaver satt i normale typer (f.eks. a) er skalarer. Små bokstaver satt i fete typer (f.eks. \mathbf{x}) er vektorer. Store bokstaver satt i fete typer (f.eks. \mathbf{A}) er matriser. En annen notasjon for matriser som mer understreker komponentene matrisen består av er $(a_{i,j})$:

$$\mathbf{A} = (a_{i,j}) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{o,1} & a_{o,2} & \dots & a_{o,p} \end{bmatrix}.$$

En matrise med o rader og p kolonner døpes en $(o \times p)$ -matrise. Komplekskonjugerte og transponerte vektorer og matriser betegnes ved en apostrof etter navnet på vektoren eller matrisen (f.eks. \mathbf{x}' , \mathbf{A}'). En matrise sammensatt av to matriser betegnes ved å sette matrisenavnet innenfor hakeparenteser med en vertikal strek mellom navnene. Eksempelvis kan matrisene \mathbf{A}_1 og \mathbf{A}_2 settes sammen til $[\mathbf{A}_1|\mathbf{A}_2]$. Det forekommer også at en matrise er satt sammen av fire matriser. Dette betegnes på samme måte som med to matriser, men ingen streker benyttes da mellom undermatrisene.

Toernormen til en vektor med o komponenter betegnes med $\|\mathbf{x}\|_2$ og defineres slik:

$$\|\mathbf{x}\|_2 \triangleq \left(\sum_{i=1}^o x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Det på flere måter analoge begrepet for matriser, toernormen eller Frobeniusnormen til en $(o \times p)$ -matrise $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ er angitt ved $\|\mathbf{A}\|_2$ og er definert

$$\|\mathbf{A}\|_2 \triangleq \left(\sum_{i=1}^o \sum_{j=1}^p a_{i,j}^2 \right)^{1/2}.$$

Rommet utspent av kolonnene til matrisen \mathbf{A} er angitt ved $\mathcal{R}\{\mathbf{A}\}$. Den lineære algebra benyttet i oppgaven baserer seg på [Lyche 92].

I de statistiske betraktningene er en estimator som estimerer en stokastisk variabel X gitt ved \hat{X} . Middelet av slike estimater er angitt ved $\bar{\hat{X}}$. Forventningsverdien til en stokastisk variabel X er angitt ved $\mathbf{E}[X]$. De statistiske konsepter som er benyttet i oppgaven baserer seg i hovedsak på [Larsen 86].

Matematiske begreper som tas i bruk i oppgaven.

Den generaliserte egendekomposisjonen [Golub 83] blir benyttet noen ganger i algoritmene. Denne består i at en tar utgangspunkt i to matriser, \mathbf{A} og \mathbf{B} . Deretter finner en de generaliserte egenverdiene (skalarer λ_k) og de korresponderende generaliserte egenvektorene (\mathbf{v}_k), som oppfyller relasjonen $\mathbf{A}\mathbf{v}_k = \lambda_k\mathbf{B}\mathbf{v}_k$. At dette er en generalisering av vanlig egendekomponering, kan en se ved å anta at \mathbf{A} og \mathbf{B} er $(n \times n)$ -matriser og at $\mathbf{B} = \mathbf{I}_n$. Da degenererer problemet til vanlig egendekomponering.

Et konsept som brukes i ESPRIT-algoritmen er den totale minste kvadraters metode [Lawson 74]. Denne teknikken kan sees på som en videreutvikling av den eldre minste kvadraters metode [Rao 92], som var den som ble benyttet i tidlige artikler om ESPRIT. Begge er teknikker for lineær regresjon for overbestemte systemer. I det følgende presenteres først minste kvadraters metode og deretter totale minste kvadraters metode.

Minste kvadraters metode går ut fra det overbestemte ligningssystemet bestemt av

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (2.1)$$

Her er \mathbf{A} og \mathbf{B} kjente og \mathbf{X} ukjent. Kolonnene til \mathbf{A} forutsettes videre å være lineært uavhengige. Siden systemet er overbestemt vil det generelt ikke finnes noen \mathbf{X} som tilfredsstiller relasjonen 2.1. Det gjøres antagelsen at \mathbf{A} er korrekt og at \mathbf{B} inneholder all feil eller støy. En relasjon blir så satt opp der en vilkårlig matrise \mathbf{R}_B innføres:

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{B} + \mathbf{R}_B \quad (2.2)$$

Dette gjør at systemet nå er løsbart; en kan alltid finne en $\hat{\mathbf{X}}$ og en \mathbf{R}_B gitt \mathbf{A} og \mathbf{B} . En vil ved et overbestemt system ha frihetsgrader i valget av $\hat{\mathbf{X}}$ eller \mathbf{R}_B . Det en så gjør er å finne den $\hat{\mathbf{X}}$ som minimerer denne Frobeniusnormen:

$$\|\mathbf{R}_B\|_2^2 = \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{B}\|_2^2$$

Den $\hat{\mathbf{X}}$ som har denne egenskapen er gitt av denne relasjonen:

$$\hat{\mathbf{X}} = [\mathbf{A}'\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{B} \quad (2.3)$$

Dersom antagelsen om at \mathbf{A} ikke inneholder feil er korrekt, og støyen i \mathbf{B} er hvit og med null som forventningsverdi er dette estimatet av \mathbf{X} forventningsrett og et minimum varians estimat.

Om \mathbf{A} derimot inneholder feil er $\hat{\mathbf{X}}$ ikke lenger forventningsrett. I slike tilfeller kan totale minste kvadraters metode ha bedre egenskaper.

Totalt minste kvadraters metode tar utgangspunkt i det samme overbestemte ligningssettet, 2.1. Her antas det derimot at feilene eller støyen i matrisene \mathbf{A} og \mathbf{B} har identiske stokastiske egenskaper.

Det totale minste kvadraters estimat av \mathbf{X} finnes nå ved å innføre to feilmatriser i stedet for en når et uttrykk med $\hat{\mathbf{X}}$ settes opp. Relasjonen blir dermed slik:

$$[\mathbf{A} + \mathbf{R}_A]\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{B} + \mathbf{R}_B \quad (2.4)$$

$\hat{\mathbf{X}}$ finnes så ved å finne den $\hat{\mathbf{X}}$ som minimerer Frobeniusnormen til \mathbf{R}_A og \mathbf{R}_B .

Radene og kolonnene navngis ved at \mathbf{A} er en $(o \times p_A)$ -matrise og \mathbf{B} en $(o \times p_B)$ -matrise. Matrisene antas altså å ha samme antall rader. Dette antallet, o , antas å være større eller lik summen av antall kolonner i \mathbf{A} (p_A) og \mathbf{B} (p_B).

Gitt dette finner en først matrisene \mathbf{U} , \mathbf{S} og \mathbf{V} som oppfyller singularverdidekomposisjonen til den sammensatte matrisen $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$, dvs.:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{B}] = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}',$$

Her er \mathbf{U} og \mathbf{V} unitære matriser. \mathbf{S} er en $(o, p_A + p_B)$ -matrise som består av nuller bortsett fra for elementene på diagonalen som begynner med elementet $s_{1,1}$, det øverste til venstre.

\mathbf{V} er en matrise med antall rader og kolonner lik summen av antall kolonner i \mathbf{A} og \mathbf{B} (dvs. $p_A + p_B$). \mathbf{V} partisjoneres så i fire submatriser:

$$\mathbf{V} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix}.$$

Denne partisjoneringen er definert ved at den første kolonnen som er med i \mathbf{V}_{12} og \mathbf{V}_{22} er den $p_A + 1$ 'te kolonnen i \mathbf{V} , og den første raden som er med i \mathbf{V}_{21} og \mathbf{V}_{22} er den $p_A + 1$ 'te raden i \mathbf{V} . Dette gir at \mathbf{V}_{11} er en $(p_A \times p_A)$ -matrise, \mathbf{V}_{21} en $(p_B \times p_A)$ -matrise, \mathbf{V}_{12} en $(p_A \times p_B)$ -matrise, og \mathbf{V}_{22} en $(p_B \times p_B)$ -matrise.

Den $\hat{\mathbf{X}}$ som minimerer Frobeniusnormene til de to feilmatrisene er nå gitt ved følgende relasjon:

$$\hat{\mathbf{X}} = -\mathbf{V}_{12} [\mathbf{V}_{22}]^{-1} \quad (2.5)$$

Dette estimatet er forventningsrett og et minimum varians estimat dersom støyen i \mathbf{A} og \mathbf{B} har de samme karakteristikker og disse karakteristikene inkluderer at støyen er hvit og har null som forventningsverdi.

Totalt minste kvadraters metode er en følsom metode. Dette betyr at om forutsetningene ikke er korrekte, dvs. at støyens karakteristikker ikke er like for \mathbf{A} og \mathbf{B} , kan $\hat{\mathbf{X}}$ ha svært dårlige statistiske egenskaper. Denne metoden vil derfor være usikker i bruk i tilfeller hvor forutsetningen bare er tilnærmet oppfylt eller definitivt ikke er oppfylt. Metoden bør derfor brukes med forsiktighet.

2.2 Deterministisk modell

I dette delkapitlet studeres den deterministiske delen av modellen for observasjonene, dvs. systemet når det ikke inneholder noen støy. Støydelen blir tatt hensyn til senere, i delkapittel 2.3. En antar her først at signalene som det skal gjøres observasjoner av er smalbandsprosesser. Kravet til en smalbandprosess er

at båndbredden er svært liten i forhold til den inverse av transitt-tiden. Transitt-tiden er i denne sammenheng tiden det tar bølgen å propagere over arrayet. Om dette er tilfelle, kan en anse en slik smalbandprosess som en prosess med kun effekt ved én frekvens, nemlig frekvensen midt i frekvensintervallet hvor den smalbandede prosessen har energi.

Hvis en så antar at signalet består av et endelig antall slike smalbandprosesser kan en ta utgangspunkt i at signalet består av et visst antall udempede komplekse eksponensialer. Dette kan matematisk uttrykkes slik:

$$x_k^{id}(t) = \sum_{i=1}^d a_k(\theta_i) s_i(t) e^{-j\omega_0 \tau_k(\theta_i)} \quad (2.6)$$

Betydningen av konstantene og funksjonene i dette uttrykket er som følger: $x_k(t)$ er det observerte signalet ved element k i arrayet ved tid t . I denne relasjonen brukes $x_k^{id}(t)$, der id er hengt på for å signalisere at dette er observasjonen i et tenkt ideelt tilfelle uten noe støy. Den mer vanlige notasjonen $x_k(t)$, brukes i de tilfellene der en tar hensyn til støyen. d er antallet propagerende signaler. ω_0 er frekvensen, som er felles for alle signalene. θ_i er propageringsretningen til det i 'te signalet. Det er implisitt antatt at alle de d propageringsretningene er forskjellige. $\tau_k(\theta)$ er tiden det tar en bølgefront som propagerer i retning θ å propagere fra arrayets tyngdepunkt til posisjonen til sensor k . $\tau_k(\theta)$ er implisitt også avhengig av propageringshastigheten til bølgene, c . Propageringshastigheten er antatt identisk for alle signalene. $a_k(\theta)$ er retningssensitiviteten til sensor k i retning θ . $s_i(t)$ er amplituden til den i 'te propagerende bølge i arrayets tyngdepunkt ved tiden t . Her antas alle størrelser som kjente, bortsett fra antall signaler og signalenes innfallsvinkler og amplituder.

En kan omforme uttrykket i (2.6) slik at $x_k^{id}(t)$ er en lineær kombinasjon av $x(t)$ -verdiene ved d av de andre elementene i arrayet. En velger d andre $x^{id}(t)$ fra arrayet (samtlige forskjellige fra $x_k^{id}(t)$). Disse størrelsene kan nå gis en vilkårlig indeks og indeksene $k-1$ til $k-d$ velges for enkelhetens skyld og for å tydeliggjøre at $x_k^{id}(t)$ predikeres med utgangspunkt i disse d verdiene.

Matematisk får en da relasjonen:

$$x_k^{id}(t) = \sum_{i=1}^d c_i x_{k-i}^{id}(t) \quad (2.7)$$

c_i er en funksjon av θ_i , $s_i(t)$ og $\tau_k(\theta_i)$, slik at den mest korrekte skrivemåten av c_i vil være:

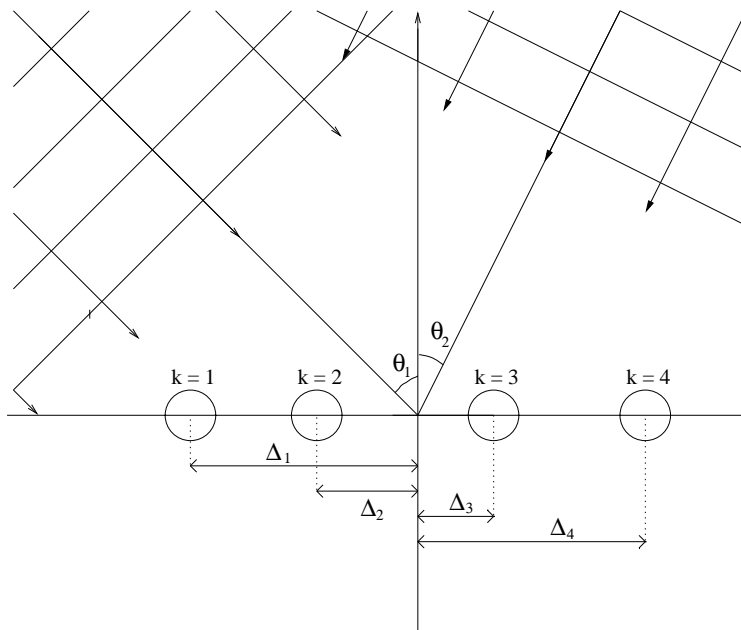
$$c_i = c_i(\theta_i, s_i(t), \tau_k(\theta_i))$$

At denne nøyaktige prediksjonen av $x_k^{id}(t)$ er mulig, blir det gjort rede for i tillegg A.

2.3 Arraymangfold, signalrom og støyrom

I dette delkapitlet innføres støyen i systemet, med de komplikasjoner det medfører.

En tar utgangspunkt i at observasjonene blir gjort med m sensorer. Figur 2.1 viser en prinsippskisse av systemet med et lineært array.



Figur 2.1: Prinsippskisse av et lineært array med antall sensorer, m , lik 4 og antall propagerende signaler, d , lik 2. θ_1 og θ_2 er innfallsvinklene til de to signalene. k -verdiene som er oppgitt er en vilkårlig indeksering av sensorene. Δ_k for $k = 1, \dots, m$ er posisjonen av det k 'te arrayelementet på en akse gjennom arrayet.

Når en gjør observasjoner på signalet fra forrige delkapittel vil en i praksis få observasjoner med en støydel. Denne er det også naturlig å gjøre antagelser om; det er vanlig å anta at den i det minste er additiv. En vanlig videre antagelse om støyen som oftest forenkler problemstillingen er at den er hvit. Hvit støy kan defineres ved at støyen består av identisk distribuerte men statistisk uavhengige stokastiske variable [Johnson 93]. Denne antagelsen om støyen gjøres ikke her.

Når det her og senere skrives om signalene, refereres det kun til den deterministiske summen av d eksponensialer gitt av 2.6. Når det skrives om observasjonene, refereres det til summen av eksponensialene og den stokastiske støydelen.

Den eneste antagelse som blir gjort i utgangspunktet er altså at støyen er additiv. Dette gir følgende uttrykk for observasjonen ved sensor k og tid t :

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^d a_k(\theta_i) s_i(t) e^{-j\omega_0 \tau_k(\theta_i)} + n_k(t) \quad \text{for } k = 1, \dots, m \quad (2.8)$$

Betydningen av konstantene og funksjonene i dette uttrykket er forklart i 2.6, bortsett fra $n_k(t)$, som er støyen på observasjonen fra element k ved tiden t .

$x_k(t)$ kan ikke lenger predikeres nøyaktig, slik det var mulig i systemet i delkapittel 2.2 hvor det ikke fantes noe støy.

Om det aktuelle arrayet er lineært, finner en ved trigonometriske betraktninger av systemet relasjonen $\tau_k(\theta) = \Delta_k \sin(\theta)/c$, der Δ_k er posisjonen av det

k 'te arrayelementet på en akse gjennom arrayet.

Om en innordner alle sensorobservasjonene i en vektor får en dette komprimerte uttrykket:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2.9)$$

Her er

$$\mathbf{A}(\Theta) = [\mathbf{a}(\theta_1) | \dots | \mathbf{a}(\theta_d)], \quad (2.10)$$

$$\mathbf{a}(\theta_i) = [a_1(\theta_i)e^{-j\omega_0\tau_1(\theta_i)}, \dots, a_m(\theta_i)e^{-j\omega_0\tau_m(\theta_i)}]^T, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix}, \mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_d(t) \end{bmatrix}, \text{ og } \mathbf{n}(t) = \begin{bmatrix} n_1(t) \\ \vdots \\ n_m(t) \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Senere i oppgaven refereres det vanligvis til $\mathbf{A}(\Theta)$ kun som \mathbf{A} , da er det underforstått at \mathbf{A} avhenger av de d innfallsvinklene. \mathbf{A} er altså en $(m \times d)$ -matrise. $\mathbf{a}(\theta)$, som danner kolonnene i \mathbf{A} , refereres til som array styringsvektoren. Alle de mulige kolonnene til $\mathbf{A}(\Theta)$, mao. vektorene $\mathbf{a}(\theta) \in \mathbb{C}^m$, utspenner et rom kalt arraymangfoldet. Rommet kolonnene til \mathbf{A} gitt en vektor Θ utspenner, $\mathcal{R}\{\mathbf{A}(\Theta)\}$, refereres til som signal/støyrommet. Arraymangfoldet er bestemt av retnings sensitiviteten til sensorene og geometrien til arrayet. Signal/støyrommet er bestemt av arraymangfoldet pluss en gitt Θ -vektor.

For å unngå tvetydigheter er det nødvendig at transformasjonen fra $\theta = \{\theta_1, \dots, \theta_d\}$ til $\mathcal{R}\{\mathbf{A}(\Theta)\}$ er en-til-en. Med dette menes at et sett av d vilkårlige innfallsvinkler korresponderer med ett unikt underrom utspent av kolonnene til \mathbf{A} , og motsatt at ethvert d -dimensjonalt underrom utspent av kolonnene til \mathbf{A} korresponderer med d innfallsvinkler.

Denne egenskapen kan sikres ved bra arraydesign. Et krav som må være oppfylt for at et slikt en-til-en forhold skal eksistere er at $a_k(\theta) \neq 0$ for enhver θ for alle sensorere. Det tilstrekkelige og nødvendige kravet for at dette skal være oppfylt er at \mathbf{A} har rang d for enhver θ . Skal dette være mulig må en ha $m \geq d$. Dette er studert grundigere i tillegg B

Når en har dette en-til-en forholdet er det gitt at kolonnene til \mathbf{A} utspenner et d -dimensjonalt underrom av \mathbb{C}^m . Dette underrommet kalles altså signal/støyrommet. Navnet er gitt fordi det deterministiske signalet utspenner dette underrommet. Det resterende $(m - d)$ -dimensjonale underrommet som sammen med signalrommet utspenner \mathbb{C}^m , kalles støyrommet. Dette er en naturlig term, da det kun er støydelene av observasjonene som utspenner dette underrommet. Støyen kan altså ha komponenter i signal/støyrommet og støyrommet, mens de deterministiske signalene bare befinner seg i signal/støyrommet.

Et poeng er at elementene i array styringsvektoren, $\mathbf{a}(\theta)$, kun avhenger av arrayet. Dette kan forstås ved å studere det vilkårlige elementet av $\mathbf{a}(\theta)$ med indeks k . $\mathbf{a}(\theta)_k = a_k(\theta)e^{-j\omega_0\tau_k(\theta)}$. Her avhenger $a_k(\theta)$ kun av egenskaper til elementet gitt indeks k , og $e^{-j\omega_0\tau_k(\theta)}$ avhenger av posisjonen til det samme elementet. Hver av kolonnene i \mathbf{A} , $\mathbf{a}(\theta)$, er lik et øyeblikksbilde av et propagerende signal slik dette blir observert av arrayet. Dette har amplitude lik 1, fase null i origo og propagerer i retning θ . Signalet er uendelig smalbandet om θ . Denne siste egenskapen gjør at dette ofte refereres til som et ideelt signal. Om arrayets parametre er kjent, er altså strukturen og alle mulige versjoner av \mathbf{A} også kjent. Det som ikke er kjent er hvilke innfallsvinkler $\theta_1, \dots, \theta_d$ som \mathbf{A} er en funksjon av.

Kapittel 3

Teorien bak stråleformingsmetodene

I dette kapitlet presenteres konvensjonell metode, konvensjonell metode med datavindu, minimum varians metode, MUSIC og ESPRIT. De tre første metodene utnytter ikke underrom strukturen i observasjonene og tilhører dermed ikke hovedfokuset i denne oppgaven. Både den konvensjonelle metoden og minimum varians metoden blir derimot benyttet for å gi et sammenligningsgrunnlag i simuleringsseriene som blir utført senere i oppgaven. Den konvensjonelle metoden med datavindu utgjør et naturlig skritt i utviklingen mot adaptive metoder og motiverer for bruk av datavindu også i de adaptive metodene og er derfor tatt med her. Av disse grunner følger her en relativt kort oppsummering av de tre førstnevnte metodene, før MUSIC og ESPRIT blir presentert mer grundig i henholdsvis delkapitlene 3.5 og 3.6.

3.1 Konvensjonell metode

Denne metoden blir også referert til som forsinkelse og sum metoden. Videre i oppgaven blir den konvensjonelle metoden noen steder i tabeller og lignende for korthets skyld referert til som KONV.

Alle metodene som blir presentert i denne oppgaven, med unntak av ESPRIT, bruker en effekttetthetsfunksjon for å finne de parameterne som søkes. Denne er døpt $\mathcal{P}(\theta)$ med forskjellig subskrift for hver av metodene, og kalles også metodens spekter. Når denne funksjonen er bestemt, bestemmes estimatene av innfallsvinklene ved hjelp av hvor maksima til funksjonen befinner seg.

Den konvensjonelle metoden bruker som utgangspunkt definisjoner av den sanne styringsrespons-effekten $\mathcal{P}(\mathbf{a})$ og den sanne romlige kovariansen til observasjonene.

Den romlige kovariansmatrisen til observasjonene er definert på følgende måte [Roy 89].

$$\mathbf{R}_{XX} \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \mathbf{x}(t)\mathbf{x}'(t) \quad (3.1)$$

Styringsrespons-effekten er i utgangspunktet definert som en funksjon av array styringsvektoren \mathbf{a} . Denne vektoren er definert i 2.11 og diskutert noe i

delkapittel 2.3. $\mathcal{P}(\mathbf{a})$ er et mål på hvor stor effektettheten er for ideelle planbølger som propagerer over arrayet som beskrevet av \mathbf{a} . Den er definert ved denne relasjonen [Johnson 93]:

$$\mathcal{P}(\mathbf{a}) \triangleq \mathbf{a}' \mathbf{R}_{XX} \mathbf{a} \quad (3.2)$$

Her er \mathbf{R}_{XX} den romlige kovariansmatrisen til observasjonene i datamatriksen \mathbf{X} .

Det søkes en definisjon av styringsresponseffekten som funksjon av vinkelen θ , siden det er innfallsvinklene som skal estimeres. Relasjonen som gir \mathbf{a} som en funksjon av vinkel ble oppgitt i kapittel 2 og er gitt ved

$$\mathbf{a}(\theta_i) = [a_1(\theta_i)e^{-j\omega_0\tau_1(\theta_i)}, \dots, a_m(\theta_i)e^{-j\omega_0\tau_m(\theta_i)}]^T$$

Denne relasjonen gir at \mathbf{a} avhenger både av den diskrete frekvensen og plasseringen av den aktuelle sensor.

En definisjon av $\mathcal{P}(\theta)$ kan bestemmes med utgangspunkt i 3.2 og denne transformasjonen. Definisjonen får denne formen, helt analogt til 3.2.

$$\mathcal{P}(\theta) \triangleq \mathbf{a}'(\theta) \mathbf{R}_{XX} \mathbf{a}(\theta) \quad (3.3)$$

Styringsresponseffekten som en funksjon av vinkelen er et mål på hvor stor effektettheten er i propageringsretningen θ for signalet. Den sier med andre ord noe om hvilke retninger energien i signalet propagerer i og det er nettopp den informasjonen som søkes.

At \mathbf{R}_{XX} inngår i definisjonen av $\mathcal{P}(\theta)$ er et problem da kovariansmatrisene er ukjente i de aller fleste applikasjoner. For å kunne benytte denne definisjonen må et estimat av \mathbf{R}_{XX} etableres. Det vanlig brukte estimatet er sampl kovariansen, $\hat{\mathbf{R}}_{XX}$ [Roy 89], gitt ved:

$$\hat{\mathbf{R}}_{XX} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{x}(t) \mathbf{x}'(t) = \frac{1}{N} \mathbf{X} \mathbf{X}' \quad (3.4)$$

Her er N antall observasjoner fra hver sensor som estimeringen baseres på. \mathbf{X} er datamatriksen, på størrelsen $(m \times N)$. Hver kolonne i \mathbf{X} består av alle observasjonene fra arrayet ved ett tidspunkt.

\mathbf{X} er nødvendigvis kjent, siden den kun inneholder observasjonene. Dermed kan sampl kovariansen nå regnes ut. Neste skritt er å estimere effektettheten direkte, ved å sette kovarians estimatet inn i definisjonen av $\mathcal{P}(\theta)$. Dette gir det konvensjonelle estimatet av effektettheten, $\mathcal{P}_K(\theta)$:

$$\mathcal{P}_K(\theta) = \mathbf{a}'(\theta) \hat{\mathbf{R}}_{XX} \mathbf{a}(\theta) \quad (3.5)$$

Estimatene av de parameterne som søkes, $\theta_1, \dots, \theta_d$, kan finnes ved å registrere toppene på plottet av $\mathcal{P}_K(\theta)$

3.1.1 Oppsummering av algoritmen for konvensjonell stråleforming

Her er en punktvis kort gjennomgang av algoritmen.

1. Observasjonsdataene blir samlet inn.

2. Den romlige kovariansen, \mathbf{R}_{XX} , blir estimert. Estimatoren er gitt ved

$$\hat{\mathbf{R}}_{XX} = \frac{1}{N} \mathbf{X}\mathbf{X}'.$$

3. $\mathcal{P}_K(\theta)$ blir beregnet med

$$\mathcal{P}_K(\theta) = \mathbf{a}'(\theta) \hat{\mathbf{R}}_{XX} \mathbf{a}(\theta).$$

4. Vinklene som gir toppene til $\mathcal{P}_K(\theta)$ blir funnet. Disse er estimater av parameterne.

Den konvensjonelle stråleformingsmetoden som er presentert her er noe spesialisert i forhold til hvordan denne metoden vanligvis fremstår. For det første er det her innbakt i metoden at det som søkes er innfallsvinkler. Dermed fremstår estimatet av effektetthetspekteret som en funksjon av en vinkel i stedet for en funksjon av frekvens, som vanligvis er tilfellet. For det andre er det interessante resultatet ikke er hele den estimerte glattingseffektetthetsfunksjonen, men kun maksima av denne. Denne informasjonen blir hentet ut i punkt 4, hvor parameterestimaterne bestemmes og resten av \mathcal{P}_K i praksis forkastes, siden den ikke er interessant gitt de antagelser som er gjort om observasjonene.

3.1.2 Borderline sampling

Et begrep innen sampling som det vendes tilbake til senere i oppgaven er borderline sampling, [Johnson 93]. I denne oppgaven er dette aktuelt ved den romlige samplingen. Dette begrepet brukes i tilfeller hvor arrayet som benyttes til samplingen er lineært, regulært og med omnidireksjonelle sensorer. Borderline sampling er da her definert som situasjonen når en sampler med elementavstand, Δ , lik halvparten av bølgelengden til de propagerende signalene, λ :

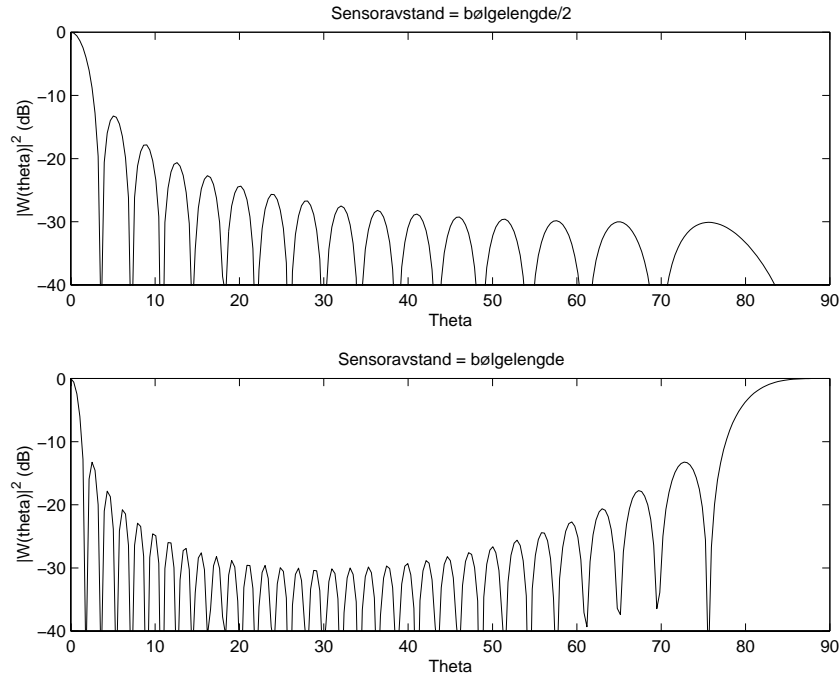
$$\Delta = \frac{\lambda}{2} \tag{3.6}$$

Grunnen til at dette tilfellet tituleres som “borderline” er at en da er ved et grensetilfelle; om en vil sikre seg å unngå aliasing kan ikke avstanden mellom elementene være større enn dette. Denne aliasingen vil manifestere seg som falske toppler i $\mathcal{P}(\theta)$ -plottene stråleformingsmetodene produserer. Figur 3.1 illustrerer hvordan aperture glattingsfunksjonen avhenger av sensoravstanden for slike array. Relasjonen 3.6 gir dermed et uttrykk for en maksimal Δ ved fornuftig estimering.

3.1.3 Oppløsning og detaljavstand for konvensjonell metode

Oppløsning er et sentralt begrep i mange sammenhenger i signalbehandling. Dette konseptet blir presentert og et estimat for den konvensjonelle metoden etablert i denne delen. Det nært beslektede begrepet detaljavstand blir også definert.

I alle estimeringsmetodene, konvensjonelle som moderne, er det interessant å se på hvilken oppløsning metoden gir. Oppløsningen kan defineres på flere måter. I denne oppgaven er oppløsning et mål på forskjellen i innfallsvinkel



Figur 3.1: Strålingsdiagram for borderline sampling. Strålingsdiagrammet er plottet for to lineære, regulære array med omnidireksjonelle sensorer. I det øverste arrayet er sensoravstanden lik en halv bølgelengde, kravet fra 3.6 er oppfylt. I det nedre plottet er sensoravstanden og bølgelengden like store. Toppen omkring $\pm 90^\circ$ i det nederste plottet vil skape en falsk topp om dette arrayet brukes til stråleforming.

mellom to signaler som en metode kan registrere. Oppløsningen viser seg å være avhengig av aperturen til arrayet som benyttes. Som utgangspunkt for oppløsningen brukes her et estimat av det bølgetallet (k_x) som gir bredden av hovedloben ved halvparten av maksimal amplitude for strålingsdiagrammet. Dette er FWHM-oppløsningen. (Hvor FWHM er en forkortelse av Full Width Half Maximum.) Denne relasjonen gir en approksimasjon av denne størrelsen gitt i bølgetall for lineære og regulære array; $k_x \approx 1.21 \frac{2\pi}{D}$. Videre er relasjonen mellom bølgetall k_x og vinkel θ gitt ved; $k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$. Dette fra [Johnson 93]. Dette gir tilsammen den følgende relasjonen:

$$\Delta\theta \approx \sin^{-1} \left(1.21 \frac{\lambda}{D} \right) \approx 1.21 \frac{\lambda}{D} \quad (3.7)$$

Her er $\Delta\theta$ vinkeloppløsningen.

Oppløsningen for den konvensjonelle metoden ved et regulært, lineært array på 32 elementer og med elementavstand lik en halv bølgelengde blir ved bruk av denne relasjonen tilnærmet lik 4.3° .

En annen størrelse som ofres noe oppmerksomhet i anledning implementering av de fleste av metodene, er avstanden mellom detaljer på spekteret. Dette vil si et mål på hva som er den typiske minste avstanden mellom et toppunkt og et bunnpunkt i et spekter. Denne størrelsen vil kunne approksimeres ved å

halvere vinkeloppløsningen. Dermed vil en i tilfellet med 32 elementers array som spesifisert ovenfor få at detaljavstanden skal være omkring 2.2° .

3.1.4 Estimerings avhengighet av innfallsvinkel

Kvaliteten på alle metodenes estimater av innfallsvinklene er avhengig av for hvilke innfallsvinkler signalene propagerer over arrayet. For lineære array er det mulig å komme frem til enkle svar for hvilken effekt dette har. Metodene estimerer best når innfallsvinklene ligger i området omkring 0° , altså når bølgefronten er parallell med en linje trukket gjennom sensorene i arrayet. Dårligst blir estimatene når innfallsvinklene befinner seg nær $\pm 90^\circ$. Dette følger av grunnleggende arrayteori, [Johnson 93]. Den effektive aperturen, som definert som aperturen multiplisert med cosinus av signalets innfallsvinkel, blir mindre jo større absoluttverdien av innfallsvinkelen er opp mot $\pm 90^\circ$. Ved innfallsvinkel lik 90° vil den effektive aperturen være null i bølgens propageringsretning. Denne egenskapen er enkel å påvise eksperimentelt. I figur 3.2 vises resultatet av en serie simuleringer ved konvensjonell stråleforming. Simuleringene er spesifisert på følgende måte: Observasjonene inneholder to deterministiske signaler og additiv, hvit støy. Vinkeldifferansen mellom signalene er 6° , signalstøyforholdet er 0 dB (mao. signalenes amplitude er like stor som støyens amplitude). Det ble foretatt en simulering for hver heltallig vinkel. I figuren er de reelle og de estimerte innfallsvinklene illustrert. En ser av figuren at det er mer krevende å estimere ved $\pm 90^\circ$, hvor metoden svikter grovt i relativt store intervaller. Samme type oppførsel, med svakere estimater ved mindre effektiv aperture kan observeres ved alle stråleformingsmetodene, konvensjonelle som moderne.

En mer ren matematisk undersøkelse av hvorfor innfallsvinkelen er så utslagsgivende for estimatenes kvalitet, kan en finne om en ser på hvor stor differansen mellom uttrykkene til de to deterministiske signalene blir, målt for den samme sensoren. I de følgende uttrykkene bruker vi det vilkårlige k 'te elementet i arrayet. Utslaget fra det ene signalet blir da (fra 2.8)

$$a_k(\theta)s_i(t)e^{-j\omega_0\tau_k(\theta)},$$

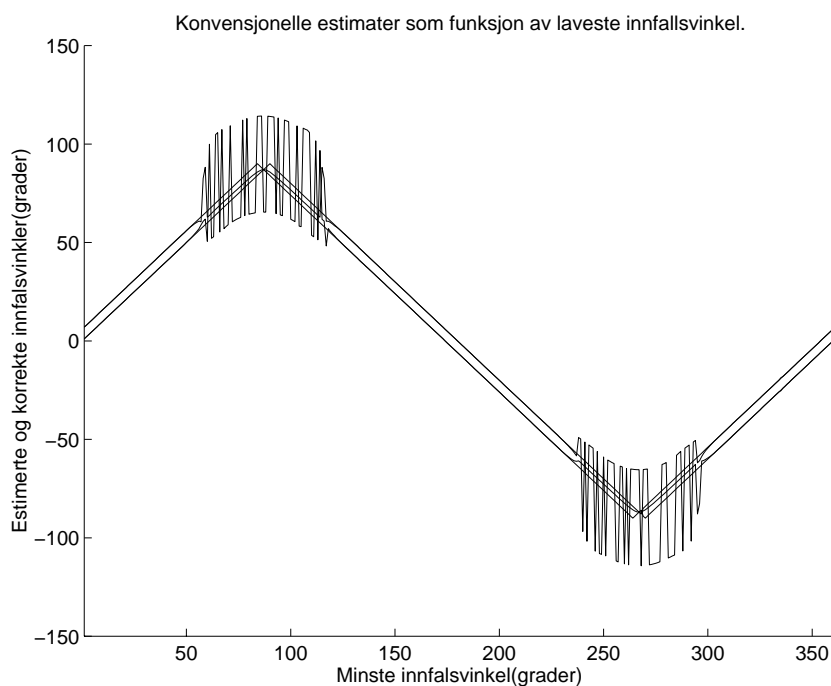
mens det andre utslaget for en innfallsvinkel lik den forrige pluss θ_d grader, blir

$$a_k(\theta + \theta_d)s_i(t)e^{-j\omega_0\tau_k(\theta + \theta_d)}.$$

Forskjellen mellom de to uttrykkene er at to forskjellige vinkler er variabelverdi i $\tau(\theta)$ i eksponentialene. (En ser da bort i fra at $a_k(\theta)$ også generelt er forskjellig for θ og $\theta + \theta_d$. Dette kan forsvares ved at denne forskjellen kan antas å være tilstrekkelig liten til at den kan neglisjeres ved relativt små θ_d .) En kan visualisere hvordan denne forskjellen endrer seg avhengig av innfallsvinkelen ved et plott av absoluttverdien av differansen mellom de to eksponensiale faktorene:

$$|\omega_0\tau_k(\theta) - \omega_0\tau_k(\theta + \theta_d)|$$

Figur 3.3 viser denne differansen for samme intervall som 3.2 med θ_d , som der, valgt til 6° . Tanken er at estimeringen av vinklene vil være lettere jo større denne differansen er. Med differansen lik null vil det være umulig å finne to signaler. Denne grafen illustrerer hvordan kvaliteten på estimatene blir svært dårlig omkring 90° og 270° ved at differansen i disse områdene er lav. Når innfallsvinkelen er lik 90° og 270° er differansen lik null.



Figur 3.2: Resultat av innfallsvinkelvariasjon. Innfallsvinkelen varieres fra 1° til 360° . De rette strekene viser de to faktiske vinklene, mens den mer erratiske kurven viser estimeringsresultatene. I relativt brede intervaller omkring 90° og 270° blir estimatene vesentlig dårligere enn ved andre vinkler. Helt nær 90° og 270° svikter metoden helt og estimatene blir ubrukelige.

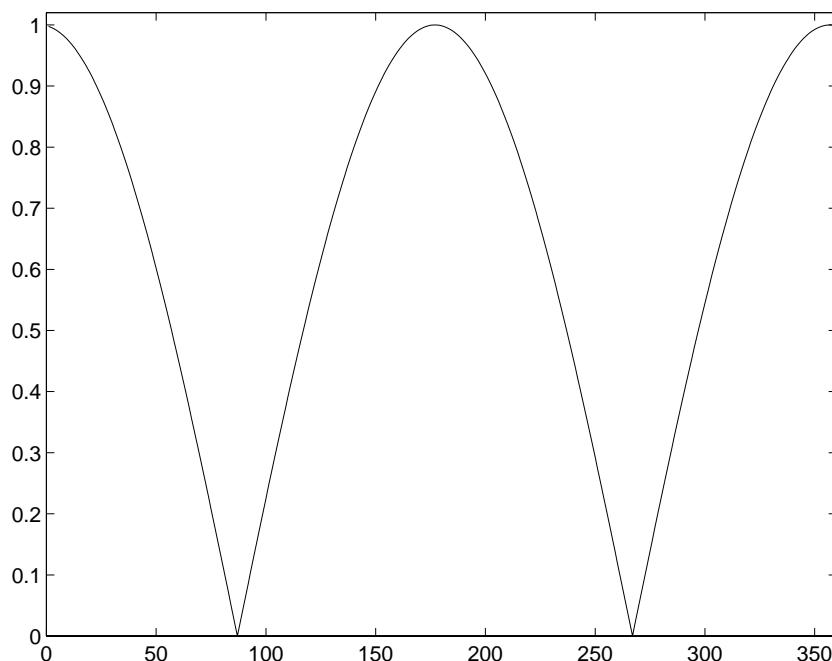
Avhengigheten som her er presentert gjør at en for et tilfelle må spesifisere ikke bare differansen mellom to innfallsvinkler, men også hvor de to innfallsvinklrene befinner seg for å kunne si noe om sannsynligheten for at en metode kan estimere tilfredsstillende. Når flere metoder sammenlignes i simuleringer vil det derfor være nødvendig å bruke det samme settet innfallsvinkler for hver metode for at denne effekten ikke skal spille inn på resultatene.

3.2 Konvensjonell metode med datavindu

En noe mer avansert avart av den konvensjonelle metoden er konvensjonell metode med datavindu. Denne går i korthet ut på at et datavindu brukes på sensorene i arrayet. Alle observasjonene fra hver sensor blir vektet med den korresponderende koeffisienten i ett passende vindu med samme lengde som antall sensorer.

Det finnes mange vinduer som i utgangspunktet kan være aktuelle å bruke for konvensjonell stråleforming. Noen eksempler er triangulært, Hanning og Hamming vindu. [Oppenheim 89]. Hvilket av disse vinduene som vil være best i applikasjonen vil måtte vurderes i hvert enkelt tilfelle.

Denne metoden vil i utgangspunktet bare være meningsfylt når arrayet en prosesserer fra er lineært og regulært. Dette fordi vinduene er konstruert for



Figur 3.3: Differansen mellom de eksponensiale faktorene forårsaket av to signaler med en konstant differanse i innfallsvinkel på 6 grader. Plottet er normalisert slik at maksimalverdien til differansen er lik 1.

å oppnå et lavere sidelobnivå til aperture glattings funksjonen for et lineært og regulært array. Har ikke arrayet disse egenskapene er ikke de resulterende sidelobnivåene kjent. Dermed er også effekten av å bruke vinduet i slike tilfeller ukjent.

Et første skritt i denne metoden kan være å lage en matrise av vindukoefficientene. Om vindukoefficientene er gitt ved w_1, \dots, w_m kan matrisen \mathbf{W} dannes. Denne er diagonal med koeffisientene langs diagonalen:

$$\mathbf{W} = \text{diag}[w_1, \dots, w_m]$$

Det er flere måter å implementere denne vektingen i en algoritme som benytter den konvensjonelle metoden med et datavindu. Her er det valgt å innføre vektingen først i utregningen av $\mathcal{P}_{KW}(\theta)$ (jf. [Johnson 93]). $\mathcal{P}_{KW}(\theta)$ er denne metodens effektetthetsfunksjon og spiller dermed samme rolle som $\mathcal{P}_K(\theta)$ i den konvensjonelle metoden. Siden datamatriksen \mathbf{X} er en $(m \times N)$ -matrise der alle observasjonene fra sensor o i arrayet utgjør rad nummer o i matrisen for $o = 1, \dots, m$, vil en få de vektete observasjonene ved å multiplisere \mathbf{W} med \mathbf{X} fra venstre:

$$\mathbf{X}_W = \mathbf{W}\mathbf{X}$$

Om en nå først ser på den romlige kovariansen for de vektete observasjonene så kan en estimator for denne konstrueres nettopp som i 3.1. Dette uttrykket kan så manipuleres noe med:

$$\hat{\mathbf{R}}_{X_W X_W} = \frac{1}{N} \mathbf{X}_W \mathbf{X}_W'$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \mathbf{W} \mathbf{X} \mathbf{X}' \mathbf{W}' \\
&= \mathbf{W} \hat{\mathbf{R}}_{XX} \mathbf{W}'
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Dermed består forskjellen mellom konvensjonell metode uten og med datavindu i at $\mathbf{W} \hat{\mathbf{R}}_{XX} \mathbf{W}'$ erstatter $\hat{\mathbf{R}}_{XX}$ i utregningen av den estimerte effekttettheten. Dette gir denne relasjonen for $\mathcal{P}_{KW}(\theta)$:

$$\mathcal{P}_{KW}(\theta) \triangleq \mathbf{a}'(\theta) \mathbf{W} \hat{\mathbf{R}}_{XX} \mathbf{W}' \mathbf{a}(\theta) \tag{3.9}$$

3.2.1 Oppsummering av algoritmen for konvensjonell stråleforming med datavindu

Her er en kort punktvis gjennomgang av algoritmen.

1. Vindukoeffisientene og \mathbf{W} blir konstruert.
2. Observasjonsdataene blir samlet inn.
3. Den romlige kovariansen, \mathbf{R}_{XX} , blir estimert. Estimatoren er gitt ved

$$\hat{\mathbf{R}}_{XX} = \frac{1}{N} \mathbf{X} \mathbf{X}'.$$

4. $\mathcal{P}_{KW}(\theta)$ blir beregnet med

$$\mathcal{P}_{KW}(\theta) \triangleq \mathbf{a}'(\theta) \mathbf{W} \hat{\mathbf{R}}_{XX} \mathbf{W}' \mathbf{a}(\theta).$$

5. Vinklene som gir toppene til $\mathcal{P}_{KW}(\theta)$ blir funnet. Disse er estimater av parameterne.

Den konvensjonelle metoden med datavindu slik som den presenteres i denne oppsummeringen av algoritmen er spesialisert for parametrisk innfallsvinkleestimering på nøyaktig samme måte som den konvensjonelle metoden $t\mathcal{P}_{KW}(\theta)$ blir beregnet uten noe datavindu som forklart i del 3.1.1.

3.3 Adaptive metoder

Parameterne som beskriver den konvensjonelle stråleformingsmetoden med eller uten datavindu er faste og avhenger dermed ikke av karakteristikene til de deterministiske eller stokastiske delene av observasjonene på noen måte.

Alle de stråleformingsmetodene som vil bli presentert videre i dette kapitlet er adaptive metoder. Med dette menes at metoden tilpasser seg typiske trekk ved de observerte dataene. Metoden kan eventuelt være skreddersydd for en spesiell situasjon angående observasjonenes deterministiske og stokastiske egenskaper. Karakteristikker til algoritmen til en adaptive metode blir derfor bestemt av egenskaper til de observerte dataene. Noen metoder krever a priori kunnskaper om observasjonene i tillegg til observasjonene for å kunne produsere estimater. Denne tilpasningsdyktigheten og bruk av a priori kunnskap gjør at de adaptive metodene i mange situasjoner vil være kraftigere enn den konvensjonelle stråleformingsmetoden. Det eksisterer på den annen side tilfeller hvor den konvensjonelle stråleformingsmetoden er optimal (jf. [Johnson 93]).

