

UiO : Matematisk institutt

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Pandemiforsikring

Siri Østensen

Masteroppgave, våren 2021



Denne masteroppgaven er levert inn under masterprogrammet *Stokastisk modellering, statistikk og risikoanalyse*, studieretning *Finans, forsikring og risiko*, ved Matematisk institutt, Universitetet i Oslo. Oppgaven er normert til 30 studiepoeng.

Forsiden viser et utsnitt av rotsystemet til den eksepsjonelle liegruppen E_8 , projisert ned i planet. Liegrupper ble oppfunnet av den norske matematikeren Sophus Lie (1842–1899) for å uttrykke symmetriene til differensiallikninger og spiller i dag en sentral rolle i flere deler av matematikken.

Sammendrag

Forsikringselskaper rundt om i verden tilbyr mange ulike typer forsikringskontrakter. Disse skal gi erstatning dersom spesifikke hendelser som er spesifisert i kontraktene inntreffer. En type forsikring som er lite utbredt er pandemiforsikring som gir utbetaling til forsikringstaker når en pandemi inntreffer. Grunnet dagens situasjon med covid-19 pandemi er en slik type forsikring mye mer aktuelt enn det har vært tidligere. Vi vil derfor i denne oppgaven designe en forsikringskontrakt mot pandemier hvor vi blant annet skal se på forventet utbetaling av kontrakten og ulike metoder et forsikringselskap kan benytte for å fastsette premien. Vi lar utbetalingsfunksjonen for forsikringskontrakten være avhengig av smittetrykket i samfunnet. Smitteutviklingen i et samfunn under en pandemi er ofte modellert ved hjelp av en SIR-modell. Grunnet en del tilfeldigheter som har innvirkning på utviklingen vil vi benytte en stokastisk versjon av den klassiske SIR-modellen.

Ved inngåelse av en slik forsikringskontrakt mot pandemier vil et forsikringselskap påta seg en del risiko. Når premien i kontrakten skal fastsettes er det derfor viktig for et forsikringselskap å inkludere en kompensasjon for denne risikoen. Det finnes flere metoder for beregning av premie og vi vil i denne oppgaven se på et par metoder. Vi vil se på en metode som lar premien være gitt ved forventet utbetaling i tillegg til en risikokompensasjon. Denne kompensasjonen lar vi være gitt ved en prosentandel av en kvantil av utbetalingsfunksjonen. Den andre metoden vi vil se på er en metode hvor premien fastsettes ved hjelp av forventet utbetaling under et risikojustert sannsynlighetsmål gitt ved Girsanov transformasjon.

Til slutt vil vi se på muligheter for reassurans, en slags gjenforsikring. Dette benyttes av et forsikringselskap for å diversifisere risikoen forbundet med forsikringskontrakten. Et forsikringselskap kan benytte seg av et reassuranseselskap som påtar seg noe av risikoen, men kan også benytte seg av finansmarkedet. I denne oppgaven vil vi se på reassurans ved hjelp av salgsopsjoner. Siden aksjemarkedet ofte påvirkes negativt under en pandemi vil vi optimere en portefølje av salgsopsjoner som gir en utbetaling dersom en pandemi inntreffer. Målet er at disse salgsopsjonene skal gi like stor utbetaling som det et forsikringselskap må betale til forsikringstaker etter at en pandemi har inntruffet.

Forord

Arbeidet med denne masteroppgaven har foregått i en litt uvanlig tid, noe som også har bidratt til tema for oppgaven. All hjelp og støtte jeg har fått har vært utrolig viktig.

Jeg vil rette en spesiell takk til min veileder Fred Espen Benth for all hjelp og gode råd med denne masteroppgaven og for å ha introdusert meg til et spennende tema. Det har vært til stor hjelp å få kontinuerlig støtte og oppmuntring gjennom dette semesteret. Ditt engasjement og din evne til å forklare teori på en veldig forståelig måte har gjort denne prosessen mye enklere. Jeg vil også takke for dine interessante og inspirerende forelesninger gjennom min mastergrad. Mye av kunnskapen jeg fikk fra nettopp disse forelesningene har hjulpet meg mye i min skriving av masteroppgaven.

Jeg vil takke mine medstudenter Eline Larsen Valen og Jon Randby Kristensen for tilbakemeldinger på oppgaven og diskusjoner rundt utfordrende problemstillinger. De har også bidratt veldig positivt til det sosiale rundt masterskrivingen; de gode pausene og treningen har vært viktige distraksjoner gjennom denne perioden.

Til slutt vil jeg takke mine foreldre for all støtte og korrekturlesing av oppgaven.

*Siri Østensen
Oslo, Mai 2021*

Innhold

Sammendrag	i
Forord	ii
Innhold	iii
1 Innledning	1
1.1 Oppgavens disposisjon	3
2 SIR-modellen	4
2.1 SIR-modeller	4
2.2 Løsning av SIR-modellen	10
2.3 Forventning og varians til antall smittede	11
2.4 Egenskaper til løsningen av SIR-modellen	12
3 Forsikringskontrakt	15
3.1 Utbetalingsfunksjon	15
3.2 Forventet utbetaling	17
3.3 Premie	18
4 Reassuranse	25
4.1 Indeksdyamik	26
4.2 Salgsopsjoner	29
4.3 Optimering	32
4.4 Utregning av ulike forventningsverdier	35
4.5 Pris på portefølje av salgsopsjoner	42
5 Oppsummering	43
Tillegg	45
A Teori	46
B R programmeringskode	49
Bibliografi	52

KAPITTEL 1

Innledning

I verden i dag har vi en pågående pandemi. Pandemier inntreffer med svært lav sannsynlighet, men når de først inntreffer kan de ramme oss veldig hardt. Dersom vi ser på de økonomiske konsekvensene er noen bransjer ofte mer utsatte enn andre. Under covid-19 pandemien vi nå opplever ser vi store tap innenfor restaurant, fly og hotellbransjen. Når samfunn blir stengt ned slik de har gjort i mange land i verden det siste året er det naturlig at nettopp disse bransjene blir hardest rammet. Alle blir oppfordret til å holde seg mest mulig hjemme og unngå kontakt med andre mennesker. Restauranter blir pålagt av myndighetene til å stenge, og det er restriksjoner for innreise til mange land, noe som rammer flyselskapene. Ettersom myndighetene fraråder oss å reise, vil heller ikke hotellene bli benyttet.

Det finnes flere ulike forsikringer som gir erstatning ved ulykker og katastrofer. De fleste av oss har en eller annen form for forsikring, for eksempel forsikring på hus og bil eller livsforsikring. Noe som er mindre utbredt er forsikring mot pandemier. Det er nok flere selskaper som ville klart seg bedre gjennom en pandemi dersom de hadde hatt en slik type forsikring.

