UiO : Matematisk institutt
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Mini-tsunamien i Oslofjorden og effekter av skip som passerer over en dybdeendring

Aurora Natalie Skare-Haavaag

Masteroppgave, våren 2021

Denne masteroppgaven er levert inn under masterprogrammet *Mekanikk*, studieretning *Mekanikk*, ved Matematisk institutt, Universitetet i Oslo. Oppgaven er normert til 60 studiepoeng.

Forsiden viser et utsnitt av rotsystemet til den eksepsjonelle liegruppen E_8, projisert ned i planet. Liegrupper ble oppfunnet av den norske matematikeren Sophus Lie (1842–1899) for å uttrykke symmetriene til differensiallikninger og spiller i dag en sentral rolle i flere deler av matematikken.

Sammendrag

Denne oppgaven undersøker effekten av skip som beveger seg over en dybdeendring. Fenomenet blir illustrert ved beregninger av mini-tsunamien i Oslofjorden. Cruiseferger som beveger seg inn i en grunnere del av fjorden skaper lange, tsunami-liknende bølger. En bølgehøyde på opptil 1.4 m er observert. Bølgene medfører skade på bebyggelse og erosjon av strender. Metode og resultater presentert av Grue (2020) reproduseres, til en lavere ordens nøyaktighet. En sammenheng mellom normalhastigheten og hastighetspotensialet fås ved bruk av en Fourier-transform for å invertere integrallikningene. Alle beregningene er lineære. Så fort skipets baug når dybdeendringen oppstår det en hevning av havoverflaten foran skipet. Vannet som normalt skyves ned mot den flate havbunnen vil nå møte på en helning på den nye vanndybden og bli sendt tilbake normalt fra bunnvariasjonen. Beregningene stemmer med observasjoner. Metoden brukes videre til å undersøke skip som seiler inn på en lengre grunne hvor det lokale Froude-tallet er i det transkritiske regimet. Beregningene blir gjennomført for en veldig vid kanal slik at bølgene ikke reflekteres fra kanalveggen. Et bølgemønster utvikles, og brer seg sideveis med tiden. Bølgen som forplanter seg oppstrøms for skipet er stasjonær. Bølgens posisjon relativt til skipet er konstant og bølgen brer seg til siden i en slags "V" form. Vinkelen hovedbølgen brer seg ut med blir mindre med økende Froude-tall. Størrelsen på responsen er påvirket av en variasjon i størrelsen på dybdeendringen.

Takk og annerkjennelse

Først og fremst vil jeg si tusen takk til min veileder John Grue. Takk for utallige Zoom-møter og telefonsamtaler. Takk for at du hadde troen på meg. Tusen takk for all inspirasjon og engasjement.

En takk går selvfølgelig også til mine fine venner Per, Vivian og Vegard fra Statistikk. Takk for mange morsomme minner fra lesesalen i 11 etasje, uendelige mange søte kattebilder og støttende ord. Takk til gjengen fra årsenhet i realfag som gjorde det første året mitt på UiO helt magisk og inspirerte meg til å fortsette. Takk til kollektivet på Sogn Studentby for å berike en ellers kjedelig hverdag under koronapandemiens værste måneder.

Takk til de beste kattene i verden, Poden og Småpus, som ikke kunne brydd seg mindre om denne oppgaven. En enorm takk går også til Pappa, som alltid har stillt opp med sjokolade. Tusen takk til Daniel, som har laget middag og fått meg på andre tanker. Og selvfølgelig takk til Astrid og Maria, som begge har hørt på store mengder klaging.

Til slutt vil jeg takke både Klaus og Styrk som tok seg tid til å lese opptil flere utkast av denne oppgaven og som begge bistod med tilbakemeldinger og oppmuntring i innspurten.

Aurora Skare-Haavaag
Oslo, 18. Mai 2021

Innhold

KAPITTEL 1

Introduksjon

1.1 Motivasjon og problemstilling

1.1.1 Hva er en tsunami?

Hva er egentlig en tsunami? Ordet "tsunami" er japansk, hvor "tsu" kan oversettes som "havn" og "nami" som "bølge". En tsunami er en bølge du ser i havnen. Vanligvis forbindes tsunamier med svært store bølger. Alle vannbølger er avhengig av vanndybden de forplanter seg i, og oppfører seg forskjellig i dypt vann og grunt vann. Oppløpet i en havn demper hastigheten til bølgen samtidig som den øker bølgehøyden, derav en tsunamibølge.

Tsunamier kan ha ulike genereringsmekanismer. Dette påvirker blant annet hvordan energien overføres til fluidet og gjør at tsunamiens årsak har noe å si for bølgens karakteristikk. Mest kjent er tektoniske tsunamier, grunnet undevannsjordskjelv. Jorskjelvene fører til enorme bølger, ofte flere hundre kilometer lange. En serie slike undersjøiske jordskjelv forårsaket en rekke tsunamier i Indiahavet i 2004. Mest kjent er bølgen som traff Thailand med en høyde på oppmot 11m (Rossetto mfl. 2007). Over 280 000 mennesker mistet livet (Lay mfl. 2005). Med en gjennomsnittlig vanndybde på 4000m, beregner Glimsdal mfl. (2013) en bølgehøyde på rundt 0.7m når bølgen forplantet seg over Stillehavet. På tilsvarende vis forårsaket et undersjøisk jordskjelv i 2011 den største tsunamien registrert i Japans historie. I følge Suppasri mfl. (2013) ble tsunamien varslet 3 minutter etter jordskjelvet inntraff. Likevel medførte en feil i beregningen av bølgehøyden at mange stilte uforberedt.

En annen mindre utbredt type tsunami er forårsaket av skred. Disse bølgene har generelt mindre perioder og bølgelengder, men kan ha store lokale effekter, i motsetning til de større jordskjelv-tsunamiene som forplanter seg lange distanser før de når land. Disse mindre tsunamiene kan være like farlige, ettersom de er svært vanskelige å forutse og generelt mer kompliserte å modellere (Didenkulova, Pelinovsky og Soomere 2011). En potensiell slik bølge ble illustrert i den norskproduserte filmen "Bølgen". Her var de inspirert av et potensielt skred fra Åkerneset i Møre og Romsdal. Skredet er beregnet å forårsake en flodbølge som kan ramme opptil flere tettsteder i området. I 1998 traff en 15m høy slik bølge Papua New Guinea. Glimsdal mfl. (2013) forklarer at tsunamien først ble antatt å være forårsaket av et jorskjelv. Da forsøk på å modellere dette ga altfor lave bølgeamplituder begynte mistanken å falle på et skred. Jorskjelvet var årsaken til skredet, men kunne ikke ha forårsaket den største bølgen.

En tredje kategori av havnebølger er meteorologiske tsunamier, generert av variasjoner i lufttrykk som beveger seg over hav med en varierende bunn. Bølgene er ofte omtalt som meteotsunamier, og er av en mye mindre skala enn den klassiske jordskjelv-tsunamien. På samme måte som vanlige tsunamier har de lave amplituder og lange perioder ute på havet, men forsterkes kraftig inn mot land. Monserrat, Vilibić og Rabinovich (2006) viser hvordan disse tsunamiene kan ha tilsvarende periode og skalert lengde som tsunamier forårsaket av jordras. Pattiaratchi og Wijeratne (2015) bemerker at selv om disse bølgene ikke har like stort skadeomfang, inntreffer de mye oftere.

I denne oppgaven skal det sees på en fjerde kategori av tsunamier, nemlig mini-tsunamier. Fenomenet ble først forklart av Grue (2017). Disse bølgene forårsakes av skip som beveger seg over en dybdeendring. Mini-tsunamier kan føre til erosjon av strender og lignende.

1.1.2 Tsunamien i Oslofjorden

I 2017 publiserte NRK en episode av radioprogrammet *Ekko - NRK Radio* om store tsunami-liknende bølger observert i Oslofjorden, etterfulgt av dokumentarartikkelen *Tsunamien i Oslofjorden*. Bølgene er observert langs kysten med perioder på 30-60 s. Med lengder på 0.5-1.0 km brer de seg utover den 2-3 km brede fjorden. Bølgene forplanter seg med gruntvanns-hastigheten og oppfører seg som en mini-tsunami. Bølgehøyder på opptil 1.4 m er blitt målt (Grue 2020). NRK dokumenterer kyst-beboerenes frustrasjon grunnet i skadene bølgene forårsaker. De forklarer at introduksjonen av Color Lines nyeste cruiseferger i 2004 medførte problemet. De nye fergene er verdens største av sin type, og er flere titalls meter lengere enn eldre ferger. Grue (2017) forsøker å forklare det nye bølgefenomenet i Oslofjorden, og viser til beregninger som er i god overenstemmelse med observasjonene. Kart over bunntopografien i Oslofjorden avslører en 700m lang hylle med en dybdeendring på 32 m, før cruisefergene seiler inn ved Flaskebekk. Grue (2017) beskriver hvordan veldig lange bølger blir generert når et skip beveger seg over en dybdeendring. Som for havbunnen i Oslofjorden, er dybdeendringen sammenlignbar med den gjennomsnittlige og relativt grunne vanndybden. I Grue (2020) blir teoretiske og numeriske beregninger for en ekte skipsgeometri presentert. I tillegg blir en tolkning av genereringsprosessen til fenomenet forklart. Hastighetsfeltet rundt skipet produserer en ny reaksjonshastighet, eller “anti-hastighet”, ved dybdeendringen. Reaksjonshastigheten er normal på den nye havbunnen og skaper en vertikal hastighet ved havoverflaten som genererer bølgene. Effekten skjer i hovedsak når baug og hekk passerer dybdeendringen.

Figur 1.1: Mini-tsunamien i havnen på Flaskebekk. Bildet er tatt av Tore Henning Larsen.

1.1.3 Problemstilling

I denne oppgaven vil vi undersøke effekter av skip som beveger seg over en dybdeendring. For å gjøre dette ser vi på mekanismen bak mini-tsunami fenomenet i Oslofjorden, i tillegg til metode og resultater presentert av Grue (2020). Videre vil vi bruke dette til å undersøke hva som skjer når et skip beveger seg over en dybdeendring som gir et lokalt Froude-tall i det transkritiske regimet.

1.2 Tidligere arbeid

1.2.1 Froude-tallet

Froude-tallet er en dimensjonsløs størrelse som betegner forholdet mellom treghetskrefter og tyndgekrefter. Froude-tallet basert på den lokale vanndybden blir sentral gjennom hele oppgaven, og vi bruker derfor forholdet mellom skipshastigheten og gruntvannshastigheten,

$$Fr = U/\sqrt{gh} \tag{1.1}$$

hvor U er skipets hastighet, g er tyngdeakselerasjonen og h er den typiske vanndybden. Vi skal undersøke bølger dannet av skip som beveger seg i det transkritiske regimet, det vil si rundt $Fr = 1$, når skipet reiser med samme hastighet som bølgene.

I 1978 beskriver E. Tuck (1978) hydrodynamiske utfordringer knyttet til skip i begrensede farvann, og historien bak stagnasjonen i utviklingen på området.

Tuck påpekte at datidens voldsomme økning i skipsstrørrelser har ført med seg helt nye problemer. Han bruker en analogi til aerodynamikken, hvor gruntvannshastighetens ekvivalent er lydens hastighet. Froude-tallet blir sammenlignet med aerodynamikkens Mach-tall, siden de begge betegner forholdet mellom fartøyets hastighet og bølgehastigheten i mediet. I begge tilfeller bryter lineær teori sammen når dette forholdet nærmer seg 1, i aerodynamikkens tilfelle er dette kjent som det å "bryte lydmuren".

Torsvik, Dysthe og Pedersen (2006) ser på skip i grunt vann for varierende Froude-tall. Dette kan gjøres ved å variere vanndybden h, men også ved å varierere skipshastigheten U. Beregninger er gjort i en dimensjon. En oppstrøms bølge genereres, avhengig av varigheten til hastighets- eller dybdeendringen. Er tidsrommet stort genereres en større bølge.

1.2.2 Skip i begrenset fluid

En rekke artikler beskriver skip i bevegelse i begrensede farvann, som eksempelvis skip i grunne fjorder og laguner. Constantine (1960) presenterte teoretiske betraktninger på området og viste til tre distinkte hastighetsområder, subkritisk, kritisk og superkritiske hastigheter. I subkritiske og superkritiske områder oppnås en jevn bevegelsestilstand relativt til skipet. I det kritiske regime derimot, vil en mengde fluid bygge seg opp foran skipet, i form av en undulerende bølge. Resultatene ble bekreftet eksperimentelt ved modelltester.

Også R. F. Beck, Newman og E. O. Tuck (1975) så på jevn bevegelse av skip i en idealisert kanal med et rektangelformet tversnitt. Skipet ble tilnærmet ved en antagelse om et slankt skip (hvor dypgang og lengde er mye større enn bredden) og ved en kildefordeling. En grunnere region på hver sin side av kanalen gjør at subkritiske beregninger går over i det superkritiske regimet ved kanal-veggen. En slik kanal blir også undersøkt numerisk av Torsvik, Pedersen og Dysthe (2009), ved bruk av COULWAVE modellen. Oppstrømsbølger brer seg på tvers av kanalen i en tilnærmet rett linje, til tross for dybdeendringen. Mei (1986) bruker også et slankt skip og ser på solitonegenerering i det transkritiske regimet. Det blir funnet at skipet skaper solitoner oppstrøms, til og med når kanalens bredde er av samme orden som skipets lengde, det vil si mye bredere enn skipets bredde (grunnet slankt skip tilnærming).

Pedersen (1988) tar for seg forstyrrelser i form av en trykkfordeling, en kildefordeling og en tidsavhengig bunntopografi. Et lignende bølgemønster blir observert for alle tre tilfeller. Kildefordelingen tilsvarer representasjonen av et slankt skip brukt av Mei (1986). Det er sett på forstyrrelser i både et ubegrenset fluid og i en bred kanal. Svakt superkritiske tilfeller er modellert basert på numeriske løsninger av et tre-dimensjonalt sett med ikke-lineære Boussinesq type likninger. I vid kanal blir solitonenes refleksjon ved sideveggene tatt i betraktning. Dette gir grunnlag for tvil rundt blokk koeffisienten (A/Wh, hvor A er tverrsnitts arealet av skipet, W er kanalens bredde og h er kanalens dybde) som en ledende parameter for vide kanaler. For såvidt superkritiske Froude-tall blir det funnet et stasjonært bølgemønster. I motsetning til de lineære resultatene oppstår den ledende bølgen foran forstyrrelsen.

Li og Sclavounos (2002) ser på ikke-lineære lange bølger generert av en forstyrrelse i grunt vann. Forstyrrelsen er modellert som en trykkfordeling og som et slankt skip. Balansen mellom ikke-linearitet og dispersive effekter for lange bølger forårsaker generering av solitoner som reiser oppstrøms foran forstyrrelsen. Bevegelse ved subkritisk, kritisk og superkritiske hastigheter blir undersøkt. I alle tre tilfeller blir det observert tre-dimensjonale, solitære bølger oppstrøms for forstyrrelsen. Bølgekammen til solitonene er nesten perfekte parabler. Det blir funnet at parabelenes krumning avtar med tiden. Solitonene oppstrøms løsner ikke fra forstyrrelsen for det superkritiske tilfellet, til forskjell fra kritiske og subkritske beregninger.

1.2.3 Påvirkning fra hurtigferger og skipstrafikk

De siste årene har det blitt dokumentert en rekke tilfeller verden over, hvor hurtigferger og skipstrafikk har hatt innvirkning på diverse aspekter ved omgivelsene. I mange tilfeller dreier det seg om bølger av lik størrelseorden som mini-tsunamien observert i Oslofjorden. I tillegg, er det rapportert lignende miljøskader, blant annet erosjon av strender. Flere artikler har gjennomført numeriske beregninger, ofte ved bruk av langbølge teori, og sammenlignet med observasjoner og eksperimentell data i håp om å forklare dette nyere bølgefenomenet.

Under høysesongen i Tallinn-bukta betjener hurtigfergene Tallinn - Helsinki ruten opp til 50 ganger om dagen. Hurtigferger er kjent for å generere skipsbølger med uvanlig lange perioder. I følge Soomere (2005) utgjør disse bølgene minst 5-8% av den totale bølgeenergien og rundt 18-35% av bølgekraften i området. Torsvik og Soomere (2008) analyserte egenskaper ved bølgene i Tallinn-bukta numerisk, ved bruk av en Boussinesq type gruntvannsmodell (COULWAVE). Den variable bunnen gjør at hurtigfergene går over i det superkritiske regimet ($Fr > 1$), hvor de største bølgene blir generert. Det blir beregnet en maksimums bølgehøyde på opptil 3m. Didenkulova, K. E. Parnell mfl. (2009) har sett på det samme fenomenet både teoretisk og eksperimentellt, med et fokus på virkningen av oppløpsdybden på de generte bølgene. Til sammen 212 skipsbølger ble målt, både 100m fra kysten og på oppløpet til stranden. Nær kysten viser dataen amplituder på 1.6m og perioder på $10 - 15$s. Kun en svak forsterkning er grunnet oppløpet. Senere brukte Torsvik, Didenkulova mfl. (2009) GPS målinger for å finne nøyaktige skipsruter og tilsvarende bølger. Modelleringen stemte godt overens med både amplituden og perioden til de observerte skipsbølgene og tilsvarende skipsruter. I følge Soomere, K. E. Parnell og Didenkulova (2011) vil bølgene dannet av hurtigfergene transportere like mye eller mer vann inn mot kysten enn alle andre typer bølger tilsammen. Tilbaketrekkningen av alt dette vannet bidrar til en raskere fjerning av sedimentet fra stranden. Dette blir også dokumentert av Soomere, K. Parnell og Didenkulova (2009) og Didenkulova og Soomere (2011) hvor det undersøkes hvordan lange bølger forårsaker en redistribuering av sedimentet.

Også i Venezia-lagunen er det observert uvanlig store bølger generert av skip. Til forskjell fra studiet i Tallinn-bukta, ser K. E. Parnell mfl. (2015) på en smal navigasjonskanal med grunnere områder på hver side. Skip av moderat størrelse ved lave Froude-tall (0.37-0.5) generer depresjonsbølger (omtalt som “Bernoulli

Wakes") med dybder på opp til 2.5 m. Fenomenet blir sammenlignet med meteorologiske tsunamier. I begge tilfeller produseres det en depresjonsbølge etterfulgt av en undulerende bølge. Rapaglia mfl. (2015) bemerker at de mer enn 3000 fartøyene som passerer gjennom Malamocoo-Marghera kanalen i Venezia-lagunen bidrar til forflytning av opp til $1.2 \cdot 10^6$ tonn med sediment. Dette påvirker både miljøet, grunnet forflytning av forurenset sediment, i tillegg til å være en økonomisk belastning ettersom kanalen må graves ut hvert år.

K. Parnell, McDonald og Burke (2007) påpeker lignende problematikk som for hurtigfergene i Østersjøen. I Marlborough Sounds, New Zealand, forbindes den nordlige og sydlige øya av hurtigferger. Grusstrendene langs ruten har respondert svært raskt på bølgene assosiert med hurtigfergene. Det blir vist at strender så mye som 7 km fra skipsruten kan bli påvirket. Whittaker (2002) dokumenterer blant annet effekten av hurtigferger og annen skipstrafikk i Loch Ryan, en fjord i Skottland og en naturlig havn for skipsforbindelsen til Nord Irland. Det blir vist at de lengere skipsbølgene transporterer mer sediment enn de naturlige vindbølgene. Utenfor Tiburon Peninsula, San Fransisco, har Neuman mfl. (2001) plassert et eget-designet instrument som måler strømningshastigheten. Lange bølger med perioder på 30-40 s reiser oppstrøms og passerer målestasjonen i god tid før selve hurtigfergen. Bølgene viser store likheter med solitoner. Grue (2020) foreslår at disse bølgene har samme genereringsmekanisme som de i Oslofjorden. Erikson, Larson og Hanson (2003) bekrefter at hurtigfergene påvirker fritidsaktiviteter ved strender, og derav turisme.

1.3 Disposisjon av oppgaven

Resten av oppgaven er organisert som følger.

Kapittel 2 presenterer en matematisk formulering av skipsbevegelsen. Vi gir en oversikt over utledningene presentert i Grue (2020). Kapittelet avsluttes med et sett av Fourier-transformerte likninger for hastighetspotensialet og overflatehevningen. Likningsettet gjøres dimensjonsløst før det skrives om på matriseform.

Kapittel 3 ser nærmere på modelleringen av skipet og havbunnen. Den numeriske implementasjonen av likninger fra Kapittel 2 blir beskrevet.

Kapittel 4 presenterer en test av den numeriske modellen. Beregninger for en smal tank i tre dimensjoner sammenlignes med en tilsvarende to-dimensjonal beregning. Vi ser på hvordan en økning i skipsbredden kan utnyttes. Konvergens av likningene blir diskutert.

Kapittel 5 tar for seg mini-tsunamien i Oslofjorden. Beregninger sammenlignes med resultater fra Grue (2020), i tillegg til observasjoner fra beboerene på Flaskebekk.

Kapittel 6 utforsker videre hva som skjer når et skip seiler inn på grunnere vann hvor Froude-tallet er lik 1. Vi ser på beregninger gjennomført for skip i en veldig vid numerisk kanal, i tillegg til hva som skjer med oppstrømsbølgen over tid.

Kapittel 7 gir en oppsummering av resultatene fra oppgaven og en konklusjon, samt foreslår videre arbeid.

KAPITTEL 2

Matematisk formulering

I dette kapittelet presenteres en matematisk formulering av skipsbevegelsen. Kapittelet avsluttes med et sett med Fourier-transformerte likninger for hastighetspotensialet og overflatehevningen. Likningsettet gjøres dimensjonsløst før det skrives om på matriseform. Vi har på nytt utledet alle likninger presentert i Grue (2020). En oversikt over utledningene blir presentert, hvor detaljer finnes i Tillegg A. Den matematiske formuleringen benytter en rask metode for beregning av havbølger. Metoden involverer bruk av Fourier-transform for å invertere integrallikningene. Dette løser Laplace-likningen på havoverflaten. En funksjon for normalhastigheten til den frie overflaten blir dermed funnet. Vi antar lineær teori.

Metoden presentert i dette kapittelet ble først introdusert av Clamond og Grue (2001), i både to- og tre dimensjoner. Ved å undersøke konvergens av likningene ble det vist at kun én iterasjon er nødvendig for tilstrekkelig nøyaktighet i praktiske beregninger. Grue (2002) beskriver blant annet veldig store ikke-lineære havbølger. Her blir metoden anvendt i tre dimensjoner. I Fructus og Grue (2007) blir metoden illustrert for havbølger over en varierende bunntopografi, ved bruk av en Green-funksjon. Beregninger viser at metoden fanger opp det mest essensielle av bølgefeltet og er flere størrelsesorden raskere enn eksisterende metoder hvor full potensialteori er benyttet. Grue (2015) har utviklet en modell for et to-lagsfluid med sterkt ikke-lineære indre bølger, som anvender metoden benyttet i dette kapittelet. Både Grue (2017) og senere Grue (2020) bruker metoden for beregning av mini-tsunamien i Oslofjorden.

Gjennom hele kapittelet ser vi på det tredimensjonale tilfellet og følger notasjonen brukt i Grue (2020). Unntaket er koordinatsystemet, hvor vi betegner horisontale koordinater ved $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ og den vertikale koordinaten ved y. Tiden er gitt ved t. Havoverflaten er linearisert om $y = 0$. Bunnvarisjonen er beskrevet ved $y_B = -h + \beta(\mathbf{x})$, hvor $\beta(\mathbf{x})$ betegner avviket fra den typiske vanndybden h. Vi antar et inkompressibelt, virvelfritt fluid slik at potensial teori er gyldig og fluidet tilfredstiller Laplace likningen, $\nabla^2\phi = 0$. Fluidets hastighetspotensial er beskrevet ved $\phi(\mathbf{x}, y, t)$, slik at hastighetsfeltet er gitt ved $\mathbf{u} = \nabla\phi$. Hastighetspotensialet på bunnen og på havoverflaten defineres som henholdsvis ϕ_B og ϕ_F. Normalhastigheten på havoverflaten betegnes som V_F. Mer presist defineres følgende,

$$\phi_F = \phi(\mathbf{x}, y = 0, t) \tag{2.1}$$

$$\phi_B = \phi(\mathbf{x}, y = y_B, t) \tag{2.2}$$

$$V_F = \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{y=0} \tag{2.3}$$

Målet er å undersøke hvordan bølgene generert av skip som reiser over en dybdeendring utvikler seg med tiden. For å gjøre dette integreres de lineære kinematiske og dynamiske randbetingelsene ved den frie overflaten fremover i tid. Betingelsene er gitt ved,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \tag{2.5}$$

hvor $\eta(\mathbf{x}, t)$ beskriver overflatehevningen, det vil si avviktet fra $y = 0$. En løsning av Laplace-likningen gir en forbindelse mellom funksjonene V_F, ϕ_B og ϕ_F.

2.1 Integrallikningen

Løsningen til Laplace-likningen fås fra en anvendelse av Greens teorem på hastighetspotensialet $\phi(\boldsymbol{x}, y, t)$ kombinert med en Green-funksjon. Vi begynner med integrallikningen gitt av Newman (2018, s. 137, likning 4.79). En utledning av denne er gitt i seksjon A.1.3 av Tillegg A. Helt generelt kan integrallikningen skrives,

$$\int_S \left[\phi' \frac{\partial G'}{\partial n'} - G' \frac{\partial \phi'}{\partial n'}\right] dS = -2\pi\phi \tag{2.6}$$

for et punkt $(\mathbf{x}, y)$ på flaten S. Legg merke til at integrasjonsvariablene er gitt ved $(\mathbf{x}', y')$, mens evalueringspunktet $(\mathbf{x}, y)$ holdes fast. For å forenkle notasjonen definerer vi $\phi' = \phi(\mathbf{x}', y', t)$. Tilsvarende gjelder for alle andre merkede funksjoner. Green-funksjonen er gitt ved $G(\mathbf{x}, y)$ og den normalderiverte skrives som $\frac{\partial}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla$. Flaten S omgir fluidvolumet $\mathcal{V}$, og består av den frie overflaten (havoverflaten) F, havbunnen B og de vertikale kontrollflatene S_c i fjernfeltet. En illustrasjon av dette er vist i figur 2.1. Antar vi at bevegelsen dør ut i fjernfeltet, vil ikke integralet over S_c gi noe bidrag, og vi står igjen med

$$\int_{F+B} \left[\phi' \frac{\partial G'}{\partial n'} - G' \frac{\partial \phi'}{\partial n'}\right] dS = -2\pi\phi \tag{2.7}$$

Deler vi opp integralet på venstre side av likning 2.7 har vi,

$$\int_F \left[\phi'_F \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial \phi'}{\partial n'}\right] [dS]_F + \int_B \left[\phi'_B \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial \phi'}{\partial n'}\right] [dS]_B = -2\pi\phi \tag{2.8}$$

Normalvektoren, $\boldsymbol{n}$, peker ut av fluidet. Vi kan definere den frie overflaten og havbunnen som henholdsvis $F' = y' - \delta' = 0$, og $B' = (-h + \beta') - y = 0$. Her beskriver $\delta(\mathbf{x}')$ skipsformen på F. Både skipsformen og havbunnen blir definert i detalj i Kapittel 3. Normalvektoren for hver flate defineres som,

$$\boldsymbol{n}'_F = \frac{\nabla' F'}{|\nabla' F'|} = \frac{\boldsymbol{j} - \nabla'\delta'}{(1 + |\nabla'_1\delta'|^2)^{1/2}} \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{n}'_B = \frac{\nabla' B'}{|\nabla' B'|} = \frac{\nabla'\beta' - \boldsymbol{j}}{(1 + |\nabla'_1\beta'|^2)^{1/2}} \tag{2.10}$$

For et flateelement på overflaten F har vi,

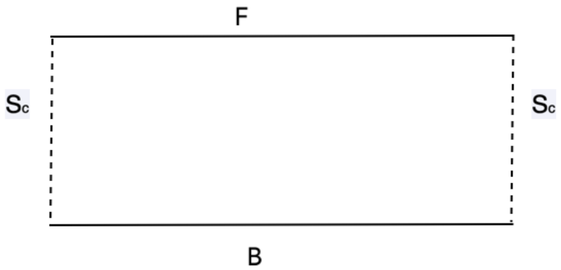
$$[dS]_F = [1 + |\nabla'_1\delta'|^2]^{1/2} d\mathbf{x}' \tag{2.11}$$

Tilsvarende, er flateelementet langs havbunnen, B,

$$[dS]_B = [1 + |\nabla'_1\beta'|^2]^{1/2} d\mathbf{x}' \tag{2.12}$$

Normalhastigheten langs overflaten F, er definert slik at

$$V'_F = \frac{\partial\phi'}{\partial n'}\,[1 + |\nabla'\delta'|^2]^{1/2} \tag{2.13}$$



Figur 2.1: Illustrasjon av overflaten S som omgir fluidvolumet V. Illustrasjonen er laget i programmet *Paint S*.

2.2 Evalueringspunkt på overflaten F

Green-funksjonen for et evalueringspunkt på den frie overflaten, gis ved en tredimensjonal kildefunksjon og dens avbildning i $y = -h$, slik at $G_1 = 1/r + 1/r_1$. Her er $r = [\boldsymbol{R}^2 + [y' - y]^2]^{1/2}$, $r_1 = [\boldsymbol{R}^2 + [y' + y + 2y_B]^2]^{1/2}$ og $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}$. Dette gir følgende integrallikning,

$$\int_F \left[\phi'_F \frac{\partial G_1}{\partial n'} - G_1 \frac{\partial \phi'}{\partial n'}\right][dS]_F + \int_B \left[\phi'_B \frac{\partial G_1}{\partial n'}\right][dS]_B = -2\pi\phi_F \tag{2.14}$$

Hvert ledd i integrallikningen skrives om slik at det inneholder faktoren $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R_0}$ eller $\frac{1}{R_1}$. Dette gjøres ved bruk av rekkeutviklinger om δ og β som tilnærminger til Green-funksjonene på F. Rekkeutviklingene, samt variablene R, R_0, R_1 og deres deriverte, er definert i seksjon A.1.1. En fullstendig utledning av likningene i denne seksjonen er gitt i seksjon A.1.5 i Tillegg A. Hvert ledd på venstre side av likning 2.14 kan uttrykkes ved,

$$\begin{aligned}\int_F \phi'_F \frac{\partial G_1}{\partial n'}[dS]_F = &\int_F (\delta' - \delta)\nabla'_1\phi'_F \cdot \nabla'_1 \frac{1}{R} d\mathbf{x}' \\ &+ \int_F \phi'_F \frac{\partial}{\partial(2h)} \frac{1}{R_1} d\mathbf{x}' \\ &+ \int_F (\delta' + \delta)\nabla'_1 \frac{1}{R_1} \cdot \nabla'_1 \phi'_F d\mathbf{x}' + \mathcal{O}(\delta'^2)\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}\int_F G_1 \frac{\partial \phi'}{\partial n'}[dS]_F = &\int_F \frac{V'_F}{R}\mathbf{x}' \\ &+ \int_F \left[1 - (\delta + \delta')\frac{\partial}{\partial(2h)}\right] \frac{V'_F}{R_1} d\mathbf{x}' + \mathcal{O}(\delta'^2)\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\int_B \phi'_B \frac{\partial G_1}{\partial n'}[dS]_B = -2\int_B \beta' \nabla'_1 \frac{1}{R_0} \cdot \nabla'_1 \phi'_B d\mathbf{x}' \tag{2.17}$$

En inverstransform brukes til å uttrykke $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R_0}$ og $\frac{1}{R_1}$ (se likning A.33-A.35, Tillegg A.1.1). Vi definerer $e_1 = e^{-kh}$, hvor bølgevektoren er gitt ved, $\boldsymbol{k} = k_1\mathbf{i}_1 + k_1\mathbf{i}_2$, $k = |\boldsymbol{k}|$ og k_1 er komponenten i skipets bevegelsesretning. For å forenkle notasjonen bytter vi om merkede og ikke-merkede variabler og definerer $\hat{A}_1 = i\mathbf{k} \cdot \mathcal{F}\{\beta \nabla_1 \phi_B\}$. Insatt i integrallikningen får vi følgende Fourier-transformerte ledd,

$$\begin{aligned}\frac{k}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\int_F G_1 \frac{\partial \phi}{\partial n}[dS]_F\right\} &= (1 + e_1^2)\mathcal{F}\{V_F\} - ke_1^2\mathcal{F}\{\delta V_F\} \\ &\quad - k\mathcal{F}\{\delta\mathcal{F}^{-1}\{e_1\mathcal{F}\{V_F\}\}\} && (2.18)\\ \frac{k}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\int_F \phi_F \frac{\partial G_1}{\partial n}[dS]_F\right\} &= -(1 + e_1^2)i\mathbf{k} \cdot \mathcal{F}\{\delta\nabla_1\phi_F\} - k^2\delta\mathcal{F}\{\phi_F\} \\ &\quad - e_1 k\mathcal{F}\{\phi_F\} + k\mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{ke_1\mathcal{F}\{\phi_F\}\}\} && (2.19)\\ \frac{k}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\int_B \phi_B \frac{\partial G_1}{\partial n}[dS]_B\right\} &= 2e_1\hat{A}_1 = \frac{(1 + e_1)\hat{A}_1}{\cosh(kh)} && (2.20)\end{aligned}$$

Videre definerer vi $\hat{B}_1 = i\mathbf{k} \cdot \mathcal{F}\{\delta\nabla_1\phi_F\}$, og setter alt inn i en Fourier-transformert versjon av likning 2.14. En omskriving gir følgende,

$$\mathcal{F}\{V_F\} = kE_1\mathcal{F}\{\phi_F\} - kE_1\mathcal{F}\{\delta V_F\} - i\mathbf{k} \cdot \mathcal{F}\{\delta\nabla_1\phi_F\} + \frac{\hat{A}_1}{\cosh(kh)} \tag{2.21}$$

hvor $E_1 = (1-e_1)/(1+e_1) = \frac{1-e^{-2kh}}{1+e^{-2kh}} = \tanh(kh)$. Dette gir et uttrykk for potensialet på overflaten F,

$$\hat{V_F} + \hat{B}_1 = k\tanh(kh)\left[\hat{\phi}_F - \mathcal{F}\{\delta V_F\}\right] + \frac{\hat{A}_1}{\cosh(kh)} \tag{2.22}$$

og tilsvarer likning (19) i Grue (2020). Her bruker vi en ny notasjon for Fourier-transformerte størrelser, slik at eksempelvis $\mathcal{F}\{\phi\} = \hat{\phi}$.

2.3 Evalueringspunkt på havbunnen B

For et punkt på havbunnen B, bruker vi en Green-funksjon gitt ved $G_2 = 1/r + 1/r_{1B}$, hvor $r_{1B} = [\mathbf{R}^2 + [y' + y]^2]^{1/2}$ er speilingen med hensyn på $y = 0$. Til forskjell fra likning 2.14 har vi derfor,

$$\int_F \left[\phi'_F \frac{\partial G_2}{\partial n'} - G_2 \frac{\partial \phi'}{\partial n'}\right][dS]_F + \int_B \left[\phi'_B \frac{\partial G_2}{\partial n'}\right][dS]_B = -2\pi\phi_B \tag{2.23}$$

På samme måte som i forrige seksjon kan ledd i integrallikningen skrives om slik at de inneholder faktoren $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R_0}$ eller $\frac{1}{R_1}$. En mer detaljert utledning av dette finnes i seksjon A.1.5 i Tillegg A. Ledd i likning 2.23 kan uttrykkes ved,

$$\begin{aligned}&\int_F \left[\phi'_F \frac{\partial G_2}{\partial n'}\right][dS]_F \\ &\quad = \int_F 2\delta' \left[1 - \beta\frac{\partial}{\partial h} + \frac{1}{2}(\delta'^2 + \beta^2)\frac{\partial^2}{\partial h^2} + \dots\right] \nabla'_1\phi'_F \cdot \nabla'_1 \frac{1}{R_0} d\mathbf{x}'\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\int_F G_2 \frac{\partial \phi'}{\partial n'}[dS]_F = \int_F 2\left[1 - \beta\frac{\partial}{\partial h} + \frac{1}{2}(\delta'^2 + \beta^2)\frac{\partial^2}{\partial h^2} + \dots\right]\frac{V'_F}{R_0} d\mathbf{x}' \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}&\int_B \left[\phi'_B \frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{r}\right][dS]_B \\ &\quad = \int_B \nabla'_1\phi'_B \cdot \left[(\beta' - \beta) - \frac{1}{6}(\beta' - \beta)^3\nabla'^2_1 + \dots\right]\nabla'_1 \frac{1}{R} d\mathbf{x}'\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}&\int_B \left[\phi'_B \frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{r_{1B}}\right][dS]_B = \int_B \phi'_B \frac{\partial}{\partial(2h)}\frac{1}{R_1} d\mathbf{x}' \\ &\quad - \int_B \nabla'_1\phi'_B \cdot \left[(\beta' + \beta) - \frac{1}{2}(\beta' + \beta)^2 \frac{\partial}{\partial(2h)}\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6}(\beta' + \beta)^3 \frac{\partial^2}{\partial(2h)^2} + \dots\right]\nabla'_1 \frac{1}{R_1} d\mathbf{x}'\end{aligned} \tag{2.27}$$

Igjen forenkler vi notasjonen ved å bytte om merkede og ikke-merkede variabler. Bruk av inverstransform gir følgende,

$$\frac{1}{2\pi}\int_F \left[G_2\frac{\partial\phi}{\partial n}\right][dS]_F = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2e_1}{k}\hat{V}'_F\right\} + \beta'\mathcal{F}^{-1}\left\{2e_1\hat{V}_F\right\} + \frac{\beta'^2}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{2ke_1\hat{V}_F\right\} + \dots \tag{2.28}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_F \left[\phi_F\frac{\partial G_2}{\partial n}\right][dS]_F = \mathcal{F}^{-1}\left\{2e_1\hat{B}_1/k\right\} + \beta'\mathcal{F}^{-1}\left\{2e_1\hat{B}_1\right\} + \frac{1}{2}\beta'^2\mathcal{F}^{-1}\left\{2ke_1\hat{B}_1\right\} + \dots \tag{2.29}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_B \left[\phi'_B\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{r}\right][dS]_B = \mathcal{F}^{-1}\left\{-\hat{A}_1/k\right\} - \beta\mathcal{F}^{-1}\left\{k\hat{\phi}'_B\right\} + \mathcal{O}(\beta'^3) \tag{2.30}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_B \left[\phi_B\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{1B}}\right][dS]_B = \mathcal{F}^{-1}\left\{e_1^2(\hat{\phi}_B - \hat{A}_1/k - \hat{A}_2/2)\right\} + \beta'\mathcal{F}^{-1}\left\{e_1^2(k\hat{\phi}'_B - \hat{A}_1)\right\} + \frac{1}{2}\beta'^2\mathcal{F}^{-1}\left\{e_1^2k^2\hat{\phi}'_B\right\} + \mathcal{O}(\beta^3) \tag{2.31}$$

tilsvarende likning (12)-(15) i Grue (2020). Dette settes inn i en Fourier-transformert versjon av likning 2.10. En omorganisering og multiplikasjon med k gir,

$$\begin{aligned} 0 = {} & 2e_1(\hat{V}_F + \hat{B}_1) - \hat{A}_1 - k\hat{\phi}_B + e_1^2(k\hat{\phi}_B - \hat{A}_1 - k\hat{A}_2/2) \\ & + k\mathcal{F}\left\{\beta'\mathcal{F}^{-1}\left\{2e_1(\hat{V}_F + \hat{B}_1) - k\hat{\phi}_B + e_1(k\hat{\phi}_B - \hat{A}_1)\right\}\right\} \\ & + k\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\beta'^2\mathcal{F}^{-1}\left\{2ke_1(\hat{V}_F + \hat{B}_1) + e_1^2k^2\hat{\phi}_B\right\}\right\} + \mathcal{O}(\beta^3) \end{aligned} \tag{2.32}$$

Som Grue (2020) kan vi definere $\hat{W} = \hat{V}_F + \hat{B}_1$ slik at,

$$\begin{aligned} 0 = {} & 2e_1\hat{W} - (1 + e_1^2)\hat{A}_1 - (1 - e_1^2)k\hat{\phi}_B - ke_1^2\hat{A}_2/2 \\ & + k\mathcal{F}\left\{\beta'\mathcal{F}^{-1}\left\{2e_1\hat{W} - k\hat{\phi}_B + e_1^2(k\hat{\phi}_B - \hat{A}_1)\right\}\right\} \\ & + k\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\beta'^2\mathcal{F}^{-1}\left\{k(2e_1\hat{W} + e_1^2k\hat{\phi}_B)\right\}\right\} + \mathcal{O}(\beta^3) \end{aligned} \tag{2.33}$$

I tillegg defineres $k\hat{\Psi} = 2e_1\hat{W} - (1 - e_1^2)k\hat{\phi}_B - (1 + e_1^2)\hat{A}_1 - e_1^2k\hat{A}_2/2$. Hvis flere ledd i rekkeutviklingen inkluderes i likning 2.33, vil man gjenkjenne et mønster som gjentas for hvert høyrere ordens ledd av β (likning (16) i Grue 2020). Derfor definerer vi,

$$\hat{\Upsilon}_1 = k\hat{\Psi} + \hat{A}_1 + e_1^2k\hat{A}_2/2 \tag{2.34}$$

og,

$$\hat{\Upsilon}_2 = k\left[k\hat{\Psi} + k\hat{\phi}_B + (1+e_1^2)\hat{A}_1 + e_1^2 k\hat{A}_2/2\right] \tag{2.35}$$

Dette gir

$$\begin{aligned}(1-e_1^2)k\hat{\phi}_B &= 2e_1\hat{W} - (1+e_1^2)\hat{A}_1 - ke_1^2\hat{A}_2/2 \\ &+ k\mathcal{F}\left\{\beta\Upsilon_1 + \frac{1}{2}\beta^2\Upsilon_2\right\}\end{aligned} \tag{2.36}$$

Et restledd defineres ved

$$k\hat{\mathcal{R}} = -\frac{1}{2}\frac{ke_1^2}{(1-e_1^2)}\hat{A}_2 + \frac{k}{(1-e_1^2)}\mathcal{F}\left\{\beta\Upsilon_1 + \frac{1}{2}\beta^2\Upsilon_2\right\} \tag{2.37}$$

Vi deler likning 2.36 på $(1-e_1^2)$ slik at potensialet langs bunnen kan skrives som,

$$k\hat{\phi}_B = \hat{W}/\sinh(kh) - \hat{A}_1/\tanh(kh) + k\hat{\mathcal{R}} \tag{2.38}$$

Fra likning 2.23 har vi at $\hat{W} = \hat{V}_F + \hat{B}_1 = k\tanh(kh)\left[\hat{\phi}_F - \mathcal{F}\{\delta V_F\}\right] + \frac{\hat{A}_1}{\cosh(kh)}$, slik at

$$\begin{aligned}k\hat{\phi}_B &= \frac{k\left[\hat{\phi}_F - \mathcal{F}\{\delta V_F\}\right]}{\cosh(kh)} + \left(\frac{1}{\cosh(kh)\sinh(kh)} - \frac{1}{\tanh(kh)}\right)\hat{A}_1 + k\hat{\mathcal{R}} \\ &= \frac{k\left[\hat{\phi}_F - \mathcal{F}\{\delta V_F\}\right]}{\cosh(kh)} - \tanh(kh)\hat{A}_1 + k\hat{\mathcal{R}}\end{aligned} \tag{2.39}$$

Dette tilsvarer likning (17) i Grue (2020).