3.4 Teorien bak minimum varians metoden

Minimum varians metoden ([Johnson 93] og [Roy 87]) er en av de tidligste adaptive metodene, og ble derfor en periode ofte referert til som “adaptiv stråleforming”. Senere har flere adaptive metoder kommet til. MUSIC, egenverdimetoden og ESPRIT hører alle med blant de adaptive metodene. Minimum varians metoden utnytter ikke underrom strukturen til dataene, slik som disse tre nevnte metodene. På samme måte som for den konvensjonelle metoden blir minimum varians metoden noen steder i oppgaven for korthets skyld referert til som MINVAR.

Denne teknikken springer ut av løsningen på et optimaliseringsproblem og er på flere måter en naturlig utvikling fra den konvensjonelle metoden med datavindu. Tanken er at mens vektningen som ble innført der ble bestemt å være konstant, er ikke dette en nødvendig begrensning. I denne metoden tillates vektningen av sensorene å være avhengig av vinkelen θ og av observasjonene. Denne avhengigheten av observasjonene er det som gjør dette til en adaptiv metode. Som i de to tidligere metodene skal en tetthetsfunksjon bestemmes. Denne er her døpt $\mathcal{P}_{MV}(\theta)$, og definert ved følgende relasjon:

$$\mathcal{P}_{MV}(\theta) = \mathbf{w}'_{MV}(\theta)\mathbf{R}_{XX}\mathbf{w}_{MV}(\theta) \quad (3.10)$$

Her er $\mathbf{w}_{MV}(\theta)$ en $(m \times 1)$ -vektor. Den skal inneholde informasjonen om vektningen og også informasjonen om arrayet gitt av $\mathbf{a}(\theta)$. Med andre ord spiller $\mathbf{w}_{MV}(\theta)$ her samme rolle som produktet $\mathbf{W}\mathbf{a}(\theta)$ gjør i konvensjonell metode med datavindu.

Som studert i delkapittel 2.3 representerer i utgangspunktet $\mathbf{a}(\theta)$ ett signal slik det observeres gjennom ett array. Dette signalet har amplitude lik 1 og propagerer i retningen θ . Det er ideelt i den betydningen at det er uendelig smalbandet om frekvensen θ . Tanken er at et signal som propagerer i retningen spesifisert av $\mathbf{a}(\theta)$ skal forsterkes og signaler propagerende i andre retninger undertrykkes ved ett valg av vektor for denne retningen, $\mathbf{w}_{MV}(\theta)$. Bibetingelsen $\text{Re}[\mathbf{a}'(\theta)\mathbf{w}_{MV}(\theta)] = 1$ sikrer at det ideelle signalet får gain lik 1 av stråleformingen. Problemet blir da å minimere $\mathcal{E}[|\mathbf{w}'_{MV}(\theta)\mathbf{x}(t)|^2]$ med denne bibetingelsen. Mer matematisk er dette problemstillingen:

$$\min_{\mathbf{w}_{MV}(\theta)} \mathcal{E}[|\mathbf{w}'_{MV}(\theta)\mathbf{x}(t)|^2] \quad \text{med bibetingelsen} \quad \text{Re}[\mathbf{a}'(\theta)\mathbf{w}_{MV}(\theta)] = 1 \quad (3.11)$$

For å finne løsningen på dette problemet tar en først utgangspunkt i definisjonen av $\mathcal{P}_{MV}(\theta)$. Bruk av standard Lagrange multiplikasjon teknikk gir uttrykket:

$$\mathbf{J}_{MV} = \mathbf{w}'_{MV}(\theta)\mathbf{R}_{XX}\mathbf{w}_{MV}(\theta) + \lambda(\mathbf{w}'_{MV}(\theta)\mathbf{a}(\theta) - 1)$$

Dette deriveres med hensyn på $\mathbf{w}_{MV}(\theta)'$ og uttrykket settes lik null. Dermed kan denne relasjonen finnes:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{R}_{XX}\mathbf{w}_{MV}(\theta) + \lambda\mathbf{a}(\theta) \\ \Rightarrow \mathbf{w}_{MV}(\theta) &= -\lambda\mathbf{R}_{XX}^{-1}\mathbf{a}(\theta) \end{aligned}$$

Ligning 3.11 gir at λ er gitt ved:

$$\lambda = -\frac{1}{\mathbf{a}'(\theta)\mathbf{R}_{XX}^{-1}\mathbf{a}(\theta)}$$

Løsningen gir dette uttrykket for minimum varians vektningen:

$$\mathbf{w}_{MV}(\theta) = \frac{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}'(\theta)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{a}(\theta)} \quad (3.12)$$

Dette uttrykket gir hvordan vektene forandrer seg avhengig av hvilken retning θ en velger å minimere i. Vektningen tilpasser seg signal- og støykomponentene i observasjonene. I denne løsningen inngår den romlige kovarians matrisen \mathbf{R}_{XX} . Denne estimeres på samme måte som ved den konvensjonelle stråleformingen. En bruker estimatoren $\hat{\mathbf{R}}_{XX}$ fra 3.4, som er gitt ved $\hat{\mathbf{R}}_{XX} = \frac{1}{N}\mathbf{X}\mathbf{X}'$.

Spekteret til minimum varians metoden blir da:

$$\mathcal{P}_{MV}(\theta) \triangleq \mathbf{w}'_{MV}(\theta)\hat{\mathbf{R}}_{XX}\mathbf{w}_{MV}(\theta) = \left[\mathbf{a}'(\theta)\hat{\mathbf{R}}_{XX}^{-1}\mathbf{a}(\theta) \right]^{-1} \quad (3.13)$$

Det er et overraskende enkelt og elegant uttrykk for $\mathcal{P}_{MV}(\theta)$ som viser seg etter den relativt kompliserte minimeringsprosessen. Forskjellen fra definisjonene av $\mathcal{P}_K(\theta)$ (3.5) til $\mathcal{P}_{MV}(\theta)$ er liten og består i at $\hat{\mathbf{R}}_{XX}$ er invertert og at kvadratsummen $\mathbf{a}'(\theta)\hat{\mathbf{R}}_{XX}^{-1}\mathbf{a}(\theta)$ også inverteres. Det overraskende med $\mathcal{P}_{MV}(\theta)$ er at disse to inverteringene kan tilsvare en optimal vinkelavhengig vektning av sensorene som beskrevet.

3.4.1 Oppsummering av minimum varians algoritmen

Her er en kort punktvis gjennomgang av algoritmen.

1. Observasjonsdataene blir samlet inn.
2. Deretter blir den romlige kovariansen \mathbf{R}_{XX} estimert, estimatoren er gitt ved $\hat{\mathbf{R}}_{XX} = \frac{1}{N}\mathbf{X}\mathbf{X}'$.
3. $\mathcal{P}_{KV}(\theta)$ blir beregnet med

$$\mathcal{P}_{MV}(\theta) \triangleq \left[\mathbf{a}'(\theta)\hat{\mathbf{R}}_{XX}^{-1}\mathbf{a}(\theta) \right]^{-1}.$$

4. Toppene til $\mathcal{P}_{MV}(\theta)$ blir funnet. Disse er estimater av parameterne.

3.5 Teorien bak MUSIC

MUSIC ([Schmidt 79], [Roy 89]) er den første av metodene presentert i denne oppgaven som utnytter underromstrukturen i observasjonene. Metoden tillater vilkårlige sensorplasseringer, likevel er selvfølgelig kvaliteten på resultatene i høyeste grad avhengig av sensorenes posisjoner. Hvis og bare hvis $(m \times d)$ -matrisen \mathbf{A} har full rang er forholdet mellom $\theta = \{\theta_1, \dots, \theta_d\}$ og $\mathcal{R}\{\mathbf{A}(\theta)\}$ en-til-en. Hva som legges i dette forklares i delkapittel 2.3. En er avhengig av dette en-til-en forholdet for å kunne foreta MUSIC-estimeringer. Kravet for dette forholdet er at \mathbf{A} har full rang. Nærmere granskning av denne matrisen finnes i tillegg B. Det antas i alt det følgende at en har et slikt en-til-en forhold.

MUSIC bygger blant annet på geometriske betraktninger. Om vi ikke har noen støy, mao. at $\mathbf{n}(t)$ i (2.9) er identisk lik null, vil observasjonene ligge i et d -dimensjonalt underrom av \mathbb{C}^m . Dette er signal/støyrommet, som er utspent

av kolonnene til \mathbf{A} . Når en har observert d lineært uavhengige vektorer er signal/støyrommet kjent, og en kan finne de søkte parameterne nøyaktig. Det hele blir dessverre mer problematisk når en tar støyen med i betraktning (matematisk vil dette si at en ikke lenger kan anta at $\mathbf{n}(t)$ er identisk lik null). Da kan signalrommet kun estimeres. I noen tilfeller er det mulig å finne et maximum likelihood estimat av dette underrommet. Metoden for å finne frem til et slikt estimat går ut på å finne d lineært uavhengige vektorer som passer best til observasjonene gitt visse betingelser på vektorene. Ulempen er at dette estimatet i praksis nesten alltid er svært krevende å regne ut, og at det ofte ikke er mulig å regne det ut. MUSIC algoritmen er en prosedyre som er ikke-optimal i den betydning at den ikke er et maximum likelihood estimat er parameterne. Den er delt i to deler, og den har i seg noen av de positive egenskapene til maximum likelihood estimatet. MUSIC er også mindre krevende å kalkulere enn et maximum likelihood estimat. Første del av MUSIC består i å finne de d lineært uavhengige vektorer som passer best til observasjonene uten bibetingelser. Deretter søker en de punktene i rommet utspent av disse vektorene som befinner seg nærmest arraymangfoldet.

I utgangspunktet skal en da finne d vektorer som i en bestemt betydning passer best til observasjonene. I MUSIC er det et minste kvadrat kriterium som benyttes. For å finne disse vektorene studeres først kovariansmatrisen til observasjonene. Signalene og støyen antas å ha null som middelvei, og å være ukorrelert av hverandre. Hvis signalene er modellert som stasjonære stokastiske prosesser, antas de å ha en positiv definitte kovarians matrise $\mathbf{R}_{SS} > \mathbf{0}$. Om en velger en deterministisk signalmodell er det nødvendig å anta at

$$\mathbf{R}_{SS} \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \mathbf{s}(t)\mathbf{s}'(t) \quad (3.14)$$

eksisterer og er positiv definitte. I denne oppgaven benyttes modell med deterministiske signaler, og denne antagelsen er dermed nødvendig.

Støyens kovarians antas å være gitt ved:

$$\sigma^2 \mathbf{\Sigma}_n \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \mathbf{n}(t)\mathbf{n}'(t) \quad (3.15)$$

Her er σ og $\mathbf{\Sigma}_n$ henholdsvis standardavviket og kovariansmatrisen til den stokastiske støyen.

Siden signalene og støyen er ukorrelert er det gitt at:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \mathbf{s}(t)\mathbf{n}'(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \mathbf{n}(t)\mathbf{s}'(t) = \mathbf{0}$$

Under disse betingelsene kan en så ta utgangspunkt i definisjonen av observasjonenes kovariansmatrise fra relasjon 3.1

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{XX} &\triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \mathbf{n}(t)\mathbf{n}'(t) \\ &= \mathbf{A} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \mathbf{s}(t)\mathbf{s}'(t) \right) \mathbf{A}' + \mathbf{A} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \mathbf{s}(t)\mathbf{n}'(t) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \mathbf{n}(t) \mathbf{s}'(t) \right) \mathbf{A} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \mathbf{n}(t) \mathbf{n}'(t) \\
 & = \mathbf{A} \mathbf{R}_{SS} \mathbf{A}' + \sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}_n
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$\boldsymbol{\Sigma}_n$ antas som kjent, og brukes direkte i neste trinn i algoritmen. Om støyens kovarians ikke er kjent vil en være avhengig av å anta en kovarians for støyen som synes naturlig. Ofte vil dette bety at det antas at støyen er hvit. I tilfellet med hvit støy er $\boldsymbol{\Sigma}_n$ identisk med identitetsmatrisen.

En finner den generaliserte egendekomposisjonen av $\{\mathbf{R}_{XX}, \boldsymbol{\Sigma}_n\}$ og nummerer egenvektorene \mathbf{e}_1 til \mathbf{e}_m , sortert etter fallende størrelse på egenverdiene. Om støyener antatt å være hvit degenerer denne generaliserte egendekomposisjonen til en vanlig egendekomposisjon. \mathbf{E}_S defineres slik:

$$\mathbf{E}_S \triangleq \boldsymbol{\Sigma}_n [\mathbf{e}_1 | \dots | \mathbf{e}_d] \tag{3.17}$$

Det viser seg at \mathbf{E}_S er et sett av lineært uavhengige vektorer som befinner seg i signalrommet utspent av kolonnene til \mathbf{A} , som altså er det vektorsettet en søker.

At dette er korrekt kan vises ved å ta utgangspunkt i definisjonen av \mathbf{R}_{SS} gitt i 3.14. Denne relasjonen gir at \mathbf{R}_{SS} har full rang, som vil si rang d , gitt at de d propagerende signalene har forskjellig innfallsvinkel. Siden radene i \mathbf{A} er lineært uavhengige har denne matrisen også rang d . Produktet $\mathbf{A} \mathbf{R}_{SS} \mathbf{A}'$ får derfor rang d , og har $m - d$ egenverdier som er lik null. Siden $\mathbf{A} \mathbf{R}_{SS} \mathbf{A}'$ er positivt semidefinit, er alle d egenverdier forskjellig fra null større enn null. Egenvektorene som korresponderer til egenverdiene over null utspenner samme rom som kolonnene til \mathbf{A} .

Neste skritt er å studere den generaliserte egendekomposisjonen til den romlige kovariansmatrisen og støyens kovariansmatrise. Denne er gitt ved $\mathbf{R}_{XX} \bar{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\Sigma}_n \bar{\mathbf{E}} \Lambda$. Her er Λ en diagonal matrise med egenverdiene langs diagonalen. $\bar{\mathbf{E}}$ er matrisen som oppfyller forrige relasjon og $\bar{\mathbf{E}}' \boldsymbol{\Sigma}_n \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{I}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{XX} \bar{\mathbf{E}} & = \boldsymbol{\Sigma}_n \bar{\mathbf{E}} \Lambda \\
 \Rightarrow (\mathbf{A} \mathbf{R}_{SS} \mathbf{A}' + \sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}_n) \bar{\mathbf{E}} & = \boldsymbol{\Sigma}_n \bar{\mathbf{E}} \Lambda \\
 \Rightarrow \bar{\mathbf{E}}' \mathbf{A} \mathbf{R}_{SS} \mathbf{A}' \bar{\mathbf{E}} & = \bar{\mathbf{E}}' \boldsymbol{\Sigma}_n \bar{\mathbf{E}} \Lambda - \sigma^2 \bar{\mathbf{E}}' \boldsymbol{\Sigma}_n \bar{\mathbf{E}} \\
 \Rightarrow \bar{\mathbf{E}}' \mathbf{A} \mathbf{R}_{SS} \mathbf{A}' \bar{\mathbf{E}} & = \Lambda - \sigma^2 \mathbf{I} \\
 \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{R}_{SS} \mathbf{A}' & = \bar{\mathbf{E}}'^{-1} [\Lambda - \sigma^2 \mathbf{I}] \bar{\mathbf{E}}^{-1} \\
 \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{R}_{SS} \mathbf{A}' \bar{\mathbf{E}} & = \boldsymbol{\Sigma}_n \bar{\mathbf{E}} [\Lambda - \sigma^2 \mathbf{I}]
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Denne relasjonen betyr at de samme generaliserte egenvektorene kan benyttes til den generaliserte egendekomposisjonen til matriseparene $\{\mathbf{A} \mathbf{R}_{SS} \mathbf{A}', \boldsymbol{\Sigma}_n\}$ og $\{\mathbf{R}_{XX}, \boldsymbol{\Sigma}_n\}$. Forskjellen består i at egenverdiene i egendekomposisjonen som involverer \mathbf{R}_{XX} er de samme som i den dekomposisjonen som involverer \mathbf{R}_{SS} , bortsett fra ett tillegg på σ^2 .

Kovariansmatrisen til støyen, $\boldsymbol{\Sigma}_n$, er antatt å ha full rang, dermed vil den generaliserte egenverdidekomposisjonen av $\{\mathbf{A} \mathbf{R}_{SS} \mathbf{A}', \boldsymbol{\Sigma}_n\}$ gi d egenverdier forskjellige fra null, og $m - d$ verdier lik null. Siden også $\boldsymbol{\Sigma}_n$ er positivt semidefinit, er de generaliserte egenverdiene som er forskjellige fra null større enn null. En konsekvens av dette er at de $m - d$ minste egenverdiene til \mathbf{R}_{XX} er lik σ^2 .

De m felles egenvektorene defineres som $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$, ordnet etter fallende korresponderende egenverdi. De d egenvektorene som korresponderer til de d

største egenverdiene i Λ og støyens kovariansmatrise konstruerer tilsammen \mathbf{E}_S , som gitt i 3.17. De generaliserte egenvektorene som korresponderer til egenverdier større enn null vil nemlig kunne transformeres til ett sett med vektorer som utspenner samme rom som \mathbf{A} . Transformasjonsmatrisen er Σ_n , siden de generaliserte egenvektorene er resultat av egedekomposisjonen av $\{\mathbf{A}\mathbf{R}_{SS}\mathbf{A}', \Sigma_n\}$. Dermed er det gitt at kolonnene til \mathbf{E}_S utspenner det samme rommet som kolonnene til \mathbf{A} , altså $\mathcal{R}\{\mathbf{E}_S\} = \mathcal{R}\{\mathbf{A}\}$. Altså utspenner kolonnene til \mathbf{E}_S signalrommet.

På samme måte kan en konstruere $\mathbf{E}_N \triangleq \Sigma_n[\mathbf{e}_{d+1} | \dots | \mathbf{e}_m]$. \mathbf{E}_N utspenner underrommet av observasjonsrommet som er ortogonalt på signalrommet; dette er altså støyrommet. Matrisen \mathbf{E}_N er den som velges til bruk i MUSIC algoritmen.

\mathbf{R}_{XX} må også ved denne metoden estimeres. Dette gjøres normalt ved estimatoren $\hat{\mathbf{R}}_{XX}$ på samme måte som for de tidligere presenterte metodene (3.4). Dette vil si $\hat{\mathbf{R}}_{XX} = \frac{1}{N}\mathbf{X}\mathbf{X}'$.

Når kovariansen blir estimert på denne måten (basert på en endelig mengde observasjoner), blir ikke de $m - d$ minste egenverdiene nøyaktig lik σ , men de vil generelt befinne seg relativt nær denne verdien. Dermed trenger det ikke nødvendigvis være åpenbart av disse estimerte egenverdiene hvor stor dimensjon signalrommet har, og d kan kun estimeres. Estimert av d er estimatoren \hat{d} . I alle anvendelser av denne metoden må en kjenne til, eller benytte et estimat av, antall deterministiske signaler som blir observert, som er lik størrelsen på d og igjen lik dimensjonen på signalrommet. Grunnen til at en \hat{d} må være bestemt, er at denne inngår i definisjonen av \mathbf{E}_S og \mathbf{E}_N . \mathbf{E}_N brukes eksplisitt av MUSIC-algoritmen. (Jf. 3.17 og 3.19). Måten en estimerer \hat{d} på er ved å anskue egenverdiene. Denne estimeringen er studert nærmere i 3.7.

Om en igjen ser bort fra støyen kan en finne parameterne ved å finne elementene av underrommet som er utspent av kolonnene til \mathbf{A} , $\mathcal{R}\{\mathbf{A}\}$, som er ortogonale til støyrommet. Når en tar med støy i betraktningen vil det derimot ikke være noen elementer i $\mathcal{R}\{\mathbf{A}\}$ som er ortogonale til det estimerte støyrommet. De elementene i $\mathcal{R}\{\mathbf{A}\}$ som befinner seg nærmest det estimerte signalrommet i der nærhetsgraden er definert på en meningsfylt måte, bør anses som potensielle løsninger. I dette tilfellet er definisjonen en bruker på denne grad av nærhet følgende:

$$\mathcal{P}_M(\theta) \triangleq \frac{\mathbf{a}'(\theta)\mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}'(\theta)\mathbf{E}_N\mathbf{E}_N'\mathbf{a}(\theta)}, \quad (3.19)$$

$$\text{der } \mathbf{E}_N = \Sigma_n[\mathbf{e}_{\hat{d}+1} | \dots | \mathbf{e}_m]$$

Funksjonen som gir grad av nærhet er altså på mange måter analog til $\mathcal{P}(\theta)$ -funksjonene blir brukt av alle de andre metoden som er presentert. $\mathcal{P}_M(\theta)$ kalles MUSIC-spekteret. Uten støy vil $\mathcal{P}_M(\theta)$ bli uendelig stor når θ er en av de d retningene en av signalene propagerer i. Tar en støy med i betraktningen vil $\mathcal{P}_M(\theta)$ få en mer eller mindre markert topp med toppunkt i nærheten av disse θ -verdiene. Dermed estimeres parameterne ved å velge de d største toppene i spekteret, og ved å observere ved hvilke verdier for θ de forekommer.

$\mathcal{P}_M(\theta)$ er her en størrelse som ikke umiddelbart har en intuitiv fysisk tolkning. Den viser seg å få en mer fysisk tolkning om en ser nærmere på de elementene som definerer den.

$\mathbf{a}(\theta)$ kan dekomponeres i to komponenter, slik:

$$\mathbf{a}(\theta) = \mathbf{a}_S(\theta) + \mathbf{a}_N(\theta).$$

Her er $\mathbf{a}_S(\theta)$ en vektor i signalrommet utspent av vektorene $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\hat{d}}$, og $\mathbf{a}_N(\theta)$ en vektor i støyrommet utspent av vektorene $\mathbf{e}_{\hat{d}+1}, \dots, \mathbf{e}_m$. En har så for produktet $\mathbf{E}_N \mathbf{a}(\theta)$:

$$\mathbf{E}_N \mathbf{a}(\theta) = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}_{\hat{d}+1}, \mathbf{a}(\theta) \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{e}_m, \mathbf{a}(\theta) \rangle \end{bmatrix}$$

Strukturen av $\mathbf{a}_N(\theta)$ er også kjent:

$$\mathbf{a}_N(\theta) = \sum_{i=\hat{d}+1}^m \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{a}(\theta) \rangle \mathbf{e}_i$$

Dette gir da:

$$\mathcal{P}_M(\theta) = \frac{\|\mathbf{a}(\theta)\|_2^2}{\|\mathbf{a}_N(\theta)\|_2^2} = \frac{\|\mathbf{a}_S(\theta) + \mathbf{a}_N(\theta)\|_2^2}{\|\mathbf{a}_N(\theta)\|_2^2} = \frac{\|\mathbf{a}_S(\theta)\|_2^2}{\|\mathbf{a}_N(\theta)\|_2^2} + 1$$

Dette er altså en type signalstøy-forhold: Jo større lengden av signaldelen av $\mathbf{a}(\theta)$ er i en retning i forhold til lengden av støydelen av $\mathbf{a}(\theta)$, jo større blir $\mathcal{P}_M(\theta)$ for denne retningen.

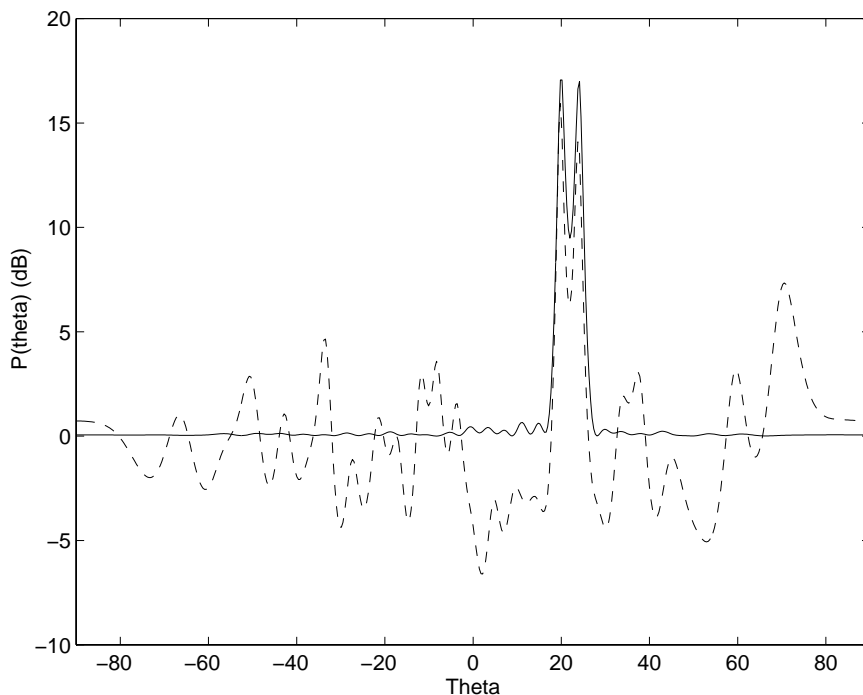
Uttrykket i telleren i definisjonen av \mathcal{P}_M (3.19) var ikke med i de tidligste versjonene av MUSIC-algoritmen. Det har kommet med etterhvert som en vinkelavhengig normalisering. Den normaliserende effekten sees klarest om en tenker seg at \mathbf{E}_N er lik identitetsmatrisen. Da ville $\mathcal{P}_M(\theta)$ være identisk lik 1 for alle θ . Selvfølgelig er ikke $\mathbf{E}_N = \mathbf{I}$ aktuelt i anvendelser av metoden, men innføringen av produktet $\mathbf{a}'(\theta)\mathbf{a}(\theta)$ har likevel denne normaliserende effekten.

Ved den nært beslektede egenverdimetoden benyttter en også $\mathcal{P}_M(\theta)$ som definert i (3.19), forskjellen består kun i måten \mathbf{E}_N defineres. Tanken er at ved konstruksjonen av \mathbf{E}_N er det naturlig å i hver kolonne multiplisere egenvektoren med egenverdien som korresponderer til den. Dette betyr at \mathbf{E}_N her er definert slik:

$$\mathbf{E}_N \triangleq \Sigma_n[\lambda_{\hat{d}+1} \mathbf{e}_{\hat{d}+1} \mid \dots \mid \lambda_m \mathbf{e}_m]$$

Denne endringen i definisjonen av \mathbf{E}_N må jo nødvendigvis få konsekvenser for resultatene av estimeringen, men disse viser seg å være helt minimale med hensyn til toppenes posisjon i $\mathcal{P}_M(\theta)$ -plottet. Forskjellen er lett anskuelig ved en sammenligning av to plott, henholdsvis fremskaffet av MUSIC og egenverdimetoden. Den består i at MUSIC ved å normalisere vektorene som utspenner støyrommet, gjør de delene av spekteret som ikke inneholder store topper, mindre erratic og flatere. Dette betyr at denne normaliseringen i MUSIC gjør støyen hvitere. Se figur 3.4 for et eksempel.

Den store forskjellen mellom MUSIC og egenverdimetoden er den som illustreres i figur 3.4 i støydelen av $\mathcal{P}(\theta)$. Når det gjelder om metoden lykkes i estimeringen og plasseringen av toppene i plottet, har de to metodene nærmest identiske egenskaper. Dermed studeres bare MUSIC i denne oppgaven. Tanken er at de generelle konklusjonene angående estimeringsegenskapene til MUSIC også er gyldige for egenverdimetoden.



Figur 3.4: Eksempel på forskjellene i spektrene produsert av MUSIC og egenverdi metoden. Spektrene er plottet med halvlogaritmisk amplitude. Simuleringen er foretatt med to signaler, med samme innbyrdes effekt. Signalene har innfallsvinkler 20° og 24° . Signalene observeres med et 32-elementers array som er lineært og med uniform sensoravstand. MUSIC-spekteret, $\mathcal{P}_M(\theta)$, er beskrevet ved den heltrukne kurven. Spekteret til egenverdimetoden, $\mathcal{P}_{EV}(\theta)$, er beskrevet ved den stiplede kurven.

3.5.1 Oppsummering av MUSIC-algoritmen

Her er en kort punktvis gjennomgang av algoritmen.

1. En går ut fra en modell for observasjonene en mottar med sensorene i arrayet, og samler så inn data.
2. Deretter estimerer en $\mathbf{R}_{XX} = E\{\mathbf{xx}'\} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{SS}\mathbf{A}' + \rho^2\mathbf{\Sigma}_n$, estimatoren døpes $\hat{\mathbf{R}}_{XX}$, og er gitt ved $\hat{\mathbf{R}}_{XX} = \frac{1}{N}\mathbf{XX}'$.
3. En finner den generaliserte egedekomposisjonen av $\{\hat{\mathbf{R}}_{XX}, \mathbf{\Sigma}_n\}$

$$\hat{\mathbf{R}}_{XX}\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{\Sigma}_n\bar{\mathbf{E}}\mathbf{\Lambda}$$

der $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$, og $\bar{\mathbf{E}} = [\mathbf{e}_1 | \dots | \mathbf{e}_m]$

4. En estimerer antall kilder d med estimatoren \hat{d} . Mer om dette i del 3.7.
5. $\mathcal{P}_M(\theta)$ blir beregnet med

$$\mathcal{P}_M(\theta) = \frac{\mathbf{a}'(\theta)\mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}'(\theta)\mathbf{E}_N\mathbf{E}_N'\mathbf{a}(\theta)},$$

der $\mathbf{E}_N = \Sigma_n[\mathbf{e}_{\hat{d}+1} | \dots | \mathbf{e}_m]$.

6. De \hat{d} (største) toppene til $\mathcal{P}_M(\theta)$ blir funnet. Disse er estimater av parameterene.

Denne algoritmen viser seg ved inspeksjon å ha klare likhetstrekk med algoritmen for å estimere med minimum varians metoden (jf. del 3.4.1). I begge metoder beregnes et $\mathcal{P}(\theta)$ -uttrykk. Forskjellen ligger i at ved minimum varians metoden benyttes uttrykket $\mathcal{P}_{MV}(\theta) = [\mathbf{a}'(\theta)\hat{\mathbf{R}}_{XX}^{-1}\mathbf{a}(\theta)]$, mens i MUSIC benyttes $\mathcal{P}_M(\theta) = \frac{\mathbf{a}'(\theta)\mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}'(\theta)\mathbf{E}_N\mathbf{E}_N'\mathbf{a}(\theta)}$. I uttrykket brukt i minimum varians metoden benyttes den empirisk estimerte kovariansmatrisen direkte, mens denne kovariansmatrisen brukes i MUSIC for å finne \mathbf{E}_N . \mathbf{E}_N er definert av 3.19. Denne gir at \mathbf{E}_N består av produktet av Σ_n multiplisert med de $m - \hat{d}$ generaliserte egenvektorene til $\{\hat{\mathbf{R}}_{XX}, \Sigma_n\}$ som korresponderer til de $m - \hat{d}$ laveste generaliserte egenverdiene. Det er beregningen og bruken av \mathbf{E}_N i MUSIC som er den viktige forskjellen mellom de to algoritmene.

3.6 Teorien bak ESPRIT

ESPRIT ([Roy 85], [Roy 86] og [Roy 89]) er den nyeste av metodene som presenteres i denne oppgaven. En tar utgangspunkt i den opprinnelige problemstillingen, og at en har et array som består av m par sensorer. Det er altså totalt $2m$ sensorer i arrayet, om en da ikke kan la en del sensorer inngå i to par. Dette vil det være mulig og naturlig å gjøre f.eks. med en lineær, regulær matrise. Estimeringen vil generelt bli bedre om dette gjøres, siden metoden da får flere opplysninger å arbeide med. Disse sensorparene kan plasseres vilkårlig. Det settes to krav til hvert av sensorparene: For det første må de to sensorene ha identisk retnings sensitivitet $a_i(\theta)$ for alle θ . Videre må de være atskilt med den samme kjente vektoren $\vec{\Delta}$. Dette er altså en vektor, dermed må både retning og avstand være identisk mellom de to sensorene som inngår i alle parene. Δ defineres her som lengden på $\vec{\Delta}$.

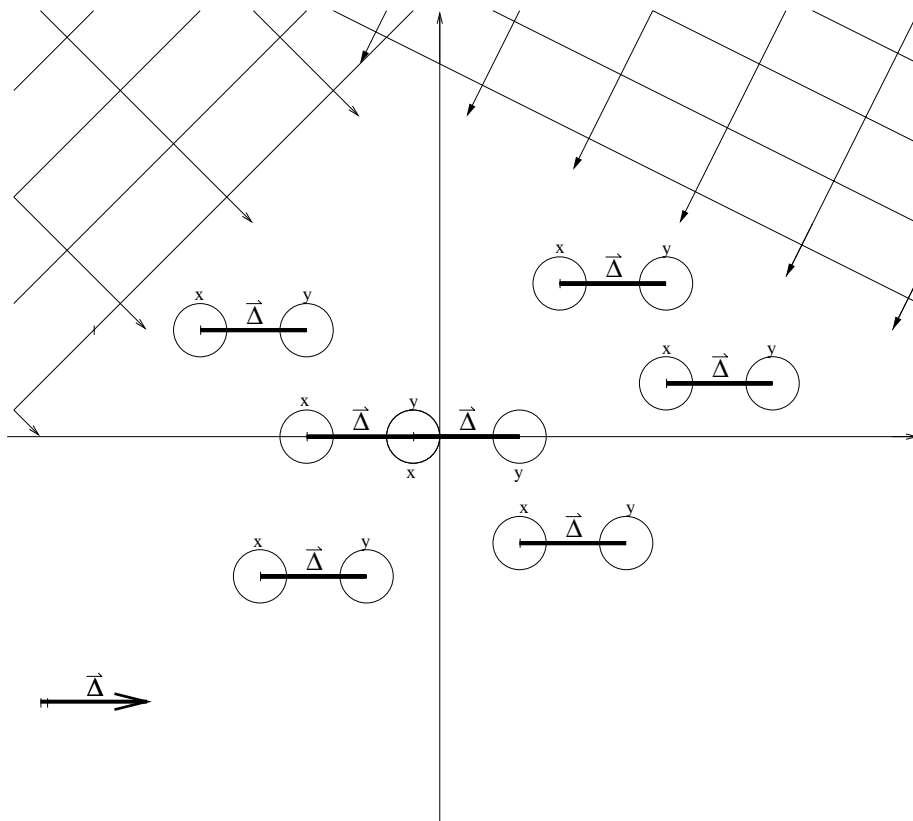
Dette andre kravet setter en viktig begrensning på hvilken struktur arrayet kan ha. Et lineært og regulært array passer ypperlig til ESPRIT-algoritmen; der er avstanden uniform mellom alle nabosensorer.

En antar at det finnes $d \leq m$ planbølger, alle med den kjente frekvensen ω_o , som det observeres på. Vi anser arrayet som oppdelt i to underarray, Z_X og Z_Y . En sensor fra hvert sensorpar tilhører hver av disse to underarrayene. Disse er identiske, bortsett fra at sensorene i Z_Y er forskjøvet med $\vec{\Delta}$ i forhold til i Z_X (se fig. 3.5) Signalene som observeres av det i 'te sensorparet kan da uttrykkes slik:

$$\hat{x}_k(t) = \sum_{i=1}^d s_k(t)a_k(\theta_i) + n_{x_k}(t) \quad (3.20)$$

$$\hat{y}_k(t) = \sum_{i=1}^d s_k(t)e^{j\omega_o\Delta \sin \theta_i/c} a_k(\theta_i) + n_{y_k}(t) \quad (3.21)$$

Her er θ_k innfallsvinkelen til den k 'te bølgen relativt til $\vec{\Delta}$. Estimaterne av propageringsretningene som en finner med metoden, estimerer innfallsvinkelen



Figur 3.5: Prinsippskisse av array anvendelig til ESPRIT, der antall elementer er 13, $m = 7$ og $d = 2$. Alle sensorene lokalisert til venstre i et par danner tilsammen Z_X (disse er merket x i figuren), mens alle lokalisert til høyre danner Z_Y (merket y). Begge underarrayene består altså av m sensorer plassert likt i forhold til hverandre. Legg merke til at sensoren nærmest origo er merket både x og y , denne inngår i to par og dermed både i Z_X og Z_Y .

i forhold til retningen til $\vec{\Delta}$. Om en lar $\vec{\Delta}$ ligge parallelt med den horisontale aksene, vil innfallsvinklene være definert som i figur 2.1.

Relasjonene 3.20 og 3.21 kan videre overføres til vektorform; dette gir følgende uttrykk:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_x(t) \quad (3.22)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\Phi\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_y(t) \quad (3.23)$$

Her er \mathbf{A} ($m \times d$)-matrisen som har samme struktur som i beskrivelsen av MUSIC. \mathbf{x} er ($m \times 1$)-vektoren som inneholder alle observasjonene ved tiden t . $\mathbf{n}_x(t)$ er ($m \times 1$)-vektoren som inneholder støyen ved tiden t . $\mathbf{s}(t)$ er ($d \times 1$)-vektoren som inneholder de d innfallende signalene ved origo ved tiden t . Φ er en diagonal ($d \times d$)-matrise der diagonalelementene er funksjoner av faseforskjellene mellom sensorparene for hver av de d bølgefrontene. Denne er gitt ved

$$\Phi = \text{diag}\{e^{j\gamma_1}, \dots, e^{j\gamma_d}\},$$

der $\gamma_k = \omega_o \Delta \sin \theta_k / c$.

Φ er en unitær matrise som uttrykker sammenhengen mellom observasjonene i Z_X og Z_Y . Parameterne en ønsker å estimere er de forskjellige θ_k . Disse finnes i Φ , og dette gjør matrisen svært viktig.

Observasjonsvektoren for det totale arrayet blir en $(2m \times 1)$ -vektor kalt $\mathbf{z}(t)$:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_z(t) \quad (3.24)$$

Her er:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}\Phi \end{bmatrix} \quad (2m \times d)\text{-matrise.} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{n}_z(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_x(t) \\ \mathbf{n}_y(t) \end{bmatrix} \quad (2m \times 1)\text{-vektor.} \quad (3.26)$$

$$(3.27)$$

Strukturen til $\bar{\mathbf{A}}$, som gitt av (3.25), brukes til å finne diagonalelementene til Φ (som inneholder parameterne som søkes), uten å kjenne til \mathbf{A} .

Den grunnleggende ideen i ESPRIT er at en utnytter at forskjellen mellom de deterministiske signalene som observert av et element i Z_X og det korresponderende elementet i Z_Y , er konstant. Denne forskjellen er identisk for hvert sensorpar. Som en kan se av 3.22 og 3.23, består forskjellen mellom signalene observert av sensorene i et par kun av en multiplikasjon med konstante Φ . Denne invariansen kan anskues som en rotasjonell invarians, siden diagonalen til Φ kun har elementer av formen $e^{j\gamma_i}$, og dette er identisk med formen til en rotasjonsoperator for vektorer i det komplekse plan. Dette forklarer hvorfor begrepet “Rotational Invariance” er den del av det lengre begrepet ESPRIT er et akronym for; Estimation of Signal Parameters via **R**otational **I**nvariance **T**echniques.

For å trenge lenger inn i metoden må en nå ta for seg hvilke matriser som utspenner hvilke rom og underrom. Om en ser bort fra støyen vil observasjonene til Z_X og Z_Y utspenne hvert sitt d -dimensjonale underrom av \mathbb{C}^m . Disse to underrommene er identiske og lik underrommet utspent av \mathbf{A} , som igjen er signal/støyrommet. Som vi også så analogt i teorien omkring MUSIC er de $2m - d$ minste generaliserte egenverdiene til $\{\hat{\mathbf{R}}_{ZZ}, \Sigma_n\}$ lik σ^2 .

En tar så et øyeblikk hensyn til støyen på observasjonene. Denne vil i praksis føre til at signalrommet kun kan estimeres av observasjonene og at de $2m - d$ minste egenverdiene bare vil befinne seg mer eller mindre nær σ^2 og i praksis aldri være identisk lik σ^2 .

Observasjonsstøyen sees igjen bort fra i det følgende. De d største generaliserte egenverdiene korresponderer til egenvektorer som utspenner signal/støyrommet, etter en lineær transformasjon som gjøres ved å multiplisere med Σ_n fra venstre. En definerer derfor analogt som for MUSIC:

$$\mathbf{E}_S = \Sigma_n[\mathbf{e}_1 \mid \dots \mid \mathbf{e}_d]. \quad (3.28)$$

Her er $\mathcal{R}\{\mathbf{E}_S\} = \mathcal{R}\{\bar{\mathbf{A}}\}$, signal/støyrommet. Siden \mathbf{E}_S og $\bar{\mathbf{A}}$ utspenner det samme rommet må en ha en unik \mathbf{T} slik at:

$$\mathbf{E}_S = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{T}, \quad \text{eller} \quad \mathbf{E}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_X \\ \mathbf{E}_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{T} \\ \mathbf{A}\Phi\mathbf{T} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Av dette ser vi at $\mathcal{R}\{\mathbf{E}_X\} = \mathcal{R}\{\mathbf{E}_Y\} = \mathcal{R}\{\mathbf{A}\}$.

En definerer så $\mathbf{E}_{XY} \triangleq [\mathbf{E}_X \mid \mathbf{E}_Y]$. Siden kolonnene i \mathbf{E}_X og \mathbf{E}_Y utspenner det samme underrommet, er rangen til \mathbf{E}_{XY} lik d . Dette impliserer at det eksisterer en matrise $\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{2d \times d}$ av rang d , slik at \mathbf{F} utspenner nullrommet til \mathbf{E}_{XY} . En har da:

$$\mathbf{0} = \mathbf{E}_{XY}\mathbf{F} = [\mathbf{E}_X \mid \mathbf{E}_Y]\mathbf{F} = \mathbf{E}_X\mathbf{F}_X + \mathbf{E}_Y\mathbf{F}_Y = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{F}_X + \mathbf{A}\mathbf{\Phi}\mathbf{T}\mathbf{F}_Y \quad (3.30)$$

En definerer $\mathbf{\Psi} \triangleq -\mathbf{F}_X[\mathbf{F}_Y]^{-1}$. $\mathbf{\Psi}$ er en operator som transformerer (eller "roterer") ett sett av vektorer (\mathbf{E}_X) til ett annet (\mathbf{E}_Y). Denne operasjonen ser slik ut:

$$\mathbf{E}_X\mathbf{\Psi} = \mathbf{E}_X(-\mathbf{F}_X\mathbf{F}_Y^{-1}) = (-\mathbf{E}_X\mathbf{F}_X)\mathbf{F}_Y^{-1} = \mathbf{E}_Y\mathbf{F}_Y\mathbf{F}_Y^{-1} = \mathbf{E}_Y \quad (3.31)$$

En omformer nå 3.30 til

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{F}_X &= -\mathbf{A}\mathbf{\Phi}\mathbf{T}\mathbf{F}_Y \\ \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{T}(-\mathbf{F}_X\mathbf{F}_Y^{-1}) &= \mathbf{A}\mathbf{\Phi}\mathbf{T} \\ \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{\Psi} &= \mathbf{A}\mathbf{\Phi}\mathbf{T} \\ \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{\Psi}\mathbf{T}^{-1} &= \mathbf{A}\mathbf{\Phi} \\ \Rightarrow \mathbf{T}\mathbf{\Psi}\mathbf{T}^{-1} &= \mathbf{\Phi} \end{aligned} \quad (3.32)$$

I disse overgangene bruker en at \mathbf{F}_Y og \mathbf{T} har full rang. Videre antar en at også \mathbf{A} har full rang. Dette er garantert om \mathbf{A} utspenner det d -dimensjonale signalrommet, som er nødvendig for metoden og en av forutsetningene for å bruke den. \mathbf{A} blir studert i tillegg B. Uttrykket 3.32 gir at $\mathbf{\Psi}$ og $\mathbf{\Phi}$ er similære matriser. Dette betyr at egenverdiene til $\mathbf{\Psi}$ er lik diagonalelementene til $\mathbf{\Phi}$. Dermed går ESPRIT ut på å finne parameterne fra diagonalelementene til $\mathbf{\Phi}$ ved å først finne $\mathbf{\Psi}$, deretter foreta en egedekomponering av denne, og til slutt transformere de resulterende egenverdiene.

Observasjonsstøyen tas nå med i betraktningen igjen. Med støy tilstede vil det kun være mulig å estimere \mathbf{E}_S ; med $\hat{\mathbf{E}}_S$. Relasjonen 3.17 benyttes med de generaliserte egenvektorene en har funnet ved den generaliserte egedekomposisjonen av $\{\hat{\mathbf{R}}_{ZZ}, \mathbf{\Sigma}_n\}$. Dette leder ved partisjonering videre til estimater av \mathbf{E}_X og \mathbf{E}_Y . Dette gjør at en kan komme frem til et estimat av $\mathbf{\Psi}$ på flere måter ut fra dette overbestemte systemet. Algoritmen som er skissert i neste delkapittel er basert på en totale minste kvadraters metode estimering. Motiveringen for bruk av denne metoden er at det er svært rimelig å anta at \mathbf{E}_X og \mathbf{E}_Y inneholder like store og additive feil. Dette er nettopp antagelsen som ligger til grunn for den totale minste kvadraters metode. I praksis kan denne minimeringen gjennomføres enten ved at en i 3.30 erstatter \mathbf{E}_X og \mathbf{E}_Y med estimatene $\hat{\mathbf{E}}_X$ og $\hat{\mathbf{E}}_Y$, og 0-matrisen med en matrise av feil. En minimerer deretter med hensyn på Frobeniusnormen til denne feilmatrisen. Alternativt kan en gjøre det samme med relasjon 3.31. Her må en innføre to feilmatriser i relasjonen. Frobeniusnormen til begge feilmatriser skal nå minimeres.

$$[\mathbf{E}_X + \mathbf{R}_X]\mathbf{\Psi} = [\mathbf{E}_Y + \mathbf{R}_Y] \quad (3.33)$$

Dette er helt analogt uttrykket i 2.1, der totale minste kvadraters metode er beskrevet, og denne metoden kan da direkte benyttes på dette uttrykket.