I en artikkel fra Wired [Ratliff, 2020] forteller forfatteren om et møte med virologen Nathan Wolfe (en epidemiologprofessor ved UCLA) i 2006 hvor han forteller om sin forskning på virus som smitter fra dyr til mennesker. Håpet med forskningen hans var å kunne forutse når pandemi utbrudd vil finne sted for å kunne stoppe en eventuell spredning av en smittsom sykdom tidlig. Det Wolfe var mest redd for var noe som skjer hvert 100. år, en global pandemi, et virus som var ukjent for oss menneskers immunsystem og som ville smitte ved kontakt mellom mennesker. Nå har altså denne pandemien han snakket om i 2006 inntruffet og ingen har gjort noe for å forberede seg på noe slikt. Flere enn Wolfe har gjennom historien slått alarm om at en slik pandemi vil kunne finne sted. Wolfe forteller nå 13 år senere om en ny interesse, nemlig pandemiforsikring. Han hadde altså begynt å tenke på den økonomiske siden ved en pandemi. I 2015 begynte selskapet hans Metabiota å samarbeide med Munich Re, et tysk reassuranseselskap og Marsh, et amerikansk selskap som tilbyr forsikringsmegling og risikostyring. De ville tilby en forsikring som beskyttet store selskaper mot pandemier, altså en forsikring som hos de fleste selskaper ville gi utbetaling når en epidemi når en gitt barriere. Samtidig ville det være egne retningslinjer for hvert enkelt selskap. Denne type forsikring vil altså begrense de finansielle tapene og forhindre konkurs. I 2018 tilbød de en slik type forsikring, noe som ville vært gunstig for mange med tanke på covid-19 som bare inntraff halvannet år senere. Problemet deres var at ingen kjøpte den og de hadde dermed feilet med sin forsikring.

Flere har fått øynene opp for denne type forsikring etter at covid-19 pandemien inntraff store deler av verden i 2020. En pandemiforsikring vil derfor være mye mer aktuelt i dag enn det var for bare et par år siden.

Vi skal designe en forsikringskontrakt mot pandemier ved hjelp av smittetrykket i et samfunn

og analysere premien ved en slik forsikring. Det finnes flere ulike modeller for å beskrive utbrudd og spredning av en smittsom sykdom i et samfunn. Vi betrakter her sykdommer som spres grunnet kontakt mellom mennesker. Dersom vi skal betrakte sykdommer som spres på grunn av dyr eller andre ikke-menneskelige smittestoffer vil det være nødvendig med mer kompliserte modeller.

De ulike modellene har ulike betingelser. Modellene må for eksempel ta stilling til om fødsler skal inngå i modellen, om en person oppnår immunitet etter sykdom og om dødsfall som ikke er forårsaket av pandemien skal inkluderes. Det er vanlig å dele befolkningen inn i ulike disjunkte grupper hvor hver enkelt gruppe representerer en helsetilstand i forhold til den spesifikke sykdommen vi ønsker å studere. Det vil være ulikt fra modell til modell hvor mange slike grupper befolkningen deles inn i. Fra et tidspunkt til et annet kan antallet i gruppene ha endret seg grunnet endret helsetilstand hos noen personer. Disse blir dermed overført fra en gruppe til en annen. En annen grunn kan være at nye personer kommer inn (enten ved fødsel eller at personer forflytter seg fra et sted til et annet). Dersom dette er tilfelle i en modell, betrakter modellen en befolkningsstørrelse som ikke er konstant og lar denne variere over tid.

En modell som er mye brukt ved spredning av en smittsom sykdom blant mennesker er MSEIR-modellen. Denne består av fem ulike klasser/grupper (M , S , E , I og R). Disse klassene står for passiv immune (M), utsatte (S), eksponerte (E), smittede (I) og friske/døde (R). Størrelsen på befolkningen, ofte betegnet med variabel N , er lik summen av alle de fem klassene til enhver tid t :

$$N(t) = M(t) + S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$$

De ulike klassene er som regel beskrevet av differensialligninger hvor løsningen av ligningene gir oss antall smittede i hver av klassene ved et bestemt tidspunkt. En SIR-modell, som er en versjon av MSEIR-modellen utelater klassene M og E og er en av de enkleste modellene brukt ved epidemier/pandemier. Vi vil benytte en variant av denne SIR-modellen som utgangspunkt for å finne smittetrykket i et samfunn, noe vi videre vil benytte i forsikringskontrakten.

Sannsynligheten for at en pandemi inntreffer er veldig liten, men siden utbetalingene potensielt kan bli veldig store, kan det lønne seg med reassurans, en slags gjenforsikring. Reassurans hjelper et forsikringsselskap med å håndtere risiko ved en potensiell utbetaling av en forsikringskontrakt de har inngått med en forsikringstaker. Sannsynligheten for konkurs vil dermed være mindre ved en ekstremutbetaling. Mange forsikringsselskaper benytter seg av reassuranseselskaper som tar på seg noe av risikoen knyttet til en eventuell utbetaling. Med dette fordeles risikoen mellom selskapene, og forsikringsselskapet har dermed forsikret seg selv. En annen form for reassurans er at et forsikringsselskap benytter seg av markedet. Her kan premiepengene for eksempel investeres i salgsoptjoner i spesifikke sektorer. Dette er optjoner som forsikrer deg mot prisfall. En salgsoptjon er en type kontrakt som gir kjøperen rett, men ikke plikt til å selge et underliggende aktivum til en bestemt pris. Denne prisen vil dermed være en minstepris. Kontrakten har også en spesifisert utløpsdato. Vi vil ved reassurans se på europeiske salgsoptjoner som kun kan innløses på utløpsdato.

En mulighet er å sette sammen flere salgsoptjoner som vil gi utbetaling dersom en pandemi inntreffer. Oftest vil aksjemarkedet påvirkes negativt under en pandemi. Vi kan under nåværende covid-19 pandemi se at dette ikke gjelder for hele markedet. Det gjelder likevel for bransjene som har blitt hardest rammet økonomisk (flybransjen og ferie/fritid) og som vil ha mest behov for en pandemiforsikring. Et forsikringsselskap kan derfor kjøpe salgsoptjoner i en sektor de har utstedt pandemiforsikring i. Når smittetrykket i et samfunn øker vil mest sannsynlig kursene i disse sektorene falle og salgsoptjonene vil i dette tilfellet gi utbetaling. Samtidig vil forsikringsselskapet trenge midler til å betale ut i forbindelse med forsikringskontrakten mot pandemier og de kan dermed benytte seg av utbetalingen fra salgsoptjonene til å dekke dette.

1.1 Oppgavens disposisjon

Det vil først i kapittel 2 bli gitt en generell presentasjon av modeller bestående av ulike klasser/grupper som ofte blir benyttet ved epidemier/pandemier. Her skal vi se på de ulike klassene M , S , E , I og R som står for ulike helsetilstander i forhold til sykdommen vi ønsker å studere. Disse klassene kan kombineres til ulike modeller og vi vil benytte SIR-modellen bestående av S (utsatte), I (smittede) og R (friske/døde). Vi vil ta for oss en klassisk SIR-modell, i tillegg til et par stokastiske. For å kunne utføre analytiske analyser vil vi gjøre noen forenklinger og sette opp en stokastisk SIR-modell bestående av lineariteter. Videre i kapittel 2 presenteres en løsning av den forenklete stokastiske SIR-modellen og en analyse av løsningen.

I kapittel 3 vil vi introdusere en forsikringskontrakt mot pandemier. Utbetalingsfunksjonen for en slik forsikringskontrakt lar vi være proporsjonal med smittetrykket i et samfunn gitt ved antall smittede per 100 000. Ved hjelp av SIR-modellen kan vi finne smittetrykket og dermed også forventet utbetaling av kontrakten. Forsikringstaker må betale en premie som det blir enighet om med forsikringsselskapet i kontrakten. Det finnes ulike metoder for å beregne premien og vi vil presentere et par metoder for dette. Det vil alltid være en risiko forbundet med forsikringskontrakten, og en kompensasjon for denne må tas med i beregningen av premien.