2.4 Effekter ved flat havbunn

Den totale bevegelsen til fluidet kan beskrives ved $\phi = \phi_0 + \varphi$, hvor subskript "0" angir potensialet for skipets bevegelse over flat bunn ($\beta(\mathbf{x}) = 0$). En tilleggsbevegelse beskrevet ved hastighetspotensialet φ, oppstår når skipet møter en dybdeendring. Langs bunnen er den kinematiske randbetingelsen $\frac{\partial}{\partial n}(\phi_0 + \varphi) = 0$. For en flat bunn ($\beta(\mathbf{x}) = 0$) er den skalerte normal hastigheten på den frie overflaten beskrevet ved,

$$\begin{aligned}V_{0,F} &= \sqrt{1+|\nabla_1\delta|^2}\,\frac{\partial\phi}{\partial n} = (\boldsymbol{j} - \nabla_1\delta)\cdot\nabla\phi \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{\partial\delta}{\partial x_1} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{\partial\delta}{\partial x_2} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\left(1 - \frac{\partial\delta}{\partial y}\right) = -u_0(t)\frac{\partial\delta}{\partial x_1}\end{aligned} \tag{2.40}$$

hvor vi har brukt normalvektoren til overflaten F, gitt i likning 2.9. I det siste likhetstegnet har vi brukt at $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ på den frie overflaten F, siden det ikke er noe strømning gjennom overflaten. I tillegg er det brukt at hastighetspotensialets deriverte på overflaten er lik skipshastigheten, $\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = u_0(t)$. Likningen skaleres ved å dele på $\sqrt{gh}$ og dimensjonsløse størrelser betegnes ved "*". Fouriertransformeres dette, ved bruk av relasjonen $\mathcal{F}\{\frac{\partial \delta}{\partial x_1}\} = ik_1 \cdot \mathcal{F}\{\delta\}$, har vi

$$\hat{V}^*_{0,F} = \hat{V}_{0,F}/\sqrt{gh} = -ik_1 u^*_0(t^*)\hat{\delta} = -ik_1 u^*_0(t^*) e^{-ik_1 x_0(t)} \left. \hat{\delta} \right|_{t=0} \tag{2.41}$$

Fra intergrallikningen, har vi et uttrykk for normalhastigheten på havoverflaten, gitt ved likning 2.22. Grue (2020) viser at $\hat{B}_1$ er på størrelse med $k\tanh(kh)\mathcal{F}\{\delta V_F\}$ slik at de to kansellerer hverandre og kan neglisjeres. Hvis vi i tillegg ser på en flat bunn, $\beta(\mathbf{x}) = 0$, får vi relasjonen,

$$\hat{V}_{0,F} = k\tanh(kh)\hat{\phi}_{0,F} \tag{2.42}$$

Kombineres dette med uttrykket for normal hastigheten på overflaten F (likning 2.9), får vi

$$k\hat{\phi}_{0,F} = \frac{\hat{V}_{0,F}}{\tanh(kh)} = \frac{-ik_1 u_0(t)\hat{\delta}}{\tanh(kh)} \tag{2.43}$$

Vi gjøre dette dimensjonsløst ved å dele på $\sqrt{gh}$,

$$(k\hat{\phi}_{0,F})^* = \frac{k\hat{\phi}_{0,F}}{\sqrt{gh}} = \frac{\hat{V}_{0,F}/\sqrt{gh}}{\tanh(kh)} = \frac{\hat{V}^*_{0,F}}{\tanh(kh)} = \frac{-ik_1 u^*_0(t^*)\hat{\delta}}{\tanh(kh)} \tag{2.44}$$

Ved bruk av likning 2.39 med $\beta(\mathbf{x}) = 0$ innsatt, har vi en dimensjonsløs relasjon for potensialet langs bunnen, B, gitt ved,

$$(k\hat{\phi}_{0,B})^* = \frac{(k\hat{\phi}_{0,F})^* - k\mathcal{F}\{\delta(V_{0,F})^*\}}{\cosh kh} \tag{2.45}$$

Fra dette kan vi finne den horisontale hastighetskomponenten langs bunnen ($y_B = -h$) ved

$$\left. u \right|_{y=-h} = \mathcal{F}^{-1}\{ik_1 \cdot \hat{\phi}_{0,B}\} = \mathcal{F}^{-1}\{\frac{ik_1}{k} \cdot k\hat{\phi}_{0,B}\} \tag{2.46}$$

Den horisontale hastighetskomponenten langs bunnen av skipet er på samme vis gitt ved,

$$\left. u \right|_{y=\delta(x)} = 2\delta\mathcal{F}^{-1}\{ik_1 \cdot \hat{\phi}_{0,F}\} \tag{2.47}$$

2.5 Kinematiske og dynamiske randbetingelser

Vi ønsker å finne ut hva som skjer på overflaten F etter en dimensjonsløs tid t^*. Merk av vi til forskjell fra Grue (2020) ikke deler opp overflaten F i en skipsdel ("BDY") og en havdel ("FSF"). Vi har dermed heller ingen ekte skipsgeometri. Dette gjør at vi beregner havbølger der skipet skulle vært. Noe som går fint siden Grue (2020) har vist at effekten av de to metodene er omtrent den samme. Dette gjør også at $\delta(\mathbf{x})$ settes til 0 i likning 2.39. Kombineres likning 2.3 og 2.4 er den kinematiske randbetingelsen er gitt ved,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - V_F = 0 \tag{2.48}$$

på overflaten F. Normalhastigheten på F, er gitt ved likning 2.22. Neglisjeres leddene $\hat{B}_1$ og $k\tanh(kh)\mathcal{F}\{\delta V_1\}$, kan vi uttrykke en lineær, Fourier-transformert, kinematisk randbetingelse ved

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} - k\tanh(kh)\hat{\varphi}_F = \frac{\hat{A}_1}{\cosh(kh)} \tag{2.49}$$

hvor $\hat{A}_1 = i\boldsymbol{k}\cdot\mathcal{F}\{\beta\nabla_1\phi_B\}$ og $\phi_B = \phi_{0,B} + \varphi_B$. I tillegg er den Fourier-transformerte, dynamiske randbetingelsen for φ_F,

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_F}{\partial t} + g\hat{\eta} = 0 \tag{2.50}$$

Vi kan gjenkjenne relasjonen $\frac{\omega^2}{g} = k\tanh(kh)$ i likning 2.17, slik at likningsettet vi ønsker å løse kan skrives,

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} - \frac{\omega^2}{g}\hat{\varphi}_F = \frac{\hat{A}_1}{\cosh(kh)} \tag{2.51}$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_F}{\partial t} + g\hat{\eta} = 0 \tag{2.52}$$

For å gjøre likningsettet dimensjonsløst, introduseres skalerte variabler $t^* = \sqrt{\frac{g}{h}}t$ og $\omega^* = \sqrt{\frac{h}{g}}\omega$ som gir,

$$\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t^*} - \sqrt{\frac{g}{h}}\omega^*\left(\frac{\omega}{g}\hat{\varphi}_F\right) = \frac{\hat{A}_1}{\cosh kh} \tag{2.53}$$

$$\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{\partial \hat{\varphi}_F}{\partial t^*} + g\hat{\eta} = 0 \tag{2.54}$$

Likning 2.21 blir skalert med $\sqrt{\frac{h}{g}}$ og likning 2.22 blir multiplisert med ω^*/g, slik at

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t^*} - \omega^*\left(\frac{\omega}{g}\hat{\varphi}_F\right) = \sqrt{\frac{h}{g}}\frac{\hat{A}_1}{\cosh kh} \tag{2.55}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\omega}{g}\hat{\varphi}_F\right)}{\partial t^*} + \omega^*\hat{\eta} = 0 \tag{2.56}$$

Defineres $\hat{\psi} = \frac{\omega}{g}\hat{\varphi}_F$ har vi følgende skalerte likningsett,

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t^*} - \omega^* \hat{\psi} = \sqrt{\frac{h}{g}} \frac{\hat{A}_1}{\cosh kh} \tag{2.57}$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t^*} + \omega^* \hat{\eta} = 0 \tag{2.58}$$

Til slutt deles alle ledd på den karakteristiske dybden h, slik at

$$\frac{\partial(\hat{\eta}/h)}{\partial t^*} - \omega^*(\hat{\psi}/h) = \frac{(\hat{A}_1/\sqrt{gh})}{\cosh kh} \tag{2.59}$$

$$\frac{\partial(\hat{\psi}/h)}{\partial t^*} + \omega^*(\hat{\eta}/h) = 0 \tag{2.60}$$

Vi kan definere den dimensjonsløse høyresiden i likning 2.57 ved $\hat{A}_1{}^* = \hat{A}_1/\sqrt{gh} = ik_1 \cdot \mathcal{F}\{\beta\nabla\hat{\phi}_B/\sqrt{gh}\} = ik_1 \cdot \mathcal{F}\{\beta\nabla\hat{\phi}_B^*\}$. I tillegg, blir $\eta^* = \eta/h$ og $\psi^* = \psi/h = \frac{\omega}{gh}\hat{\varphi}_F$ også nye dimensjonsløse variabler. Vi har dermed et komplett dimensjonsløst sett med likninger, gitt ved

$$\frac{\partial \hat{\eta}^*}{\partial t^*} - \omega^* \hat{\psi}^* = \frac{\hat{A}_1{}^*}{\cosh kh} \tag{2.61}$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}^*}{\partial t^*} + \omega^* \hat{\eta}^* = 0 \tag{2.62}$$

Gjennom resten av kapittelet antar vi at alle størrelser er dimensjonsløse, og ser derfor bort i fra "$*$" notasjonen. I tillegg, redefineres høyre side av likning 2.61, slik at $\hat{h} = \frac{\hat{A}_1{}^*}{\cosh kh}$. Dermed har vi,

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} - \omega \hat{\psi} = \hat{h} \tag{2.63}$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} + \omega \hat{\eta} = 0 \tag{2.64}$$

Dette kan skrives om til et lineært system på matriseform, ved å introdusere

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{\psi} \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

Likninger 2.63 og 2.64 blir dermed,

$$\hat{Y}_t + A\hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{h} \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \hat{H} \tag{2.67}$$

som kan løses ved å multiplisere med den integrerende faktoren e^{At},

$$e^{At}\hat{Y}_t + e^{At}A\hat{Y} = \left[e^{At}\hat{Y}\right]_t = e^{At}\hat{H} \tag{2.68}$$

Vi definerer $\hat{Z} = e^{At}\hat{Y}$, slik at

$$\hat{Z}_t = e^{At}\hat{H} \tag{2.69}$$

KAPITTEL 3

Modellering av skip over en dybdeendring

Vi ønsker å simulere et skip i både to og tre dimensjoner, over en varierende bunn-topografi. Dette kapittelet presenterer den numeriske implementasjonen av likningene utledet i forrige kapittel. For å simulere fremover i tid skal vi bruke Runge-Kutta metoden av både andre og fjerde orden (forkortet RK2 og RK4). I tillegg beskrives ulike parametere, samt skipsform og havbunn.

3.1 Numerisk implementasjon

Likningsystemet 2.69 i kapittel 2 integreres fremover i tid for å finne $\hat{Z}$ ved dimensjonsløs tid $t\sqrt{\frac{g}{h}}$. Vi integrerer numerisk ved bruk av Runge Kutta metoden, med et tidsskritt på $dt\sqrt{\frac{g}{h}} = 0.04$. Ved bruk av $\hat{Z} = e^{At}\hat{Y}$ kan vi løse for $\hat{Y}$ og finne overflatehevningen $\eta(\mathbf{x}, t)$.

Beregningsområdet defineres som et rektangel i det horisontale planet med lengde L_1 og bredde L_2, hvor vi har henholdvis N_1 og N_2 beregningspunkter i hver retning. Oppløsningen er gitt ved $dx_1 = L_1/N_1$ og $dx_2 = L_2/N_2$. Alle iterasjoner gjøres i Fourier-rommet og størrelser Fourier-transformeres numerisk ved bruk av Fast Fourier Transform (FFT) funksjonen, `fft2()`, i MATLAB. Spektralrommet defineres ved bølgetallsvektorene $(0, \Delta k_1, 2\Delta k_1, \ldots, (N_1/2-1)\Delta k_1, -N_1/2\Delta k_1, \ldots, -\Delta k_1)$ og $(0, \Delta k_2, 2\Delta k_2, \ldots, (N_2/2-1)\Delta k_2, -N_2/2\Delta k_2, \ldots, -\Delta k_2)$ som sorteres ved bruk av funksjonen `ifftshift()`. Simuleringen stoppes før bølgesystemet når enden av kanalen.

I denne seksjonen beskrives bruk av Runge Kutta metoden for å løse likning 2.69. Vi antar at,

$$\frac{\hat{Z}_{n+1} - \hat{Z}_n}{\Delta t} = \left(\frac{d\hat{Z}}{dt}\right)_n \quad \text{for } t = t_n \tag{3.1}$$

$$\frac{\hat{Z}_{n+1} - \hat{Z}_n}{\Delta t} = \left(\frac{d\hat{Z}}{dt}\right)_{n+1} \quad \text{for } t = t_{n+1} \tag{3.2}$$

hvor $n = 0, 1, 2 \ldots, N_T$ benevner antall tidsteg, Δt, slik at tiden ved tidspunkt n er gitt ved $t_n = n * \Delta t$ og simuleringens slutt er gitt ved tiden $T = N_T * \Delta t$. Ved å addere likninger 3.1 og 3.2, får vi

$$\left(\hat{Z}_{n+1} - \hat{Z}_n\right) = \frac{\Delta t}{2}\left(\left(\frac{d\hat{Z}}{dt}\right)_{n+1} + \left(\frac{d\hat{Z}}{dt}\right)_n\right) \tag{3.3}$$

Løses det for $\hat{Z}_{n+1}$, ved insetting av $\left(\frac{d\hat{Z}}{dt}\right)_n = e^{At_n}\hat{H}_n$ og $\left(\frac{d\hat{Z}}{dt}\right)_{n+1} = e^{At_{n+1}}\hat{H}_{n+1}$ får vi følgende,

$$\hat{Z}_{n+1} = \hat{Z}_n + \frac{\Delta t}{2}\left[e^{At_n}\hat{H}_n + e^{At_{n+1}}\hat{H}_{n+1}\right] \tag{3.4}$$

Ved $t = t_n$ er det siste leddet $\hat{H}_{n+1}$ derimot ukjent. Derfor innføres en tilnærming $\hat{H}^* \simeq \hat{H}_{n+1}$ istedet. For å løse dette bruker vi en litt annen notasjon.
Høyre side av likning 2.69 defineres som $f(\hat{Z}, t) = e^{At}\hat{H}$. For å finne $\hat{Z}$ i neste tidskritt gjør vi en tilnærming til den deriverte i punktet $t = t_n$ er gitt ved

$$K_1 = f(\hat{Z}_n, t_n) \tag{3.5}$$

i tillegg til en tilnærming av den deriverte i $t = t_{n+1} = t_n + \Delta t$, definert som

$$K_2 = f(\hat{Z} + K_1\Delta t, t + \Delta t) \tag{3.6}$$

På samme vis som i likning 3.4 blir neste tidskritt derfor tilnærmet ved

$$\hat{Z}_{n+1} = \hat{Z}_n + (K_1 + K_2)\frac{\Delta t}{2} \tag{3.7}$$

Dette tilsvarer Runge Kutta metoden av andre orden (RK2), hvor notasjonen tilsvarer beskrivelse av Langtangen (2016, s.779). Runge Kutta av fjerde orden (RK4) blir definert på en liknende måte. Vi beholder definisjonen av K_1 fra likning 3.25. Men i tillegg brukes et estimat av den deriverte i $t = t_{n+1/2} = t_n + \frac{1}{2}\Delta t$ slik at,

$$K_2 = f(\hat{Z}_n + K_1\frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}) \tag{3.8}$$

$$K_3 = f(\hat{Z}_n + K_2\frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}) \tag{3.9}$$

Til slutt har vi også en en tilnærming av den deriverte i $t = t_{n+1} = t_n + \Delta t$,

$$K_4 = f(\hat{Z}_n + K_3\Delta t, t + \Delta t) \tag{3.10}$$

Neste tidskritt er dermed gitt ved,

$$\hat{Z}_{n+1} = \hat{Z}_n + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)\,\frac{\Delta t}{6} \tag{3.11}$$

For å løse for overflatehevningen η ved tiden t_N, bruker vi at

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Den Fourier-transformerte overflatehevningen $\hat{\eta}$ og hastighetspotensialet $\hat{\varphi}$ kan oppnås via vektoren $\hat{Y}$ (se likning 2.65), som igjen fås ved $\hat{Y} = e^{-At_N}\hat{Z}$. Dermed er,

$$\hat{\eta}_N = \hat{z}_{1,N}\cos(\omega t_N) + \hat{z}_{2,N}\sin(\omega t_N) \tag{3.13}$$

$$\hat{\psi}_N = -\hat{z}_{1,N}\sin(\omega t_N) + \hat{z}_{2,N}\cos(\omega t_N) \tag{3.14}$$

hvor henholdsvis $\hat{z}_{1,N}$ og $\hat{z}_{2,N}$ er første og andre element i vektoren $\hat{Z}$ ved tiden t_N, og $\hat{\varphi}_N = \frac{g}{\omega}\hat{\psi}_N$. En inverstransform ved `ifft2()` funksjonen i MATLAB gir oss $\eta(t_N) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{\eta}(t_N)\}$.

En tilnærming av restleddet

I den numeriske implementasjonen benytter vi en tilnærming av potensialet langs bunnen, $\hat{\phi}_B$, til størrelsesorden $\mathcal{O}(\beta^2)$. Derfor uttrykkes restleddet, $k\hat{\mathcal{R}}$, gitt i likning 2.37 i Kapittel 2, som en størrelse proporsjonal med β^2. Dette er utledet i Tillegg A.2.1. Vi kan skrive tilnærminger til $\hat{\Upsilon}_1$ og $\hat{\Upsilon}_2$ som,

$$\hat{\Upsilon}_1 = \hat{A}_1 + \mathcal{O}(\beta^2) \tag{3.15}$$

$$\hat{\Upsilon}_2 = k^2\hat{\phi}_B + \mathcal{O}(\beta^2) \tag{3.16}$$

slik at restleddet kan uttrykkes ved,

$$k\hat{\mathcal{R}} = -\frac{1}{2}\frac{e_1^2 k}{1-e_1^2}\hat{A}_2 + \frac{k}{1-e_1^2}\mathcal{F}\left\{\beta A_1 + \frac{1}{2}\beta^2\mathcal{F}^{-1}\{k^2\hat{\phi}_B\}\right\} + \mathcal{O}(\beta^3) \tag{3.17}$$

Den iterative prosessen

Siden potensialet langs bunnen, $\hat{\phi}_B$, gitt i likning 2.39 er uttrykt ved $\hat{A}_1$, som igjen inneholder $\hat{\phi}_B$, må vi løse for $\hat{A}_1$ iterativt. Vi setter $\delta = 0$ i likning 2.39 og deler opp potensialet langs bunnen. Hvert ledd er proporsjonalt med β^n, slik at for $n = 0, 1, 2, \ldots$ betegner ledd $k(\hat{\phi}_B)_n$ ledd til størrelsesorden $\mathcal{O}(\beta^n)$. I denne oppgaven bruker vi en tilnærming til størrelsesorden $\mathcal{O}(\beta^2)$. Dermed definerer vi,

$$k(\hat{\phi}_B)_0 = k\hat{\phi}_F / \cosh(kh) \tag{3.18}$$

$$k(\hat{\phi}_B)_1 = -\hat{A}_1 \tanh(kh) \tag{3.19}$$

$$k(\hat{\phi}_B)_2 = -\frac{1}{2}\frac{e_1^2 k}{1-e_1^2}\hat{A}_2 + \frac{k}{1-e_1^2}\mathcal{F}\left\{\beta A_1 + \frac{1}{2}\beta^2\mathcal{F}^{-1}\{k^2\hat{\phi}_B\}\right\} \tag{3.20}$$

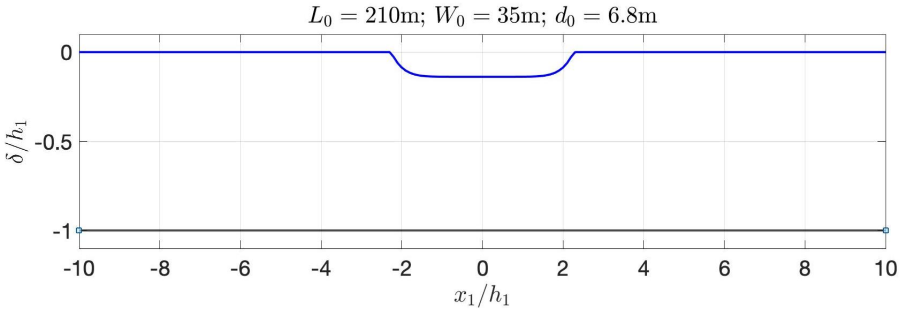
slik at $k\hat{\phi}_B = k(\hat{\phi}_B)_0 + k(\hat{\phi}_B)_1 + k(\hat{\phi}_B)_2 + \mathcal{O}(\beta^3)$. Ved beregning av $k(\hat{\phi}_B)_1$ benyttes $k(\hat{\phi}_B)_0$ i $\hat{A}_1$. Prosessen gjentas iterativt ved å bruke siste tilnærming $k(\hat{\phi}_B)_0 + k(\hat{\phi}_B)_1 + k(\hat{\phi}_B)_2$ på nytt i beregning av $\hat{A}_1$ og $\hat{A}_2$ for bedre tilnærming av $k(\hat{\phi}_B)_1$ og $k(\hat{\phi}_B)_2$.

3.2 Skipet

Skipets form i tre dimensjoner er gitt ved funksjonen $\delta(\mathbf{x}, t)$. Skipet beveger seg kun i x_1-retningen, og slik at posisjon til skipets midtpunkt er beskrevet ved $x_1 = x_0(t)$. Vi betegner skipets lengde med L_0 og skipets bredde med W_0. Skipets dypgang betegnes med d_0. Definerer vi $\tilde{x}_1 = x_1 - x_0(t)$, kan skipsformen ved tiden t beskrives ved

$$\delta(\tilde{x}_1, x_2) = -d_0 \left[1 - \left(\frac{2\tilde{x}_1}{L_0} \right)^8 - \left(\frac{2x_2}{W_0} \right)^6 \right] < 0 \tag{3.21}$$

Funksjonen $\delta(\tilde{x}_1, x_2)$ tilsvarer skipsformen brukt av Grue (2020), og har en relativt skarp overgang til overflaten F. Dette er vist i figur 3.1.



Figur 3.1: Skipsform i x_1-retning med parametere tilsvarende Color Line cruisefergene *Color Magic* og *Color Fantasy*.

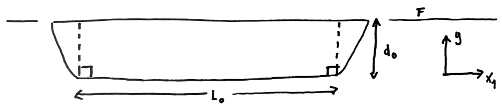
I denne oppgaven har vi satt skipets lengde til $L_0 = 210$ m. På samme måte som Grue (2020), er dette et estimat av lengden mellom vertikale vinkler på skipet og er illustrert i figur 3.2. Lengden L_0 tilsvarer 94% av lengden til Color Line cruisefergene *Color Magic* og *Color Fantasy*. Begge har en lengde på rundt 224m. Et deplasement på $V_0 = 36000$ m^3 oppnås ved bruk av en blokk koeffisient (Newman 2018, p.365). Denne er satt til,

$$C_B = \frac{V_0}{L_0 W_0 d_0} = 0.7 \tag{3.22}$$

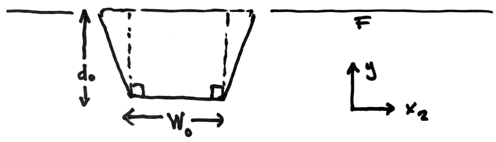
hvor skipets volum finnes ved $V_0 = \iint \delta dx_1 dx_2$.

I den numeriske implementasjonen skaleres skipsformen og alle dens parametere med den typiske vanndybden h. Vi benytter også en omskriving av Fourier transformen av $\delta(\tilde{x}_1, x_2)$ ved et variabelskifte, slik at den transformerte ved tiden t enkelt kan finnes ved,

$$\mathcal{F}\{\delta(x_1 - x_0(t), x_2)\} = e^{-ik_1 x_0(t)} \mathcal{F}\{\delta(x_1, x_2, t = 0)\} \tag{3.23}$$



(a) Skip sett fra siden i x_1-retning.



(b) Skip sett forfra i x_2-retning.

Figur 3.2: Illustrasjon av lengden mellom vertikale vinkler på skipet. Lengden L_0 tilsvarer 94% av lengden til Color Line cruisefergene *Color Magic* og *Color Fantasy*.

Posisjon til skipets midtpunkt er gitt ved $x_1 = x_0(t)$, slik at

$$x_0(t) = \begin{cases} UT_0(1 - \cos(\frac{t}{T_0})) & \text{for } \frac{t}{T_0} < \frac{\pi}{2} \\ U(t + (1 - \frac{\pi}{2})T_0), & \text{for } \frac{t}{T_0} \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{3.24}$$

hvor T_0 er tiden det tar for skipet å oppnå hastigheten U. Skipet begynner i ro og øker hastigheten gradvis. Dette for å unngå oppstrømsbølger i oppstartsfasen. Når hastigheten U oppnås, holdes den konstant for resten av simuleringen. Skaleres hastigheten og tiden slik at $Fr = U/\sqrt{gh}$, $t^* = \sqrt{\frac{g}{h}}t$ og $T_0^* = \sqrt{\frac{g}{h}}T_o$, får vi posisjonen skalert med vanndybden h,

$$x_0^*(t^*) = x_0(t)/h = \begin{cases} FrT_0^*(1 - \cos(\frac{t^*}{T_0^*})) & \text{for } \frac{t^*}{T_0^*} < \frac{\pi}{2} \\ Fr(t^* + (1 - \frac{\pi}{2})T_0^*), & \text{for } \frac{t^*}{T_0^*} \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{3.25}$$

Skipets hastighet ved skalert tid t^* er gitt ved posisjonens tidsderiverte, $u(t^*) = dx_0^*/dt^*$, slik at

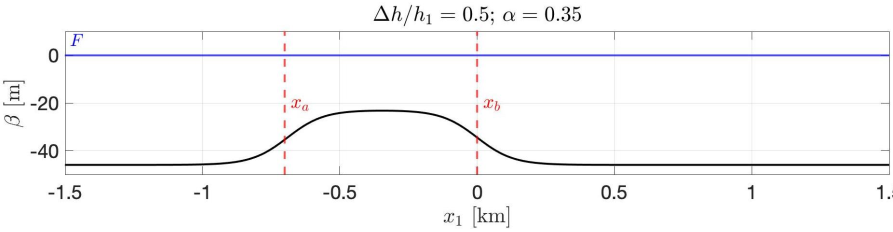
$$u_0^*(t^*) = u_0(t)/\sqrt{gh} = \begin{cases} Fr\sin(\frac{t^*}{T_0^*}) & \text{for } \frac{t^*}{T_0^*} < \frac{\pi}{2} \\ Fr, & \text{for } \frac{t^*}{T_0^*} \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{3.26}$$

3.3 Havbunnen

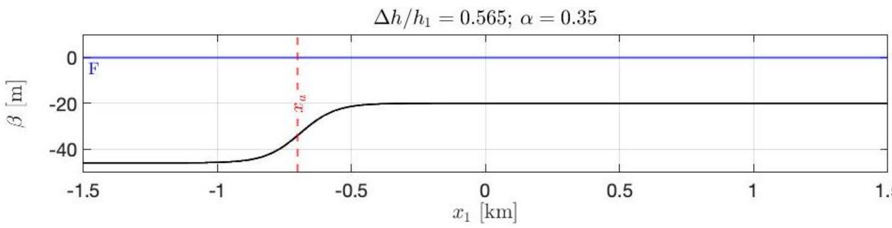
Som i forrige kapittel er havbunnen gitt ved $y_B = -h_1 + \beta(\mathbf{x})$. Variasjonen fra den typiske vanndybden, h_1, beskrives ved,

$$\beta(x_1) = \frac{1}{2}\Delta h \left[\tanh(\alpha[x_1 - x_a]) - \tanh(\alpha[x_1 - x_b])\right] \tag{3.27}$$

hvor h_2 betegner dybden ved det grunnere partiet mellom dybdeendringene. Størrelsen på dybdeendringen er beskrevet ved $\Delta h = h_1 - h_2$. Punktet x_a angir midten av den initielle dybdeendringen og punktet x_b angir tilsvarende for dybdeendringen ut av den grunnere regionen. Begge er punkter langs $x_1 - aksen$. I denne oppgaven begrenses variasjonen til x_1-retning, og bunnen er derfor uniform i x_2-retning og β. Bunnen benyttet for simulering av mini-tsunamien i Oslofjorden i Kapittel 5 er illustrert i figur 3.3. I Kapittel 6 benyttes havbunnen illustrert i figur 3.4. I den numeriske implementasjonen skaleres dybdeendringen og alle dens parametere med vanndybden h_1. Vi har valgt å bruke enheter i de fleste figurer i denne oppgaven fordi det gjør sammenligningen med forholdene i Oslofjorden tydeligere.



Figur 3.3: Havbunnen $y_B = -h_1 + \beta(\mathbf{x})$ benyttet i Kapittel 4 og Kapittel 5. Lengden på dybdeendringen tilsvarer Grue (2020), dvs. $x_b - x_a = 0.7$ km. Havoverflaten F er gitt ved $y = 0$. Havbunnen er uniform i x_2-retning.



Figur 3.4: Havbunnen $y_B = -h_1 + \beta(\mathbf{x})$ benyttet i Kapittel 6. Kun en initiell dybdeendring hvor $x_a = -0.7$ km. Havoverflaten F er gitt ved $y = 0$. Havbunnen er uniform i x_2-retning.

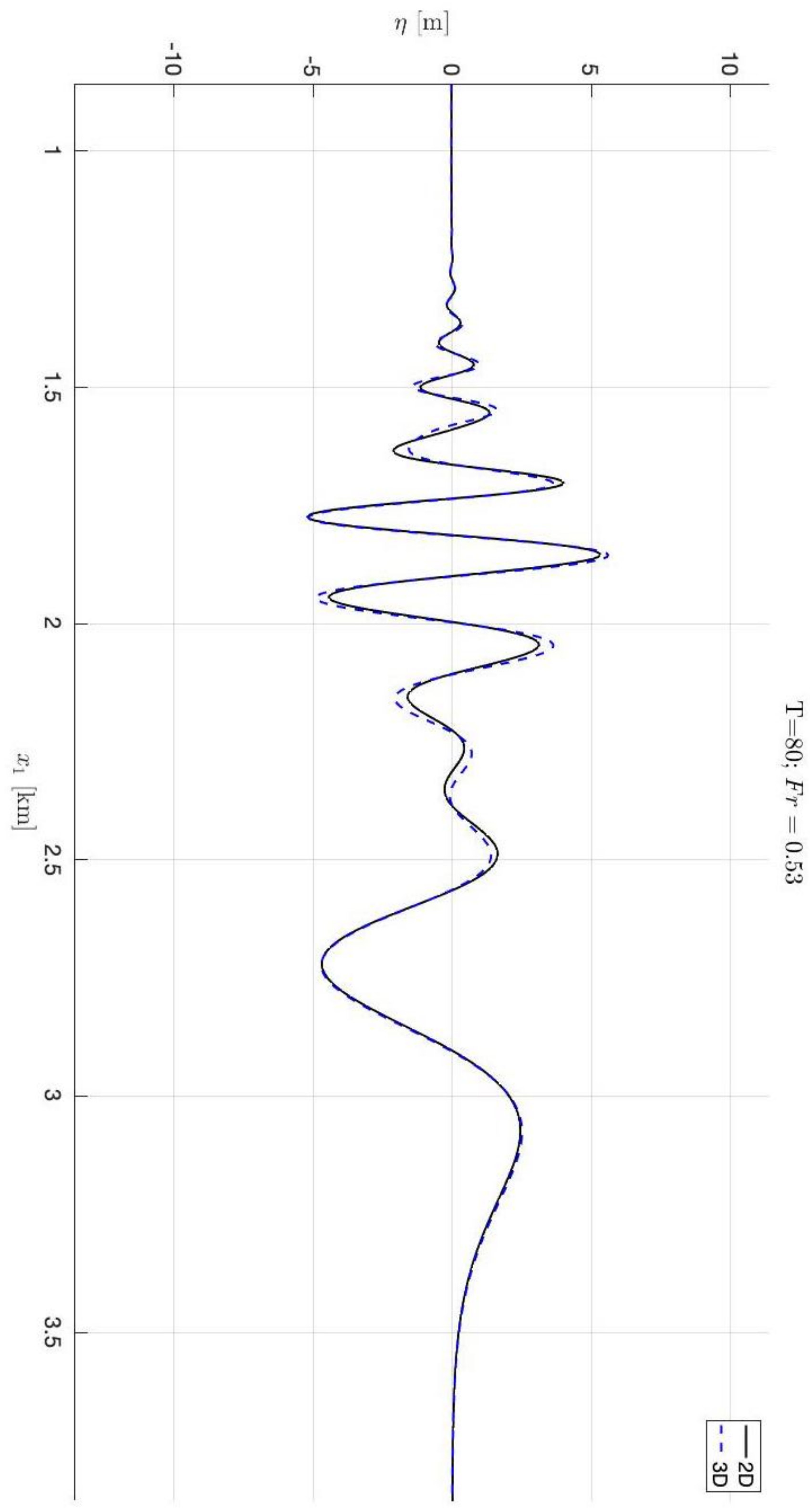
KAPITTEL 4

Test av numerisk modell

I dette kapittelet skal vi se på resultater som sansynliggjør at implementasjonen av den numeriske modellen er riktig. Dette inkluderer en sammenligning av to- og tredimensjonale beregninger ved bruk av en veldig smal numerisk tank, en sammenligning av Runge Kutta metoden av andre og fjerde orden, og en sammenligning av forskjellige skipsbredder. Konvergens av likningene presentert i Kapittel 2 og Kapittel 3 vil også bli diskutert.

4.1 Smal tank i tre dimensjoner

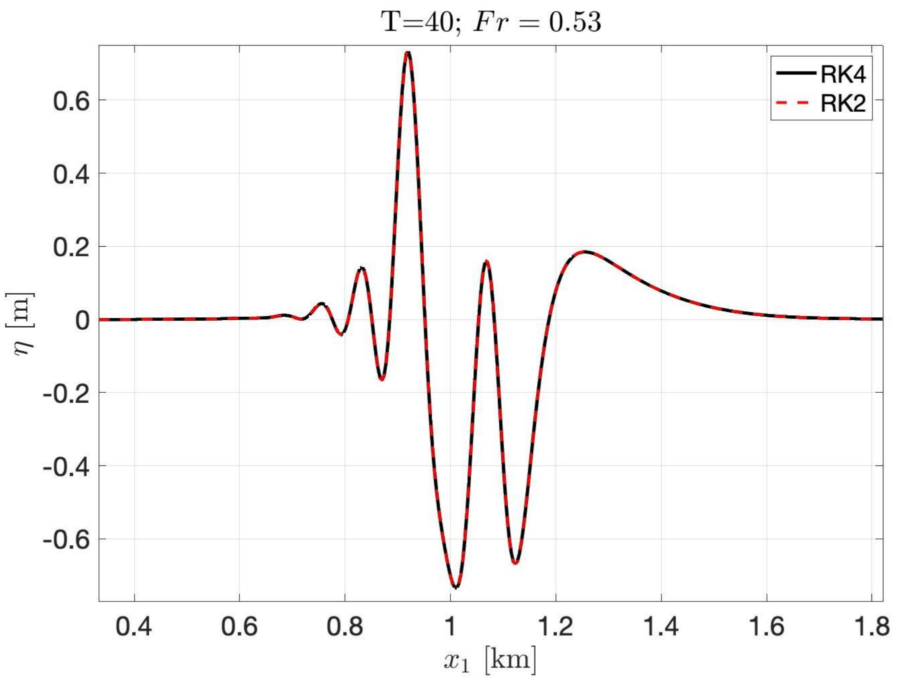
Som en effektiv sjekk på at koden fungerer kan de todimensjonale beregningene sammenlignes med tredimensjonale beregninger for en veldig smal numerisk tank. I følgende beregninger har vi brukt skipsformen gitt ved funksjonen δ i likning 3.22, og bunnvariasjon gitt ved likning 3.27. Bredden på den tredimensjonale tanken er satt til $W = 0.1h_1 = 4.6$m. Figur 4.1 viser god overenstemmelse mellom overflatehevningen ved midten av den smale bølgetanken og tilsvarende to-dimensjonale beregning.



Figur 4.1: Overflateheving midt i kanal ($x_2 = 0$km) for tre-dimensjonal beregning ved bruk av en veldig smal tank er gitt ved blå striplet linje. Den to-dimensjonale beregningen er gitt ved svart, heltrukken linje. RK4 er brukt med $h_1 = 46m$ og $h_2 = 23m$, $T\sqrt{g/h_1} = 80$ og $Fr = 0.53$. Kanalens lengde er $L_1/h_1 = 200$ i x_1-retning og $L_2/h_1 = 0.1$ i x_2-retning, hvor vi bruker henholdsvis $N_1 = 2400$ og $N_2 = 10$ punkter. Det grunnere partiet av havbunnen går fra $x_a = -0.7$km til $x_b = 0.0$ km.

4.2 Sammenligning av RK2 og RK4

En sammenligning av Runge Kutta metoden av andre og fjerde orden er gjennomført. Ved å skrive to uavhengige kildekoder med ulik metode for numerisk integrasjon kan vi være mer sikre på at det vi gjør er riktig. Et eksempel på dette er vist i figur 4.2.



Figur 4.2: Overflatehevning midt i kanal ($x_2 = 0$km) for $T\sqrt{g/h_1} = 40$. Figur viser en sammenligning av beregning med RK2 og RK4, for $h_1 = 46m$ og $h_2 = 23m$, og $Fr = 0.53$. Kanalens lengde er $L_1/h_1 = 200$ i x_1-retning og $L_2/h_1 = 0.1$ i x_2-retning, hvor vi bruker henholdsvis $N_1 = 2400$ og $N_2 = 408$ punkter. Det grunnere partiet av havbunnen går fra $x_a = -0.7$km til $x_b = 0.0$ km.

4.3 Konvergens

I denne seksjonen illustreres konvergens for beregninger av oppstrømsbølgen. Vi ser på tilnærminger til hastighetspotensialet langs bunnen, definert i Kapittel 3 ved likninger 3.18-3.20. Forskjellen mellom tilnærminger av størrelsesorden $\mathcal{O}(\beta)$ og $\mathcal{O}(\beta^2)$, i tillegg til effekten antall iterasjoner har på løsningen blir vist i figur 4.3. I alle følgende beregninger er det brukt en kortere kanal med lengde $L_1/h_1 = 100$ i x_1-retning og $L_2/h_1 = 52$ i x_2-retning, med henholdsvis $N_1 = 1200$ og $N_2 = 816$ punkter. Beregningene er utført med RK4, hvor den typiske vanndybden er satt til $h_1 = 46m$. Froude-tallet er gitt ved $Fr = 0.53$.

Siden tilnærmingene er utviklet til størrelsesorden β^n for $n = 0, 1, 2$, vil dybdeendringens størrelse, $\beta_{max} = \Delta h/2h_1$, påvirke hvordan løsningene konvergerer. Figur 4.3 (b) viser forskjellen i tilnærminger til størrelsesorden $\mathcal{O}(\beta)$ og $\mathcal{O}(\beta^2)$. En relativt liten forskjell i tilnærminger $k(\hat{\phi}_B)_0 + k(\hat{\phi}_B)_1$ og $k(\hat{\phi}_B)_0 + k(\hat{\phi}_B)_1 + k(\hat{\phi}_B)_2$ illustrerer konvergens av metoden. Figur 4.3 (a) bekrefter at et økende antall iterasjoner utgjør en relativt liten endring i beregningene.

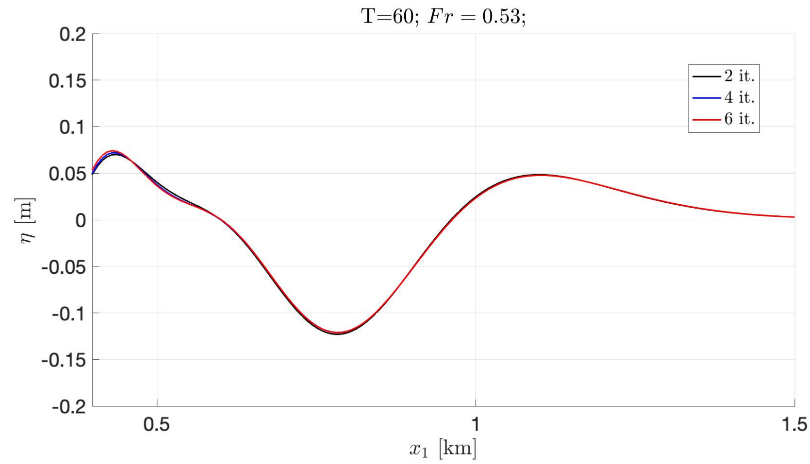
Vi kan få en idé om hvor stor "feil" vi gjør ved å se nærmere på forskjellen mellom to tilnærminger. For tilnærminger i figur 4.3 (b) kan vi definere henholdsvis $s_1 = k(\hat{\phi}_B)_0 + k(\hat{\phi}_B)_1$ og $s_2 = k(\hat{\phi}_B)_0 + k(\hat{\phi}_B)_1 + k(\hat{\phi}_B)_2$, slik at feilens størrelse beregnes ved summen av kvadratet i hvert punkt,

$$\texttt{sum}(|\Delta s|^2) = \texttt{sum}(|s_1 - s_2|^2) \tag{4.1}$$

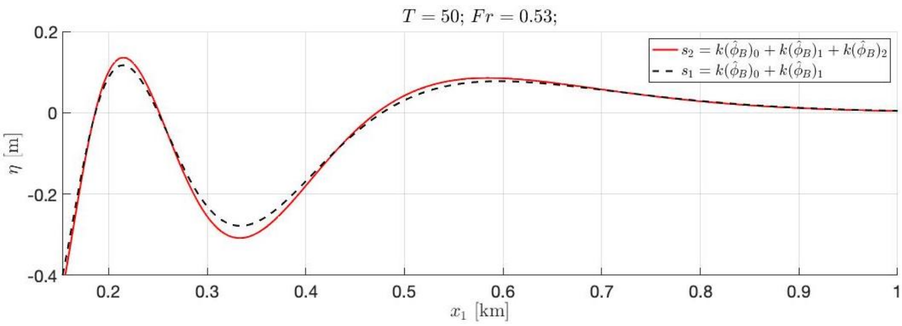
Denne størrelsen burde bli mindre ved en mindre dybdeendring, bestemt av $\beta_{max} = \Delta h/2h_1$. En varisjon i $\Delta h/h_1$ og tilsvarende forskjell i tilnærminger s_1 og s_2 er gitt i tabell 4.1 og bekrefter dette.

$\Delta h/h_1$	$\texttt{sum}(\lvert\Delta s\rvert^2)$
0.3	1.2800e-07
0.4	2.7940e-06
0.5	4.2043e-04

Tabell 4.1: Forskjell i tilnærminger s_1 og s_2 for en varisjon i $\Delta h/h_1$.



(a) Sammenligning av oppstrømsbølgen for beregninger med et økende antall iterasjoner ved $T = 60$.



(b) Sammenligning av tilnærminger, s_1 og s_2, til potensialet langs bunnen med og uten restledd gitt i likninger 3.18-3.20, til henholdsvis størrelsesorden $\mathcal{O}(\beta)$ og $\mathcal{O}(\beta^2)$. Beregninger er gjennomført med 4 iterasjoner til tiden $T = 50$.

Figur 4.3: Overflatehevning midt i kanal ($x_2 = 0$km) for $\Delta h/h_1 = 0.5$ ($h_2 = 23$m) og $Fr = 0.5328$.

4.4 Bredden på skipet

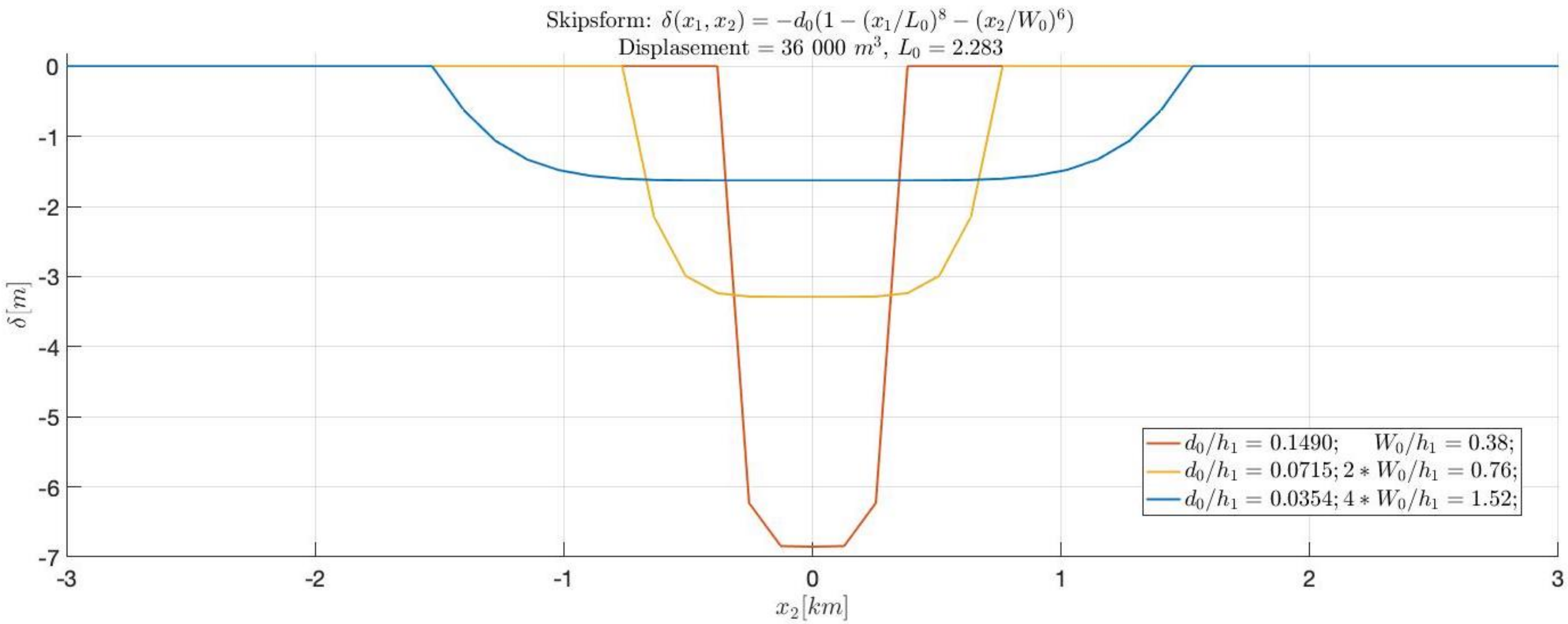
Grue (2020) benytter et skip med dimensjoner tilsvarende cruisefergene *Color Magic* og *Color Fantasy* i Oslofjorden. Når det videre refereres til “normal skipsbredde” referer vi til bredden på disse cruisefergene. En sammenligning av et skip med dobblet bredde og halvert dypgang avslører at de to tilfellene gir helt like resultater. Skipet med dobbelt bredde og halvert dypgang er i praksis svært urealistisk, ettersom det vil ligne mer på et stort flak enn et skip. Likevel er ikke dette av betydning når effekten er den samme. Dette gir oss en stor fordel i de påfølgende numeriske beregningene, fordi vi kan bruke det samme antallet beregningspunkter på en bredere tank med et bredere skip.

Figurer 4.5 og 4.6 bekrefter at beregningene våre gir samme resultat for ulike skipsbredder. Et skip med fire ganger normal skipsbredde blir også undersøkt. Dypgangen er tilpasset slik at deplasementet til skipet alltid forblir 36000m^3. De tre settene med skipsparametere er gitt i tabell 4.2 og en sammenligning av disse er illustrert i figur 4.4. I beregningene er det brukt en kanal med lengde $L_1/h_1 = 200$ i x_1-retning og $L_2/h_1 = 52$ i x_2-retning, med henholdsvis $N_1 = 1200$ og $N_2 = 408$ punkter. Beregningene er utført med RK4, hvor den typiske vanndybden er satt til $h_1 = 46m$. Froude-tallet er gitt ved $Fr = 0.53$.