En finner til slutt parameterne som skal estimeres som ikkelineære funksjoner av egenverdiene til Ψ ved transformasjonen fra frekvens til vinkel gitt ved:

$$\hat{\theta} = \sin^{-1} \left(\frac{c \arg(\hat{\phi})}{\omega_o \Delta} \right) \quad (3.34)$$

3.6.1 Oppsummering av ESPRIT-algoritmen

Her følger en punktvis oppsummering av algoritmen:

1. Som i MUSIC går en ut fra en modell for observasjonene en mottar med sensorene i arrayet og samler inn data.
2. En skaffer seg et estimat av \mathbf{R}_{ZZ} , kalt $\hat{\mathbf{R}}_{ZZ}$ fra observasjonene \mathbf{Z} . Denne er definert på samme måte som $\hat{\mathbf{R}}_{XX}$ benyttet ved minimum varians metode og MUSIC, dvs.

$$\hat{\mathbf{R}}_{ZZ} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{z}(t)\mathbf{z}'(t) = \frac{1}{N} \mathbf{Z}\mathbf{Z}'$$

3. En finner den generaliserte egendekomposisjonen av $\{\hat{\mathbf{R}}_{ZZ}, \Sigma_n\}$

$$\hat{\mathbf{R}}_{ZZ} \bar{\mathbf{E}} = \Sigma_n \bar{\mathbf{E}} \mathbf{\Lambda}$$

der $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2m}\}$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{2m}$, og $\bar{\mathbf{E}} = [\mathbf{e}_1 | \dots | \mathbf{e}_{2m}]$

4. Med utgangspunkt i egenverdiene en finner i forrige punkt, estimerer en antall kilder d med estimatoren \hat{d} . Mer om dette i del 3.7.
5. Videre finner en et estimat av signalromestimatet, $\mathcal{R}\{\mathbf{E}_S\}$, og dekomponerer så denne for å finne \mathbf{E}_X og \mathbf{E}_Y . Dette ved hjelp av:

$$\hat{\mathbf{E}}_S \triangleq \Sigma_n [\mathbf{e}_1 | \dots | \mathbf{e}_{\hat{d}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_X \\ \mathbf{E}_Y \end{bmatrix}.$$

6. Neste skritt er å bruke totale minste kvadraters metode til å finne den Ψ som minimerer Frobeniusnormen til \mathbf{R}_X og \mathbf{R}_Y i

$$[\mathbf{E}_X + \mathbf{R}_X]\Psi = [\mathbf{E}_Y + \mathbf{R}_Y].$$

Metoden er beskrevet i 2.1. Da finner en først egendekomposisjonen ($\lambda_1 > \dots > \lambda_{2\hat{d}}$),

$$\mathbf{E}'_{XY} \mathbf{E}_{XY} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{E}'_X \\ \mathbf{E}'_Y \end{bmatrix} [\mathbf{E}_X | \mathbf{E}_Y] = \mathbf{E} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}',$$

og partisjonér \mathbf{E} i $(\hat{d} \times \hat{d})$ submatriser,

$$\mathbf{E} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} \\ \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} \end{bmatrix}.$$

7. En bestemmer så egenverdiene til $\Psi = -\mathbf{E}_{12}\mathbf{E}_{22}^{-1}$,

$$\hat{\phi}_k = \lambda_k(-\mathbf{E}_{12}\mathbf{E}_{22}^{-1}), \quad \forall k = 1, \dots, \hat{d}.$$

8. Estimerer til slutt $\hat{\theta}_k = f^{-1}(\hat{\phi}_k)$, i tilfellet DOA estimering blir funksjonen f^{-1} gitt ved:

$$\hat{\theta}_k = \sin^{-1} \left(\frac{c \arg(\hat{\phi}_k)}{\omega_o \Delta} \right)$$

3.7 Estimering av \hat{d} .

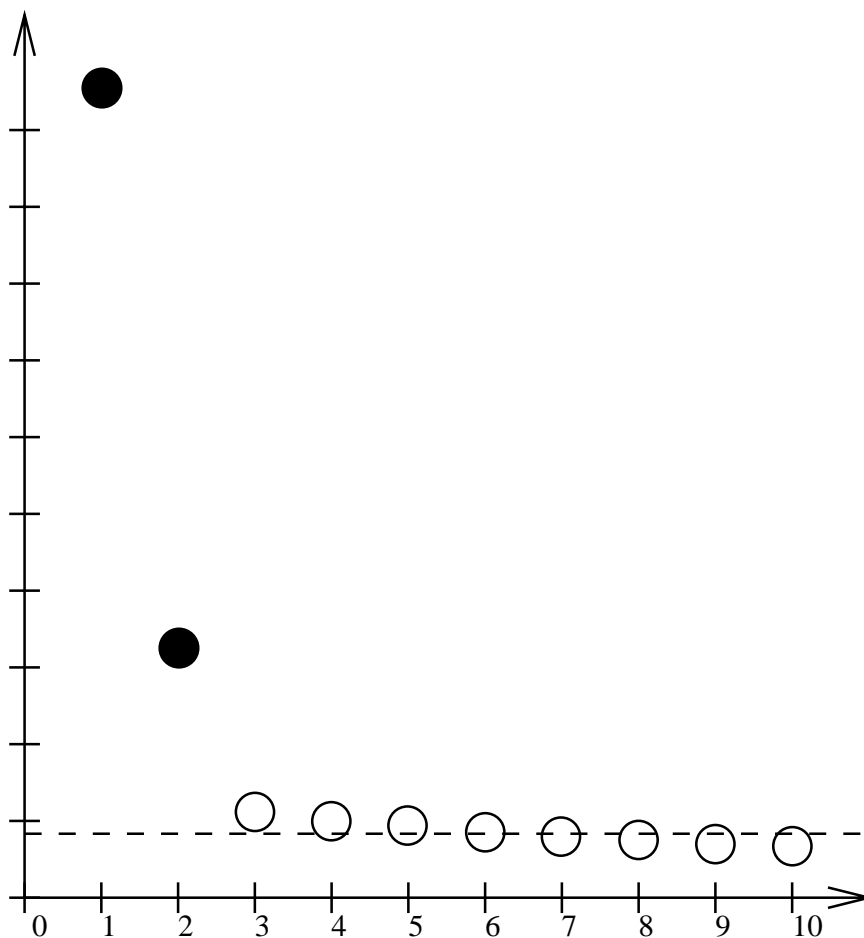
I oppsummeringene av MUSIC- og ESPRIT-algoritmene (henholdsvis del 3.5.1 og 3.6.1) er det referert til en estimering av \hat{d} . Hvordan denne estimeringen gjøres studeres nærmere her. Når antallet deterministiske signaler ikke er kjent er en avhengig av at det er mulig å registrere en vesentlig forskjell i størrelsen på egenverdiene for at det skal være mulig å estimere antallet. Det er viktig at det er mulig å estimere en meningsfylt \hat{d} , siden ett feil estimat av denne heltallstørrelsen vil ha flere negative konsekvenser.

Om en overestimerer størrelsen på d , dvs. $\hat{d} > d$ vil dette kunne gi falske topper i MUSIC, og dette gir nødvendigvis falske estimater i ESPRIT, siden antallet estimater ESPRIT produserer er identisk med \hat{d} . Denne overestimeringen av antall parametre påvirker også de d estimatene som svarer til underliggende parametre. Disse estimatene blir dårligere enn de ville vært om det estimerte antall parametre hadde vært korrekt, dvs. $\hat{d} = d$.

Om en underestimerer d , slik at $\hat{d} < d$, vil en kunne miste topper som svarer til signaler i MUSIC-spekteret. ESPRIT vil nødvendigvis produsere for få parameterestimater ut, siden antallet estimater her igjen er identisk med \hat{d} .

I figur 3.6 er det illustrert ett tilfelle med to deterministiske signaler. Eksemplet bygger på en MUSIC-estimering med et 32-elementers array. Kun ti av egenverdiene er tatt med på illustrasjonen for å gjøre den oversiktlig. En kan av figuren se at de to største egenverdiene skiller seg klart ut i størrelse i forhold til de øvrige. Dette er også den vanlige situasjonen som inntreffer i situasjoner hvor algoritmen ikke er helt på grensen av hva den klarer å estimere. Generelt vil vesensforskjellen i amplitudene mellom de d første egenverdiene og de $m - d$ være mindre jo vanskeligere forholdene estimeringen skjer under er. To eksempler på gradvis vanskeligere forhold å estimere under, er å estimere med gradvis mindre differanse mellom innfallsvinklene eller med gradvis lavere signal-støynivå. I situasjoner hvor metoden lett vil kunne få svært dårlige resultater i sin estimering, vil det ofte samtidig være umulig å estimere antallet signaler i observasjonene ved å sammenligne egenverdiene. Dette gjør del to av estimeringen, som foretas med hensyn til estimert antall parametre, dobbelt vanskelig.

En metode for å estimere korrekt antall parametre under vanskelige forhold er å prøve seg frem med forskjellige \hat{d} . En vil da kunne estimere det korrekte antall parametre ut i fra hvordan innfallsvinkelestimatene som metoden produserer oppfører seg. Et enkelt eksempel på hvordan denne metoden vil kunne anvendes er illustrert i figur 3.7. Denne metoden er kun tenkt som et supplement til å studere egenverdiene der disse ikke gir et klart svar på hva som er et naturlig estimat av d .

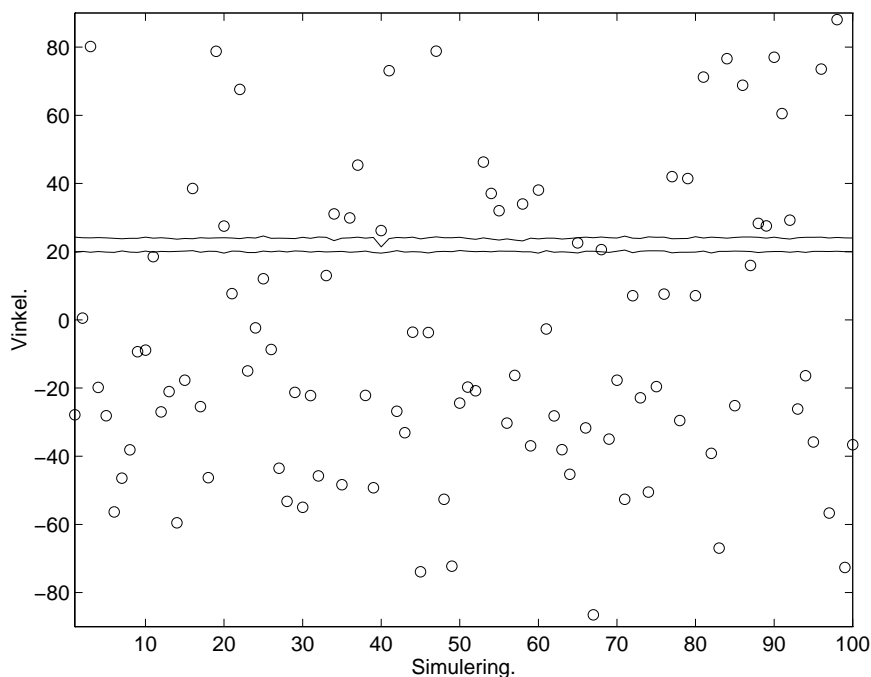


Figur 3.6: Illustrering av de generaliserte egenverdiene til $\{\hat{\mathbf{R}}_{XX}, \mathbf{\Sigma}_n\}$ i ett eksempel med to deterministiske signaler. Den stiplede linjen er den teoretiske størrelsen til de generaliserte egenverdiene som korresponderer til egenvektorer som utspanner støyrommet, σ^2 .

I alle simuleringsseriene gjort i denne oppgaven er estimeringen av \hat{d} automatisert til å gjette det korrekte antallet, altså $\hat{d} = d = 2$ for samtlige simuleringer. Dette blir altså en a priori kunnskap som vil kunne styrke egenskapene til MUSIC og ESPRIT i forhold til de andre metodene. Dette diskuteres videre i kapittel 10.

3.8 Eksempler på typiske $\mathcal{P}(\theta)$ -funksjoner for de forskjellige metodene.

I dette delkapitlet avsluttes presentasjonen av metodene ved å se på noen typiske spektre for de forskjellige metodene, og forskjellene mellom disse. Figur 3.8 og 3.9 plotter $\mathcal{P}(\theta)$ for konvensjonell metode med og uten datavindue, minimum varians metode og MUSIC. Observasjonene er gjort av to deterministiske signaler med

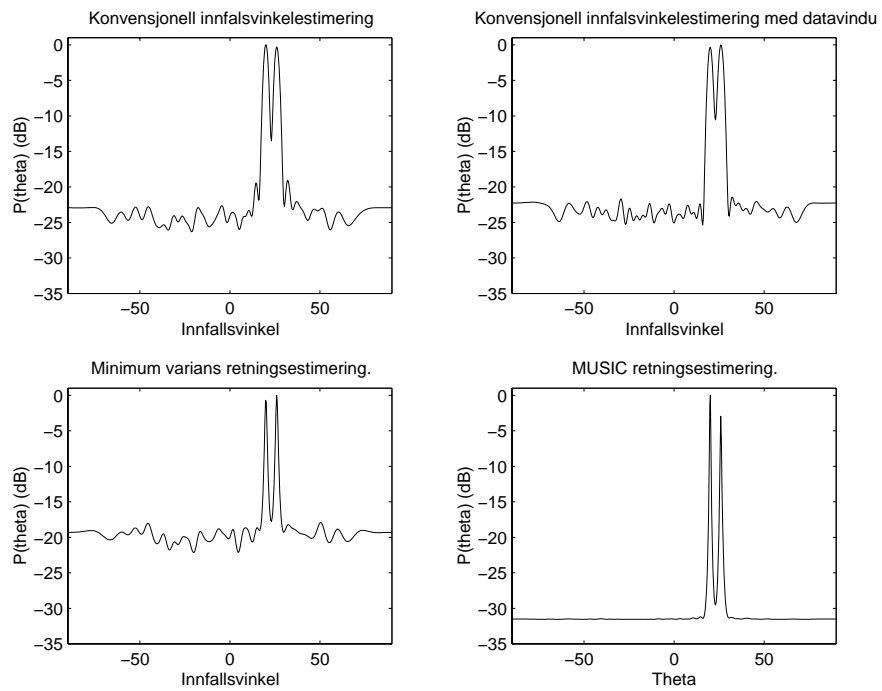


Figur 3.7: Illustrering av estimering av d ved bruk av forskjellige \hat{d} . Her er det korrekte antall parametre 2. Disse to bølgene har innfallsvinkel 20° og 24° . Det ble foretatt 100 ESPRIT estimeringer av innfallsvinklener. I hvert tilfelle ble parameter antatt å være lik 3. I figuren er de to heltrukne kurvene trukket mellom de to estimatene for hver simulering som korresponderer til de deterministiske signalene. Sirklene viser det tredje innfallsvinklestimatet for hver simulering. En kan ganske lett slutte av dataene denne figuren plottes at en av de tre estimatene i alle simuleringene har grovt tilnærmet en uniform sannsynlighetsfordeling over store deler av intervallet -90° til 90° . Dermed er det naturlig å anta at den ikke estimerer noen underliggende parameter, og at det korrekte antallet parameter i dette tilfellet er 2 og ikke 3.

innfallsvinkler 20° og 26° . Signalstøynivået er 0 dB. Antall øyeblikksbilder er 100. De fire forskjellige estimeringene er gjort med de samme observasjonene.

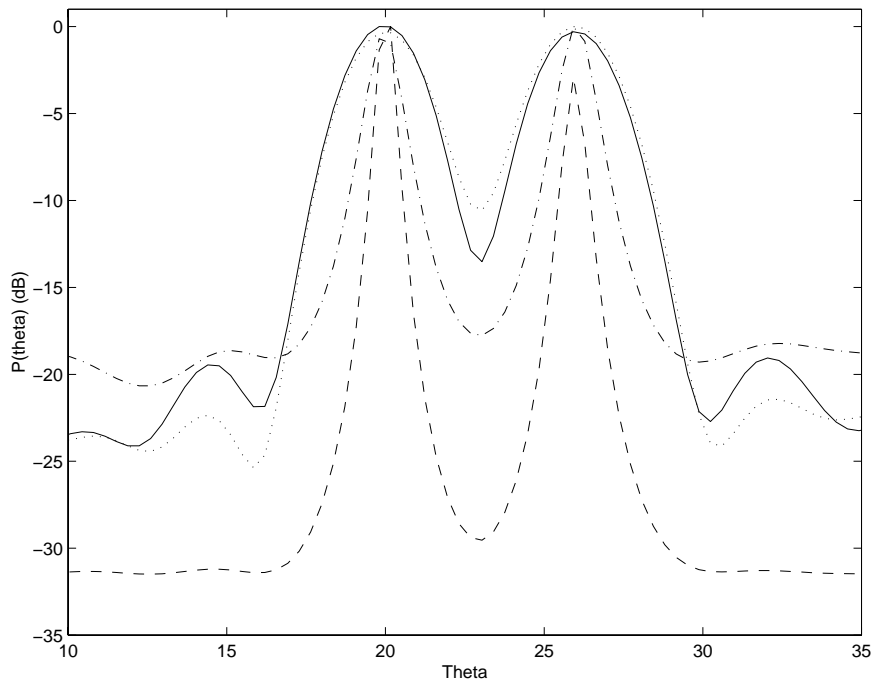
En kan av disse plottene observere de relativt brede toppene omkring toppunktene i plottene $\mathcal{P}_K(\theta)$ og $\mathcal{P}_{KW}(\theta)$, som er et signal om at den konvensjonelle metoden har dårligst oppløsning av de aktuelle metodene. Bredest er toppene i $\mathcal{P}_{KW}(\theta)$, dette fordi det ved bruk av datavinduet i denne metoden er ofret noe oppløsning for å senke sidelobnivået til strålingsdiagram. Det senkede sidelobnivået gir seg derimot utslag i større differanse mellom de to toppene og de andre maksimalpunktene. Plottet av $\mathcal{P}_{MV}(\theta)$ har tydelig spissere topper enn plottene av $\mathcal{P}_K(\theta)$ og $\mathcal{P}_{KW}(\theta)$. dB-differansen mellom toppunktene og støygulvet er derimot mindre her enn for de konvensjonelle metodene. Plottet av MUSIC-spekteret, $\mathcal{P}_M(\theta)$, har de klart smaleste toppene og det laveste støygulvet. Dette borger veldig godt for metodens egenskaper i dette tilfellet. Effekten av at støyen blir gjort hvitere ved at MUSIC normaliserer egenverdiene kan observeres ved at MUSIC-spekteret har et langt mindre erratisk støygulv

3.8. EKSEMPLER PÅ TYPISKE $\mathcal{P}(\theta)$ -FUNKSJONER



Figur 3.8: Metodenes spektre. Halvlogaritmiske plott av $\mathcal{P}(\theta)$ for konvensjonell metode med og uten datavindu, minimum varians metode og MUSIC.

enn de andre spektrene.



Figur 3.9: Metodenes spektr. Halvlogaritmiske plott av $\mathcal{P}(\theta)$ for konvensjonell metode med og uten datavindu, minimum varians metode og MUSIC. Her er plottet et intervall omkring innfallsvinkelene til signalene. Den konvensjonelle metodens spekter er plottet med heltrukket kurve. Den konvensjonelle metoden med datavindus spekter er plottet med prikket kurve. Minimum varians metodens spekter er plottet med alternerende streker og prikker. MUSIC-spekteret er plottet med en stiplet kurve.

Kapittel 4

Elementære egenskaper til de høyoppløselige metodene

I dette kapitlet skal det kort gjøres greie for eksempler på de elementære egenskapene til MUSIC og ESPRIT. I tilfeller hvor det er mulig vil det gjøres kvalitative sammenligninger av metodene.

Når det gjelder arraydesignet er det flere viktige forskjeller. Begge metodene er avhengige av et en-til-en forhold mellom $\theta = \{\theta_1, \dots, \theta_d\}$ og $\mathcal{R}\{\mathbf{A}(\theta)\}$, som forklart i del (2.3). Dette kravet eksisterer implisitt også for de andre aktuelle metodene ved denne type estimering. Når en antar at dette forholdet er oppfylt, er MUSIC mer fleksibel enn ESPRIT. Den stiller ingen videre krav til plasseringen av sensorene. ESPRIT har her den fundamentale begrensningen at sensorene må være plassert i par hvor posisjonsforskjellen innad i hvert par er konstant. Dette gjør at MUSIC har dobbelt så mange frihetsgrader når det gjelder sensorplasseringen.

En fundamental begrensning for begge metodene har sitt utspring i hvor mange andre observasjoner som må benyttes for å predikere en observasjon, som gitt i relasjon 2.7. Maksimalt antall signaler ESPRIT kan estimere innfallsvinkelen for, er m for et array som består av m sensorpar, altså $2m$ sensorer. Her er MUSIC kraftigere og kan maksimalt detektere et antall signaler lik antall sensorer i arrayet. Denne svakheten i ESPRIT kan hjelpes på om en har et regulært array med konstant avstand mellom sensorene, og lik retningssensitivitet for alle sensorene. For eksempel vil da alle sensorene i et lineært array (bortsett fra de to i hver sin ytterkant) inngå i to par, ett med forrige sensor og ett med neste. På denne måten vil en med $2m$ sensorer ikke ha m sensorpar, men $2m - 1$ sensorpar. Dette gjør at ESPRIT kan detektere tilnærmet like mange signaler som MUSIC i slike særtilfeller. I flertallet av tilfellene som skal sees på i denne oppgaven er det det mulig å benytte denne teknikken og det blir dermed også gjort.

En del av MUSIC algoritmen er å finne grad av nærhet gitt ved $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(\theta)$ med definisjonen 3.19 for enhver vinkel. I denne ligningen inngår $\mathbf{a}(\theta)$. Dette innebærer at en må kjenne posisjonen til alle sensorene i arrayet. I ESPRIT opptrer derimot aldri $\mathbf{a}(\theta)$ direkte, der finner en parameterne ved å indirekte finne elementene i den diagonale matrisen Φ . Dermed trenger en ikke vite hvor en sensor befinner seg, så lenge en har den beskrevne parstrukturen. En

må derimot nødvendigvis kjenne til retning og lengde på den konstante posisjonsforskjellen mellom sensorene i parene. MUSIC krever altså kjennskap til hver sensorplassering, mens ESPRIT kun krever kjennskap til den konstante posisjonsforskjellen.

En videre forskjell mellom metodene som også skyldes at MUSIC bruker $\mathbf{a}(\theta)$ direkte for å finne parameterne, dreier seg om retningssensitiviteten til sensorene. MUSIC må også kjenne denne for alle sensorene korresponderende til enhver retning. Dette er i teorien uendelig mye kalibreringsdata. I praksis vil en klare seg med å kjenne retningssensitiviteten i ett sett av jevnt fordelte retninger. En besparelse er om flere eller alle sensorene har samme retningssensitivitet. Da kan en slippe med en liten brøkdel av lagret kalibreringsdata. Her har ESPRIT igjen fordelene av å ikke bruke $\mathbf{a}(\theta)$ direkte, men heller konstruere $\bar{\mathbf{A}}$ og se på strukturen til denne. Siden en ikke trenger å kjenne $\mathbf{a}(\theta)$, trenger en heller ikke kjenne retningssensitiviteten til sensorene. Ved ESPRIT trenger en dermed ikke lagre noen kalibreringsdata. Derimot er det et krav for ESPRIT at de to sensorene som utgjør et par har identisk retningssensitivitet.

MUSIC foretar et søk over hele parameterrommet (i det 2-dimensjonale DOA-tilfellet blir dette alle mulige verdier for θ). Dette søket krever et stort antall regneoperasjoner i forhold til antallet som kreves til ESPRIT's egen-dekomponeringsrutiner. Om en søker parametre med flere dimensjoner (f.eks. 2-dimensjonale romvinkler i det 3-dimensjonale DOA-tilfellet), øker antall regneoperasjoner i MUSIC eksponentielt med antall dimensjoner, mens antall operasjoner som kreves av ESPRIT øker lineært.

Disse tre siste momentene kan utgjøre en betydelig fordel i ESPRIT's favør i noen applikasjoner. Prisen en må betale for disse fordelene er altså en halvering i antall frihetsgrader for sensorposisjonene. I mange tilfeller har ikke dette tapet av frihetsgrader noen negative konsekvenser. Parstrukturkravet vil derimot gjøre det vanskelig å benytte ESPRIT ved observasjoner fra et opprinnelig regulært, tynnet lineært array. ESPRIT vil da bare kunne dra nytte av observasjoner fra de områdene av arrayet der to eller flere av de opprinnelig tilstøtende sensorene ikke er tynnet bort. Noen vektning av sensorene kan heller ikke benyttes.

ESPRIT er en mer robust algoritme enn MUSIC i den forstand at den er mindre følsom overfor feil i arrayet. Slike feil kan i tilfellet med MUSIC være feil i opplysningene om sensorenes plasseringer og retningssensitivitet. I ESPRIT sitt tilfelle kan arrayfeil anta to former: Første mulighet er at posisjonsforskjellen mellom sensorene i parene ikke er helt konstant eller nøyaktig kjent. Den andre er at retningssensitiviteten ikke er helt identisk for de to sensorene i hvert par. ESPRIT relative robusthet er en viktig egenskap som kan gjøre den rimeligere og enklere å implementere. I ethvert reelt array vil en måtte ha visse feil eller unøyaktigheter, og jo mer robust en algoritme er jo mindre vil konsekvensene av disse svakhetene være.

Kapittel 5

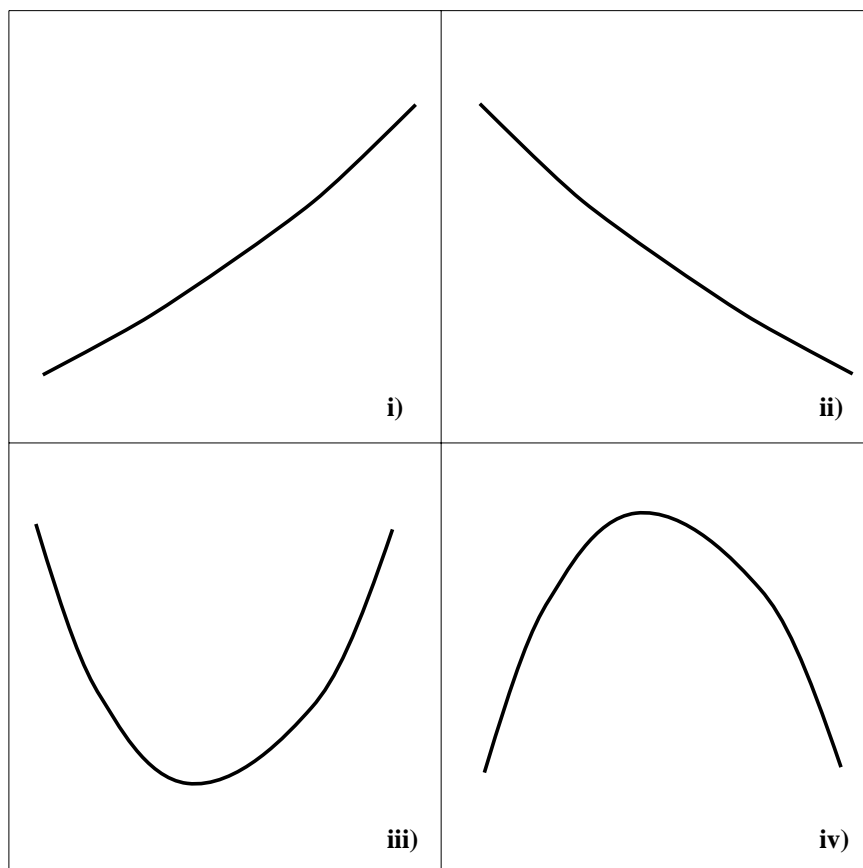
Implementering og eksperimenter

5.1 Implementering av metodene

Denne delen inneholder detaljer om implementeringen av de forskjellige metodene benyttet i denne oppgaven. Programkoden til metodene finnes i vedlegg C.

5.1.1 Implementering av skanning av $\mathcal{P}(\theta)$ -funksjoner.

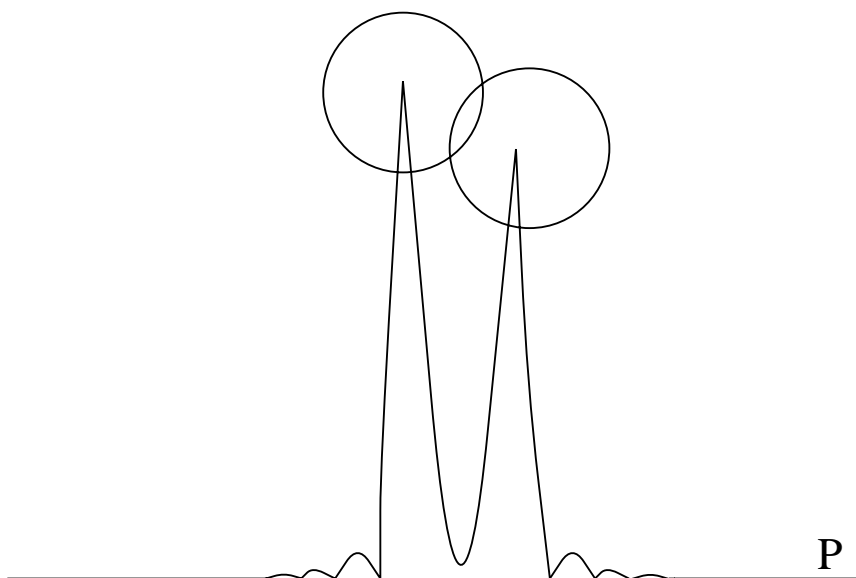
Ved de implementeringene som er benyttet i denne oppgaven er det et par forhold om oppløsningen som må bemerkes. Når en i metodene som konstruerer en $\mathcal{P}(\theta)$ -funksjon foretar et søk over parameterrommet for å finne toppene til $\mathcal{P}(\theta)$, vil dette i denne implementasjonen si å søke over vinklene fra -90° til $+90^\circ$, siden parameterrommet her er endimensjonalt. Her ble det valgt en oppløsning på 501 punkter. Avstanden mellom punktene ble da $180^\circ/5000 = 0.36^\circ$. Dette gir en relativt dårlig oppløsning. Det er mulig å få oppløsningen bedre ved flere løsninger. Den mest trivielle metoden er simpelthen å skanne over hele frekvensspekteret med et større antall ekvidistante sampler. Ulempen med denne metoden er at den er veldig ressurskrevende; for å få dobbelt så bra oppløsning er det nødvendig å doble antall sampler. Dette vil føre til at algoritmen etterhvert blir veldig sen. En kan oppnå bedre oppløsning uten at algoritmen blir mye mer ressurskrevende ved å gjøre følgende antagelse: En antar at $\mathcal{P}(\theta)$ kun inneholder detaljer av størrelsesorden større enn 0.36° . Denne betingelsen gjør det mulig å finne toppunktene med større nøyaktighet og mer effektivt fordi $\mathcal{P}(\theta)$ nå har noen enkle egenskaper i områder på utstrekning i størrelsesorden 0.36° . I et slikt intervall er $\mathcal{P}(\theta)$ enten stigende, synkende, først synkende og deretter stigende eller først stigende og deretter synkende. Se figur 5.1 for prinsippskisser av de fire mulige tilfellene. Dette fører videre til at om en har et sample som har større amplitude enn sine to naboer (som for enkelhets skyld kan kalles ett toppsample), kan en nå slutte at den kontinuerlige kurven $\mathcal{P}(\theta)$ i intervallet som begynner i den θ -verdien som er samlet til venstre for toppsamplet og slutter i den θ -verdien som er samlet til høyre for toppsamplet har formen stigende og deretter synkende (som eksempel **iv**) i figur 5.1).



Figur 5.1: Prinsippskisse av de fire mulige strukturer $P(\theta)$ kan ha i ett intervall på størrelsesorden 0.36° , gitt at detaljene på $P(\theta)$ er på en større størrelsesorden.

Denne antagelsen om detaljstørrelsen vil altså kunne gjøre algoritmen mer effektiv, men er antagelsen oppfylt? Størrelsen på detaljene i frekvensdomenet på $P(\theta)$ er på samme måte som i tilfellet ved konvensjonelle metoder (jf. delkapittel 3.1) avhengig av arrayets aperture. Ved bruk av 32 sensorer og en avstand på en halv bølgelengde mellom sensorene, som er tilfellet ved mange av eksemplene og simuleringsseriene i denne oppgaven, er arrayets aperture lik 16 bølgelengder. I tilfellet med de konvensjonelle metodene fant en at avstandene mellom detaljer i spekteret ville være tilnærmet 2.2° . Estimater viser seg å gi et grovt estimat av oppløsningen til de høyoppløselige metodene også. Det brukes dermed her for å gi en pekepinn om ved hvilke array implementeringene kan benyttes både for de konvensjonelle og de adaptive metodene.

Minste avstand mellom toppunkt og bunnpunkt vil synke omvendt proporsjonalt med at aperturen øker. Ved å bruke approksimeringen fra de konvensjonelle metodene (3.7), kommer en frem til at aperturen må være over 90 bølgelengder før den minste frekvensavstand vil bli mindre enn 0.36° . Dette vil med avstander mellom sensorene på en halv bølgelengde bety at en kan anvende denne metoden på array med godt over 150 sensorer uten at kravet om minste detaljstørrelse blir brutt. Dermed er betingelsen mer enn oppfylt i de tilfellene algoritmene i



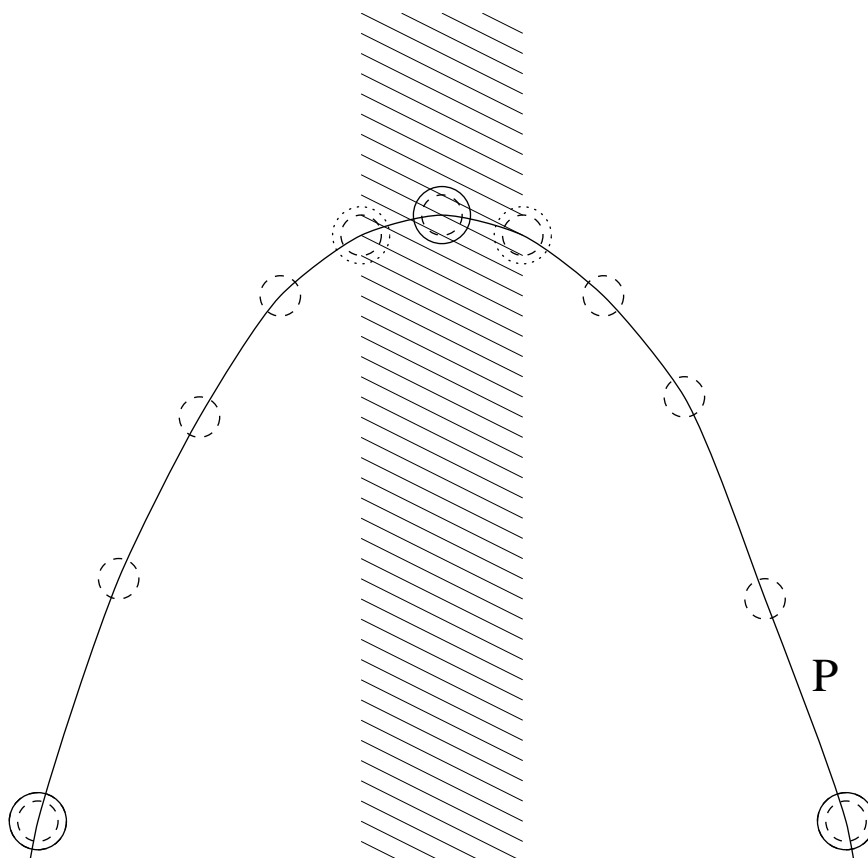
Figur 5.2: Prinsippskisse for finskanningen. Områdene omkring toppene på spekteret blir skannet ved en iterativ algoritme som finner toppunktene med langt større nøyaktighet enn skanningen over alle vinkler.

denne oppgaven skal brukes på. Likevel er dette en grunnleggende svakhet ved implementasjonene av algoritmene i denne oppgaven, som gjør at de ikke kan brukes i ethvert tilfelle uten at en tar hensyn til aperturstørrelsen til arrayet. En mindre modifikasjon vil gjøre implementeringene anvendelige for større arrayer.

For å finne toppene mest mulig nøyaktig blir området omkring hver av toppunktene samlet på følgende måte: En definerer et nytt søkeområde som begrenset av det siste samplet før, og det første samplet etter ett toppunkt. Lengden på dette stykket blir da $2 \times 0.36^\circ = 0.72$. Dette ble så skannet med 11 nye observasjonspunkter. I dette området er det da en avstand mellom punktene på $(0.72/10 = 0.072)$. På dette intervallet vil det nå være nøyaktig ett toppsample. En plukker så ut et nytt intervall fra dette på samme måte, det vil si at det er avgrenset av det siste samplet før, og det første samplet etter toppsamplet. Dette intervallet vil ha lengden $0.072 \times 2 = 0.14$. Denne teknikken har altså resultert i en femdobling av nøyaktigheten i estimeringen av toppunktet på $P(\theta)$. Slik gjentas algoritmen, med en femdobling av nøyaktigheten for hver iterering, til en har oppnådd en definert tilstrekkelig liten avstand mellom samplene.

5.2 Spesifisering av eksperimenter

En kan finne forskjeller mellom egenskapene til de forskjellige metodene under forskjellige betingelser ved å estimere de statistiske egenskapene til resultatene fra metodene ([Roy 89]). For å kunne estimere de statistiske egenskapene må en kjøre et tilstrekkelig stort antall simuleringer for hver av de aktuelle metodene i hvert av tilfellene. I de senere kapitler benyttes tallmateriale som er estimerte statistiske størrelser beregnet på slike simuleringsserier.



Figur 5.3: Skissen illustrerer hvordan algoritmen som gjør nøyaktigheten bedre i samlingen av $P(\theta)$ ved toppunktene, arbeider. De heltrukne sirklene omringer sampler i forrige iterering, de stiplede sirklene de 11 samplene i denne itereringen, og de prikkede sirklene de samplene som definerer ytterpunktene i neste iterering. Det skraverte området dekker dermed intervallet som vil bli skannet med 11 nye sampler under neste iterasjon.

Den typiske simuleringen brukt i denne oppgaven har som input to signaler med hver sin amplitude i forhold til en hvit støy. Disse to signalenes kilder befinner seg i fjernfeltet i forhold til arrayet de propagerer over, slik at det er planbølger som propagerer over arrayet. Vanskeligheten av å estimere innfallsvinkelen til de to signalene bestemmes av hvilke to innfallsvinkler signalene har, differansen mellom de to innfallsvinklene, og signalstøyforholdet til signalene.

Arrayene er lineære i alle simuleringene. Alle sensorene er valgt omnidireksjonale med $a(\theta) = 1$ for vilkårlig θ . For alle simuleringene blir 100 observasjoner til hver av sensorene i arrayet benyttet. Datamengden består da av observasjonene ved 100 forskjellige tidspunkter, og data matrisen \mathbf{X} blir en $(m \times 100)$ -matrise. Avstanden mellom sensorene er for alle simuleringene i oppgaven lik en halv bølgelengde, slik at kravet for romlig borderline sampling er oppfylt. For alle simuleringsseriene ble det kjørt 250 simuleringer. Videre spesifikasjoner som an-

tall sensorer, sensorenes posisjoner og så videre, er gjort rede for i teksten for hver simuleringsserie.

Simuleringsseriene ble kjørt med den konvensjonelle metoden, minimum varians metoden, MUSIC og ESPRIT. Dermed oppnås en sammenligning mellom en ikke-adaptiv metode, en tidlig adaptiv metode, og to senere adaptive metoder.

Den konvensjonelle metoden med datavindu ble ikke benyttet blant de presenterte resultatene. Dette fordi den forventes å ha dårligere egenskaper til denne type estimering enn den konvensjonelle metoden uten vektning. Grunnen til at denne metoden her har dårligere egenskaper, er at oppløsningen til metodene er svært vesentlig ved den aktuelle problemstillingen. Oppløsningen til de konvensjonelle metodene er bedre jo smalere hovedlobebredden til aperture glattingsfunksjonen for metoden er. Hovedlobebredden til strålingsdiagrammet ved den konvensjonelle metoden med datavindu, vil alltid være bredere enn hovedloben til den konvensjonelle metoden uten vektning. En kan si at den konvensjonelle metoden med datavindu tillater bredere hovedlobe for å oppnå et lavere sidelobenivå. Grunnen til at den konvensjonelle metoden med datavindu er presentert i denne oppgaven når den ikke er velegnet for problemet som studeres, er at den er en naturlig forbindelseslinje mellom den konvensjonelle metoden og minimum varians metoden. Simuleringsserier kjørt med datavindumetoden bekreftet at denne metoden var svakere på denne type estimering enn den konvensjonelle.

5.2.1 Notasjon for simuleringresultater

Alle de fire metodene som blir benyttet i simuleringer i oppgaven kan mislykkes fundamentalt i sin estimering av parametrene. Estimaten som algoritmene produserer når de svikter på denne måten, skiller seg da skarpt ut fra de øvrige, i denne sammenheng vellykkede, estimaten. Det som ofte skjer når en av metodene som produserer et spekter mislykkes, er at de to toppene i $P(\theta)$ -plottet som hver skal indikere et signal, har smeltet sammen til en topp. Det største maksimalpunktet for $P(\theta)$ blir dermed toppen på den brede loben som er skapt av to signaler som metoden ikke klarte å skille fra hverandre. Den nest største maksimalpunktet blir toppen på en lobe som typisk korresponderer til en av de store sidelobene på aperture glattingsfunksjonen til arrayet. Det vil virke mot sin hensikt å benytte disse to estimaten i statistikken. Andre ganger kan de deterministiske signalene drukne fullstendig i støyen, slik at $P(\theta)$ ikke inneholder en sammensmeltet topp som beskrevet ovenfor. I stedet blir plottet mer eller mindre totalt tilfeldig, helt avhengig av støyen ved de observasjonene som ligger til grunn for estimeringen. I slike tilfeller vil ikke det korrekte antall topper skille seg markert ut. I stedet vil det være topper med amplituder i samme størrelsesorden spredt over hele spekteret.

Siden metodene kan svikte på denne måten og det er enkelt å plukke de tilfellene der de gjør det, er det valgt å definere den prosentvise andelen ganger en algoritme mislykkes i å frembringe estimater av parametrene som **Feil**. Estimaten som algoritmene produserer i disse tilfellene blir forkastet, og benyttes dermed ikke i utregningen av de statistiske størrelsene i fortsettelsen.

Standardavviket til en metodes estimater av den laveste innfallsvinkelen estimeres. Dette estimatet defineres som **Std1**. Det tilsvarende estimatet for signalet med høyest innfallsvinkel defineres som **Std2**. Det teoretiske standardavviket, σ ,

er definert som kvadratrotten av variansen. Den teoretiske variansen er definert som forventningen til kvadratet av differansen mellom den stokastiske variabelen og forventningen til den stokastiske variabelen. Når standardavviket estimeres empirisk i denne oppgaven brukes denne estimatoren:

$$\mathbf{Std} \triangleq \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{l=1}^m (\hat{\theta}_m - \bar{\theta})^2} \quad (5.1)$$

Her er m antall simuleringer i denne serien. $\hat{\theta}_l$ er en av de m estimerte innfallsvinklene og $\bar{\theta}$ er middelet av de m estimatene. Middelet $\bar{\theta}$ er gitt ved denne relasjonen:

$$\bar{\theta} \triangleq \frac{1}{m-1} \sum_{l=1}^m \hat{\theta}_m$$

Denne estimatoren av standardavviket er vanlig å benytte i empiriske tilfeller, da den er forventningsrett. Den er kvadratrotten av en estimator av variansen som kalles sampelvariansen (jf. [Larsen 86]).

I de tilfeller der amplitudene til de to innfallende signalene er identiske, er det meningsfylt å definere en midling av disse to standardavvikene, \mathbf{Std} . Denne størrelsen er definert ved $\mathbf{Std} \triangleq \sqrt{\frac{\mathbf{Std1}^2 + \mathbf{Std2}^2}{2}}$. Grunnen til at det kan gi mening å samle de to standardavvikene i en størrelse, er at de antatte, underliggende stokastiske variablene som de empiriske standardavvikene estimerer, kan antas å være like store. Dette fordi signalene er identiske bortsett fra forskjellen i innfallsvinkel. Dermed estimerer begge de empiriske estimatene den samme størrelsen. En vil da få et bedre estimat av denne underliggende størrelsen ved å midle de to empiriske estimatene. Egentlig vil det være galt å anta at de to standardavvikene er identiske, de er begge avhengige av størrelsen på den effektive aperturen, og denne størrelsen er noe forskjellig siden innfallsvinkelen nødvendigvis er forskjellig for de to signalene. Det vil i mange tilfeller være kun en liten feil som innføres ved å anta de to størrelsene som identiske.

Den statistiske bias er differansen mellom forventningsverdien til en estimator og den sanne verdien til en deterministisk størrelse. Om en gir bias betegnelsen B har en denne definisjonen: $B \triangleq \theta - \mathbf{E}\{\hat{\theta}\}$. I denne oppgaven benyttes et empirisk estimat av størrelsen på B . Dette estimatet er definert som den absolutte differansen mellom et estimat og den størrelsen som estimeres. Dette gir:

$$\mathbf{Bias} \triangleq |\theta - \bar{\theta}| \quad (5.2)$$

Denne definisjonen gir strengt tatt kun størrelsen av estimatenes bias, siden absoluttverdien av differansen inngår i uttrykket. Definisjonen er valgt slik fordi det kun er størrelsen av det empiriske biaset som her anses som interessant i studeringen av resultatene. Empirisk bias for de to estimatene defineres som $\mathbf{Bias1}$, $\mathbf{Bias2}$. Et middel, \mathbf{Bias} , beregnes i de tilfeller hvor amplituden er identisk for de to signalene. Det gir mening å konstruere et slikt middel for bias av samme grunner som for standardavvik.

Ett statistisk redskap som tar hensyn til både bias og varians er midlere kvadratfeil [Mendel 87]. Denne er definert ved:

$$\mathbf{MSE} \triangleq \mathbf{E} \left[(\theta - \hat{\theta})' (\theta - \hat{\theta}) \right]$$

Denne størrelsen estimeres empirisk i denne oppgaven ved denne estimator-en:

$$\mathbf{MSE} \triangleq \mathbf{Bias}^2 + \mathbf{Std}^2$$

For at de forskjellige størrelsene skal ha samme benevning oppføres roten av den estimerte midlere kvadratfeilen i presentasjonene av simuleringsresultatene. Denne defineres som **RMSE**, som er en vanlig betegnelse på denne størrelsen og er en forkortelse for Root Mean Square Error. Det defineres etter mønster fra de to andre statistiske størrelsene **RMSE1** og **RMSE2**. **RMSE1** er rot av estimert midlere kvadratfeil for det første signalet og **RMSE2** er tilsvarende for det andre signalet. Midlingen av de to størrelsene benyttes i tilfellene med identisk amplitude på signalene og denne defineres **RMSE**.

Disse estimatene er presentert i tabeller senere i oppgaven. I de tilfeller hvor flere metoder kunne sammenlignes direkte er resultatene for også plottet i tredimensjonale histogram.

Kapittel 6

Metodenes egenskaper

6.1 Sammenligninger av tidsbruk.

Et aspekt ved metodene er hvor lang tid det fysisk tar å gjennomføre en estimering med metoden på en datamaskin. Det er individuelt hvor mange regneoperasjoner, og dermed hvor mye datakraft per estimering, de forskjellige metodene krever. Her er det oppsummert hvilke utslag dette har for implementeringene som benyttes i denne oppgaven.