Dersom en pandemi inntreffer vil forsikringsselskapet stå overfor veldig høye utbetalinger. For å håndtere denne risikoen kan forsikringsselskapet søke om reassurans. Dette vil vi se nærmere på i kapittel 4. Her vil vi ta for oss reassurans i markedet ved hjelp av europeiske salgsoptjoner. Vi vil innføre en indekstdynamikk basert på en geometrisk brownsk bevegelse og benytte denne i utbetalingsfunksjonen for en europeisk salgsoptjon. Til slutt skal vi se på et optimeringsproblem der vi ønsker å optimere en portefølje av salgsoptjoner slik at utbetalingen fra disse optisjonene matcher utbetalingen av forsikringskontrakten mot pandemier. En oppsummering av oppgaven vil bli gjort i kapittel 5.

Teori benyttet i utregninger gjennom oppgaven vil bli fremstilt i tillegg A. For simulering av spredningen av en smittsom sykdom ved hjelp av SIR-modellen er programmeringsspråket R benyttet. Programmeringskoden finnes i tillegg B.

KAPITTEL 2

SIR-modellen

Forsikringskontrakter mot pandemier kan ha ulike utbetalingsfunksjoner. Dette er avhengig av hva hvert enkelt forsikringsselskap ønsker å tilby. Vi vil i denne oppgaven sette opp en forsikringskontrakt mot pandemier hvor smittetrykket i et samfunn vil være avgjørende for hvor stor utbetalingen av forsikringskontrakten vil være. Vi lar utbetalingene være proporsjonale med smittetrykket og lar smittetrykket være gitt ved antall smittede per 100 000. For å analysere utbetalingene må vi derfor først se på hvordan en smittsom sykdom utvikler seg i et samfunn.

En spredning av en smittsom sykdom er ofte modellert ved hjelp av fem ulike klasser/grupper (M , S , E , I og R) som representerer en spesifikk helsetilstand i forhold til sykdommen. Det finnes mange ulike modeller som kombinerer disse fem klassene på ulike måter. En av disse modellene er MSEIR-modellen. I følge [Hethcote, 2000] består modellen av klassene, M (passiv immune), S (utsatte), E (eksponerte, de som er smittet, men ikke enda smittsomme), I (smittede) og R (friske/døde). En overføring fra en klasse til en annen finner sted dersom helsetilstanden hos en person endrer seg. Klassen M består av nyfødte som er midlertidig immune grunnet at moren har hatt sykdommen. Etter at de mister denne immuniteten blir de overført til klasse S . Når det oppstår kontakt mellom en person fra klasse S og en fra klasse I som er tilstrekkelig for at personen fra klasse S kan bli smittet så skjer det en overføring fra S til den eksponerte klassen E . Disse eksponerte personene har en latent periode før de blir syke og smittsomme og overføres til klasse I . Til slutt skjer en overføring mellom klasse I og R dersom en person blir frisk eller dør. I denne klassen R har alle permanent immunitet. Dersom en ikke oppnår permanent immunitet etter å ha vært smittet kan vi benytte MSEIRS-modellen som har en annen kombinasjon av de fem klassene. Her vil personene i gruppen R som har blitt friske kun ha en midlertidig immunitet og vil bli overført til klasse S igjen etter at immuniteten forsvinner.

Ofte blir klassene M og E utelatt da disse ikke har stor innvirkning på kontakten mellom de utsatte og de smittede, altså det som gjør at viruset kan spre seg. For å modellere dynamikken for utviklingen til en smittsom sykdom vil vi her se på en SIR-modell som er en versjon av MSEIR-modellen hvor klassene M og E er utelatt.

2.1 SIR-modeller

Det finnes flere ulike SIR-modeller for spredningen av en smittsom sykdom. Modellene kan enten være deterministiske eller stokastiske. Blant disse finnes det også modeller både for epidemier og for endemier. Modeller for sisnevnte inkluderer ofte fødsler, i tillegg til dødsfall som ikke er knyttet til den spesifikke sykdommen. Immuniteten er også ofte kun midlertidig i modellene for endemier. Kjennetegnet for alle typer SIR-modeller er at de er formulert som startverdiproblemer for systemer av ordinære differensialligninger. En klassisk deterministisk SIR-modell som kan benyttes ved en epidemi/pandemi (et utbrudd som forekommer i et relativt kort tidsrom) er gitt

ved

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= -\beta \frac{I(t)S(t)}{N} \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta \frac{I(t)S(t)}{N} - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t),\end{aligned}\tag{2.1}$$

hvor $S(t) + I(t) + R(t) = N$. [Hethcote, 2000, s. 604]

Modellens tilstander:

- $S(t)$ betegner antall utsatte i samfunnet ved tid t , altså de i befolkningen som har en mulighet for å bli smittet.
- $I(t)$ betegner antall smittede ved tid t , de som har fått infeksjonen/sykdommen.
- $R(t)$ betegner antallet som har vært syke og blitt friske eller som har dødd av sykdommen ved tid t .
- $dS(t)$, $dI(t)$ og $dR(t)$ betegner endringene i de ulike tilstandene ved tid t .
- N betegner størrelsen på befolkningen, totalt antall mennesker.

Modell parametere:

- β betegner kontaktraten, altså gjennomsnittlig antall kontakter til en person som er tilstrekkelig for en overføring mellom klasse S og I .
- γ betegner overgangsraten fra tilstand I til tilstand R , altså tilfellet hvor smittede blir friske eller dør.
- t betegner tiden (kontinuerlig).

Denne modellen lar befolkningsstørrelsen N være konstant til enhver tid t , slik at

$$N = S(t) + I(t) + R(t)$$

Modellen utelukker dermed fødsler, i tillegg til dødsfall som ikke er forårsaket av den spesifikke sykdommen som spres i samfunnet. Permanent immunitet er også en forutsetning for modellen slik at det ikke kan skje en overgang fra klasse R og tilbake til klasse S .

Ofte er det tilfeldigheter som spiller en rolle for hvordan en sykdom utvikler seg. Dette kan modelleres ved å innføre stokastiske ledd i modellen. I en artikkel fra 2020 [Simha mfl., 2020] forsøker de å modellere covid-19 infeksjonen ved hjelp av en stokastisk SIR-modell som også tar hensyn til inngrepene myndighetene gjør for å begrense smittetrykket i samfunnet. Dette er en stokastisk versjon av den klassiske modellen som vil kunne modellere noe av tilfeldigheten i utviklingen. Modellen er gitt ved

$$\begin{aligned}dS(t) &= -E_f \beta S(t)I(t)dt \\ dI(t) &= (E_f \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)) dt + \sigma I(t)dW(t) \\ dR(t) &= \gamma I(t)dt - \sigma I(t)dW(t),\end{aligned}\tag{2.2}$$

[Simha mfl., 2020, s. 1]

Her har vi et ekstra ledd(støy) på slutten av differensialligning to og tre i tillegg til at vi bruker det totale antallet $I(t)$ og ikke andelen, $\frac{I(t)}{N}$ slik som i den klassiske modellen (2.1). $E_f \in [0, 1]$ er eksponeringsfaktoren og modellerer inngrepene myndighetene foretar for å begrense smitten. Denne kan justeres for å se hvor stor betydning ulike strategier har for smitteutviklingen i samfunnet. Parameteren β betegner her vekstraten, altså måler den økningen i antall smittede forårsaket av kontakt mellom personer i tilstand S og tilstand I . Den skal gjøre rede for befolkningsstørrelsen, reproduksjonsantallet R_0 (totalt antall som blir smittet etter kontakt med en smittet person ved starten av en pandemi) og eksponeringsfaktoren E_f .

Begge modellene vi har sett på hittil kan være vanskelig å løse analytisk. Vi ønsker derfor å sette opp en ny modell hvor det er gjort noen forenklinger slik at vi kan benytte dette til å analysere en forsikringskontrakt senere.