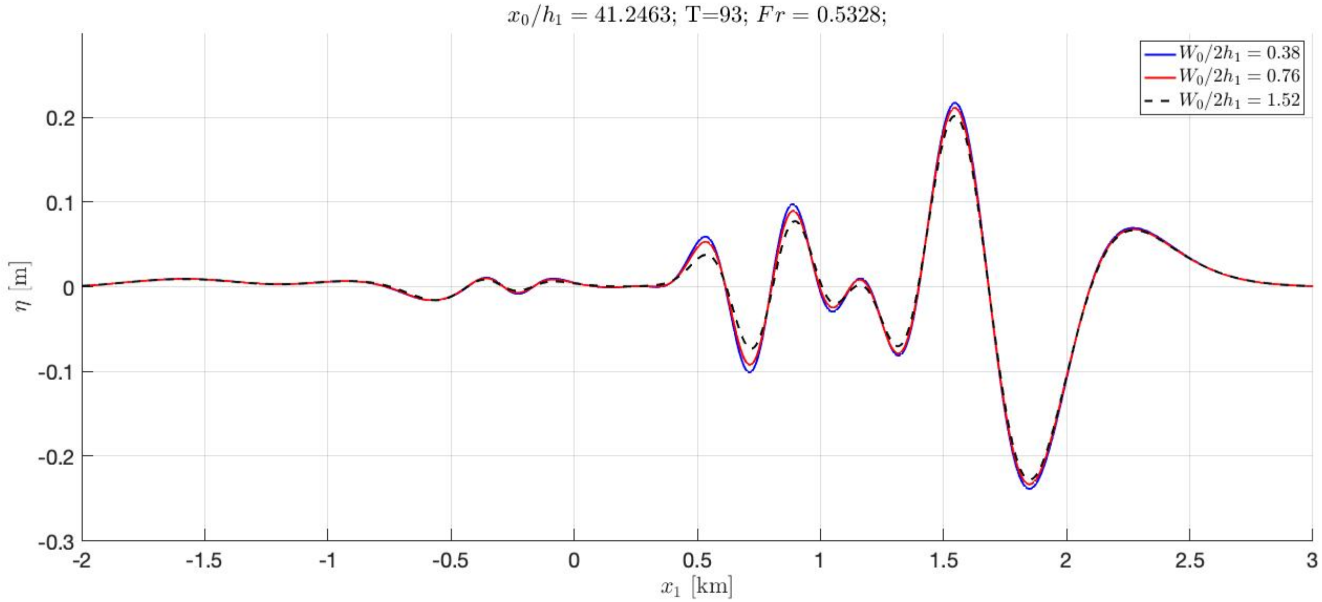
Et likt resultat for en bredere skipsgeometri viser også til at leddet $\mathcal{F}\{\delta V_F\}$ i likning 2.22 og 2.37 er av liten betydning. I denne oppgaven er dette leddet satt lik 0, tilsvarende trykkfordelingen benyttet i Grue (2017).

	$L_0/2h_1$	$W_0/2h_1$	d_0/h_1
Grue (2020)	2.283	0.38	0.149000
2x bredde	2.283	0.76	0.071517
4x bredde	2.283	1.52	0.035442

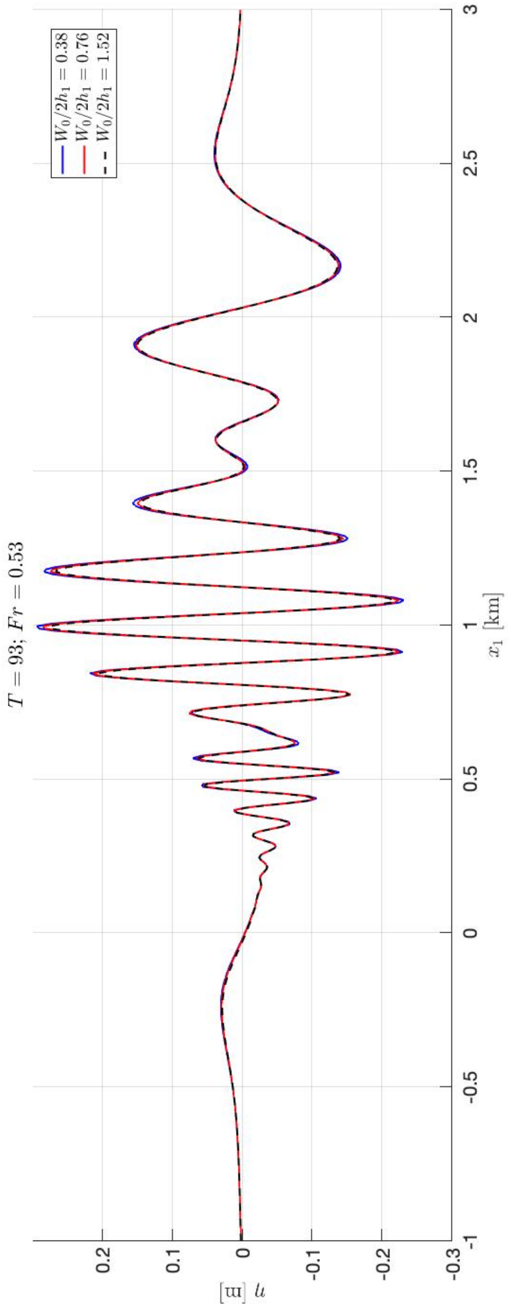
Tabell 4.2: Dimensjoner på skip gitt ved $\delta_2(\mathbf{x})$. Parametere er skalert med vanndybden h_1 og tilpasset slik at deplasementet forblir 36000m^3.



Figur 4.4: Illutrasjon av variasjonen i skipsbredde brukt i beregninger som følger i figur 4.5. Figuren viser et tversnitt av skipet i x_2-retning.



Figur 4.5: Ved kanalvegg ($x_2 = 1.2$km). Sammenligning av overflatebølger med skipsbredde fra Grue (2020) mot 2x og 4x denne størrelsen. I alle tilfeller er deplasementet på 36000m^3 bevart. RK4 er brukt med $h_1 = 46m$ og $h_2 = 20m$, $T = 93$ og $Fr = 0.53$. Kanalens lengde er $L_1/h_1 = 200$ i x_1 retning og $L_2/h_1 = 52$ i x_2 retning, hvor vi bruker henholdsvis $N_1 = 1200$ og $N_2 = 408$ punkter. 4 iterasjoner er brukt i alle beregninger. Skipets midt er ved $x_1 = 1.2073$ km.



Figur 4.6: Midt i kanal ($x_2 = 0$km). Sammenligning av overflatebølger med skipsbredde fra Grue (2020) mot 2x og 4x denne størrelsen. I alle tilfeller er deplasementet på 36000m^3 bevart. RK4 er brukt med $h_1 = 46m$ og $h_2 = 20m$, $T = 93$ og $Fr = 0.53$. Kanalens lengde er $L_1/h_1 = 200$ i x_1 retning og $L_2/h_1 = 52$ i x_2 retning, hvor vi bruker henholdsvis $N_1 = 1200$ og $N_2 = 408$ punkter. 4 iterasjoner er brukt i alle beregninger.

4.5 En oppsummering av kapittelet

Vi har sett på resultater som bekrefter at koden gjør som den skal. I hovedsak er det brukt en havbunn tilsvarende illustrasjonen i figur 3.3. For å oppsummere har vi kommet frem til følgende,

- Beregninger ved bruk av en smal numerisk tank i tre dimensjoner gir omtrent like resultater som beregninger i to dimensjoner.
- Numerisk integrasjon ved Runge Kutta metoden av andre og fjerde orden gir samme resultat.
- En mindre forskjell i vanndybde, dvs. lavere β_{max}, gir mindre forskjell mellom tilnærminger s_1 og s_2 til bølgen oppstrøms for skipet. Dette er vist både i tabell 4.1 og figur 4.3 (b) og illustrerer konvergens av metoden beskrevet i Kapittel 2.
- Både 2, 4 og 6 iterasjoner i beregning av $\hat{A}_1$ gir omtrent like resultater for oppstrømsbølgen.
- Effektene av dybdeendringen er tilnærmet uendret for normal skipsbredde, 2x normal skipsbredde og 4x normal skipsbredde, med dybgang justert slik at deplasementet forblir 36000 m^3.

KAPITTEL 5

Mini-tsunamien i Oslofjorden

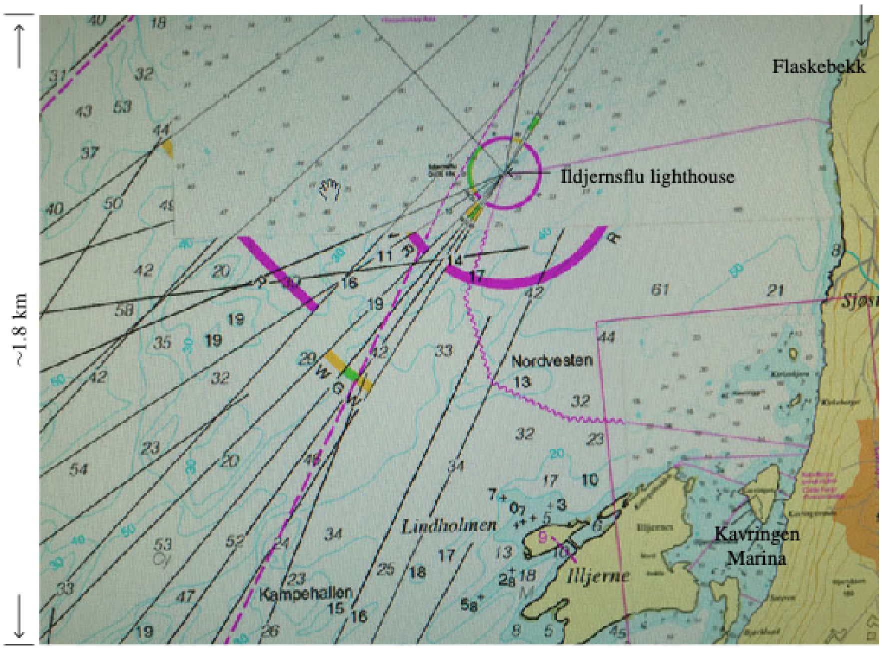
I dette kapittelet skal vi se på en simulering av mini-tsunamien i Oslofjorden. Beregningene sammenlignes med resultater fra Grue (2020), i tillegg til observasjoner fra beboerene på Flaskebekk. Til slutt blir en mer detaljert beskrivelse av mekanismen bak fenomenet presentert.

Mini-tsunamien blir generert på et punkt rett bak Ildjernsflu fyrtårn, vist i figur 5.1. Årsaken til bølgen ligger i havbunnens variasjon i området. En grunne, rundt 14m dyp, begynner sør for Ildjernsflu og strekker seg 700m langs skipsruten (Grue 2017). Dybden før og etter den grunnere regionen er henholdsvis 46m og 60m. Gjennom dette kapittelet bruker vi en svært forenklet modell av havbunnen, hvor $h = 46$m både før og etter dybdeendringen som vist i figur 3.3. Avstanden fra den typiske skipsruten til havna på Flaskebekk er estimert til å være 1.2km. Stortsett alle figurer og beregninger i dette kapittelet benytter metode og numerisk implementasjon introdusert i Kapittel 3 og Kapittel 4. Fremstillingen av resultatene er inspirert av Grue (2020).

5.1 Observasjoner

Flaskebekk er et område på nordvestsiden av Nesodden (se figur 5.1). I 2004 introduserte Color Line to nye cruiseferger med bildekk, *Color Fantasy* og *Color Magic*. Cruisefergene er begge 224m lange, nesten 50m lengere enn både *Pearl* og *Crown Seaways* fra DFDS (Grue 2017). Samtidig begynte beboerne på Flaskebekk å legge merke til skade på den eldre bebyggelsen som ligger helt nede ved fjorden. Store bølger gravde ut grunnen under badehusene fra 1800-tallet. En større hovedbølge etterfulgt av flere kortere bølger ble observert hver gang cruisefergene passerte opp fjorden.

I 2016 ble et begrenset antall bølgehøyder og perioder målt. Bølgehøyden på Flaskebekk er blant annet dokumentert ved bilder tatt av Tore Henning Larsen. Figur 5.2 viser vannstanden ved maksimum og minimum bølgehøyde. Hvert trappetrinn er målt til å være 17 cm. Grue (2020) bruker dette til et grovt estimat på bølgehøyden og regner med at forskjellen i vannstand er mellom 5 og 6 trappetrinn, tilsvarende en bølge på 0.9 m. Skipets hastighet ble samtidig registrert til 22 knop. I tillegg har det blitt målt en rekordhøy bølgehøyde på 1.4 m av beboer E. Staff (Grue 2017), ved bruk av en målestokk. Grue (2017) har registrert bølgenes periode ved Flaskebekk, med stoppeklokke. Den ledende bølgen fra *Color Fantasy* hadde en periode på $T = 70$ s. Dette tilsvarer en bølgelengde lik $\lambda = cT \simeq 820$ m, hvor gruntvannshastigheten $c = \sqrt{gh_2}$, med $h_2 = 14$m er brukt. I tillegg til mål av bølgehøyde og periode har også tilsvarende skipshastighet blitt registrert. For cruisefergene til Color Line er det dokumentert skipshastigheter som varier i området $7 - 11$ ms^{-1} (Grue 2017).



Figur 5.1: Ildjernflu fyrtårn og havnen på Flaskebekk i Oslofjorden. Skipsruten går til venstre for lilla, striplet linje. Kartet er et utsnitt hentet figur 2 av Grue (2020).

(a)

(b)

Figur 5.2: Maksimum (a) og minimum (b) vannstand i havnen på Flaskebekk. Bildene er tatt av Tore Henning Larsen.

5.2 Sammenligning ved kanalvegg

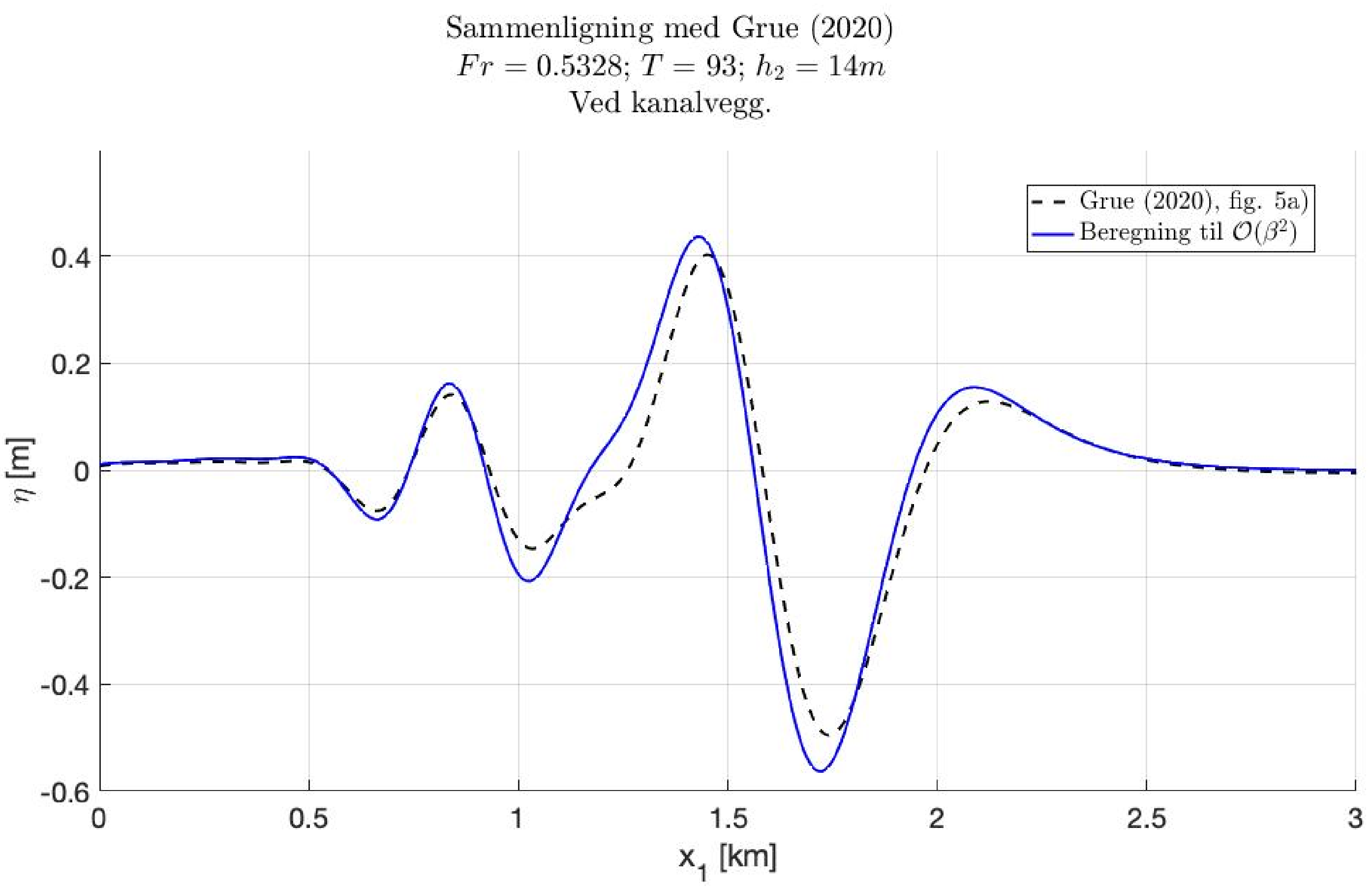
Siden alle observasjoner er dokumentert fra havna på Flaksebekk, er det hensiktsmessig å se på beregninger av bølgesystemet ved kanalveggen ($x_2 = 1.2$km). Grue (2020) visuliserer beregnet overflatehevning ved observasjonspunktet på Flaskebekk i figur 5a). Beregningene er gjennomført til $\mathcal{O}(\beta^3)$ og er derfor mer nøyaktig enn beregningene i denne oppgaven. Likevel gir en sammenligning en god indikasjon på gyldigheten av resultatene våre.

Alle størrelser, inkludert skipets form gitt i likning 3.22 og dybdeendringen gitt i likning 3.27, er lik størrelser brukt i beregninger av Grue (2020). Dimensjonene på skipet er satt slik at de tilsvarer dimensjonene til *Color Magic* og *Color Fantasy*. Dette er gitt i tabell 4.2, under Grue (2020). Kanalens lengde satt til $L_1/h_1 = 200$ i x_1-retning og $L_2/h_1 = 52$ i x_2-retning, hvor vi bruker henholdsvis $N_1 = 1200$ og $N_2 = 408$ punkter. Det vil si en 9.2 km lang kanal, med en bredde på ± 1.2 km. Kanalens midt er satt til $(x_1, x_2) = (0.0, 0.0)$ km. Dybdeendringen begynner ved $x_a = -0.7$ km og slutter ved $x_a = 0.0$ km, hvor stigningsparameteren er gitt ved $\alpha = 0.35$. Skipet begynner i ro, 8 vanndybder før dybdeendringen.

Beregningene er gjennomført for $Fr = 0.5328$, eller en skipshastighet lik $U \simeq 11.32ms^{-1} \simeq 22$ knop. Dette tilsvarer hastigheten registrert for dokumentert bølgehøyde i figur 5.2. Den høyeste hastigheten registrert av beoboerene på Flaskebekk var på $U \simeq 23$ knop (Grue 2020). Figur 5.3 viser overflatehevningen ved kanalveggen ved $T\sqrt{g/h_1} = 93$. Et tidskritt på $dt\sqrt{g/h_1} = 0.04$ er brukt. Svart, striplet linje viser resultater fra Grue (2020). Blå linje tilsvarer våre beregninger. I tillegg viser tabell 5.1 tilsvarende bølgehøyder ved kanalveggen for de ulike beregningene samt for observasjoner gjort på Flaskebekk.

	Bølgehøyde ved kanalvegg [m]
Observasjoner	0.90
Grue (2020)	0.89
Våre beregninger	0.99

Tabell 5.1: Bølgehøyde observert på Flaskebekk sammenlignet med våre beregninger og resultater fra Grue (2020).



Figur 5.3: Sammenligning med resultater fra Grue (2020), figur 5a) for overflatehevningen ved kanalvegg ($x_2 = 1.2$km). Parametere er lik Grue (2020), det vil si $h_1 = 46m$ og $h_2 = 14m$, $T = 93$ og $Fr = 0.5328$. Beregningene er utført med RK4, 2 iterasjoner og inkluderer restleddet tilnærmet til $\mathcal{O}(\beta^2)$.

5.3 Genereringsmekanismen

I denne seksjonen presenteres genereringsmekanismen bak mini-tsunamien i Oslofjorden. Beskrivelsen i denne seksjonen er basert på arbeid presentert i Grue (2020). Figur 5.6 viser konturplott fra våre bergeninger av skipets baug ved inngangen av dybdeendringen (a), av skipet midt i den grunnere regionen (b) og av skipets hekk når den passerer utgangen av dybdeendringen (c). Våre beregninger av bølgesystemet tilsvarende det som er observert på Flaskebekk er vist i figur 5.7, hvor skipet har reist 1.5 km etter dybdeendringen. Kun halvparten av beregningsområdet er vist grunnet symmetrien i kanalen. Figur 5.5 (hentet fra Grue 2020) illustrerer hastighetsfeltet til fluidet langs bunnen når skipets baug og hekk passerer dybdeendringen fra dypere til grunnere region og fra grunnere til dypere region igjen. Tilsammen forklarer dette genereringsmekanismen bak bølgesystemet og hvordan det utvikler seg.

I oppstartsfasen av simuleringen beveger skipet seg langs en flat bunn. Det betyr at $\beta = 0$ og $\varphi = 0$, slik at bevegelsen til fluidet kun er beskrevet av ϕ_0. Ingen overflatebølger vil forekomme fordi vi benytter en dobbeltlegemeløsning, hvor skipet speiles om flaten F. Et skip i bevegelse over en flat bunn skyver fluidet nedover og under seg, som vist i figur 5.5 (a) og (d) for henholdsvis skipets baug og hekk. Figur 5.4 illusterer dette ved et øyeblikksbilde av den horisontale hastighetskomponenten langs havbunnen, B, for $Fr = 0.53$. Hastighetskomponenten er symmetrisk om skipets midt, og figuren viser derfor kun halvparten av kurven. Skipet er 210 m langt, slik at enden på skipets baug ligger ved $x_1 = 105$m i figur 5.4. Skipets midtpunkt er gitt ved $x_1 = 0$m. Rundt 100 m foran og bak skipets midtpunkt blir horisontalhastigheten postiv. Dette stemmer med piler som peker til høyre (i skipets bevegelsesretning) i figur 5.5 (a) og (d). Langs havbunnen under skipet ($x_1 = [-100, 100]$ m) er hastighetskomponenten negativ, tilsvarende piler som peker til venstre (mot skipets bevegelsesretning) 5.5 (a) og (d).

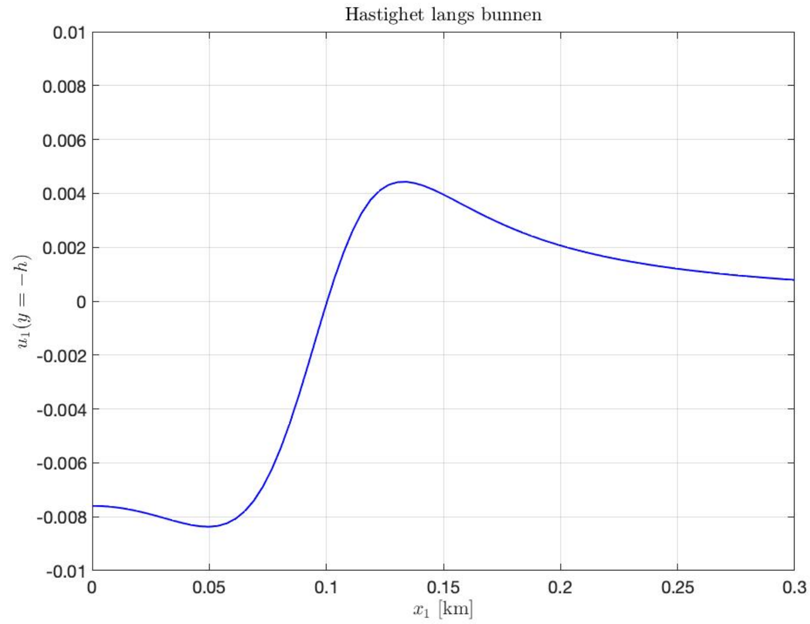
Når skipet beveger seg over dybdeendringen ($\beta \neq 0$) vil en normal reaksjonshastighet virke på fluidet. Her er uttrykket "reaksjonshastighet" et forsøk på en oversettelse av "reaction velocity" fra Grue (2020), og betegner hastigheten fluidet får ved den nye vanndybden som følge av den skipsinduserte hastigheten. Vannet som normalt skyves ned mot den flate bunnen vil nå møte på en helning på den nye vanndybden $-h + \beta$ og bli sendt tilbake normalt fra havbunnen. Reaksjonshastigheten kan forklares ved å se nærmere på definisjonen av $\hat{A}_1$ fra Kapittel 2. Vi har at,

$$\hat{A}_1 = i\mathbf{k} \cdot \mathcal{F}\{\beta \nabla_1 \phi_B\} = \mathcal{F}\{\nabla_1 \cdot (\beta \nabla_1 \phi_B)\} \tag{5.1}$$

slik at en inverstransform gir,

$$A_1 = \nabla_1 \cdot (\beta \nabla_1 \phi_B) = \nabla_1 \beta \cdot \nabla_1 \phi_B + \beta \nabla_1^2 \phi_B \tag{5.2}$$

Hvis dybdeendringen er liten kan vi tilnærmet si at $\nabla_1 \phi_B \simeq (u, v)$, hvor u og v er hastighetskomponenter i henholdsvis x_1- og x_2-retning. På samme måte kan vi tilnærme $\nabla_1^2 \phi_B \simeq \nabla_1^2 \phi = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial w}{\partial y}$, hvor w er hastighetskomponenten i



Figur 5.4: Horisontal hastighetskomponent langs flat bunn. Her er u_1 skalert med $\sqrt{gh}$. Vanndybden ved flat bunn er $h = 46m$ og $Fr = 0.53$. Kun halve plottet er vist grunnet symmetri. $x_1 = 0.0$km tilsvarer bunnen under skipets midtpunkt.

y-retning. Vi har brukt at hastighetspotensialet, ϕ, oppfyller Laplace-likningen ($\nabla^2\phi = \nabla_1^2\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$). Dermed kan likning 5.2 uttrykkes ved,

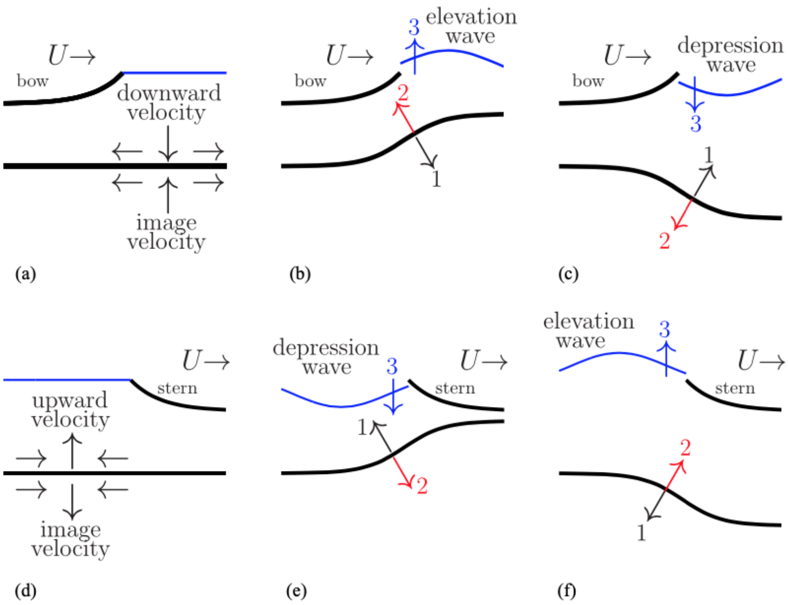
$$A_1 \simeq u\frac{\partial\beta}{\partial x_1} + v\frac{\partial\beta}{\partial x_2} - \beta\frac{\partial w}{\partial y} \tag{5.3}$$

I tillegg kan vi tilnærme $\beta\frac{\partial w}{\partial y} \simeq w|_{-h+\beta}$. Normal hastigheten langs bunnen er gitt ved $v_n \equiv \sqrt{1+|\nabla_1\beta|^2}\mathbf{n}_B \cdot \nabla\phi_B$. Her har vi multiplisert med $\sqrt{1+|\nabla_1\beta|^2}$ for å gjøre uttrykket litt penere. Ved bruk av likning 2.10 gir dette, $v_n = u\frac{\partial\beta}{\partial x_1} + v\frac{\partial\beta}{\partial x_2} - w$, og tilsvarer det negative av høyresiden i likning 5.3 slik at,

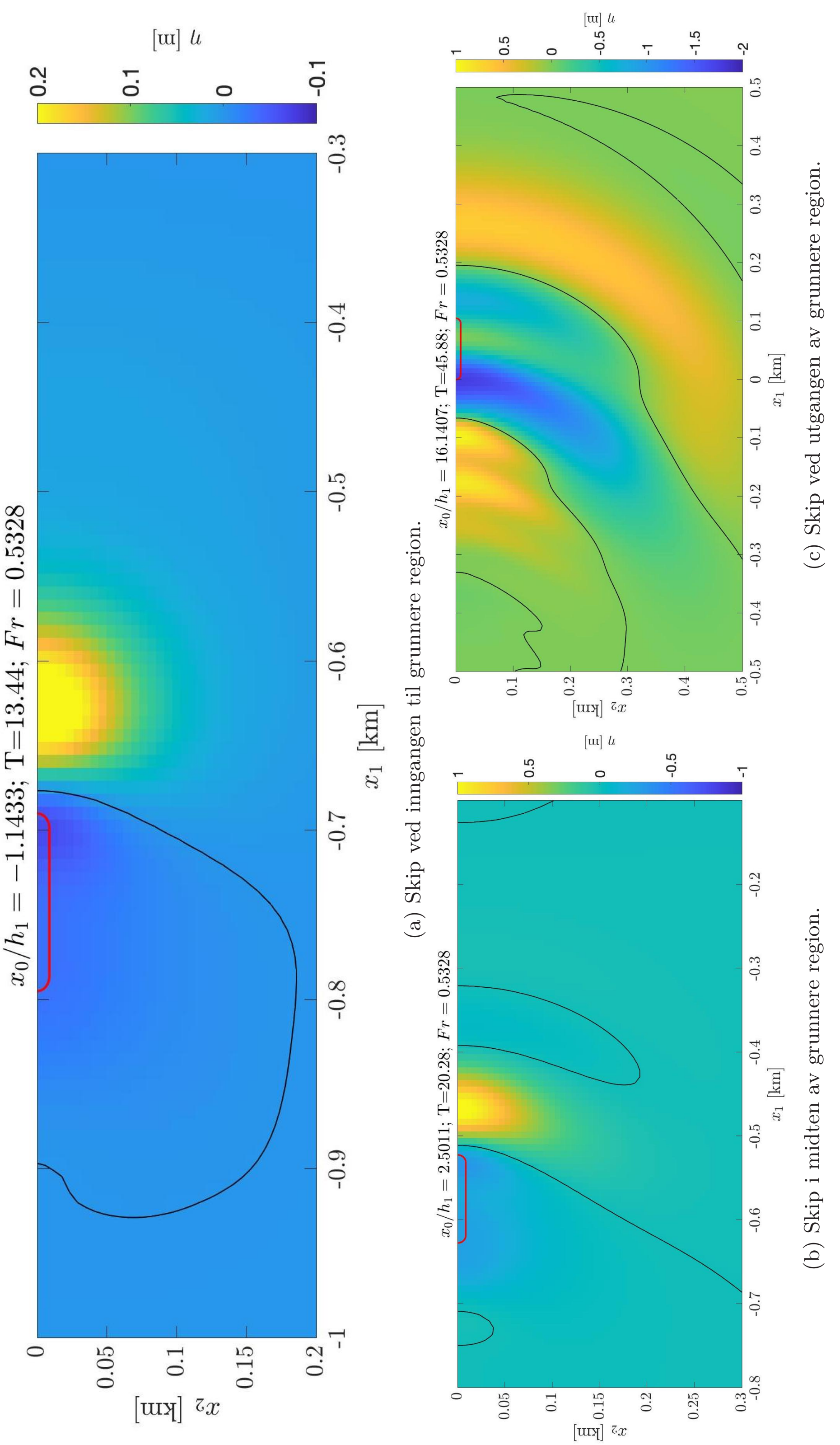
$$A_1 = -v_n \tag{5.4}$$

Dermed vil normalhastigheten langs den nye vanndybden fortsatt være lik null. Dette gir mening siden fluidet ikke kan strømme gjennom havbunnen. Likning 5.4 gir en matematisk forklaring på genereringsmekanismen. Når skipets baug passerer den initielle dybdereduksjonen, vil normalhastigheten v_n tilsvare pil 1 i figur 5.5 (b). Reaksjonshastigheten tilsvarer pil 2 og er beskrevet av fluksleddet $\hat{A}_1 = -v_n$. Fluksleddet $\hat{A}_1$ beskriver interaksjonen mellom skipet og dybdeendringen. Ved likning 2.49 får vi en vertikal hastighet ved havoverflaten, $\mathcal{F}^{-1}\{\hat{A}_1/\cosh(kh)\}$, illustrert ved pil 3 figur 5.5 (b), som skaper en hevning foran skipet. Et tilsvarende konturplott er gitt i figur 5.6 (a). Innen skipet har nådd midten av den grunnere regionen måler bølgen 1m, som vist i figur 5.6 (b). Bølgehøyden avtar raskt i x_2-retning. Vi vil få en lik men motsatt effekt når skipets hekk beveger seg over den initielle dybdeendringen. Alle hastighetsvektorer blir reversert, som vist i figur 5.5 (e). En senkning av overflaten oppstår bak skipet.

Ved en dybdeøkning er situasjonen er igjen reversert. Når baugen til skipet passerer utgangen av den grunnere regionen dannes det en senkning av overflaten foran skipet, illustrert ved figur 5.5 (c). En bølgehevning utvikles bak skipet når hekken passerer dybdeendringen fra grunt til dypere vann, vist i figur 5.5 (f). Merk at en del av disse bølgene forplanter seg i motsatt retning av skipets bevegelse. Det dominerende langbølgesystemet består av en ledende hevning, fulgt av en senkning og deretter enda en hevning og forplanter seg oppstrøms for skipet. De kortere bølgene følger bak skipet. Bølgesystemet når skipets hekk passerer den siste dybdeendringen er vist i figur 5.6 (c). Observasjonspunktet på Flaskebekk tilsvarer $x_1 = 1.5$ km i figur 5.7. Dette er avstanden mellom Flaskebekk og utgangen av den grunnere regionen. På et tidspunkt treffer bølgesystemet kanalveggen og reflekteres tilbake.



Figur 5.5: Reaksjonshastigheter og resulterende overflatehevning ved skipets baug for (a) flat bunn (b) dybdereduksjon (c) dybdeøkning, samt ved skipets hekk for (d) flat bunn (e) dybdereduksjon (f) dybdeøkning. Illustrasjonen er laget av Grue (2020).

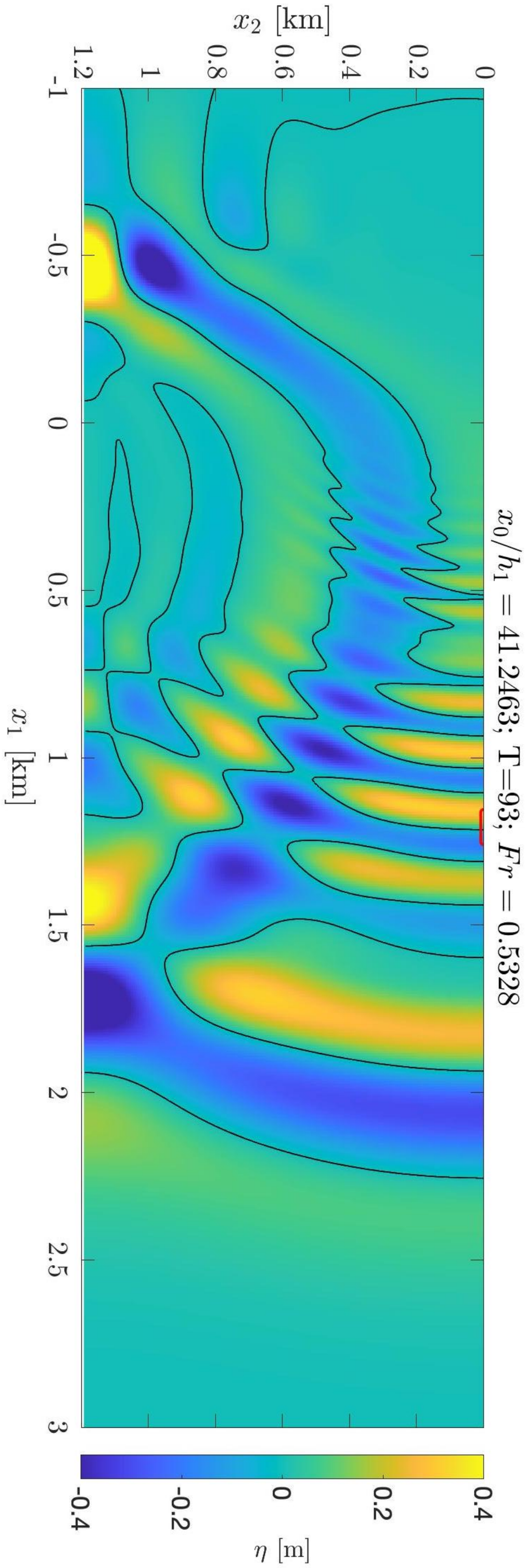


(a) Skip ved inngangen til grunnere region.

(b) Skip i midten av grunnere region.

(c) Skip ved utgangen av grunnere region.

Figur 5.6: Skip som beveger seg over dybdeendringen ved Ildjernsflu.



Figur 5.7: Skip ved observasjonspunkt på Flaskebekk ($x_1 = 1.5$ km).

KAPITTEL 6

Skip ved kritisk hastighet

I dette kapittelet undersøkes skip som beveger seg over en dybdeendring slik at det lokale Froude-tallet går over i det transkritiske regimet. Gjennom hele kapittelet bruker vi notasjonen $Fr_1 = U/\sqrt{gh_1}$ og $Fr_2 = U/\sqrt{gh_2}$. Dette tilsvarer Froude-tall henholdsvis før og etter dybdeendringen. Vi ser på hvordan oppstrømsbølgen utvikler seg over tid, i tillegg til variasjoner i bølgelengde og bølgehøyde for forskjellige Froude-tall. Et snitt av bølgesystemet som brer seg til siden for skipet blir presentert. Til slutt ser vi på hva som skjer om vi varierer det initielle vanndypet h_1.

6.1 Effekter ved transkritiske skipshastigheter

Skipets initielle Froude-tall, Fr_1, justeres utifra ønsket Froude-tall, Fr_2, i den grunnere regionen av tanken. Dette gjøres ved at hastigheten U holdes konstant. For et kritisk Froude-tall etter dybdeendringen krever vi at

$$Fr_2 = \frac{U}{\sqrt{gh_2}} = 1 \tag{6.1}$$

Dette gir en skipshastighet lik $U = \sqrt{gh_2}$, og tilsvarer $U \simeq 14$ ms^{-1}. Det er litt høyrere enn hva som er realistisk for skipene i Oslofjorden, hvor den høyeste skipshastigheten dokumentert var på rundt 23 knop (Grue 2017). Vi setter inn skipshastigheten i uttrykk for Fr_1, og får

$$Fr_1 = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \tag{6.2}$$

Generelt bruker vi

$$Fr_1 = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} Fr_2 \tag{6.3}$$

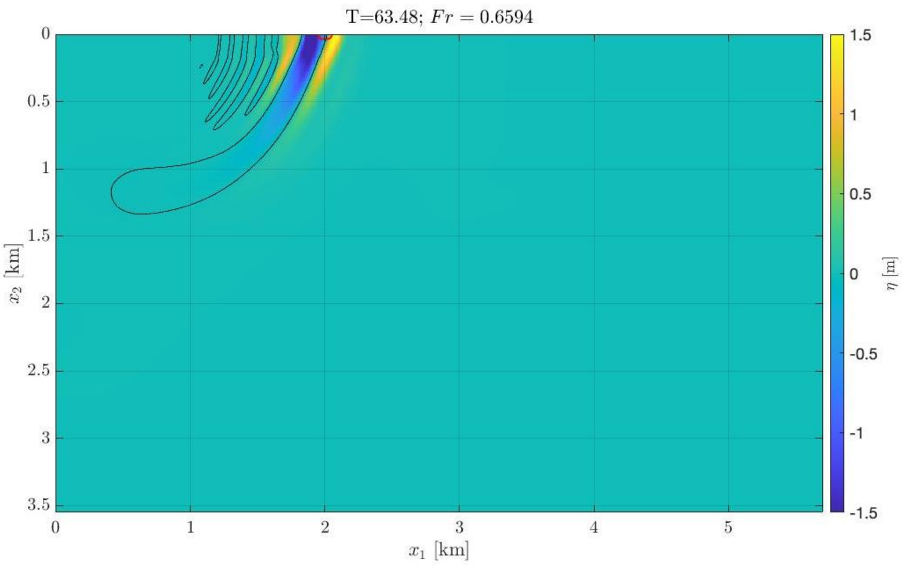
for ønsket Fr_2. Tabell 6.1 oppsummerer Froude-tall og skipshastigheter benyttet i beregninger i dette kapittelet.

Vi skal benytte en bunntopografi tilsvarende illustrasjonen vist i figur 3.4, med vanndybder satt til $h_1 = 46$ m og $h_2 = 20$ m (som gir $\Delta h/h_1 = 0.565$). Dybdeendringen er flyttet fremover i forhold til det som er gitt i figur 3.4 og begynner ved $x_1 = 0.46$ km for beregninger i dette kapittelet. Skipet begynner 8 vanndybder før dette, ved $x_1 = 0.092$ km. Den bredeste skipsvarianten er anvendt for å kunne kjøre beregninger med en bredere kanal. Kanalens lengde er $L_1/h_1 = 250$ i x_1-retning og $L_2/h_1 = 156$ i x_2-retning, hvor vi bruker henholdsvis $N_1 = 1500$ og $N_2 = 408$ punkter. Dette tilsvarer et beregningsområde på 11.5 km i x_1-retning og 7.2 km x_2-retning. Hovedpoenget med å benytte et så stort beregningsområde er å unngå at bølgesystemet når kanalveggen. Dermed vil det ikke forekomme påvirkning fra reflekterte bølger.

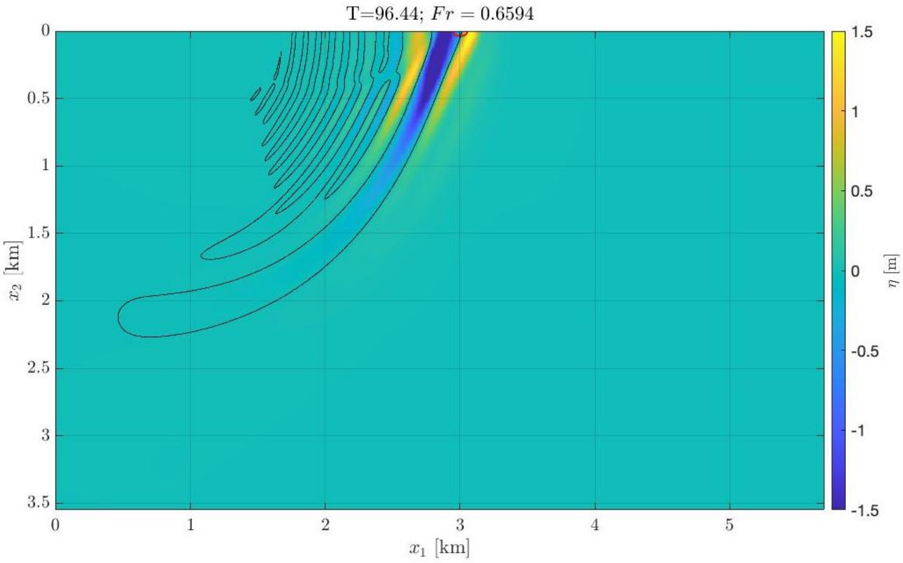
Figurer 6.1 - 6.4 viser hvordan bølgesystemet for et skip med lokalt Froude-tall $Fr_2 = 1.0$ utvikler seg over tid. Et rødt rektangel angir skipet og skipsposisjonen. Skipet har reist 1 km mellom hver figur. Kun halvparten av beregningsområdet er vist grunnet symmetrien om x_1-aksen. Vi ser at oppstrømsbølgen følger skipet over tid. Kortere bølger utvikler seg bak skipet. Hovedbølgen foran skipet har en slags "V"-form, slik at deler av bølgesystemet beveger seg ut til siden med en vinkel på x_1-aksen. Dette blir sett nærmere på i videre seksjoner. Tilsvarende konturplott for $Fr_2 = 0.95$, $Fr_2 = 1.05$ og $Fr_2 = 1.1$ er gitt i Tillegg B.