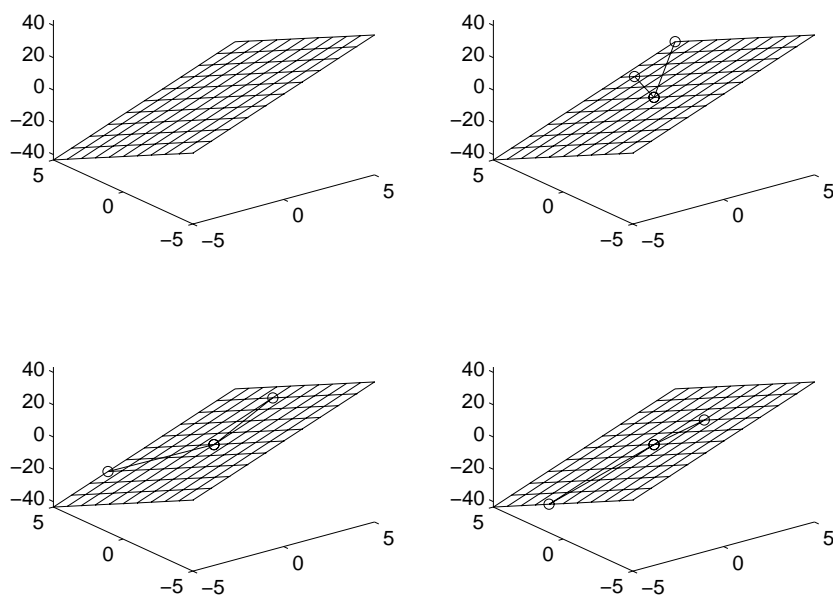
Den i utgangspunktet mest naturlige måten å sammenligne hvor mye datakraft de forskjellige rutinene bruker, ville være å telle antall regneoperasjoner hver metode krever. Dette er ikke mulig å gjøre med særlig nøyaktighet, da den generelle egendekomposisjonen, totale minste kvadraters metoden og rutinene for finskanning alle, gir forskjellige antall operasjoner for hver estimering avhengig av observasjonene. Dermed kan en få like bra resultater ved å studere hvor mye CPU-tid de forskjellige implementeringene bruker.

For å kunne sammenligne tidene de forskjellige implementasjonene bruker, ble CPU-tiden det tok samme maskin å kjøre de forskjellige metodene som de her er implementert registrert for 250 gjennomganger av hver metode. Tiden ble tatt for kun selve utføringen av algoritmene som gitt i presentasjonen av hver av metodene. Resultatene er gitt i tabell 6.1.

	KONV	MINVAR	MUSIC	ESPRIT
Sekunder	1.10 sek	1.11 sek	1.35 sek	0.91 sek
Prosent	121%	122%	148%	100%

Tabell 6.1: Gjennomsnittlig kjøringstid for algoritmene ved 32-elementers array. Først oppgitt i sekunder og deretter i prosent av gjennomsnittlig kjøringstid for ESPRIT.

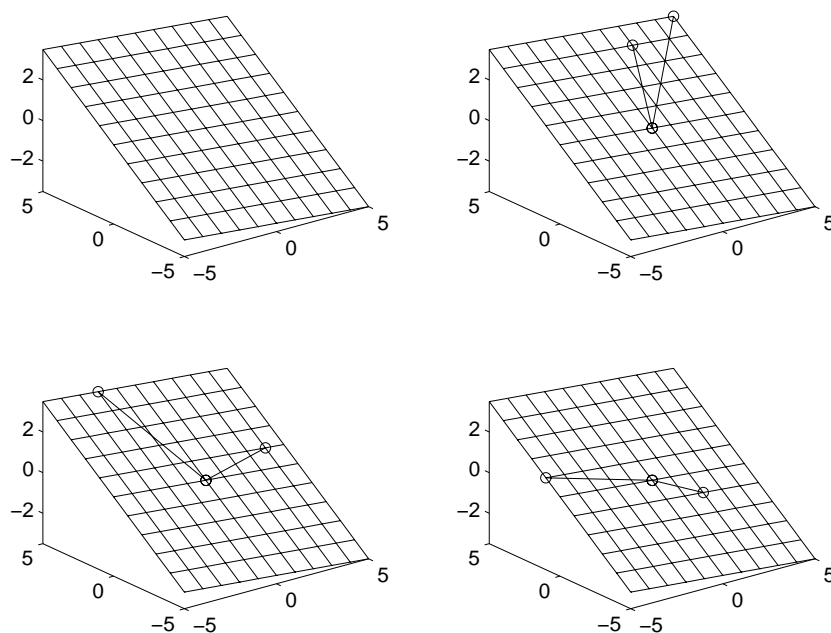
Disse tidene kan selvfølgelig bare si noe om hvor arbeidskrevende en metode er i forhold til de andre metodene, siden de målte tidene ville kunne blitt helt annerledes på en annen maskin. Siden kun innbyrdes forhold er interessante her, sees det kun på det prosentvise forhold mellom størrelsene. Videre sier disse tidene bare hvor lang tid metodene bruker ved denne implementeringen. For eksempel er det for alle metodene som produserer et spekter valgt hvor mange



Figur 6.1: Visualisering av realdelen av støyrommet. Støyrommets realdel er det skisserte planet i hver av plottene. Signal/støyrommets realdel er utspent av normalvektoren til dette planet. Figuren øverst til venstre plottet kun selve støyplanet. De tre andre figurene plottet det samme planet og forskjellige eksempler på to støyvektorer som sammen utspenner dette planet.

sampler en skal skanne over både for skanning over hele frekvensspekteret og for finskanning. Det er i implementeringene benyttet i denne oppgaven valgt å skanne over 500 sampler i frekvensspekteret. Konstantene en velger for disse skanneprosedyrene er utslagsgivende for tiden disse algoritmene krever for en estimering. Et valg av lavere antall sampler ville gjort at metodene som produserer et spekter ville kjørt noe fortere, men de ville også fått dårligere evne til å registrere små detaljer i spekterene som produseres.

Resultatene viser at tidene de forskjellige metodene her bruker på en estimering ikke er vesensforskjellig. Estimeringene med ESPRIT tar klart minst tid. Den konvensjonelle metoden krever litt mer CPU-tid, med en gjennomsnittlig kjøringstid 21% større enn tiden funnet for ESPRIT. Minimum varians metoden bruker nesten samme tid som den konvensjonelle metoden. Den gjennomsnittlige kjøringstiden er her 22% større enn for ESPRIT. MUSIC har klart størst gjennomsnittlig kjøringstid, 48% større enn tiden til ESPRIT. Selv om det er mulig å se forskjeller i CPU-tiden metodene bruker, er ikke disse forskjellene vesentlige. For de applikasjonene som studeres i denne oppgaven vil det dermed normalt være uaktuelt å måtte velge en metode fremfor en annen på grunn slike forskjeller i kjøringstiden for estimeringene. Ved andre applikasjoner kan situasjonen være en helt annen.



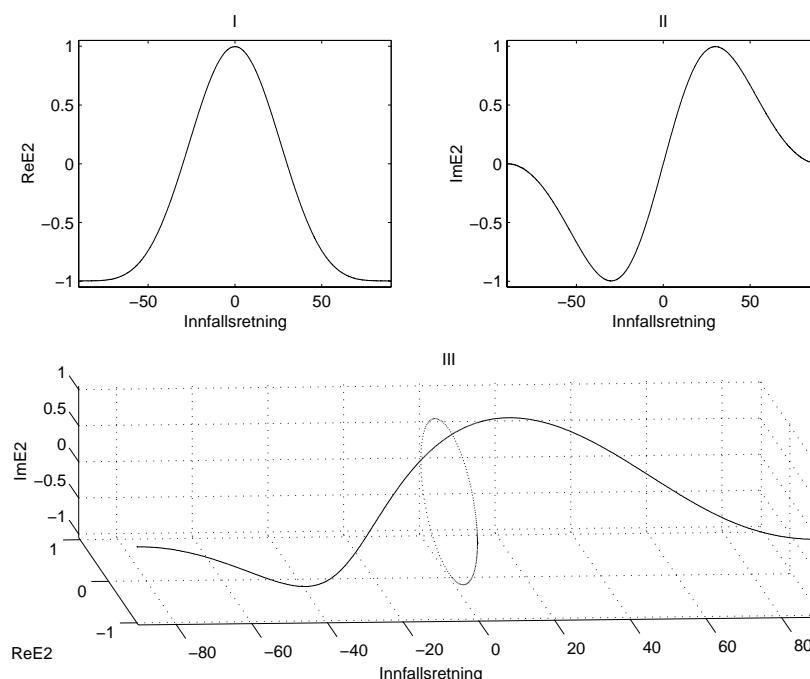
Figur 6.2: Visualisering av imaginærdelen av støyrommet. Støyrommets imaginærdel er det skisserte planet i hver av underplottene. Signal/støyrommets imaginærdel er utspent av normalvektoren til dette planet. Se også kommentarer til figur 6.1.

6.2 Visualiseringer av underrom

6.2.1 Visualisering av støyrommet

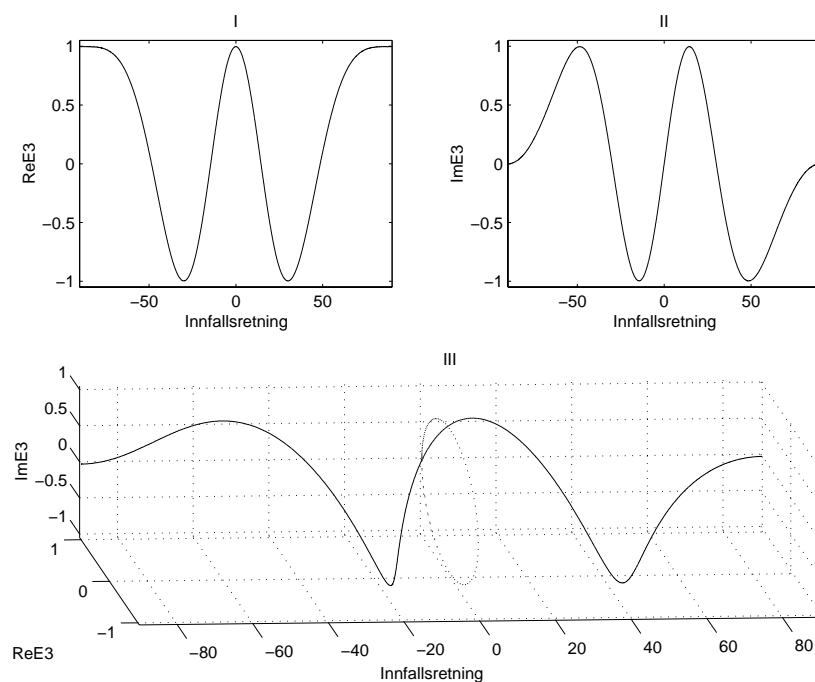
Det kan være ønskelig å visualisere de to forskjellige underrommene som rommet utspent av observasjonene fordeles i. Signal/støyrommet utspennes av de deterministiske signalene og har samme antall dimensjoner som antall signaler. Støyrommet har dimensjon lik rommet utspent av observasjonene minus dimensjonen til signal/støyrommet. Signal/støyrommet og støyrommet er ortogonale i forhold til hverandre og de utspenner tilsammen samme rom som observasjonene.

I et tilfelle med kun tre sensorer vil det være mulig å visualisere disse rommene siden rommet utspent av observasjonene da har dimensjon tre. Med ett signal vil signal/støyrommet bestå av én dimensjon og støyrommet av to dimensjoner. En simulering ble kjørt med disse spesifikasjonene: Signalstøyforholdet var 20 dB og innfallsvinkel 15° , valgt fordi dette gav relativt oversiktlige figurer. Arrayet besto av tre omnidireksjonale, uniformt atskilte elementer, med innbyrdes avstand lik halvparten av bølgelengden til det propagerende signalet. Matrisen \mathbf{E}_N , som utregnes som ett ledd av algoritmen til MUSIC (jf. 3.19), vil da ha vektorene som utspenner støyrommet som sine to kolonner. Disse vektorene vil ha antall komponenter lik antall sensorer, som er tre. Sammen utspenner disse to vektorene ett plan i det tredimensjonale komplekse rom.. Generelt vil de to støyvektorene være vesensforskjellige for hver ny realisering av en estimer-



Figur 6.3: Visualisering av 2. komponenten av \mathbf{E}_S , som funksjon av innfallsvinkelen i intervallet $\langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$. Plott I plottet realdelen til 2. komponenten som en funksjon av θ . Plott II plottet imaginærdelen til 2. komponenten som en funksjon av θ . Plott III plottet hvordan vektoren som 2. komponenten danner i det komplekse plan endrer seg som funksjon av θ . Endepunktet på denne vektoren, når vektoren begynner i origo i det komplekse planet, danner den plottede kurven. En projeksjon av denne kurven ned på det komplekse planet ved $\theta = 0^\circ$ er plottet med prikket kurve. Denne projeksjonen approksimerer en sirkel.

ing. Planet de to vektorene utspenner vil derimot ved en vellykket estimering kun avvike i mindre grad fra det planet en får ved null støy. Figurene 6.1 og 6.2 visualiserer henholdsvis den reelle og den imaginære delen av støyrommet for eksemplet, det er dessverre nødvendig med to figurer for visualisering siden rommet er komplekst. Generelt illustrerer dette at invariansen fra en vellykket realisering til en annen ligger i det totale rommet de $m - d$ støyegenvektorene utspenner. Hver enkelt støyegenvektor kan endre seg vesentlig mens rommet de tilsammen utspenner forblir tilnærmet det samme for hver estimering. Signal/støyrommet er i dette tilfellet endimensjonalt, og er rommet utspent av en vektor ortogonalt på planet tegnet på figurene. Siden dette er en kompleks vektor blir realdelen ortogonal på planet fra figur 6.1, og imaginærdelen ortogonal på planet fra figur 6.2. Dette rommet er her endimensjonalt, og dermed er vektoren som utspenner det ikke vesensforskjellig fra en estimering til en annen. I tilfeller der signal/støyrommet er utspent av flere vektorer vil hver av disse egenvektorene være vesensforskjellige for hver estimering, på samme måte som for støyrommet.



Figur 6.4: Visualisering av 3. komponenten av \mathbf{E}_S , som funksjon av innfallsvinkelen i intervallet $\langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$. Plott I viser realdelen til 3. komponenten som en funksjon av θ . Plott II viser imaginærdelen til 3. komponenten som en funksjon av θ . Plott III viser hvordan vektoren 3. komponenten danner i det komplekse plan endrer seg som funksjon av θ på samme måte som i figur 6.3. En projeksjon av kurven ned på det komplekse planet ved $\theta = 0^\circ$ er her også plottet med prikket kurve. Projeksjonen approksimerer igjen en sirkel.

6.2.2 Visualisering av signal/støyrommet

I denne delen presenteres en visualisering av hvordan E_S endrer seg når θ varieres gjennom hele spekteret fra -90° til 90° . Utgangspunktet er samme system som i del 6.2.1. Et deterministisk signal betyr at \mathbf{E}_S er en vektor. Denne har tre komponenter, siden observasjonene innhentes fra tre sensorer. MUSIC-estimeringen blir samlet med avstand 0.1° mellom samplene for innfallsvinkler i intervallet $[-90, 90]$. Kun minimal støy blir brukt, for å gi en så lite støypåvirket visualisering som mulig. For hver MUSIC-estimering blir så \mathbf{E}_S registrert. Dermed er det mulig å konstruere plott med \mathbf{E}_S som en funksjon av θ . For å kunne visualisere den komplekse \mathbf{E}_S må dette deles i to plott. Den 1. komponenten til \mathbf{E}_S viser seg å bli reell og konstant. Siden den er konstant er ikke noe plott konstruert av denne. Figur 6.3 viser visualiseringen av 2. komponenten til \mathbf{E}_S over tre plott. Figur 6.4 den samme visualiseringen av 3. komponenten til \mathbf{E}_S . Disse figurene kan gi et inntrykk av hvordan \mathbf{E}_S endrer seg periodisk som en funksjon av en θ -syklus.

	KONV	MINVAR	MUSIC	ESPRIT
Feil	0	0	0	0
Std1	3.5647e-02	4.3803e-02	3.9871e-02	1.1894e-01
Std2	3.7500e-02	4.7875e-02	4.8657e-02	1.1399e-01
Std	3.6585e-02	4.5884e-02	4.4481e-02	1.1649e-01
Bias1	4.7618e-02	2.2324e-03	1.3586e-03	6.8202e-03
Bias2	4.5943e-02	8.8227e-04	1.9622e-03	1.2867e-02
Bias	4.6781e-02	1.5574e-03	1.6604e-03	9.8436e-03
RMSE1	5.9483e-02	4.3860e-02	3.9894e-02	1.1913e-01
RMSE2	5.9304e-02	4.7883e-02	4.8696e-02	1.1471e-01
RMSE	5.9394e-02	4.5871e-02	4.4295e-02	1.1692e-01

Tabell 6.2: 32-elementers array ved relativt stor vinkeldifferanse (6°). Innfallsvinklene er 20° og 26° . Signalstøyforholdet er 0 dB for begge signalene.

6.3 Sammenligning mellom empiriske resultater.

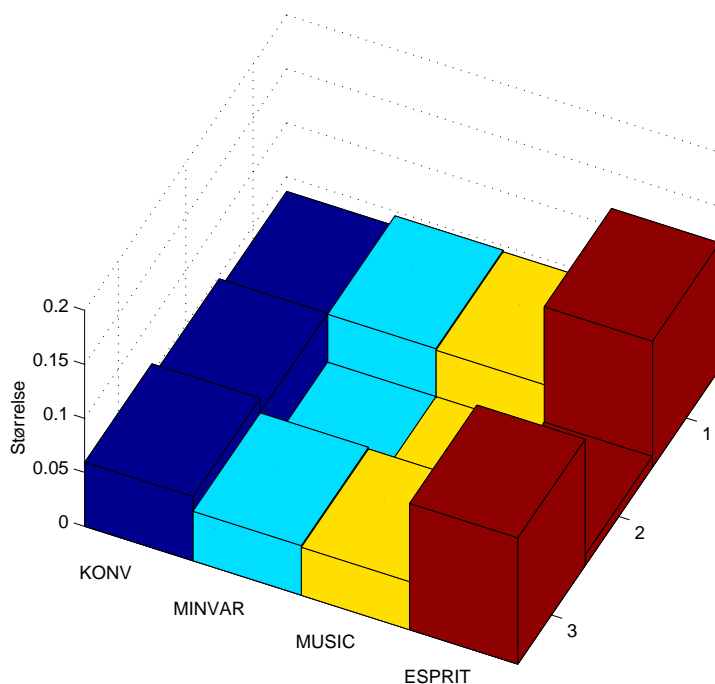
I denne delen presenteres resultater av simuleringsserier ved forskjellige oppsett. Empirisk beregnede statistiske mål blir deretter sammenlignet.

6.3.1 Egenskapene til metodene med stor differanse mellom signalenes vinkler

Som utgangspunkt er et 32-elementers lineært array med uniform elementavstand valgt. Som gjort rede for i delkapittel 5.2, er sensorene omnidireksjonelle og avstanden mellom dem er lik halvparten av bølgelengden til de propagerende signalene. Strålingsdiagrammet til dette arrayet er presentert i det øvre plottet i figur 3.1. Effektene til hver av signalene er identiske og lik effekten til den hvite støyen. Signalstøyforholdet er dermed 0 dB. For en første simuleringsserie er det naturlig å sammenligne metodene i en situasjon med relativt stor differanse mellom signalene. Denne differansen velges til å være 6° . Med denne differansen skulle alle metodene ha mer enn god nok oppløsning til å lykkes i estimeringene, gitt at den estimerte oppløsningen for den konvensjonelle metoden i dette tilfellet er 4.3° , (jf. 3.1.3). Innfallsvinkelene ble valgt til å være 20° og 26° . For hver av metodene ble det kjørt en serie på 250 simuleringer.

De empirisk estimerte statistiske størrelsene for konvensjonell metode, minimum varians metode, MUSIC og ESPRIT er oppført i tabell 6.2. Et histogram over resultatene finnes i figur 6.5.

En kan av disse simuleringene slutte at egenskapene til konvensjonell metode, minimum varians metode og MUSIC ikke er vesensforskjellige ved disse spesifikasjonene. Den konvensjonelle metoden har minst estimert standardavvik av alle metodene og minimum varians metoden har minst midlet bias av metodene. I begge disse tilfellene er forskjellen opp til de to andre metodenes estimerte størrelser minimal. MUSIC har lavest estimert midlet rot av den midlere kvadratfeil, og kan dermed sies å ha de beste egenskapene her. ESPRIT er på annen side svakest både av samtlige metoder både for estimert standardavvik og for bias. Dette resulterer i en estimert midlet rot av den midlere kvadratfeil som er i størrelsesorden 100% større enn den største blant de tre øvrige metodene. Altså viser alle metodene gode egenskaper i dette tilfellet, men ESPRIT har



Figur 6.5: Histogram av resultatene fra tabell 6.2. Høydene på blokkene i de ensfargende kolonnene illustrerer egenskapene til metoden som er angitt under kolonnen. Raden merket 1 viser størrelsen på de midlede estimerte standardavvikene. Raden merket 2 viser størrelsen på den midlede estimerte biasen. Raden merket 3 viser størrelsen på den estimerte midlede rot av midlere kvadratfeil.

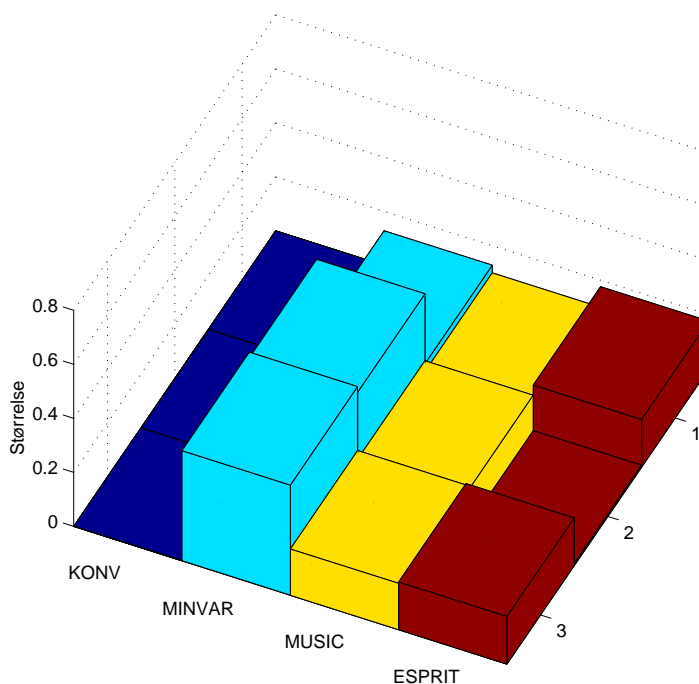
klart svakest egenskaper av de fire metodene.

6.3.2 Egenskapene til metodene med en mindre vinkeldifferanse

Det er mulig å se hvordan metodenes egenskaper endrer seg ved forandring av alle de forskjellige spesifikasjonene benyttet i forrige simuleringsserie. En nærliggende forandring er å gjøre differansen mellom innfallsvinkelen til de to signalene mindre. Dette vil generelt gjøre den praktiske estimeringen vanskeligere, og dette vil få konsekvenser for egenskapene til metodene. Differansen endres dermed til 2° , mens alle andre spesifikasjoner er uendret fra standardoppsettet. Resultatene er presentert i tabell 6.3 og visualisert i 6.6.

Et påfallende trekk ved disse resultatene er at ESPRIT her har mindre bias enn ved en vinkeldifferanse på 6° . Simuleringsserier foretatt med vinkeldifferanse 4° og 8° viser også mindre bias enn ved 6° . Det peker på en tendens til størrelsen på de statistiske egenskapene til ESPRIT her ikke er strengt synkende som funksjon av økende vinkeldifferanse.

De estimerte verdiene gir denne gang et noe annet bilde. Den konvensjonelle stråleformingsmetoden svikter i alle tilfellene. Dette er ikke uventet gitt at



Figur 6.6: Histogram av resultatene fra tabell 6.3. Histogrammet plotter resultatene på samme måte som beskrevet i figur 6.5.

	KONV	MINVAR	MUSIC	ESPRIT
Feil	100%(250)	90%(224)	11%(28)	0
Std1	—	1.2736e-01	9.4686e-02	1.7882e-01
Std2	—	1.2866e-01	1.0525e-01	1.7395e-01
Std	—	1.2801e-01	9.9966e-02	1.7639e-01
Bias1	—	3.7796e-01	1.3537e-01	1.2567e-02
Bias2	—	3.9660e-01	1.4283e-01	3.2609e-03
Bias	—	3.8728e-01	1.3910e-01	7.9140e-03
RMSE1	—	3.9884e-01	1.6520e-01	1.7926e-01
RMSE2	—	4.1694e-01	1.7742e-01	1.7399e-01
RMSE	—	4.0789e-01	1.7131e-01	1.7662e-01

Tabell 6.3: 32-elementers array ved relativt liten vinkeldifferanse (2°). Innfallsvinklene er 20° og 22° . Signalstøyforholdet er 0 dB for begge signalene.

oppløsningen til den konvensjonelle metoden ved denne aperturen er estimert til 4.3° (jf. 3.1.3). Det er tydelig at denne situasjonen befinner seg helt i ytterkant for hva minimum varians metoden klarer å estimere, siden 90% av estimeringene denne gang feiler. Denne svikten av metoden vil også påvirke kvaliteten på de empiriske estimatene, siden de nå baserer seg på kun 26 simuleringer i minimum varians metodens tilfelle, i stedet for 250 som er tilfellet for de to andre metode-

ne. MUSIC feiler også en del ganger her, men til sammenligning bare for $XX\%$ av estimeringene.

Estimert standardavvik er klart størst for resultater fra minimum varians metoden og minst for resultater fra MUSIC. ESPRIT har nå langt lavere bias enn de to andre metodene. Roten av estimert midlere kvadratfeil er klart størst for minimum varians metoden, mens de moderne metodene er på samme størrelsesorden.

6.3.3 Egenskapene til metodene med liten vinkeldifferanse

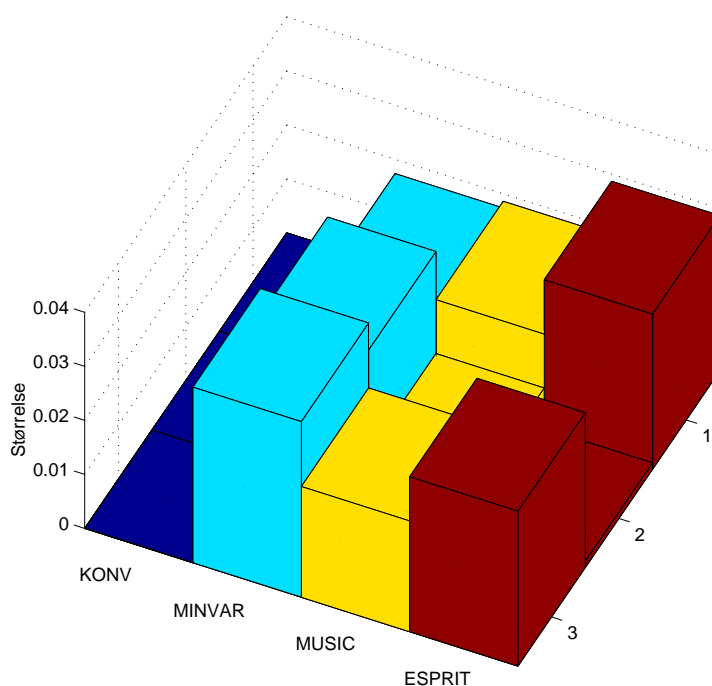
Det er nå interessant å studere metodenes egenskaper med differansen ytterligere redusert. For å kunne studere dette endres differansen til 1.25° , mens resten av spesifikasjonene beholdes uendret fra forrige del. Resultatene av simuleringsseriene viste at den konvensjonelle metode, minimum varians metode og MUSIC er sjanseløse ved disse spesifikasjonene. Alle metodene mislykkes i samtlige 250 estimeringer. Alle estimeringene med disse metodene mislykkes her i å spalte de to toppene som skal til for at metodene klarer å estimere de to parameterne. ESPRIT på sin side lykkes i alle sine estimeringer, og viser dermed svært overbevisende egenskaper i tilfeller med liten vinkeldifferanse.

En fremgangsmåte for å tvinge alle metodene til å produsere vellykkede estimater er å heve signalstøyforholdet. Simuleringer ble dermed gjort etter å ha hevet signalstøyforholdet fra 0 dB til 20 dB. Ved denne simuleringsserien lykkes alle metodene i alle estimeringene, bortsett fra den konvensjonelle metoden som mislykkes i alle estimater også ved dette forbedrede signalstøynivået. Resultatene ved signalstøyforhold 20 dB er presentert i tabell 6.4, sammen med resultatene for ESPRIT med signalstøyforhold på 0 dB, der de andre metodene svikter. Et histogram av resultatene ved 20 dB er plottet i figur 6.7.

	MINVAR	MUSIC	ESPRIT(1)	ESPRIT(2)
Feil	0	0	0	0
Std1	1.6089e-02	1.7388e-02	3.0282e-02	4.2953e-01
Std2	1.8554e-02	1.9781e-02	2.7046e-02	3.8443e-01
Std	1.7366e-02	1.8623e-02	2.8710e-02	4.0760e-01
Bias1	2.6438e-02	7.9936e-03	6.3031e-04	6.9675e-02
Bias2	2.8645e-02	9.3526e-03	1.7382e-03	4.1591e-02
Bias	2.7542e-02	8.6731e-03	1.1842e-03	5.5633e-02
RMSE1	3.0949e-02	1.9137e-02	3.0288e-02	4.3514e-01
RMSE2	3.4130e-02	2.1881e-02	2.7102e-02	3.8668e-01
RMSE	3.2539e-02	2.0509e-02	2.8695e-02	4.1091e-01

Tabell 6.4: 32-elementers array ved 1.25° vinkeldifferanse. For minimum varians metoden og MUSIC er alle simuleringene foretatt med signalstøyforhold lik 20. Kolonnen merket ESPRIT(1) inneholder estimerte størrelser for ESPRIT ved signalstøyforhold lik 20 dB, mens kolonnen merket ESPRIT(2) inneholder størrelser ved signalstøyforhold lik 0 dB.

Av resultatene med signalstøynivå på 20 dB viser minimum varians seg å ha lavest estimert standardavvik. ESPRIT har vesentlig lavere bias enn MUSIC, som igjen har markert lavere bias enn minimum varians metoden. ESPRIT har



Figur 6.7: Histogram av resultatene ved 20 fra tabell 6.4. Histogrammet plottes resultatene på samme måte som beskrevet i figur 6.5.

på den annen side høyest estimert standardavvik, slik at MUSIC har lavest estimert rot av midlere kvadratfeil. For den estimerte rot av midlere kvadratfeil ligger alle de tre metodene på samme størrelsesorden. ESPRIT må kunne anses som klart den beste metoden her, siden den lykkes i alle estimeringer ved det dårligste signalstøyforholdet, hvor alle de andre metodene mislykkes totalt.

Det ble så kjørt simuleringsserier for enda mindre vinkeldifferanser og signalstøyforhold på 0 dB for metodene. Mens det ved simuleringsserier med de tre andre metodene ikke ble observert en eneste vellykket estimering med vinkeldifferansen lik 1° eller mindre, viste ESPRIT seg å gi gode resultater også ved disse differansene. ESPRIT begynner her først å svikte ved differanser mindre enn 0.75° . Der er estimert standardavvik blitt på ca. 2° og bias er på ca. 1° , begge størrelser er vesentlig større enn tilsvarende estimeringen med ESPRIT ved en vinkeldifferanse på 1° . Dette er signaler på at vinkeldifferansen på 0.75° er nær det minimale for at metoden skal kunne fungere. Ved en differanse på 0.5° svikter også ESPRIT totalt. Disse dataene viser at ESPRIT her er den metoden med best oppløsning. Det er en signifikant forskjell på egenskapen til ESPRIT kontra de andre metodene her, siden ingen andre metoder klarte å estimere ved differanse 1.25° og signalstøyforhold på 0 dB. Minimum varians metoden og MUSIC har her oppløsning dårligere enn ESPRIT og bedre enn den konvensjonelle metoden.

	1° differanse	0.75° differanse
Feil	0	5%(13)
Std1	6.6977e-01	2.1018
Std2	6.1740e-01	1.9033
Std	6.4412e-01	2.0050
Bias1	2.0244e-01	1.0812
Bias2	1.8194e-01	9.5494e-01
Bias	1.9219e-01	1.0181
RMSE1	6.9969e-01	2.3636
RMSE2	6.4365e-01	2.1294
RMSE	6.7167e-01	2.2465

Tabell 6.5: ESPRIT estimater ved små vinkeldifferanser. Signalstøynivået er lik 0 dB for begge signalene.

6.3.4 Egenskapene til metodene ved få sensorer i forhold til signaler.

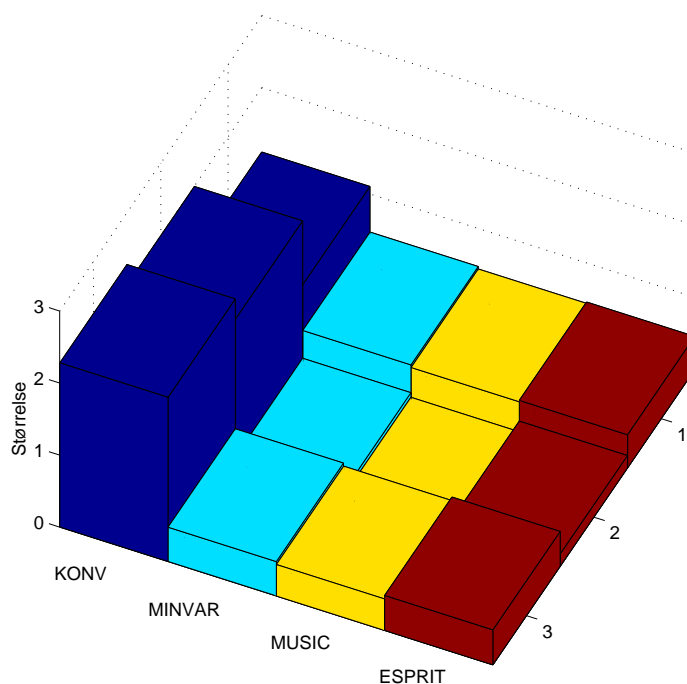
Det er interessant å se på hvordan metodenes egenskaper står i forhold til hverandre når antallet sensorer er lite i forhold til antall deterministiske signaler. For å studere dette er det valgt et tilfelle med to signaler og fire sensorer. Signalstøyforholdet er valgt som 10 dB for begge signalene. Differansene mellom innfallsvinklene ble valgt til å være 30°, 20°, 10° og 5°. Resultatene er presentert i henholdsvis tabell 6.6, 6.7, 6.8 og 6.9. Plott av korresponderende histogram finnes i figur 6.8, 6.9, 6.10 og 6.11

	KONV	MINVAR	MUSIC	ESPRIT
Feil	2%(5)	0%(1)	0	0%(1)
Std1	9.9064e-01	4.0804e-01	3.9376e-01	3.9408e-01
Std2	1.2111	5.2931e-01	4.7841e-01	5.1417e-01
Std	1.1064	4.7258e-01	4.3813e-01	4.5808e-01
Bias1	1.8166	9.8162e-02	1.2412e-02	1.2421e-01
Bias2	2.1750	7.6409e-02	3.6443e-02	2.1880e-01
Bias	1.9958	8.7286e-02	2.4428e-02	1.7151e-01
RMSE1	2.0692	4.1968e-01	3.9396e-01	4.1319e-01
RMSE2	2.4895	5.3480e-01	4.7980e-01	5.5879e-01
RMSE	2.2793	4.7724e-01	4.3688e-01	4.8599e-01

Tabell 6.6: 4-elementers array ved 30° vinkeldifferanse. Innfallsvinklene er 10° og 40°. Signalstøyforholdet er 10 dB for begge signalene.

Differanse 30°.

Resultatene fra tabell 6.6 viser at den konvensjonelle metoden igjen skiller seg ut. Den har her vesentlig svakere egenskaper enn de tre andre metodene for alle de presenterte størrelsene, og svikter også tre ganger. Den sees derfor bort fra i den videre vurdering av resultatene. Minimum varians metoden og MUSIC lykkes

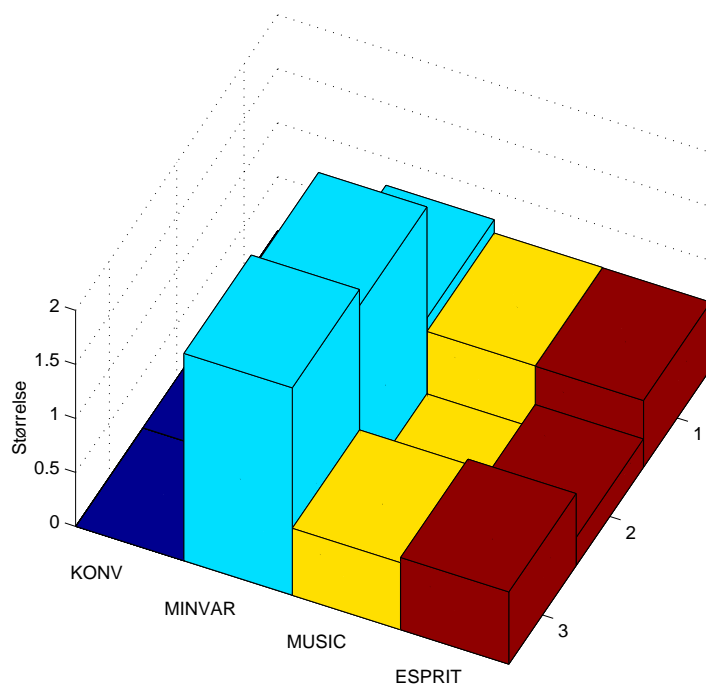


Figur 6.8: Histogram av resultatene fra tabell 6.6.

i alle estimeringer. ESPRIT mislykkes i ett av de 250 estimeringene. Minimum varians metoden, MUSIC og ESPRIT har relativt lik størrelse på estimerte standardavvik. MUSIC har minst, og minimum varians metoden størst estimert standardavvik. Når det gjelder bias har MUSIC helt klart minst, mens de to andre metodene er på omtrent samme nivå. Dette resulterer i at MUSIC har minst estimert rot av midlere kvadratfeil. ESPRIT har størst estimert rot av midlere kvadratfeil, ca. 10% større enn tilsvarende for MUSIC.

Differanse 20°.

Resultatene fra tabell 6.7 viser at den konvensjonelle metoden mislykkes i å estimere ved disse spesifikasjonene og 20° vinkeldifferanse. Alle de tre metodene klarer estimeringen, bortsett fra at ESPRIT igjen svikter i en av estimeringene. Minimum varians metoden viser nå klart dårligere egenskaper enn de to andre metodene. Estimert standardavvik for minimum varians er ca. 20% større enn for MUSIC og ESPRIT, som har omtrent samme størrelse her. MUSIC har vesentlig mindre bias enn ESPRIT som igjen har vesentlig lavere bias enn minimum varians metoden. Resultatet av disse forskjellene blir av minimum varians metoden har vesentlig større estimert rot av midlere kvadratfeil enn de to andre metodene. ESPRIT har nok en gang ca. 10% større estimert rot av midlere kvadratfeil enn MUSIC. MUSIC viser dermed best egenskaper i dette tilfellet også.



Figur 6.9: Histogram av resultatene fra tabell 6.7.

Differanse 10° .

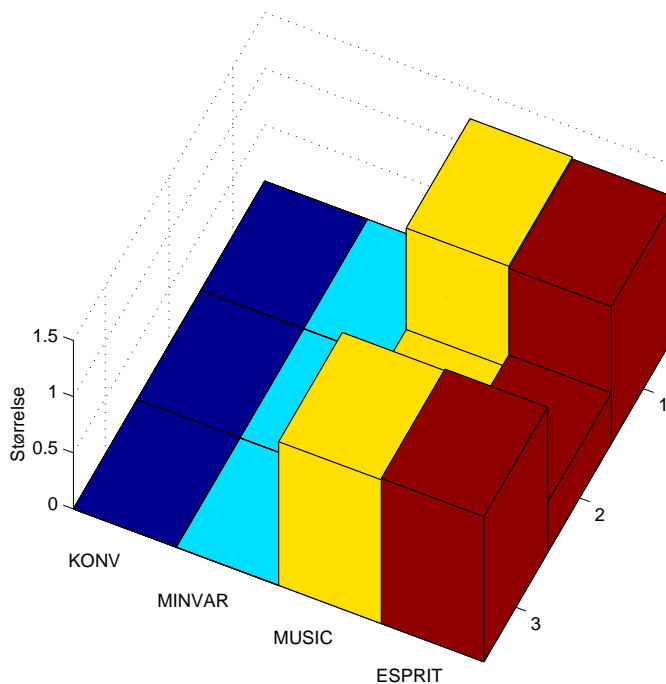
Fra tabell 6.8 kan en slutte at både den konvensjonelle og minimum varians metoden svikter for alle estimeringer ved denne vinkeldifferansen. ESPRIT svikter her for 3 estimeringer. MUSIC svikter for 30 estimeringer, som utgjør 12% av alle estimeringene. Egenskapene er nok en gang relativt like for MUSIC og ESPRIT. Estimatenes av standardavvikene ligger på nesten identisk nivå, men MUSIC har noe mindre bias enn ESPRIT. Resultatet blir en omtrent lik størrelse på estimert rot av midlere kvadratfeil for de to metodene.

Differanse 5° .

Her svikter naturlig nok både den konvensjonelle og minimum varians metode for alle estimeringer. Store problemer oppstår også ved estimering ved MUSIC. Bare 30 av de 250 estimeringene lykkes, hvilket gir en feilprosent på 88%. Dette gjør at estimatene blir mindre pålitelige i dette tilfellet, siden de er basert på svært få estimater. ESPRIT mislykkes i 3 av estimeringene. Studering av resultatene her fra de to første kolonnene i tabell 6.9 gir at begge metodene har langt svakere egenskaper her enn i tilfellene ved større vinkeldifferanse. MUSIC viser seg her å ha en terskel-effekt, og så lenge den i det hele tatt klarer å estimere parameterne vellykket holder standardavvik og bias seg relativt små. Lignende oppførsel ble registrert for minimum varians metoden i resultatene presentert i tabell 6.3, så denne egenskapen er ikke enestående for MUSIC. Denne terskeleffekten registrert hos MUSIC gjør at den i noen tilfeller kan produsere vekselvis

	KONV	MINVAR	MUSIC	ESPRIT
Feil	100%(250)	1%(3)	0	0%(1)
Std1	—	6.9513e-01	5.8965e-01	5.6668e-01
Std2	—	7.8615e-01	6.4529e-01	6.6188e-01
Std	—	7.4204e-01	6.1810e-01	6.1613e-01
Bias1	—	1.6986	3.0575e-02	2.0783e-01
Bias2	—	1.8431	5.3377e-02	3.1358e-01
Bias	—	1.7708	4.1976e-02	2.6071e-01
RMSE1	—	1.8353	5.9044e-01	6.0359e-01
RMSE2	—	2.0037	6.4750e-01	7.3241e-01
RMSE	—	1.9195	6.1897e-01	6.6800e-01

Tabell 6.7: 4-elementers array ved 20° vinkeldifferanse. Innfallsvinklene er 10° og 30°. Signalstøyforholdet er 10 dB for begge signalene.



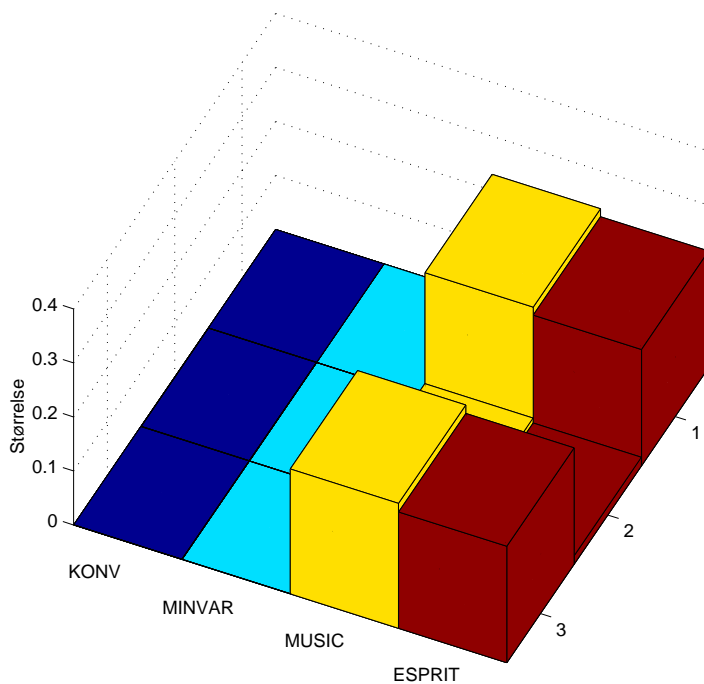
Figur 6.10: Histogram av resultatene fra tabell 6.8.

gode og helt mislykkede resultater. Dette innebærer at MUSIC må brukes med varsomhet i slike tilfeller.

Innbyrdes for de to metodene som lykkes har MUSIC noe høyere estimert standardavvik enn ESPRIT, men langt lavere bias. Dette resulterer med at MUSIC får ca. 10% lavere estimert rot av midlere kvadratfeil enn ESPRIT. ESPRIT vil måtte sies å ha de klart beste egenskapene ved dette tilfellet, all den tid den lykkes i 99% av tilfellene mens MUSIC kun lykkes i 12%.

	KONV	MINVAR	MUSIC	ESPRIT
Feil	100%(250)	100%(250)	12%(30)	1%(3)
Std1	—	—	1.2062	1.1279
Std2	—	—	1.2636	1.2986
Std	—	—	1.2353	1.2162
Bias1	—	—	3.0729e-01	3.7335e-01
Bias2	—	—	3.5647e-01	5.2035e-01
Bias	—	—	3.3188e-01	4.4685e-01
RMSE1	—	—	1.2447	1.1881
RMSE2	—	—	1.3130	1.3989
RMSE	—	—	1.2788	1.2935

Tabell 6.8: 4-elementers array ved 10° vinkeldifferanse. Innfallsvinklene er 10° og 20° . Signalstøyforholdet er 10 dB for begge signalene.



Figur 6.11: Histogram av resultatene ved signalstøyniva 30 dB fra tabell 6.9, som er kolonnene merket (2).

Siden MUSIC svikter for så mange estimeringer ved denne vinkel differansen er det naturlig å øke signalstøynivået og se på hvilke konsekvenser dette får for estimeringene. Nivået blir dermed øket til 30 dB. Den konvensjonelle og minimum varians metoden svikter i alle estimeringene her også. Resultatene for MUSIC og ESPRIT er presentert i kolonne tre og fire i tabell 6.9. Egenskapene er her på samme størrelsesorden for de to metodene. MUSIC har både størst

	MUSIC(1)	ESPRIT(1)	MUSIC(2)	ESPRIT(2)
Feil	88%(220)	1%(3)	0%(1)	0
Std1	3.6152	3.2459	2.3252e-01	2.0243e-01
Std2	3.9294	3.3673	2.2692e-01	2.2712e-01
Std	3.7756	3.3072	2.2974e-01	2.1513e-01
Bias1	4.4006e-01	1.1897	2.7005e-02	8.5799e-03
Bias2	8.5542e-01	1.3285	2.2224e-02	2.2737e-02
Bias	6.4774e-01	1.2591	2.4614e-02	1.5659e-02
RMSE1	3.6419	3.4570	2.3408e-01	2.0261e-01
RMSE2	4.0215	3.6199	2.2801e-01	2.2825e-01
RMSE	3.8317	3.5385	2.3105e-01	2.1543e-01

Tabell 6.9: 4-elementers array ved 5° vinkeldifferanse. Innfallsvinklene er 10° og 15° . Signalstøyforholdet er 10 dB for resultatene presentert i kolonnene merket (1). For kolonnene merket (2) er signalstøyforholdet 30 dB.