Forenklet stokastisk SIR-modell

Modell (2.2) består av ikke-lineariteter, noe som gjør det veldig vanskelig å håndtere analytisk. Første ledd i ligning en og to hvor vi har tilstand I multiplisert med tilstand S gjør det vanskelig å finne en eksplisitt løsning på modellen. Vi forenkler derfor den stokastiske modellen for å kunne foreta matematiske utregninger uten numeriske metoder og setter opp en stokastisk SIR-modell bestående av lineariteter. Forutsetningene for den klassiske SIR-modellen (2.1) med unntak av et konstant befolkningstall N vil også gjelde i vår forenklete modell. Dette vil vi komme tilbake til. Vi lar den forenklete modellen være gitt ved

$$\begin{aligned} dS(t) &= -(\beta_1 S(t) + \beta_2 I(t)) dt \\ dI(t) &= (\beta_1 S(t) + (\beta_2 - \gamma)I(t)) dt + \eta_1 dW_1(t) \\ dR(t) &= \gamma I(t) dt + \eta_2 d\hat{W}_2(t), \end{aligned} \tag{2.3}$$

Her er $W_1(t)$ og $\hat{W}_2(t)$ to korrelerte brownske bevegelseser, også kalt Wiener prosesser (def. A.1), slik at

$$d\hat{W}_2(t) = \rho_{12} dW_1(t) + \sqrt{1 - \rho_{12}^2} dW_2(t)$$

hvor $W_2(t)$ er en brownsk bevegelse uavhengig av $W_1(t)$. ρ_{12} betegner korrelasjonen mellom $W_1(t)$ og $\hat{W}_2(t)$.

Modell (2.3) for utviklingen av en smittsom sykdom er en røff approksimasjon som ikke vil gjelde i virkeligheten. Vi vil likevel benytte denne for å sette opp en utbetalingsfunksjon for en forsikringskontrakt mot pandemier. Selv om modellen ikke er like realistisk som modell (2.2) vil modellen kunne si noe om sammenhengen mellom smittetrykket i et samfunn og utbetalingen av forsikringskontrakten.

I andre og tredje ligning er det også lagt til støy slik som i modell (2.2) for å modellere noe av tilfeldigheten som skjer i utviklingen av smitten i samfunnet. Forskjellen fra modell (2.2) er at vi har innført to korrelerte brownske bevegelseser slik at den tilfeldige endringen i klasse I og klasse R ikke nødvendigvis er like store.

Nye parametere vi har innført er:

- β_1 og β_2 sier noe om økningen i antall smittede og vil være avhengig av hvor smittsom sykdommen er. R_0 vil være et mål på dette. Parameterne vil også avhenge av mobilitet i befolkningen og tiltak som blir innført for å begrense smitten.
- η_1 og η_2 blir brukt for å modellere tilfeldigheten i utviklingen.

Alle parameterne i modellen er positive. Dersom vi ser bort ifra de stokastiske leddene kan vi se at negativ β_1 og β_2 vil kunne gi en økning av antall utsatte S . Siden en forutsetning i vår forenklete modell er permanent immunitet, skal ikke dette være mulig. Vi lar også $\beta_2 - \gamma < 0$ slik at $\gamma > \beta_2$. Dermed må også γ være positiv. Denne betingelsen gjør det mulig med en smittereduksjon i samfunnet. Når antall utsatte S blir lavt nok, slik at $\beta_1 S(t)$ har lavere verdi enn absoluttverdien til $(\beta_2 - \gamma)I(t)$ vil det være mulig med en reduksjon i antall smittede. Om det blir en reduksjon eller ikke vil da være avhengig av det stokastiske leddet. Dersom $\beta_2 - \gamma$ er positiv vil det uansett være en økning i antall smittede til enhver tid hvis vi ser bort fra det stokastiske leddet, noe som ikke er realistisk.

I vår forenklete modell (2.3) er ikke lenger $S(t) + I(t) + R(t) = N$ siden vi har tilfeldigheter ved de brownske bevegelsene W_1 og W_2 . Vi er klar over at dette bryter med noe av forutsetningen for den klassiske SIR-modellen. Modell (2.3) er kun en tilnærming og skal reflektere noe av usikkerheten i tid. I virkeligheten vil det også være noe variasjon i befolkningsstørrelsen siden folk reiser ut og inn av et land. Dersom vi ikke betrakter et helt land, men en spesifikk region vil det mest sannsynlig foregå mer reising ut og inn av regionen enn det gjør over landegrensene.

En annen forklaring på tilfeldigheten kan være at noen som er friske etter sykdom blir smittet på nytt selv om sykdommen skal ha permanent immunitet. Disse vil være i fåtall og vil derfor kunne inngå i tilfeldigheten i smitteutviklingen. Tiltakene som myndighetene innfører kan også være med på å forklare de største svingningene i utviklingen. Dette vil ikke ha påvirkning på befolkningstallet N , men det vil ha effekt på endringen i klassene I og R .

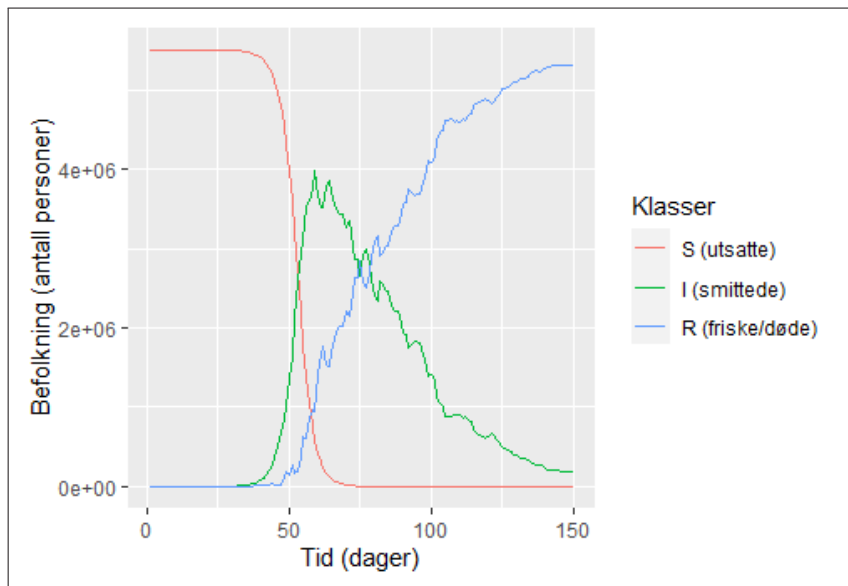
Enkelte modeller tar hensyn til alder og kjønn, da dette potensielt kan ha noe å si for smittespredningen og hvor raskt smittede blir friske. Vi har i vår modell valgt å se bort fra dette. Vi forsøkte også å la vekstraten være gitt som en stokastisk funksjon $X(t)$ slik at denne erstattet konstantene β_1 og β_2 . $X(t)$ var da gitt ved Schwartz modell $e^{Y(t)}$ hvor $Y(t)$ er en gaussisk Ornstein Uhlenbeck prosess. Dynamikken til en OU-prosess med et ekstra drifts ledd er gitt ved:

$$dY(t) = \alpha(\mu - Y(t))dt + \sigma dW(t)$$

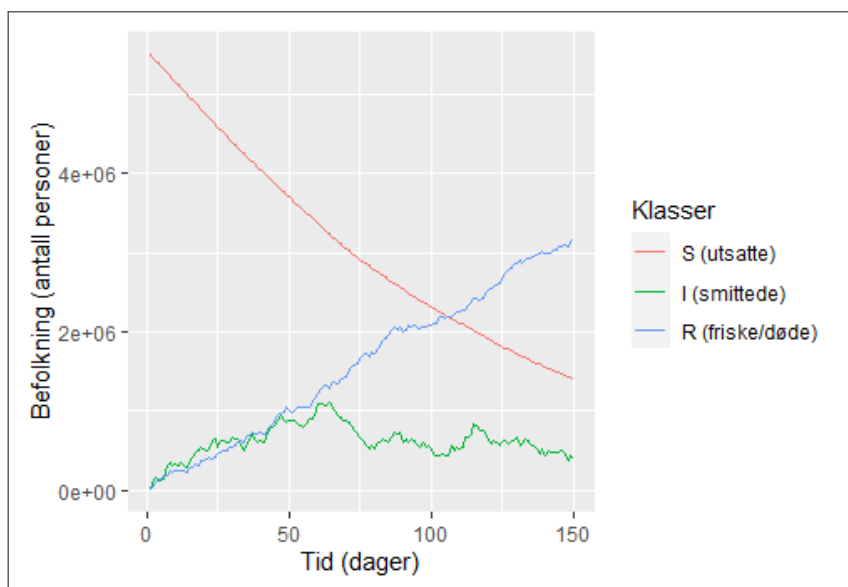
[Benth mfl., 2008, s. 21]

Dette viste seg å by på utfordringer ved analysering av utbetalingen uten numeriske metoder og vi lot derfor vekstratene være konstante. I virkeligheten vil det ikke være konstant over tid, noe vi kan se dersom vi studerer for eksempel smittespredningen av covid-19 i Norge det siste året. Vi kan blant annet se en tydelig forskjell i økningen av antall smittede gjennom sommeren 2020 og ved utgangen av året. Det var betydelig høyere smittespredning ved utgangen av året og her er det mange faktorer som spiller inn. En av faktorene er myndighetenes beslutninger og tiltak. Ved strengere tiltak og større nedstegninger vil antall nye smittetilfeller kunne gå ned sammenlignet med om samfunnet hadde vært helt åpent.

Parameterne i modellen kan bli estimert for ulike sykdommer ved hjelp av data. I artikkelen [Simha mfl., 2020] har parameterne i modell (2.2) blitt optimalisert ved hjelp av data på covid-19 sykdommen fra ulike land. Disse parameterne ble så benyttet videre for å simulere fremtidig utvikling av sykdommen. Vi har foretatt simulering av de to stokastiske modellene, (2.2) og (2.3), som et eksempel på hvordan utviklingen til en sykdom ser ut ved bruk av SIR-modeller. Se figur 2.1 og 2.2. Ettersom vi ikke har samlet inn data benyttet vi parameterne fra artikkel [Simha mfl., 2020] som en veiledning. Parameterne har så blitt justert noe. I simuleringen har vi benyttet et tidsrom på 150 dager hvor det på dag 0 er en smittet. I modell (2.3) lar vi η_1 og η_2 være gitt ved en verdi rundt verdien til σ i modell (2.2) multiplisert med 10^6 . Dette gjør vi for at den forenklete modellen vår skal bli mest mulig sammenlignbar med modell (2.2), da denne modellen



Figur 2.1: SIR-modell (2.2) for utviklingen av en smittsom sykdom



Figur 2.2: SIR-modell (2.3) for utviklingen av en smittsom sykdom

multipliserer det stokastiske leddet med $I(t)$ (antall smittede ved tid t). $I(t)$ vil variere over tid, men siden η_1 og η_2 er konstanter velger vi antall smittede som 10^6 .

Vi kan se at kurven for I (antall smittede) er mye brattere i figur 2.1 samtidig som den får et mye høyere toppunkt enn i figur 2.2. Dette er naturlig siden modell (2.3) består av lineariteter. Samtidig har også modell (2.2) en faktor som modellerer inngrepene myndighetene foretar. Selv om modell (2.3) ikke er like realistisk i forhold til antall smittede viser modellen først en økning i antall smittede før utviklingen snur og færre blir smittet, noe som også skjer i den mer kompliserte modellen. Vi kan derfor likevel benytte den forenklete modellen til å se på en forsikringskontrakt som avhenger av smittetrykket i et samfunn.

Grunnet de stokastiske leddene i begge modellene vil grafene for antall smittede, I og for antall friske/døde, R ha ujevnheter/svingninger. Dette vil gi mange toppunkter og bunnpunkter på grafene og det vil være forskjell på hvor store svingningene er. Steder på grafen til antall smittede hvor stigningen er brattest kan for eksempel forklares med ferie. Generelt vil flere mennesker reise rundt i ferier og dermed også ha kontakt med flere andre enn de ville hatt i en normal hverdag. På denne måten vil smitten også kunne spres raskere og det kan oppstå en drastisk økning i antall smittede den påfølgende tiden. Vi kan for eksempel ta for oss juleferien i Norge i 2020. Her kunne vi se en stor økning i antall nye smittede per dag i slutten av desember og starten av januar. I løpet av denne ferien reiste flere hjem til familiene sine og det var tillatt å være flere samlet enn det hadde vært tidligere. Som følge av dette, økte smitten i landet og mot midten av januar 2021 fikk landet en topp i antall nye smittetilfeller registrert på en dag. Dette vil også medføre en topp i totalt antall smittede. Grunnet strengere restriksjoner innført av regjeringen gikk antall nye smittetilfeller ned igjen utover januar måned.

De stokastiske leddene kan også forårsake negativt antall i klassene I og R spesielt i starten av en pandemi. Dynamikken til antall smittede I er en Ornstein Uhlenbeck prosess og det vil derfor alltid kunne oppstå negativt smittetall, men dette vil ha liten betydning for smittetallet utover i pandemien.

Vi tar for oss figur 2.2. Dersom vi betrakter den grønne grafen (antall smittede) ser vi at det er en økning i antall smittede frem til rundt dag 65 og deretter har vi en nedgang. Dette kan ligne på situasjonen vi har i Norge med smitteverntiltak. Når myndighetene innfører tiltak vil smittetrykket igjen kunne gå ned over tid. Ved flere simuleringer vil denne toppen kunne endre seg, slik at den ikke inntreffer på dag nummer 65, men enten på et tidligere eller senere tidspunkt. Vi kan se at den blå grafen øker ganske lineært ettersom det ikke er så stor variasjon i hvor raskt mennesker som er smittet blir friske eller dør.

Vi kan se at modell (2.3) ikke er en perfekt modell, men det kan likevel gi et bilde på hvordan smitten i et samfunn utvikler seg. En klassisk SIR-modell som ikke tar hensyn til tiltak iverksatt av myndighetene vil heller ikke være helt realistisk, da denne vil gi en rask økning av smittede i starten av pandemien, altså en relativt bratt kurve, før det snur og vi får en ganske bratt nedgang også. Med E_f vi har i modell (2.2) vil vi kunne modellere dette tydeligere. Dette forutsetter at den endres underveis i pandemien ettersom det er ulikt gjennom året hvor strenge tiltak myndighetene innfører.

Ved bruk av SIR-modeller til å modellere smitten under en pandemi er det nødvendig med justering av de ulike parameterene ut ifra hvilket land man ønsker å studere smitten i. Ulike land håndterer smittetrykket i samfunnet veldig ulikt og det vil dermed også være store forskjeller på hvordan smitten utvikler seg.