Fr_1	Fr_2	U [ms^{-1}]
0.6264	0.95	13.31
0.6594	1.00	14.00
0.6923	1.05	14.71
0.7253	1.10	15.41

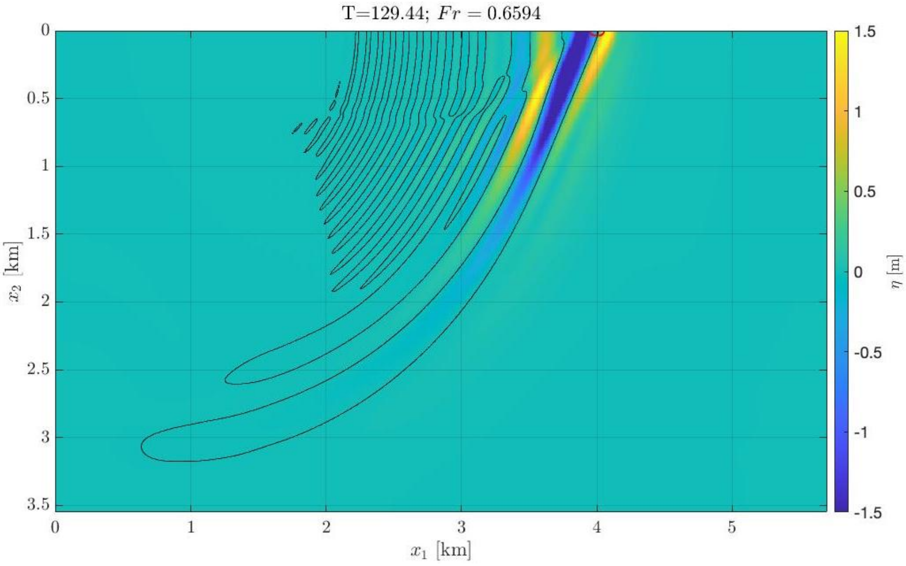
Tabell 6.1: Froude-tall før og etter dybdeendring, og tilsvarende skipshastighet for $h_2 = 46$m og $h_2 = 20$m.



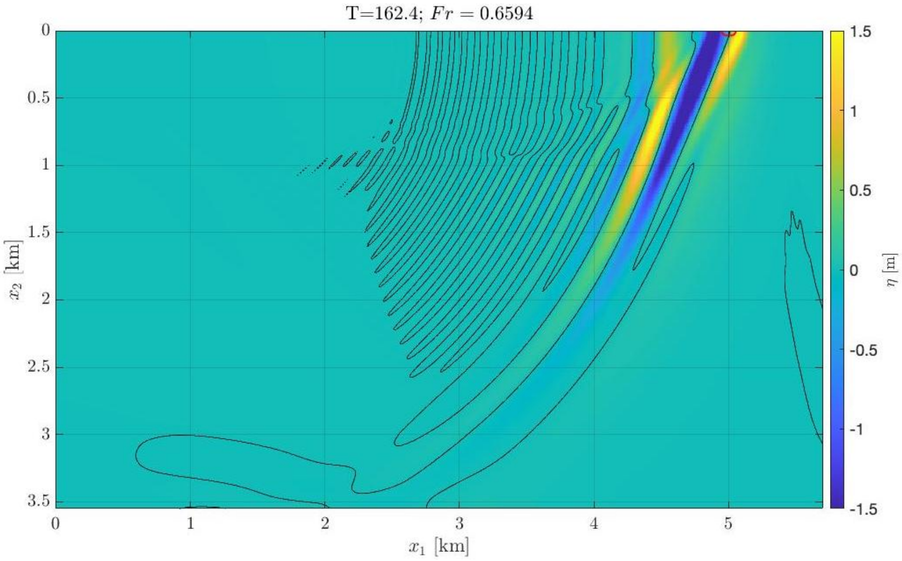
Figur 6.1: Skip med lokalt Froude-tall $Fr_2 = 1.0$ for dimensjonsløs tid $T\sqrt{g/h_1} = 63.48$.



Figur 6.2: Skip med lokalt Froude-tall $Fr_2 = 1.0$ for dimensjonsløs tid $T\sqrt{g/h_1} = 94.44$.



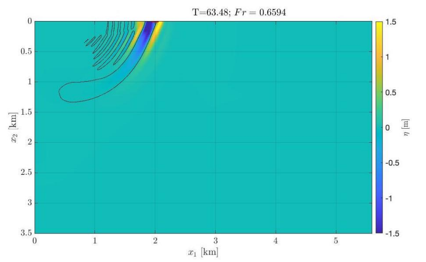
Figur 6.3: Skip med lokalt Froude-tall $Fr_2 = 1.0$ for dimensjonsløs tid $T\sqrt{g/h_1} = 129.44$.



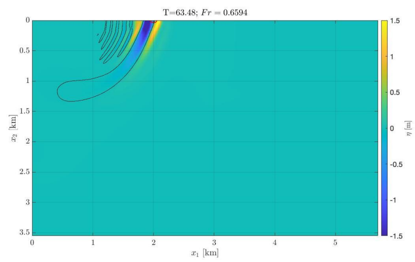
Figur 6.4: Skip med lokalt Froude-tall $Fr_2 = 1.0$ for dimensjonsløs tid $T\sqrt{g/h_1} = 162.40$.

6.2 Skipsbredden

Figur 6.5 viser bølgesystemet rett etter dybdeendringen for (a) vanlig skipsbredde (lik *Color Magic* og *Color Fantasy*) og (b) fire ganger denne skipsbredden. En sammenligning av de to tilfellene er vist i figur 6.6, og bekrefter på nytt resultatene fra Kapittel 4 og fra Grue (2020).

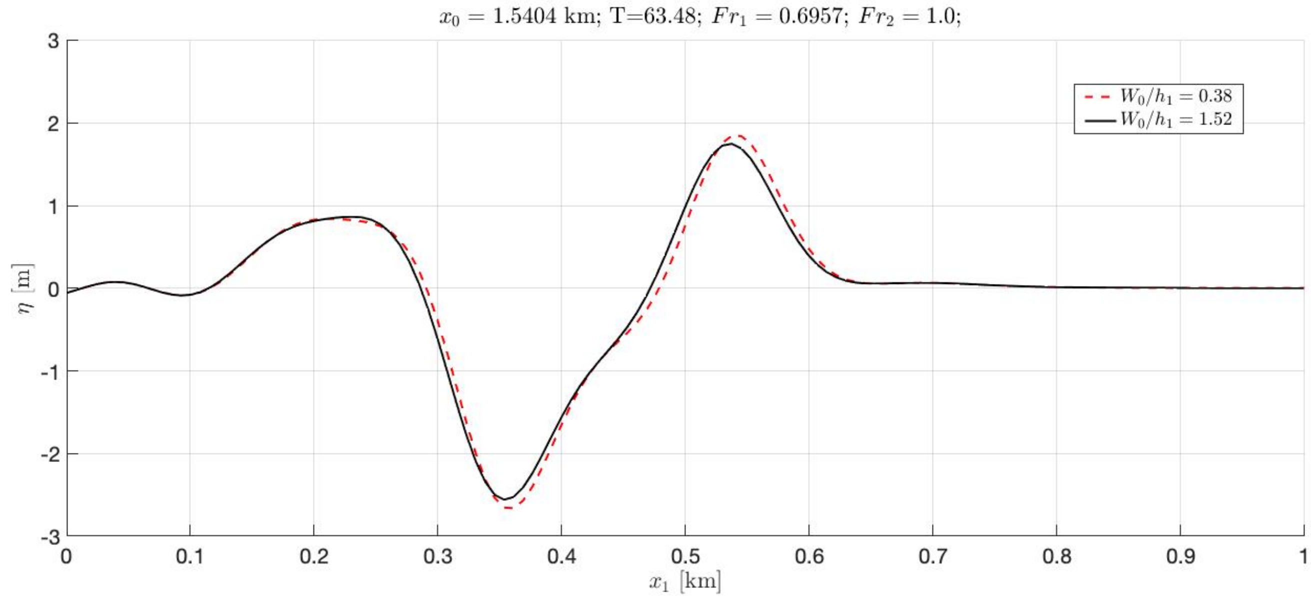


(a) Normal skipsbredde lik *Color Magic* og *Color Fantasy*.



(b) Skip med fire ganger normal bredde. Dypgangen er justert slik at deplasementet er det samme.

Figur 6.5: Skip som beveger seg inn i grunnere region slik at $Fr_2 = 1.0$. Rød rektangel viser skipets størrelse og posisjon.



Figur 6.6: Oppstrømsbølgen for første tidspunkt $T = 63.48$. Rød, striplet linje og svart, heltrukken linje viser henholdsvis vanlig skipsbredde (lik Grue (2020)) og 4x denne skipsbredden. $x_1 = 0$ tilsvarer midten av skipet ved angitt tid, T. Tiden er skalert slik at $T = \sqrt{\frac{g}{h_1}}t$.

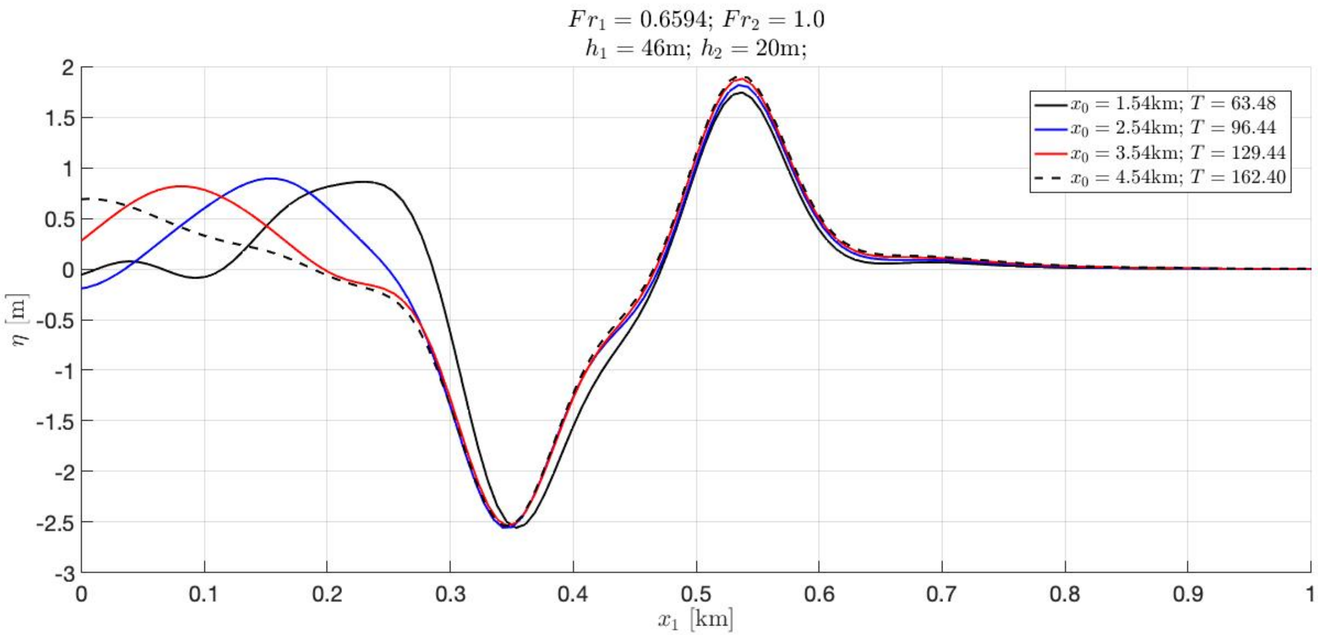
6.3 Oppstrømsbølgen over tid

Vi er interessert i hvordan oppstrømsbølgen utvikler seg over tid. Mer spesifikt lurer vi på om bølgen er stasjonær, det vil si om bølgen forandrer form, størrelse eller posisjon over tid. For å undersøke dette ser vi på et snitt langs x_1-aksen, midt i kanalen. Dette er gjort for de fire ulike tidspunktene i figurer 6.1-6.4. Kurvene er plottet med skipets midtposisjon som referansepunkt, gitt ved $x_1 = 0.0$km. På denne måten er det lett å sammenligne oppstrømsbølgen etterhvert som skipet beveger seg fremover. Figur 6.7 viser dette for $Fr_2 = 1.0$. Tilsvarende er gjort for $Fr_2 = 0.95$, $Fr_2 = 1.05$ og $Fr_2 = 1.1$ og er gitt i figurer B.2, B.5 og B.8, i Tillegg B.

For alle fire tilfeller er oppstrømsbølgens posisjon, form og størrelse lik over tid, noe som tyder på at en stasjonær bølge utvikles. Tabell 6.2 viser relativ bølgehøyde og bølgelengde i forhold til det lokale vanndypet (h_2) for forskjellige Froude-tall, i tillegg til avstanden mellom oppstrømsbølgens maksimumspunkt og skipets midt (Δx_1). Størrelser er beregnet for det siste tidspunktet, når skipet har reist rundt 4.5 km etter dybdeendringen. Da kan vi være mer sikre på at oppstrømsbølgen har blitt stasjonær. Bølgehøyden er målt som maksimalt avvik fra $y = 0$, ved bruk av `max()` funksjonen i MATLAB. Mål av bølgelengden er mindre nøyaktig, ettersom det er vanskelig å bedømme når oppstrømsbølgen begynner og slutter. Vi har derfor målt halve bølgelengden, det vil si kun den delen av oppstrømsbølgen som er over y-aksen.

Fr_2	$\|\eta_{max}\|/h_2$	$\frac{\lambda_{max}}{2}/h_2$	Δx_1 [m]
0.95	0.1057	6.90	542
1.00	0.0958	7.65	535
1.05	0.0822	8.05	531
1.10	0.0731	9.60	528

Tabell 6.2: Bølgehøyde og bølgelengde til stasjonær oppstrømsbølge for varierende Froude-tall, hvor $h_2 = 46$m og $h_2 = 20$m. Δx_1 angir avstanden mellom oppstrømsbølgens maksimumspunkt og skipets midt.



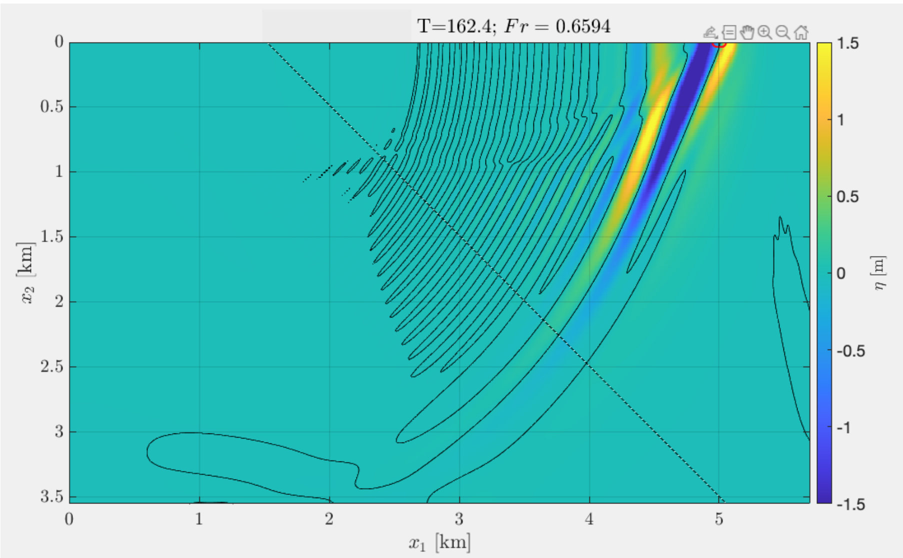
Figur 6.7: Oppstrømsbølgen over tid for $Fr_2 = 1.0$. De fire kurvene tilsvarer et snitt langs x_1 aksen, midt i kanalen. Alle kurver er plottet slik at $x_1 = 0$ tilsvarer midten av skipet ved angitt tid, T. Tiden er skalert slik at $T = \sqrt{\frac{g}{h_1}}t$.

6.4 Bølgene som brer seg ut til siden

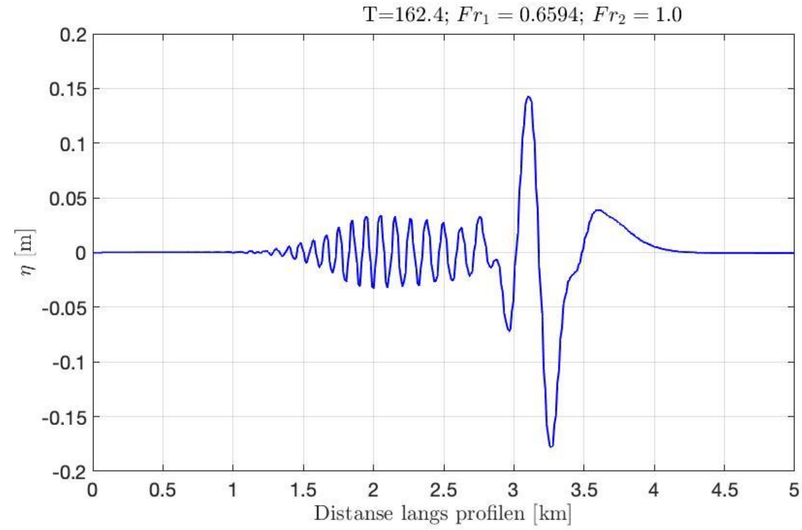
Vi har sett at deler av bølgesystemet brer seg ut til siden med en vinkel på x_1-aksen. Et snitt av bølgesystemet rundt 45 grader på x_1-aksen er vist i figur 6.8. Figur 6.9 viser bølgene langs denne linjen. Dette er gjort ved MATLAB sin `improfile` funksjon. Tilsvarende plott langs den samme linjen er vist for $Fr_2 = 0.95 - 1.10$ i Tillegg B, i figurer B.3, B.6 og B.9. En sammenligning er vist i figur 6.10 Tabell 6.3 viser ekstremal verdier av overflatehevningen langs linjen i 6.8 for en variasjon i Froude-tall. Størrelsene x_{max} og x_{min} betegner posisjonen til henholdsvis maksimum og minimumspunktet til overflatehevningen langs profilen (det er altså ikke verdier av x_1). Forskjellen $|x_{max} - x_{min}|$ gir halve bølgelengden. Den bølgehøyden er en størrelsesorden lavere enn høyden til bølgen foran skipet i forrige seksjon. Bølgelengden derimot er dobblet.

Fr_2	η_{max} [m]	x_{max} [km]	η_{min} [m]	x_{min} [km]	$\lambda_{max}/2$ [m]
0.95	0.086	3.328	-0.114	3.501	220
1.00	0.142	3.100	-0.178	3.263	163
1.05	0.238	2.919	-0.281	3.059	140
1.10	0.380	2.788	-0.432	2.917	129

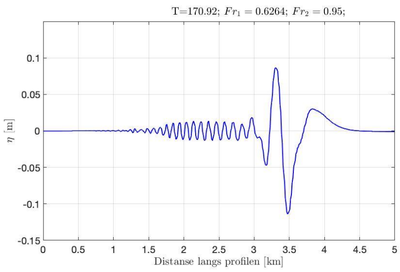
Tabell 6.3: Bølgehøyde og bølgelengde for varierende Froude-tall, beregnet med $h_1 = 46$m og $h_2 = 20$m.



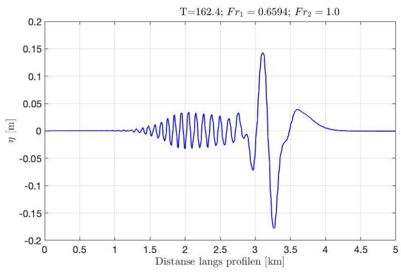
Figur 6.8: Skip med lokalt Froude-tall $Fr_2 = 1.0$ for dimensjonsløs tid $T\sqrt{g/h_1} = 162.40$. Figur viser linje gjennom bølger som beveger seg bak skipet for $Fr = 1.0$. Linjen tilsvarer profilplott i figur 6.9.



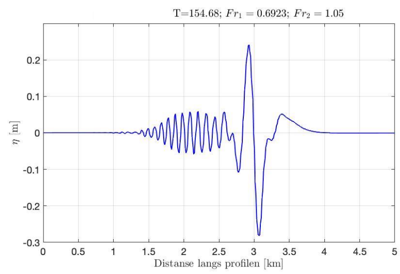
Figur 6.9: Skip med lokalt Froude-tall $Fr_2 = 1.0$ for dimensjonsløs tid $T\sqrt{g/h_1} = 162.40$. Figur viser profilplott av linje i figur 6.8.



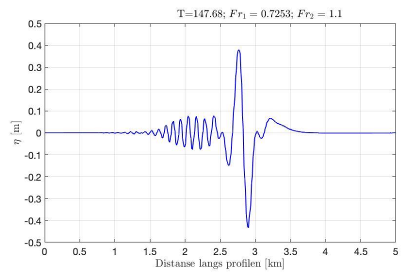
(a) $Fr_2 = 0.95$



(b) $Fr_2 = 1.00$



(c) $Fr_2 = 1.05$



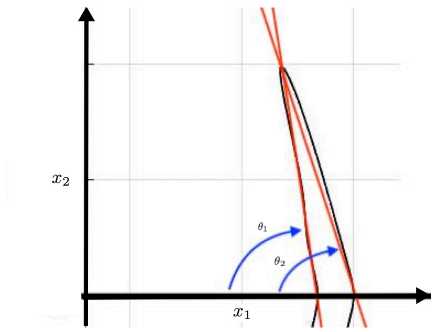
(d) $Fr_2 = 1.10$

Figur 6.10: Profilplott av bølger som brer seg ut til siden, tilsvarende linje i figur 6.8.

6.5 Oppstrømsbølgens vinkel

I denne seksjonen ser vi på omrisset av den ledende bølgen etter et stasjonært bølgesystem har utviklet seg. Bølgesystemet har blitt filtrert slik at kun delen av bølgefronten med en høyde over 1m er vist. Vi ønsker å sammenligne vinkelen denne bølgen brer seg ut med for forskjellige Froude-tall. I figur 6.12 er konturplott lagt oppå hverandre med bølgefrontens spiss som referansepunkt. Fra dette ser vi at "V" formen til bølgefronten blir spissere for økende Froude-tall. Vinklen til både fremsiden og baksiden av bølgefronten er målt og vist i tabell 6.4.

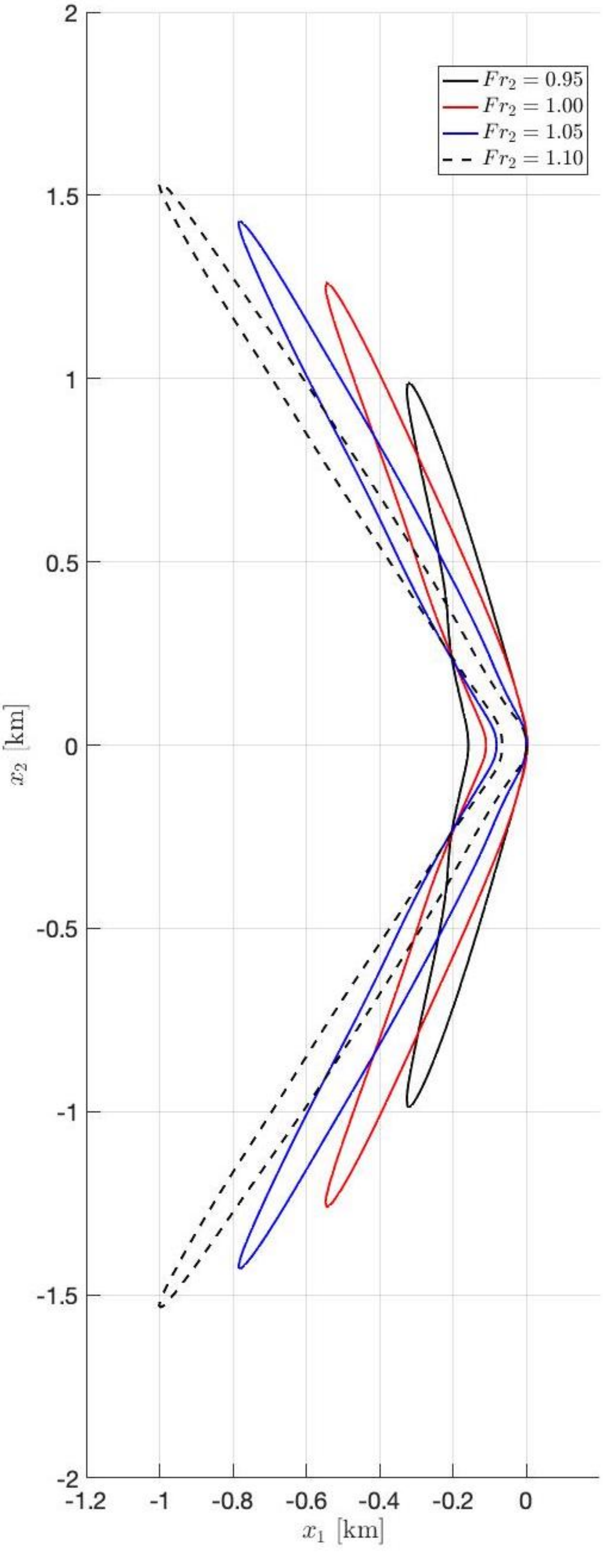
Vi betegner vinkelen mellom bakre del av bølgefronten og x_1-aksen som θ_1. Vinkelen mellom linjen som avgrenser fronten av bølgen og x_1-aksen er gitt ved θ_2. Generelt er vinkelene vanskelige å måle, siden bølgefrontens fremre og bakre del begge krummer såvidt innover. Derfor har vi definert tre referansepunkter, punktet i enden av bølgekammen i x_2-retning, og punktene hvor fremre og bakre del av bølgen krysser x_1-aksen. Rette linjer mellom kryssningspunktet på x_1-aksen og enden av bølgekammen definerer vinkelen til bølgefrontens fremre og bakre del. En illustrasjon av dette er gitt i figur 6.11. Vinklene er målt med gradeskive. Fra tabell 6.4, observeres det at tykkelsen på bølgefronten reduseres med økende Froude-tall, som illustrert av $\Delta\theta$. Fronten blir også lengere i x_2-retning og det kan virke som om hele bølgesystemet blir dratt mer utover.



Figur 6.11: Illustrasjon av metode for mål av vinkler på fremre og bakre del av den ledende bølgefronten. Rette linjer mellom kryssningspunktet på x_1-aksen og enden av bølgekammen definerer vinkelene θ_1 og θ_2. Bredden til bølgen illustreres ved $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

Fr_2	θ_1 [°]	θ_2 [°]	$\Delta\theta$ [°]
0.95	71.5	80.5	10.0
1.00	66.0	70.0	4.0
1.05	61.0	63.5	2.5
1.10	57.5	58.5	1.0

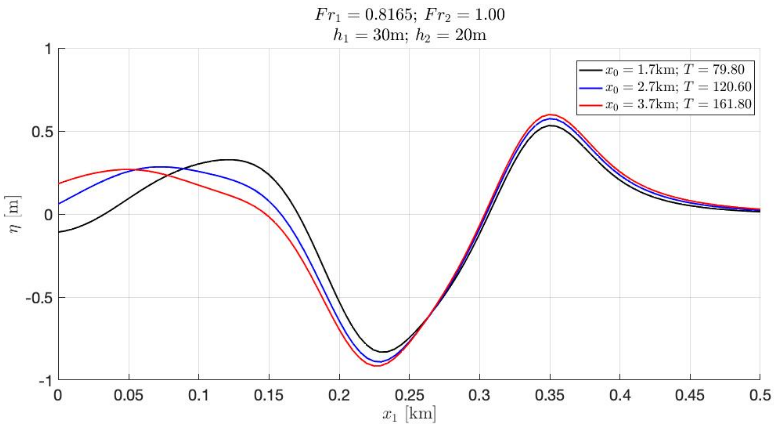
Tabell 6.4: Vinkelen mellom x_2 aksen og linjen som begrenser fronten av bølgen for varierende Froude-tall, med $h_2 = 46$m og $h_2 = 20$m.



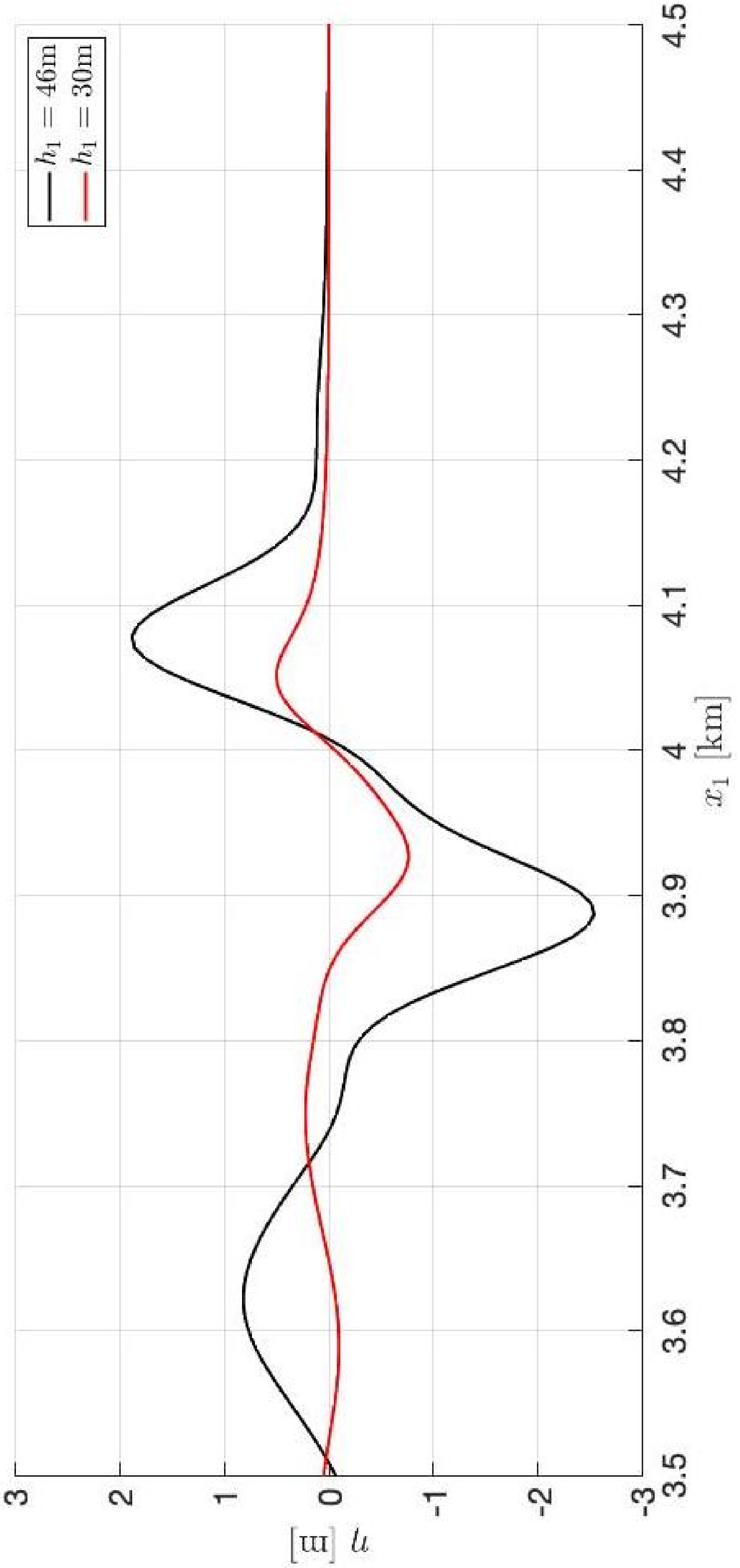
Figur 6.12: Omrisset av den ledende bølgefronten med høyde over 1 m, ved forskjellige Froude-tall. Konturplottene er lagt oppå hverandre med bølgenfrontens spiss som referansepunkt.

6.6 Hva skjer om vi varierer vanndybden h_1?

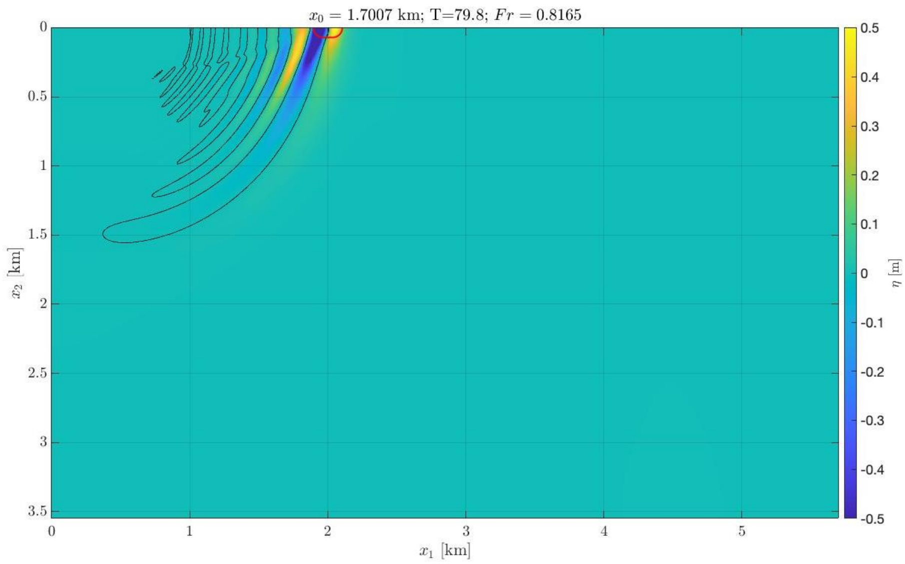
Så langt i oppgaven har vi kun variert vanndypet til den grunnere regionen, h_2. I denne seksjonen vil vi se på hva som skjer om vi endrer det initielle vanndypet h_1. Vi ser derfor på beregninger med $h_1 = 30$m og $h_2 = 20$m. Dette gir først og fremst en mye mindre dybdeendring. Froude-tallet og vanndybden på den grunnere regionen forblir det samme. Figurer 6.15-6.18 viser konturplott for fire forskjellige tidspunkter. For alle fire tilfellene har skipet beveget seg over dybdeendringen og inn i den grunne regionen. Skipets hastighet er satt slik at $Fr_2 = 1.0$. Som tidligere undersøker vi om oppstrømsbølgen er stasjonær. Figur 6.13 viser at oppstrømsbølgen forandrer seg lite over tid. Vi bruker bølgen beregnet ved siste tidspunkt for å sammenligne med tilfellet for $h_1 = 46$m. Figur 6.14 viser hvordan en mindre dybdeendring, $\Delta h/h_1$, gir en mindre oppstrømsbølge.



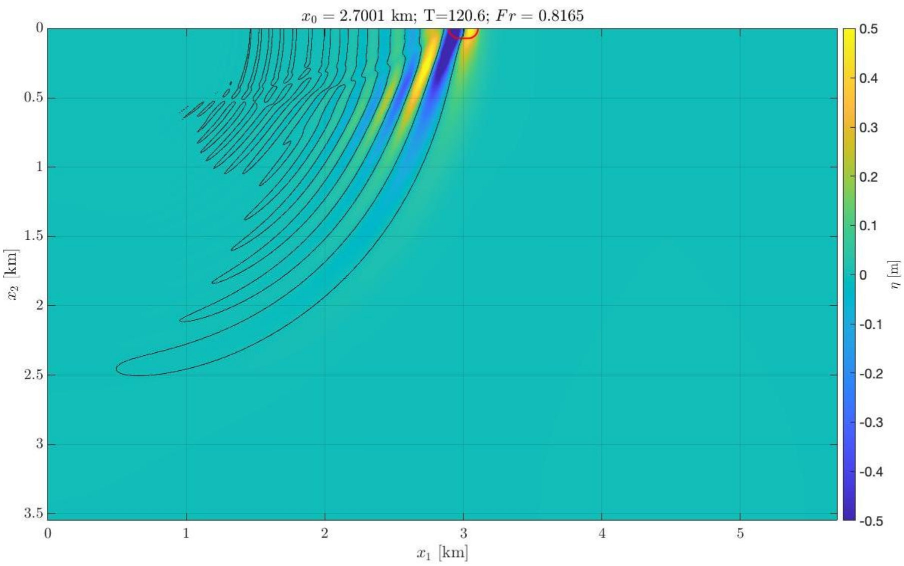
Figur 6.13: Oppstrømsbølgen over tid for $Fr_2 = 1.00$. De fire kurvene tilsvarer et snitt langs x_1 aksen, midt i kanalen. Alle kurver er plottet slik at $x_1 = 0$ tilsvarer midten av skipet ved angitt tid, T. Tiden er skalert slik at $T = \sqrt{\frac{g}{h_1}}t$.



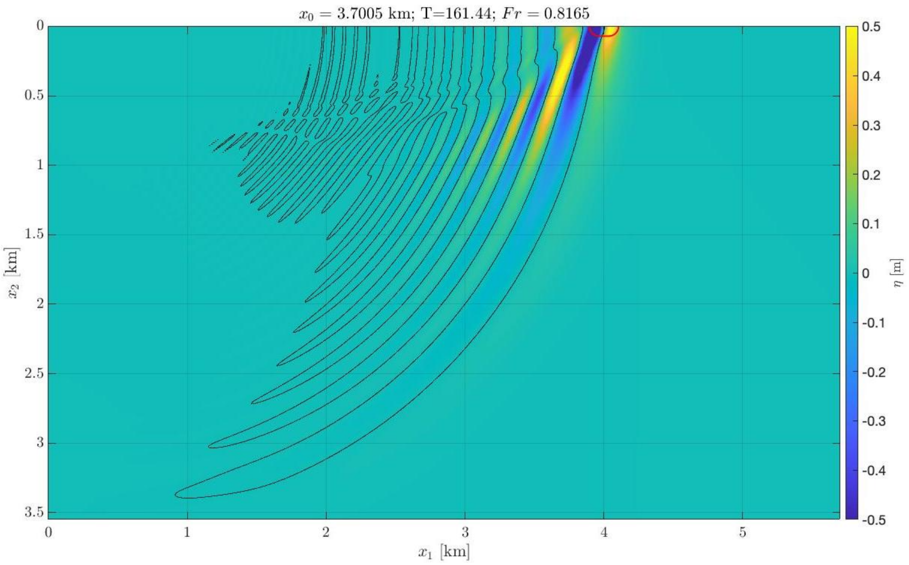
Figur 6.14: Stasjonær oppstrømsbølge med $Fr_2 = 1.00$ for $h_1 = 46$m og $h_1 = 30$m. Tiden er skalert slik at $T = \sqrt{\frac{g}{h_1}}t$.



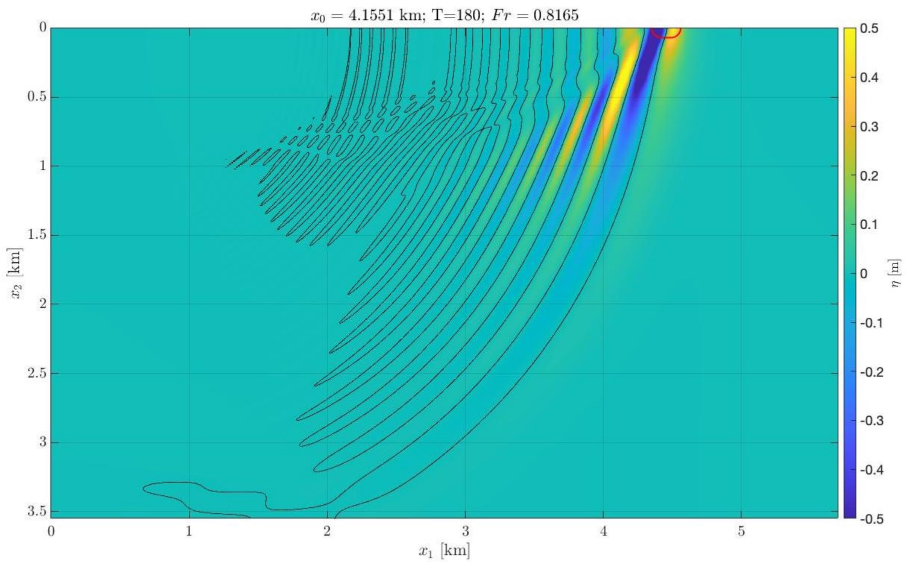
Figur 6.15: Skip med lokalt Froude-tall $Fr_2 = 1.0$ og vanndybder $h_1 = 30$m og $h_2 = 20$ for dimensjonsløs tid $T\sqrt{g/h_1} = 79.8$.



Figur 6.16: Skip med lokalt Froude-tall $Fr_2 = 1.0$ og vanndybder $h_1 = 30$m og $h_2 = 20$ for dimensjonsløs tid $T\sqrt{g/h_1} = 120.6$.



Figur 6.17: Skip med lokalt Froude-tall $Fr_2 = 1.0$ og vanndybder $h_1 = 30$m og $h_2 = 20$ for dimensjonsløs tid $T\sqrt{g/h_1} = 161.44$.



Figur 6.18: Skip med lokalt Froude-tall $Fr_2 = 1.0$ og vanndybder $h_1 = 30$m og $h_2 = 20$ for dimensjonsløs tid $T\sqrt{g/h_1} = T = 180.00$.

6.7 Resultater

I dette kapittelet har vi sett på skip som beveger seg over en dybdeendring i en vid numerisk tank. Det lokale Froude-tallet er i det transkritiske regimet. Vi har funnet at følgende er tilfellet,

- Et stasjonært bølgemønster utvikles etter at skipet har passert dybdeendringen for $Fr_2 = 0.95 - 1.10$.
- Amplituden til oppstrømsbølgen vil *ikke* øke med tiden. Det vil si at fluksen av energi går rett ut til siden for skipet.
- Effekten av dybdeendringen ved kritisk Froude-tall er lik for skipsbredde tilsvarende *Color Magic* og *Color Fantasy* og en skipsbredde fire ganger denne størrelsen. Dette bekrefter resultater fra Kapittel 4.
- Amplituden til den ledende bølgen blir mindre med økende Froude-tall i det transkritiske regimet og ligger på rundt 10% av den lokale vanndybden. Bølgelengden derimot blir lengere med økende Froude-tall for $Fr_2 = 0.95 - 1.10$.
- Avstanden mellom oppstrømsbølgen og skipet blir mindre ved økende Froude-tall i det transkritiske regimet.
- Den ledende bølgen brer seg til siden i rette linjer, slik at bølgefronten danner en slags “V” form.
- Bølgehøyden til fronten som brer seg til siden bak skipet er en hel størrelsesorden lavere enn bølgehøyden til oppstrømsbølgen. Bølgelengden er derimot doblet.
- Vinklen på “V” formen til oppstrømsbølgen avhenger av Froude-tallet i det transkritiske regimet. “V”en blir spissere ved økende Froude-tall som vist i figur 6.11.
- Tykkelsen på bølgefronten og frontens vinkel på x_1-aksen reduseres med økende Froude-tall ved tabell 6.4. Fronten blir også lengre i x_2-retning.
- En mindre dybdeendring gir en mindre oppstrømsbølge, men en lignende form. Bølgen er fortsatt stasjonær, og brer seg ut til siden i en “V” form som tidligere.

Fortrengningseffekten

Hva er det egentlig som skjer med fluidet rundt skipet når vanndybden blir mindre? Ved et mindre vanndyp har ikke vannet under skipet den samme plassen det hadde tidligere. Vi har forsøkt å finne ut hva som skjer med dette "ekstra" vannet, og hvordan fluidet rundt skipet justerer seg etter den nye vanndybden. Dette kan kalles en fortrengningseffekt, og skipets volum er derfor en viktig parameter for fenomenet. Som i Kapittel 5 vil skipet skyve vannet ned og under seg når det beveger seg langs den initielle flate bunnen. I dette kapittelet har vi kun én positiv dybdeendring. Når skipets baug passerer over endringen vil reaksjonshastigheten gi en positiv hastighet normalt på overflaten slik at en hevning oppstår foran skipet. Hekken produserer en lik men motsatt effekt og resulterer i en senkning av overflaten bak skipet. Vanligvis vil bølgens amplitude vokse om den ikke får bevege seg fremover. I våre beregninger for kritisk Froude-tall kan ikke bølgen løpe ifra skipet. I vårt tilfelle kan det virke som om strømningen rundt skipet aldri slutter å justere seg og vi får et stasjonært bølgemønster.

Mini-tsunami fenomenet

Kan oppstrømsbølgen i dette kapittelet kategoriseres som en mini-tsunami, på samme måte som bølgen i Kapittel 5? Vi har undersøkt skip i en svært vid kanal for å unngå refleksjon fra kanalveggene. Den typiske høyden til bølgen oppstrøms for skipet ved kritisk Froude-tall ligger på $0.1h_2$, 10% av vanndypet. Bølgelengden er derimot rundt 15 vanndyp. Dermed er bølgene helt klart lange bølger, som reiser ved gruntvannshastigheten. Tsunamien som rammet blant annet Thailand i 2004 hadde en bølgehøyde på 0.7m når den reiste over Stillehavet (Glimsdal mfl. 2013). En typisk vanndybde på stillehavet er rundt 4000m. Lengdeskalen for tektoniske tsunamier er dermed 100 ganger lengdeskalaen benyttet i denne opppgaven. Istedet for store plater som skaper en dybdeendring på havbunnen (undervannsjordskjelvet), har vi et skip på overflaten som begrenser vannet under seg og dermed har en lignende effekt når det beveger seg over en dybdeendring.

Skipets dimensjoner

Som nevnt i Kapittel 1 beregner både Li og Sclavounos (2002) og Pedersen (1988) oppstrømsbølger for skip i bevegelse over en flat bunn. Pedersen (1988) ser på effekten av ovale trykkfordelinger. Simuleringene gjennomføres i det transkritiske regimet i en vid numerisk kanal. Tre ulike trykkfordelinger blir presentert i tabell 1.

Gjennom hele denne oppgaven har vi tatt utgangspunkt i dimensjonenene til cruisefergene i Oslofjorden. Disse fergene er de største i verden av sin type. Men til sammenligning med verdens største cruiseskip er de kun halvparten av deplasementet. De største kontainerskipene har 8 ganger deplasementet til *Color Magic* og *Color Fantasy*. Et godt eksempel er kontainerskipet *Ever Given* fra firmaet *Evergreen*, som nylig stod fast på tvers av Suez kanalen. Disse tre skipskategoriene illustrerer forskjellen på parameterområdet benyttet i denne oppgaven sammenlignet med det som er benyttet av Pedersen (1988).

Trykkfordeling (iii) i tabell 1 fra Pedersen 1988 har to ganger deplasementet til *Color Magic*, og er på størrelse med et cruiseskip. Den største trykkfordelingen, (i) i tabell 1, har 10 ganger deplasementet til *Color Magic* og er på størrelse med *Ever Given* i Suez kanalen. Et slikt skip ville aldri kommet seg inn Oslofjorden, blant annet fordi dypgangen er større enn vanndypet på de grunnere partiene. Likevel kan den relative størrelsen i forhold til vanndypet være i det samme parameterområdet som er brukt i denne oppgaven.