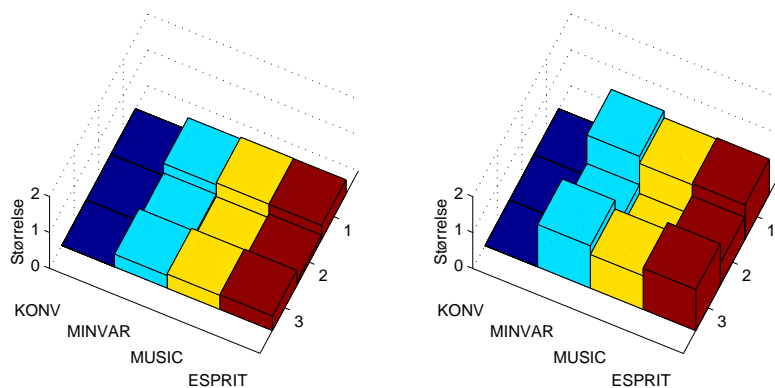
estimert standardavvik og bias og får dermed størst estimert rot av midlere kvadratfeil. ESPRIT har nærmere 10% mindre størrelse på den estimerte rot av midlere kvadratfeil.

Oppsummering av egenskaper ved få sensorer.

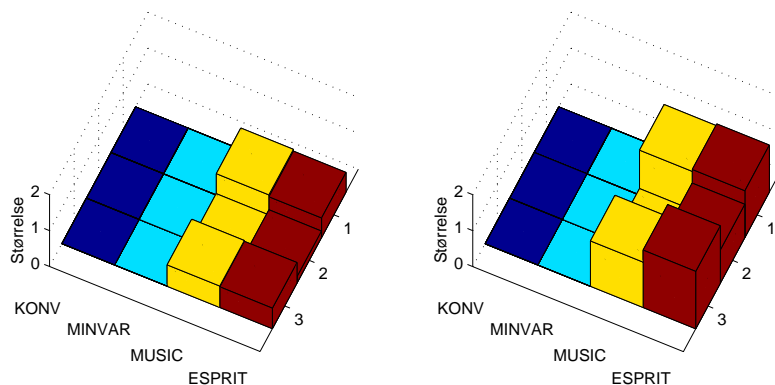
Av alle disse dataene kan det trekkes flere konklusjoner. MUSIC og ESPRIT har de beste egenskapene i denne type problemstillinger. Minimum varians metoden er klart svakere enn disse to metodene, men viser bedre egenskaper enn den konvensjonelle metoden, som svikter i alle simuleringene i alle serier, bortsett fra serien med differanse mellom innfallsvinklene på hele 30° . For seriene med differansene 30° , 20° og 10° viser MUSIC bedre egenskaper enn ESPRIT. Etterhvert som differansen mellom innfallsvinklene minsker, minsker den relative forskjellen mellom de to metodenes egenskaper i favør av ESPRIT. Ved 10° ser forskjellen mellom de to metodene ut til å være minimal utifra estimatene. I resultatene fra serien med minst differanse mellom innfallsvinklene, 5° , er det en tendens til at ESPRIT har bedre egenskaper enn MUSIC. Her har altså ESPRIT bedre egenskaper sammenlignet med MUSIC jo mindre vinkeldifferansen er.

6.3.5 Metodenes egenskaper ved forskjellig signalstyrke.

Det vil også være interessant å studere hvilke konsekvenser for estimeringsresultatene det vil ha å la amplitudene til de to deterministiske signalene være forskjellige. Dette er her gjort ved å benytte de samme spesifikasjonene som i forrige delkapittel, 6.3.4, bortsett fra at signalstøynivåene er endret. Her er signalstøynivået til signalet med lavest innfallsvinkel satt til 10 dB, mens signalstøynivået til signalet med høyest innfallsvinkel er satt til 5 dB. Resultatene fra simuleringsserier med vinkeldifferanse på 30° , 20° , 10° , 5° er presentert henholdsvis i tabell 6.10, 6.11, 6.12 og 6.13. Plott av korresponderende histogram finnes i figur 6.12, 6.13, 6.14 og 6.15. Argumentasjonen for at **Std**, **Bias** og **RMSE** er meningsfulle størrelser blir ugyldig når signalstyrken ikke lenger er uniform. Derfor har det ingen hensikt å benytte disse størrelsene her.



Figur 6.12: Histogram av resultatene fra tabell 6.10. Høyden på blokkene i kolonnene illustrerer egenskapene til metoden som er angitt under kolonnen, på samme måte som beskrevet i figur 6.5. Histogrammet til venstre er for resultatene ved det sterke signalet, og histogrammet til høyre for resultatene ved det svake signalet.



Figur 6.13: Histogram av resultatene fra tabell 6.11. Histogrammet plottes resultatene på samme måte som beskrevet i figur 6.12.

Oppsummering for egenskaper ved forskjellig signalstyrke.

Av resultatene fra tabell 6.10 til 6.13 kan det gjøres noen konklusjoner med hensyn til hvilken virkning det har på metodenes egenskaper at det ene signalets

	KONV	MINVAR	MUSIC	ESPRIT
Feil	100%(250)	0%(2)	0	0%(1)
Std1	—	3.4075e-01	3.9238e-01	3.8850e-01
Std2	—	1.1273	9.3106e-01	9.6439e-01
Bias1	—	7.1535e-02	8.5311e-03	1.1592e-01
Bias2	—	3.3622e-01	9.2069e-02	6.1748e-01
RMSE1	—	3.4818e-01	3.9247e-01	4.0542e-01
RMSE2	—	1.1763	9.3560e-01	1.1451

Tabell 6.10: 4-elementers array ved 30° vinkeldifferanse(30°) og forskjellige amplituder. Innfallsvinklene er 10° og 40° . Signalstøyforholdet er 10 dB for signal 1 og 5 dB for signal 2.

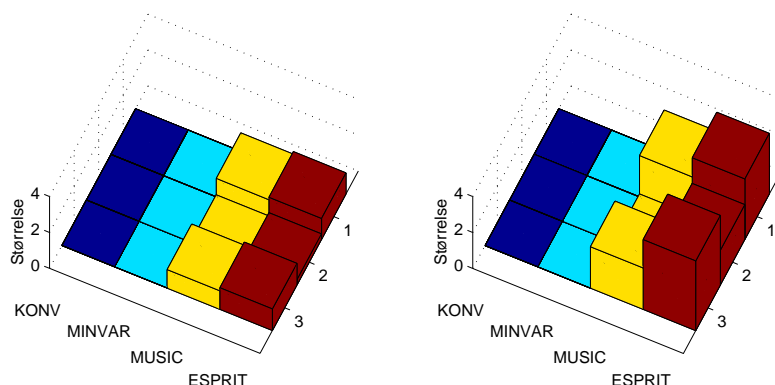
	KONV	MINVAR	MUSIC	ESPRIT
Feil	100%(250)	100%(250)	0	0%(1)
Std1	—	—	5.9588e-01	5.4510e-01
Std2	—	—	1.2512	1.3035
Bias1	—	—	3.9011e-02	1.8193e-01
Bias2	—	—	1.8026e-01	9.2726e-01
RMSE1	—	—	5.9716e-01	5.7466e-01
RMSE2	—	—	1.2641	1.5996

Tabell 6.11: 4-elementers array ved 20° vinkeldifferanse og forskjellige amplituder. Innfallsvinklene er 10° og 30° . Signalstøyforholdet er 10 dB for signal 1 og 5 dB for signal 2.

styrke blir svekket. En gjennomgående tendens for alle metodene er at estimert standardavvik og bias for signalet med størst amplitude nå er lavere enn de samme størrelsene var for estimeringene med uniform signalstyrke. Det finnes flere unntak fra denne tendensen blant resultatene, hvor egenskapene til estimatene for det sterkeste signalet er dårligere her. Estimert standardavvik og bias for signalet med minst amplitude er nå markert større enn de samme størrelsene estimert ved uniform signalstyrke. Denne tendensen har også ett unntak blant de presenterte resultatene.

Den konvensjonelle metoden svikter nå for alle estimeringene ved alle de fire vinkeldifferansene, mens den klarte estimeringene ved 30° vinkeldifferanse for uniform signalstyrke. Minimum varians metoden svikter totalt ved 20° vinkeldifferanse, mens den klarte denne differansen ved estimeringene for uniform signalstyrke. MUSIC og ESPRIT mislykkes i alle estimeringer med 5° vinkeldifferanse og 10 dB og 5 dB signalstyrke. Alle metodene mislykkes dermed ved en simuleringsserie mer for estimeringene ved forskjellig signalstyrke sammenlignet med estimeringene ved uniform signalstyrke.

Det er tydelig at MUSIC og ESPRIT igjen er de metodene med best egenskaper. De kan igjen estimere parameterne vellykket ved mindre vinkeldifferanse enn de andre metodene. Dermed er observasjonene om egenskapene metodene imellom som har vært gjort i dette kapitlet også gyldige for tilfeller uten uniform signalstyrke.



Figur 6.14: Histogram av resultatene fra tabell 6.12. Histogrammet plottes resultatene på samme måte som beskrevet i figur 6.12.

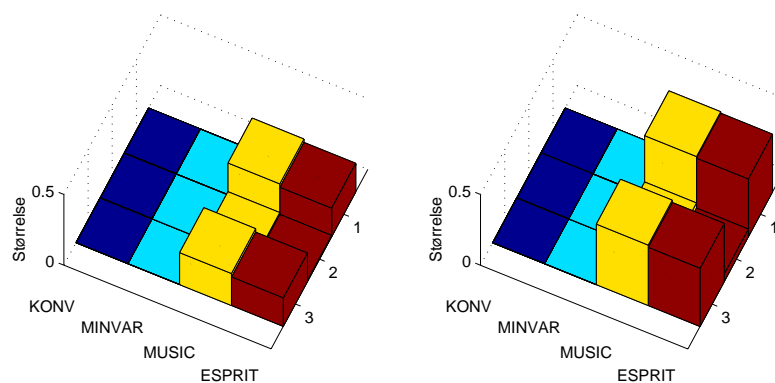
Visualisering av konsekvenser av forskjellig signalstyrke

Figurene 6.16 og 6.17 illustrerer hvordan de statistiske egenskapene til de to signalene endres fra simuleringer med observasjoner med uniform signalstyrke til observasjoner hvor det ene signalet har fått mindre amplitude. Estimer produsert av minimum varians metoden er brukt, siden forskjellene her var store nok til å gi tydelige utslag på plottene.

En vurdering av de to plottene viser klart hvordan standardavviket er på samme størrelsesorden for estimeringene av begge parameterne i figur 6.16. I figur 6.17 er signalstyrken mindre for signalet med innfallsvinkel 40° og estimeringene av dette har tydelig større standardavvik enn estimeringene for det andre signalet. Denne forskjellen i standardavvik sees av forskjellen i spredningen av sirklene som illustrerer estimatene.

	KONV	MINVAR	MUSIC	ESPRIT
Feil	100%(250)	100%(250)	53%(133)	1%(3)
Std1	—	—	1.0263	1.1656
Std2	—	—	2.3006	3.3640
Bias1	—	—	1.2056e-01	3.0682e-01
Bias2	—	—	1.6790e-01	1.9357
RMSE1	—	—	1.0334	1.2053
RMSE2	—	—	2.3067	3.8811

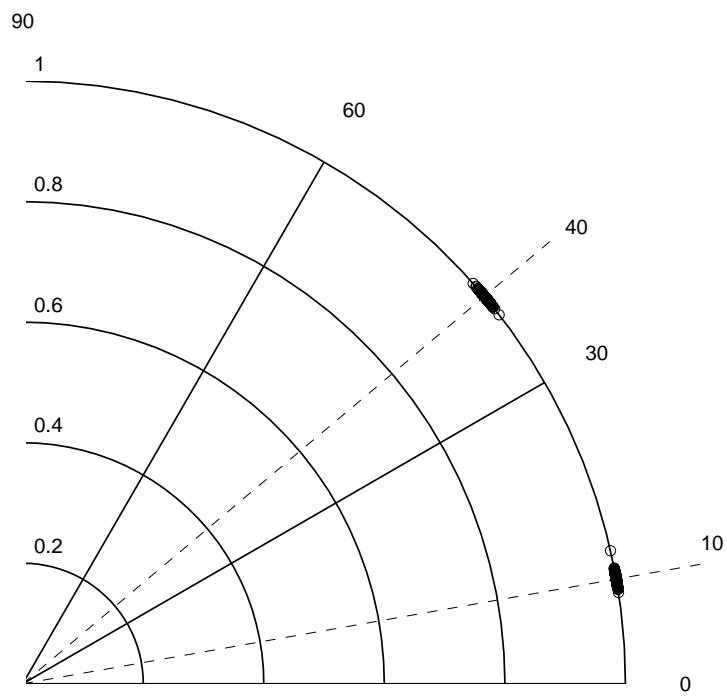
Tabell 6.12: 4-elementers array ved 10° vinkeldifferanse og forskjellige amplituder. Innfallsvinklene er 10° og 20° . Signalstøyforholdet er 10 dB for signal 1 og 5 dB for signal 2.



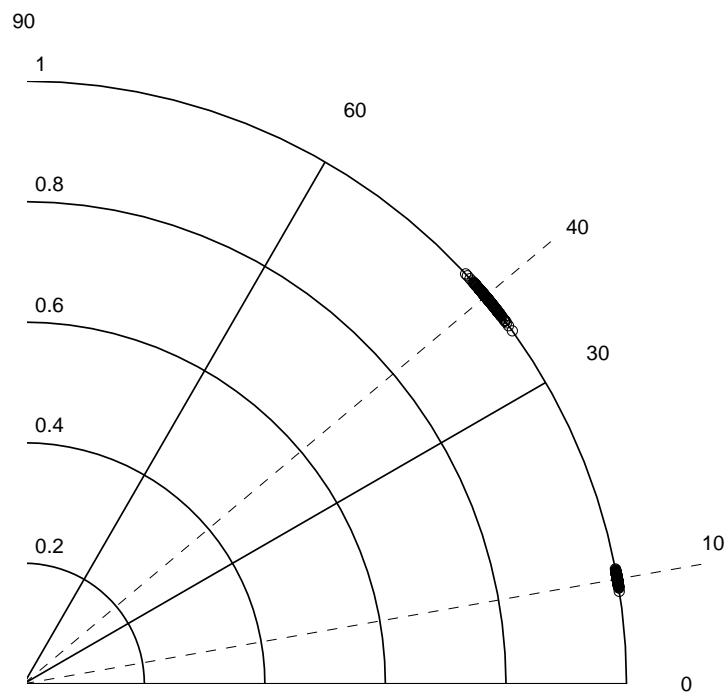
Figur 6.15: Histogram av resultatene fra tabell 6.13.

	MUSIC	ESPRIT
Feil	0%(2)	0%(1)
Std1	2.2531e-01	2.0141e-01
Std2	4.1793e-01	4.0748e-01
Bias1	2.2886e-02	9.3105e-03
Bias2	9.0957e-02	5.4129e-02
RMSE1	2.2647e-01	2.0162e-01
RMSE2	4.2772e-01	4.1106e-01

Tabell 6.13: 4-elementers array ved 5° vinkeldifferanse og forskjellige amplituder. Innfallsvinklene er 10° og 15° . Signalstøyforholdet er 30 dB for signal 1 og 25 dB for signal 2.



Figur 6.16: Simuleringsresultat uten amplitudedifferanse. Resultatene som her er plottet er de samme som er presentert i tabell 6.6.



Figur 6.17: Simuleringsresultat med amplitudedifferanse. Resultatene som her er plottet er de samme som er presentert i tabell 6.10.

Kapittel 7

Metodenes egenskaper ved tynnede array

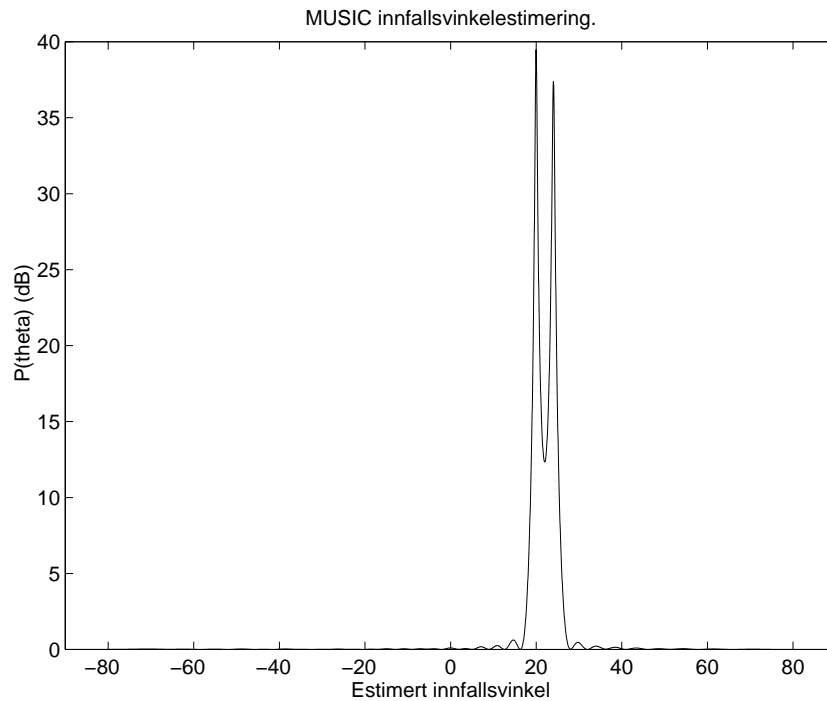
I dette kapitlet beskrives først tynning og tynningsteknikker. Deretter studeres de forskjellige metodenes egenskaper ved bruk av tynnede array.

7.1 Om tynning

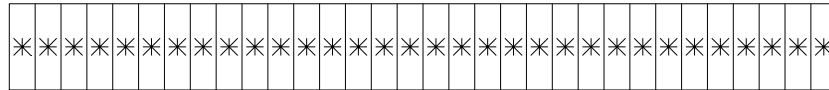
Tynning er betegnelsen på teknikken når en fjerner sensorer fra et regulært array. Dette vil påvirke egenskapene til arrayet avhengig av hvilke elementer som er fjernet. Et svært vanlig valg når en foretar tynning på et lineært array er å alltid beholde de to ytterste elementene i arrayet når en tynner. Dette er naturlig, siden det er avstanden mellom disse to sensorene som bestemmer arrayets aperture, som igjen bestemmer bredden av hovedloben i strålingsdiagrammet. Dermed vil en under en tynning der en ikke fjerner de ytterste elementene være sikret at en beholder oppløsningen og kan konsentrere seg om amplituden til sidelobene. I denne oppgaven er derfor de ytterste elementene beholdt i alle tilfeller av tynning.

Den største praktiske årsaken til at det er interessant å kjenne til hvor gode egenskaper en metode har når den henter ut data fra et array som er tynnet er at et tynnet array er billigere og enklere å konstruere. Grunnen til at den blir billigere skyldes at den består av færre elementer, altså blir det mindre utgifter til sensorer. Færre sensorer betyr et enklere system, og dermed blir systemet også enklere å implementere. Klarer en å konstruere et tynnet array som fungerer like godt som et ikke-tynnet array, eventuelt at det fungerer godt nok til det formålet en skal benytte det til, vil altså dette være svært ønskelig.

Det er mulig å optimere tynningen av et array, men en må da først bestemme for hvilke betingelser en slik rutine skal optimere. Senere i oppgaven er det benyttet en tynningsrutine som tynner optimalt i den forstand at den minimerer sidelobenivået til apertur glattingsfunksjonen. En slik metode er beskrevet i [Elgetun 96]. Et array optimalt tynnet ved denne rutinen får et sidelobenivå som er relativt flatt over hele den delen av strålingsdiagrammet hvor sidelobene befinner seg. I motsetning til strålingsdiagrammet til et tilfeldig tynnet array, hvor en vil kunne ha dype daler og høye topper i disse områdene. Om disse toppene er høye nok, skaper de problemer for estimeringen. Problemstillingen



Figur 7.1: Halvlogaritmisk plott av MUSIC-spekteret produsert ved estimering av retningene med fullt array.



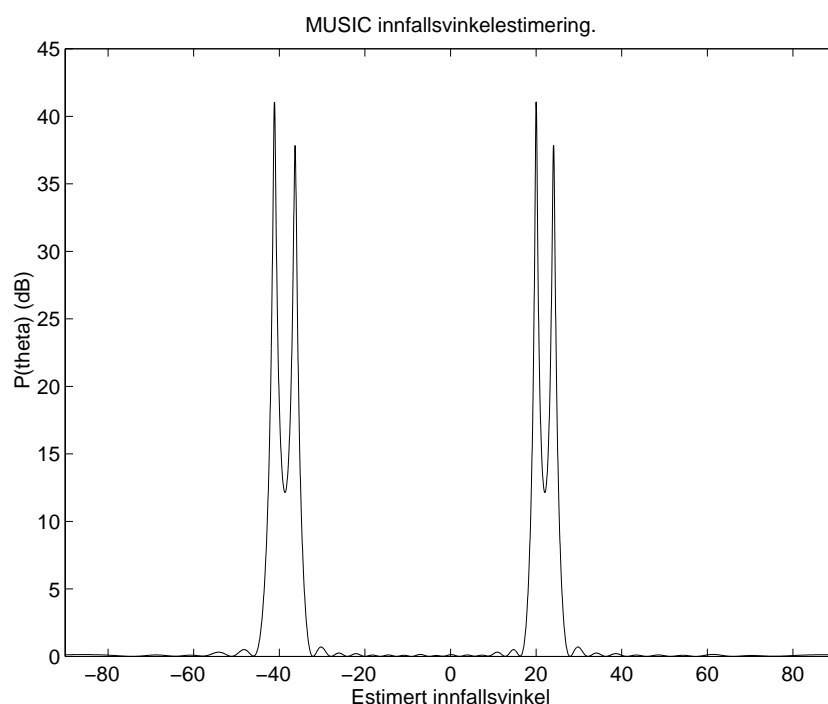
Figur 7.2: Prinsippskisse av det opprinnelige, utynnede arrayet. Hver firkant illustrerer en del av arrayet som i det fylte tilfellet vil inneholde en sensor. En stjerne illustrerer at det er en sensor på denne delen av arrayet.

blir til en viss grad analog til det som oppstår om en samler signaler med et ekvidistant array, og avstanden mellom sensorene er større enn en halv bølgedel. Da blir gitterlobes med i det synlige området av aperture glattings funksjonen. Dette gjør at en ikke lenger får et entydig svar når en estimerer.

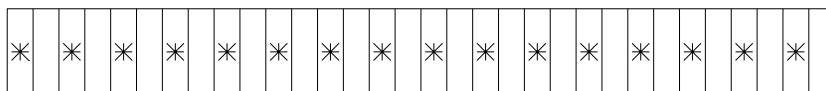
Når en tynner kan en i verste fall få gitterlobes i strålingdiagrammet. Gitterlobes betyr her at disse ekstra lobene har like høy amplitude som hovedloben. Vanligvis, om en ikke tynner ekstremt mye eller svært lite rasjonelt, vil en få sidelobes som er høyere enn de ville vært om arrayet var fullt, men med mindre amplitude enn hovedloben.

Et viktig eksempel på en lite rasjonell måte å tynne på vil være å beholde annenhver sensor konsekvent gjennom hele arrayet. Se figurene 7.2 og 7.4.

Det resulterende arrayet vil være identisk med et uniformt og utynnet array med halvparten så mange sensorer og dobbelt så stor elementavstand som det opprinnelige arrayet. Siden elementavstanden nå er fordoblet og en av forutsetningene var at en i utgangspunktet for det utynnede arrayet hadde borderline



Figur 7.3: Halvlogaritmisk plott av MUSIC-spekteret produsert ved estimering av retningene med det tynnede arrayet.

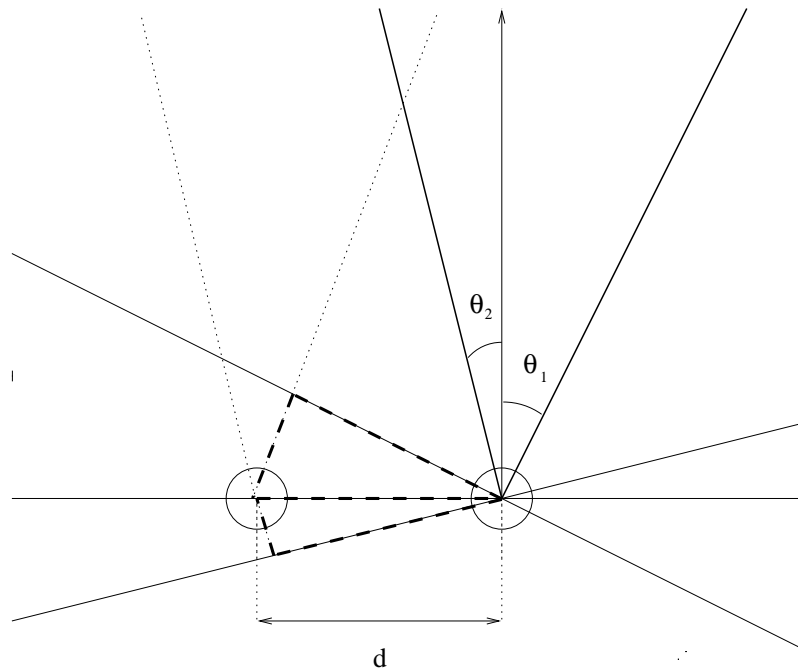


Figur 7.4: Samme array som i figur 7.2 med annenhver sensor tynnet bort.

sampling, vil en få aliasing. I eksemplet med to signaler som kommer inn i to forskjellige retninger vil en nå registrere fire forskjellige signaler, der to er falske og en konsekvens av aliasingen som nevnt i delkapittel 3.1.2. De to resterende er ekte i den betydningen at de korresponderer til propagerende signaler.

Som eksempel er det i figurene 7.1 og 7.3 brukt arrayene fra henholdsvis figur 7.2 og 7.4 til å estimere innfallsvinklene til de to signalene ved MUSIC-metoden. De to signalene har innfallsvinkler 20° og 24° . Frekvensen til de to signalene er som nevnt identisk med den maksimale frekvensen en kan ha i tilfellet figur 7.2 uten å få aliasing. De to nevnte falske toppene er paret på venstre side i figur 7.3.

En kan ved trigonometri finne at differansen mellom sinusverdien til de ekte innfallsvinklene og til de falske skal være lik 1. Illustrasjonene i figur 7.5 og 7.6 definerer størrelsene som brukes. Utgangspunktet for dette resultatet er at de to angitte katetene i figur 7.6 tilsammen må ha lengden d som også er lik bølgelengden i dette tilfellet. Dette sikrer at det er umulig å vite om signalet har innfallsvinkel θ_1 eller θ_2 . En finner to ligninger ved trigonometrien i figur



Figur 7.5: Denne illustrasjonen forestiller to sensorer med to innfallende propagerende signaler. For enkelhets skyld er kun størrelsen av vinklene, θ_1 og θ_2 , tatt hensyn til. Dette er ikke begrensende for resultatet på noen måte.

7.6:

$$x = d \sin \theta_1$$

$$d - x = d \sin \theta_2$$

Disse to slås sammen og gir:

$$d - d \sin \theta_1 = d \sin \theta_2$$

$$\sin \theta_1 + \sin \theta_2 = 1$$

Her brukes kun absoluttverdien på innfallsvinklene. Dette gjør det hele noe penere, og resultatet er like generelt som om en skulle tatt hensyn til fortegnet til θ_2 .

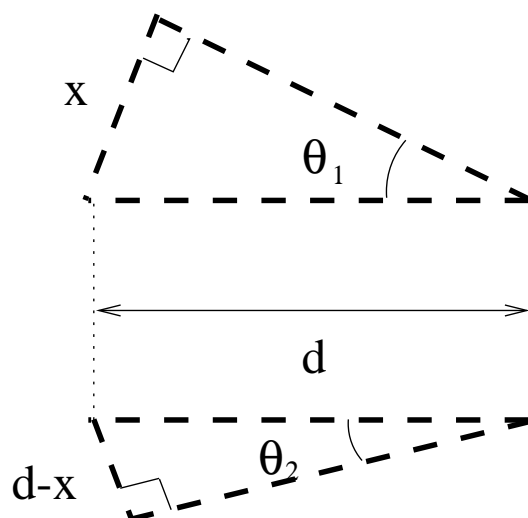
En kan regne på dette med de innfallsvinklene som ble estimert av MUSIC i simuleringen som ga spekteret gjengitt i figur 7.3. De to estimatene som estimerer reelle signaler er 20.0138° og 24.0840° , mens de korresponderende falske estimatene er -41.1288° og -36.288° . Dette stemmer bra med teorien, siden:

$$\sin(20.0138^\circ) + \sin(41.1288^\circ) \approx 1$$

$$\sin(24.0840^\circ) + \sin(36.2880^\circ) \approx 1$$

Begge disse tilnærmelsene er gyldige med fem siffres nøyaktighet.

Nøyaktig det samme problemet vil oppstå om en fjerner alle sensorene bortsett fra hver n 'te, hvor n er et heltall. Jo større n er, jo flere falske topper vil



Figur 7.6: Trigonometribetraktningene. I denne illustrasjonen er de to rettvinklede trekantene som var merket med tykke stiplede linjer i figur 7.5 plassert for seg. Katetene til venstre i de to trekantene må til sammen ha lengde lik bølgelengden for at det ikke skal være mulig å fastslå om en innkommende bølge har innfallsvinkel θ_1 eller θ_2 .

dukke opp etter estimeringen. Videre vil en møte på samme problem om en arbeider med et array der elementene er en undergruppe av elementene i en av disse regelmessig tynnede arraystrukturene.

Konklusjonen blir altså at en slik regelmessig tynning er totalt ubrukelig og at den dermed bør unngås.

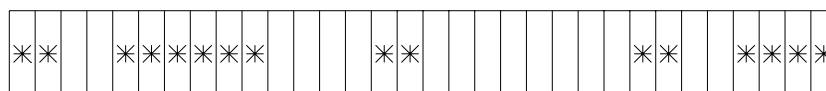
Det er teoretisk mulig å estimere innfallsvinklene tilfredsstillende selv med en høy grad av tynning. For eksempel kan eksemplet med borderline sampling studeres. Her er avstanden mellom elementene lik halvparten av bølgelengden til de propagerende signalene. Den maksimale elementavstanden, Δ_{max} blir altså: $\Delta_{max} = \frac{\lambda}{2}$. En rimelig videre konklusjon kunne da altså være at en ikke kan tynne så mye at det ikke beholdes minst ett par elementer som ligger ved siden av hverandre i den opprinnelige arrayet. Dette viser seg faktisk ikke å holde stikk for alle metodene. Fenomenet er demonstrert og kommentert delkapittel 7.2.3.

7.2 Simuleringer med tynning

I denne delen presenteres resultater av simuleringer med tynnede array, etter mønster fra delkapittel 6.3. De samme spesifikasjonene gjelder som for simuleringsseriene i del 6.3.1. Dette vil si at signalstøynivået er 0 dB, signalenes vinkler er 20° og 26° , og videre at det er 32 elementer og elementavstanden er en halv bølgelengde i det utynnede arrayet.

7.2.1 Tynning av halvparten av elementene ved 6° vinkeldifferanse

For de første simuleringsseriene fjernes halvparten av elementene i arrayet. Tynningen er gjort tilfeldig, usymmetrisk og med uniform sannsynlighetstetthet. En spesiell bibetingelse er at sensorene fjernes i par, slik at ESPRIT-metoden kan benyttes. Arrayet simuleringene ble utført med, er illustrert i figur 7.7. Aperture glattingsfunksjonen til arrayet er plottet i figur 7.8. Selv om ESPRIT her kan benyttes, er det klart at siden denne metoden kun kan benytte par av sensorer, vil den få mindre data å jobbe med enn de andre metodene. En telling av antall parkonstellasjoner i arrayet gir at ESPRIT for hvert øyeblikksbilde får 11 verdier å jobbe med, mens de øvrige metodene får antall verdier lik antall sensorer, som er 16. Simuleringene blir kjørt under identiske spesifikasjoner som simuleringene som genererte resultatene i 6.2, bortsett fra at arrayet nå er tynnet. Alle de fire metodene klarer alle estimeringene, bortsett fra at ESPRIT mislykkes i en av estimeringene. Resultatene er presentert i tabell 7.1 og et histogram i figur 7.9.

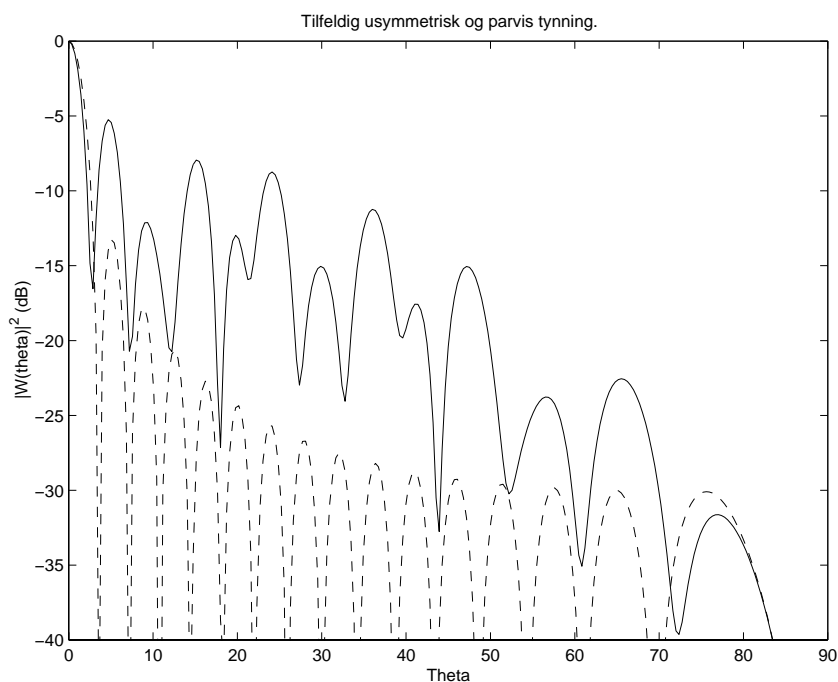


Figur 7.7: Illustrasjon av arrayet benyttet i simuleringene med halvparten av elementene fjernet.

	KONV	MINVAR	MUSIC	ESPRIT
Feil	0	0	0	0%(1)
Std1	7.4181e-02	5.4325e-02	6.8095e-02	1.0370
Std2	8.1015e-02	6.3234e-02	9.9139e-02	1.0471
Std	7.7673e-02	5.8948e-02	8.5046e-02	1.0420
Bias1	2.0668e-01	3.5183e-02	1.4778e-03	1.2408e-01
Bias2	2.2260e-01	3.6675e-02	2.1332e-03	1.2854e-01
Bias	2.1464e-01	3.5929e-02	1.8055e-03	1.2631e-01
RMSE1	2.1959e-01	6.4722e-02	6.8111e-02	1.0444
RMSE2	2.3689e-01	7.3100e-02	9.9162e-02	1.0549
RMSE	2.2824e-01	6.8911e-02	8.3637e-02	1.0496

Tabell 7.1: Opprinnelig 32-elementers array med halvparten av elementene tynnet bort. To signaler med innfalsvinkler 20° og 26°. Vinkeldifferansen er 6°. 250 realiseringer.

Resultatene presentert i tabell 7.1 viser at ved disse spesifikasjonene har ESPRIT vesentlig høyere estimert standardavvik enn de tre andre metodene. Konvensjonell metode, minimum varians metoden og MUSIC, har alle standardavvik i samme størrelsesorden. Minimum varians har de minste standardavvikestimertene av de tre metodene. For bias er situasjonen en litt annen, og størrelsen på den er svært forskjellig metodene imellom. Den konvensjonelle metoden har størst bias. ESPRIT har markert mindre bias. Minimum varians metoden har bias vesentlig mindre enn ESPRIT. Biasen til MUSIC er igjen omtrent 5% av biasen til minimum varians metode. Det store estimerte standardavviket gjør



Figur 7.8: Plotting av strålingsdiagrammet til det tilfeldig parvis tynnede arrayet med 16 av 32 gjenværende sensorer. Det tynnede arrayets strålingsdiagram er plottet med heltrukket kurve. Det utynnede arrayets strålingsdiagram er plottet med stiplet kurve til sammenligning.

at ESPRIT har høyest estimert rot av midlere kvadratfeil. På den andre siden av skalaen er minimum varians metoden med minst estimert rot av midlere kvadratfeil.

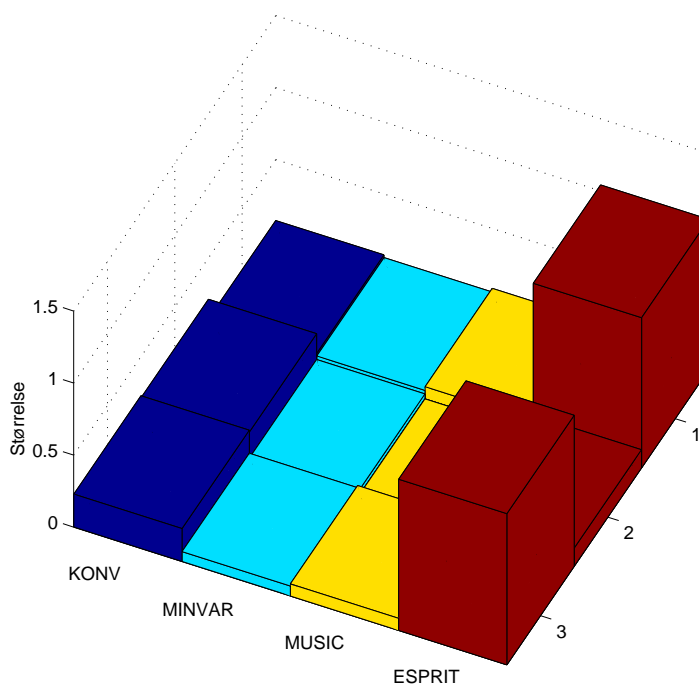
Det er naturlig å se på resultatene fra tabell 7.1 i forhold til de tilsvarende med utynnet array fra tabell 6.2. Rimelig nok viser alle metodene dårligere egenskaper ved estimeringer med tynnet array. MUSIC og minimum varians metoden er de metodene som har fått sine egenskaper minst forverret av tynningen.

7.2.2 Tynning av halvparten av elementene ved 2° vinkeldifferanse

Her gjentas simuleringsseriene fra forrige delkapittel med kun den endringen at differansen mellom de to innfallsvinklene er 2°. Minimum varians metoden feiler som forventet etter resultatene fra forrige simuleringsserie. Resultatene for MUSIC og ESPRIT presenteres i tabell 7.2 og et histogram i figur 7.10.

Resultatene i tabell 7.2 viser at MUSIC her har klart lavest estimert standardavvik. Det estimerte standardavviket til ESPRIT er nærmere fem ganger så stort. ESPRIT har på sin side noe lavere bias enn MUSIC. Den store forskjellen i estimert standardavvik gir at MUSIC også har klart minst estimert rot av midlere kvadratfeil av de to metodene.

En sammenligning av resultatene fra dette tynnede arrayet med resultatene presentert i tabell 6.3, viser at egenskapene til MUSIC nok en gang har forverret



Figur 7.9: Histogram av resultatene fra tabell 7.1. Histogrammet plotter resultatene på samme måte som beskrevet i figur 6.5.

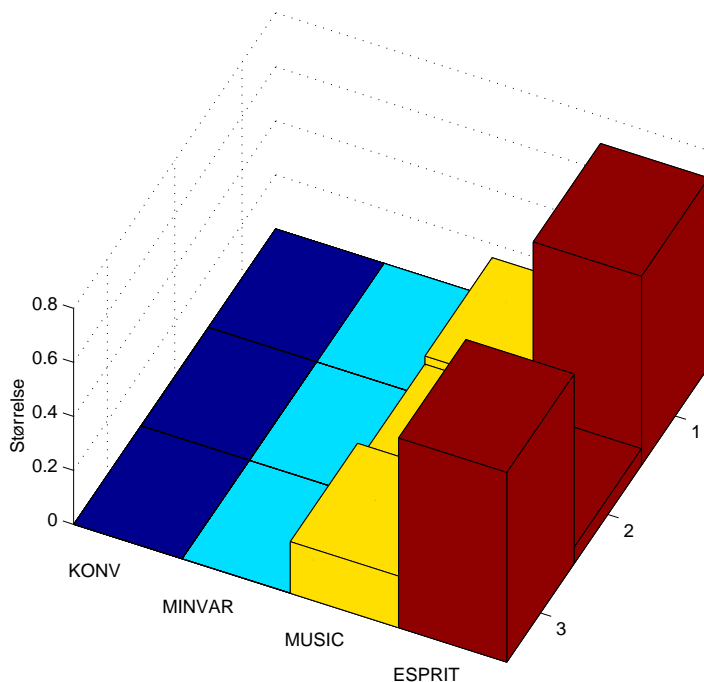
seg minst fra full til tynnet array. Egenskapene til ESPRIT har forverret seg vesentlig mer.

En klar tendens her er at ESPRIT har bedre egenskaper ved denne differansen enn ved en vinkeldifferanse på 6° . Dette er ikke så overraskende. Analoge tilfeller finnes ved konvensjonelle metoder brukt på tynnete array. Store amplituder på enkelte av sidelobene vil kunne gjøre at metodens statistiske egenskaper ikke alltid blir bedre proporsjonalt med differansen mellom innfallsvinklene.

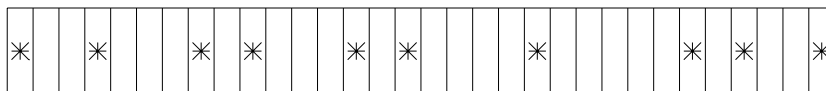
7.2.3 Stor grad av tynning

Det er interessant å se hvordan metoden fungerer under enda større grad av tynning. Arrayet tynnes dermed ned til ti sensorer. Tynningen har igjen blitt gjort usymmetrisk og med uniform sannsynlighetsfordeling. En ekstra betingelse var at arrayet ikke noe sted skulle beholde to tilstøtende sensorer, slik at minimal sensoravstand nå blir større enn en halv bølgelengde. En slik array vil ikke inneholde noen sensorpar som ESPRIT kan benytte seg av, og denne metoden er det dermed ikke mulig å bruke her. Arrayet er illustrert i figur 7.11, mens strålingsdiagrammet er plottet i figur 7.12. Forskjellig signalstyrke inkluderes også for å kunne studere denne effekten også ved tynnete array. Signalstøyforholdet er her 10 dB for signalet med lavest innfallsvinkel, og 0 dB for signalet med høyest innfallsvinkel. Resultatene er presentert i tabell 7.3.

Den konvensjonelle metoden viser seg å feile i alle estimeringer her. Mini-



Figur 7.10: Histogram av resultatene fra tabell 7.2.



Figur 7.11: Illustrasjon av arrayet benyttet i simuleringene med 22 av 32 elementer fjernet.

mum varians metoden feiler ikke for noen av estimeringene, mens MUSIC feiler en gang (kolonnen merket 1). De to metodene har nesten identisk estimert standardavvik og bias. MUSIC har minimalt bedre egenskaper, bortsett fra estimert bias til det svakeste signalet, hvor MUSIC har vesentlig mindre bias enn minimum varians metoden.

Simuleringsseriene ble også foretatt ved 2° . Både konvensjonell og minimum varians metode svikter nå for alle estimeringene. MUSIC svikter i 6% av estimeringene. Egenskapene til MUSIC er nå vesentlig svakere enn i tilfellet med 6° differanse.

Et resultat som er verd å legge merke til er at det i dette arrayet er tynnet bort flere sensorer enn i arrayet som ble benyttet under estimeringen som produserte MUSIC-spekteret i figur 7.3. Ikke noe sted er den opprinnelige avstanden på en halv bølgelengde mellom to sensorer bevart. Antall sensorer er altså mindre og sensoravstanden er gjennomgående større eller lik den uniforme sensoravstanden til arrayet fra figur 7.4. Allikevel produserer ikke MUSIC falske toppe med bruk av arrayet med kun ti gjenværende sensorer. Dette skyldes at

	KONV	MINVAR	MUSIC	ESPRIT
Feil	100%(250)	100%(250)	14%(34)	0%(1)
Std1	—	—	1.5128e-01	6.9611e-01
Std2	—	—	1.4673e-01	7.0234e-01
Std	—	—	1.4902e-01	6.9923e-01
Bias1	—	—	1.2113e-01	8.9030e-02
Bias2	—	—	1.1763e-01	3.3027e-02
Bias	—	—	1.1938e-01	6.1029e-02
RMSE1	—	—	1.9380e-01	7.0178e-01
RMSE2	—	—	1.8806e-01	7.0312e-01
RMSE	—	—	1.9093e-01	7.0245e-01

Tabell 7.2: Opprinnelig 32-elementers array med halvparten av elementene tynnet bort. To signaler med innfallsvinkler 20° og 22° . Vinkeldifferansen er 2° . 250 realiseringer.