2.2 Løsning av SIR-modellen

Vi vil nå se på løsningen av den forenklete SIR-modellen (2.3) noe vil vil bruke senere ved analysing av en forsikringskontrakt. Systemet av differensialligninger fra (2.3) kan skrives på vektorform og vi lar $\mathbf{X}(t)$ betegne den stokastisk prosessen i \mathbb{R}^3 . Dynamikken til $\mathbf{X}(t)$ er dermed gitt ved

$$d\mathbf{X}(t) = A\mathbf{X}(t) dt + \mathbf{v}_1 dW_1(t) + \mathbf{v}_2 dW_2(t) \quad (2.4)$$

hvor

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} S(t) \\ I(t) \\ R(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -\beta_1 & \beta_2 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 - \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_1 \\ \eta_2\rho \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta_2\sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}$$

Dette systemet er gitt under sannsynlighetsrom P . Ved å løse systemet av differensialligninger (2.4) kan vi få $\mathbf{X}(t)$ på en eksplisitt form.

Proposisjon 2.1. Løsning SIR-modellen

Løsningen av system (2.4) på vektorform for tid $T \geq t \geq 0$ er gitt ved

$$\mathbf{X}(T) = e^{A(T-t)}\mathbf{X} + \int_t^T e^{A(T-u)}\mathbf{v}_1 dW_1(u) + \int_t^T e^{A(T-u)}\mathbf{v}_2 dW_2(u) \quad (2.5)$$

for $\mathbf{X}(t) = \mathbf{x} = [S(t) \quad I(t) \quad R(t)]^\top$.

Bevis. Vi bruker multidimensjonal Ito (teorem A.6) på $d(e^{-At}\mathbf{X}(t))$ for å løse (2.4) ovenfor. Vi lar en differensierbar funksjon f være gitt ved $f(t, \mathbf{x}) = e^{-At}x$. Dermed får vi ved Itos formel,

$$\begin{aligned} d(e^{-At}\mathbf{X}(t)) &= d(f(t, \mathbf{X}(t))) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{X}(t)) dt + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, \mathbf{X}(t)) dX_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, \mathbf{X}(t)) dX_i(t) dX_j(t) \\ &= -Ae^{-At}\mathbf{X}(t) dt + e^{-At}\mathbf{e}_1 dS(t) + e^{-At}\mathbf{e}_2 dI(t) + e^{-At}\mathbf{e}_3 dR(t) \\ &= -Ae^{-At}\mathbf{X}(t) dt + e^{-At} d\mathbf{X}(t) \\ &= -Ae^{-At}\mathbf{X}(t) dt + e^{-At}(A\mathbf{X}(t) dt + \mathbf{v}_1 dW_1(t) + \mathbf{v}_2 dW_2(t)) \\ &= e^{-At}\mathbf{v}_1 dW_1(t) + e^{-At}\mathbf{v}_2 dW_2(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

I utregningen ovenfor er \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 og \mathbf{e}_3 enhetsvektorer.

Vi integrerer så over t til T og får at $\mathbf{X}(T)$ er gitt ved

$$\mathbf{X}(T) = e^{A(T-t)}\mathbf{X}(t) + \int_t^T e^{A(T-u)}\mathbf{v}_1 dW_1(u) + \int_t^T e^{A(T-u)}\mathbf{v}_2 dW_2(u)$$

hvor $\mathbf{X}(t) = [S(t) \quad I(t) \quad R(t)]^\top$ (Betegnelsen \top benyttes for transponert). ■

2.3 Forventning og varians til antall smittede

Vi kan nå sette opp et uttrykk for antall smittede ved tid T som er gitt ved andre element i $\mathbf{X}(T)$ i (2.5). Dette gjør vi ved å multiplisere $\mathbf{X}(T)$ med enhetsvektor $\mathbf{e}_2^\top = [0 \ 1 \ 0]$ hvor \top er en betegnelse for transponert. Antall smittede, $I(T)$, er dermed gitt ved

$$\begin{aligned} I(T) &= \mathbf{e}_2^\top \mathbf{X}(T) \\ &= \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)} \mathbf{X}(t) + \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1 dW_1(u) + \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2 dW_2(u) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Før vi benytter dette i selve utbetalingsfunksjonen for forsikringskontrakten skal vi se litt på forventning og varians til antall smittede.

Proposisjon 2.2. Forventning og varians til $I(T)$

Forventning og varians til antall smittede ved tid $T \geq t \geq 0$ er gitt ved

$$\mathbb{E}[I(T) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}] = \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)} \mathbf{x} \quad (2.8)$$

$$\text{Var}[I(T) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}] = \int_t^T (\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1)^2 du + \int_t^T (\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2)^2 du \quad (2.9)$$

for $\mathbf{X}(t) = \mathbf{x} = [S(t) \ I(t) \ R(t)]^\top$.

Bevis. Antall smittede ved tid T , $I(T)$ må være integrerbar. Ved utregning av variansen senere kan vi se at dette gir oss to endelige uttrykk definert i (2.9) og dette bekrefter at $I(T)$ er integrerbar. Vi ser først på forventningsverdien til antall smittede ved tid T .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I(T) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}] &= \mathbb{E}[\mathbf{e}_2^\top \mathbf{X}(T) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}] \\ &= \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)} \mathbf{x} + \mathbb{E} \left[\int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1 dW_1(u) + \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2 dW_2(u) \right] \\ &= \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)} \mathbf{x} \end{aligned}$$

I utregningen av forventningsverdien er egenskapene til en brownsk bevegelse (definisjon A.1) benyttet. Egenskap (ii) medfører at forventningen til de to stokastiske integralene blir 0. Vi ser videre på variansen til $I(T)$.

$$\begin{aligned}
 & \text{Var}[I(T) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}] \\
 &= \text{Var}[\mathbf{e}_2^\top \mathbf{X}(T) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}] \\
 &= \text{Var} \left[\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)} \mathbf{x} + \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1 dW_1(u) + \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2 dW_2(u) \right] \\
 &= \text{Var} \left[\int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1 dW_1(u) + \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2 dW_2(u) \right] \\
 &= \text{Var} \left[\int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1 dW_1(u) \right] + \text{Var} \left[\int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2 dW_2(u) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\left(\int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1 dW_1(u) \right)^2 \right] - \mathbb{E} \left[\int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1 dW_1(u) \right]^2 \\
 &\quad + \mathbb{E} \left[\left(\int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2 dW_2(u) \right)^2 \right] - \mathbb{E} \left[\int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2 dW_2(u) \right]^2 \\
 &= \mathbb{E} \left[\left(\int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1 dW_1(u) \right)^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left(\int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2 dW_2(u) \right)^2 \right] \\
 &= \int_t^T (\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1)^2 du + \int_t^T (\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2)^2 du
 \end{aligned}$$

I linje nummer fire i utregning av variansen har vi benyttet at $W_1(t)$ og $W_2(t)$ er to uavhengige browniske bevegelser. Vi har benyttet egenskap (ii) i definisjon av en brownisk bevegelse (A.1) i nest siste likhet slik at de to kvadrerte forventningene har verdi null. Til slutt er Ito isometri (lemma A.2) benyttet i siste likhet ovenfor. \blacksquare

Stokastiske integraler med hensyn på browniske bevegelser er normalfordelte og siden det første leddet i $I(T)$ er deterministisk, så ser vi at $I(T)$ på kort sikt er normalfordelt med forventning og varians gitt i proposisjon 2.2.

Dersom vi øker β_1 eller β_2 eller begge kan vi se at forventet antall smittede ved tid T vil øke, men dersom vi øker γ vil vi få en nedgang i antall smittede, noe som er naturlig siden γ betegner overgangsraten mellom tilstandene I og R . Variansen vil også henholdsvis øke og minke i de to tilfellene.