Li og Sclavounos (2002) benytter også en trykkfordeling i en vid numerisk kanal, for kritisk Froude-tall. Solitære bølger oppstrøms for trykkfordelingen blir dokumentert. Solitonene brer seg utover kanalen i parabolske kurver, med en krummning som avtar med tiden. Dette i kontrast med våre resulatater som gir rette linjer og en "V" formet bølgefront. I tillegg øker avstanden mellom skipet og oppstrømsbølgene med tiden for Li og Sclavounos (2002). Det vil si fronten foran skipet beveger seg fremover i forhold til skipet. Dette er ikke tilfellet i våre beregninger. Både Li og Sclavounos (2002) og Pedersen (1988) har løst opp baugen på skipet og benytter ikke-lineære Boussinesq likninger. Ingen dybdeendring er tatt i betraktning. Vi beregner derimot *kun* effekten av dybdeendringen.

KAPITTEL 7

Konklusjon

I denne oppgaven har vi undersøkt effekter av skip som beveger seg over en dybdeendring. Blant annet har vi sett på mini-tsunamien i Oslofjorden, samt en variant av dette hvor skipet beveger seg ved transkritiske hastigheter.

En matematisk formulering av skipsbevegelsen ble oppsummert i Kapittel 2. Vi endte med et Fourier-transformert likningsett for hastighetspotensialet på havoverflaten og overflatehevningen. Likningsettet ble skalert og skrevet om på matriseform. Den numeriske implementasjonen av dette, samt modellering av skipet og havbunnen ble presentert i Kapittel 3. Kapittel 4 undersøkte forskjellige aspekter ved modellen, og testet om implementasjonen virker som forventet. Blant annet kan en økning i skipsbredden utnyttes ved beregninger i en veldig vid numerisk tank. I tillegg illustreres konvergens av likningene ved å se på forskjellige tilnærminger. I Kapittel 5 brukes modellen til å simulere mini-tsunamien i Oslofjorden. Beregningene sammenlignes med resultater fra Grue (2020) og observasjoner fra beboerene på Flaskebekk. Tilsammen illustrer dette genereringsmekanismen til fenomenet. Videre undersøkes skip som seiler inn på grunnere vann hvor det lokale Froude-tallet er i det transkritiske regimet. Kapittel 6 presenterer beregninger av dette, gjennomført for skip i en veldig vid numerisk kanal, i tillegg til hva som skjer med oppstrømsbølgen over tid.

Når et skip passerer over en dybdeendring som den i Oslofjorden, produseres det en reaksjonshastighet, eller "anti-hastighet", ved den nye vanndybden. Reaksjonshastigheten er normal på havbunnen og skaper en vertikal hastighet ved havoverflaten. Likning 2.49 i Kapittel 2 beskriver dette matematisk, ved hastigheten $\mathcal{F}^{-1}\{\hat{A}_1/\cosh(kh)\}$, hvor fluksleddet $\hat{A}_1$ beskriver interaksjonen mellom bunnvariasjonen og skipet. Effekten skjer i hovedsak når baug og hekk passerer dybdeendringen. Beregninger for et skip i en veldig vid numerisk kanal med lokalt Froude-tall i det transkritiske regimet resulterte i en stasjonær bølge oppstrøms for skipet. Fluksen av energi gikk rett ut til siden for skipet. Bølgene ble generert av en dybdeendring når skipet beveger seg fra dypere til grunnere vann. Den resulterende bølgen brer seg til siden i rette linjer, slik at bølgefronten danner en slags "V" form. Vi fant at "V" formen avhenger av Froude-tallet, og at den ble spissere for økende Froude-tall. Samtidig ble konturen av bølgen smalere og lengere i x_2-retning. Ved økende Froude-tall så vi at amplituden til den ledende bølgen ble redusert. For kritisk Froude-tall var bølgehøyden rundt 10% av den lokale vanndybden.

Videre arbeid

Tidsrammen har gjort at vi ikke fikk undersøkt alt vi gjerne skulle ønske. En utbedring av Kapittel 4, ved eksempelvis en sammenligning med beregninger fra Grue (2020) på flere områder, ville gitt resultatene mer tyngde. Videre utvidelse av teorien og den numeriske implementasjonen til det ikke-lineære tilfellet hadde også vært interessant. Ulike skipsformer, eller variasjoner i skipslengde er aspekter vi ikke har diskutert. I tillegg har vi kun sett på en svært enkel form for bunnvariasjon. I virkeligheten vil effekten fra detaljer i både skipsformen og havbunnen kunne forsterke og kansellere hverandre, og dermed påvirke den resulterende bølgen.

Tillegg

TILLEGG A

Detaljer i matematisk formulering

A.1 Utledninger fra kapittel 2

Denne seksjonen inneholder videre og mer detaljerte utledninger av likninger presentert i kapittel 2.

A.1.1 Green funksjoner, rekkeutviklinger og Fourier transformer

$$G_1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \tag{A.1}$$

$$G_2 = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}} \tag{A.2}$$

$$R^2 = (x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 \tag{A.3}$$

$$R_0^2 = R^2 + h^2 \tag{A.4}$$

$$R_1^2 = R^2 + (2h)^2 \tag{A.5}$$

$$r^2 = R^2 + [y' - y]^2 \tag{A.6}$$

$$r_1^2 = R^2 + [y' + y + 2h]^2 \tag{A.7}$$

$$r_{1B}^2 = R^2 + [y' + y]^2 \tag{A.8}$$

$$\nabla_1' \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \tag{A.9}$$

$$\nabla_1'^2 \frac{1}{R} = \frac{1}{R^3} \tag{A.10}$$

$$\nabla_1'^3 \frac{1}{R} = \frac{3}{R^2} \nabla_1' \frac{1}{R} \tag{A.11}$$

$$\nabla'_1 \frac{1}{R_0} = -\frac{\mathbf{R}}{R_0^3} \tag{A.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial h}\frac{1}{R_0} = -\frac{h}{R_0^3} \tag{A.13}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2}\frac{1}{R_0} = -\frac{1}{R_0^3} + \frac{3h^2}{R_0^5} \tag{A.14}$$

$$\nabla'^2 \frac{1}{R_0} = \nabla_1'^2 \frac{1}{R_0} + \frac{\partial^2}{\partial h^2}\frac{1}{R_0} = 0 \tag{A.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial h}\nabla'_1 \frac{1}{R_0} = \frac{3h}{R_0^5}\mathbf{R} \tag{A.16}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2}\nabla'_1 \frac{1}{R_0} = \left[-\frac{3}{R_0^2} + \frac{15h^2}{R_0^4}\right]\nabla'_1 \frac{1}{R_0} \tag{A.17}$$

$$\nabla'_1 \frac{1}{R_1} = -\frac{\mathbf{R}}{R_1^3} \tag{A.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial 2h}\frac{1}{R_1} = -\frac{2h}{R_1^3} \tag{A.19}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial (2h)^2}\frac{1}{R_1} = -\frac{1}{R_1^3} + \frac{12h^2}{R_1^5} \tag{A.20}$$

$$\nabla'^2 \frac{1}{R_1} = \nabla_1'^2 \frac{1}{R_1} + \frac{\partial^2}{\partial (2h)^2}\frac{1}{R_1} = 0 \tag{A.21}$$

$$\frac{\partial}{\partial 2h}\nabla'_1 \frac{1}{R_1} = -\frac{6h}{R_1^5}\mathbf{R} \tag{A.22}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial (2h)^2}\nabla'_1 \frac{1}{R_1} = \left[-\frac{3}{R_1^2} + \frac{60h^2}{R_1^4}\right]\nabla'_1 \frac{1}{R_1} \tag{A.23}$$

$$\left.\frac{1}{r}\right|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in F \\ (\mathbf{x},y)\in F}} = \frac{1}{R}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{(\delta'-\delta)^2}{R^2} + \dots\right] \tag{A.24}$$

$$\left.\frac{1}{r^3}\right|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in F \\ (\mathbf{x},y)\in F}} = \frac{1}{R^3}\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\delta'-\delta}{R}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{R^3}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{(\delta'-\delta)^2}{R^2} + \dots\right] \tag{A.25}$$

$$\left.\frac{1}{r^3}\right|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B \\ (\mathbf{x},y)\in F}} = \frac{1}{R_0^3}\left[1 - \frac{3h(\beta'-\delta)}{R_0^2} - \frac{3}{2}\frac{(\beta'-\delta)^2}{R_0^2} + ...\right] \tag{A.26}$$

$$\left.\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}}\right)\right|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in F \\ (\mathbf{x},y)\in B}} = 2\left[1 - \beta\frac{\partial}{\partial h} + \frac{1}{2}(\delta'^2 + \beta^2)\frac{\partial^2}{\partial h^2} + \dots\right]\frac{1}{R_0} \tag{A.27}$$

$$\left.\frac{1}{r^3}\right|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in F\\(\mathbf{x},y)\in B}} = \frac{1}{R_0^3}\left[1 - \frac{3h(\delta'-\beta)}{R_0^2} - \frac{3(\delta'-\beta)^2}{2R_0^2} + \ldots\right] \tag{A.28}$$

$$\left.\frac{1}{r_{1B}^3}\right|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in F\\(\mathbf{x},y)\in B}} = \frac{1}{R_0^3}\left[1 + \frac{3h(\delta'+\beta)}{R_0^2} - \frac{3(\delta'+\beta)^2}{2R_0^2} + \ldots\right] \tag{A.29}$$

$$\left.\frac{1}{r^3}\right|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in B}} = \frac{1}{R^3}\left[1 - \frac{3(\beta'-\beta)^2}{2R^2} + \ldots\right] \tag{A.30}$$

$$\left.\frac{1}{r_{1B}^3}\right|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in B}} = \frac{1}{R_1^3}\left[1 + \frac{6h(\beta'+\beta)}{R_1^2} - \frac{3(\beta'+\beta)^2}{2R_1^2} + \ldots\right] \tag{A.31}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{R}\right\} = \frac{2\pi}{k}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \tag{A.32}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{R_0}\right\} = \frac{2\pi}{k}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'-kh} \tag{A.33}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{R_1}\right\} = \frac{2\pi}{k}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'-2kh} \tag{A.34}$$

A.1.2 Fourier transform av $\frac{1}{R}$

Denne seksjonen beskriver en utledning av likning A.32. Vi har at

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\frac{1}{R}\right\} &= \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \\ &= e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} d(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\ &= e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} d\mathbf{R}\end{aligned}$$

hvor vi har brukt at $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} = 1$ for å ekspandere uttrykket slik at vi integrerer over $\mathbf{R}$ i stedet. For konvertering til polare koordinater definerer vi $x_1 - x_1' = R\cos\alpha$, $x_2 - x_2' = R\sin\alpha$, $k_1 = k\cos\theta$ og $k_2 = k\sin\theta$, slik at

$$\begin{aligned}\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} &= k_1(x_1 - x_1') + k_2(x_2 - x_2') \\ &= kR(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta) \\ &= kR\cos(\alpha-\theta) = kR\cos(\theta-\alpha)\end{aligned}$$

Settes dette inn i tidligere resultat har vi at

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\frac{1}{R}\right\} &= e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{1}{R} e^{-ikR\cos(\theta-\alpha)} R\ d\theta dR \\ &= e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-ikR\cos(\theta-\alpha)}\ d\theta dR\end{aligned}$$

Vi kan forenkle dette med

$$\int_0^{2\pi} e^{-ikR\cos(\theta-\alpha)}\ d\theta = \int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} e^{-ikR\cos u}\ du = \int_0^{2\pi} e^{-ikR\cos\theta}\ d\theta$$

ved bruk at substitusjonen $u = \theta - \alpha$ (integrerer fra $-\alpha$ til $2\pi - \alpha$ er ekvivalent med integralet fra 0 til 2π). Vi har dermed følgende uttrykk

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{R}\right\} = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-ikR\cos\theta}\ d\theta dR$$

Merk at vi kan bruke en første ordens Bessel funksjon (L.S.Gradshteyn og Ryzhik 2000, s. 653).

$$J_0(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ia\cos\theta}\ d\theta$$

Vi skriver om slik at,

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{R}\right\} = 2\pi e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \int_0^{\infty} J_0(kR) dR$$

I tillegg, vet vi (L.S.Gradshteyn og Ryzhik 2000, likning 6.551.1, s. 653)) at for en Bessel funksjon av hvilken som helst orden *nu* er,

$$\int_0^\infty J_\nu(bx)\ dx = \frac{1}{b}$$

Dette gir,

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{R}\right\} = \frac{2\pi}{k}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}$$

A.1.3 Integrallikningen

Denne seksjonen baserer seg på kapittel (4.11) i Newman (2018), i tillegg til forelesningsnotateter i emnet *Marin Hydrodnamikk* ved Universitetet i Oslo Grue 2019. Vi skal se på et fluid volum, V, begrenset av den lukkede flaten, S. To løsninger av Laplace likningen, ϕ og φ, begge i fluidvolumet V. Uten å bry oss om hvorfor, ser vi på følgende uttrykk og anvender divergens teoremet. [1]

$$
\begin{aligned}
\iint_S \left[\phi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right] dS &= \iint_S \phi\frac{\partial\varphi}{\partial n} dS - \iint_S \varphi\frac{\partial\phi}{\partial n} dS \\
&= \iint_S \phi(\mathbf{n}\cdot\nabla)\varphi dS - \iint_S \varphi(\mathbf{n}\cdot\nabla)\phi dS \\
&= \iint_S \mathbf{n}\cdot(\phi\nabla\varphi) dS - \iint_S \mathbf{n}\cdot(\varphi\nabla\phi) dS \\
&= \iiint_V \nabla\cdot(\phi\nabla\varphi) dV - \iiint_V \nabla\cdot(\varphi\nabla\phi) dV \\
&= \iiint_V \nabla\cdot\left[\phi\nabla\varphi - \varphi\nabla\phi\right] dV \\
&= \iiint_V \nabla\phi\cdot\nabla\varphi - \nabla\varphi\cdot\nabla\phi \; dV = 0 \qquad \text{(A.35)}
\end{aligned}
$$

Hvor vi har brukt produkt regelen slik at $\nabla\cdot(\phi\nabla\varphi) = \nabla\phi\cdot\nabla\varphi + \phi\cdot\nabla^2\varphi = \nabla\phi\cdot\nabla\varphi$. Både ϕ og φ er løsninger av Laplaces likning i fluid volumet V, slik at $\nabla^2\phi = 0$ og $\nabla^2\varphi = 0$. Dermed har vi $\nabla\cdot(\varphi\nabla\phi) = \nabla\varphi\cdot\nabla\phi + \varphi\cdot\nabla^2\phi = \nabla\varphi\cdot\nabla\phi$.

Videre skal vi se på konsekvensene av å erstatte φ med potensialet til en kilde. Posisjonen til kilden er gitt ved punktet, $\mathbf{x}' = (x_1', x_2', y')$. Enhetskilden φ, er gitt ved

$$
\varphi = \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{[(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (y - y')^2]} \qquad \text{(A.36)}
$$

Merk at kilden φ gitt i likning A.36 tilfredsstiller Laplaces likning både med hensyn til $\mathbf{x} = (x_1, x_2, y)$ og $\mathbf{x}' = (x_1', x_2', y')$, men med forskjellige fysiske tolkninger. Vi må også være forsiktige med å sette inn likning A.36 i likning A.35, fordi kilde potensialet ikke tilfredsstiller Laplace likningen i $r = 0$, og derfor ikke gyldig i hele V. For å unngå dette problemet, introduserer vi en liten overflate, S_ϵ, som omgir punktet $\mathbf{x}' = (x_1', x_2', y')$, hvor ϵ er sfærens radius. Da er overflaten $S + S_\epsilon$ en lukket flate som omgir fluid volumet på innsiden av S, men på utsiden av S_ϵ. Kildepotensialet gitt i likning A.36 er *regulær* i det lukkede volumet begrenset av $S + S_\epsilon$. I kompleks analyse, må en regulær funksjon være både analytisk og være en funksjon av en verdi gjennom hele regionen. (Analytisk i betydning at den må være deriverbar i alle punkt i regionen.) Likning A.35 blir,

$$
\frac{1}{4\pi}\iint_{S+S_\epsilon} \left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right] dS = 0 \qquad \text{(A.37)}
$$

[1] Divergens teoremet fastslår at $\iint_S \mathbf{U}\cdot\mathbf{n}dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{U}dV$. Matthews 1998, s. 83

som vi kan skrive om slik at

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right] dS = -\frac{1}{4\pi}\iint_{S_\epsilon} \left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right] dS \tag{A.38}$$

Vi kan evaluere høyre side av likning A.38, ved å anta at $\epsilon \to 0$. Normal vektoren på overflaten S_ϵ (peker i motsatt retning av normal vektoren på overflaten S på grunn av konvensjonen normal vektor skal peke ut av fluidet) er gitt ved $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{r}$. Den normal deriverte av kilde funksjonen er derfor,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\bigg|_{S_\epsilon} &= \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{r}\cdot\nabla\frac{1}{r}\bigg|_{S_\epsilon} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{r}\cdot\left(-\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{r^3}\right)\bigg|_{S_\epsilon} \\ &= -\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{r^4}\bigg|_{S_\epsilon} = \frac{1}{r^2}\bigg|_{S_\epsilon} = \frac{1}{\epsilon^2}\end{aligned} \tag{A.39}$$

For ϕ evaluert på overflaten S_ϵ, brukes en Taylor utvikling om punktet $\mathbf{x}'$,

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x})|_{S_\epsilon} &= \phi(\mathbf{x}') + (\mathbf{x}-\mathbf{x}')\nabla\phi(\mathbf{x}') + (\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2\nabla^2\phi(\mathbf{x}') + ...|_{S_\epsilon} \\ &\simeq \phi(\mathbf{x}') + \epsilon\nabla\phi(\mathbf{x}') + \epsilon^2\nabla^2\phi(\mathbf{x}') \\ &= \phi(\mathbf{x}') + \epsilon\nabla\phi(\mathbf{x}') \\ &\simeq \phi(\mathbf{x}')(1+\mathcal{O}(\epsilon))\end{aligned} \tag{A.40}$$

Det første leddet på høyre side av likning A.38 blir dermed,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\iint_{S_\epsilon}\left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right] dS &\simeq \frac{1}{4\pi}\iint_{S_\epsilon}\left[\phi(\mathbf{x}')(1+\mathcal{O}(\epsilon))\frac{1}{\epsilon^2}\right] dS \\ &= \frac{1}{4\pi}(1+\mathcal{O}(\epsilon))\frac{\phi(\mathbf{x}')}{\epsilon^2}\iint_{S_\epsilon} dS \\ &\simeq \phi(\mathbf{x}')\end{aligned} \tag{A.41}$$

hvor vi har brukt at $\iint_{S_\epsilon} dS = 4\pi\epsilon^2$ i det siste likhetstegnet. Det andre leddet på høyre side av likning A.38 fås ved Gauss' teorem,

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{S_\epsilon}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right] dS = \frac{1}{4\pi\epsilon}\iint_{S_\epsilon}\mathbf{n}\cdot(\nabla\phi) dS = \frac{1}{4\pi\epsilon}\iiint_{V_\epsilon}\nabla^2\phi\ dS = 0 \tag{A.42}$$

Til slutt blir likning A.38,

$$\iint_S \left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right] dS = -4\pi\phi(\mathbf{x}') \tag{A.43}$$

for et punkt $\mathbf{x}'$ i fluid volumet begrenset av $S+S_\epsilon$. For et punkt $\mathbf{x}'$ på S, trenger vi kun en halv sfære for å omgi punktet. Derfor er $\iint_{S_\epsilon} dS = 2\pi\epsilon^2$ i likning A.41, og likning A.38 blir

$$\iint_S \left[\phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS = -2\pi \phi(\mathbf{x}') \tag{A.44}$$

For et punkt utenfor fluid volumet, er singulariteten også utenfor fluid volumet, og det trengs ingen sfære rundt $\mathbf{x}'$. Derfor er,

$$\iint_S \left[\phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS = 0 \tag{A.45}$$

A.1.4 Overflatebølger i tre dimensjoner

Utledningen gitt i Grue (2006) tar for seg et evalueringspunkt $(\mathbf{x}, y)$ på F for overflatebølger i tre dimensjoner (uten skip!). Green funksjonen for et evalueringspunkt på den frie overflaten, gis ved en tre-dimensjonal kildefunksjon og dens avbildning i $y = -h$, slik at $G_1 = 1/r + 1/r_1$. Her er $r = [\boldsymbol{R}^2 + [y' - y]^2]^{1/2}$, $r_1 = [\boldsymbol{R}^2 + [y' + y + 2y_B]^2]^{1/2}$ og $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}$. Likning A.44 blir dermed,

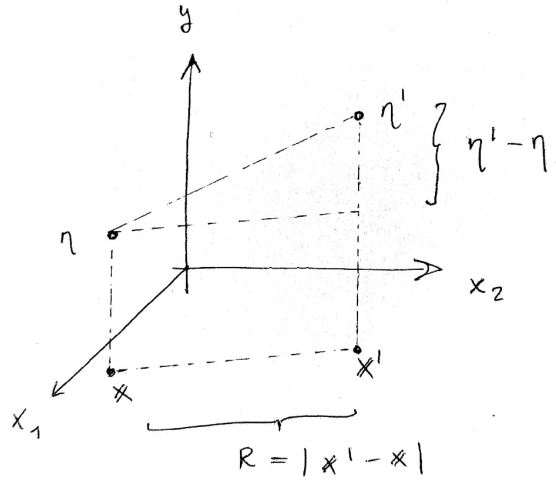
$$\int_F \left[\phi'_F \frac{\partial G_1}{\partial n'} - G_1 \frac{\partial \phi'}{\partial n'}\right] [dS]_F + \int_B \left[\phi'_B \frac{\partial G_1}{\partial n'} - G_1 \frac{\partial \phi'}{\partial n'}\right] [dS]_B = -2\pi\phi_F \tag{A.46}$$

Uendelig dybde

Vi ser først på et forenklet tilfelle og antar uendelig dybde, $h \to \infty$. Dette impliserer at $\frac{1}{r_1} \to 0$, slik at $G_1 \to 1/r$. Likning A.46 blir omorganisert på følgende måte,

$$\int_F \frac{1}{r} \frac{\partial \phi'}{\partial n'} [1 + |\nabla' \eta'|^2]^{1/2} d\mathbf{x}' = 2\pi\phi_F + \int_F \phi'_F \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r}\right) [1 + |\nabla' \eta'|^2]^{1/2} d\mathbf{x}' \tag{A.47}$$

For å forenkle introduserer vi $D = \frac{\eta' - \eta}{R}$. Dette er forholdet mellom forskjellen i overflatehevningen ved punktene $\mathbf{x}'$ og $\mathbf{x}$, og distansen mellom de, $R = |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$. Med dette kan vi se at $D \sim R^{-1}$ når distansen mellom punktene blir veldig stor, det vil si $R \to \infty$. Når distansen mellom punktene blir veldig liten, $R \to 0$, vil forholdet D nærme seg den romlige deriverte av overflatehevningen, $D \sim \frac{\partial \eta}{\partial R}$.



Figur A.1: Illustrasjon av to punkter, $\mathbf{x}'$ og $\mathbf{x}$, på overflaten.

Gjenkjenner $V' = \frac{\partial \phi'}{\partial n'} [1 + |\nabla' \eta'|^2]^{1/2}$. I tillegg, brukes det at $y = \eta$ and $y' = \eta'$

på overflaten slik at

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{x}'-\mathbf{x})^2+(y'-y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{R^2+(\eta'-\eta)^2}} \\ &= \frac{1}{R\sqrt{1+\frac{(\eta'-\eta)^2}{R^2}}} = \frac{1}{R\sqrt{1+D^2}}\end{aligned} \tag{A.48}$$

Venstre side av likning A.47 blir

$$\int_F \frac{1}{r}\frac{\partial\phi'}{\partial n'}[1+|\nabla'\eta'|^2]^{1/2}d\mathbf{x}' = \iint_{-\infty}^{\infty}\frac{V'd\boldsymbol{x}'}{R(1+D^2)^{1/2}} \tag{A.49}$$

Den normal deriverte med $\boldsymbol{n}'_F$ innsatt gir,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial n'}\right|_F &= \mathbf{n}'_F\cdot\nabla' \\ &= \left(\frac{\boldsymbol{j}-\nabla'\eta'}{(1+|\nabla'\eta'|^2)^{1/2}}\right)\cdot\nabla' \\ &= \frac{1}{(1+|\nabla'\eta'|^2)^{1/2}}\left(-\frac{\partial\eta'}{\partial x_1'},-\frac{\partial\eta'}{\partial x_2'},1\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_1'},\frac{\partial}{\partial x_2'},\frac{\partial}{\partial y'}\right) \\ &= -\frac{1}{(1+|\nabla'\eta'|^2)^{1/2}}\left[\frac{\partial\eta'}{\partial x_1'}\frac{\partial}{\partial x_1'}+\frac{\partial\eta'}{\partial x_2'}\frac{\partial}{\partial x_2'}-\frac{\partial}{\partial y'}\right]\end{aligned} \tag{A.50}$$

Her er $-\frac{\partial\eta'}{\partial y'}=0$, fordi overflatehevningen η', er uavhengig av y'. Denne operatoren skal virke på $1/r$. Deriverer vi ledd for ledd får vi,

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1'}\frac{1}{r}\right]_F = \left[-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_1'}\right]_F = -\left.\frac{1}{r^3}\right|_F(x_1'-x_1) \tag{A.51}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_2'}\frac{1}{r}\right]_F = \left[-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_2'}\right]_F = -\left.\frac{1}{r^3}\right|_F(x_2'-x_2) \tag{A.52}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{r}\right]_F = \left[-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y'}\right]_F = \left[-\frac{1}{r^3}(y'-y)\right]_F = -\left.\frac{1}{r^3}\right|_F(\eta'-\eta) \tag{A.53}$$

når y' og y er på overflaten F. Dermed får vi

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{r}\right|_F &= -\frac{1}{(1+|\nabla'\eta'|^2)^{1/2}}\left[\frac{\partial\eta'}{\partial x_1'}\frac{\partial}{\partial x_1'}\frac{1}{r}+\frac{\partial\eta'}{\partial x_2'}\frac{\partial}{\partial x_2'}\frac{1}{r}-\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{r}\right] \\ &= -\frac{1}{(1+|\nabla'\eta'|^2)^{1/2}}\left[\frac{\partial\eta'}{\partial x_1'}(-\frac{1}{r^3}(x_1'-x_1))+\frac{\partial\eta'}{\partial x_2'}(-\frac{1}{r^3}(x_2'-x_2))+\frac{1}{r^3}(\eta'-\eta)\right] \\ &= \frac{1}{(1+|\nabla'\eta'|^2)^{1/2}}\quad\frac{1}{r^3}\left[\frac{\partial\eta'}{\partial x_1'}(x_1'-x_1)+\frac{\partial\eta'}{\partial x_2'}(x_2'-x_2)-(\eta'-\eta)\right] \\ &= \frac{1}{(1+|\nabla'\eta'|^2)^{1/2}}\quad\frac{1}{r^3}\left[\mathbf{R}\cdot\nabla_1'\eta'-(\eta'-\eta)\right]\end{aligned} \tag{A.54}$$

Vi kan skrive om noe av dette ved bruk av det tidligere definerte forholdet D. Blant annet, er

$$\left.\frac{1}{r^3}\right|_F = \frac{1}{[(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (\eta' - \eta)^2]^{3/2}}$$
$$= \frac{1}{[R^2(1 + \frac{\eta' - \eta}{R^2})]^{3/2}} = \frac{1}{R^3(1 + D^2)^{3/2}} \tag{A.55}$$

for $y = \eta$ og $y' = \eta'$. Hvis vi setter tilbake inn i andre ledd på høyre side av likning A.47 ser vi at $\frac{1}{(1+|\nabla'\eta'|^2)^{1/2}}$ i $\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{r}$ kanselleres med faktoren $(1 + |\nabla'\eta'|^2)^{1/2}$ i uttrykket for flate elementet $[dS]_F$. Det andre leddet på høyre siden blir

$$\int_F \phi_F' \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}\right)[1 + |\nabla'\eta'|^2]^{1/2} d\mathbf{x}'$$
$$= \iint_{-\infty}^{\infty} (1 + D^2)^{-3/2}\left[\frac{\mathbf{R}\cdot\nabla_1'\eta'}{R^3} - \frac{(\eta' - \eta)}{R^3}\right]\phi_F' \quad d\mathbf{x}' \tag{A.56}$$

Setter inn likning A.49 og A.56 tilbake inn i likning A.47, for å oppnå følgende uttrykk,

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{V' d\boldsymbol{x'}}{R(1 + D^2)^{1/2}} = 2\pi\phi_F$$
$$+ \iint_{-\infty}^{\infty} (1 + D^2)^{-3/2}\left[\frac{\mathbf{R}\cdot\nabla_1'\eta'}{R^3} - \frac{(\eta' - \eta)}{R^3}\right]\phi_F' d\mathbf{x}' \tag{A.57}$$

Venstre siden kan igjen bli forenklet ved å skrive om integranden slik at

$$\frac{1}{R(1 + D^2)^{1/2}} = \frac{1}{R(1 + D^2)^{1/2}} + \frac{1}{R} - \frac{1}{R} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R}[(1 + D^2)^{-1/2} - 1] \tag{A.58}$$

Settes dette inn i likning A.57 har vi,

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{V' d\boldsymbol{x'}}{R} = 2\pi\phi_F + \iint_{-\infty}^{\infty} (1 + D^2)^{-3/2}\left[\frac{\mathbf{R}\cdot\nabla_1'\eta'}{R^3} - \frac{(\eta' - \eta)}{R^3}\right]\phi_F' d\mathbf{x}'$$
$$- \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{V'}{R}[(1 + D^2)^{-1/2} - 1] d\mathbf{x}' \tag{A.59}$$

På tilsvarende vis som i Grue (2006) definerer vi

$$2\pi N(V') = -\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{V'}{R}[1 - (1 + D^2)^{-1/2}]\ d\mathbf{x}' \tag{A.60}$$

I tillegg, kan videre forenklinger bli gjort ved å observere at

$$\frac{\mathbf{R}\cdot\nabla_1'\eta'}{R^3} - \frac{(\eta' - \eta)}{R^3} = -\nabla_1' \cdot \left[(\eta' - \eta)\nabla_1' \frac{1}{R}\right] \tag{A.61}$$

Høyre side av likning A.47 blir dermed

$$\iint_{-\infty}^{\infty}(1+D^2)^{-3/2}\left[\frac{\mathbf{R}\cdot\nabla_1'\eta'}{R^3}-\frac{(\eta'-\eta)}{R^3}\right]\phi_F' d\mathbf{x}'$$
$$= -\iint_{-\infty}^{\infty}(1+D^2)^{-3/2}\phi_F'\ \nabla_1'\cdot\left[(\eta'-\eta)\nabla_1'\frac{1}{R}\right]d\mathbf{x}' \tag{A.62}$$

Vi kan legge til og trekke i fra følgende ledd, $-\iint_{-\infty}^{\infty}\phi_F'\ \nabla_1'\cdot\left[(\eta'-\eta)\nabla_1'\frac{1}{R}\right]d\mathbf{x}'$. Dette gir

$$-\iint_{-\infty}^{\infty}(1+D^2)^{-3/2}\phi_F'\ \nabla_1'\cdot\left[(\eta'-\eta)\nabla_1'\frac{1}{R}\right]d\mathbf{x}'$$
$$= -\iint_{-\infty}^{\infty}\phi_F'\ \nabla_1'\cdot\left[(\eta'-\eta)\nabla_1'\frac{1}{R}\right]d\mathbf{x}'$$
$$-\iint_{-\infty}^{\infty}[(1+D^2)^{-3/2}-1]\phi_F\ \nabla_1'\cdot\left[(\eta'-\eta)\nabla_1'\frac{1}{R}\right]d\mathbf{x}' \tag{A.63}$$

Det første leddet i utviklingen kan skrives om som

$$-\iint_{-\infty}^{\infty}\phi_F'\ \nabla_1'\cdot\left[(\eta'-\eta)\nabla_1'\frac{1}{R}\right]d\mathbf{x}' = -\iint_{-\infty}^{\infty}\nabla_1'\cdot\left[\phi_F'(\eta'-\eta)\nabla_1'\frac{1}{R}\right]d\mathbf{x}'$$
$$+\iint_{-\infty}^{\infty}(\eta'-\eta)\nabla_1'\phi_F'\cdot\nabla_1'\frac{1}{R}d\mathbf{x}' \tag{A.64}$$

hvor produktregelen til $\nabla_1'\cdot$ operatoren er brukt til å skrive om integranden. Fra Gauss' teorem Matthews 1998, s. 83, vet vi at

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\nabla_1'\cdot\left[\phi_F'(\eta'-\eta)\nabla_1'\frac{1}{R}\right]d\mathbf{x}' = 0 \tag{A.65}$$

Det andre leddet i likning A.63 er på samme måte som i Grue (2006) definert som

$$2\pi T(\phi_F') = -\iint_{-\infty}^{\infty}\phi_F'[1-(1+D^2)^{-3/2}]\ \nabla_1'\cdot\left[(\eta'-\eta)\nabla_1'\frac{1}{R}\right]d\mathbf{x}' \tag{A.66}$$

Settes alle forenklinger tilbake inn i likning A.47, fås en modifisert og reorganisert versjon som følger.

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{V'd\boldsymbol{x}'}{R} = 2\pi\phi_F' + \iint_{-\infty}^{\infty}(\eta'-\eta)\nabla_1'\phi_F'\cdot\nabla_1'\frac{1}{R}d\mathbf{x}'$$
$$+2\pi\ T(\phi_F') + 2\pi\ N(V') \tag{A.67}$$

Vi introduserer dekomposisjonen $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$. Hvert ledd oppfyller henholdsvis,

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{V_1'd\boldsymbol{x}'}{R} = 2\pi\phi_F' \tag{A.68}$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{V_2' d\boldsymbol{x'}}{R} = \iint_{-\infty}^{\infty} (\eta' - \eta)\nabla_1' \phi_F' \cdot \nabla_1' \frac{1}{R} d\mathbf{x}' \tag{A.69}$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{V_3' d\boldsymbol{x'}}{R} = 2\pi T(\phi_F') \tag{A.70}$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{V_4' d\boldsymbol{x'}}{R} = 2\pi N(V') \tag{A.71}$$

Som er ekvivalent med resultatet oppnådd i seksjon 2 av Grue (2006).

Anvendelse av Fourier-transform

Vi er nå klare for å anvende en Fourier-transform for å invertere og løse likningene for normalhastigheten V'. Ved å ta invers transformen av likning A.32 oppnår vi et uttrykk for $\frac{1}{R}$,

$$\frac{1}{R} = \mathcal{F}^{-1}\{\frac{2\pi}{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} \tag{A.72}$$

som vi setter inn i venstre side av likninger A.68-A.71 slik at vi får følgende

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{V_j' d\boldsymbol{x'}}{R} &= \iint_{-\infty}^{\infty} V_j' \mathcal{F}^{-1}\{\frac{2\pi}{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}\} d\mathbf{x}' \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi}{k} \iint_{-\infty}^{\infty} V_j' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}'\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi}{k}\mathcal{F}\{V_j\}\right\} \end{aligned} \tag{A.73}$$

for $j = 1, 2, 3, 4$. En Fourier-transform gir

$$\mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{V_j' d\boldsymbol{x'}}{R}\right\} = \frac{2\pi}{k}\mathcal{F}\{V_j\} \tag{A.74}$$

Vi setter inn uttrykk for $\frac{1}{R}$ i høyre side av likning A.69, som gir

$$\begin{aligned} &\iint_{-\infty}^{\infty} (\eta' - \eta)\nabla_1' \phi_F' \cdot \nabla_1' \frac{1}{R} d\mathbf{x}' \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} (\eta' - \eta)\nabla_1' \phi_F' \cdot \nabla_1' \mathcal{F}^{-1}\{\frac{2\pi}{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}\} d\mathbf{x}' \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} (\eta' - \eta)\nabla_1' \phi_F' \cdot \nabla_1' \left(\frac{2\pi}{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}\right) d\mathbf{x}'\right\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} (\eta' - \eta)\nabla_1' \phi_F' \cdot \left(\frac{-2\pi i\mathbf{k}}{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}\right) d\mathbf{x}'\right\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-2\pi i\mathbf{k}}{k} \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} \eta' \nabla_1' \phi_F' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}'\right\} \\ &+ \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi i\eta\mathbf{k}}{k} \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla_1' \phi_F' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}'\right\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-2\pi i\mathbf{k}}{k} \cdot \mathcal{F}\{\eta\nabla_1\phi_F\}\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi i\eta\mathbf{k}}{k} \cdot \mathcal{F}\{\nabla_1\phi_F\}\right\} \end{aligned} \tag{A.75}$$

En Fourier-transform gir

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty}(\eta'-\eta)\nabla_1'\phi_F'\cdot\nabla_1'\frac{1}{R}d\mathbf{x}'\right\}\\
&=\frac{-2\pi i\mathbf{k}}{k}\cdot\mathcal{F}\{\eta\nabla_1\phi_F\}+\frac{2\pi i\mathbf{k}}{k}\eta\cdot\mathcal{F}\{\nabla_1\phi_F\}\\
&=\frac{-2\pi i\mathbf{k}}{k}\cdot\mathcal{F}\{\eta\nabla_1\phi_F\}+\frac{2\pi i\mathbf{k}}{k}\eta\cdot(i\mathbf{k})\mathcal{F}\{\phi_F\}\\
&=\frac{-2\pi i\mathbf{k}}{k}\cdot\mathcal{F}\{\eta\nabla_1\phi_F\}-2\pi k\eta\mathcal{F}\{\phi_F\}
\end{aligned}
\tag{A.76}
$$

Fourier-transform av likninger A.68-A.71, med resultat overfor innsatt, og multiplikasjon av faktoren $\frac{k}{2\pi}$ gir,

$$\mathcal{F}\{V_1\}=k\mathcal{F}\{\phi_F\}\tag{A.77}$$

$$\mathcal{F}\{V_2\}=-i\mathbf{k}\cdot\mathcal{F}\{\eta\nabla_1\phi_F\}-k^2\eta\mathcal{F}\{\phi_F\}\tag{A.78}$$

$$\mathcal{F}\{V_3\}=k\mathcal{F}\{T(\phi_F)\}\tag{A.79}$$

$$\mathcal{F}\{V_4\}=k\mathcal{F}\{N(V)\}\tag{A.80}$$

Dette tilsvarer likninger (2.18) - (2.21) i Grue (2006).

Endelig dybde

Denne seksjonen er basert på seksjon (4) i Grue (2006), og tar for seg en endelig vanndybde h slik at $y_B=-h$. Dette impliserer at vi må ta ledd med $\frac{1}{r_1}$, til forskjell fra forrige seksjon. Alle forenklinger og omskrivninger gjort med ledd av $\frac{1}{r}$ forblir de samme som for uendelig dybde. Vi ser derfor kun på ledd med $\frac{1}{r_1}$, og kombinerer til slutt alt til et endelig resultat, via likning A.46 som vi begynte med,

$$
\begin{aligned}
&\int_F\left[\phi_F'\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)-\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial\phi'}{\partial n'}\right][dS]_F\\
&+\int_B\left[\phi_B'\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)-\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial\phi'}{\partial n'}\right][dS]_B\\
&=-2\pi\phi_F
\end{aligned}
\tag{A.81}
$$

En ekspansjon av $\frac{1}{r_1}$ med $y=\eta$ og $y'=\eta'$ er gjort som følger,

$$\frac{1}{r_1}=\left(\frac{1}{R_1}-\frac{2h(\eta'+\eta)}{R_1^3}\right)-\left(\frac{1}{R_1}-\frac{2h(\eta'+\eta)}{R_1^3}-\frac{1}{r_1}\right)\tag{A.82}$$

hvor $R_1^2=R^2+(2h)^2$. Vi skriver om ledd med faktoren $\frac{1}{r_1}$ hver for seg, slik at

$$
\begin{aligned}
\int_F\frac{1}{r_1}\frac{\partial\phi'}{\partial n'}[dS]_F=&\iint_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{2h(\eta'+\eta)}{R_1^3}\right)V'd\mathbf{x}'\\
&-\iint_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{2h(\eta'+\eta)}{R_1^3}-\frac{1}{r_1}\right)V'd\mathbf{x}'
\end{aligned}
\tag{A.83}
$$

Det andre leddet på høyresiden blir definert som

$$2\pi N_1(V') = \iint_{-\infty}^{\infty} V' \left(\frac{1}{R_1} - \frac{2h(\eta' + \eta)}{R_1^3} - \frac{1}{r_1} \right) d\mathbf{x}' \tag{A.84}$$

Det første leddet på høyresiden av likning A.83 deles og evalueres separat. Vi begynner med å sette inn inverstranformen av likning A.34 og får følgende,

$$\begin{aligned}
\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{V'}{R_1} d\mathbf{x}' &= \iint_{-\infty}^{\infty} V' \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2\pi}{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}' - 2kh} \right\} d\mathbf{x}' \\
&= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2\pi}{k} e^{-2kh} \iint_{-\infty}^{\infty} V' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}' \right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2\pi}{k} e_1 \mathcal{F}(V) \right\}
\end{aligned} \tag{A.85}$$

hvor $e_1 = e^{-2kh}$. Tar vi Fourier-transformen til begge sider av likningen har vi,

$$\frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{V'}{R_1} d\mathbf{x}' \right\} = \frac{e_1}{k} \mathcal{F}(V) \tag{A.86}$$

I andre leddet i likning A.83 har vi en faktor $\frac{1}{R_1^3}$. Vi ønsker å manipulere denne slik at vi har en faktor $\frac{1}{R_1}$ istedet, og kan sette inn inverstranformen av likning A.34. For å gjøre dette deriverer vi faktoren $\frac{1}{R_1}$ med hensyn på $2h$ (likning A.19), og oppdager at

$$\frac{\partial}{\partial(2h)} \frac{1}{R_1} = -\frac{2h}{R_1^3} \tag{A.87}$$

som er det vi hadde i integranden på høyre side av likning A.83. Likning A.87 og inverstranformen av likning A.34 settes inn det andre leddet av første integral på høyre side av likning A.83. Dette gir følgende ledd,

$$\begin{aligned}
\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{2h(\eta' + \eta)V'}{R_1^3} d\mathbf{x}' &= \iint_{-\infty}^{\infty} V'(\eta' + \eta) \frac{\partial}{\partial(2h)} \frac{1}{R_1} d\mathbf{x}' \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} V'(\eta' + \eta) \frac{\partial}{\partial(2h)} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2\pi}{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}' - 2kh} \right\} d\mathbf{x}' \\
&= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} V'(\eta' + \eta) \frac{\partial}{\partial(2h)} \left(\frac{2\pi}{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}' - 2kh} \right) d\mathbf{x}' \right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1} \left\{ -2\pi e_1 \iint_{-\infty}^{\infty} V'(\eta' + \eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}' \right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1} \left\{ -2\pi e_1 \iint_{-\infty}^{\infty} V'\eta' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}' \right\} \\
&+ \mathcal{F}^{-1} \left\{ -2\pi\eta e_1 \iint_{-\infty}^{\infty} V' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}' \right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1} \left\{ -2\pi e_1 \mathcal{F}\{V\eta\} \right\} + \mathcal{F}^{-1} \left\{ -2\pi\eta e_1 \mathcal{F}\{V\} \right\}
\end{aligned} \tag{A.88}$$

Dermed har vi

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{2h(\eta' + \eta)V'}{R_1^3} d\mathbf{x}' = \mathcal{F}^{-1}\left\{-2\pi e_1 \mathcal{F}(V\eta)\right\} \\ + \mathcal{F}^{-1}\left\{-2\pi e_1 \eta \mathcal{F}(V)\right\} \tag{A.89}$$

En Fourier-transform og divisjon med 2π på begge sider gir,

$$\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{2h(\eta' + \eta)V'}{R_1^3} d\mathbf{x}'\right\} = - e_1 \mathcal{F}(V\eta) \\ - \mathcal{F}\left\{\eta \mathcal{F}^{-1}(e_1 \mathcal{F}(V))\right\} \tag{A.90}$$

For å oppsummere har vi nå at,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\int_F \frac{1}{r_1}\frac{\partial \phi'}{\partial n'}[dS]_F + 2\pi N_1(V')\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{2h(\eta' + \eta)}{R_1^3}\right) V' d\mathbf{x}'\right\} \\ &= \frac{e_1}{k}\mathcal{F}(V) - e_1 \mathcal{F}(V\eta) - \mathcal{F}\left\{\eta \mathcal{F}^{-1}(e_1 \mathcal{F}(V))\right\} \end{aligned} \tag{A.91}$$

For tilsvarende ledd med faktor $\frac{1}{r_1}$ i integralet over havbunnen B, bruker vi at $\left.\frac{\partial \phi'}{\partial n'}\right|_B = 0$, siden det ikke går noe fluid gjennom havbunnen. Da er

$$\int_B \frac{1}{r_1}\frac{\partial \phi'}{\partial n'}[dS]_B = 0 \tag{A.92}$$

Ser vi på likning A.81 igjen, kan manipulere ledd av faktoren $\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{r_1}$ på tilsvarende måte som med ledd av $\frac{1}{r_1}$. Til å begynne med skriver vi om integranden i integralene over både F og B ved å finne den normal deriverte. For integralet over B fås,

$$\left.\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{r_1}\right|_B = -\mathbf{j}\cdot\nabla'\frac{1}{r_1} = -\left[\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{r_1}\right]_B = -\frac{1}{r_1^3}(-h - h + 2h) = 0 \tag{A.93}$$

Dermed forsvinner hele integralet over havbunnen i likning A.83, som også var tilfellet for uendelig dybde. For integralet over F har vi,