	MINVAR(1)	MUSIC(1)	MUSIC(2)
Feil	0%(0)	0%(1)	6%(31)
Std1	2.0599e-02	2.0517e-02	3.8922e-02
Std2	7.5593e-02	7.4975e-02	1.6951e-01
Bias1	1.3506e-03	1.2616e-03	7.8551e-03
Bias2	2.8080e-02	6.8735e-03	1.0701e-01
RMSE1	2.0643e-02	2.0556e-02	3.9707e-02
RMSE2	8.0640e-02	7.5290e-02	2.0046e-01

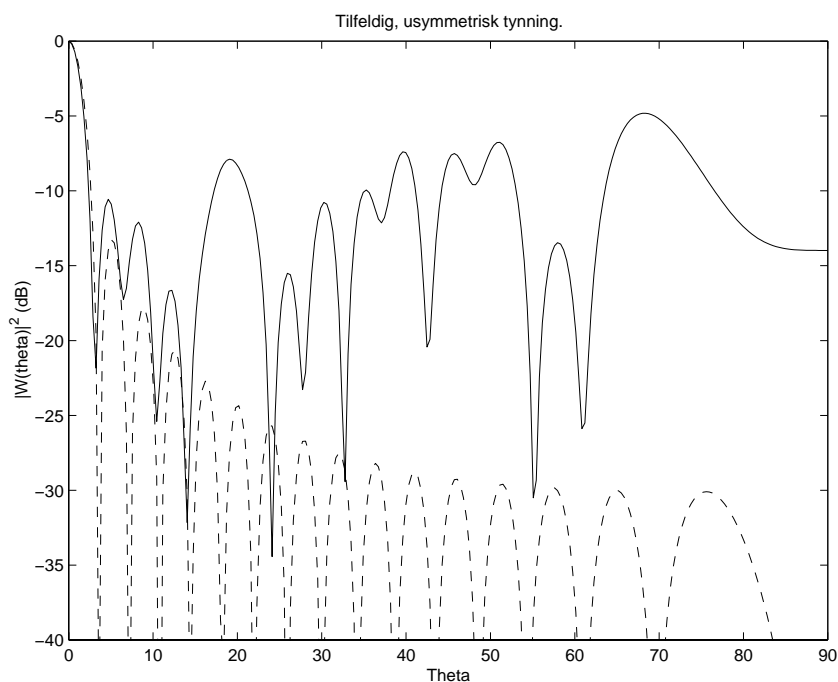
Tabell 7.3: Opprinnelig 32-elementers array med ti gjenværende elementer. For kolonnene merket (1) er innfallsvinklene 20° og 26° , som gir vinkeldifferanse lik 6° . For kolonnene merket (2) er innfallsvinklene 20° og 22° , som gir vinkeldifferanse lik 2° .

det absolutte kravet for sensoravstand for å unngå falske signaler kun gjelder for array med uniform sensoravstand. Når sensoravstanden ikke lenger er uniform, kan det faktisk være mulig å estimere innfallsvinklene entydig selv om den minste sensoravstanden er mer enn maksimumkravet for et regulært array. Grunnen til at dette er mulig er at det her ikke finnes en tvetydighet skapt av geometrien til arrayet, slik det gjorde i tilfellet fra delkapittel 7.1. Denne tvetydigheten er den en finner frem til ved den geometriske betraktningen i figur 7.6 og 7.6.

7.2.4 Ekstrem tynning

Her er det mest ekstreme tilfellet av tynning med bibetingelsen at arrayet kun skal tynnes i par, simulert: Arrayet har kun igjen ett elementpar i hver ytterkant. Arrayet er illustrert i figur 7.14. Aperture glattingsfunksjonen er plottet i øvre del av figur 7.16

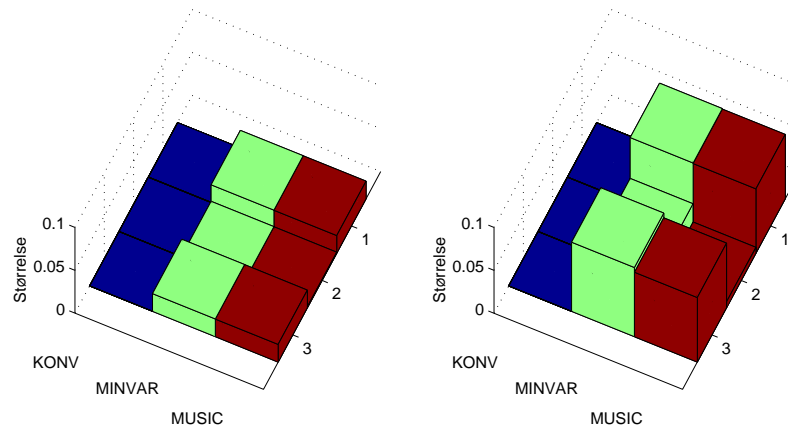
Naturlig nok svikter nå den konvensjonelle metoden i 100% av tilfellene. Det samme er tilfelle med minimum varians metoden og MUSIC. ESPRIT er den eneste metoden som lykkes. Resultater for ESPRIT er presentert i kolonnene merket ESPRIT i tabell 7.4. For alle metodene bortsett fra ESPRIT er det



Figur 7.12: Plotting av strålingsdiagrammet til det tilfeldig tynnede arrayet med ti av 32 gjenværende sensorer. Det tynnede arrayets strålingsdiagram er plottet med heltrukket kurve. Det utynnede arrayets strålingsdiagram er for sammenligning også plottet, det med stiplet kurve.

mulig å forsøke med andre versjoner av array med fire sensorer. I [Shanan 89] opplyses det om at lineære array med sensorene samlet i tre grupper i noen tilfeller har gode egenskaper. Med utgangspunkt i dette ble et tynnet array valgt med kun den ytterste sensoren på hver side og de to sentrale sensorene beholdt. Arrayet er illustrert i figur 7.15. Aperture glattingsfunksjonen er plottet i nedre del av figur 7.16. Med dette arrayet er fremdeles den konvensjonelle metoden og minimum varians metoden sjanseløse. For MUSIC lykkes derimot estimeringene for en andel av estimeringene. Posisjonene til de fire gjenværende sensorene er her altså veldig avgjørende for mulighetene til å estimere vellykket med MUSIC. Resultatene for MUSIC ved dette arrayet er presentert i kolonnene merket MUSIC i tabell 7.4.

Resultatene fra estimeringene har fremkommet ved bruk av to forskjellige array. Det er derfor ikke mulig å sammenligne resultatene direkte. Det som er mulig å trekke ut av disse resultatene er at ESPRIT har svært gode egenskaper ved disse estimeringene med ekstrem tynning. Kun i svært få tilfeller mislykkes metoden. Estimaten som oppnås har derimot relativt svake statistiske egenskaper. MUSIC på sin side, mislykkes i store prosentandeler av estimeringene. På den annen side har estimatene MUSIC produserer vesentlig bedre egenskaper enn estimatene produsert av ESPRIT. Felles for begge metodene er at de faktisk har mulighet til å estimere korrekt selv ved denne svært høye graden av tynning, mens de andre metodene som er studert feiler for alle estimeringer.



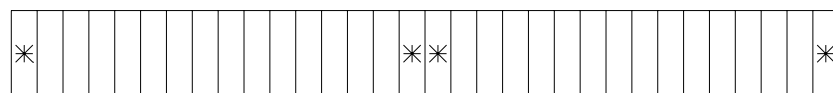
Figur 7.13: Histogram av resultatene med vinkeldifferanse 6° fra tabell 7.3. Plottet på samme måte som beskrevet i figur 6.12.



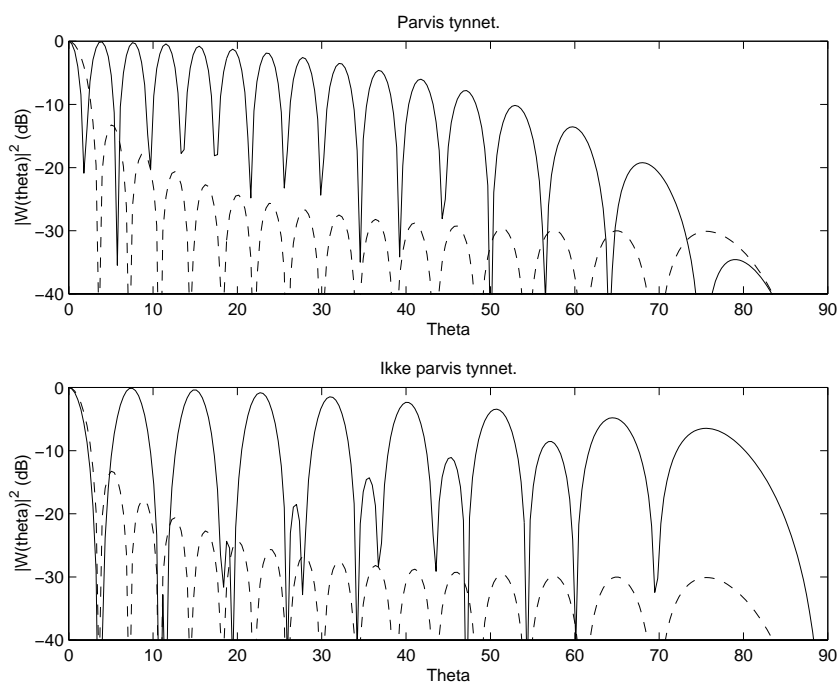
Figur 7.14: Illustrasjon av arrayet benyttet i simuleringene med alle elementene bortsett fra de ytterste parene fjernet. Benyttet til estimering med ESPRIT.

7.3 Optimal tynning

Det er nevnt i begynnelsen av dette kapitlet at det er mulig å konstruere optimale tynningsrutiner. Det må da bestemmes i hvilken forstand en slik rutine skal være optimal. I dette delkapitlet er det tatt i bruk en rutine som tynner slik at arrayets strålingsdiagram har et minimalt tillatt maksimalnivå for sidelobene. Denne teknikken er beskrevet i [Elgetun 96] og implementert i Ultrasim, [Holm 96]. Grunnen til at et slikt optimalt array ikke ble benyttet i de tidligere simuleringsseriene er at det var ønskelig å anvende ESPRIT, og dermed følger kravet om parstruktur på arrayet. Hvis en ser bort fra ESPRIT, kan det gjøres sammenligninger mellom egenskapene til de resterende metodene.

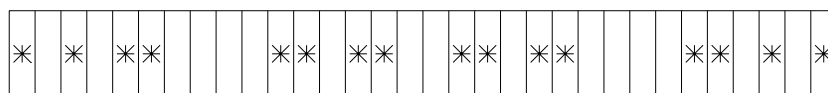


Figur 7.15: Illustrasjon av arrayet benyttet i simuleringene med alle elementene bortsett fra de to ytterste og de to sentrale sensorene fjernet. Benyttet til estimering med MUSIC.



Figur 7.16: Plotting av strålingsdiagrammet til de tynnede arrayene med fire av 32 gjenværende sensorer. I den øvre figuren er strålingsdiagrammet til det parvis tynnede arrayet brukt til ESPRIT-estimering plottet. I den nedre figuren er strålingsdiagrammet til det tynnede arrayet brukt ved MUSIC-estimering plottet. De tynnede arrayenes strålingsdiagram er plottet med heltrukket kurve. Det uttynnede arrayets strålingsdiagram er plottet med stiplet kurve til sammenligning.

Et 32-elementers array ble optimalt tynnet på den beskrevne måte for 16 av sine elementer. Simuleringsserier ble så foretatt, med alle spesifikasjonene identiske med de som ble benyttet når resultatene i tabell 7.1 og 7.2 ble produsert. Dette for å gjøre det mulig å sammenligne resultatene. Det optimalt tynnede arrayet er illustrert i figur 7.17. Strålingsdiagrammet er plottet i figur 7.18. Resultatene er presentert tabell 7.5 og 7.6. Et histogram av resultatene fra tabell 7.5 er plottet i figur 7.19.



Figur 7.17: Illustrasjon av arrayet benyttet i simuleringene med halvparten av elementene tynnet bort ved en optimeringsrutine.

Resultatene gir at en ikke i alle tilfeller av parameterestimering er sikret å få et best resultat ved bruk av et optimalt tynnet array. På den annen side oppnås her en lavere estimert rot av midlere kvadratfeil enn ved det parvis tilfeldig tynnede arrayet i delkapittel 7.2.1 for alle metodene ved 6° . Biasen er klart

	ESPRIT(1)	ESPRIT(2)	MUSIC(1)	MUSIC(2)
Feil	0%(1)	0%(2)	39%(98)	42%(105)
Std1	7.3964e-01	1.0766	4.6394e-02	5.0964e-02
Std2	2.5651	1.9192	2.3438e-01	2.2489e-01
Bias1	4.4998e-02	4.9646e-01	6.4765e-03	4.7888e-03
Bias2	1.9668e-01	3.8628e-01	4.7835e-02	3.2160e-02
RMSE1	7.4101e-01	1.1856	4.6843e-02	5.1188e-02
RMSE2	2.5727	1.9577	2.3921e-01	2.2717e-01

Tabell 7.4: Opprinnelig 32-elementers array med ekstrem tynning. For kolonnene merket (1) er innfallsvinklene 20° og 26° , som gir vinkeldifferanse lik 6° . For kolonnene merket (2) er innfallsvinklene 20° og 22° , som gir vinkeldifferanse lik 2° .

	KONV	MINVAR	MUSIC
Feil	0	0	0
Std1	7.8669e-02	6.2599e-02	7.9358e-02
Std2	7.6075e-02	7.0589e-02	7.5915e-02
Std	7.7383e-02	6.6714e-02	7.7655e-02
Bias1	4.5241e-02	2.6647e-03	5.7844e-03
Bias2	5.3027e-02	2.5870e-03	1.3872e-02
Bias	4.9134e-02	2.6259e-03	9.8284e-03
RMSE1	9.0749e-02	6.2656e-02	7.9568e-02
RMSE2	9.2732e-02	7.0637e-02	7.7172e-02
RMSE	9.1741e-02	6.6646e-02	7.8370e-02

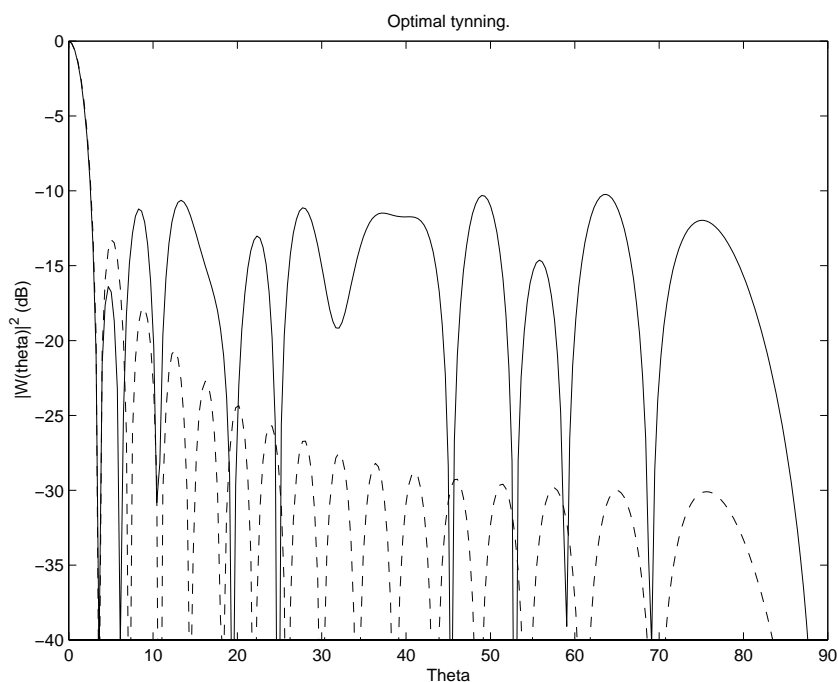
Tabell 7.5: Opprinnelig 32-elementers array med halvparten av elementene optimalt tynnet bort. To signaler med innfallsvinkler 20° og 26° . Vinkeldifferansen er 6° . 250 realiseringer.

mindre for resultatene ved denne differansen. De estimerte standardavvikene er derimot noe større for to av metodene ved 6° . Ved 2° vinkeldifferanse er alle bortsett fra én av de estimerte egenskapene til MUSIC svakere enn de var ved det tilfeldig parvis tynnete arrayet i delkapittel 7.2.1.

Dette tyder på at det optimalt tynnete arrayet har klare positive egenskaper som gjør det velegnet i noen tilfeller av estimering med alle metodene. De dårlige resultatene ved vinkeldifferanse 2° tyder derimot ikke på at det optimalt tynnete arrayet er et optimalt valg av hvilke sensorer som bør fjernes fra arrayet for enhver MUSIC-estimering med tynning. Likevel er det rimelig å konkludere med at det i tilfeller der tynnete array skal benyttes til estimering med MUSIC vil være gode muligheter for at et bra resultat oppnås ved bruk av array tynnet med denne rutinen.

7.4 Methodenens egenskaper ved tynnete array

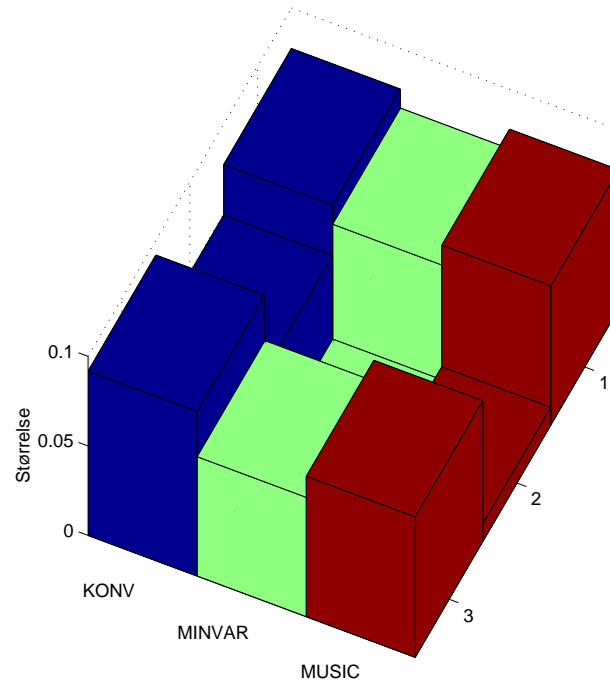
Det viser seg at både MUSIC og ESPRIT er svært godt egnet til estimering med tynnete array, med litt forskjellige egenskaper. De to metodene har her



Figur 7.18: Plotting av strålingsdiagrammet til det optimalt tynnede arrayet. Det tynnede arrayets strålingsdiagram er plottet med heltrukket kurve. Det utynnede arrayets strålingsdiagram er plottet som en sammenligning med stiplet kurve.

også best oppløsning og klarer estimeringer med større tynninger enn de andre metodene. MUSIC kan i mange tilfeller beholde et relativt lavt standardavvik selv under forhold med ekstrem tynning. Metoden viser som i forrige kapittel en terskel-effekt og viser gode egenskaper når den lykkes, selv når den mislykkes i en stor prosentandel av forsøkene.

De statistiske egenskapene til MUSIC-estimeringene er med andre ord i denne sammenheng gode helt til omstendighetene er for dårlige til at estimeringen lykkes. ESPRIT har en litt annerledes oppførsel under tynning, enn tilsvarende estimeringer med bruk av MUSIC. Dette kan skyldes at ESPRIT benytter mindre informasjon enn MUSIC. Dette gjelder også med fulle array, men gjør spesielt store utslag her. Dette fordi antallet parkonstellasjoner som ESPRIT kan benytte seg av ofte blir svært mye mindre ved tynning. For eksempel er som tidligere nevnt antallet data ESPRIT kan benytte med arrayet vist i figur 7.7 11, kontra 16 for alle andre metoder.



Figur 7.19: Histogram av resultatene fra tabell 7.5. Histogrammet plotter resultatene på samme måte som beskrevet i figur 6.5.

	KONV	MINVAR	MUSIC
Feil	100%(250)	100%(250)	13%(32)
Std1	—	—	1.3150e-01
Std2	—	—	1.4963e-01
Std	—	—	1.4086e-01
Bias1	—	—	1.4866e-01
Bias2	—	—	1.3935e-01
Bias	—	—	1.4400e-01
RMSE1	—	—	1.9847e-01
RMSE2	—	—	2.0447e-01
RMSE	—	—	2.0147e-01

Tabell 7.6: Opprinnelig 32-elementers array med halvparten av elementene optimalt tynnet bort. To signaler med innfallsvinkler 20° og 22° . Vinkeldifferansen er 2° . 250 realiseringer.

Kapittel 8

Metodenes egenskaper ved datavindu og ikke-uniform elementavstand

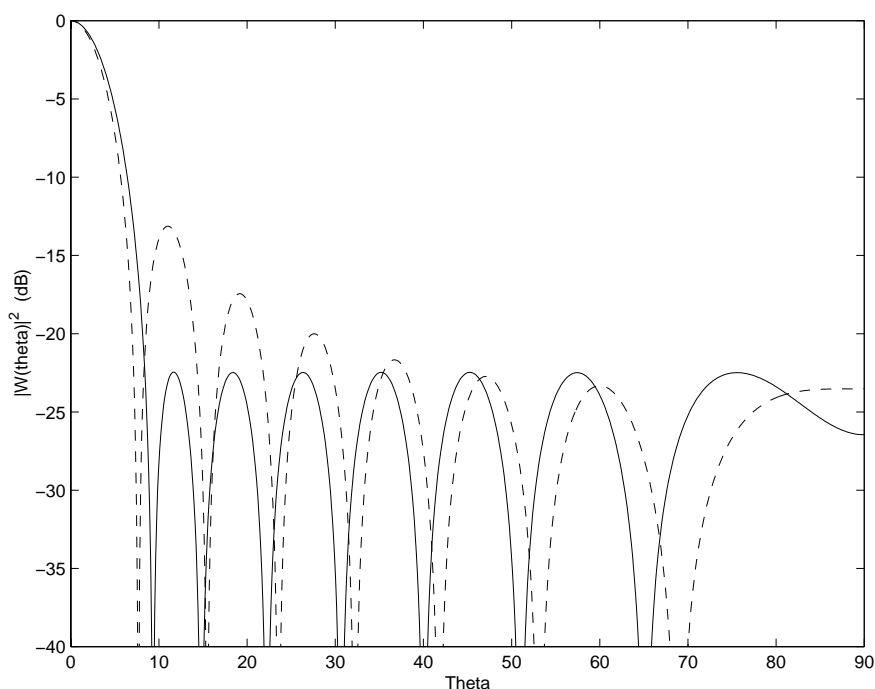
I dette kapitlet studeres noen teknikker som benyttes innen konvensjonell stråleforming for å forbedre stråleformingens egenskaper. Målet med dette kapitlet er å gi en oversikt over hvilke av disse teknikkene som kan tenkes å ha noen hensikt å benytte for de moderne parametriske metodene. Noen dypere analyse av de forskjellige teknikkens effekt på disse metodene vil derimot ikke presenteres i denne oppgaven.

8.1 Ikke-uniform elementavstand

Det er utviklet teknikker med henblikk på den konvensjonelle metoden der estimeringen foregår med et array der avstandene mellom sensorene ikke er uniform. Motivasjonen for å ha ikke-uniform elementavstand er at en ved å endre på posisjonen til de enkelte sensorene i et array kan oppnå at sidelobenivået blir lavere enn ved uniform elementavstand. Denne teknikken går dermed ut på å endre på parameterne til selve arrayet som mottar observasjonene.

I [Schjær-Jacobsen 76] presenteres en metode for å bestemme sensorposisjonene ved ikke-uniform avstand som tar utgangspunkt i at alle sidelobene skal ha samme lave maksimale nivå. Det konstante maksimale sidelobenivået strekker seg bare ut til $\pm 90^\circ$ på strålingsdiagrammet, siden denne ikke er periodisk når sensoravstanden nå ikke er uniform. Ved denne teknikken får en høyere sidelobenivå for relativt store absoluttverdier av θ , og lavere sidelobenivå for relativt små absoluttverdier av θ innenfor dette intervallet. Hovedlobebredden blir også noe bredere ved denne teknikken. I figur 8.1 er forskjellen mellom strålingsdiagrammet illustrert for ett array med uniforme sensoravstander og ett med optimerte ikke-uniforme avstander i tilfellet med 15 sensorer. Figur 8.2 viser sensorposisjonene til de to arrayene.

Denne teknikken kan det være interessant å benytte i kombinasjon med de moderne metodene og se hvilke utslag den får her. Dessverre setter kravet om parstruktur en stopper for å benytte teknikken med ESPRIT på meningsfull



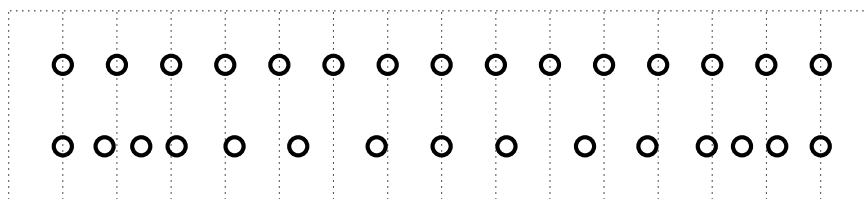
Figur 8.1: Strålingsdiagram for to 15-elementers array med samme aperture. Strålingsdiagrammet plottet med heltrukket kurve er for et array med optimert ikke-uniform elementavstand. Den stiplede kurven er strålingsdiagrammet for et regulært array.

måte, så dette er det ikke gjort noe forsøk på.

Hvilke utslag denne teknikken har ved bruk av MUSIC illustreres her med en figur og data fra en simuleringsserie. I figur 8.3 er resultatet av en MUSIC retningsestimering for hver av de to arrayene illustrert i figur 8.2 sammenlignet. De to deterministiske signalene har her innfallsvinkler -2° og 2° . Grunnen til at disse innfallsvinklene er valgt er at det ikke-regulære arrayet som er benyttet her som sagt har et minimalisert maksimalt sidelobenivå i intervallet $\pm 90^\circ$. Dermed er det i en forstand designet for å detektere signaler som kommer fra en retning relativt nær 0° . Av illustrasjonen kan en slutte at denne teknikken demper støyens påvirkning i områder nær de estimerte innfallsvinklene. Dette korresponderer bra med at det først og fremst er de største sidelobene denne teknikken demper kraftig. Denne egenskapen kan tenkes å gjøre denne teknikken kraftigere enn standard MUSIC-estimering i noen applikasjoner. Et naturlig eksempel er at det ved denne teknikken kan være lettere å unngå at et kraftig deterministisk signal drukner et svakt.

I tabell 8.1 er resultater for estimeringer ved disse to arrayene og forskjellige vinkeldifferanser presentert.

Det er i utgangspunktet rimelig å anta at denne teknikken ikke vil gjøre det bedre innen selve parameterestimeringen enn ved bruk av regulære array. Dette fordi en av effektene til denne teknikken er at hovedloben til aperture glattingsfunksjonen blir noe bredere, slik en kan observere av figur 8.1. Teknikken viser



Figur 8.2: Illustrasjon av sensorenes posisjoner i de to arrayene med strålingsdiagram plottet i figur 8.1.

seg da også å ikke gi noe bedre resultater enn med regulære array i dette tilfellet, og heller ikke i de andre tilfellene som ble studert under arbeidet med denne oppgaven. Egenskapene for parameterestimering med ikke-uniform elementavstand viste seg gjennomgående å være noe svakere enn de tilsvarende egenskapene ved uniform elementavstand.

Konklusjonen vedrørende ikke-uniforme sensorposisjoner blir da at denne teknikken demper støyens påvirkning også i tilfellet med MUSIC, men den er ikke spesielt egnet til å gi bedre rene parameterestimerer enn MUSIC med observasjoner fra et regulært array i de aller fleste tilfeller.

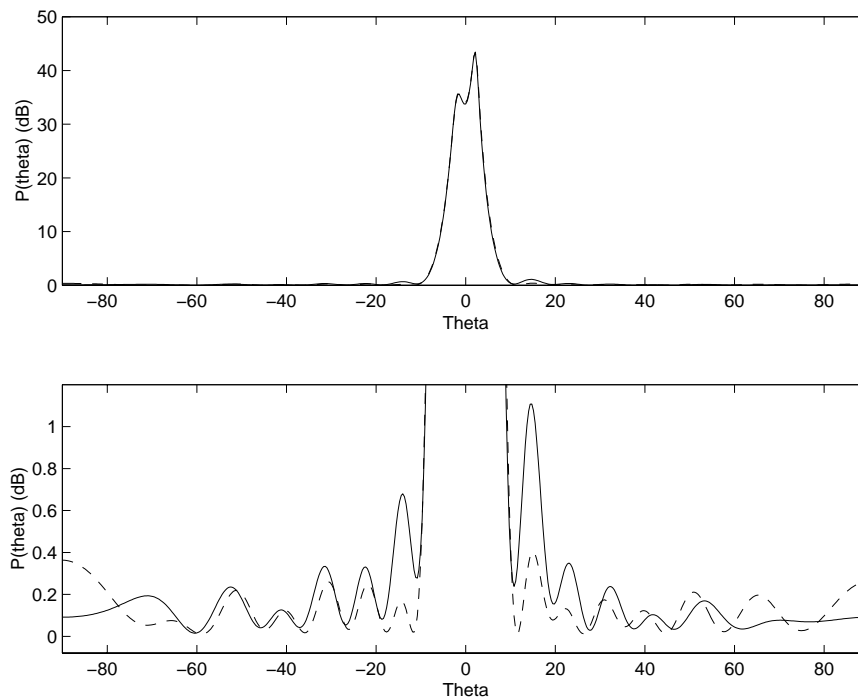
8.2 Datavindu

I presentasjonen av den konvensjonelle metoden med datavindu (delkapittel 3.2) innføres vektning av sensorene i arrayet som tillegg til den konvensjonelle metoden. Det samme kan en gjøre med de adaptive metodene. Et problem som melder seg med en gang er at en ikke kan vekte elementene enkeltvis om en skal beholde parstrukturen som kreves av ESPRIT. Dermed er også denne teknikken uaktuell for bruk med ESPRIT-estimering. MUSIC er igjen mer fleksibel, og her kan elementene gjerne vektas.

I implementeringen av denne metoden må en innføre vektningen tidligere enn tilfellet var for den konvensjonelle metoden med datavindu. Der ble vektningen innført først i uttrykket som definerte spekteret $\mathcal{P}_{KW}(\theta)$ (jf. 3.9). Siden den romlige kovariansmatrisen ikke inngår i relasjonen som definerer $\mathcal{P}_M(\theta)$ for MUSIC, må vektningen innføres når kovariansmatrisen estimeres. Dette gjøres ved uttrykket $\hat{\mathbf{R}}_{X_W X_W} = \mathbf{W} \hat{\mathbf{R}}_{X X} \mathbf{W}'$ (jf. 3.8). Dette estimatet kan så brukes videre i algoritmen til MUSIC på vanlig måte. Den eneste forskjellen på denne estimeringen og standard MUSIC estimering er altså et modifisert uttrykk for den romlige kovarians matrisen.

Det ble utført simuleringsserier for MUSIC-estimeringer med et Hamming datavindu og de samme spesifikasjonene som i forrige delkapittel. I tabell 8.2 er resultatene ved innfallsvinkler $\pm 10^\circ$, $\pm 5^\circ$ og $\pm 2^\circ$ presentert. Strålingsdiagrammet til det 15-elementers arrayet benyttet i simuleringsseriene med Hammingvinduet er plottet i figurdigramvekt.

Ved vinkeldifferanse på 20° har MUSIC-estimatene ved bruk av Hammingvinduet en anelse større standardavvik enn estimering ved uniforme vektorer. Biasen er markert større ved bruk av vinduet, selv om biasen her er relativt lav både med og uten vindu. Ved differanse 10° er standardavvikene igjen på samme størrelsesorden, mens biasen her er stor for estimeringen med vindu. For estime-



Figur 8.3: Illustrasjon av MUSIC-estimering ved bruk av de to arrayene fra figur 8.2. Innfallsvinklene er $\pm 2^\circ$ som gir vinkeldifferanse på 4° . Signalstøynivå er 10 dB. De samme observasjonene er benyttet til de to estimeringene. Det nederste plottet ser på MUSIC-spektreres oppførsel ved støygulvet. Den er derfor en forstørrelse av området ved små amplituder i det øverste plottet.

ringene uten vindu er biasen på samme størrelse som ved vinkeldifferansen 20° . For den minste vinkeldifferansen, 4° , er tendensen enda tydeligere. Biasen for estimeringene med vindu er svært stor i forhold til biasen for estimeringene uten vindu. Estimert standardavvik er også vesentlig større ved bruk av vinduet.

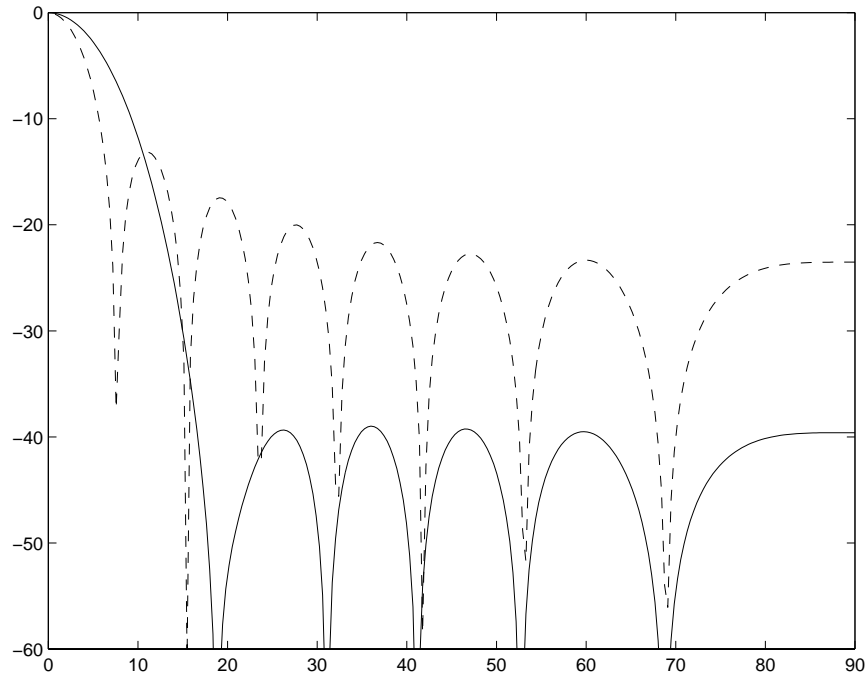
Hammingvinduet er på grunn av biasproblemene svært dårlig egnet for estimering ved små vinkeldifferanser. I figur 8.5 er MUSIC-spekteret plottet for to estimeringer fra de samme observasjonene. Her er det påfallende hvordan vinduet glatter spekteret, mens toppene som gir parameterestimaterne blir langt bredere og lavere. Denne glattende effekten av vinduet er veldig sterk, og er et resultat av de reduserte sidelobenivåene til strålingsdiagrammet til Hammingvinduet.

Konklusjonen her blir at teknikken med dette datavinduet ofte ikke er særlig egnet til å skape bedre parameterestimater ved bruk av MUSIC. Selv på det beste ble resultatene med datavindu vesentlig svakere enn ved estimering uten bruk av noe vindu (jf. 8.1). De estimerte statistiske egenskapene med denne teknikken er også vesentlig dårligere enn resultatene ved ikke-uniform sensoravstand. Ved bruk av vindu kan en derimot observere en langt sterkere dempende effekt på støyens påvirkning av $\mathcal{P}(\theta)$. Dette kan her tenkes å være en egenskap som gjør teknikken kraftigere enn estimering med uniforme sensorvektorer ved noen

	Uniform(1)	Ikke-uniform(1)	Uniform(2)
Feil	0	0	0
Std1	4.5474e-02	3.7247e-02	3.3537e-02
Std2	4.4557e-02	4.2575e-02	3.8321e-02
Std	4.5018e-02	4.0000e-02	3.6009e-02
Bias1	2.7293e-04	1.2332e-03	4.9746e-04
Bias2	3.6375e-03	3.1964e-03	2.4384e-03
Bias	1.9552e-03	2.2148e-03	1.4679e-03
RMSE1	4.5475e-02	3.7267e-02	3.3540e-02
RMSE2	4.4705e-02	4.2695e-02	3.8399e-02
RMSE	4.5090e-02	3.9981e-02	3.5970e-02
	Ikke-uniform(2)	Uniform(3)	Ikke-uniform(3)
Feil	0	0%(1)	0%(1)
Std1	3.8699e-02	8.0283e-02	8.4618e-02
Std2	4.2591e-02	8.8816e-02	9.2946e-02
Std	4.0691e-02	8.4657e-02	8.8880e-02
Bias1	1.1079e-06	3.5788e-02	3.9739e-02
Bias2	5.4159e-03	2.0835e-02	2.4307e-02
Bias	2.7085e-03	2.8312e-02	3.2023e-02
RMSE1	3.8699e-02	8.7898e-02	9.3485e-02
RMSE2	4.2934e-02	9.1227e-02	9.6072e-02
RMSE	4.0816e-02	8.9563e-02	9.4779e-02

Tabell 8.1: Resultater med ikke-uniform elementavstand. Simuleringsserier med 250 simuleringer. MUSIC estimeringer er foretatt med de to arrayene fra figur 8.2. For kolonnene merket 1 er innfallsvinklene $\pm 10^\circ$. For kolonnene merket 2 er innfallsvinklene $\pm 5^\circ$. For kolonnene merket 3 er innfallsvinklene $\pm 2^\circ$.

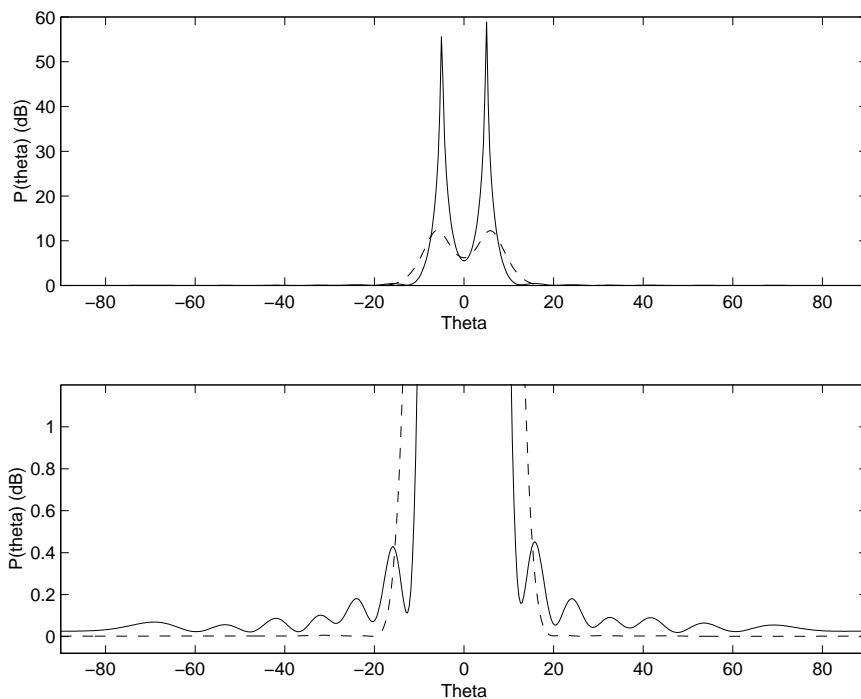
applikasjoner, på samme måte som ved ikke-uniform elementavstand. Den intuitive fordelingen ved glattingen er at den kanskje kan hindre ett signal i å drukne andre signaler. En fordel med estimering med datavindu fremfor teknikken med ikke-uniform sensoravstand er at denne er enkel å implementere. Dette siden det i det ved datavinduteknikken er mulig å benytte observasjoner fra regulære array ved å legge et datavindu på disse, mens det med ikke-regulær teknikk er nødvendig å fysisk konstruere et nytt array.



Figur 8.4: Strålediagrammene til to 15-elementers array med samme aperture. Strålediagrammet plottet med heltrukket kurve er for et array med Hammingvindu-vektede sensorer. Strålediagrammet plottet med stiplet kurve er for et regulært array.

	Hamming(1)	Hamming(2)	Hamming(3)
Feil	0	0%(1)	0%(1)
Std1	4.6952e-02	3.8175e-02	1.1097e-01
Std2	4.6172e-02	4.1279e-02	1.1197e-01
Std	4.6563e-02	3.9758e-02	1.1147e-01
Bias1	9.6709e-03	8.9202e-01	2.6159
Bias2	1.3175e-02	8.9357e-01	2.6376
Bias	1.1423e-02	8.9279e-01	2.6267
RMSE1	4.7937e-02	8.9283e-01	2.6182
RMSE2	4.8015e-02	8.9452e-01	2.6400
RMSE	4.7976e-02	8.9368e-01	2.6291

Tabell 8.2: MUSIC estimering med Hammingvindu. Signalstøyforholdet er 10 dB. For kolonnen merket 1 er innfallsvinklene $\pm 10^\circ$. For kolonnen merket 2 er innfallsvinklene $\pm 5^\circ$. For kolonnen merket 3 er innfallsvinklene $\pm 2^\circ$. Resultatene for de samme tilfeller med uniforme vekt er presentert i tabell 8.1.



Figur 8.5: Illustrasjon av MUSIC-estimering av det samme tilfellet med og uten Hamming datavindu. Signalstøyforholdet er 0 dB. Innfallsvinklene er satt til $\pm 10^\circ$. De samme observasjonene er benyttet til de to estimeringene. Det nederste plottet ser her som i figur 8.3 på MUSIC-spektrenes oppførsel ved støygulvet. Plottet er derfor en forstørrelse av området ved små amplituder fra det øveste plottet. MUSIC-spekteret for tilfellet med uniforme vektorer er plottet med heltrukket kurve og MUSIC-spekteret med datavindu er plottet med stiplet kurve. En kan av plottet observere at datavinduet har en tydelig effekt på MUSIC spekteret. Spekteret blir sterkt glattet og toppene blir bredere og lavere ved bruk av dette datavinduet.

Kapittel 9

Diskusjon

9.1 A priori informasjon

Empirien viser at i mange av simuleringsseriene i denne oppgaven er det relativt enkelt å estimere korrekt antall signaler i observasjonene i de tilfellene algoritmene ikke totalt feiler. Forskjellen mellom de d største egenverdiene og de $m - d$ minste er her vesensforskjellig, og det blir trivielt å estimere d korrekt.

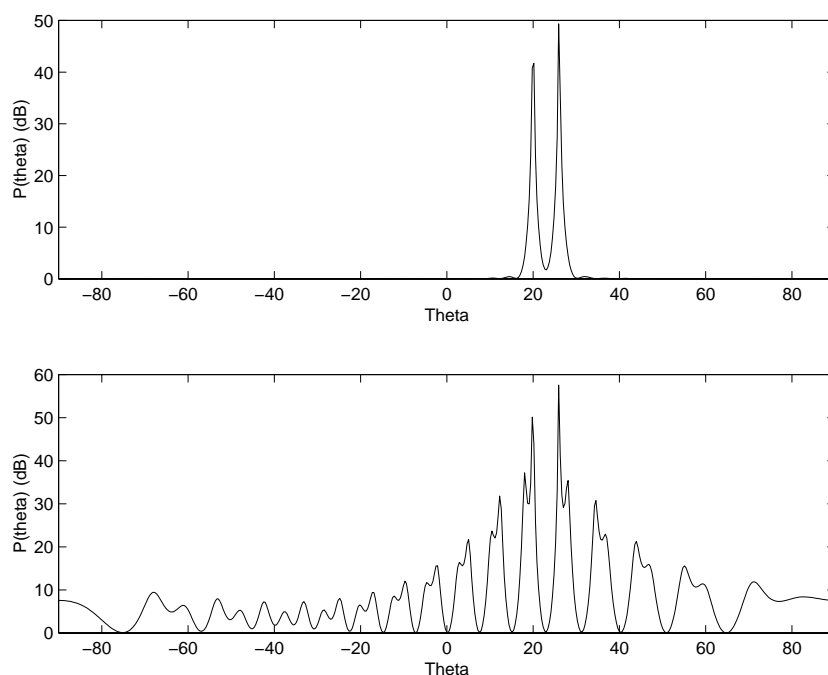
Dette gjelder alle simuleringsseriene bortsett fra estimeringene med svært liten innfallsvinkeldifferanse og den mest ekstreme tynningen; tilfellene hvor MUSIC mislykkes ofte.

Konklusjonen blir altså at i disse seriene er det lett å trekke ut og benytte den i utgangspunktet ukjente informasjonen om hvor mange signaler som ligger i observasjonene som de moderne metodene er avhengig av. Dermed kunne denne estimeringen vært gjort med korrekt resultat i hvert tilfelle ved kun en a posteriori anskuelse av størrelsen av egenverdiene. Det kan derfor argumenteres med at denne a priori kunnskapen ikke skaper noe fortrinn for MUSIC og ESPRIT ved disse simuleringsseriene, ettersom denne kunnskapen like gjerne kunne vært hentet frem fra observasjonene under estimeringen ved disse tilfellene. Den a priori kunnskapen som MUSIC og ESPRIT derimot også her benytter og trekker fordeler av også her, er antagelsene om den underliggende naturen til observasjonene som leder frem til underromstrukturen.

I tilfeller hvor de høyoppløselige estimeringsmetodene settes på harde prøver og MUSIC typisk derfor ofte feiler totalt, er forskjellen mellom de d største og de andre egenverdiene mindre. Her kan det dermed være alt annet enn trivielt å estimere størrelsen på d korrekt. Dette skjer som nevnt ved tilfellene med liten vinkeldifferanse og ekstrem tynning. I disse tilfellene spiller det klart en viktig rolle at metodene bruker denne a priori kunnskapen om antall signaler. Dette kan være en viktig del av årsaken til at MUSIC og ESPRIT her estimerer såpass bra i denne type simuleringer.

9.2 Parameterestimering ved ekstrem tynning.

Selv om mye informasjon om prosessen har gått tapt og det ikke er mulig å se at observasjonene består av d smalbandsprosesser i støy, er det likevel mulig å plukke det korrekte antall parametre fra maksimalpunktene til $P(\theta)$, om dette

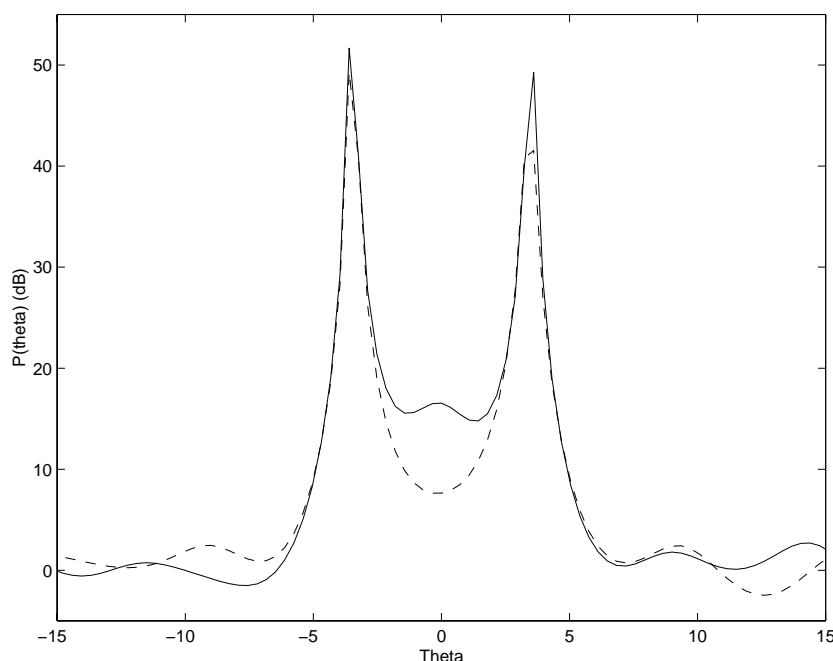


Figur 9.1: Eksempel på MUSIC-estimering ved et utynnet array og et svært tynnet array. MUSIC-spekteret er i begge tilfeller plottet halvlogaritmisk. I det utynnede tilfellet benyttes et 32-elementers regulært array. I det svært tynnede arrayet er kun fire sensorer beholdt, med samme tynning som illustrert i figur 7.15. Legg merke til at i begge tilfellene har $P(\theta)$ -plottet sine to høyeste maksimalpunkter nær 20° og 26° , som er de korrekte innfallsvinklene til signalene i observasjonene.

antallet er kjent. Metoden kan dermed lykkes, tross ekstrem tynning, siden det eneste som kreves i dette tilfellet er de d parameterne. At plottene metodene produserer ikke gir noe meningsfylt bilde av observasjonene er ikke nødvendigvis her et problem. Figur 9.1 gir ett eksempel på dette. I det nederste plottet er det umulig å fastslå at observasjonene er gjort av to signaler i støy. MUSIC-spekteret inneholder derimot en masse topper med amplitude i samme størrelsesorden. Om en plukker de to høyeste toppene får en derimot estimater av de to parameterne som søkes.