2.4 Egenskaper til løsningen av SIR-modellen

Vi ønsker å se litt nærmere på noen egenskaper til løsningen av SIR-modellen fra proposisjon 2.1. Det vi vil studere er om $\mathbf{X}(T)$ er stasjonær og hva som skjer når tiden går mot uendelig. Dersom vi kan fastslå at $\mathbf{X}(T)$ er stasjonær, så kan vi også finne grensefordelingen.

Det som er mest interessant her er hva som skjer med antall smittede $I(T)$ dersom tiden T går mot uendelig og hvilken sannsynlighetsfordeling $I(T)$ har. Prosessen $\mathbf{X}(T)$ er stasjonær dersom alle egenverdiene til matrise A har negativ reell del [Benth mfl., 2008, s. 282]. Egenverdiene finner vi ved sette determinanten til $A - \lambda I$, hvor I betegner identitetsmatrisen, lik null. Ved utregning får vi:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\beta_1 - \lambda & -\beta_2 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 - \gamma - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda(-\beta_1\gamma + (\beta_2 - \beta_1 - \gamma)\lambda - \lambda^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 0 \vee \lambda^2 + (\beta_1 + \gamma - \beta_2)\lambda + \beta_1\gamma = 0$$

Vi løser andregradsligningen ovenfor og får at

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}(\beta_1 + \gamma - \beta_2) \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\beta_1\gamma}{(\beta_1 + \gamma - \beta_2)^2}} \right)$$

To av egenverdiene ($\lambda_{2,3}$) har negativ reell del dersom $\beta_1 + \gamma > \beta_2$. Dette kan ses ved å studere $\lambda_{2,3}$,

$$\begin{aligned} (\beta_1 + \gamma - \beta_2)^2 < 4\beta_1\gamma : \operatorname{Re}(\lambda_{2,3}) &= -\frac{1}{2}(\beta_1 + \gamma - \beta_2) \\ (\beta_1 + \gamma - \beta_2)^2 > 4\beta_1\gamma : 0 < 1 - \frac{4\beta_1\gamma}{(\beta_1 + \gamma - \beta_2)^2} < 1 \text{ og } \operatorname{Re}(\lambda_{2,3}) < 0 &\text{ når } \beta_1 + \gamma > \beta_2 \end{aligned}$$

Ettersom den første egenverdien er 0, er ikke $\mathbf{X}(T)$ stasjonær. Ved å studere $I(T)$ når T går mot uendelig får vi derfor at forventningen og variansen til denne ikke er begrenset. Dette kan vi se ved å ta for oss leddene i uttrykkene for forventningen og variansen fra (2.8) og (2.9).

Ved å benytte egenskapene

$$A\mathbf{v}_i^* = \lambda_i\mathbf{v}_i^* \Rightarrow e^{A(T-t)}\mathbf{v}_i^* = e^{\lambda_i(T-t)}\mathbf{v}_i^* \quad \text{og} \quad \mathbf{X}(t) = x_1\mathbf{v}_1^* + x_2\mathbf{v}_2^* + x_3\mathbf{v}_3^* = \sum_{i=1}^3 x_i\mathbf{v}_i^*$$

hvor $\mathbf{v}_i^*, i = 1, 2, 3$ er egenvektorer og $x_i, i = 1, 2, 3$ er konstanter, kan vi uttrykke forventningen ved hjelp av egenvektorer og egenverdier. Forventningen til $I(T)$ blir dermed

$$\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(\mathbf{e}_2^\top \mathbf{v}_i^*)e^{\lambda_i(T-t)}$$

Absoluttverdien er nå gitt ved:

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{X}(t)| &\leq \sum_{i=1}^3 |x_i| |\mathbf{e}_2^\top \mathbf{v}_i^*| e^{\lambda_i(T-t)} \\ &= \sum_{i=1}^3 |x_i| |\mathbf{e}_2^\top \mathbf{v}_i^*| e^{\operatorname{Re}(\lambda_i)(T-t)} \end{aligned}$$

Dersom alle egenverdiene hadde hatt negativ reell del kan vi se at uttrykket ovenfor ville vært begrenset når vi lar $T \rightarrow \infty$, siden vi da får at $e^{\operatorname{Re}(\lambda_i)(T-t)} \rightarrow 0$. Dette stemmer ikke i vårt tilfelle siden vi har at $\lambda_1 = 0$ og forventningen er dermed ikke begrenset når $T \rightarrow \infty$. Det samme vil gjelde for de to leddene i uttrykket for variansen til $I(T)$. Vi skriver nå \mathbf{v}_1 som en sum av egenvektorene

og uttrykker det første leddet i uttrykket for variansen ved hjelp av egenvektorene og egenverdiene.

$$\mathbf{v}_1 = \sum_{i=1}^3 y_i \mathbf{v}_i^*$$

hvor $y_i, i = 1, 2, 3$ er konstanter.

Setter

$$\begin{aligned} f^2(u) &= (\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^3 y_i y_j (\mathbf{e}_2^\top \mathbf{v}_i^*) (\mathbf{e}_2^\top \mathbf{v}_j^*) e^{(\lambda_i + \lambda_j)(T-u)} \end{aligned}$$

Vi kan nå integrere funksjonen ovenfor:

$$\int_t^T f^2(u) du = \sum_{i,j=1}^3 y_i y_j (\mathbf{e}_2^\top \mathbf{v}_i^*) (\mathbf{e}_2^\top \mathbf{v}_j^*) \int_t^T e^{(\lambda_i + \lambda_j)(T-u)} du$$

Ser vi nå på integralet i uttrykket ovenfor får vi at:

$$\begin{aligned} \int_t^T |e^{(\lambda_i + \lambda_j)(T-u)}| du &= \int_t^T e^{(\operatorname{Re}(\lambda_i) + \operatorname{Re}(\lambda_j))(T-u)} \\ &= \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda_i) + \operatorname{Re}(\lambda_j)} (e^{(\operatorname{Re}(\lambda_i) + \operatorname{Re}(\lambda_j))(T-t)} - 1) \end{aligned}$$

Heller ikke dette integralet er begrenset om vi lar $T \rightarrow \infty$, så $\int_t^T f^2(u) du$ vil ikke være begrenset. Det samme vil skje med andre ledd i uttrykket for variansen til $I(T)$ og dermed har ikke $I(T)$ en grensefordeling.

Dette er ikke reelt siden antall smittede ikke kan overstige antall i befolkningen og vi kunne derfor satt en begrensning lik totalt antall mennesker i et samfunn. Samtidig vil ikke en pandemi vare veldig lenge og vi kan se bort ifra ikke-stasjonæriteten siden den skjer på lang sikt.

KAPITTEL 3

Forsikringskontrakt

Det er flere variabler som spiller en rolle når et forsikringsselskap skal sette opp en kontrakt. De vil være interessert i forventet utbetaling av forsikringskontrakten og hvordan de kan sette premien som forsikringstaker skal betale i forhold til dette. Premien må settes slik at de unngår konkurs ved eventuelle ekstremutbetalinger. Vi vil her se på forventningen til en utbetalingsfunksjon for en forsikringskontrakt mot pandemier og analysere premien. SIR-modellen vi så på i kapittel 2 benyttes for å analysere smittetrykket når en pandemi allerede har inntruffet. Det vil hele tiden være et potensiale for pandemi og vi velger derfor videre å operere med forventninger under forutsetning av at en pandemi allerede har inntruffet. Dette kan vi gjøre siden SIR-modellen er uavhengig av sannsynligheten for om en pandemi inntreffer eller ikke.