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{r_1}\right|_F &= -\frac{1}{(1 + |\nabla'\eta'|^2)^{1/2}}\left[\frac{\partial \eta'}{\partial x_1'}\frac{\partial}{\partial x_1'}\frac{1}{r_1} + \frac{\partial \eta'}{\partial x_2'}\frac{\partial}{\partial x_2'}\frac{1}{r_1} - \frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{r_1}\right]_F \\ &= \frac{1}{(1 + |\nabla'\eta'|^2)^{1/2}} \quad \frac{1}{r_1^3}\left[\frac{\partial \eta'}{\partial x_1'}(x_1' - x_1) + \frac{\partial \eta'}{\partial x_2'}(x_2' - x_2) - (\eta' + \eta + 2h)\right] \\ &= \frac{1}{(1 + |\nabla'\eta'|^2)^{1/2}} \quad \frac{1}{r_1^3}\left[\mathbf{R}\cdot\nabla_1'\eta' - (\eta' + \eta + 2h)\right] \end{aligned} \tag{A.94}$$

Innsatt gir dette,

$$\int_F \phi'_F \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r_1} [dS]_F = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r_1^3} \left[\mathbf{R} \cdot \nabla'_1 \eta' - (\eta' + \eta + 2h) \right] \phi'_F d\mathbf{x}' \tag{A.95}$$

I tillegg kan vi skrive om slik at,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_1^3} &= \frac{1}{(R^2 + (y' + y + 2h)^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{(R^2 + (2h)^2 + (y' + y)^2 + 4h(y' + y))^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{(R_1^2 + (y' + y)^2 + 4h(y' + y))^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{R_1^3} \frac{1}{(1 + \frac{(y'+y)^2 + 4h(y'+y)}{R_1^2})^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{A.96}$$

Ved bruk av en Taylor utvikling, $\frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} \approx 1 - \frac{3}{2}x + \cdots$, får vi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{R_1^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{4h(y' + y)}{R_1^2} - \frac{3}{2} \frac{(y' + y)^2}{R_1^2} + \cdots \right) \\
\simeq \frac{1}{R_1^3} - \frac{6h(y' + y)}{R_1^5}
\end{aligned} \tag{A.97}$$

hvor vi har neglisjert ledd med y av orden 2 og høyere. Vi definerer feilen vi gjør ved,

$$\begin{aligned}
2\pi T_1(\phi'_F) = &\iint_{-\infty}^{\infty} \phi_F \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R_3} + \frac{6h(\eta' - \eta)}{R_1^5} \right) (-2h) d\mathbf{x}' \\
&+ \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_F \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{R_1^3} \right) (\mathbf{R} \cdot \nabla' \eta' - (\eta' + \eta)) d\mathbf{x}' \\
= &- \iint_{-\infty}^{\infty} \phi'_F \frac{12h^2(\eta' - \eta)}{R_1^5} d\mathbf{x}' \\
&+ \iint_{-\infty}^{\infty} \phi'_F \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{R_1^3} \right) (\mathbf{R} \cdot \nabla'_1 \eta' - (\eta' + \eta) - 2h) d\mathbf{x}'
\end{aligned} \tag{A.98}$$

tilsvarende likning (4.7) i Grue (2006). Setter dette tilbake i likning A.95, og oppnår

$$\begin{aligned}
&\int_F \phi'_F \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r_1} [dS]_F = \\
&\iint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{6h(\eta' + \eta)}{R_1^5} \right) \left[\mathbf{R} \cdot \nabla'_1 \eta' - (\eta' + \eta + 2h) \right] \phi'_F d\mathbf{x}' \\
&+ 2\pi T_1(\phi'_F)
\end{aligned} \tag{A.99}$$

Igjen kan vi skrive om faktorene $\frac{1}{R_1^3}$ and $\frac{1}{R_1^5}$ ved bruk av derivasjon av $\frac{1}{R_1}$ med hensyn på $2h$,

$$\frac{\partial^2}{\partial(2h)^2}\frac{1}{R_1} = -\frac{1}{R_1^3} - 2h\frac{\partial}{\partial 2h}\frac{1}{R_1^3} = -\frac{1}{R_1^3} + \frac{12h^2}{R_1^5} \tag{A.100}$$

$$\nabla_1'\frac{1}{R_1} = \left[\frac{\partial}{\partial x_1'}\frac{1}{R_1}, \frac{\partial}{\partial x_2'}\frac{1}{R_1}\right] = -\frac{1}{R_1^3}\left[(x_1'-x_1),(x_2'-x_2)\right] = -\frac{\mathbf{R}}{R_1^3} \tag{A.101}$$

Med dette blir det andre leddet i integranden på høyre side av likning A.95,

$$\begin{aligned} \frac{-(\eta'+\eta+2h)}{r_1^3} &\simeq -\frac{2h}{R_1^3} + \left(-\frac{1}{R_1^3} + \frac{12h^2}{R_1^5}\right)(\eta'+\eta) \\ &= \frac{\partial}{\partial(2h)}\frac{1}{R_1} + (\eta'+\eta)\frac{\partial^2}{\partial(2h)^2}\frac{1}{R_1} \end{aligned} \tag{A.102}$$

Det første leddet kan igjen skrives om slik at,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{R}\cdot\nabla_1'\eta'}{r_1^3} &= \frac{\mathbf{R}\cdot\nabla_1'\eta'}{R_1^3} - \frac{6h(\eta'+\eta)}{R_1^5}\mathbf{R}\cdot\nabla_1'\eta' \\ &\simeq \frac{\mathbf{R}\cdot\nabla_1'\eta'}{R_1^3} = -\nabla_1'\frac{1}{R_1}\cdot\nabla_1'\eta' \end{aligned} \tag{A.103}$$

ved bruk av derivasjonen gjort i A.100, og neglisjering av ledd med η av orden 2 og høyere. Vi setter dette tilbake inn i likning A.99 og får

$$\begin{aligned} &\int_F \phi_F'\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{r_1}[dS]_F = \\ &\iint_{-\infty}^{\infty}\phi_F'\left(-\nabla_1'\frac{1}{R_1}\cdot\nabla_1'\eta' + \frac{\partial}{\partial(2h)}\frac{1}{R_1} + (\eta'+\eta)\frac{\partial^2}{\partial(2h)^2}\frac{1}{R_1}\right)d\mathbf{x}' \\ &+ 2\pi T_1(\phi_F') \end{aligned} \tag{A.104}$$

Vi kan manipulere dette videre ved å legge merke til at første leddet i integraden kan skrives om ved bruk av relasjonen,

$$-\nabla_1'\cdot(\eta'\nabla_1'\frac{1}{R_1}) = -\nabla_1'\frac{1}{R_1}\cdot\nabla_1'\eta' - \eta'\nabla_1'^2\frac{1}{R_1} \tag{A.105}$$

som er ekvivalent med

$$-\nabla_1'\cdot((\eta'+\eta)\nabla_1'\frac{1}{R_1}) = -\nabla_1'\frac{1}{R_1}\cdot\nabla_1'\eta' - (\eta'+\eta)\nabla_1'^2\frac{1}{R_1} \tag{A.106}$$

Med dette blir,

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{r_1}\right|_F = &-\nabla_1'\cdot((\eta'+\eta)\nabla_1'\frac{1}{R_1}) + (\eta'+\eta)\nabla_1'^2\frac{1}{R_1} \\ &+ \frac{\partial}{\partial(2h)}\frac{1}{R_1} + (\eta'+\eta)\frac{\partial^2}{\partial(2h)^2}\frac{1}{R_1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\nabla_1' \cdot ((\eta' + \eta)\nabla_1' \frac{1}{R_1}) + \frac{\partial}{\partial(2h)} \frac{1}{R_1} \\
&\quad + (\eta' + \eta) \left[\frac{\partial^2}{\partial(2h)^2} \frac{1}{R_1} + \nabla_1'^2 \frac{1}{R_1} \right] \\
&= -\nabla_1' \cdot ((\eta' + \eta)\nabla_1' \frac{1}{R_1}) + \frac{\partial}{\partial(2h)} \frac{1}{R_1}
\end{aligned} \tag{A.107}
$$

hvor det siste leddet forsvinner siden kilden $\frac{1}{R_1}$ tilfredsstiller Laplaces likning, slik at $\nabla^2 \frac{1}{R_1} = \left[\frac{\partial^2}{\partial(2h)^2} \frac{1}{R_1} + \nabla_1'^2 \frac{1}{R_1} \right] = 0$.
Igjen har vi at,

$$
\begin{aligned}
&\int_F \phi_F' \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r_1} [dS]_F = \\
&\iint_{-\infty}^{\infty} \left[-\nabla_1' \cdot ((\eta' + \eta)\nabla_1' \frac{1}{R_1}) + \frac{\partial}{\partial(2h)} \frac{1}{R_1} \right] \phi_F' d\mathbf{x}' \\
&+ 2\pi T_1(\phi_F')
\end{aligned} \tag{A.108}
$$

Det første leddet er skrevet om ved bruk av,

$$
\begin{aligned}
&- \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_F' \left(\nabla_1' \cdot (\eta' + \eta)\nabla_1' \frac{1}{R_1} \right) d\mathbf{x}' \\
&= - \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla_1' \cdot \left(\phi_F' (\eta' + \eta)\nabla_1' \frac{1}{R_1} \right) d\mathbf{x}' \\
&+ \iint_{-\infty}^{\infty} (\eta' + \eta)\nabla_1' \frac{1}{R_1} \cdot \nabla_1' \phi_F' d\mathbf{x}' \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} (\eta' + \eta)\nabla_1' \frac{1}{R_1} \cdot \nabla_1' \phi_F' d\mathbf{x}'
\end{aligned} \tag{A.109}
$$

hvor det første leddet forsvinner fordi,

$$
\begin{aligned}
&\iint_{-\infty}^{\infty} \nabla_1' \cdot \left(\phi_F' (\eta' + \eta)\nabla_1' \frac{1}{R_1} \right) d\mathbf{x}' \\
&= \int_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot \left(\phi_F' (\eta' + \eta)\nabla_1' \frac{1}{R_1} \right) dS = 0
\end{aligned} \tag{A.110}
$$

ved Gauss teorem Matthews 1998. Siden ϕ_F' forsvinner i fjernfeltet er integralet lik null.
Til slutt har vi,

$$
\begin{aligned}
\int_F \phi_F' \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r_1} [dS]_F &= \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_F' \frac{\partial}{\partial(2h)} \frac{1}{R_1} d\mathbf{x}' \\
&+ \iint_{-\infty}^{\infty} (\eta' + \eta)\nabla_1' \frac{1}{R_1} \cdot \nabla_1' \phi_F' d\mathbf{x}' + 2\pi T_1(\phi_F')
\end{aligned} \tag{A.111}
$$

Dette er evaluert på den samme måten som i forrige seksjon, ved å sette inn en invers transform av likning A.34. Evalueres integralene separat fås,

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \phi'_F \frac{\partial}{\partial(2h)} \frac{1}{R_1} d\mathbf{x}' = \iint_{-\infty}^{\infty} \phi'_F \frac{\partial}{\partial(2h)} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2\pi}{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'-2kh} \right\} d\mathbf{x}'$$
$$= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2\pi}{k} (-k) e^{-2hk} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi'_F e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}' \right\}$$
$$= \mathcal{F}^{-1} \left\{ -2\pi e_1 \mathcal{F}(\phi_F) \right\} \tag{A.112}$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \eta' \nabla'_1 \frac{1}{R_1} \cdot \nabla'_1 \phi'_F d\mathbf{x}' = \iint_{-\infty}^{\infty} \eta' \nabla'_1 \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2\pi}{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'-2kh} \right\} \cdot \nabla'_1 \phi'_F d\mathbf{x}'$$
$$= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2\pi}{k} e^{-2kh} (-i\mathbf{k}) \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} \eta' \nabla'_1 \phi'_F e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}' \right\}$$
$$= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{-2\pi i\mathbf{k}}{k} e_1 \cdot \mathcal{F}(\eta \nabla_1 \phi_F) \right\} \tag{A.113}$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \eta \nabla'_1 \frac{1}{R_1} \cdot \nabla'_1 \phi'_F d\mathbf{x}' = \iint_{-\infty}^{\infty} \eta \nabla'_1 \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2\pi}{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'-2kh} \right\} \cdot \nabla'_1 \phi'_F d\mathbf{x}'$$
$$= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2\pi}{k} e^{-2kh} \eta (-i\mathbf{k}) \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla'_1 \phi'_F e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}' \right\}$$
$$= \eta \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{-2\pi i\mathbf{k}}{k} e_1 \cdot \mathcal{F}(\nabla'_1 \phi'_F) \right\}$$
$$= \eta \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{-2\pi i\mathbf{k}}{k} e_1 \cdot i\mathbf{k} \mathcal{F}(\phi'_F) \right\}$$
$$= \eta \mathcal{F}^{-1} \left\{ 2\pi k e_1 \mathcal{F}(\phi_F) \right\} \tag{A.114}$$

Kombineres dette, har vi

$$\int_F \phi'_F \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r_1} [dS]_F = \iint_{-\infty}^{\infty} \phi'_F \frac{\partial}{\partial(2h)} \frac{1}{R_1} d\mathbf{x}'$$
$$+ \iint_{-\infty}^{\infty} (\eta' + \eta) \nabla'_1 \frac{1}{R_1} \cdot \nabla'_1 \phi'_F d\mathbf{x}' + 2\pi T_1(\phi'_F)$$
$$= \mathcal{F}^{-1} \left\{ -2\pi e_1 \mathcal{F}(\phi_F) \right\} + \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{-2\pi i\mathbf{k}}{k} e_1 \cdot \mathcal{F}(\eta \nabla_1 \phi_F) \right\}$$
$$+ \eta \mathcal{F}^{-1} \left\{ 2\pi k e_1 \mathcal{F}(\phi_F) \right\} + 2\pi T_1(\phi_F) \tag{A.115}$$

Fourier-transform av begge sider gir

$$\mathcal{F} \left(\iint_{-\infty}^{\infty} \phi'_F \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r_1} [dS]_F \right) = -2\pi e_1 \mathcal{F}(\phi_F) - \frac{2\pi i\mathbf{k} e_1}{k} \cdot \mathcal{F}(\eta \nabla_1 \phi_F)$$
$$+ 2\pi \mathcal{F} \left\{ \eta \mathcal{F}^{-1} \left\{ k e_1 \mathcal{F}(\phi_F) \right\} \right\}$$
$$+ 2\pi \mathcal{F}\{T_1(\phi_F)\} \tag{A.116}$$

Å sette det hele sammen

Vi skal ha oppnådd en Fourier-transform av hvert ledd i likning A.81, som vi nå kan sette sammen til en likning. For et overblikk, har vi følgende Fourier-transformerte ledd ved endelig dybde,

$$\frac{k}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\int_F \left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial\phi'}{\partial n'}[dS]_F\right\} = \mathcal{F}\{V\} - k\mathcal{F}\{N(V)\} \tag{A.117}$$

$$\begin{aligned}\frac{k}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\int_F \left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial\phi'}{\partial n'}[dS]_F\right\} &= e_1\mathcal{F}\{V\} - e_1k\mathcal{F}\{V\eta\} \\ &- k\mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{e_1\mathcal{F}\{V\}\}\} \\ &- k\mathcal{F}\{N_1(V)\}\end{aligned} \tag{A.118}$$

$$\begin{aligned}\frac{k}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\int_F \phi'_F\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}\right)[dS]_F\right\} &= -i\mathbf{k}\cdot\mathcal{F}\{\eta\nabla_1\phi_F\} - k^2\eta\mathcal{F}\{\phi_F\} \\ &+ k\mathcal{F}\{T(\phi_F)\}\end{aligned} \tag{A.119}$$

$$\begin{aligned}\frac{k}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\int_F \phi'_F\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r_1}\right)[dS]_F\right\} &= -e_1k\mathcal{F}\{\phi_F\} - i\mathbf{k}e_1\cdot\mathcal{F}\{\eta\nabla_1\phi_F\} \\ &+ k\mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{ke_1\mathcal{F}\{\phi_F\}\}\} \\ &+ k\mathcal{F}\{T_1(\phi_F)\}\end{aligned} \tag{A.120}$$

Den Fourier-transformerte versjonen av likning A.81 kan skrives som

$$\begin{aligned}\frac{k}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\int_F \left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial\phi'}{\partial n'}[dS]_F\right\} + \frac{k}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\int_F \left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial\phi'}{\partial n'}[dS]_F\right\} \\ = k\mathcal{F}\left\{\phi_F\right\} + \frac{k}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\int_F \phi'_F\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}\right)[dS]_F\right\} \\ + \frac{k}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\int_F \phi'_F\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r_1}\right)[dS]_F\right\}\end{aligned} \tag{A.121}$$

hvor integralet over B er satt til null som funnet i forrige seksjon. Ved å sette inn resultatene for hvert ledd får vi følgende likning.

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}\{V\} - k\mathcal{F}\{N(V)\} + e_1\mathcal{F}\{V\} - e_1k\mathcal{F}\{V\eta\} \\ &- k\mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{e_1\mathcal{F}\{V\}\}\} - k\mathcal{F}\{N_1(V)\} \\ =&k\mathcal{F}\{\phi_F\} - i\mathbf{k}\cdot\mathcal{F}\{\eta\nabla_1\phi_F\} - k^2\eta\mathcal{F}\{\phi_F\} + k\mathcal{F}\{T(\phi_F)\} \\ &- e_1k\mathcal{F}\{\phi_F\} - i\mathbf{k}e_1\cdot\mathcal{F}\{\eta\nabla_1\phi_F\} \\ &+ k\mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{ke_1\mathcal{F}\{\phi_F\}\}\} + k\mathcal{F}\{T_1(\phi_F)\}\end{aligned} \tag{A.122}$$

Skriver om slik at,

$$\begin{aligned}(1+e_1)\mathcal{F}\{V\} &= (1-e_1)k\mathcal{F}\{\phi_F\} - (1+e_1)i\mathbf{k}\cdot\mathcal{F}\{\eta\nabla_1\phi_F\} \\ &+ k\left[\mathcal{F}\{N(V)+N_1(V)\} + \mathcal{F}\{T(\phi_F)+T_1(\phi_F)\}\right] \\ &+ e_1k\mathcal{F}\{V\eta\} - k^2\eta\mathcal{F}\{\phi_F\} \\ &+ k\mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{e_1\mathcal{F}\{V\}\}\} + k\mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{ke_1\mathcal{F}\{\phi_F\}\}\}\end{aligned} \tag{A.123}$$

Definerer $E_1 = (1-e_1)/(1+e_1)$ og $C_1 = 1/(1+e_1)$, slik at $\mathcal{F}\{V_1\} = kE_1\mathcal{F}\{\phi_F\} = k\tanh(kh)\mathcal{F}\{\phi_F\}$. Dermed kan likning A.123 skrives som

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{V\} = E_1 k\mathcal{F}\{\phi_F\} - i\mathbf{k}\cdot\mathcal{F}\{\eta\nabla_1\phi_F\} \\ + kC_1\left[\mathcal{F}\{N(V)+N_1(V)\} + \mathcal{F}\{T(\phi_F)+T_1(\phi_F)\}\right] \\ + kC_1\left[e_1\mathcal{F}\{V\eta\} - k\eta\mathcal{F}\{\phi_F\}\right. \\ \left.+\mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{e_1\mathcal{F}\{V\}\}\} + \mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{ke_1\mathcal{F}\{\phi_F\}\}\}\right]\end{aligned} \tag{A.124}$$

For å forenkle skriver vi om følgende ledd,

$$k\eta\mathcal{F}\{\phi_F\} = \mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{k\eta\mathcal{F}\{\phi_F\}\}\} = \mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{k\mathcal{F}\{\phi_F\}\}\} \tag{A.125}$$

slik at

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{ke_1\mathcal{F}\{\phi_F\}\}\} - k\eta\mathcal{F}\{\phi_F\} \\ &\quad = \mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{ke_1\mathcal{F}\{\phi_F\} - k\mathcal{F}\{\phi_F\}\}\} \\ &\quad = -\mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{k(1-e_1)\mathcal{F}\{\phi_F\}\}\} \\ &\quad = -\mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{(1+e_1)kE_1\mathcal{F}\{\phi_F\}\}\} \\ &\quad = -\mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{(1+e_1)\mathcal{F}\{V_1\}\}\} \\ &\quad = -\mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{V_1\}\}\} \\ &\quad - \mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{e_1\mathcal{F}\{V_1\}\}\} \\ &\quad = -\mathcal{F}\{\eta V_1\} - \mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{e_1\mathcal{F}\{V_1\}\}\}\end{aligned} \tag{A.126}$$

Settes dette tilbake inn i likning A.124 har vi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{V\} = kE_1\mathcal{F}\{\phi_F\} - i\mathbf{k}\cdot\mathcal{F}\{\eta\nabla_1\phi_F\} \\ + kC_1\left[\mathcal{F}\{N(V)+N_1(V)\} + \mathcal{F}\{T(\phi_F)+T_1(\phi_F)\}\right] \\ + kC_1\Big[e_1\mathcal{F}\{V\eta\} + \mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{e_1\mathcal{F}\{V\}\}\} \\ -\mathcal{F}\{\eta V_1\} - \mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{e_1\mathcal{F}\{V_1\}\}\}\Big]\end{aligned} \tag{A.127}$$

Vi kan legge til og trekke i fra $e_1\mathcal{F}\{\eta V_1\}$ i siste linje slik at vi får,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{V\} = kE_1\mathcal{F}\{\phi_F\} - kE_1\mathcal{F}\{\eta V_1\} - i\mathbf{k}\cdot\mathcal{F}\{\eta\nabla_1\phi_F\} \\ + kC_1\left[\mathcal{F}\{N(V)+N_1(V)\} + \mathcal{F}\{T(\phi_F)+T_1(\phi_F)\}\right] \\ + kC_1\Big[e_1\mathcal{F}\{\eta(V-V_1)\} + \mathcal{F}\{\eta\mathcal{F}^{-1}\{e_1\mathcal{F}\{V-V_1\}\}\}\Big]\end{aligned} \tag{A.128}$$

Dette tilsvarer likning (4.4) i Grue (2006).

Oppsummering av utledning

Vi begynte med å se på tilfellet for uendelig vanndybde hvor $h \to \infty$. Alle ledd med faktoren $\frac{1}{r_1}$ forsvant, i tillegg til integralet over havbunnen B. De gjenværende leddene ble omskrevet og forenklet ved bruk av teknikker som å introdusere forholdet $D = \frac{\eta' - \eta}{R}$, en rekke utvikling av ledd og Gauss' teorem. En dekomposisjon av V ble introdusert, slik at den orginale likningen (likning A.20) kunne deles i fire likninger for $\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{V_j' d\mathbf{x}'}{R}$ for $j = 1, 2, 3, 4$ (likning A.68 - A.71). Ved å sette inn $\frac{1}{R} = \mathcal{F}^{-1}\{\frac{2\pi}{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}\}$ endte vi opp med Fourier-transformerte versjoner av disse likningene (A.77-A.80).

I neste seksjon antok vi endelig dybde h, og anvendte tilsvarende strategi for ledd med faktoren $\frac{1}{r_1}$. Dette resulterte i enda et sett Fourier-transformerte likninger (A.118 og A.120). Også her forsvinner integralet over bunnen B. I den siste seksjonen, ble likninger fra tidligere seksjoner kombinert. En siste omorganisering ga likning A.128.

A.1.5 Effekter av variabel havbunn

Denne seksjonen er basert på Grue 2020, som bruker notasjonen $e_1 = e^{-kh}$. Dette til forskjell fra Grue 2006 som bruker $e_1 = e^{-2kh}$. Vi skal inkludere en variabel bunntopografi, slik at $\beta(\mathbf{x}) \neq 0$ og $y_B = -h + \beta(\mathbf{x})$. Vi ser på likning A.44. I tillegg inkluderes skipet på overflaten F, beskrevet av $y = \delta(\mathbf{x'})$.

Evalueringspunkt på havoverflaten F

Denne gangen vil integralet over flaten B gi bidrag. Fortsatt er $\frac{\partial \phi'}{\partial n'}\Big|_B = 0$, siden det ikke går noe fluid gjennom havbunnen. Da kan likning A.44 skrives,

$$\int_F \left[\phi'_F \frac{\partial G_1}{\partial n'} - G_1 \frac{\partial \phi'}{\partial n'}\right] [dS]_F + \int_B \left[\phi'_B \frac{\partial G_1}{\partial n'}\right] [dS]_B = -2\pi\phi_F \tag{A.129}$$

Det første integralet er ekvivalent med det vi fant i forrige seksjon for endelig dybde. Vi trenger derfor kun å se på andre ledd på venstre side av A.129. Ved innsetting av normalvektoren og flateelementet på B har vi,

$$\int_B \left[\phi'_B \frac{\partial G_1}{\partial n'}\right] [dS]_B = \int_{-\infty}^{\infty} \phi'_B \left[(\nabla'_1 \beta' - \mathbf{j}) \cdot \nabla'_1 G_1\right]\Big|_{\substack{(\mathbf{x'},y')\in B \\ (\mathbf{x},y)\in F}} d\mathbf{x'} \tag{A.130}$$

Vi regner hvert ledd i integraden hver for seg. Til å begynne med har vi,

$$\left[(\nabla'_1 \beta' - \mathbf{j}) \cdot \nabla'_1 \frac{1}{r}\right]\Bigg|_{\substack{(\mathbf{x'},y')\in B \\ (\mathbf{x},y)\in F}} = -\frac{1}{r^3}\Bigg|_{\substack{(\mathbf{x'},y')\in B \\ (\mathbf{x},y)\in F}} \left[\nabla'_1 \beta' \cdot \mathbf{R} - (-h + \beta' - \delta)\right] \tag{A.131}$$

Kildefunksjonen kan skrives om ved,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^3}\Bigg|_{\substack{(\mathbf{x'},y')\in B \\ (\mathbf{x},y)\in F}} &= \frac{1}{(R^2 + (-h + \beta' - \delta)^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{(R^2 + h^2 + 2h(\beta' - \delta) + (\beta' - \delta)^2)^{3/2}} \end{aligned} \tag{A.132}$$

På liknende vis som i forrige seksjon, definerer vi $R_0^2 = R^2 + h^2$. Da får vi,

$$\frac{1}{r^3}\Bigg|_{\substack{(\mathbf{x'},y')\in B \\ (\mathbf{x},y)\in F}} = \frac{1}{R_0^3} \frac{1}{(1 + \frac{2h(\beta'-\delta)}{R_0^2} + (\frac{\beta'-\delta}{R_0})^2)^{3/2}} \tag{A.133}$$

Ved bruk av en Taylor rekkeutvikling fås

$$\frac{1}{r^3}\Bigg|_{\substack{(\mathbf{x'},y')\in B \\ (\mathbf{x},y)\in F}} = \frac{1}{R_0^3}\left[1 - \frac{3h(\beta' - \delta)}{R_0^2} - \frac{3}{2}\frac{(\beta' - \delta)^2}{R_0^2} + ...\right] \tag{A.134}$$

Til ledende orden har vi,

$$\frac{1}{r^3}\bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in F}} = \frac{1}{R_0^3} - \frac{3h(\beta'-\delta)}{R_0^5} + \mathcal{O}(\delta^2,\beta'^2,\delta\beta) \tag{A.135}$$

Settes dette tilbake inn i A.131 har vi,

$$\begin{aligned}
&\left[(\nabla_1'\beta' - \mathbf{j})\cdot\nabla_1'\frac{1}{r}\right]\bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in F}}\\
&= \left[-\frac{1}{R_0^3} + \frac{3h(\beta'-\delta)}{R_0^5} + \mathcal{O}(\delta^2,\beta'^2,\delta\beta)\right]\left[\nabla_1'\beta'\cdot\mathbf{R} - (-h+\beta'-\delta)\right]\\
&= -\frac{\nabla_1'\beta'\cdot\mathbf{R}}{R_0^3} - \frac{h}{R_0^3} + \frac{(\beta'-\delta)}{R_0^3} - \frac{3h^2(\beta'-\delta)}{R_0^5} + \mathcal{O}(\delta^2,\beta'^2,\delta\beta)\\
&= -\frac{\nabla_1'\beta'\cdot\mathbf{R}}{R_0^3} - \frac{h}{R_0^3} - \left(-\frac{1}{R_0^3} + \frac{3h^2}{R_0^5}\right)(\beta'-\delta) + \mathcal{O}(\delta^2,\beta'^2,\delta\beta)
\end{aligned} \tag{A.136}$$

Legger merke til at,

$$\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{R_0}\right) = -\frac{h}{R_0^3} \tag{A.137}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(\frac{1}{R_0}\right) = -\frac{1}{R_0^3} + \frac{3h^2}{R_0^5} \tag{A.138}$$

Dermed blir,

$$\begin{aligned}
\left[(\nabla_1'\beta' - \mathbf{j})\cdot\nabla_1'\frac{1}{r}\right]\bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in F}} &= -\frac{\nabla_1'\beta'\cdot\mathbf{R}}{R_0^3} + \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{R_0}\right)\\
&\quad - (\beta'-\delta)\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(\frac{1}{R_0}\right) + \mathcal{O}(\delta^2,\beta'^2,\delta\beta)
\end{aligned} \tag{A.139}$$

Vi bruker tilsvarende strategi for det andre leddet,

$$\left[(\nabla_1'\beta' - \mathbf{j})\cdot\nabla_1'\frac{1}{r_1}\right]\bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in F}} = -\frac{1}{r^3}\bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in F}}\left[\nabla_1'\beta'\cdot\mathbf{R} - (h+\beta'+\delta)\right] \tag{A.140}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_1^3}\bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in F}} &= \frac{1}{(R^2+(h+\beta'+\delta)^2)^{3/2}}\\
&= \frac{1}{(R^2+h^2+2h(\beta'+\delta)+(\beta'+\delta)^2)^{3/2}}\\
&= \frac{1}{R_0^3}\left[1 - \frac{3h(\beta'+\delta)}{R_0^2} - \frac{3}{2}\frac{(\beta'+\delta)^2}{R_0^2} + ...\right]\\
&= \frac{1}{R_0^3} - \frac{3h(\beta'+\delta)}{R_0^5} + \mathcal{O}(\delta^2,\beta'^2,\delta\beta)
\end{aligned} \tag{A.141}$$

$$
\begin{aligned}
&\left[(\nabla_1'\beta' - \mathbf{j})\cdot\nabla_1'\frac{1}{r_1}\right]\Big|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in F}} \\
&= \left[-\frac{1}{R_0^3} + \frac{3h(\beta'+\delta)}{R_0^5} + \mathcal{O}(\delta^2,\beta'^2,\delta\beta)\right]\left[\nabla_1'\beta'\cdot\mathbf{R} - (h+\beta'+\delta)\right] \\
&= -\frac{\nabla_1'\beta'\cdot\mathbf{R}}{R_0^3} + \frac{h}{R_0^3} + \frac{(\beta'+\delta)}{R_0^3} - \frac{3h^2(\beta'+\delta)}{R_0^5} + \mathcal{O}(\delta^2,\beta'^2,\delta\beta) \\
&= -\frac{\nabla_1'\beta'\cdot\mathbf{R}}{R_0^3} - \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{R_0}\right) - (\beta'+\delta)\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(\frac{1}{R_0}\right) + \mathcal{O}(\delta^2,\beta'^2,\delta\beta) \qquad \text{(A.142)}
\end{aligned}
$$

Dermed har vi,

$$
\begin{aligned}
&\left[(\nabla_1'\beta' - \mathbf{j})\cdot\nabla_1' G_1\right]\Big|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in F}} \\
&= -2\frac{\nabla_1'\beta'\cdot\mathbf{R}}{R_0^3} - 2\beta'\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(\frac{1}{R_0}\right) + \mathcal{O}(\delta^2,\beta'^2,\delta\beta) \qquad \text{(A.143)}
\end{aligned}
$$

$$
\int_B \left[\phi_F'\frac{\partial G_1}{\partial n'}\right][dS]_B = -2\int_{-\infty}^{\infty}\phi_F'\left[\frac{\nabla_1'\beta'\cdot\mathbf{R}}{R_0^3} + \beta'\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(\frac{1}{R_0}\right)\right]d\mathbf{x}' \qquad \text{(A.144)}
$$

Vi utnytter at $-\nabla_1\frac{1}{R_0} = \frac{\mathbf{R}}{R_0^3}$, slik at

$$
\nabla_1'\beta'\cdot\frac{\mathbf{R}}{R_0^3} = -\nabla_1'\frac{1}{R_0}\cdot\nabla_1'\beta' = -\nabla\cdot\left(\beta'\nabla_1'\frac{1}{R_0}\right) + \beta'\nabla_1'^2\frac{1}{R_0} \qquad \text{(A.145)}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_B \left[\phi_B'\frac{\partial G_1}{\partial n'}\right][dS]_B \\
&= -2\int_{-\infty}^{\infty}\phi_B'\left[-\nabla\cdot\left(\beta'\nabla_1'\frac{1}{R_0}\right) + \beta'\left(\nabla_1'^2\frac{1}{R_0} + \frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(\frac{1}{R_0}\right)\right)\right]d\mathbf{x}' \\
&= -2\int_{-\infty}^{\infty}\phi_B'\left[-\nabla\cdot\left(\beta'\nabla_1'\frac{1}{R_0}\right) + \beta'\nabla'^2\frac{1}{R_0}\right]d\mathbf{x}' \qquad \text{(A.146)}
\end{aligned}
$$

Siden $\frac{1}{R_0}$ oppfyller Laplace, dvs. $\nabla'^2\frac{1}{R_0} = 0$, har vi

$$
\int_B \left[\phi_B'\frac{\partial G_1}{\partial n'}\right][dS]_B = 2\int_{-\infty}^{\infty}\phi_B'\left[\nabla\cdot\left(\beta'\nabla_1'\frac{1}{R_0}\right)\right]d\mathbf{x}' \qquad \text{(A.147)}
$$

Igjen kan vi skrive om integranden, ved bruk av følgende,

$$
\phi_B'\nabla\cdot\left(\beta'\nabla_1'\frac{1}{R_0}\right) = \nabla\cdot\left(\phi_B'\beta'\nabla_1'\frac{1}{R_0}\right) - \beta'\nabla_1'\frac{1}{R_0}\cdot\nabla_1'\phi_B' \qquad \text{(A.148)}
$$

$$
\int_B \left[\phi_B'\frac{\partial G_1}{\partial n'}\right][dS]_B = 2\int_{-\infty}^{\infty}\left[\nabla\cdot\left(\phi_B'\beta'\nabla_1'\frac{1}{R_0}\right) - \beta'\nabla_1'\frac{1}{R_0}\cdot\nabla_1'\phi_B'\right]d\mathbf{x}' \qquad \text{(A.149)}
$$

Det første integralet er lik 0 ved Gauss' teorem. Vi har dermed,

$$\int_B \left[\phi'_B \frac{\partial G_1}{\partial n'}\right][dS]_B = -2\int_{-\infty}^{\infty} \beta' \nabla'_1 \frac{1}{R_0} \cdot \nabla'_1 \phi'_B d\mathbf{x}' \tag{A.150}$$

Setter inn følgende inverstransform,

$$\frac{1}{R_0} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi}{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-kh}\right\} \tag{A.151}$$

$$\begin{aligned}\int_B \left[\phi'_B \frac{\partial G_1}{\partial n'}\right][dS]_B &= -2\int_{-\infty}^{\infty} \beta' \nabla'_1 \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi}{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-kh}\right\} \cdot \nabla'_1 \phi'_B d\mathbf{x}' \\ &= -2\mathcal{F}^{-1}\left\{-\frac{2\pi}{k} e^{-kh} i\mathbf{k} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \beta' \nabla'_1 \phi'_B e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}'\right\} \\ &= 2\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi}{k} e^{-kh} i\mathbf{k} \cdot \mathcal{F}\{\beta \nabla_1 \phi_B\}\right\}\end{aligned} \tag{A.152}$$

I likhet med Grue (2020) definerer vi $\hat{A}_1 = i\mathbf{k} \cdot \mathcal{F}\{\beta \nabla_1 \phi_B\}$. Da er,

$$\int_B \left[\phi'_B \frac{\partial G_1}{\partial n'}\right][dS]_B = 2\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi}{k} e^{-kh} \hat{A}_1\right\} \tag{A.153}$$

En Fourier-transform av begge sider gir,

$$\begin{aligned}\frac{k}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\int_B \left[\phi'_B \frac{\partial G_1}{\partial n'}\right][dS]_B\right\} &= 2e^{-kh}\hat{A}_1 = \frac{2e^{-kh}}{1+e^{-2kh}} \hat{A}_1 (1+e^{-2kh}) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}(e^{kh}+e^{-kh})} \hat{A}_1 (1+e^{-2kh}) = \frac{(1+e_1)\hat{A}_1}{\cosh(kh)}\end{aligned} \tag{A.154}$$

Oppsummert har vi,

$$\begin{aligned}\frac{k}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\int_F \left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial \phi'}{\partial n'}[dS]_F\right\} + \frac{k}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\int_F \left(\frac{1}{r_1}\right) \frac{\partial \phi'}{\partial n'}[dS]_F\right\} \\ = \; k\mathcal{F}\left\{\phi_F\right\} + \frac{k}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\int_F \phi'_F \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}\right)[dS]_F\right\} \\ + \frac{k}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\int_F \phi'_F \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r_1}\right)[dS]_F\right\} \\ + \frac{k}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\int_B \left[\phi'_B \frac{\partial G_1}{\partial n'}\right][dS]_B\right\}\end{aligned} \tag{A.155}$$

Settes alle ledd inn i likning A.155 får vi følgende,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{V\} = k E_1 \mathcal{F}\{\phi_F\} - k E_1 \mathcal{F}\{\delta V_1\} - i\mathbf{k} \cdot \mathcal{F}\{\delta \nabla_1 \phi_F\} + \frac{\hat{A}_1}{\cosh(kh)} \\ + k C_1 \left[\mathcal{F}\{N(V) + N_1(V)\} + \mathcal{F}\{T(\phi_F) + T_1(\phi_F)\}\right] \\ + k C_1 \left[e_1 \mathcal{F}\{\delta(V - V_1)\} + \mathcal{F}\{\delta \mathcal{F}^{-1}\{e_1 \mathcal{F}\{V - V_1\}\}\}\right]\end{aligned} \tag{A.156}$$

De siste to leddene er av høyere orden og antas neglisjerbare. I likhet med Grue (2020) definerer vi $\hat{B}_1 = i\mathbf{k}\cdot\mathcal{F}\{\delta\nabla_1\phi_F\}$. I tillegg ser vi at $E_1 = \frac{1-e^{-2kh}}{1+e^{-2kh}} = \tanh(kh)$. Dette gir følgende likning for potensialet på overflaten,

$$\hat{V} + \hat{B}_1 = k\tanh(kh)\left[\hat{\phi}_F - \mathcal{F}\{\delta V_1\}\right] + \frac{\hat{A}_1}{\cosh(kh)} \tag{A.157}$$

som tilsvarer likning (19) i Grue (2020).

Evalueringspunkt på havbunnen B

For et punkt på havbunnen B, bruker vi en Green funksjon gitt ved $G_2 = 1/r + 1/r_{1B}$, hvor $r_{1B} = [\mathbf{R}^2 + [y' + y]^2]^{1/2}$ er speilingen med hensyn på $y = 0$. For et punkt $(\mathbf{x}, y)$ på havbunnen B har vi følgende integrallikning,

$$\int_S \left[\phi(\mathbf{x}', y')\frac{\partial G_2}{\partial n'} - G_2\frac{\partial \phi}{\partial n'}(\mathbf{x}', y')\right] dS = -2\pi\phi_B(\mathbf{x}, y) \tag{A.158}$$

Som tidligere er det ingen bidrag i integralene over kontrollflatene S_c og det er ingen strømning gjennom havbunnen slik at $\left.\frac{\partial\phi'}{\partial n'}\right|_B = 0$. Da har vi,

$$\int_F \left[\phi_F'\frac{\partial G_2}{\partial n'} - G_2\frac{\partial \phi'}{\partial n'}\right][dS]_F + \int_B \left[\phi_B'\frac{\partial G_2}{\partial n'}\right][dS]_B = -2\pi\phi_B(\mathbf{x}, y) \tag{A.159}$$

Vi regner ledd for ledd. Til å begynne med har vi,

$$\int_F \left[G_2\frac{\partial \phi'}{\partial n'}\right][dS]_F = \int_F \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}}\right) V_F' d\mathbf{x}' \tag{A.160}$$

Integranden kan skrives om ved bruk av en rekkeutvikling,

$$\begin{aligned}
\left.\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}}\right)\right|_{\substack{(\mathbf{x}', y')\in F\\(\mathbf{x}, y)\in B}} &= \frac{1}{[R^2 + (\delta' - \beta + h)^2]^{1/2}} + \frac{1}{[R^2 + (\delta' + \beta - h)^2]^{1/2}}\\
&= \frac{1}{R_0}\frac{1}{[1 + \frac{2h(\delta'-\beta)}{R_0^2} + \frac{(\delta'-\beta)^2}{R_0^2}]^{1/2}}\\
&+ \frac{1}{R_0}\frac{1}{[1 - \frac{2h(\delta'+\beta)}{R_0^2} + \frac{(\delta'+\beta)^2}{R_0^2}]^{1/2}}\\
&= \frac{1}{R_0}\left(1 - \frac{h(\delta'-\beta)}{R_0^2} - \frac{(\delta'-\beta)^2}{2R_0^2} + \frac{3h^2(\delta'-\beta)^2}{2R_0^4} + \dots\right)\\
&+ \frac{1}{R_0}\left(1 + \frac{h(\delta'+\beta)}{R_0^2} - \frac{(\delta'+\beta)^2}{2R_0^2} + \frac{3h^2(\delta'+\beta)^2}{2R_0^4} + \dots\right)\\
&= 2\frac{1}{R_0} + 2\beta\frac{h}{R_0^3} + (\delta'^2 + \beta^2)\left(-\frac{1}{R_0} + \frac{3h^2}{R_0^5}\right) + \dots\\
&= 2\left[1 - \beta\frac{\partial}{\partial h} + \frac{1}{2}(\delta'^2 + \beta^2)\frac{\partial^2}{\partial h^2} + \dots\right]\frac{1}{R_0}
\end{aligned} \tag{A.161}$$

Dermed har vi,

$$\int_F \left[G_2 \frac{\partial \phi'}{\partial n'}\right] [dS]_F = \int_F 2\left[1 - \beta\frac{\partial}{\partial h} + \frac{1}{2}(\delta'^2 + \beta^2)\frac{\partial^2}{\partial h^2} + \dots\right] \frac{V'_F}{R_0} d\mathbf{x}' \quad \text{(A.162)}$$

Ved innsetting av invers-transform av likning A.33, får vi følgende

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_F \left[G_2 \frac{\partial \phi'}{\partial n'}\right] [dS]_F &= \frac{1}{2\pi}\int_F 2\left[1 - \beta\frac{\partial}{\partial h} + \frac{1}{2}(\delta'^2 + \beta^2)\frac{\partial^2}{\partial h^2} + \dots\right] \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi}{k}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}' - kh}\right\} V'_F d\mathbf{x}' \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2e^{-kh}}{k}\int_{-\infty}^{\infty} V'_F e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}'\right\} + \beta\mathcal{F}^{-1}\left\{2e^{-kh}\int_{-\infty}^{\infty} V'_F e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}'\right\} + \dots \\
&+ \frac{\beta^2}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{2ke^{-kh}\int_{-\infty}^{\infty} V'_F e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}'\right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2e^{-kh}}{k}\hat{V}'_F\right\} + \beta\mathcal{F}^{-1}\left\{2e^{-kh}\hat{V}'_F\right\} + \frac{\beta^2}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{2ke^{-kh}\hat{V}'_F\right\} + \dots
\end{aligned} \quad \text{(A.163)}$$

Dette tilsvarer likning (12) i Grue (2020).
Videre ser vi på følgende ledd,

$$\begin{aligned}
\int_F \left[\phi'_F \frac{\partial G_2}{\partial n'}\right] [dS]_F &= \int_F \left[\phi'_F \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}}\right)\right] d\mathbf{x}' \\
&= \int_F \left[\phi'_F[-\mathbf{j} + \nabla'_1\delta'] \cdot \nabla'\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}}\right)\right] d\mathbf{x}' \\
&= \int_F \phi'_F[-\frac{\partial}{\partial y'} + \nabla'_1\delta' \cdot \nabla'_1]\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}}\right) d\mathbf{x}'
\end{aligned} \quad \text{(A.164)}$$

Ledd for ledd har vi,

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}}\right)\Bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in F \\ (\mathbf{x},y)\in B}} = -\frac{1}{r^3}(\delta' - \beta + h) - \frac{1}{r_{1B}^3}(\delta' + \beta - h) \quad \text{(A.165)}$$

hvor vi bruker følgende Taylor rekkeutviklinger,

$$\frac{1}{r^3}\Bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in F \\ (\mathbf{x},y)\in B}} = \frac{1}{R_0^3}\left[1 - \frac{3h(\delta' - \beta)}{R_0^2} - \frac{3(\delta' - \beta)^2}{2R_0^2} + \dots\right] \quad \text{(A.166)}$$

$$\frac{1}{r_{1B}^3}\Bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in F \\ (\mathbf{x},y)\in B}} = \frac{1}{R_0^3}\left[1 + \frac{3h(\delta' + \beta)}{R_0^2} - \frac{3(\delta' + \beta)^2}{2R_0^2} + \dots\right] \quad \text{(A.167)}$$

slik at

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_{1B}}\right)\Bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in F\\(\mathbf{x},y)\in B}} &= -\frac{1}{R_0^3}\left[1-\frac{3h(\delta'-\beta)}{R_0^2}-\frac{3(\delta'-\beta)^2}{2R_0^2}+\dots\right](\delta'-\beta+h)\\
&-\frac{1}{R_0^3}\left[1+\frac{3h(\delta'+\beta)}{R_0^2}-\frac{3(\delta'+\beta)^2}{2R_0^2}+\dots\right](\delta'+\beta-h)\\
&=2\delta'\left[-\frac{1}{R_0^3}+\frac{3h^2}{R_0^5}-\beta\frac{9h}{2R_0^5}+\dots\right]\\
&=2\delta'\left[\frac{\partial^2}{\partial h^2}\frac{1}{R_0}+\dots\right]
\end{aligned} \tag{A.168}$$