9.3 En sammenligning mellom resultatene i denne oppgaven og tidligere resultater

Et poeng i denne oppgaven er at søkingen etter kun de d parameterne som beskriver signalene gjør at noen av metodene tilsynelatende er svært lite påvirket av tynning. Ofte kan \mathcal{P} -plottet gi et helt villedende resultat ved stor grad av tynning effekter som for eksempel et stort antall falske topper. Figur 9.1 ga et eksempel på nettopp det. Dette vil ikke nødvendigvis ha så stor innvirkning på

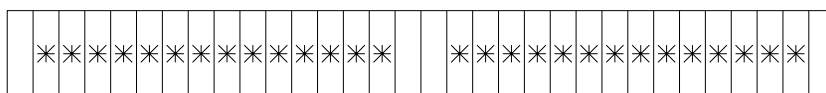


Figur 9.2: Eksempel på mislykket estimering ved liten tynning. I dette eksempelet er den interessante delen av MUSIC-spekteret plottet for en estimering med to forskjellige array, et utynnet 32-elementers regulært array og det samme arrayet tynnet med fire sensorer. I eksemplet fra [Swingler 89] ble arrayet tynnet ved at de to ytterste og de to mest sentrale sensorene ble fjernet. Det samme er gjort her. Dette betyr at det tynnede arrayet er som illustrert i figur 9.3.

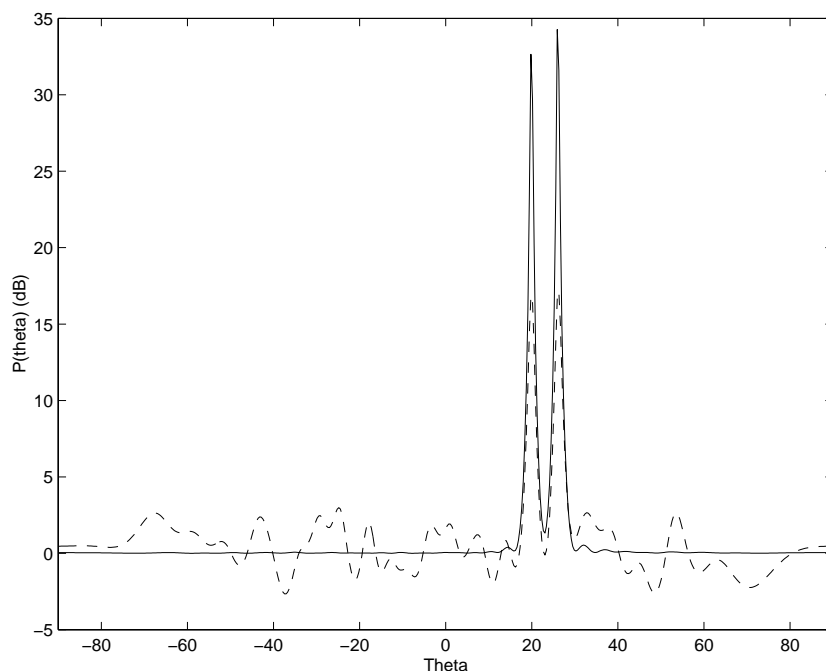
Ett poeng her er at de ytterste sensorene er fjernet ved denne tynningen, slik at aperturen blir mindre. De ytterste sensorene har vært beholdt i alle tilfeller av tynninger benyttet til simuleringer i denne oppgaven slik at aperturen har vært uendret.

De deterministiske signalene har innfallsvinkler $\pm 3.5^\circ$ og 0° . Signalstøynivået er 20 dB for signalene ved $\pm 3.5^\circ$ og 0 dB for signalet ved 0° . Den samme støyen brukes i begge estimeringene. Den heltrukne og den stiplede kurven er plottet av MUSIC-spekteret ved henholdsvis bruk av det utynnede og det tynnede arrayet. Det svake deterministiske signalet ved 0° blir detektert og parameteren estimert i tilfellet med utynnet array. Med tynnet array blir derimot ikke det svake signalet detektert.

simuleringene som er foretatt, der kun et antall av toppene plukkes ut. Hadde målet vært et søk etter et estimat av det sanne effektthetsspekteret til observasjonene, ville metodene mange steder ikke gitt meningfylte resultater. Dette gjelder i størst grad de konvensjonelle metodene og minimum varians metoden, som begge i utgangspunktet forsøker å estimere hele den sanne effekttheten, mens MUSIC og ESPRIT kun forsøker å estimere ett sett parameter. MUSIC-spekteret er ikke et estimat av det sanne effektthetsspekteret, det er bare et redskap for å produsere estimatene av parameterne. Men også disse to metodene



Figur 9.3: Det tynnede arrayet benyttet i figur 9.2.



Figur 9.4: Eksempel på variasjon av antall øyeblikksbilder ved MUSIC estimering. Den heltrukne kurven er et plott av MUSIC-spekteret ved 100 øyeblikksbilder, og den stiplede kurven et plott av MUSIC-spekteret ved 16 øyeblikksbilder. Alle de øvrige spesifikasjoner er identiske med de benyttet i del 6.3.1. Kort oppsummert vil dette si: Signalstøyforholdet er 0 dB. Innfallsvinklene til de deterministiske signalene er 20° og 26° . Arrayet er regulært med 32 elementer. De 16 øyeblikksbildene som det ene spekteret er basert på er inkludert blant de 100 som det andre spekteret er basert på. Dermed er de to estimatene i den grad det er mulig basert på de samme observasjonene. En kan observere hvordan MUSIC-spekteret ved 16 øyeblikksbilder er vesentlig mer erratisk enn MUSIC-spekteret ved 100 øyeblikksbilder. Differansen mellom toppene i MUSIC-spekteret som korresponderer til et propagerende signal og de andre toppene er også mindre for tilfellet med 16 øyeblikksbilder.

vil kunne arbeide svært mye dårligere selv med liten grad av tynning.

I [Swingler 89] beskrives det arbeid med ekte signaler innhentet med sonar fra havbunn, og MUSIC sies der å ha merkbart dårligere egenskaper allerede etter tynning av få elementer. Dette kan skyldes at det i artikkelen er signaler med relativt stor forskjell i amplitude som skal detekteres, og et tap av observasjonene fra kun få av sensorene er nok til at de signalene med minst amplitude

står i fare for å druknes av de kraftigere signalene og støyen slik at det ikke kan detekteres. Inntrykket av at MUSIC og ESPRIT jobber tilnærmet like bra med store andeler av sensorene sine fjernet er altså litt galt. Dette gjelder kun i spesielle tilfeller. Et eksempel der MUSIC svikter ved kun liten tynning er presentert i figur 9.2.

Tilfellene som ble sett på i denne oppgaven var ved simulerte data, hvor den sanne underliggende datamodellen er identisk med den antatte. Dette vil ikke være tilfelle når en jobber med reelle data, slik som i [Swingler 89]. Dette vil bety at betingelsene for estimeringen er dårligere, siden modellen nå i beste fall er en forenkling av realitetene for observasjonene.

I estimeringene skissert i [Swingler 89] ble det benyttet 16 øyeblikksbilder mens det i denne oppgaven er benyttet 100 øyeblikksbilder i simuleringsseriene. Forskjellen på en $\mathcal{P}(\theta)$ -funksjon ved en estimering med 16 kontra 100 øyeblikksbilder er påfallende. Et eksempel er plottet i figuravhavsnaps. Ved bruk av et stort antall øyeblikksbilder blir det resulterende spekteret vesentlig glattet. En av effektene av denne glattingen er at estimeringen blir mer motstandsdyktig mot tynning jo flere øyeblikksbilder som inngår.

I [Roy 89] gjennomføres en simuleringsserie på en måte som har en del til felles med simuleringsseriene i denne oppgaven. Forskjellene inkluderer flere effekter. I disse simuleringene er ikke signalene totalt ukorrelerete. Sensorplasseringene metodene bruker inneholder feil. En har dermed ikke eksakt kjennskap til $\mathbf{a}(\theta)$, siden sensorplasseringene kun er estimert. Den demonstrerer hvordan det i dette tilfellet er ESPRIT som har de beste egenskapene siden den lykkes med estimeringen i alle simuleringene, mens MUSIC ikke lykkes med å skille de to signalene i 37% av simuleringene. Av de vellykkede resultatene som sammenlignes viser det seg at MUSIC har mindre estimert varians enn ESPRIT, mens ESPRIT har mindre bias enn MUSIC. Dette stemmer bra overens med mine resultater fra kapittel 6. Denne tendensen til at ESPRIT har lavere bias enn MUSIC, viser seg å være klart avhengig av spesifikasjonene for simuleringene.

I [Shanan 89] blir teknikken med ikke-uniform elementavstand benyttet for å vise at denne demper støyens påvirkning på $\mathcal{P}(\theta)$ for flere adaptive metoder, blant annet minimum varians metoden. Dette korresponderer nøyaktig med resultater beskrevet i kapittel 8. I figur 8.3 er den samme dempende egenskapen illustrert for MUSIC.

9.4 Granskning av metodenes modeller og modellfeil

En kunne i kapitlene 6 til 8 observere at metodene MUSIC og ESPRIT på flere områder hadde markert bedre egenskaper enn de øvrige studerte metodene. Særlig hadde disse to metodene betydelig større oppløsning enn de andre oppgavene, og begge kunne estimere under ekstrem grad av tynning. I dette delkapitlet diskuteres det noe om hva denne forskjellen i egenskaper kan skyldes.

Det er naturlig å ta utgangspunkt i hva metodene gjør for å minimere støyens destruktive påvirkning på observasjonene. Alle metodene benytter sample kovariansen for å estimere den sanne kovariansen:

$$\hat{\mathbf{R}}_{XX} = \frac{1}{N} \mathbf{X}\mathbf{X}'.$$

Her blir noe av støyens påvirkning midlet bort. Den midlede effekten vil være større jo flere øyeblikksbilder som benyttes til estimeringen. Om en lar antall øyeblikksbilder gå mot uendelig får en ensambeldefinisjonen til den sanne kovariansen:

$$\mathbf{R}_{XX} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbf{X}\mathbf{X}'.$$

Siden alle metodene benytter denne teknikken kan ikke den direkte behandlingen av støyen være en årsak til forskjellene mellom MUSIC og ESPRIT kontra de andre metodene. Derimot finnes det grunnleggende forskjeller på hvordan støyens rolle oppfattes. For å studere dette må det sees på modellene metodene bruker. Først følger nedenfor en kort presentasjon av de to typer modell som er aktuelle her.

En autoregressiv modell (AR-modell) av orden o har følgende generelle form med notasjonen brukt i denne oppgaven:

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^o x_{k-i}(t) + n_k(t) \quad (9.1)$$

Grunnleggende for en AR-modell er at hver utgang, som her er gitt ved observasjonen $x_k(t)$, er en lineær kombinasjon av et visst antall tidligere utganger, gitt ved $x_{k-i}(t)$, pluss en inngang, som her er lik støyen $n_k(t)$. Når det her refereres til tidligere utgang menes ikke en observasjon fra et tidligere tidspunkt. Det refereres derimot til en observasjon fra en sensor gitt en lavere indeks enn k .

Autoregressiv og glidende middel modell (ARMA-modell) av orden (o, p) -orden har denne generelle formen med notasjonen brukt i denne oppgaven:

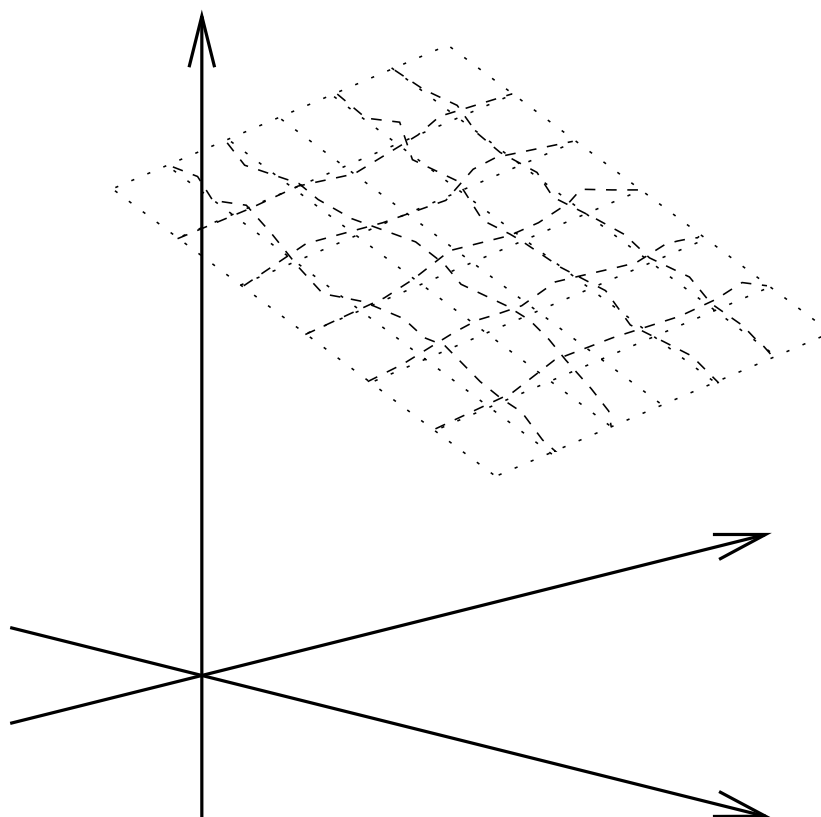
$$x_k(t) = \sum_{i=1}^o x_{k-i}(t) + \sum_{j=0}^p n_{k-j}(t) \quad (9.2)$$

Det grunnleggende for en ARMA-modell er at hver utgang, $x_k(t)$, er en lineær kombinasjon av et visst antall tidligere utganger, $x_{k-i}(t)$, pluss en lineær kombinasjon av et visst antall tidligere innganger, $n_{k-i}(t)$ og $n_k(t)$.

9.4.1 Sammenligning av modellene som ligger til grunn for metodene

En kan først studere de tre tidligste metodene presentert i denne oppgaven, konvensjonell metode med og uten datavindu og minimum varians metode. I [Roy 87] og [Roy 89] pekes det på at disse ikke benytter korrekt modell for den type parameterestimering som er aktuell i denne oppgaven. Dette er den viktigste årsaken til at de i noen tilfeller har dårligere egenskaper enn MUSIC og ESPRIT, som begge bruker korrekt ARMA-modell. De fleste av de tidligere metodene baserer seg på AR-modeller. Det vil i denne oppgaven ikke studeres den aktuelle modellen til hver enkelt av disse metodene. Derimot vil det i det videre vises at MUSIC og ESPRIT baserer seg på en ARMA-modell og hvordan denne ser ut. Til slutt presenteres et enkelt eksempel på en sammenligning av to realiseringer; en beskrevet av en AR-modell, og den andre av den korrekte ARMA-modellen.

MUSIC og ESPRIT benytter en ARMA-modell ved å ta i bruk den a priori innsikten i observasjonene som er antatt. Denne innsikten er at observasjonene



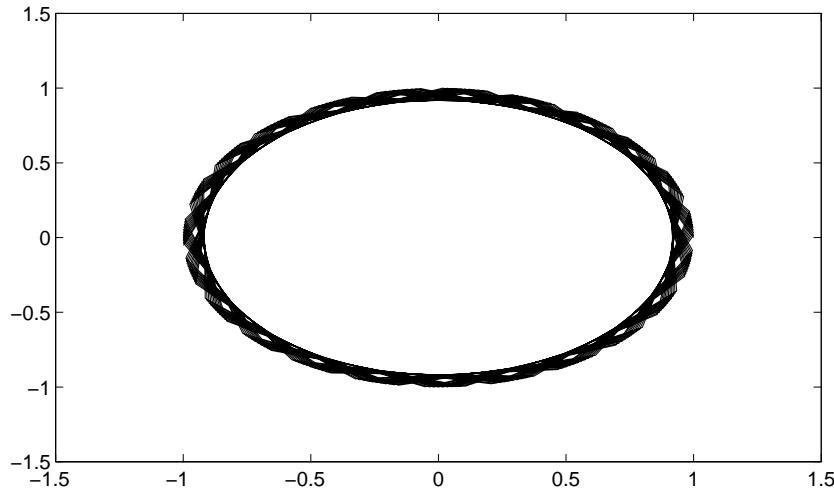
Figur 9.5: Prinsippskisse av et signal/støyrom. Signal/støyrommet er valgt å være ett plan (altså med to dimensjoner), mens hele observasjonsrommet er valgt å utspenne tre dimensjoner. Begge valg er tatt for å gjøre visualisering mulig. Signal/støyrommet er illustrert ved prikkede linjer. Observasjonene med støy utspenner hele observasjonsrommet, men danner en “fussy” utgave av signal/støyrommet. Observasjonene representeres derfor med de stiplede linjestykene som er tegnet inn på figuren i nærheten av signal/støyrommet.

inneholder et antall smalbåndende propagerende planbølger. Av dette utledes underromstrukturen til observasjonene. Antallet bølger, d , må riktignok estimeres med \hat{d} . Denne teorien impliserer at signalene utspenner et underrom av dimensjon d som blir “fussy” av støyen slik at observasjonene utspenner hele det komplekse m -dimensjonale rom.

At dette medfører bruk av en ARMA-modell for observasjonene kan bevises ved eksplisitt utregning. Her regnes det først helt ut for tilfellet med ett deterministisk signal. Deretter vises det at tilsvarende løsninger finnes i det generelle tilfellet med d signaler.

Uttrykkene for observasjonene som MUSIC og ESPRIT baserer seg på for to vilkårlige sensorer bearbeides. Antallet signaler d er lik 1. Sensorene velges å ha indeks $k - 1$ og k og innfallsvinkelen velges som θ .

$$x_{k-1}(t) = a_{k-1}(\theta)s_i(t)e^{-j\omega_0\tau_{k-1}(\theta)} + n_{k-1}(t)$$



Figur 9.6: Signalet uten støy, $x^{id}(t)$ plottet i det komplekse plan. Den horisontale akse er reell akse, og den vertikale akse er imaginær akse.

$$x_k(t) = a_k(\theta)s_i(t)e^{-j\omega_0\tau_k(\theta)} + n_k(t)$$

Innsetting av $x_{k-1}(t)$ inn i uttrykket for $x_k(t)$ gir så:

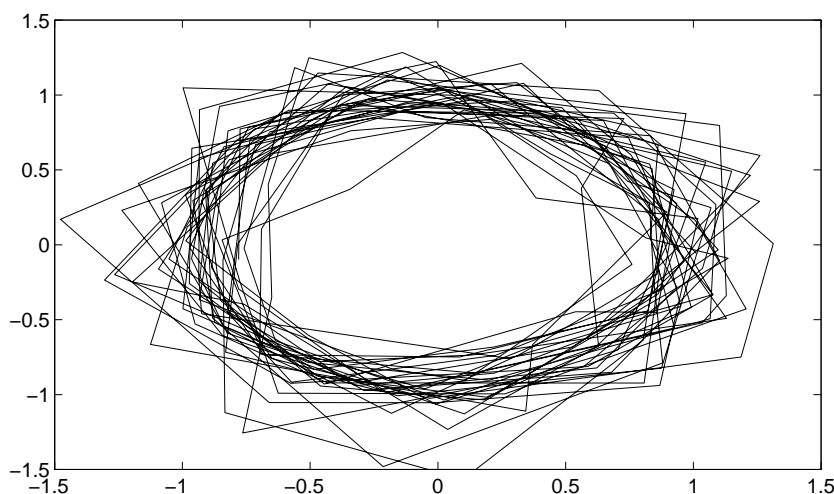
$$\begin{aligned} x_k(t) &= \frac{a_k(\theta)s_i(t)e^{-j\omega_0\tau_k(\theta)}}{a_{k-1}(\theta)s_i(t)e^{-j\omega_0\tau_{k-1}(\theta)}}x_{k-1}(t) + n_k(t) \\ &- \frac{a_k(\theta)s_i(t)e^{-j\omega_0\tau_k(\theta)}}{a_{k-1}(\theta)s_i(t)e^{-j\omega_0\tau_{k-1}(\theta)}} - n_{k-1}(t) \\ &= c_k e^{\alpha_k} x_{k-1}(t) + n_k(t) - c_k e^{\alpha_k} n_{k-1}(t), \quad (9.3) \end{aligned}$$

hvor $c_k = \frac{a_k(\theta)}{a_{k-1}(\theta)}$
 og $\alpha = -j\omega_0(\tau_k(\theta) - \tau_{k-1}(\theta))$.

Denne relasjonen beskriver en (1,1)-ordens ARMA-modell med den samme koeffisienten for den tidligere utgangen og den tidligere støyen.

For det generelle tilfellet med d deterministiske signaler går utregningen etter samme mønster. Utgangspunktet blir nå $d + 1$ observasjoner.

$$\begin{aligned} x_{k-1}(t) &= a_{k-1}(\theta_1)s_i(t)e^{-j\omega_0\tau_{k-1}(\theta_1)} + \dots \\ &+ a_{k-1}(\theta_d)s_i(t)e^{-j\omega_0\tau_{k-1}(\theta_d)} + n_{k-1}(t) \\ &\vdots \\ x_{k-d}(t) &= a_{k-d}(\theta_1)s_i(t)e^{-j\omega_0\tau_{k-d}(\theta_1)} + \dots \\ &+ a_{k-d}(\theta_d)s_i(t)e^{-j\omega_0\tau_{k-d}(\theta_d)} + n_{k-d}(t) \\ x_k(t) &= a_k(\theta_1)s_i(t)e^{-j\omega_0\tau_k(\theta_1)} + \dots \\ &+ a_k(\theta_d)s_i(t)e^{-j\omega_0\tau_k(\theta_d)} + n_k(t) \end{aligned}$$



Figur 9.7: Signalet med støy, $x(t)$, plottet i det komplekse plan. Den horisontale akse er reell akse, og den vertikale akse er imaginær akse. Kan modelleres korrekt med ARMA-modell.

De d uttrykkene for $x_{k-1}(t), \dots, x_{k-d}(t)$ kan nå organiseres i et matrisetrykk, slik at den kjente matrisen \mathbf{A}^{id} dannes.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{k-1}(t) \\ x_{k-2}(t) \end{bmatrix} &= \mathbf{A}^{id} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{k-1}(t) \\ n_{k-2}(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{k-1}(t) - n_{k-1}(t) \\ x_{k-2}(t) - n_{k-2}(t) \end{bmatrix} &= \mathbf{A}^{id} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.4)$$

Siden \mathbf{A}^{id} er invertierbar gitt antagelsene som tidligere er gjort (jf. tillegg A), er det sikret at det nå eksisterer entydige $c_i, i \in 1, \dots, d$ slik at:

$$x_k^{id}(t) = x_k(t) - n_k(t) = [c_1 \dots c_d] \mathbf{A}^{id} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_d(t) \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

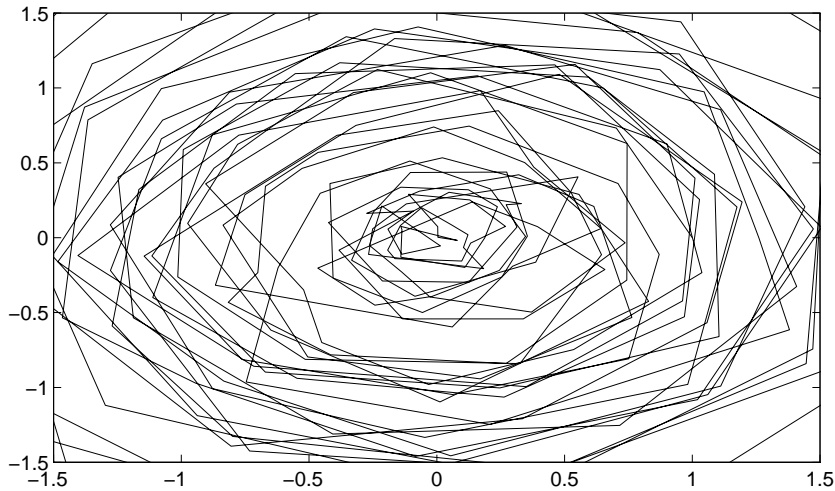
En kan så kombinere 9.4 og 9.5 for å få:

$$\begin{aligned} x_k(t) - n_k(t) &= [c_1 \dots c_d] \begin{bmatrix} x_{k-1}(t) - n_{k-1}(t) \\ x_{k-2}(t) - n_{k-2}(t) \end{bmatrix} \\ \Rightarrow x_k(t) &= \sum_{i=1}^d c_i x_{k-i}(t) + n_k(t) - \sum_{i=1}^d c_i^k n_{k-i}(t) \end{aligned} \quad (9.6)$$

Dette er en (d, d) -ordens ARMA-modell med identiske koeffisienter for de d utganger og innganger med indeks $k - i$, der $i = 1, \dots, d$.

For å illustrere den vesentlige forskjellen mellom en AR-modell og ARMA-modell ved den aktuelle problemstillingen tar jeg utgangspunkt i et enkelt eksempel. Systemet består av ett enkelt signal i støy, $e^{j\alpha k}$ er faseforskjellen for det deterministiske signalet mellom observasjonen fra sensor $k - 1$, $x_{k-1}(t)$, og sensor k , $x_k(t)$. AR-modellen av dette systemet ser da slik ut:

$$x_k^{AR}(t) = e^{j\alpha k} x_{k-1}(t) + n_k(t)$$



Figur 9.8: Plotting av signalet feilaktig modellert med AR-modell i det komplekse plan. Den horisontale akse er reell akse, og den vertikale akse er imaginær akse.

Den korrekte modellen finner en ved å benytte begrepet $x_k^{id}(t)$ for observasjonene uten støy. En har da:

$$x_k^{id}(t) = e^{j\alpha_k} x_{k-1}^{id}(t)$$

Observasjonene er gitt ved:

$$x_k(t) = x_k^{id}(t) + n_k(t)$$

Disse to relasjonene gir denne sammenhengen for systemet:

$$x_k^{ARMA}(t) = e^{j\alpha_k} x_{k-1}(t) + n_k(t) - e^{j\alpha_k} n_{k-1}(t)$$

Dette uttrykket beskriver en (1,1)-ordens ARMA-modell.

Et spørsmålet som kan stilles for å belyse viktigheten av valg av korrekt modell her er da hvilke konsekvenser bruk av en AR- kontra en ARMA-modell innebærer her. Med utgangspunkt i det enkle tilfellet med ett signal i støy som ble benyttet for utledningen av AR- og ARMA-uttrykket ble det foretatt simuleringer. I figurene 9.6-9.8 er de tre involverte sekvensene realisert for et stort antall samplere. α er for enkelhets skyld valgt å være konstant, noe vil være tilfelle om observasjonene innhentes fra et lineært og regulært array. Signalstøyforhold er valgt til $20dB$. I figur 9.6 er det deterministiske signalet $x_k^{id}(t)$ plottet. Alle samplene ligger her på enhetssirkelen, siden amplituden på den ene signalet er valgt lik en. Signal/støyrommet representeres altså med den endimensjonale enhetssirkelen. Figurene 9.7 og 9.8 nedenfor viser en realisering av henholdsvis $x_k^{AR}(t)$ og $x_k^{ARMA}(t)$ for nøyaktig samme situasjon. For $x_k^{ARMA}(t)$ er alle samplene i nærheten av enhetssirkelen alle $x_k^{id}(t)$ -samplene ligger på. $x_k^{AR}(t)$ -samplene er derimot spredd langt mer utover og samplene varierer svært i avstand til enhetssirkelen. Signal/støyrommet som her er representert ved enhetssirkelen drukner fort ved denne modellen hvor nye støyledd introduseres ved hver ny observasjon og støyen driver prosessen.

De trekkene som dukker opp i dette eksemplet og som gjelder generelt for den type systemer som studeres i denne oppgaven, er at i tilfellet med ARMA-modell realiseringer vil samplene utspenne hele observasjonsrommet, men danne en “fuzzy” utgave av signalrommet, og alle samplene vil ligge nær signalrommet i en viss forstand. Ved en AR-modell realisering vil samplene kunne bevege seg over hele observasjonsrommet og samplene vil på mange måter ha vesensforskjellige egenskaper i forhold til samplene fra ARMA-modell realiseringen av samme situasjon. Dette gjør at en metode som benytter en AR-modell vil svekkes av dette og ha dårligere egenskaper enn metodene som bygger på en ARMA-modell. Viktigheten av å bruke den korrekte modellen er stor.

Kapittel 10

Konklusjon og videre arbeid

10.1 Konklusjon

Det er nå mulig å gjøre noen avsluttende konklusjoner for metodenes egenskaper.

De empiriske resultatene forteller flere ting om metodene. ESPRIT viser seg å ikke ha utpreget gode statistiske egenskaper i tilfeller med relativt store vinkeldifferanser. MUSIC har generelt bedre egenskaper, men den konvensjonelle metoden og minimum varians metoden er ikke dårligere. De to metodene som bygger på underromsstrukturen er dermed ikke spesielt gode i tilfeller ved stor vinkeldifferanse.

MUSIC og ESPRIT, har klart bedre oppløsning enn de andre metodene som er studert. Denne egenskapen er signifikant og tydelig i alle simuleringsseriene som er gjort i oppgaven. I den andre enden av skalaen har den konvensjonelle metoden ikke overraskende den dårligste oppløsningen. ESPRIT har bedre oppløsning enn MUSIC. Denne forskjellen er ikke så stor som forskjellen i oppløsning mellom ESPRIT og MUSIC og de andre metodene.

Ved mindre vinkeldifferanser har MUSIC og ESPRIT metodene vesentlig bedre egenskaper enn de andre metodene. ESPRIT får dårligere egenskaper som følge av mindre vinkeldifferanse. Den får derimot liten, om noen, økning i antall mislykkede estimeringer før vinkeldifferansen er svært liten. MUSIC får også dårligere egenskaper ved mindre vinkeldifferanse, men i langt mindre grad enn ESPRIT. Et annet element er her den observerte terskel-effekten til MUSIC. MUSIC kan ved små vinkeldifferanser mislykkes i store prosentandeler av estimeringene og fremdeles ha relativt sett gode egenskaper i de tilfellene den lykkes. Dette er typisk for den terskel-effekten som MUSIC-algoritmen har vist seg å ha. Denne effekten gjør at MUSIC bør brukes med varsomhet i slike tilfeller. ESPRIT viser på sin side ingen tendenser til en slik terskel-effekt.

De to metodene som bygger på underrombetraktningene har også noen svært gode egenskaper for estimering med tynnete array. Det viser seg her å være mulig å estimere med ekstremt tynnete array. Helt ned til tynninger med 28 av 32 sensorer fjernet lar vellykkede estimeringer seg gjennomføre. Naturlig nok er metodenes egenskaper ved en slik grad av tynning svært avhengig av hvilke sensorer som er fjernet. Terskeffekten til MUSIC spiller ved tynnete array igjen en rolle. MUSIC har ved noen sett av spesifikasjoner en stor andel mislykkede estimeringer, men svært gode statistiske egenskaper for de vellykkede

estimeringene sett i forhold til ESPRIT.

Simuleringene med optimalt tynnede array som er fordelaktige ved bruk av den konvensjonelle metoden viser seg å ofte gi forbedrede resultater også for minimum varians metoden og MUSIC. Det vil dermed være hensiktsmessig å tynne optimalt i en applikasjon hvor et tynnet array skal brukes for å samle data til estimering med MUSIC.

Ved teknikker med ikke-regulære array og spesielt ved bruk av datavindu ble det observert en glattende effekt på MUSIC-spekteret.

10.2 Videre arbeid

I dette delkapitlet trekkes det frem momenter fra denne oppgaven som kan være aktuelle for videre arbeid.

Opgaven har bare benyttet simulerte observasjoner. Et mulig videre prosjekt ville være å undersøke om de samme egenskapene som ble observert her lar seg påvise i samme grad også ved virkelige observasjoner.

Egenskapene som er funnet for MUSIC og ESPRIT ved ekstrem tynning vil kunne være interessante å studere videre. Det ville også være interessant å forsøke å utnytte disse egenskapene til å estimere med svært få sensorer i nyttige applikasjoner.

Den glattende effekten observert ved ikke-regulære array og datavindu kunne kartlegges videre. For eksempel ved simuleringer eller arbeid med reelle signaler. Et mål ville da her også være å finne applikasjoner hvor denne glattingen er en nyttig effekt.

Denne oppgaven inneholder kun studier av simuleringsresultater ved lineære array med omnidireksjonale sensorer, og observasjoner inneholdende to planbølger. Alle disse begrensningene kan fjernes og metodenes egenskaper studeres i mer generelle tilfeller.

To generaliseringer av dette oppsettet virker umiddelbart spesielt interessante. To-dimensjonale array kan brukes til å estimere f.eks. romvinkler som beskriver propageringsretningen til signaler i rommet, og et slikt system er dermed aktuelt for svært mange applikasjoner. En annen generalisering vil være å studere metodenes egenskaper i nærfeltet. Det er da mulig å estimere posisjonen til signalenes kilder. Siden ESPRIT ikke benytter posisjonene til sensorene er det vanskelig å se hvordan denne metoden kan brukes til denne type estimering. Det finnes derimot ingen åpenbar årsak til at MUSIC ikke skulle kunne modifiseres til å brukes i en slik sammenheng. Studier av to-dimensjonale array og estimering i fjernfelt er derfor to naturlige generaliseringer av problemstillingen fra denne oppgaven og kan begge være utgangspunkt for videre arbeid.

Tillegg A

Prediksjon av deterministisk signal.

I dette tillegget skal det vises at det gitt d observasjoner fra forskjellige sensorer på et array er mulig å predikere observasjonen på en annen sensor. Observasjonene består av en sum av d komplekse eksponensialer. Det er da det ideelle tilfellet med null støy som studeres. Observasjonene er da gitt ved $x^{id}(t)$. Denne granskingen av prediksjonen vil samtidig gi innsikt i egenskapene til matrisen \mathbf{A}^{id} .

En kan ta utgangspunkt i tilfellet med to signaler; dvs. $d = 2$. Observasjonen i et vilkårlig element skal ta kunne predikeres ved to andre vilkårlige observasjoner fra arrayet. Det vilkårlige elementet som skal predikeres døpes det k 'te elementet, og de to som predikerer dette døpes element $k - 1$ og $k - 2$.

Uttrykkene for de tre involverte observasjonene er da:

$$x_k^{id}(t) = a_k(\theta_1)s_1(t)e^{-j\omega_0\tau_k(\theta_1)} + a_k(\theta_2)s_2(t)e^{-j\omega_0\tau_k(\theta_2)} \quad (\text{A.1})$$

$$x_{k-1}^{id}(t) = a_{k-1}(\theta_1)s_1(t)e^{-j\omega_0\tau_{k-1}(\theta_1)} + a_{k-1}(\theta_2)s_2(t)e^{-j\omega_0\tau_{k-1}(\theta_2)} \quad (\text{A.2})$$

$$x_{k-2}^{id}(t) = a_{k-2}(\theta_1)s_1(t)e^{-j\omega_0\tau_{k-2}(\theta_1)} + a_{k-2}(\theta_2)s_2(t)e^{-j\omega_0\tau_{k-2}(\theta_2)} \quad (\text{A.3})$$

En ønsker å finne c_1 , c_2 slik at:

$$x_k^{id}(t) = c_1 x_{k-1}^{id}(t) + c_2 x_{k-2}^{id}(t) \quad (\text{A.4})$$

Setter en A.2 og A.3 inn i A.4 og erstatter venstresiden av A.4 med høyresiden av A.1 får en følgende uttrykk:

$$\begin{aligned} & a_k(\theta_1)s_1(t)e^{-j\omega_0\tau_k(\theta_1)} + a_k(\theta_2)s_2(t)e^{-j\omega_0\tau_k(\theta_2)} \\ = & c_1 \left(a_{k-1}(\theta_1)s_1(t)e^{-j\omega_0\tau_{k-1}(\theta_1)} + a_{k-1}(\theta_2)s_2(t)e^{-j\omega_0\tau_{k-1}(\theta_2)} \right) \\ & + c_2 \left(a_{k-2}(\theta_1)s_1(t)e^{-j\omega_0\tau_{k-2}(\theta_1)} + a_{k-2}(\theta_2)s_2(t)e^{-j\omega_0\tau_{k-2}(\theta_2)} \right) \end{aligned}$$

Dette uttrykket kan omformes videre til et vektoruttrykk om en benytter at det er gitt likhet mellom leddene multiplisert med $s_1(t)$ og $s_2(t)$ på begge sider av likhetstegnet. (Grunnen til at dette gjelder er at $s_1(t)$ og $s_2(t)$ er de

eneste tidsavhengige uttrykkene, og at disse uttrykkene kun avhenger av tiden.) Vektoruttrykket ser slik ut:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_k(\theta_1)e^{-j\omega_0\tau_k(\theta_1)} & a_k(\theta_2)e^{-j\omega_0\tau_k(\theta_2)} \end{bmatrix} = \\ & = [c_1 \quad c_2] \begin{bmatrix} a_{k-1}(\theta_1)e^{-j\omega_0\tau_{k-1}(\theta_1)} & a_{k-2}(\theta_1)e^{-j\omega_0\tau_{k-2}(\theta_1)} \\ a_{k-1}(\theta_2)e^{-j\omega_0\tau_{k-1}(\theta_2)} & a_{k-2}(\theta_2)e^{-j\omega_0\tau_{k-2}(\theta_2)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Dette uttrykket lar seg løse om (2×2) -matrisen er inverterbar. Da blir løøsningene:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{a_k(\theta_1)a_{k-2}(\theta_2)e^{-j\omega_0[\tau_k(\theta_1)+\tau_{k-2}(\theta_2)]} - a_k(\theta_2)a_{k-2}(\theta_1)e^{-j\omega_0[\tau_k(\theta_2)+\tau_{k-2}(\theta_1)]}}{\Delta_c} \\ c_2 &= \frac{a_k(\theta_2)a_{k-1}(\theta_1)e^{-j\omega_0[\tau_k(\theta_2)+\tau_{k-1}(\theta_1)]} - a_k(\theta_1)a_{k-1}(\theta_2)e^{-j\omega_0[\tau_k(\theta_1)+\tau_{k-1}(\theta_2)]}}{\Delta_c} \end{aligned}$$

Her er Δ_c determinanten til (2×2) -matrisen i A.5. Denne er gitt ved:

$$\begin{aligned} \Delta_c &= \begin{vmatrix} a_{k-1}(\theta_1)e^{-j\omega_0\tau_{k-1}(\theta_1)} & a_{k-1}(\theta_2)e^{-j\omega_0\tau_{k-1}(\theta_2)} \\ a_{k-2}(\theta_1)e^{-j\omega_0\tau_{k-2}(\theta_1)} & a_{k-2}(\theta_2)e^{-j\omega_0\tau_{k-2}(\theta_2)} \end{vmatrix} \\ &= a_{k-1}(\theta_1)e^{-j\omega_0\tau_{k-1}(\theta_1)}a_{k-2}(\theta_2)e^{-j\omega_0\tau_{k-2}(\theta_2)} \\ &\quad - a_{k-2}(\theta_1)e^{-j\omega_0\tau_{k-2}(\theta_1)}a_{k-1}(\theta_2)e^{-j\omega_0\tau_{k-1}(\theta_2)} \end{aligned}$$

En kan her konkludere med at en finner c_1 og c_2 som predikerer $x_k^{id}(t)$ dersom $\Delta_c \neq 0$. Dette er oppfylt når (2×2) -matrisen fra A.5 er inverterbar.

I tilfeller med flere enn to signaler kan de d predikasjonskonstantene finnes på samme måte. Her kommer en igjen frem til at det finnes unike, tidsavhengige c_1, \dots, c_d som uttrykker $x_k^{id}(t)$ som en funksjon av d andre $x^{id}(t)$ som uttrykt i 2.7 hvis og bare hvis følgende matrise er inverterbar:

$$\mathbf{A}^{id} = \begin{bmatrix} a_{k-1}(\theta_1)e^{-j\omega_0\tau_{k-1}(\theta_1)} & \dots & a_{k-1}(\theta_d)e^{-j\omega_0\tau_{k-1}(\theta_d)} \\ a_{k-2}(\theta_1)e^{-j\omega_0\tau_{k-2}(\theta_1)} & \dots & a_{k-2}(\theta_d)e^{-j\omega_0\tau_{k-2}(\theta_d)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-d}(\theta_1)e^{-j\omega_0\tau_{k-d}(\theta_1)} & \dots & a_{k-d}(\theta_d)e^{-j\omega_0\tau_{k-d}(\theta_d)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Denne matrisen har blitt døpt \mathbf{A}^{id} siden den på mange måter korresponderer med \mathbf{A} introdusert i 2.9, som er $(m \times d)$ -matrisen som dannes i (det vanligvis overbestemte) tilfellet med støy på observasjonene.

Konklusjonen blir altså at denne predikeringen er mulig i de tilfeller hvor matrisen \mathbf{A}^{id} er inverterbar. Det er ikke umulig at denne er singular, da det ikke er satt noen andre krav til $a(\theta)$ -funksjonene enn at de skal være forskjellig fra null for alle innfallsvinkler θ . I praksis vil det ikke være et problem, siden sannsynligheten for at $a(\theta)$ -verdiene som inngår skal kunne gjøre \mathbf{A}^{id} singular eller svært dårlig kondisjonert, er ekstremt liten. Denne muligheten kan dermed sees bort fra. I alle eksperimenter med serier av simuleringer i denne oppgaven har arrayelementene vært satt til å være omnidireksjonale (a valgt konstant lik 1). Da faller alle $a(\theta)$ faktorene og \mathbf{A}^{id} degenererer til følgende matrise:

$$\mathbf{A}^{id} = \begin{bmatrix} e^{-j\omega_0\tau_{k-1}(\theta_1)} & \dots & e^{-j\omega_0\tau_{k-1}(\theta_d)} \\ e^{-j\omega_0\tau_{k-2}(\theta_1)} & \dots & e^{-j\omega_0\tau_{k-2}(\theta_d)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j\omega_0\tau_{k-d}(\theta_1)} & \dots & e^{-j\omega_0\tau_{k-d}(\theta_d)} \end{bmatrix}$$

I dette tilfellet sikrer eksponensialfunksjonens og $\tau(\theta)$ 'enes egenskaper at matrisen er inverterbar. Den eneste antagelsen en må ha oppfylt for å sikre at matrisen er ikke-singulær, er at ikke flere elementer har identisk $\tau(\theta)$. Dette er sikret så lenge ikke flere elementer har samme posisjon, eller det er ekstremt liten avstand mellom to elementers posisjoner. Det førstnevnte vil føre til en singulær matrise, og det andre kan føre til en dårlig kondisjonert matrise. Det er derfor et krav som gjelder i alle slike predikeringer at de d sensorene som benyttes må være klart atskilt, noe som er underforstått i enhver realisering.

Problemstillingen omkring \mathbf{A}^{id} er nært beslektet med den som tas opp i tillegg B, hvor \mathbf{A}^{id} studeres.

Tillegg B

A-matrisens egenskaper.

I dette tillegget skal matrisen \mathbf{A} som presenteres i 2.9 studeres nærmere. \mathbf{A} er en $(m \times d)$ -matrise. Grunnen til at den er verdt å se nærmere på, er at de moderne metodene er avhengige av at \mathbf{A} er inverterbar og dermed antar at dette er tilfelle.

\mathbf{A} har denne strukturen:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) | \dots | \mathbf{a}(\theta_d)]$$

Om også $\mathbf{a}(\theta)$ -vektorene i kolonnene skrives ut har man:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1(\theta_1)e^{-j\omega_0\tau_1(\theta_1)} & \dots & a_1(\theta_d)e^{-j\omega_0\tau_1(\theta_d)} \\ a_2(\theta_1)e^{-j\omega_0\tau_2(\theta_1)} & \dots & a_2(\theta_d)e^{-j\omega_0\tau_2(\theta_d)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m(\theta_1)e^{-j\omega_0\tau_m(\theta_1)} & \dots & a_m(\theta_d)e^{-j\omega_0\tau_m(\theta_d)} \end{bmatrix}$$

Denne matrisen viser seg å ha veldig klare fellestrekk med \mathbf{A}^{id} , som ble gransket i tillegg A. Komponentene har samme generelle form for de to matrisene. Forskjellene består i at \mathbf{A} har m rader, mens \mathbf{A}^{id} har d , og at indekseringen av elementene er forskjellig i de to tilfellene. Dette siste har ingen betydning, siden valget av indekser står fritt.

Generelt vil en som et første krav måtte ha $m \geq d$ for at \mathbf{A} -matrisen skal kunne ha d lineært uavhengige kolonner. Av dette får en direkte kravet for MUSIC om at antall elementer m må være større eller lik antall signaler i observasjonene d . ESPRIT bruker observasjonene til å konstruere to matriser på formen til \mathbf{A} -matrisen. Begge disse må ha rang d for at det skal være mulig å finne en løsning. For å klare dette må en med ESPRIT i utgangspunktet ha $m \geq 2d$. Dette kravet kan derimot ofte lempes på ved at noen av elementene inngår i to parkonstellasjoner.

Gitt at matrisen har minst like mange rader som kolonner $m \geq d$, er det neste kravet for at matrisen skal kunne ha rang d at de d kolonnene er lineært uavhengige. Det er mulig at kolonnene er lineært avhengige her som i tilfellet med \mathbf{A}^{id} i tilsvarende diskusjon fra tillegg A. Grunnen til dette er at det eneste kravet stilt til $a(\theta)$ -funksjonene er at de er ulik null for alle θ . Dermed kan en tenke seg tilfeller der to eller flere av kolonnene kan være lineært avhengige. Sjansene for dette vil derimot i praksis være tilnærmet lik null.

En måte å sikre seg at det matematisk kan bevises at matrisen har rang d , er å anta at alle sensorene er omnidireksjonale. Dette ble gjort i alle simuleringene i denne oppgaven, der $a(\theta)$ er satt til identisk lik 1 for alle sensorene. Dette resulterer i denne **A**-matrisen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e^{-j\omega_0\tau_1(\theta_1)} & \dots & e^{-j\omega_0\tau_1(\theta_d)} \\ e^{-j\omega_0\tau_2(\theta_1)} & \dots & e^{-j\omega_0\tau_2(\theta_d)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j\omega_0\tau_m(\theta_1)} & \dots & e^{-j\omega_0\tau_m(\theta_d)} \end{bmatrix}$$

Denne matrisen vil nødvendigvis ha rang d , så lenge ikke flere sensorer har nøyaktig samme lokalisering. (Dette vil resultere i at noen av $\tau(\theta)$ vil bli identiske.) At to eller flere sensorer ikke skal ha nøyaktig samme posisjon kan anses som implisitt gitt i problemstillingen. Med d forskjellige $\tau(\theta)$ -funksjoner er nå matrisen sikret rang d .