Produktet med horisontal gradient kan skrives om slik at,

$$\begin{aligned}
&\nabla_1'\delta'\cdot\nabla_1'\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_{1B}}\right)=\left(\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r_{1B}^3}\right)\nabla_1'\delta'\cdot\mathbf{R}\Bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in F\\(\mathbf{x},y)\in B}}\\
&=\frac{1}{R_0^3}\left[1-\frac{3h(\delta'-\beta)}{R_0^2}-\frac{3(\delta'-\beta)^2}{2R_0^2}+\dots+1+\frac{3h(\delta'+\beta)}{R_0^2}-\frac{3(\delta'+\beta)^2}{2R_0^2}+\dots\right]\nabla_1'\delta'\cdot\mathbf{R}\\
&=\nabla_1'\delta'\cdot\left[2\frac{1}{R_0^3}\mathbf{R}+2\beta\frac{3h}{R_0^5}\mathbf{R}-2(\delta'^2+\beta^2)\frac{3}{2}\frac{1}{R_0^5}\mathbf{R}+2(\delta'^2+\beta^2)\frac{15}{2}\frac{h^2}{R_0^7}\mathbf{R}+\dots\right]\\
&=2\nabla_1'\delta'\cdot\left[-\nabla_1'\frac{1}{R_0}+\beta\frac{\partial}{\partial h}\nabla_1'\frac{1}{R_0}-\frac{1}{2}(\delta'^2+\beta^2)\frac{\partial^2}{\partial h^2}\nabla_1'\frac{1}{R_0}+\dots\right]\\
&=-2\nabla_1'\delta'\cdot\left[1-\beta\frac{\partial}{\partial h}+\frac{1}{2}(\delta'^2+\beta^2)\frac{\partial^2}{\partial h^2}+\dots\right]\nabla_1'\frac{1}{R_0}
\end{aligned} \tag{A.169}$$

Som i tidligere seksjoner ser vi at,

$$-\nabla_1'\delta'\cdot\nabla_1'\frac{1}{R_0}=-\nabla_1'\cdot\left(\delta'\nabla_1'\frac{1}{R_0}\right)+\delta'\nabla_1'^2\frac{1}{R_0} \tag{A.170}$$

Legger sammen ledd regnet ut i likning A.168 og A.169.

$$\begin{aligned}
&[-\frac{\partial}{\partial y'}+\nabla_1'\delta'\cdot\nabla_1']\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_{1B}}\right)\\
&=2\delta'\left[\frac{\partial^2}{\partial h^2}\frac{1}{R_0}+\dots\right]+2\delta'\left[1-\beta\frac{\partial}{\partial h}+\dots\right]\nabla_1'^2\frac{1}{R_0}\\
&-2\nabla_1'\cdot\left[1-\beta\frac{\partial}{\partial h}+\frac{1}{2}(\delta'^2+\beta^2)\frac{\partial^2}{\partial h^2}+\dots\right]\left(\delta'\nabla_1'\frac{1}{R_0}\right)
\end{aligned} \tag{A.171}$$

Siden kildefunksjonen oppfyller Laplaces likning har vi at,

$$\begin{aligned}
&2\delta'\left[\frac{\partial^2}{\partial h^2}\frac{1}{R_0}+\dots\right]+2\delta'\left[1-\beta\frac{\partial}{\partial h}+\dots\right]\nabla_1'^2\frac{1}{R_0}\\
&\qquad=2\delta'\left[1-\beta\frac{\partial}{\partial h}+\dots\right]\nabla'^2\frac{1}{R_0}=0
\end{aligned} \tag{A.172}$$

Settes alle ledd tilbake inn i integralet blir likning A.164 gitt ved følgende,

$$\begin{aligned} &\int_F \left[\phi'_F \frac{\partial G_2}{\partial n'}\right][dS]_F \\ &= -\int_F 2\left[1 - \beta\frac{\partial}{\partial h} + \frac{1}{2}(\delta'^2 + \beta^2)\frac{\partial^2}{\partial h^2} + \dots\right]\phi'_F \nabla'_1 \cdot \left(\delta' \nabla'_1 \frac{1}{R_0}\right) d\mathbf{x}' \end{aligned} \tag{A.173}$$

Igjen skriver vi om produktet i integranden,

$$-\phi'_F \nabla'_1 \cdot \left(\delta' \nabla'_1 \frac{1}{R_0}\right) = -\nabla'_1 \cdot \left(\phi'_F \delta' \nabla'_1 \frac{1}{R_0}\right) + \delta' \nabla'_1 \phi'_F \cdot \nabla'_1 \frac{1}{R_0} \tag{A.174}$$

Ved Gauss teorem Matthews 1998 blir

$$-\int_F 2\left[1 - \beta\frac{\partial}{\partial h} + \frac{1}{2}(\delta'^2 + \beta^2)\frac{\partial^2}{\partial h^2} + \dots\right]\nabla'_1 \cdot \left(\phi'_F \delta' \nabla'_1 \frac{1}{R_0}\right) = 0 \tag{A.175}$$

Vi står igjen med følgende uttrykk,

$$\begin{aligned} &\int_F \left[\phi'_F \frac{\partial G_2}{\partial n'}\right][dS]_F \\ &= \int_F 2\delta'\left[1 - \beta\frac{\partial}{\partial h} + \frac{1}{2}(\delta'^2 + \beta^2)\frac{\partial^2}{\partial h^2} + \dots\right]\nabla'_1 \phi'_F \cdot \nabla'_1 \frac{1}{R_0} d\mathbf{x}' \end{aligned} \tag{A.176}$$

Ved innsetting av invers-transform av likning A.33, får vi følgende

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2\pi}\int_F \left[\phi'_F \frac{\partial G_2}{\partial n'}\right][dS]_F \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_F 2\delta'\left[1 - \beta\frac{\partial}{\partial h} + \frac{1}{2}(\delta'^2 + \beta^2)\frac{\partial^2}{\partial h^2} + \dots\right]\nabla'_1 \phi'_F \cdot \nabla'_1 \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi}{k}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}' - kh}\right\} d\mathbf{x}' \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-kh}\frac{i\mathbf{k}}{k} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} 2\delta'\left[1 + k\beta + \frac{1}{2}k^2(\delta'^2 + \beta^2) + \dots\right]\nabla'_1 \phi'_F e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}'\right\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{2e^{-kh}\frac{i\mathbf{k}}{k} \cdot \mathcal{F}\{\delta' \nabla'_1 \phi'_F\}\right\} + \beta\mathcal{F}^{-1}\left\{2e^{-kh} i\mathbf{k} \cdot \mathcal{F}\{\delta' \nabla'_1 \phi'_F\}\right\} \\ &+ \frac{1}{2}\beta^2 \mathcal{F}^{-1}\left\{2ke^{-kh} i\mathbf{k} \cdot \mathcal{F}\{\delta' \nabla'_1 \phi'_F\}\right\} + \dots \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{2e^{-kh}\hat{B}_1/k\right\} + \beta\mathcal{F}^{-1}\left\{2e^{-kh}\hat{B}_1\right\} + \frac{1}{2}\beta^2\mathcal{F}^{-1}\left\{2ke^{-kh}\hat{B}_1\right\} + \dots \end{aligned} \tag{A.177}$$

hvor vi har definert $\hat{B}_1 = i\mathbf{k} \cdot \mathcal{F}\{\delta' \nabla'_1 \phi'_F\}$ for å oppnå likning (13) i Grue (2020).

Det siste leddet som er igjen skriver vi ut slik at,

$$\int_B \left[\phi'_B \frac{\partial G_2}{\partial n'}\right][dS]_B = \int_B \left[\phi'_B \frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{r}\right][dS]_B + \int_B \left[\phi'_B \frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{r_{1B}}\right][dS]_B \tag{A.178}$$

og evaluerer hvert ledd for seg.

$$\begin{aligned}\int_B \left[\phi'_B \frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{r}\right][dS]_B &= \int_B \left[\phi'_B[-\mathbf{j} + \nabla'_1\beta'] \cdot \nabla' \frac{1}{r}\right] d\mathbf{x}' \\ &= \int_B \phi'_B \left[-\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{r} + \nabla'_1\beta' \cdot \nabla'_1 \frac{1}{r}\right] d\mathbf{x}' \end{aligned} \tag{A.179}$$

Ledd for ledd har vi,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{r}\bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in B}} \\ &= -\frac{1}{r^3}\bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in B}} ((-h+\beta') - (-h+\beta)) = -\frac{1}{r^3}\bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in B}} (\beta' - \beta)\end{aligned} \tag{A.180}$$

Vi bruker følgende Taylor rekkeutvikling,

$$\frac{1}{r^3}\bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in B}} = \frac{1}{R^3}\left[1 - \frac{3(\beta'-\beta)^2}{2R^2} + \dots\right] \tag{A.181}$$

slik at

$$\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{r}\bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in B}} = \frac{1}{R^3}\left[1 - \frac{3(\beta'-\beta)^2}{2R^2} + \dots\right](\beta'-\beta) \tag{A.182}$$

$$\begin{aligned}&\nabla'_1\beta' \cdot \nabla'_1 \frac{1}{r}\bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in B}} \\ &= -\frac{1}{r^3}\bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in B}} \nabla'_1\beta' \cdot \mathbf{R} \\ &= \left[1 - \frac{3(\beta'-\beta)^2}{2R^2} + \dots\right]\nabla'_1\beta' \cdot \left(-\frac{\mathbf{R}}{R^3}\right) \\ &= \left[1 - \frac{3(\beta'-\beta)^2}{2R^2} + \dots\right]\nabla'_1\beta' \cdot \nabla'_1 \frac{1}{R}\end{aligned} \tag{A.183}$$

Dermed er,

$$\begin{aligned}\phi'_B\left[-\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{r} + \nabla'_1\beta' \cdot \nabla'_1 \frac{1}{r}\right]_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in B}} &= \phi'_B\left[-\frac{1}{R^3}\left[1 - \frac{3(\beta'-\beta)^2}{2R^2} + \dots\right](\beta'-\beta) \right.\\ &\left. + \left[1 - \frac{3(\beta'-\beta)^2}{2R^2} + \dots\right]\nabla'_1\beta' \cdot \nabla'_1 \frac{1}{R}\right]\end{aligned} \tag{A.184}$$

Som i tidligere seksjoner ser vi at,

$$\begin{aligned} -\nabla_1'\beta'\cdot\nabla_1'\frac{1}{R} &= -\nabla_1'\cdot\left(\beta'\nabla_1'\frac{1}{R}\right)+\beta'\nabla_1'^2\frac{1}{R} \\ &= -\nabla_1'\cdot\left((\beta'-\beta)\nabla_1'\frac{1}{R}\right)+(\beta'-\beta)\nabla_1'^2\frac{1}{R} \end{aligned} \tag{A.185}$$

Dette gir,

$$\begin{aligned} &\phi_B'\left[-\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{r}+\nabla_1'\beta'\cdot\nabla_1'\frac{1}{r}\right]_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in B}} = \phi_B'\left[-\frac{1}{R^3}\left[1-\frac{3(\beta'-\beta)^2}{2R^2}+\dots\right](\beta'-\beta)\right. \\ &+\left.\left[1-\frac{3(\beta'-\beta)^2}{2R^2}+\dots\right]\left(-\nabla_1'\cdot\left((\beta'-\beta)\nabla_1'\frac{1}{R}\right)+(\beta'-\beta)\nabla_1'^2\frac{1}{R}\right)\right] \\ &= \phi_B'\left[-\frac{(\beta'-\beta)}{R^3}+\dots+(\beta'-\beta)\nabla_1'^2\frac{1}{R}+\dots+\left[1-\frac{3(\beta'-\beta)^2}{2R^2}+\dots\right]\left(-\nabla_1'\cdot\left((\beta'-\beta)\nabla_1'\frac{1}{R}\right)\right)\right] \\ &= \left[1-\frac{3(\beta'-\beta)^2}{2R^2}+\dots\right]\phi_B'\left(-\nabla_1'\cdot\left((\beta'-\beta)\nabla_1'\frac{1}{R}\right)\right) \end{aligned} \tag{A.186}$$

hvor vi har brukt at,

$$(\beta'-\beta)\left[-\frac{1}{R^3}+\nabla_1'^2\frac{1}{R}\right]+\dots=0 \tag{A.187}$$

Videre kan vi skrive om følgende,

$$-\phi_B'\left(\nabla_1'\cdot\left((\beta'-\beta)\nabla_1'\frac{1}{R}\right)\right) = -\nabla_1'\cdot\left((\beta'-\beta)\phi_B'\nabla_1'\frac{1}{R}\right)+(\beta'-\beta)\nabla_1'\phi_B'\cdot\nabla_1'\frac{1}{R} \tag{A.188}$$

slik at,

$$\begin{aligned} \int_B\left[\phi_B'\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{r}\right][dS]_B &= \int_B\left[1-\frac{3(\beta'-\beta)^2}{2R^2}+\dots\right](\beta'-\beta)\nabla_1'\phi_B'\cdot\nabla_1'\frac{1}{R}d\mathbf{x}' \\ &= \int_B\nabla_1'\phi_B'\cdot\left[(\beta'-\beta)-(\beta'-\beta)^3\frac{3}{2R^2}+\dots\right]\nabla_1'\frac{1}{R}d\mathbf{x}' \end{aligned} \tag{A.189}$$

hvor integralet over det første leddet i A.185 blir lik 0 ved Gauss teorem Matthews 1998. Vi kan bruke,

$$\nabla_1\frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \tag{A.190}$$

$$\nabla_1^2\frac{1}{R} = \nabla_1\cdot\left(\nabla_1\frac{1}{R}\right) = -\nabla_1\cdot\left(\frac{\mathbf{R}}{R^3}\right) = \frac{1}{R^3} \tag{A.191}$$

$$\nabla_1^3\frac{1}{R} = \nabla_1\left(\nabla_1^2\frac{1}{R}\right) = \nabla_1\frac{1}{R^3} = \frac{3}{R^2}\nabla_1\frac{1}{R} \tag{A.192}$$

slik at A.189 kan skrives,

$$\int_B \left[\phi'_B \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r}\right] [dS]_B = \int_B \nabla'_1 \phi'_B \cdot \left[(\beta' - \beta) - \frac{1}{6}(\beta' - \beta)^3 \nabla_1'^2 + \dots\right] \nabla'_1 \frac{1}{R} d\mathbf{x}' \tag{A.193}$$

Setter inn invers-transform av likning A.32,

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi} \int_B \left[\phi'_B \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r}\right] [dS]_B \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_B \nabla'_1 \phi'_B \cdot \left[(\beta' - \beta) - \frac{1}{6}(\beta' - \beta)^3 \nabla_1'^2 + \dots\right] \nabla'_1 \mathcal{F}^{-1} \left\{\frac{2\pi}{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}\right\} d\mathbf{x}' \\
&= \mathcal{F}^{-1} \left\{\frac{-i\mathbf{k}}{k} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \nabla'_1 \phi'_B \cdot \left[(\beta' - \beta) - \frac{1}{6}(\beta' - \beta)^3 \nabla_1'^2 + \dots\right] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}'\right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1} \left\{-i\mathbf{k} \cdot \mathcal{F}\{\beta' \nabla'_1 \phi'_B\}/k\right\} - \beta \mathcal{F}^{-1} \left\{-i\mathbf{k} \cdot \mathcal{F}\{\nabla'_1 \phi'_B\}/k\right\} + \mathcal{O}(\beta'^3) \\
&= \mathcal{F}^{-1} \left\{-\hat{A}_1/k\right\} - \beta \mathcal{F}^{-1} \left\{k \hat{\phi}'_B\right\} + \mathcal{O}(\beta'^3)
\end{aligned} \tag{A.194}$$

Dette tilsvarer likning (14) i Grue (2020).
Til slutt har vi,

$$\begin{aligned}
\int_B \left[\phi'_B \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r_{1B}}\right] [dS]_B &= \int_B \left[\phi'_B [-\mathbf{j} + \nabla'_1 \beta'] \cdot \nabla' \frac{1}{r_{1B}}\right] d\mathbf{x}' \\
&= \int_B \phi'_B \left[-\frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{r_{1B}} + \nabla'_1 \beta' \cdot \nabla'_1 \frac{1}{r_{1B}}\right] d\mathbf{x}'
\end{aligned} \tag{A.195}$$

Ledd for ledd har vi,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{r_{1B}}\Bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B \\ (\mathbf{x},y)\in B}} &= -\frac{1}{r_{1B}^3}\Bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B \\ (\mathbf{x},y)\in B}} ((-h + \beta') + (-h + \beta)) \\
&= -\frac{1}{r_{1B}^3}\Bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B \\ (\mathbf{x},y)\in B}} (-2h + \beta' + \beta)
\end{aligned} \tag{A.196}$$

Vi bruker følgende Taylor rekkeutvikling,

$$\frac{1}{r_{1B}^3}\Bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B \\ (\mathbf{x},y)\in B}} = \frac{1}{R_1^3} \left[1 + \frac{6h(\beta' + \beta)}{R_1^2} - \frac{3(\beta' + \beta)^2}{2R_1^2} + \dots\right] \tag{A.197}$$

slik at

$$\frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{r_{1B}}\Bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B \\ (\mathbf{x},y)\in B}} = \frac{1}{R_1^3} \left[1 + \frac{6h(\beta' + \beta)}{R_1^2} - \frac{3(\beta' + \beta)^2}{2R_1^2} + \dots\right] (-2h + \beta' + \beta) \tag{A.198}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_1'\beta'\cdot\nabla_1'\frac{1}{r_{1B}}\bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in B}} &= -\frac{1}{r_{1B}^3}\bigg|_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in B}}\nabla_1'\beta'\cdot\mathbf{R}\\
&=\left[1+\frac{6h(\beta'+\beta)}{R_1^2}-\frac{3(\beta'+\beta)^2}{2R_1^2}+\dots\right]\nabla_1'\beta'\cdot\left(-\frac{\mathbf{R}}{R^3}\right)\\
&=\left[1+\frac{6h(\beta'+\beta)}{R_1^2}-\frac{3(\beta'+\beta)^2}{2R_1^2}+\dots\right]\nabla_1'\beta'\cdot\nabla_1'\frac{1}{R_1}
\end{aligned}
\tag{A.199}
$$

Dermed er,

$$
\begin{aligned}
&\phi_B'\left[-\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{r_{1B}}+\nabla_1'\beta'\cdot\nabla_1'\frac{1}{r_{1B}}\right]_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in B}}\\
&=\phi_B'\left[-\frac{1}{R_1^3}\left[1+\frac{6h(\beta'+\beta)}{R_1^2}-\frac{3(\beta'+\beta)^2}{2R_1^2}+\dots\right](-2h+\beta'+\beta)\right.\\
&\left.+\left[1+\frac{6h(\beta'+\beta)}{R_1^2}-\frac{3(\beta'+\beta)^2}{2R_1^2}+\dots\right]\nabla_1'\beta'\cdot\nabla_1'\frac{1}{R_1}\right]
\end{aligned}
\tag{A.200}
$$

$$
\begin{aligned}
-\nabla_1'\beta'\cdot\nabla_1'\frac{1}{R_{1B}} &= -\nabla_1'\cdot\left(\beta'\nabla_1'\frac{1}{R_1}\right)+\beta'\nabla_1'^2\frac{1}{R_1}\\
&=-\nabla_1'\cdot\left((\beta'+\beta)\nabla_1'\frac{1}{R_1}\right)+(\beta'+\beta)\nabla_1'^2\frac{1}{R_1}
\end{aligned}
\tag{A.201}
$$

$$
\begin{aligned}
&\phi_B'\left[-\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{r_{1B}}+\nabla_1'\beta'\cdot\nabla_1'\frac{1}{r_{1B}}\right]_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in B}}\\
&=\phi_B'\left[-\frac{1}{R_1^3}\left[1+\frac{6h(\beta'+\beta)}{R_1^2}-\frac{3(\beta'+\beta)^2}{2R_1^2}+\dots\right](-2h+\beta'+\beta)\right.\\
&+\left[1+\frac{6h(\beta'+\beta)}{R_1^2}-\frac{3(\beta'+\beta)^2}{2R_1^2}+\dots\right](\beta'+\beta)\nabla_1'^2\frac{1}{R_1}\\
&\left.-\left[1+\frac{6h(\beta'+\beta)}{R_1^2}-\frac{3(\beta'+\beta)^2}{2R_1^2}+\dots\right]\nabla_1'\cdot\left((\beta'+\beta)\nabla_1'\frac{1}{R_1}\right)\right]\\
&=\phi_B'\frac{\partial}{\partial(2h)}\frac{1}{R_1}+\phi_B'(\beta'+\beta)\left[\frac{\partial^2}{\partial(2h)^2}\frac{1}{R_1}+\nabla_1'^2\frac{1}{R_1}\right]+\dots\\
&-\phi_B'\left[1+\frac{6h(\beta'+\beta)}{R_1^2}-\frac{3(\beta'+\beta)^2}{2R_1^2}+\dots\right]\nabla_1'\cdot\left((\beta'+\beta)\nabla_1'\frac{1}{R_1}\right)
\end{aligned}
\tag{A.202}
$$

$$
\left[\frac{\partial^2}{\partial(2h)^2}\frac{1}{R_1}+\nabla_1'^2\frac{1}{R_1}\right]=0
\tag{A.203}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\phi_B'\nabla_1'\cdot\left((\beta'+\beta)\nabla_1'\frac{1}{R_1}\right)\\
&=-\nabla_1'\cdot\left(\phi_B'(\beta'+\beta)\nabla_1'\frac{1}{R_1}\right)+(\beta'+\beta)\nabla_1'\phi_B'\cdot\nabla_1'\frac{1}{R_1}
\end{aligned}
\tag{A.204}
$$

$$
\begin{aligned}
&\phi'_B\left[-\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{r_{1B}}+\nabla'_1\beta'\cdot\nabla'_1\frac{1}{r_{1B}}\right]_{\substack{(\mathbf{x}',y')\in B\\(\mathbf{x},y)\in B}}\\
&=\phi'_B\frac{\partial}{\partial(2h)}\frac{1}{R_1}+\left[1+\frac{6h(\beta'+\beta)}{R_1^2}-\frac{3(\beta'+\beta)^2}{2R_1^2}+\dots\right](\beta'+\beta)\nabla'_1\phi'_B\cdot\nabla'_1\frac{1}{R_1}\\
&=\phi'_B\frac{\partial}{\partial(2h)}\frac{1}{R_1}+\nabla'_1\phi'_B\cdot\left[(\beta'+\beta)+(\beta'+\beta)^2\frac{6h}{R_1^2}-(\beta'+\beta)^3\frac{3}{2R_1^2}+\dots\right]\nabla'_1\frac{1}{R_1}\\
&=\phi'_B\frac{\partial}{\partial(2h)}\frac{1}{R_1}+\nabla'_1\phi'_B\cdot\left[(\beta'+\beta)-\frac{1}{2}(\beta'+\beta)^2\frac{\partial}{\partial(2h)}-\frac{1}{6}(\beta'+\beta)^3\frac{\partial^2}{\partial(2h)^2}+\dots\right]\nabla'_1\frac{1}{R_1}
\end{aligned}
\tag{A.205}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi}\int_B\left[\phi'_B\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{r_{1B}}\right][dS]_B\\
&=-\frac{1}{2\pi}\int_B\phi'_B\frac{\partial}{\partial(2h)}\frac{1}{R_1}d\mathbf{x}'+\frac{1}{2\pi}\int_B\nabla'_1\phi'_B\cdot\left[(\beta'+\beta)-\frac{1}{2}(\beta'+\beta)^2\frac{\partial}{\partial(2h)}\right.\\
&\left.+\frac{1}{6}(\beta'+\beta)^3\frac{\partial^2}{\partial(2h)^2}+\dots\right]\nabla'_1\frac{1}{R_1}d\mathbf{x}'\\
&=-\frac{1}{2\pi}\int_B\phi'_B\frac{\partial}{\partial(2h)}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi}{k}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'-2kh}\right\}d\mathbf{x}'\\
&+\frac{1}{2\pi}\int_B\nabla'_1\phi'_B\cdot\left[(\beta'+\beta)-\frac{1}{2}(\beta'+\beta)^2\frac{\partial}{\partial(2h)}\right.\\
&\left.+\frac{1}{6}(\beta'+\beta)^3\frac{\partial^2}{\partial(2h)^2}+\dots\right]\nabla'_1\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi}{k}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'-2kh}\right\}d\mathbf{x}'\\
&=\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2kh}\int_{-\infty}^{\infty}\phi'_Be^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}d\mathbf{x}'\right\}\\
&+\mathcal{F}^{-1}\left\{-e^{-2kh}\frac{i\mathbf{k}}{k}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\nabla'_1\phi'_B(\beta'+\beta)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}d\mathbf{x}'\right\}\\
&-\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2kh}i\mathbf{k}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\nabla'_1\phi'_B(\beta'+\beta)^2e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}d\mathbf{x}'\right\}+\dots\\
&=\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2kh}\mathcal{F}\{\phi'_B\}\right\}\\
&+\mathcal{F}^{-1}\left\{-e^{-2kh}\frac{i\mathbf{k}}{k}\cdot\mathcal{F}\{\nabla'_1\phi'_B(\beta'+\beta)\}\right\}\\
&-\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2kh}i\mathbf{k}\cdot\mathcal{F}\{\nabla'_1\phi'_B(\beta'+\beta)^2\}\right\}+\dots\\
&=\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2kh}\hat{\phi}'_B\right\}\\
&-\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2kh}(\hat{A}_1/k-\beta k\hat{\phi}'_B))\right\}\\
&-\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2kh}(\hat{A}_2-\beta^2k^2\hat{\phi}'_B+2\beta\hat{A}_1)\right\}+\dots\\
&=\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2kh}(\hat{\phi}'_B-\hat{A}_1/k-\hat{A}_2/2)\right\}\\
&+\beta\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2kh}(k\hat{\phi}'_B-\hat{A}_1))\right\}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{2}\beta^2\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2kh}k^2\hat{\phi}'_B\right\}+\ldots \tag{A.206}$$

Det vil si,

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi}\int_B\left[\phi'_B\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{r_{1B}}\right][dS]_B=\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2kh}(\hat{\phi}'_B-\hat{A}_1/k-\hat{A}_2/2)\right\}\\
&+\beta\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2kh}(k\hat{\phi}'_B-\hat{A}_1)\right\}+\frac{1}{2}\beta^2\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2kh}k^2\hat{\phi}'_B\right\}+\mathcal{O}(\beta^3)
\end{aligned} \tag{A.207}$$

som tilsvarer likning (15) i Grue (2020).

Setter alle ledd tilbake inn i Fourier-transformert versjon av A.159, slik at

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\phi_B\}=\;&\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_F\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_{1B}}\right)\frac{\partial\phi'}{\partial n'}[dS]_F\right\}\\
&-\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_F\phi'_F\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_{1B}}\right)[dS]_F\right\}\\
&-\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_B\phi'_B\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{r}[dS]_B\right\}\\
&-\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_B\phi'_B\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{r_{1B}}[dS]_B\right\}
\end{aligned} \tag{A.208}$$

Hvert ledd er gitt i henholdsvis likning A.163, A.177, A.194 og A.207. Vi får dermed,

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_B=\;&\frac{2e^{-kh}}{k}\hat{V}'_F+\mathcal{F}\left\{\beta\mathcal{F}^{-1}\left\{2e^{-kh}\hat{V}'_F\right\}\right\}+\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\beta^2\mathcal{F}^{-1}\left\{2ke^{-kh}\hat{V}'_F\right\}\right\}+\ldots\\
&+2e^{-kh}\hat{B}_1/k+\mathcal{F}\left\{\beta\mathcal{F}^{-1}\left\{2e^{-kh}\hat{B}_1\right\}\right\}+\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\beta^2\mathcal{F}^{-1}\left\{2ke^{-kh}\hat{B}_1\right\}\right\}+\ldots\\
&-\hat{A}_1/k-\mathcal{F}\left\{\beta\mathcal{F}^{-1}\left\{k\hat{\phi}'_B\right\}\right\}+\mathcal{O}(\beta'^3)\\
&+e^{-2kh}(\hat{\phi}'_B-\hat{A}_1/k-\hat{A}_2/2)+\mathcal{F}\left\{\beta\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2kh}(k\hat{\phi}'_B-\hat{A}_1)\right\}\right\}\\
&+\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\beta^2\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2kh}k^2\hat{\phi}'_B\right\}\right\}+\mathcal{O}(\beta^3)
\end{aligned} \tag{A.209}$$

En omorganisering og multiplikasjon med k gir,

$$\begin{aligned}
0=\;&2e^{-kh}(\hat{V}'_F+\hat{B}_1)-\hat{A}_1-k\hat{\phi}'_B+e^{-2kh}(k\hat{\phi}'_B-\hat{A}_1-k\hat{A}_2/2)\\
&+k\mathcal{F}\left\{\beta\mathcal{F}^{-1}\left\{2e^{-kh}(\hat{V}'_F+\hat{B}_1)-k\hat{\phi}'_B+e^{-2kh}(k\hat{\phi}'_B-\hat{A}_1)\right\}\right\}\\
&+k\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\beta^2\mathcal{F}^{-1}\left\{2ke^{-kh}\hat{V}'_F+2ke^{-kh}\hat{B}_1+e^{-2kh}k^2\hat{\phi}'_B\right\}\right\}+\mathcal{O}(\beta'^3)
\end{aligned} \tag{A.210}$$

Som Grue (2020) kan vi definere $\hat{W}=\hat{V}'_F+\hat{B}_1$ og $e_1=e^{-kh}$ slik at,

$$
\begin{aligned}
0 &= 2e_1\hat{W} - (1+e_1^2)\hat{A}_1 - (1-e_1^2)k\hat{\phi}'_B - ke_1^2\hat{A}_2/2 \\
&\quad + k\mathcal{F}\left\{\beta\mathcal{F}^{-1}\left\{2e_1\hat{W} - k\hat{\phi}'_B + e_1^2(k\hat{\phi}'_B - \hat{A}_1)\right\}\right\} \\
&\quad + k\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\beta^2\mathcal{F}^{-1}\left\{k(2e_1\hat{W} + e_1^2k\hat{\phi}'_B)\right\}\right\} + \mathcal{O}(\beta'^3) \qquad \text{(A.211)}
\end{aligned}
$$

I tillegg kan vi definere $k\hat{\Psi} = 2e_1\hat{W} - (1-e_1^2)k\hat{\phi}'_B - (1+e_1^2)\hat{A}_1 - e_1^2k\hat{A}_2/2$, slik at

$$
\begin{aligned}
\hat{\Upsilon}_1 &= 2e_1\hat{W} - k\hat{\phi}'_B + e_1^2(k\hat{\phi}'_B - \hat{A}_1) \\
&= 2e_1\hat{W} - (1-e_1^2)k\hat{\phi}'_B - (1+e_1^2)\hat{A}_1 - e_1^2k\hat{A}_2/2 + \hat{A}_1 + e_1^2k\hat{A}_2/2 \\
&= k\hat{\Psi} + \hat{A}_1 + e_1^2k\hat{A}_2/2 \qquad \text{(A.212)}
\end{aligned}
$$

og,

$$
\begin{aligned}
\hat{\Upsilon}_2 &= k[2e_1\hat{W} + e_1^2k\hat{\phi}'_B] \\
&= k\left[2e_1\hat{W} - (1-e_1^2)k\hat{\phi}'_B - (1+e_1^2)\hat{A}_1 - e_1^2k\hat{A}_2/2 + k\hat{\phi}'_B + (1+e_1^2)\hat{A}_1 + e_1^2k\hat{A}_2/2\right] \\
&= k\left[k\hat{\Psi} + k\hat{\phi}'_B + (1+e_1^2)\hat{A}_1 + e_1^2k\hat{A}_2/2\right] \qquad \text{(A.213)}
\end{aligned}
$$

som gir

$$
\begin{aligned}
(1-e_1^2)k\hat{\phi}'_B &= 2e_1\hat{W} - (1+e_1^2)\hat{A}_1 - ke_1^2\hat{A}_2/2 \\
&\quad + k\mathcal{F}\left\{\beta\Upsilon_1 + \frac{1}{2}\beta^2\Upsilon_2\right\} + \mathcal{O}(\beta'^3) \qquad \text{(A.214)}
\end{aligned}
$$

Definerer $k\hat{\mathcal{R}} = -\frac{1}{2}\frac{ke_1^2}{(1-e_1^2)}\hat{A}_2 + \frac{k}{(1-e_1^2)}\mathcal{F}\left\{\beta\Upsilon_1 + \frac{1}{2}\beta^2\Upsilon_2\right\}$, og deler på $(1-e_1^2)$ slik at potensialet langs bunnen kan skrives som,

$$
k\hat{\phi}'_B = \hat{W}/\sinh(kh) - \hat{A}_1/\tanh(kh) + k\hat{\mathcal{R}} \qquad \text{(A.215)}
$$

Vi har at $\hat{W} = \hat{V}'_F + \hat{B}_1 = k\tanh(kh)\left[\hat{\phi}_F - \mathcal{F}\{\delta V_F\}\right] + \frac{\hat{A}_1}{\cosh(kh)}$, slik at

$$
\begin{aligned}
k\hat{\phi}'_B &= \frac{k\left[\hat{\phi}_F - \mathcal{F}\{\delta V_F\}\right]}{\cosh(kh)} + \left(\frac{1}{\cosh(kh)\sinh(kh)} - \frac{1}{\tanh(kh)}\right)\hat{A}_1 + k\hat{\mathcal{R}} \\
&= \frac{k\left[\hat{\phi}_F - \mathcal{F}\{\delta V_F\}\right]}{\cosh(kh)} - \tanh(kh)\hat{A}_1 + k\hat{\mathcal{R}} \qquad \text{(A.216)}
\end{aligned}
$$

Dette tilsvarer likning (19) i Grue (2020).

A.2 Utledninger fra kapittel 3

Denne seksjonen inneholder mer detaljerte utledninger av likninger presentert i kapittel 3.

A.2.1 En tilnærming til restleddet

Vi ser på det vi betegner som restleddet, $k\hat{\mathcal{R}}$ og ønsker å finne en tilnærming til orden $\mathcal{O}(\beta^2)$. Videre bruker vi følgende notasjon,

$$S = \sinh(kh) = \frac{1}{2}\left(e^{kh} - e^{-kh}\right) \tag{A.217}$$

$$C = \cosh(kh) = \frac{1}{2}\left(e^{kh} + e^{-kh}\right) \tag{A.218}$$

$$T = \tanh(kh) = \frac{e^{kh} - e^{-kh}}{e^{kh} + e^{-kh}} \tag{A.219}$$

Likning A.216 kan multipliseres med S, slik at

$$Sk\hat{\phi}_B = kT\left[\hat{\phi}_F - \mathcal{F}\{\delta V_F\}\right] - TS\hat{A}_1 + Sk\hat{\mathcal{R}} \tag{A.220}$$

Setter vi inn i uttrykk for $\hat{W}$ og får vi,

$$\begin{aligned}\hat{W} &= kT\left[\hat{\phi}_F - \mathcal{F}\{\delta V_F\}\right] + \hat{A}_1/C \\ &= Sk\hat{\phi}_B + TS\hat{A}_1 - Sk\hat{\mathcal{R}} + \hat{A}_1/C\end{aligned} \tag{A.221}$$

Dette gir,

$$2e_1\hat{W} = 2e_1Sk\hat{\phi}_B + 2e_1(S^2+1)\frac{\hat{A}_1}{C} - 2e_1Sk\hat{\mathcal{R}} \tag{A.222}$$

Ser at $2e_1S = 1 - e_1^2$. Da kan vi skrive om følgende ledd,

$$2e_1Sk\hat{\mathcal{R}} = -\frac{1}{2}e_1^2k\hat{A}_2 + k\mathcal{F}\left\{\beta\Upsilon_1 + \frac{1}{2}\beta^2\Upsilon_2\right\} \tag{A.223}$$

I tillegg har vi,

$$2e_1\hat{W} = (1-e_1^2)k\hat{\phi}_B + 2e_1(S^2+1)\frac{\hat{A}_1}{C} + \frac{1}{2}e_1^2k\hat{A}_2 - k\mathcal{F}\left\{\beta\Upsilon_1 + \frac{1}{2}\beta^2\Upsilon_2\right\} \tag{A.224}$$

Dette settes inn i uttrykk for $k\hat{\Psi}$,

$$
\begin{aligned}
k\hat{\Psi} &= 2e_1\hat{W} - (1-e_1^2)k\hat{\phi}_B - (1+e_1^2)\hat{A}_1 - \frac{1}{2}e_1^2 k\hat{A}_2 \\
&= (1-e_1^2)k\hat{\phi}_B + 2e_1(S^2+1)\frac{\hat{A}_1}{C} + \frac{1}{2}e_1^2 k\hat{A}_2 - k\mathcal{F}\left\{\beta\Upsilon_1 + \frac{1}{2}\beta^2\Upsilon_2\right\} \\
&\quad - (1-e_1^2)k\hat{\phi}_B - (1+e_1^2)\hat{A}_1 - \frac{1}{2}e_1^2 k\hat{A}_2 \\
&= \left[2e_1\frac{(S^2+1)}{C} - (1+e_1^2)\right]\hat{A}_1 - k\mathcal{F}\left\{\beta\Upsilon_1 + \frac{1}{2}\beta^2\Upsilon_2\right\}
\end{aligned}
\tag{A.225}
$$

Igjen settes dette inn i utrykk for $\hat{\Upsilon}_1$,

$$
\begin{aligned}
\hat{\Upsilon}_1 &= \left[2e_1\frac{(S^2+1)}{C} - (1+e_1^2)\right]\hat{A}_1 - k\mathcal{F}\left\{\beta\Upsilon_1 + \frac{1}{2}\beta^2\Upsilon_2\right\} + \hat{A}_1 + k\hat{A}_2/2 \\
&= \left[2e_1\frac{(S^2+1)}{C} + e_1^2\right]\hat{A}_1 - k\mathcal{F}\left\{\beta\Upsilon_1 + \frac{1}{2}\beta^2\Upsilon_2\right\} + k\hat{A}_2/2
\end{aligned}
\tag{A.226}
$$

Etter flere omskrivninger finner vi at,

$$
2e_1\frac{(S^2+1)}{C} + e_1^2 = 1 \tag{A.227}
$$

Dermed blir

$$
\begin{aligned}
\hat{\Upsilon}_1 &= \hat{A}_1 + k\hat{A}_2/2 - k\mathcal{F}\left\{\beta\Upsilon_1 + \frac{1}{2}\beta^2\Upsilon_2\right\} \\
&= \hat{A}_1 + \mathcal{O}(\beta^2)
\end{aligned}
\tag{A.228}
$$

På tilsvarende vis blir $\hat{\Upsilon}_2$, med $2e_1\hat{W}$ innsatt,

$$
\begin{aligned}
\hat{\Upsilon}_2 &= k(k\hat{\Psi} + k\hat{\phi}_B) \\
&= k(2e_1\hat{W} + e_1^2 k\hat{\phi}_B - (1+e_1^2)\hat{A}_1) \\
&= k^2\hat{\phi}_B + k\left[\frac{2e_1(S^2+1)}{C} - 2e_1 C\right]\hat{A}_1 + \mathcal{O}(\beta^2)
\end{aligned}
\tag{A.229}
$$

En omskrivning avslører at,

$$
\frac{2e_1(S^2+1)}{C} - 2e_1 C = 0 \tag{A.230}
$$

slik at

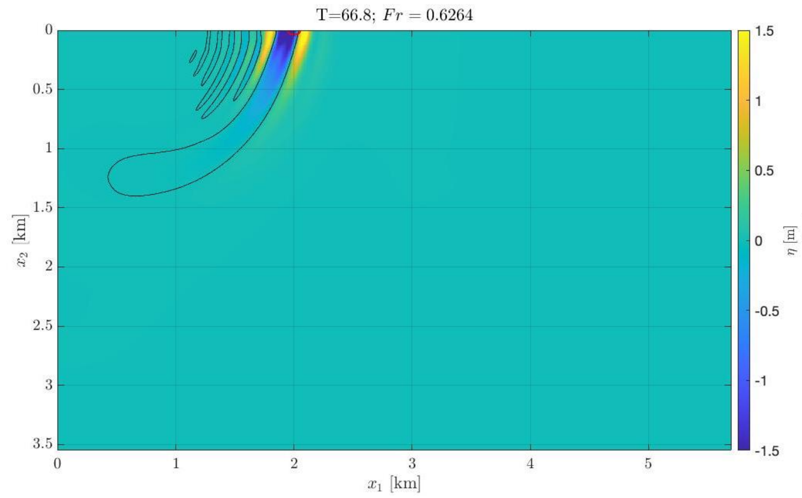
$$
\hat{\Upsilon}_2 = k^2\hat{\phi}_B + \mathcal{O}(\beta^2) \tag{A.231}
$$

Dermed kan en tilnærming til restleddet uttrykkes ved,

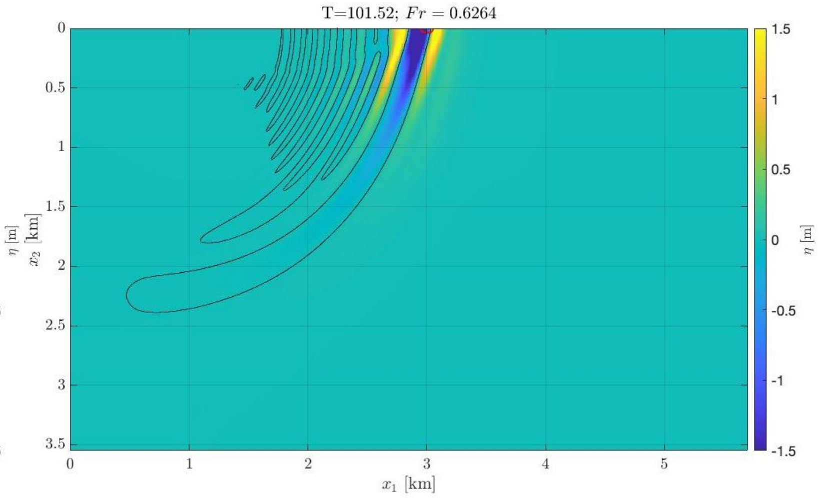
$$
k\hat{\mathcal{R}} = -\frac{1}{2}\frac{e_1^2 k}{1-e_1^2}\hat{A}_2 + \frac{k}{1-e_1^2}\mathcal{F}\left\{\beta A_1 + \frac{1}{2}\beta^2\mathcal{F}^{-1}\{k^2\hat{\phi}_B\}\right\} + \mathcal{O}(\beta^3) \tag{A.232}
$$

TILLEGG B

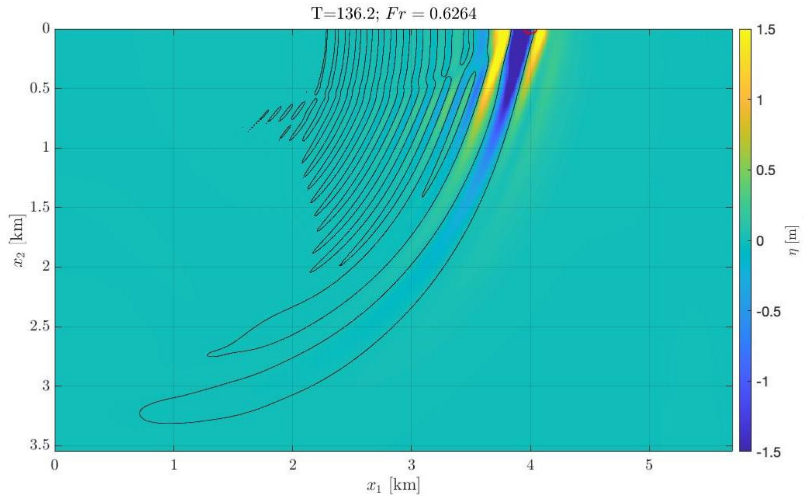
Figurer og tabeller



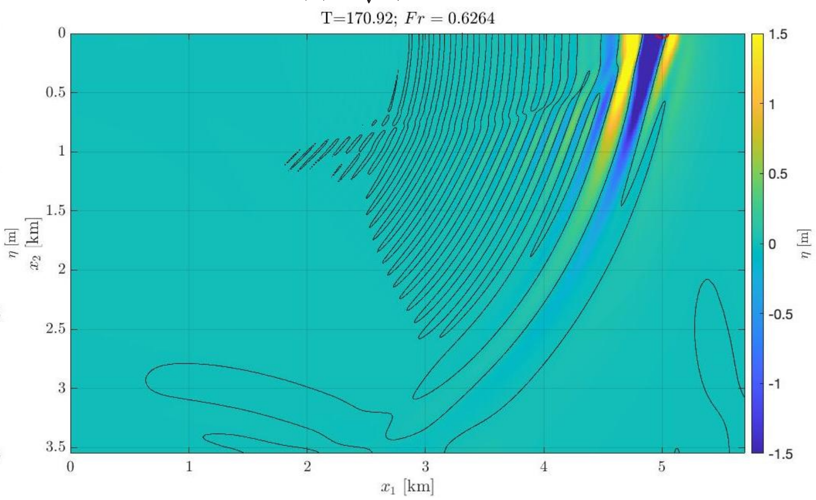
(a) $T\sqrt{g/h_1} = 66.8$



(b) $T\sqrt{g/h_1} = 101.52$

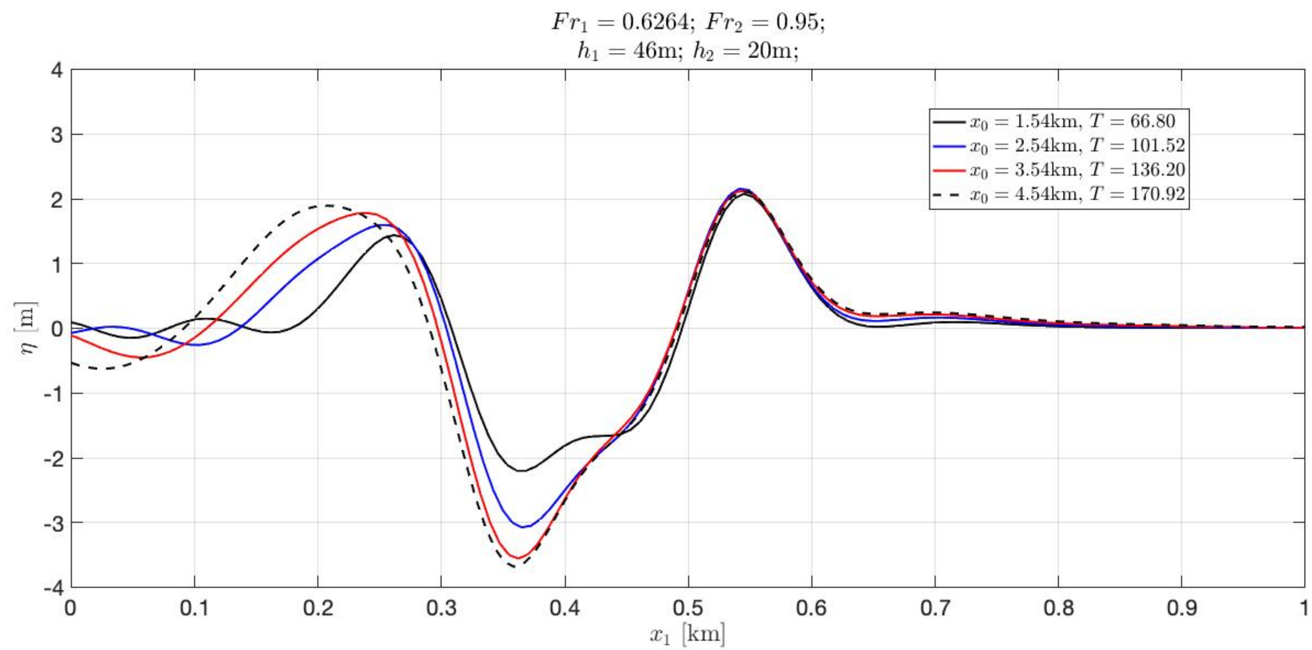


(c) $T\sqrt{g/h_1} = 136.2$

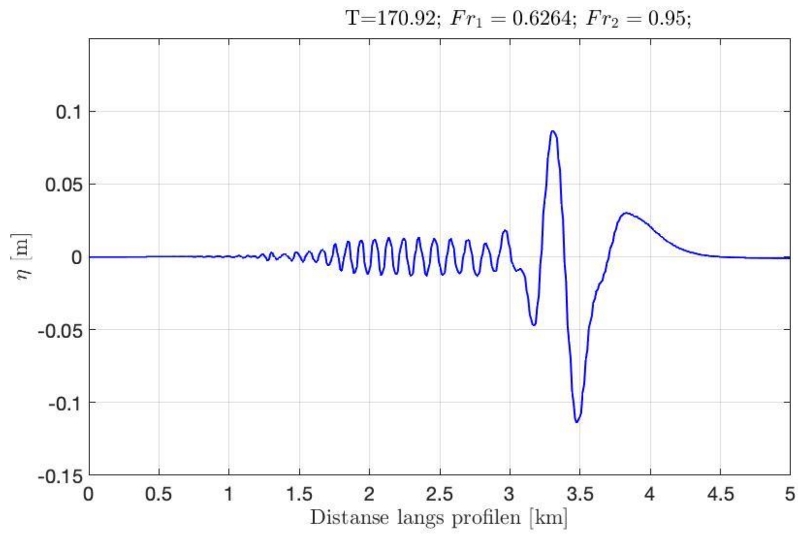


(d) $T\sqrt{g/h_1} = 170.92$

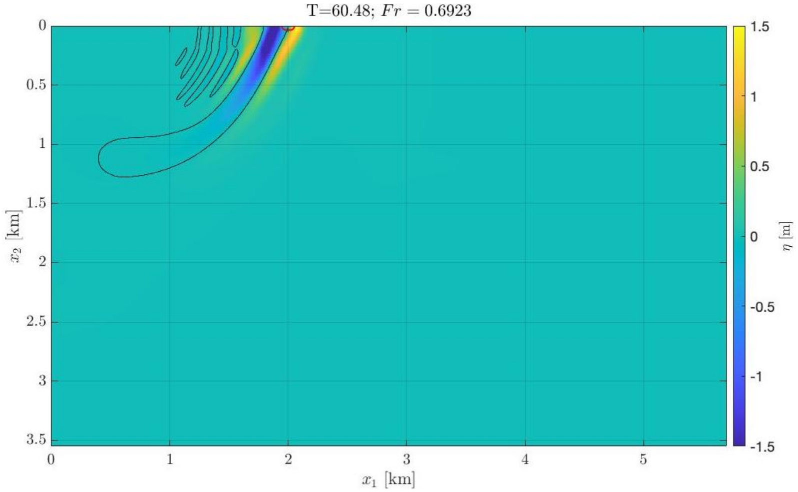
Figur B.1: Skip som beveger seg inn i grunnere region slik at $Fr_2 = 0.95$. Rød rektangel viser skipets posisjon. Figurer (a)-(d) viser hvordan bølgesystemet utvikler seg over tid. Skipet har reist 1km mellom hvert plot. Vanndybder $h_1 = 46$m og $h_2 = 20$ er brukt. Den grunnere regionen av beregningsområde begynner ved $x_1 = 0.46$km. Skipet begynner ved $x_1 = 0.096$km. x_0 angir hvor langt skipet har reist i forhold til denne startposisjonen.