Tillegg C

Programkode

I dette tillegget er koden benyttet til simuleringene med de fire forskjellige metodene presentert. De tre kodebolkene er alle delt i tre deler etter dette systemet:

- Program med prefiks **sim**: I dette programmet ble de forskjellige spesifikasjonene definert.
- Program med prefiks **da**: I dette programmet ble de simulerte observasjonene generert utifra spesifikasjonene.
- Program uten prefiks: I denne programmet ble selve metoden utført på observasjonene.

Programmene med prefikser **sim** og **da** er svært like for de forskjellige metodene. Bare ESPRIT skiller seg nevneverdig ut i oppbyggingen av observasjonene. Som en kunne vente gitt de svært like algoritmene er også implementeringene av den konvensjonelle metoden og minimum varians metoden identiske bortsett fra selve utregningen av spekteret, hvor uttrykkene som benyttes er forskjellige.

C.1 Kode til algoritmen for konvensjonell metode

Her følger de tre programmene benyttet til konvensjonell stråleformingsmetode. Stammen for programnavnene ble her valgt som **konv**. Denne implementeringen har vektingen av sensorene som en innvariabel. Dermed kan programmet brukes til å fremskaffe estimater for den konvensjonelle metoden med datavindu også. For å oppnå dette må bare **vekt** spesifiseres å være lik **hamming(lengde)** i tilfellet med Hammingvindu. Her er **lengde** lik antall sensorer. Det samme gjelder de to neste metodene som er implementert.

C.1.1 Programmet `simkonv.m`

```
function [P,fakse,amp,fru] = simkonv(fri,vekt,am,n);
% function [P,fakse,amp,fru] = simkonv(fri,vekt,am,n);
%
% simmv : Denne Matlab-rutinen setter opp parameterne til og
% presenterer resultatet av en simulering av estimering av
% innfallsvinkler ved den konvensjonelle stråleformingsmetoden.
```

TILLEGG C. PROGRAMKODE

```
%
% INNDATA:
%   fri   - Signalenes sanne innfallsvinkler.
%   vekt  - Vektingen av sensorene. (Her tilsvarer 0 tynning.)
%   am    - Signalene og støyens amplitude.
%   n     - Antall øyeblikksbilder.
%
% UTDATA:
%   P     - P(theta)-estimatet
%   fakse - Frekvensaksen til P.
%   amp   - Amplitudene til d+1 største topper i P.
%   fru   - Frekvensene til d+1 største topper i P,
%           de d første er parameterestimatene.
%
% SE OGSÅ:
%   simmv.m, simmus.m, simesp.m

% BRUKER:
%   dakonv.m, konv.m, peakn.m
%
% SKREVET AV:
%   Kjetil Dahl, Ifi Uio, 97.

%Definering av innfallsvinkler til signalene:
if ~exist('fri')
    fri = [20 26];
end;
fri = (fri.*((2*pi)/360))';

%Definering av antall og vekting av sensorene:
if ~exist('vekt')
    vekt = [1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
            1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]';
end;

%Definering av amplituder til signalene:
if ~exist('am')
    am = [10^(0 /20) 10^(0 /20) 10^(0 /20)];
end;

%Definering av antall øyeblikksbilder:
if ~exist('n')
    n = 100;
end;

%Definering av sensorposisjonene for fullt array:
delta = .5;
sens = length(vekt);
pos = (-sens*delta/2+delta/2:delta:sens*delta/2-delta/2)';
```

```

%Definering av sensorposisjonene om vekt gir at arrayet er
%tynnet:
j = 0;
for i = 1:length(vekt)
    if vekt(i) ~= 0
        j = j + 1;
        vekthj(j) = vekt(i);
        poshj(j) = pos(i);
    end
end
pos = poshj(:);
vekt = vekthj(:);

%Kall av dakonv for å gjøre estimeringen.
[P,fakse,amp,fru] = dakonv(fri,am,pos,vekt,n);

%Konvertering og presentering av sanne og estimerte vinkler:
fri = fri.*360/(2*pi);
fru = fru.*360/(2*pi);
disp('Sanne vinkler      :');
disp(fri);
disp('Estimerte vinkler :');
disp(fru(1:length(fru)-1));

```

C.1.2 Programmet dakonv.m

```

function [P,fakse,amp,fru] = dakonv(fri,am,pos,vekt,n);
% function [P,fakse,amp,fru] =
%         dakonv(fri,am,pos,vekt,n);
%
% damv : Denne Matlab-rutinen konstruerer de simulerte
% observasjonene som blir benyttet av den konvensjonelle
% metoden i konv.m.
%
% INNDATA:
%   fri - Signalenes sanne innfallsvinkler.
%   am  - Signalene og støyens amplitude.
%   pos - Posisjonene til sensorene.
%   vekt - Vektingen av sensorene.
%   n   - Antall øyeblikksbilder.
%
% UTDATA:
%   P   - P(theta)-estimatet
%   fakse - Frekvensaksen til P.
%   amp  - Amplitudene til d+1 største topper i P.
%   fru  - Frekvensene til d+1 største topper i P,
%         de d første er parameterestimatene.
%
% SE OGSÅ:
%   damv, damus.m, daesp.m

```

```
% BRUKER:
%   mv.m, peakn.m
% SKREVET AV:
%   Kjetil Dahl, Ifi Uio, 97.

%Utregning og definering av størrelser.
%(c og o0 definert slik at posisjonene oppgis i bølgelengder.)
c = 1000;
o0 = 2*pi*c;
ant = 500;
d = length(fri);
fase = pi*rand(size(fri));
dt = 0.05;
str = size(pos,1);
X = zeros(str,n);

%Konstruksjon av de observerte dataene.
for tid = 1:n
    for sensor = 1:str
        for signal = 1:d
            X(sensor,tid) = X(sensor,tid) + ...
                am(signal)*exp(j*tid*dt*o0*fase(signal))*...
                exp(-j*o0*pos(sensor)*sin(fri(signal))/c)*vekt(sensor);
        end;
        X(sensor,tid) = X(sensor,tid) + ...
            sqrt(am(d+1))*2^(1/2)*randn*...
            exp(i*(pi*rand-pi/2))*vekt(sensor);
    end;
end;

%Definisjon av den antatt kjente støyen, som er hvit.
sig = eye(str);

%Kall av konv for å gjøre estimeringen.
[P,fakse,amp,fru] = konv(X,c,o0,pos,sig,ant);
```

C.1.3 Programmet konv.m

```
function [P,fakse,amp,fru] = konv(X,c,o0,pos,sig,ant);
% function [P,fakse,amp,fru] = konv(X,c,o0,pos,sig,ant);
%
% mv : Denne Matlab-rutinen utfører standard minimum varians
% metode estimering, og foretar deretter en finsøking for å
% sikre bedre estimater av toppene på den resulterende grafen.
%
% INNDATA:
%   X   - Observasjonsmatrisen.
%   c   - Propageringshastigheten til signalene i mediet.
%   o0  - Frekvensen til signalene.
```

C.1. KODE TIL ALGORITMEN FOR KONVENSJONELL METODE

```
% sig - Kovariansmatrisen til støyen.
% pos - Posisjonene til sensorene.
% ant - Antall sampler i skanningen over alle frekvensene.
%
% UTDATA:
% P - P(theta)-estimatet
% fakse - Frekvensaksen til P.
% amp - Amplitudene til d+1 største topper i P.
% fru - Frekvensene til d+1 største topper i P,
%       de d første er parameterestimatene.
%
% SE OGSÅ:
% mv.m, mus.m, esp.m

% BRUKER:
% peakn.m
% SKREVET AV:
% Kjetil Dahl, Ifi Uio, 97.

%Estimering av Rxx.
n = size(X,2);
Rxx = 1/n*(X*X');

%Skanning av P over frekvensintervallet.
t = 0;
a = zeros(size(pos));
for th = -pi/2:pi/ant:pi/2
t = t + 1;
a = exp(-j*o0*pos*sin(th)/c);
P(t) = a'*Rxx*a;
end;
fakse = (-pi/2:pi/ant:pi/2)';

%Plotting av estimert P(theta) med halvlogaritmisk plott.
figure(1);
plot(fakse*360/(2*pi),20*log10(abs(P)));
a = axis;a(2) = 90; a(1) = -a(2); axis(a);
title('Konvensjonell innfallsvinklestimering');
xlabel('Innfallsvinkel');
ylabel('P(theta) (dB)');

%dhatt estimeres ved studering av figuren.
dhatt = input('Skriv inn estimert antall kilder:-->');

%Lokalisering av toppene.
[amp,fru] = peakn(abs(P'),fakse,dhatt+1);

%Finskanning omkring de dhatt høyeste toppene.
for k = 1:dhatt
t = 1;
```

```
while ((fru(k)+pi/(ant*5^(t-1))) ...  
- (fru(k)-pi/(ant*5^(t-1)))) > 1e-14  
    te = 0;  
    for th = fru(k)-pi/(ant*5^(t-1))...  
        :2*pi/(ant*10*5^(t-1)):fru(k)+pi/(ant*5^(t-1))  
        te = te + 1;  
        a = exp(-j*o0*pos*sin(th)/c);  
        PE(te) = a'*Rxx*a;  
    end;  
    fE = (fru(k)-pi/(ant*5^(t-1))...  
        :2*pi/(ant*10*5^(t-1)):fru(k)+pi/(ant*5^(t-1)))';  
    [amp(k),fru(k)] = peakn(abs(PE'),fE,1);  
    t = t + 1;  
end;  
end;  
  
%Sortering av parameterne.  
fru(1:dhatt) = sort(fru(1:dhatt));
```

C.2 Kode til algoritmen for minimum varians

Her følger de tre programmene benyttet til minimum varians stråleformingsmetode. Stammen for programnavnene ble her valgt som `mv`

C.2.1 Programmet `simmv.m`

```
function [P,fakse,amp,fru] = simmv(fri,vekt,am,n);  
% function [P,fakse,amp,fru] = simmv(fri,vekt,am,n);  
%  
% simmv : Denne Matlab-rutinen setter opp parameterne til og  
% presenterer resultatet av en simulering av estimering av  
% innfallsvinkler ved minimum varians-metoden.  
%  
% INNDATA:  
%   fri   - Signalenes sanne innfallsvinkler.  
%   vekt  - Vektingen av sensorene. (Her tilsvarer 0 tynning.)  
%   am    - Signalene og støyens amplitude.  
%   n     - Antall øyeblikksbilder.  
%  
% UTDATA:  
%   P     - P(theta)-estimatet  
%   fakse - Frekvensaksen til P.  
%   amp   - Amplitudene til d+1 største topper i P.  
%   fru   - Frekvensene til d+1 største topper i P,  
%           de d første er parameterestimatene.  
%  
% SE OGSÅ:  
%   simmkonv.m, simmus.m, simesp.m
```

```

% BRUKER:
%   damv.m, mv.m, peakn.m
%
% SKREVET AV:
%   Kjetil Dahl, Ifi Uio, 97.

%Definering av innfallsvinkler til signalene:
if ~exist('fri')
    fri = [20 26];
end;
fri = (fri.*((2*pi)/360))';

%Definering av antall og vektning av sensorene:
if ~exist('vekt')
    vekt = [1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
            1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]';
end;

%Definering av amplituder til signalene:
if ~exist('am')
    am = [10^(0 /20) 10^(0 /20) 10^(0 /20)];
end;

%Definering av antall øyeblikksbilder:
if ~exist('n')
    n = 100;
end;

%Definering av sensorposisjonene for fullt array:
delta = .5;
sens = length(vekt);
pos = (-sens*delta/2+delta/2:delta:sens*delta/2-delta/2)';

%Definering av sensorposisjonene om vekt gir at arrayet er
%tynnet:
j = 0;
for i = 1:length(vekt)
    if vekt(i) ~= 0
        j = j + 1;
        vekthj(j) = vekt(i);
        poshj(j) = pos(i);
    end
end
pos = poshj(:);
vekt = vekthj(:);

%Kall av damv for å gjøre estimeringen.
[P,fakse,amp,fru] = damv(fri,am,pos,vekt,n);

%Konvertering og presentering av sanne og estimerte vinkler:

```



```
fri = fri.*360/(2*pi);
fru = fru.*360/(2*pi);
disp('Sanne vinkler      :');
disp(fri);
disp('Estimerte vinkler :');
disp(fru(1:length(fru)-1));
```

C.2.2 Programmet damv.m

```
function [P,fakse,amp,fru] = damv(fri,am,pos,vekt,n);
% function [P,fakse,amp,fru] =
%       damv(fri,am,pos,vekt,vindu,n);
%
%
% damv : Denne Matlab-rutinen konstruerer de simulerte
% observasjonene som blir benyttet etter minimum varians metoden
% i mv.m.
%
% INNDATA:
%   fri   - Signalenes sanne innfallsvinkler.
%   am    - Signalene og støyens amplitude.
%   pos   - Posisjonene til sensorene.
%   vekt  - Vekten av sensorene.
%   n     - Antall øyeblikksbilder.
%
% UTDATA:
%   P     - P(theta)-estimatet
%   fakse - Frekvensaksen til P.
%   amp   - Amplitudene til d+1 største topper i P.
%   fru   - Frekvensene til d+1 største topper i P,
%           de d første er parameterestimatene.
%
% SE OGSÅ:
%   dakonv, damus.m, daesp.m
%
% BRUKER:
%   mv.m, peakn.m
% SKREVET AV:
%   Kjetil Dahl, Ifi Uio, 97.
%
%Utregning og definering av størrelser.
%(c og o0 definert slik at posisjonene oppgis i bølgelengder.)
c = 1000;
o0 = 2*pi*c;
ant = 500;
d = length(fri);
fase = pi*rand(size(fri));
dt = 0.05;
str = size(pos,1);
X = zeros(str,n);
```

```
%Konstruksjon av de observerte dataene.
for tid = 1:n
    for sensor = 1:str
        for signal = 1:d
            X(sensor,tid) = X(sensor,tid) + ...
                am(signal)*exp(j*tid*dt*o0*fase(signal))*...
                exp(-j*o0*pos(sensor)*sin(fri(signal))/c)*vekt(sensor);
        end;
        X(sensor,tid) = X(sensor,tid) + ...
            sqrt(am(d+1))*2^(1/2)*randn*...
            exp(i*(pi*rand-pi/2))*vekt(sensor);
    end;
end;

%Definisjon av den antatt kjente støyen, som er hvit.
sig = eye(str);

%Kall av mv for å gjøre estimeringen.
[P,fakse,amp,fru] = mv(X,c,o0,pos,sig,ant);
```

C.2.3 Programmet mv.m

```
function [P,fakse,amp,fru] = mv(X,c,o0,pos,sig,ant);
% function [P,fakse,amp,fru] = mv(X,c,o0,pos,sig,ant);
%
% mv : Denne Matlab-rutinen utfører standard minimum varians
% metode estimering, og foretar deretter en finsøking for å
% sikre bedre estimater av toppene på den resulterende grafen.
%
% INNDATA:
%   X      - Observasjonsmatrisen.
%   c      - Propageringshastigheten i mediet.
%   o0     - Frekvensen til signalene.
%   sig    - Kovariansmatrisen til støyen.
%   pos    - Posisjonene til sensorene.
%   ant    - Antall sampler i skanningen over alle frekvensene.
%
% UTDATA:
%   P      - MUSIC-spekteret
%   fakse  - Frekvensaksen til P.
%   amp    - Amplitudene til d+1 største topper i P.
%   fru    - Frekvensene til d+1 største topper i P,
%           de d første er parameterestimatene.
%
% SE OGSÅ:
%   konv.m, mus.m, esp.m

% BRUKER:
%   peakn.m
% SKREVET AV:
```

TILLEGG C. PROGRAMKODE

```
% Kjetil Dahl, Ifi Uio, 97.

%Estimering av Rxx.
n = size(X,2);
Rxx = 1/n*(X*X');

%Skanning av P over frekvensintervallet.
t = 0;
a = zeros(size(pos));
iRxx = inv(Rxx);
for th = -pi/2:pi/ant:pi/2
t = t + 1;
a = exp(-j*o0*pos*sin(th)/c);
P(t) = 1/(a'*iRxx*a);
end;
fakse = (-pi/2:pi/ant:pi/2)';

%Plotting av estimert P(theta) med halvlogaritmisk plott.
figure(1);
plot(fakse*360/(2*pi),20*log10(abs(P)));
a = axis;a(2) = 90; a(1) = -a(2); axis(a);
title('Minimum varians retningsestimering.')
xlabel('Innfallsvinkel');
ylabel('P(theta) (dB)');

%dhatt estimeres ved studering av figuren.
dhatt = input('Skriv inn estimert antall kilder:-->');

%Lokalisering av toppene.
[amp,fru] = peakn(abs(P'),fakse,dhatt+1);

%Finskanning omkring de dhatt høyeste toppene.
for k = 1:dhatt
t = 1;
while ((fru(k)+pi/(ant*5^(t-1))) ...
- (fru(k)-pi/(ant*5^(t-1)))) > 1e-14
te = 0;
for th = fru(k)-pi/(ant*5^(t-1))...
:2*pi/(ant*10*5^(t-1)):fru(k)+pi/(ant*5^(t-1))
te = te + 1;
a = exp(-j*o0*pos*sin(th)/c);
PE(te) = 1/(a'*iRxx*a);
end;
fE = (fru(k)-pi/(ant*5^(t-1)))...
:2*pi/(ant*10*5^(t-1)):fru(k)+pi/(ant*5^(t-1))';
[amp(k),fru(k)] = peakn(abs(PE'),fE,1);
t = t + 1;
end;
end;
```

```
%Sortering av parameterne.  
fru(1:dhatt) = sort(fru(1:dhatt));
```

C.3 Kode til algoritmen for MUSIC

Her følger de tre programmene benyttet til MUSIC-estimeringen. Stammen for programnavnene ble her valgt som `mus`

C.3.1 Programmet `simmus.m`

```
function [P,fakse,amp,fru] = simmus(fri,vekt,am,n)  
%[P,fakse,amp,fru] = simmus(fri,vekt,am,n);  
%  
% simmus : Denne Matlab-rutinen setter opp parameterne til og  
% plotter resultatet av en simulering av estimering av  
% innfallsvinkler ved MUSIC-metoden.  
%  
% INNDATA:  
%   fri   - Signalenes sanne innfallsvinkler.  
%   vekt  - Vektingen av sensorene. (Her tilsvarer 0 tynning.)  
%   am    - Signalene og støyens amplitude.  
%   n     - Antall øyeblikksbilder.  
%  
% UTDATA:  
%   P     - P(theta)-estimatet  
%   fakse - Frekvensaksen til P.  
%   amp   - Amplitudene til d+1 største topper i P.  
%   fru   - Frekvensene til d+1 største topper i P,  
%           de d første er parameterestimatene.  
%  
% SE OGSÅ:  
%   simmv.m, simesp.m  
  
% BRUKER:  
%   damus.n, mus.m, peakn.m  
% SKREVET AV:  
%   Kjetil Dahl, Ifi Uio, 97.  
  
%Definering av innfallsvinkler til signalene:  
if ~exist('fri')  
    fri = [20 26];  
end;  
fri = (fri.*((2*pi)/360))';  
  
%Definering av antall og vekting av sensorene:  
if ~exist('vekt')  
    vekt = [1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...  
            1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]';  
end;
```

TILLEGG C. PROGRAMKODE

```
vekt = vekt(:);

%Definering av amplituder til signalene:
if ~exist('am')
    am = [10^(0 /20) 10^(0 /20) 10^(0 /20)];
end;

%Definering av antall øyeblikksbilder:
if ~exist('n')
    n = 100;
end;

%Definering av sensorposisjonene for fullt array:
delta = .5;
sens1 = length(vekt);
pos1 = (-sens1*delta/2+delta/2:delta:sens1*delta/2-delta/2)';

%Definering av sensorposisjonene om vekt gir at arrayet er
%tynnet:
j = 0;
for i = 1:length(vekt)
    if vekt(i) ~= 0
        j = j + 1;
        vekthj(j) = vekt(i);
        poshj(j) = pos1(i);
    end
end
pos = poshj(:);
vekt = vekthj(:);

%Kall av damus for å gjøre estimeringen.
[P,fakse,amp,fru] = damus(fri,am,pos,vekt,n);

%Plotting av MUSIC-spekteret med halvlogaritmisk plott.
figure(1);
plot(fakse*360/(2*pi),20*log10(abs(P)));
a = axis;a(2) = 90; a(1) = -a(2); axis(a);
title('MUSIC retningsestimering. ');
xlabel('Theta');
ylabel('P(theta) (dB)');

%Konvertering og presentering av sanne og estimerte vinkler:
fri = fri.*360/(2*pi);
fru = fru.*360/(2*pi);
disp('Sanne vinkler      ');
disp(fri);
disp('Estimerte vinkler :');
disp(fru(1:length(fru)-1));
```

C.3.2 Programmet damus.m

```

function [P,fakse,amp,fru] = damus(fri,am,pos,veking,n);
%[P,fakse,amp,fru] = damus(fri,am,pos,veking,vindu,n);
%
% damus : Denne Matlab-rutinen konstruerer de simulerte
% observasjonene som blir benyttet etter MUSIC-metoden i mus.m.
%
% INNDATA:
%   fri   - Signalenes sanne innfallsvinkler.
%   am    - Signalene og støyens amplitude.
%   pos   - Posisjonene til sensorene.
%   vekt  - Vektingen av sensorene.
%   n     - Antall øyeblikksbilder.
%
% UTDATA:
%   P     - MUSIC-spekteret
%   fakse - Frekvensaksen til P.
%   amp   - Amplitudene til d+1 største topper i P.
%   fru   - Frekvensene til d+1 største topper i P,
%           de d første er parameterestimatene.
%
% SE OGSÅ:
%   dakonv, damv.m, daesp.m

% BRUKER:
%   mus.m, peakn.m
%
% SKREVET AV:
%   Kjetil Dahl, Ifi Uio, 97.

%Utrekning og definering av størrelser.
%(c og o0 definert slik at posisjonene oppgis i bølgelengder.)
c = 1000;
o0 = 2*pi*c;
ant = 500;
d = length(fri);
fase = pi*rand(size(fri));
dt = 0.1;
str = size(pos,1);
X = zeros(str,n);

%Konstruksjon av de observerte dataene.
for tid = 1:n
    for sensor = 1:str
        for signal = 1:d
            X(sensor,tid) = X(sensor,tid) + ...
                am(signal)*exp(j*tid*dt*o0*fase(signal))*...
                exp(-j*o0*pos(sensor)*sin(fri(signal))/c)*veking(sensor);
        end;
    end;
end;

```

```
X(sensor,tid) = X(sensor,tid) + ...
sqrt(am(d+1))*2^(1/2)*randn*...
exp(i*(pi*rand-pi/2))*vektning(sensor);
end;
end;

%Definisjon av den antatt kjente støyen, som er hvit.
sig = eye(str);

%Kall av mus for å gjøre estimeringen.
[P,fakse,amp,fru] = mus(X,c,o0,pos,sig,ant);
```

C.3.3 Programmet mus.m

```
function [P,fakse,amp,fru] = mus(X,c,o0,pos,sig,ant)
% [P,fakse,amp,fru] = mus(X,c,o0,pos,sig,ant);
%
% mus : Denne rutinen finner retningene til signaler i
% støy ved bruk av MUSIC-algoritmen. Dette ved
% input X.
%
% INNDATA:
% X - Observasjonsmatrisen.
% c - Propageringshastigheten i mediet.
% o0 - Frekvensen til signalene.
% sig - Kovariansmatrisen til støyen.
% pos - Posisjonene til sensorene.
% ant - Antall sampler i skanningen over alle frekvensene.
%
% UTDATA:
% P - MUSIC-spekteret
% fakse - Frekvensaksen til P.
% amp - Amplitudene til d+1 største topper i P.
% fru - Frekvensene til d+1 største topper i P,
% de d første er parameterestimatene.
%
% SE OGSÅ:
% konv, mv.m, esp.m

% BRUKER:
% peakn.m
% SKREVET AV:
% Kjetil Dahl, Ifi Uio, 97.

%Estimering av observasjonenes kovariansmatrise.
n = size(X,2);
Rxx = 1/n*(X*X');

%Generalisert egendekomposisjon.
[AA,BB,Q,Z,Ebar] = qz(Rxx,sig);
```

```

Lambda = diag(AA)./diag(BB);

%dhatt estimeres ved inspeksjon av egenverdiene.
disp(' ');
disp('Egenverdiene er :');
disp(' ');
disp(Lambda);
dhatt = input('Skriv inn estimert antall kilder:-->');

%Konstruksjon av En.
m = size(Rxx,1);
En = zeros(m,m-dhatt);
for k = 1:m-dhatt
    [y,1] = min(abs(Lambda));
    Lambda(1) = Inf;
    En(:,m-dhatt-k+1) = Ebar(:,1);
end;
En = sig * En;
EnEn = En*En';

%Skanning av MUSIC-spekteret over frekvensintervallet.
t = 0;
a = zeros(size(pos));
for th = -pi/2:pi/ant:pi/2
    t = t + 1;
    a = exp(-j*o0*pos*sin(th)/c);
    P(t) = (a'*a)/(a'*EnEn*a);
end;

%Lokalisering av toppene.
fakse = (-pi/2:pi/ant:pi/2)';
[amp,fru] = peakn(abs(P'),fakse,dhatt+1);

%Finskanning omkring de dhatt høyeste toppene.
for k = 1:dhatt
    t = 1;
    while ((fru(k)+pi/(ant*5^(t-1))) ...
        - (fru(k)-pi/(ant*5^(t-1)))) > 1e-14
        te = 0;
        for th = fru(k)-pi/(ant*5^(t-1))...
            :2*pi/(ant*10*5^(t-1)):fru(k)+pi/(ant*5^(t-1))
            te = te + 1;
            a = exp(-j*o0*pos*sin(th)/c);
            PE(te) = (a'*a)/(a'*EnEn*a);
        end;
        fE = (fru(k)-pi/(ant*5^(t-1))...
            :2*pi/(ant*10*5^(t-1)):fru(k)+pi/(ant*5^(t-1)))';
        [amp(k),fru(k)] = peakn(abs(PE'),fE,1);
        t = t + 1;
    end;
end;

```



```
end;

%Sortering av parameterne.
fru(1:dhatt) = sort(fru(1:dhatt));
```

C.4 Kode til algoritmen for ESPRIT

Her følger de tre programmene benyttet til ESPRIT-estimeringen. Stammen for programnavnene ble her valgt som `esp`

C.4.1 Programmet `simesp.m`

```
function [fru,fri] = simesp(fri,vekt,am,n);
% function [fru,fri] = simesp(fri,vekt,am,n);
%
% simesp : Denne Matlab-rutinen setter opp parameterne til og
% plotter resultatet av en simulering av estimering av
% innfallsvinkler ved ESPRIT-metoden.
%
% INNDATA:
%   fri - Signalenes sanne innfallsvinkler.
%   vekt - Vektingen av sensorene. (Her tilsvarer 0 tynning.)
%   am - Signalene og støyens amplitude.
%   n - Antall øyeblikksbilder.
%
% UTDATA:
%   fru - De d parameterestimatene.
%
% SE OGSÅ:
%   simkonv, simmv.m, simmus.m.

% BRUKER:
%   daesp.m, esp.m
% SKREVET AV:
%   Kjetil Dahl, Ifi Uio, 97.

%Definering av innfallsvinkler til signalene:
if ~exist('fri')
    fri = [20 26];
end;
fri = fri(:).*((2*pi)/360);

%Definering av antall og vekting av sensorene:
if ~exist('vekt')
    vekt = [1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]';
end;

%Definering av amplituder til signalene:
```

```
if ~exist('am')
    am = [10^(0 / 20) 10^(0 / 20) 10^(0 / 20)];
end;

%Definering av antall øyeblikksbilder:
if ~exist('n')
    n = 100;
end;

D = .5;
delta = D;
sens = size(vekt,1);
pos = (-sens*delta+delta:2*delta:sens*delta-delta)';

%Definering av sensorposisjonene om vekt gir at arrayet er
%tynnet:
oprvekt = vekt;
j = 0;
for i = 1:length(vekt)
    if vekt(i) ~= 0
        j = j + 1;
        vekthj(j) = vekt(i);
        poshj(j) = pos(i);
    end
end
pos = poshj(:);
vekt = vekthj(:);

%Kall av daesp for å gjøre estimeringen.
fru = daesp(D,fri,am,pos,oprvekt,vekt,n);

polar(fru,ones(size(fru)),'o');
hold on;
polar(fri,ones(size(fri)),'x');
hold off;

fri = fri.*360/(2*pi);
fru = fru.*360/(2*pi);

disp('Input :');
disp(fri);
disp('Output :');
disp(fru);
```

C.4.2 Programmet daesp.m

```
function fru = daesp(D,fri,am,pos,oprvekt,vekt,n);
%fru = daesp(D,fri,am,pos,oprvekt,vekt,n);
%
```

TILLEGG C. PROGRAMKODE

```
% daesp : Denne Matlab-rutinen konstruerer de simulerte
% observasjonene som blir benyttet etter ESPRIT-metoden i esp.m.
%
% INNDATA:
%   D      - Avstanden innbyrdes mellom sensorene i par.
%   fri     - Signalenes sanne innfallsvinkler.
%   am     - Signalene og støyens amplitude.
%   pos    - Posisjonene til sensorene.
%   oprvekt - Den opprinnelige vektingen av sensorene.
%           (Her tilsvarer 0 tynning.)
%   vekt   - Vektingen av sensorene.
%   n      - Antall øyeblikksbilder.
%
% UTDATA:
%   fru    - De estimerte innfallsvinklene, parameterne.
%
% SE OGSÅ:
%   dakonv.m, damv.m, damus.m

% BRUKER:
%   esp.m
%
% SKREVET AV:
%   Kjetil Dahl, Ifi Uio, 97.

%Utregning og definering av størrelser.
%(c og o0 definert slik at posisjonene oppgis i bølgelengder.)
c = 1000;
o0 = 2*pi*c;
d = length(fri);
fase = pi*rand(size(fri));
dt = 0.05;
m = size(pos,1);
Xp = zeros(m,n);
Yp = zeros(m,n);

%Konstruksjon av de observerte dataene.
for tid = 1:n
    for sensor = 1:m
        for signal = 1:d
            Xp(sensor,tid) = Xp(sensor,tid) + ...
                am(signal)*exp(j*tid*dt*o0*fase(signal))...
                *exp(j*o0*pos(sensor)*sin(fri(signal))/c);
            Yp(sensor,tid) = Yp(sensor,tid) + ...
                am(signal)*exp(j*tid*dt*o0*fase(signal))...
                *exp(j*o0*pos(sensor)*sin(fri(signal))/c)*...
                exp(j*o0*D*sin(fri(signal))/c);
        end;
        Xp(sensor,tid) = Xp(sensor,tid) + ...
            sqrt(am(d+1))*2^(1/2)*randn*...
```

```

        exp(i*(pi*rand-pi/2))*vekt(sensor);
        Yp(sensor,tid) = Yp(sensor,tid) + ...
        sqrt(am(d+1))*2^(1/2)*randn*...
        exp(i*(pi*rand-pi/2))*vekt(sensor);
    end;
end;

%Konstruksjon av Z slik at sensorer som har mulighet til det
%blir benyttet i to parkonstellasjoner.
til = 0;
tel = 0;
for k = 1:(length(oprvekt)-1),
    if (oprvekt(k))
        til = til + 1;
        tel = tel + 1;
        X(til,:) = Xp(tel,:);
        Y(til,:) = Yp(tel,:);
    end;
    if (oprvekt(k))*(oprvekt(k+1))
        til = til + 1;
        X(til,:) = Yp(tel,:);
        Y(til,:) = Xp(tel+1,:);
    end
end
if (oprvekt(length(oprvekt)))
    til = til + 1;
    tel = tel + 1;
    X(til,:) = Xp(tel,:);
    Y(til,:) = Yp(tel,:);
end;
str = size(X,1);
Z = [X ; Y];

%Definisjon av den antatt kjente støyen, som er hvit.
sig = eye(2*str);

%Kall av esp for å gjøre estimeringen.
fru = esp(Z,c,D,o0,sig);

```

C.4.3 Programmet esp.m

```

function fru = esp(Z,c,D,o0,sig)
%fru = esp(Z,c,D,o0,sig);
%
% esp : Denne rutinen finner retningene til signaler i støy ved
% bruk av ESPRIT-metoden. Dette ved observasjonene Z.
%
% INNDATA:
%   Rzz - Kovariansmatrisen.
%   c   - Propageringshastigheten i mediet.

```

TILLEGG C. PROGRAMKODE

```
% o0 - Frekvensen til signalene.
% sig - Kovariansmatrisen til støyen.
%
% UTDATA:
% fru - De estimerte innfallsvinklene, parameterne.
%
% SE OGSÅ:
% mv.m, mus.m

% BRUKER:
%
% SKREVET AV:
% Kjetil Dahl, Ifi Uio, 97.

%Estimering av observasjonenes kovariansmatrise.
n = size(Z,2);
Rzz = 1/n*(Z*Z');

%Generalisert egendekomposisjon.
[AA,BB,Q,Z,Ebar] = qz(Rzz,sig);
Lambda = diag(AA)./diag(BB);

%dhatt estimeres ved inspeksjon av egenverdiene.
disp(' ');
disp('Egenverdiene er :');
disp(' ');
disp(Lambda);
dhatt = input('Skriv inn estimert antall kilder-->');

%Konstruksjon av Es.
str = size(Rzz,1)/2;
Es = zeros(2*str,dhatt);
for k = 1:dhatt
    [y,1] = max(abs(Lambda));
    Es(:,k) = Ebar(:,1);
    Lambda(1) = 0;
end;
Es = sig * Es;

%Matriseregning for å finne parameterne.
Ex = Es(1:str,:);
Ey = Es(str+1:2*str,:);
Eprod = [Ex' ;Ey']*[Ex Ey];
[U,S,V] = svd(Eprod);

%Finner en E,deretter E12 og E22.
%(U og V er her identiske nesten ned til maskinnøyaktighet.)
E = .5*(U+V);
E12 = E(1:dhatt,dhatt+1:2*dhatt);
E22 = E(dhatt+1:2*dhatt,dhatt+1:2*dhatt);
```

```
%Finner parameterne.  
P = -E12*inv(E22);  
phatt = eig(P);  
fru = asin(c*angle(phatt)/(o0*D));  
  
%Sortering av parameterne.  
fru = sort(fru);
```

C.5 Programmet peak.m

Kode til algoritme som plukker maksimalpunktene. I dette delkapitlet presenteres koden til `peakn.m`, som brukes av flere alle metodene bortsett fra ESPRIT. Denne algoritmen plukker posisjon og amplitude til et visst antall maksimalpunkter på en funksjon.

```
function [amp,pos] = peakn(Y,f,ant);  
% [amp,pos] = peakn(Y,f,ant);  
%  
% peakn : Denne rutinen har som inndata en funksjon, en  
% tilhørende akse og et heltall. Heltallet angir det antall  
% av de største maksimalpunktene på funksjonen som skal leveres  
% som utdata, angitt ved posisjon på skalaen og amplitude.  
%  
%INNDATA:  
% Y - Funksjon det skal plukkes topper på.  
% f - Aksen til sekvensen.  
% ant - Antall topper som skal plukkes.  
%  
%UTDATA:  
% pos - Toppenes posisjon på aksen.  
% amp - Toppenes amplitude.  
  
% BRUKER:  
%  
% SKREVET AV:  
% Kjetil Dahl, Ifi Uio, 97.  
  
Y = abs(Y);  
lng = length(Y);  
t = 1;  
if (Y(1) > Y(2))*(Y(1) > Y(lng))  
    topp(t) = f(1);  
    amphj(t) = Y(1);  
    t = t + 1;  
end;  
if (Y(lng) > Y(1))*(Y(lng) > Y(lng-1))  
    topp(t) = f(lng);  
    amphj(t) = Y(lng);
```

```
t = t + 1;
end;
for k = 2:lng-1
    if (Y(k) > Y(k+1))*(Y(k) > Y(k-1))
        topp(t) = f(k);
        amphj(t) = Y(k);
        t = t + 1;
    end;
end;

if ~exist('topp')
    disp('Inne!');
    if (Y(1) >= Y(2))*(Y(1) >= Y(lng))
        topp(t) = f(1);
        amphj(t) = Y(1);
        t = t + 1;
    end;
    if (Y(lng) >= Y(1))*(Y(lng) >= Y(lng-1))
        topp(t) = f(lng);
        amphj(t) = Y(lng);
        t = t + 1;
    end;
    for k = 2:lng-1
        if (Y(k) >= Y(k+1))*(Y(k) >= Y(k-1))
            topp(t) = f(k);
            amphj(t) = Y(k);
            t = t + 1;
        end;
    end;
end;
pos = zeros(ant,1);
amp = zeros(ant,1);
in = zeros(ant,1);
for k = 1:ant
    [amp(k),in(k)] = max(amphj);
    pos(k) = topp(in(k));
    amphj(in(k)) = -Inf;
end;
```

Bibliografi

- [Capon 69] J. Capon,
“High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis”
Proceedings of the IEEE,
vol. 57, s. 1408-1418, 1969
- [Elgetun 96] B. Elgetun,
“Optimization of response from 2D arrays for medical ultrasound”
Hovedoppgave, Universitetet i Oslo, Institutt for informatikk
May, 1996
- [Golub 83] G. H. Golub og C. F. van Loan,
“Matix Computations”
John Hopkins University Press,
Baltimore, 1983
- [Holm 96] S. Holm, L. Ødegård, E. Halvorsen, B. Elgetun og F. Teigen,
“ULTRASIM-User’s Manual for Functions ver 1.0, Program for Simulation
of Ultrasonic Fields”
Universitetet i Oslo, Institutt for informatikk,
16. August, 1996
- [Holm 97] S. Holm, B. Elgetun og G. Dahl,
“Properties of the Beampattern of Weight- and Layout-Optimized Sparse
Arrays”
Antatt til *IEEE Trans. Ultrasonics*,
Spesialutgivelse om transusere, Sommer 1997
- [Johnson 82] D. H. Johnson og S. DeGraaf,
“Improving the resolution of bearing in passive sonar arrays by eigenvalue
analysis”
IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing,
vol. ASSP-30, s. 638-647, Aug. 1982
- [Johnson 93] D. H. Johnson og D. E. Dudgeon,
“Array Signal Porcessing: Concepts and Techniques”
Prentice - Hall, Englewood Cliffs,
N. J., 1993
- [Kay 88] S. M. Kay,
“Modern Spectral Estimation”
Prentice - Hall, Englewood Cliffs,
N. J., 1988

BIBLIOGRAFI

- [Larsen 86] R. J. Larsen og M. L. Marx,
“An Introduction to Mathematical Statistics and its Applications”
Prentice - Hall, Englewood Cliffs,
N. J., 1986
- [Lawson 74] C. L. Lawson og R. J. Hanson,
“Solving Least-Squares Problems”
Prentice - Hall, Englewood Cliffs,
N. J., 1974
- [Lyche 92] T. Lyche,
“Numerical Linear Algebra”
Kompendium nr. 18,
Universitetet i Oslo, Institutt for informatikk,
Mai, 1992
- [Mendel 87] J. M. Mendel “Lessons in Digital Estimation Theory”
Prentice - Hall, Englewood Cliffs,
N. J., 1987
- [Pisarenko 73] V. F. Pisarenko,
“The Retrieval of Harmonics From a Covariance Function”
Geophys. J. Roy. Astron. Soc.,
vol. 33, s. 247-266, 1973
- [Oppenheim 89] A. V. Oppenheim og R. W. Schafer,
“Discrete-Time Signal Processing”
Prentice - Hall, Englewood Cliffs,
N. J., 1989
- [Rao 92] D. Rao og K. S. Arun,
“Model Based Processing of Signals: A State Space Approach”
Proceedings of the IEEE,
vol. 80, s. 283-309, Februar 1992
- [Roy 85] R. Roy, A. Paulraj og T. Kailath,
“Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques –
ESPRIT”
Proc. 19th Asilomar Conf. Circuits, Syst. Comput.,
Asilomar, CA, Nov. 1985
- [Roy 86] R. Roy, A. Paulraj og T. Kailath,
“ESPRIT — A Subspace Rotational Approach to Estimation of Parameters
of Cisoids in Noise”
IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing,
vol. ASSP-34, s. 1340-1342, Oktober 1986
- [Roy 87] R. Roy
“ESPRIT — Estimation of Signal Parameters Via Rotational Invariance
Techniques”
Dr. avhandling
Stanford Univ. Stanford, CA, 1987

- [Roy 89] R. Roy og T. Kailath,
“ESPRIT — Estimation of Signal Parameters Via Rotational Invariance
Techniques”
IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing,
vol. ASSP-37, s. 984-995, July 1989
- [Schjær-Jacobsen 76] H. Schjær-Jacobsen og K. Madsen,
“Synthesis of Nonuniformly Spaced Arrays Using a General Nonlinear Mi-
nimax Optimization Method”
IEEE Trans. Antennas Propag.,
vol. AP-24, s. 501-506, Juli 1976
- [Schmidt 79] R. O. Schmidt,
“Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation”
Proc. RADC Spectral Estimation Workshop
s. 243-258
Rome, NY, 1979
- [Shanan 89] S. S. Shanan og C. A. Pomalaza-Raez,
“The use of nonuniform element spacing in array processing algorithms”
J. Acoustical Society of America,
vol. 86, No. 4, s. 1416-1418, Oktober 1989
- [Swingler 89] D. N. Swingler og R. S. Walker,
“Line-Array Beamforming Using Linear Prediction for Aperture Inter-
polation and Extrapolation”
IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing,
vol. ASSP-37, s. 16-30, Januar 1989

Figurer

2.1	Prinsippskisse av lineært array.	13
3.1	Strålingsdiagram for borderline sampling.	18
3.2	Resultat av innfallsvinkelvariasjon.	20
3.3	Differansen mellom de eksponensiale faktorene.	21
3.4	Plottene ved MUSIC og egenverdimetodene.	29
3.5	Prinsippskisse av array anvendelig til ESPRIT.	31
3.6	Illustrering av egenverdiene til $\{\hat{\mathbf{R}}_{XX}, \mathbf{\Sigma}_n\}$	36
3.7	Illustrering av estimering av d ved bruk av forskjellige \hat{d}	37
3.8	Metodenes spektre.	38
3.9	Metodenes spektre.	39
5.1	Skisse av mulige $P(\theta)$ -intervaller.	43
5.2	Prinsippskisse for finskanning.	44
5.3	Skisse for algoritmene	45
6.1	Visualisering av realdelen av støyrommet.	50
6.2	Visualisering av imaginærdelen av støyrommet.	51
6.3	Visualisering av 2. komponenten av \mathbf{E}_N	52
6.4	Visualisering av 3. komponenten av \mathbf{E}_N	53
6.5	Histogram av resultatene fra tabell 6.2.	55
6.6	Histogram av resultatene fra tabell 6.3.	56
6.7	Histogram av resultatene fra tabell 6.4.	58
6.8	Histogram av resultatene fra tabell 6.6.	60
6.9	Histogram av resultatene fra tabell 6.7.	61
6.10	Histogram av resultatene fra tabell 6.8.	62
6.11	Histogram av resultatene fra tabell 6.9.	63
6.12	Histogram av resultatene fra tabell 6.10.	65
6.13	Histogram av resultatene fra tabell 6.11.	65
6.14	Histogram av resultatene fra tabell 6.12.	67
6.15	Histogram av resultatene fra tabell 6.13.	68
6.16	Simuleringsresultat uten amplitudedifferanse.	69
6.17	Simuleringsresultat med amplitudedifferanse.	70
7.1	MUSIC-spekteret ved estimering med fullt array.	72
7.2	Den opprinnelige, utynnede arrayet.	72
7.3	MUSIC-spekteret ved estimering med det tynnede arrayet.	73
7.4	Samme array med annenhver sensor tynnet bort.	73
7.5	Illustrasjon av to sensorer med innfallende signaler	74

7.6	Trigonometribetraktningene.	75
7.7	Illustrasjon av array	76
7.8	Plotting ved tilfeldig tynnet array	77
7.9	Histogram av resultatene fra tabell 7.1.	78
7.10	Histogram av resultatene fra tabell 7.2.	79
7.11	Illustrasjon av 10-elementers array	79
7.12	Plotting av sterkt tilfeldig tynnet array	81
7.13	Histogram av resultatene fra tabell 7.3.	82
7.14	Illustrasjon av array	82
7.15	Illustrasjon av array	82
7.16	Plotting av ekstremt tynnet array	83
7.17	Illustrasjon av optimalt array	83
7.18	Plotting av strålingsdiagrammet til optimalt tynnet array	85
7.19	Histogram av resultatene fra tabell 7.5.	86
8.1	Strålingsdiagram til to 15-elementers array.	88
8.2	Sensorenes posisjoner.	89
8.3	Illustrasjon av MUSIC-estimering.	90
8.4	Strålediagram til to 15-elementers array.	92
8.5	Illustrasjon av MUSIC-estimering.	93
9.1	Eksempel på estimering ved utynnet og svært tynnet array.	95
9.2	Eksempel på mislykket estimering ved liten tynning.	96
9.3	Det tynnede arrayet.	97
9.4	Eksempel på variasjon av antall øyeblikksbilder.	97
9.5	Prinsippskisse av et signal/støyrom.	100
9.6	Signalet uten støy, $x^{id}(t)$	101
9.7	Signalet med støy, $x(t)$	102
9.8	Signalet modellert med AR-modell.	103

Tabeller

6.1	Gjennomsnittlig kjøringstid.	49
6.2	32-elementers array med 6° vinkeldifferanse.	54
6.3	32-elementers array ved 2° vinkeldifferanse.	56
6.4	32-elementers array ved 1.25° vinkeldifferanse.	57
6.5	ESPRIT estimater ved små vinkeldifferanser.	59
6.6	4-elementers array ved 30° vinkeldifferanse.	59
6.7	4-elementers array ved 20° vinkeldifferanse.	62
6.8	4-elementers array ved 10° vinkeldifferanse.	63
6.9	4-elementers array ved 5° vinkeldifferanse.	64
6.10	30° vinkeldifferanse og forskjellige amplituder.	66
6.11	20° vinkeldifferanse og forskjellige amplituder.	66
6.12	10° vinkeldifferanse og forskjellige amplituder.	67
6.13	5° vinkeldifferanse og forskjellige amplituder.	68
7.1	32-elementers tynnet array med 16 gjenværende elementer.	76
7.2	32-elementers tynnet array med 16 gjenværende elementer.	80
7.3	32-elementers tynnet array med ti gjenværende elementer.	80
7.4	32-elementers tynnet array med fire gjenværende elementer.	84
7.5	Vinkeldifferanse 6° og optimal tynning.	84
7.6	Vinkeldifferanse 2° og optimal tynning.	86
8.1	Resultater med ikke-uniform elementavstand.	91
8.2	MUSIC estimering med Hammingvindu.	92