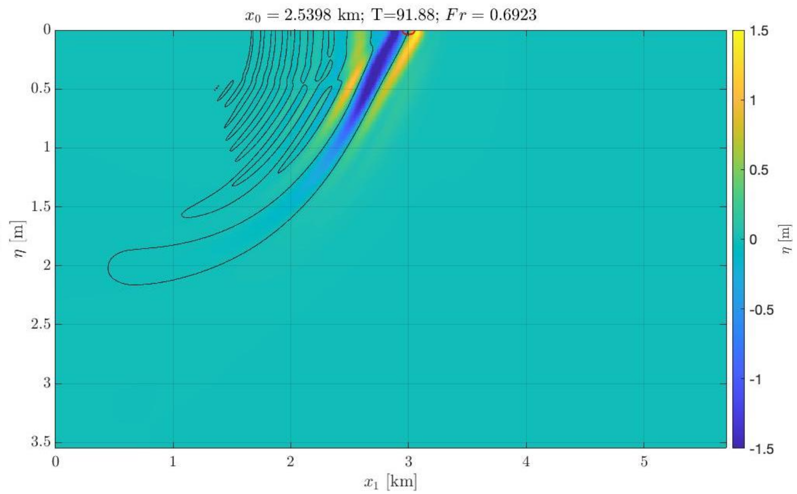
Figur B.2: Oppstrømsbølgen over tid for $Fr_2 = 0.95$. De fire kurvene tilsvarer et snitt langs x_1 aksen, midt i kanalen. Tilsvarende konturplott er vist i figur (?). Alle kurver er plottet slik at $x_1 = 0$ tilsvarer midten av skipet ved angitt tid, T. Tiden er skalert slik at $T = \sqrt{\frac{g}{h_1}}t$.



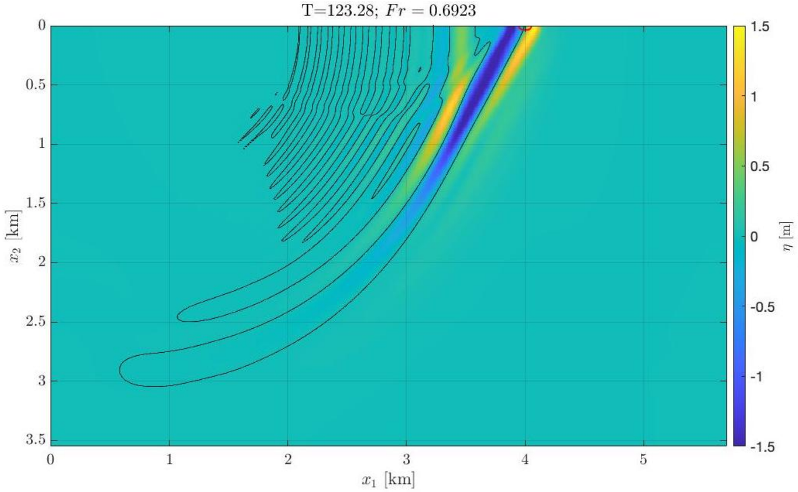
Figur B.3: Skip med lokalt Froude-tall $Fr_2 = 0.95$ for dimensjonsløs tid $T\sqrt{g/h_1} = 170.92$. Figur viser profilplott av linje normalt på bølger som brer seg ut til siden.



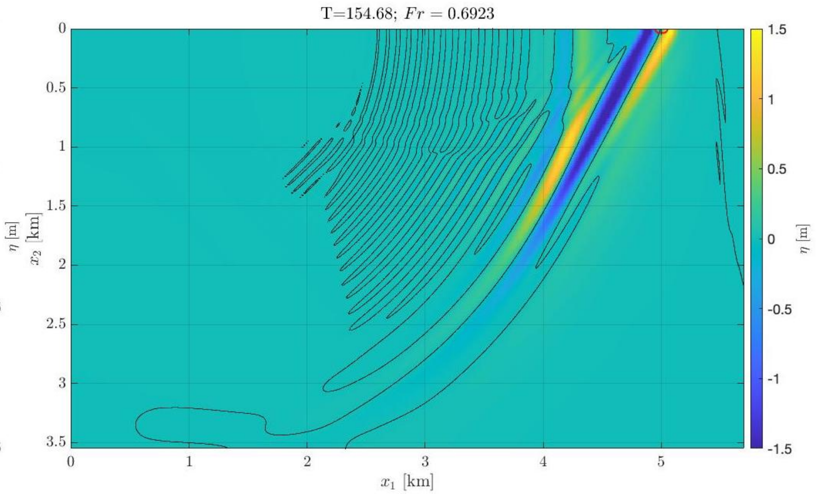
(a) $T\sqrt{g/h_1} = 60.48$



(b) $T\sqrt{g/h_1} = 91.88$

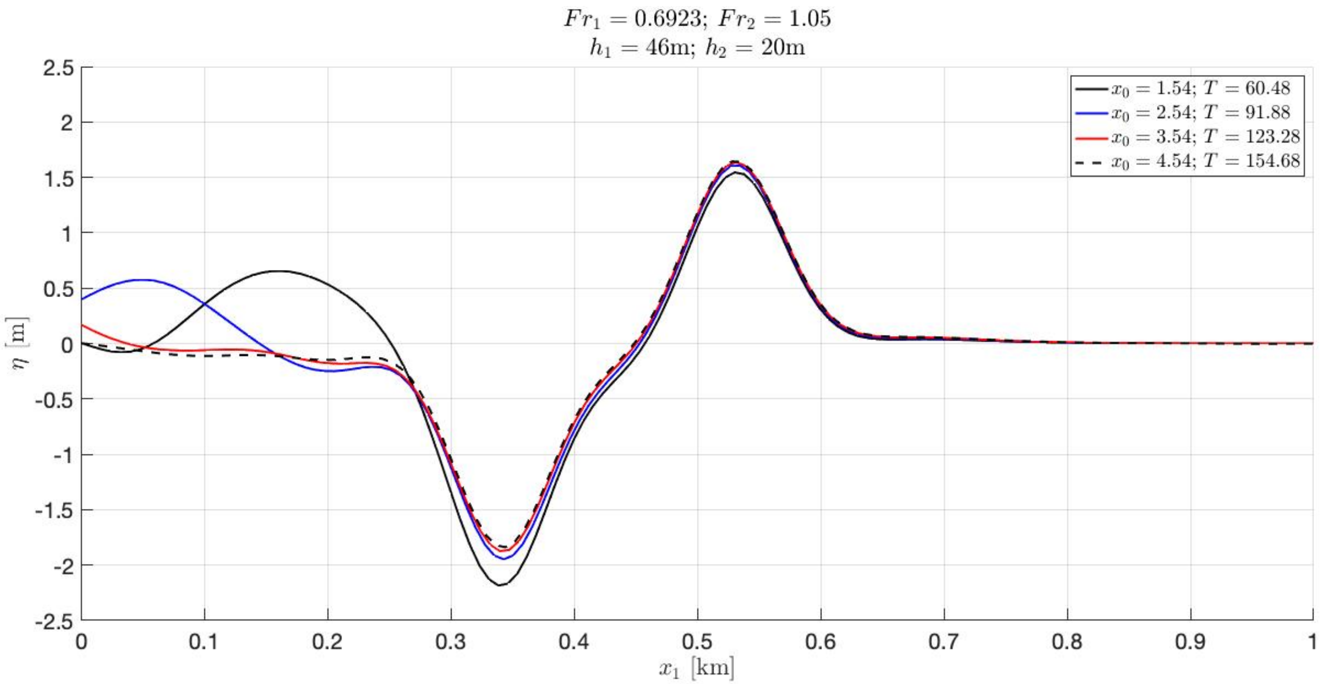


(c) $T\sqrt{g/h_1} = 123.28$

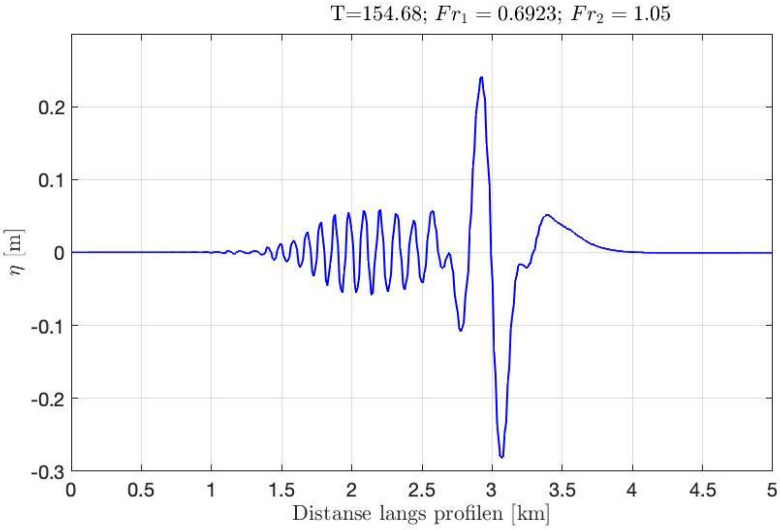


(d) $T\sqrt{g/h_1} = 154.68$

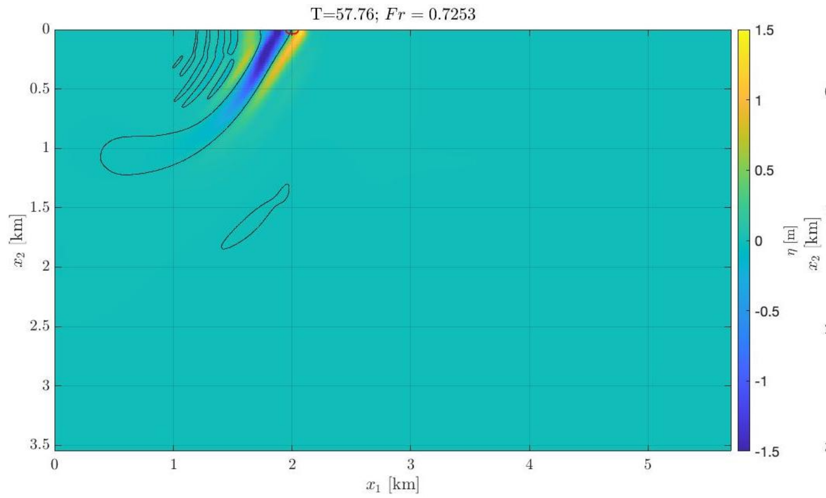
Figur B.4: Skip som beveger seg inn i grunnere region slik at $Fr_2 = 1.05$. Rød rektangel viser skipets posisjon. Figurer (a)-(d) viser hvordan bølgesystemet utvikler seg over tid. Skipet har reist 1km mellom hvert plot. Vanndybder $h_1 = 46$m og $h_2 = 20$ er brukt. Den grunnere regionen av beregningsområde begynner ved $x_1 = 0.46$km. Skipet begynner ved $x_1 = 0.096$km. x_0 angir hvor langt skipet har reist i forhold til denne startposisjonen.



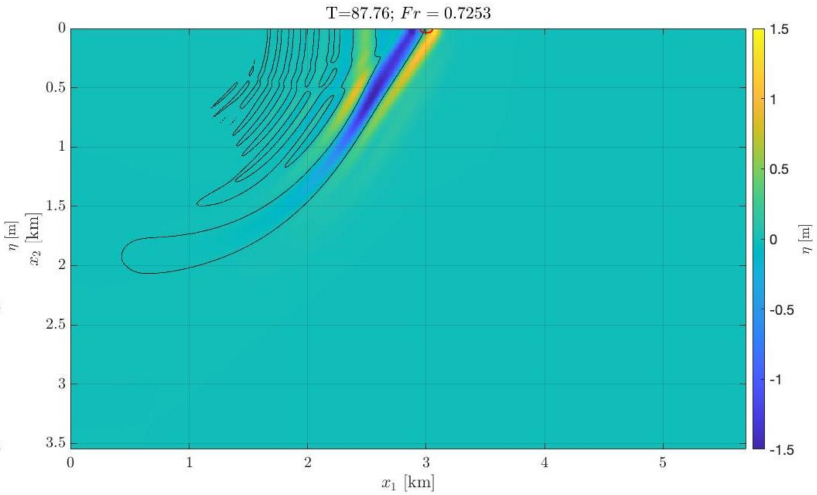
Figur B.5: Oppstrømsbølgen over tid for $Fr_2 = 1.05$. De fire kurvene tilsvarer et snitt langs x_1 aksen, midt i kanalen. Tilsvarende konturplott er vist i figur (?). Alle kurver er plottet slik at $x_1 = 0$ tilsvarer midten av skipet ved angitt tid, T. Tiden er skalert slik at $T = \sqrt{\frac{g}{h_1}}t$.



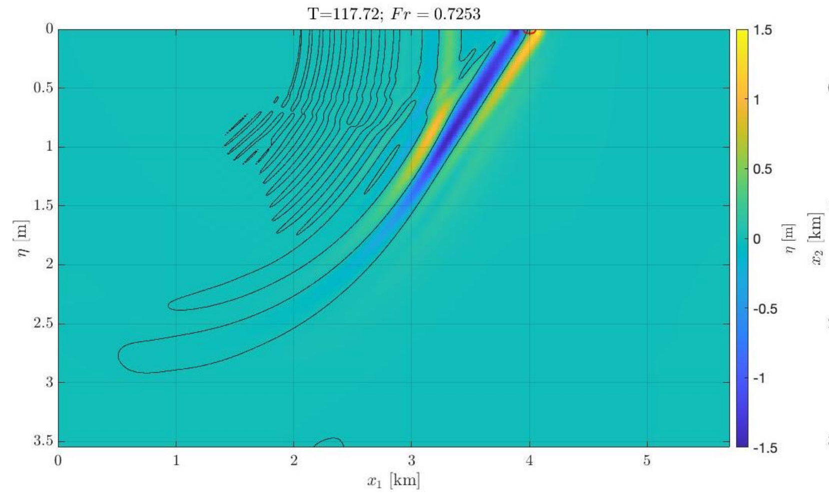
Figur B.6: Skip med lokalt Froude-tall $Fr_2 = 1.05$ for dimensjonsløs tid $T\sqrt{g/h_1} = 154.68$. Figur viser profilplott av linje normalt på bølger som brer seg ut til siden.



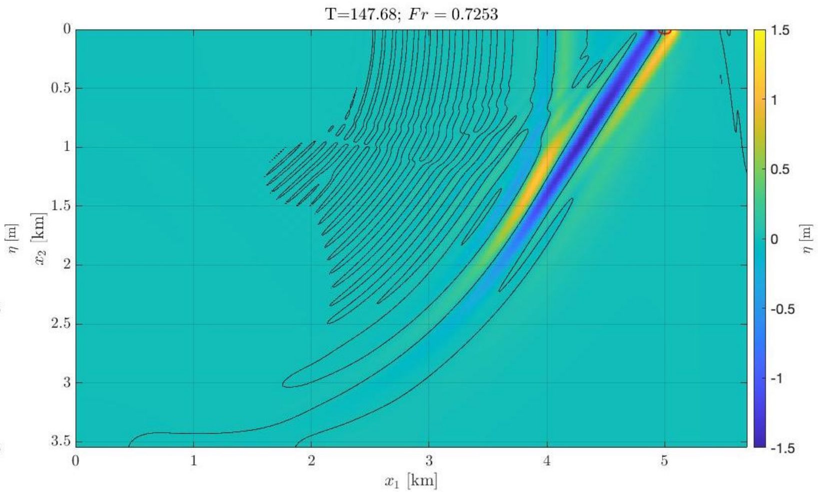
(a) $T\sqrt{g/h_1} = 57.76$



(b) $T\sqrt{g/h_1} = 87.76$

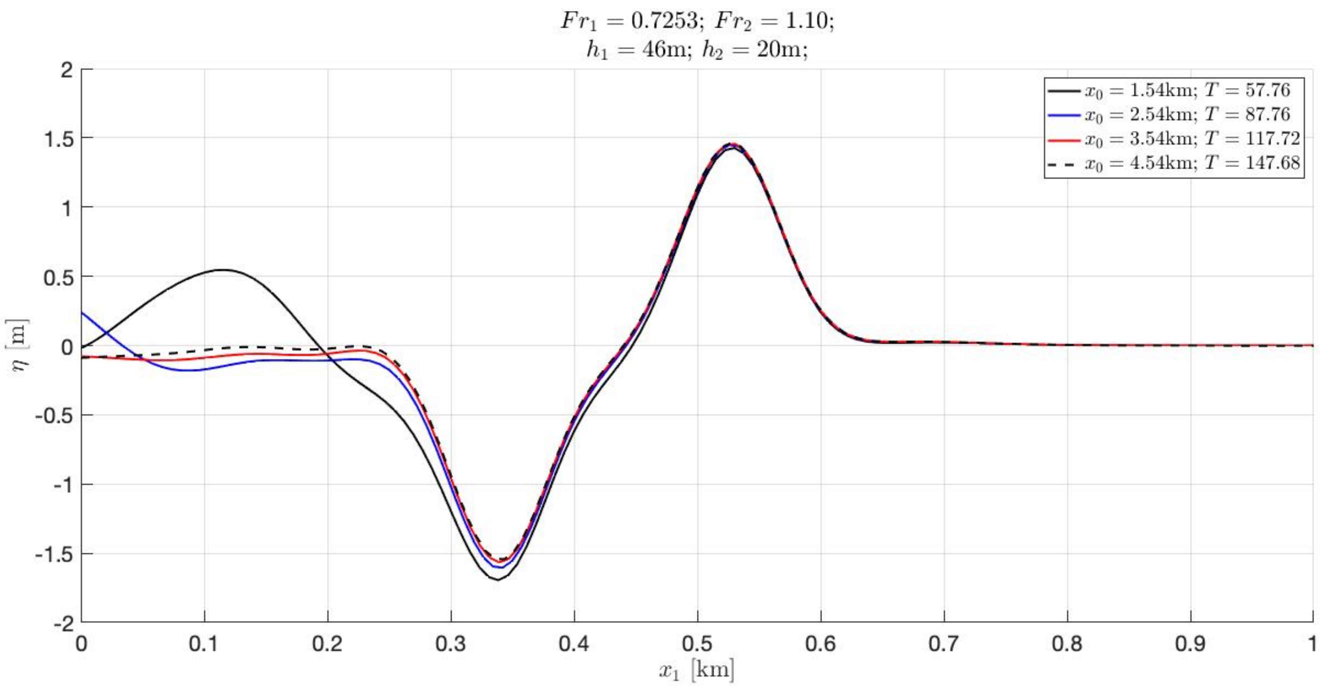


(c) $T\sqrt{g/h_1} = 117.72$

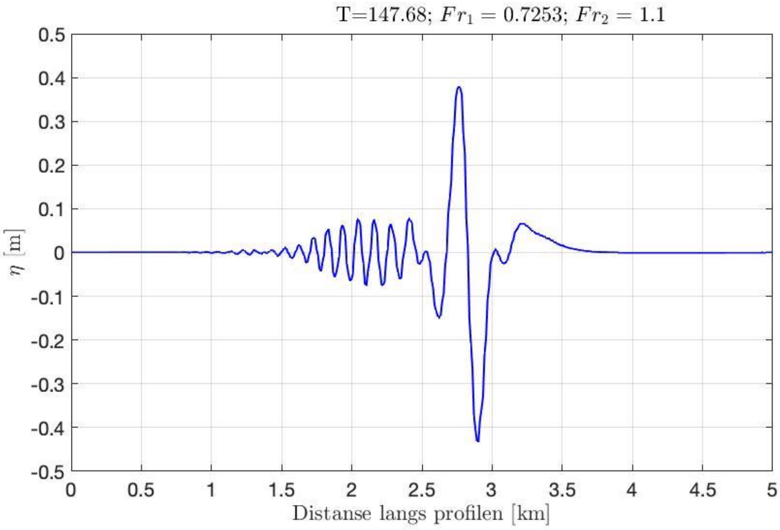


(d) $T\sqrt{g/h_1} = 147.68$

Figur B.7: Skip som beveger seg inn i grunnere region slik at $Fr_2 = 1.10$. Rød rektangel viser skipets posisjon. Figurer (a)-(d) viser hvordan bølgesystemet utvikler seg over tid. Skipet har reist 1km mellom hvert plot. Vanndybder $h_1 = 46$m og $h_2 = 20$ er brukt. Den grunnere regionen av beregningsområde begynner ved $x_1 = 0.46$km. Skipet begynner ved $x_1 = 0.096$km. x_0 angir hvor langt skipet har reist i forhold til denne startposisjonen.



Figur B.8: Oppstrømsbølgen over tid for $Fr_2 = 1.10$. De fire kurvene tilsvarer et snitt langs x_1 aksen, midt i kanalen. Tilsvarende konturplott er vist i figur (?). Alle kurver er plottet slik at $x_1 = 0$ tilsvarer midten av skipet ved angitt tid, T. Tiden er skalert slik at $T = \sqrt{\frac{g}{h_1}}t$.



Figur B.9: Skip med lokalt Froude-tall $Fr_2 = 1.10$ for dimensjonsløs tid $T\sqrt{g/h_1} = 147.68$. Figur viser profilplott av linje normalt på bølger som brer seg ut til siden.

TILLEGG C

Kildekode

C.0.1 Todimensjonal simulering

```
function main2D
    L = 200; N = 1200; dx = L/N;
    NT = 2000; dt = 0.04; T0 = 25*dt; %T=80

    %  k-vector definitions
    k0 = 2*pi/L; k = k0*(-(N/2):(N/2)-1);
    ks = ifftshift(k); ks(1) = 0.000001; ksa = abs(ks);
    ks1 = ks./ksa;
    e1 = exp(-ksa);

    % Wave tank
    xF = linspace(-L/2,L/2-dx,N);
    Fr = 0.5328; %Froude number

    % Frequency
    om = sqrt(ksa.*tanh(ksa)); % dimensionless w*

    % Setting initial conditions
    Z1 = 0.0*xF;
    Z2 = 0.0*xF;

    xa = 10;        % depth variation starts here
    xb = 25;        % depth variation ends here
    dh = 0.6957;        % height difference for depth variation
    a = 0.35;        % steepness
    beta = 0.5*dh*(tanh(a*(xF-xa)) - tanh(a*(xF-xb)));

    function [DD] = delta(tt)
        % Returns pressure distribution at time tt.
        % All lengths are divided by h=50m.
        d0 = 0.1490; L0 = 2.283;
        x00 = xa;   % ship starts in middle of F
        eps0=0.00000001;
        x=(xF-x00)/L0;
        f=1-x.^6;
        f(f<eps0)=0;
        delta = -d0*f;

        x0=-8+Fr*(tt+T0*(1-pi/2));
        if tt <= T0*(pi/2)
            x0=-8+Fr*T0*(1-cos(tt/T0));
        end
        D0 = fft(delta)*L/N;
        DD = exp(-1i*x0*ks).*D0;
```

```
end

function [a1n] = A(kPHIB, n)
    %Returns flux term A1 for specified n
    phiBx = ifft(1i*ks1.*kPHIB)*N/L;
    a1n = 1i*ks.*fft((beta.^n).*phiBx)*L/N;
end

function [RHS1, RHS2] = RHS(Z1,Z2,tt)
    %Returns right hand side of differential equation
    U=Fr;
    if tt <= T0*(pi/2)
        U=Fr*sin(tt/T0);
    end
    DD = delta(tt);
    V0F = -U*1i*ks.*DD;
    kPHI0F = V0F./tanh(ksa);
    VARPHI = (-sin(om*tt).*Z1 + cos(om*tt).*Z2)./om;
    kPHI = ksa.*VARPHI + kPHI0F;
    kPHIB1 = kPHI./cosh(ksa);
    A1 = A(kPHIB1,1);
    A2 = A(kPHIB1,2);
    for ii=1:4
        kPHIB=kPHIB1-A1.*tanh(ksa);
        kPHIB=kPHIB-0.5*(ksa.*e1.^2).*A2./(1-e1.^2);
        ups1=ifft(A1)*(N/L);
        kPHIB=kPHIB+ksa.*fft(beta.*ups1)*(L/N)./(1-e1.^2);
        ups2=ifft(ksa.*kPHIB1)*(N/L);
        kPHIB=kPHIB+ksa.*fft(beta.^2.*ups2)*(L/N)./(1-e1.^2);
        A1=A(kPHIB,1);
        A2=A(kPHIB,2);
    end

    H1 = A1./cosh(ksa);
    H2 = 0.0*om;

    RHS1 = cos(om*tt).*H1 - sin(om*tt).*H2;
    RHS2 = sin(om*tt).*H1 + cos(om*tt).*H2;
end

% Time integration schemes
function [Z1_p, Z2_p] = RK2(Z1,Z2,tt)
    %Integrates using RK2 method
    [K11, K12] = RHS(Z1,Z2,tt);
    [K21, K22] = RHS(Z1+K11*dt,Z2+K12*dt,tt+dt);
    Z1_p = Z1 + (K11 + K21)*(dt/2);
    Z2_p = Z2 + (K12 + K22)*(dt/2);
end

function [Z1_p, Z2_p] = RK4(Z1,Z2,tt)
    %Integrates using RK4 method
    [K11, K12] = RHS(Z1,Z2,tt);
    [K21, K22] = RHS(Z1+K11*dt/2,Z2+K12*dt/2,tt+dt/2);
    [K31, K32] = RHS(Z1+K21*dt/2,Z2+K22*dt/2,tt+dt/2);
    [K41, K42] = RHS(Z1+K31*dt,Z2+K32*dt,tt+dt);
    Z1_p = Z1 + (K11 + 2*K21 + 2*K31 + K41)*(dt/6);
    Z2_p = Z2 + (K12 + 2*K22 + 2*K32 + K42)*(dt/6);
end

% Time-stepping
for nn=1:NT
    tt=nn*dt;
```

```
        [Z1p, Z2p] = RK4(Z1,Z2,tt);

        Z1 = Z1p;
        Z2 = Z2p;
    end

    % Surface elevation at time NT
    ETA = cos(om*NT*dt).*Z1 + sin(om*NT*dt).*Z2;
    eta = real(ifft(ETA)*(N/L));
    save('/Users/RORA/Desktop/file.mat','eta')
end
```

C.0.2 Tredimensjonal simulering

```
function RK3D
    Lx=250; Nx=1500; dx=Lx/Nx;
    Ly=156; Ny=408; dy=Ly/Ny;

    xF=linspace(-Lx/2,Lx/2-dx,Nx);
    yF=linspace(-Ly/2,Ly/2-dy,Ny);
    [X,Y]=meshgrid(xF,yF);

    NT=4500; dt=0.04; T0=25*dt;  %T=120

    k0x=2*pi/Lx; kx=k0x*(-(Nx/2):(Nx/2)-1);
    ksx=ifftshift(kx); ksx(1)=0.000001;
    k0y=2*pi/Ly; ky=k0y*(-(Ny/2):(Ny/2)-1);
    ksy=ifftshift(ky); ksy(1)=0.000001;
    [Kx,Ky]=meshgrid(ksx,ksy);
    ksa=sqrt(Kx.^2+Ky.^2);
    Kx1=Kx./ksa; Ky1=Ky./ksa;
    e1=exp(-ksa);

    om=sqrt(ksa.*tanh(ksa));
    Fr = 0.6594; %Fr2=1.00
    Z1=0.0*om; Z2=0.0*om;

    % Defines depth change.
    xa = 10; xb = 125;
    xa = 10; xb = 25;
    dh = 0.565; a = 0.35;    % h2=20m
    beta = 0.5*dh*(tanh(a*(X-xa)) - tanh(a*(X-xb)));

    %Checkk:
    S=0;
    delta=ifft2(DD(0))*(Nx/Lx)*(Ny/Ly);
    for i=1:length(delta)
        S=S+sum(delta(:,i));
    end
    volum = S*dx*dy*46^3 %should be 36 000 m^3

    for nn=1:NT
        t=nn*dt;
        [Z1p,Z2p]=RK4(Z1,Z2,t);
        Z1=Z1+Z1p;
        Z2=Z2+Z2p;
    end

    ETA = cos(om*t).*Z1 + sin(om*t).*Z2;
    eta = real(ifft2(ETA)*(Nx/Lx)*(Ny/Ly));
    save('/Users/RORA/Desktop/file.mat','eta')


    function [D] = DD(tt)
        %Defines ship form. Returns ship at time tt.
        d0 = 0.035442; L0 = 2.283; W0 = 1.52; %4x with of Color Magic/Fantasy
        x00 = xa; y00 = 0.0;
        eps0=0.00000001;
        x=(X-x00)/L0;
        y=(Y-y00)/W0;
        f=1-x.^8-y.^6;
        f(f<eps0)=0;
        delta = -d0*f;
        D0 = fft2(delta)*(Lx/Nx)*(Ly/Ny);
```

```
        x0 = -8+Fr*(tt+T0*(1-pi/2));
        if tt <= T0*(pi/2)
            x0 = -8+Fr*T0*(1-cos(tt/T0));
        end
        D = exp(-1i*Kx*x0).*D0;
    end

    function [A1]=A(kPHIB,n)
        phiBx=ifft2(1i*Kx1.*kPHIB)*(Nx/Lx)*(Ny/Ly);
        phiBy=ifft2(1i*Ky1.*kPHIB)*(Nx/Lx)*(Ny/Ly);
        a1x=fft2(beta.^n.*phiBx)*(Lx/Nx)*(Ly/Ny);
        a1y=fft2(beta.^n.*phiBy)*(Lx/Nx)*(Ly/Ny);
        A1=1i*(Kx.*a1x+Ky.*a1y);
    end

    function [RHS1,RHS2]=RHS(Z1,Z2,tt)
        U = Fr;
        if tt <= T0*(pi/2)
            U = Fr*sin(tt/T0);
        end
        V0F=-U*1i*Kx.*DD(tt);
        kPHI0F=V0F./tanh(ksa);
        kVARPHI=ksa.*(-sin(om*tt).*Z1+cos(om*tt).*Z2)./om;
        kPHI=kPHI0F+kVARPHI;
        kPHIB1=kPHI./cosh(ksa);
        A1=A(kPHIB1,1);
        A2=A(kPHIB1,2);
        for ii=1:4
            kPHIB=kPHIB1-A1.*tanh(ksa);
            kPHIB=kPHIB-0.5*(ksa.*e1.^2).*A2./(1-e1.^2);
            ups1=ifft2(A1)*(Nx/Lx)*(Ny/Ly);
            ups2=ifft2(ksa.*kPHIB)*(Nx/Lx)*(Ny/Ly);
            kPHIB=kPHIB+ksa.*fft2(beta.*ups1 + beta.^2.*ups2)*(Lx/Nx)*(Ly/Ny)./(1-e1.^2);
            A1=A(kPHIB,1); A2=A(kPHIB,2);
        end
        H1=A1./cosh(ksa);
        H2=0.0.*om;
        RHS1=cos(om*tt).*H1-sin(om*tt).*H2;
        RHS2=sin(om*tt).*H1+cos(om*tt).*H2;
    end

    function [Z1p,Z2p]=RK2(Z1,Z2,tt)
        [K11,K12]=RHS(Z1,Z2,tt);
        [K21,K22]=RHS(Z1+K11*dt,Z2+K12*dt,tt+dt);
        Z1p=0.5*dt*(K11+K21);
        Z2p=0.5*dt*(K12+K22);
    end
    function [Z1p, Z2p] = RK4(Z1,Z2,tt)
        %Integrates using RK4 method
        [K11, K12] = RHS(Z1,Z2,tt);
        [K21, K22] = RHS(Z1+K11*dt/2,Z2+K12*dt/2,tt+dt/2);
        [K31, K32] = RHS(Z1+K21*dt/2,Z2+K22*dt/2,tt+dt/2);
        [K41, K42] = RHS(Z1+K31*dt,Z2+K32*dt,tt+dt);
        Z1p = (K11 + 2*K21 + 2*K31 + K41)*(dt/6);
        Z2p = (K12 + 2*K22 + 2*K32 + K42)*(dt/6);
    end
end
```

Bibliografi

Beck, R. F., Newman, J. N. og Tuck, E. O. (sep. 1975). "Hydrodynamic Forces on Ships in Dredged Channels". I: *Journal of Ship Research* årg. 19, nr. 03, s. 166–171. eprint: https://onepetro.org/JSR/article-pdf/19/03/166/2234436/sname-jsr-1975-19-3-166.pdf.

Clamond, D. og Grue, J. (2001). "A fast method for fully nonlinear water-wave computations". eng. I: *Journal of fluid mechanics* årg. 447, s. 337–355.

Constantine, T. (1960). "On the movement of ships in restricted waterways". eng. I: *Journal of fluid mechanics* årg. 9, nr. 2, s. 247–256.

Didenkulova, I., Parnell, K. E., Soomere, T., Pelinovsky, E. og Kurennoy, D. (2009). "Shoaling and Runup of Long Waves Induced By High-Speed Ferries in Tallinn Bay". eng. I: *Journal of coastal research*, s. 491–495.

Didenkulova, I., Pelinovsky, E. og Soomere, T. (2011). "Can the Waves Generated by Fast Ferries be a Physical Model of Tsunami?" eng. I: *Pure and applied geophysics* årg. 168, nr. 11, s. 2071–2082.

Didenkulova, I. og Soomere, T. (2011). "Formation of two-section cross-shore profile under joint influence of random short waves and groups of long waves". eng. I: *Marine geology* årg. 289, nr. 1, s. 29–33.

Ekko - NRK Radio (udatert). https://radio.nrk.no/serie/ekko/sesong/201706/MDSP25013017. (Accessed on 05/03/2021).

Erikson, L., Larson, M. og Hanson, H. (2003). "A practical approach to maximising vessel speed along sensitive beaches". I: *Bulletin-International Navigation Association*, nr. 114, s. 43–51.

Fructus, D. og Grue, J. (2007). "An explicit method for the nonlinear interaction between water waves and variable and moving bottom topography". eng. I: *Journal of computational physics* årg. 222, nr. 2, s. 720–739.

Glimsdal, S., Pedersen, G. K., Harbitz, C. B. og Løvholt, F. (2013). "Dispersion of tsunamis: does it really matter?" I: *Natural Hazards and Earth System Sciences* årg. 13, nr. 6, s. 1507–1526.

Grue, J. (2002). "On four highly nonlinear phenomena in wave theory and marine hydrodynamics". eng. I: *Applied ocean research* årg. 24, nr. 5, s. 261–274.

— (2006). "Rapid computations of steep surface waves in three dimensions, and comparisons with experiments". I: *Waves in Geophysical Fluids*. Springer, s. 173–204.

— (2015). "Nonlinear interfacial wave formation in three dimensions". eng. I: *Journal of fluid mechanics* årg. 767, s. 735–762.

Grue, J. (2017). “Ship generated mini-tsunamis”. I: *Journal of Fluid Mechanics* årg. 816, s. 142–166.
— (2019). *ZM.dvi*. https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MEK4420/v20/timeplan/zm.pdf. (Accessed on 02/04/2021).
— (2020). “Mini-Tsunami Made by Ship Moving Across a Depth Change”. I: *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering* årg. 146, nr. 5, s. 04020023.
L.S.Gradshteyn og Ryzhik, I. (2000). *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press.
Langtangen, H. P. (2016). *A Primer on Scientific Programming with Python*. eng. Berlin, Heidelberg.
Lay, T., Kanamori, H., Ammon, C. J., Nettles, M., Ward, S. N., Aster, R. C., Beck, S. L., Bilek, S. L., Brudzinski, M. R., Butler, R. mfl. (2005). “The great Sumatra-Andaman earthquake of 26 december 2004”. I: *science* årg. 308, nr. 5725, s. 1127–1133.
Li, Y. og Sclavounos, P. D. (2002). “Three-dimensional nonlinear solitary waves in shallow water generated by an advancing disturbance”. eng. I: *Journal of fluid mechanics* årg. 470, s. 383–410.
Matthews, P. (1998). *Vector calculus*. eng. London.
Mei, C. C. (1986). “Radiation of solitons by slender bodies advancing in a shallow channel”. I: *Journal of Fluid Mechanics* årg. 162, s. 53–67.
Monserrat, S., Vilibić, I. og Rabinovich, A. B. (2006). “Meteotsunamis: atmospherically induced destructive ocean waves in the tsunami frequency band”. I: *Natural hazards and earth system sciences* årg. 6, nr. 6, s. 1035–1051.
Neuman, D., Tapio, E., Haggard, D., Laws, K. og Bland, R. (2001). “Observation of long waves generated by ferries”. I: *Canadian journal of remote sensing* årg. 27, nr. 4, s. 361–370.
Newman, J. N. (2018). *Marine Hydrodynamics*. eng. Cambridge: The MIT Press.
Parnell, K., McDonald, S. og Burke, A. (2007). “Shoreline effects of vessel wakes, Marlborough Sounds, New Zealand”. I: *Journal of Coastal Research*, s. 502–506.
Parnell, K. E., Soomere, T., Zaggia, L., Rodin, A., Lorenzetti, G., Rapaglia, J. og Scarpa, G. M. (2015). “Ship-induced solitary Riemann waves of depression in Venice Lagoon”. eng. I: *Physics letters. A* årg. 379, nr. 6, s. 555–559.
Pattiaratchi, C. B. og Wijeratne, E. (2015). “Are meteotsunamis an underrated hazard?” I: *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* årg. 373, nr. 2053, s. 20140377.
Pedersen, G. (1988). “Three-dimensional wave patterns generated by moving disturbances at transcritical speeds”. eng. I: *Journal of fluid mechanics* årg. 196, s. 39–63.
Rapaglia, J., Zaggia, L., Parnell, K., Lorenzetti, G. og Vafeidis, A. T. (2015). “Ship-wake induced sediment remobilization: Effects and proposed management strategies for the Venice Lagoon”. eng. I: *Ocean & coastal management* årg. 110, s. 1–11.
Rossetto, T., Peiris, N., Pomonis, A., Wilkinson, S., Del Re, D., Koo, R. og Gallocher, S. (2007). “The Indian Ocean tsunami of December 26, 2004: observations in Sri Lanka and Thailand”. I: *Natural Hazards* årg. 42, nr. 1, s. 105–124.

Soomere, T., Parnell, K. og Didenkulova, I. (2009). “Implications of Fast-Ferry Wakes for Semi-Sheltered Beaches: A Case Study at Aegna Island, Baltic Sea”. eng. I: *Journal of coastal research*, s. 128–132.

Soomere, T. (2005). “Fast Ferry Traffic as a Qualitatively New Forcing Factor of Environmental Processes in Non-Tidal Sea Areas: A Case Study in Tallinn Bay, Baltic Sea”. eng. I: *Environmental fluid mechanics (Dordrecht, Netherlands : 2001)* årg. 5, nr. 4, s. 293–323.

Soomere, T., Parnell, K. E. og Didenkulova, I. (2011). “Water transport in wake waves from high-speed vessels”. eng. I: *Journal of marine systems* årg. 88, nr. 1, s. 74–81.

Suppasri, A., Shuto, N., Imamura, F., Koshimura, S., Mas, E. og Yalciner, A. C. (2013). “Lessons learned from the 2011 Great East Japan tsunami: performance of tsunami countermeasures, coastal buildings, and tsunami evacuation in Japan”. I: *Pure and Applied Geophysics* årg. 170, nr. 6, s. 993–1018.

Torsvik, T., Didenkulova, I., Soomere, T. og Parnell, K. E. (2009). “Variability in spatial patterns of long nonlinear waves from fast ferries in Tallinn Bay”. eng. I: *Nonlinear processes in geophysics* årg. 16, nr. 2, s. 351–363.

Torsvik, T., Dysthe, K. og Pedersen, G. (2006). “Influence of variable Froude number on waves generated by ships in shallow water”. eng. I: *Physics of fluids (1994)* årg. 18, nr. 6, s. 62102.

Torsvik, T., Pedersen, G. og Dysthe, K. (2009). “Waves generated by a pressure disturbance moving in a channel with a variable cross-sectional topography”. I: *Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering* årg. 135, nr. 3, s. 120–123.

Torsvik, T. og Soomere, T. (2008). “Simulation of Patterns of Wakes from high-speed Ferries in Tallinn Bay”. eng. I: *Estonian Journal of Engineering* årg. 14, nr. 3, s. 232.

Tsunamien i Oslofjorden (2017). https://www.nrk.no/dokumentar/xl/tsunamien-i-oslofjorden-1.13633198. (Accessed on 05/03/2021).

Tuck, E. (1978). “Hydrodynamic problems of ships in restricted waters”. I: *Annual Review of Fluid Mechanics* årg. 10, nr. 1, s. 33–46.

Whittaker, T. (2002). “A Physical Study of Fast Ferry Wash Characteristics in Shallow Water”. I: *MCA Research Project* årg. 457.