I virkeligheten vil både forventet utbetaling og premie også avhenge av sannsynligheten for en pandemi. Om en pandemi inntreffer eller ikke kan modelleres som en 0 – 1 stokastisk variabel. Vi kunne innført en slik stokastisk variabel $Z = \mathbb{1}_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ definert som

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } \omega \in A \\ 0 & \text{hvis } \omega \in A' \end{cases}$$

Mengden A av Ω gir pandemiutfall og komplementet A' er mengden som gir ikke-pandemiske utfall. I delkapittel 3.2 hvor vi skal se på forventningsverdien til en eventuell utbetaling har vi tatt utgangspunkt i at en pandemi allerede har inntruffet. For å ta hensyn til sannsynligheten for en pandemi kan vi multiplisere forventningen vi finner med sannsynligheten. Dette kan vi se ved å benytte følgende formel for total forventning hvor $U(T)$ betegner utbetalingsfunksjonen,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U(T)] &= \mathbb{E}[U(T) \mid Z = 1]P(Z = 1) + \mathbb{E}[U(T) \mid Z = 0]P(Z = 0) \\ &= \mathbb{E}[U(T) \mid Z = 1]P(A) \end{aligned}$$

Dersom en pandemi ikke inntreffer vil heller ikke et forsikringsselskap betale erstatning til forsikringstaker og dermed forsvinner siste ledd i formel ovenfor. Videre vil vi ta utgangspunkt i at en pandemi har inntruffet, altså at $Z = 1$ er gitt.

3.1 Utbetalingsfunksjon

En utbetaling av forsikringskontrakten vil skje dersom smittetrykket i samfunnet går over en gitt barriere gitt at myndighetene har erklært pandemi. Vi lar pengene som utbetales være differansen mellom en barriere og smittetrykket i samfunnet gitt ved antall smittede per 100 000 multiplisert med en konstant. Funksjonen for utbetaling ved tid T gitt at en pandemi har inntruffet er dermed gitt ved

$$\max(Y(T) - b, 0)v_0 \tag{3.1}$$

Modell variabler/parametere:

- $Y(T) = aI(T)$ betegner antall smittede per 100 000 ved tid T .
 - $I(T)$ er antall smittede ved tid T fra ligning (2.7)
 - $a = 100000/N(T)$ hvor $N(T) = S(T) + I(T) + R(T)$ (antall mennesker). Siden befolkningstallet N varierer over tid vil også a være en funksjon avhengig av tidspunkt T .
- b betegner barrieren.
- v_0 er en konstant.

Både b og v_0 settes av forsikringsselskapet og disse vil avhenge av hvem som er forsikringstaker. Et stort selskap som for eksempel Petter A. Stordalens Strawberry-konsern ville fått en mye høyere utbetaling enn et lite selskap innen samme bransje. Dette er naturlig siden de økonomiske tapene vil være mye større hos et stort selskap dersom en pandemi inntreffer. Det har den siste tiden pågått en rettssak mellom Strawberry-konsernet, inkludert hotellkjeden Nordic Choice og forsikringsselskapet Codan. Uenigheten går på om Codan skal dekke de økonomiske tapene som ble påført Choice hotellene som følge av covid-19 pandemien. I følge kontrakten var konsernet forsikret mot et epidemisk utbrudd. Codan mener dette kun gjelder for epidemier knyttet til hotellene og at dermed forsikringskontrakten ikke gjelder ved en pandemi. Stordalen og konsernet er uenig i dette, men de tapte likevel i Oslo tingrett i mars 2021 [Berglihn og Helle, 2021, 12. mars]. Dersom de hadde tegnet en forsikringskontrakt mot pandemier ville de kunne fått en enorm utbetaling.

Ved å justere v_0 i utbetalingsfunksjonen (3.1) kan et forsikringsselskap inngå ulike kontrakter med ulike forsikringstakere. Dersom et forsikringsselskap skulle inngått en slik type kontrakt med Strawberry-konsernet kunne de justert opp v_0 slik at utbetalingen ville samsvart med de potensielle økonomiske tapene. Dette ville også medført høyere premie. Hvordan et forsikringsselskap kan sette premien kommer vi tilbake til i delkapittel 3.3.

Det er ikke kun størrelsen på selskapene som forsikrer seg som avgjør hvordan kontrakten skal være. Det vil for eksempel også være store forskjeller på hvor store de økonomiske tapene vil være hos de ulike bransjene under en pandemi. Restaurant, hotell og reiselivsbransjen vil kanskje få størst økonomisk påkjenning, mens helsesektoren vil klare seg mye bedre.

Utbetalingen av forsikringskontrakten kan være gitt som en aggregert sum over en tidsperiode på for eksempel et år. I dette tilfellet ville vi da fått en sum av funksjoner gitt på formen (3.1). Her velger vi å se på en utbetaling kun på ett tidspunkt T , slik at vi kun forholder oss til utbetalingsfunksjonen (3.1) ovenfor. Dette tidspunktet kan være avtalt i kontrakten på forhånd. I kontrakten kan forsikringstaker og forsikringsselskapet bli enige om et utbetalingstidspunkt satt til for eksempel tre måneder etter at det er erklært pandemi.

En annen mulighet ville vært å ta et snitt av antall smittede fra det er erklært pandemi og over et år. Smittetallet kan variere veldig gjennom et år og snittet vil derfor kunne gi et mer rettferdig resultat. Hvis forsikringstaker er uheldig er smittetallet på det laveste ved tid T sammenlignet med resten av året. Dette medfører lavere utbetaling til forsikringstaker, men vil være gunstig for forsikringsselskapet.

Utbetalingsfunksjonen er som sagt avhengig av smittetrykket og vi benytter derfor uttrykket for $I(T)$ (2.7) fra løsningen av SIR-modellen ved videre analysing av utbetalingen.

3.2 Forventet utbetaling

Vi kan nå ta for oss forventningen til utbetalingsfunksjonen (3.1). Dette forutsetter at forventningen er veldefinert. Fra tidligere vet vi at $I(T)$ er integrerbar og dette vil da også gjelde for $Y(T) = aI(T)$. Videre er maksfunksjonen begrenset av absoluttverdien til Y :

$$0 \leq \max(Y(T) - b, 0) \leq |Y(T)|$$

og forventningen er dermed veldefinert.

Proposisjon 3.1. Forventet utbetaling av en forsikringskontrakt

Anta at myndighetene har erklært pandemi og la utbetalingsfunksjonen for en forsikringskontrakt mot pandemier være gitt ved (3.1). Da vil forventet utbetaling av forsikringskontrakten ved tid $T \geq t \geq 0$ for $\mathbf{X}(t) = \mathbf{x} = [S(t) \quad I(t) \quad R(t)]^\top$ være gitt ved

$$\mathbb{E}[\max(Y(T) - b, 0)v_0 \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}] = \left((a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} - b)\Phi(d) + \frac{\sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2} \right) v_0 \quad (3.2)$$

hvor

$$\begin{aligned} d &= \frac{a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} - b}{\sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}} \\ \Sigma_1^2 &= \int_t^T a^2 (\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)}\mathbf{v}_1)^2 du \\ \Sigma_2^2 &= \int_t^T a^2 (\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)}\mathbf{v}_2)^2 du \end{aligned} \quad (3.3)$$

og Φ er kumulativ normalfordelingsfunksjon for en standard normalfordeling.

Bevis. $Y(T) = aI(T)$ og vi har fra (2.7) et uttrykk for $I(T)$. Vi benytter dette i utregningen av forventningsverdien.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\max(Y(T) - b, 0)v_0 \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}] &= \mathbb{E} \left[\max \left(a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} + a \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)}\mathbf{v}_1 dW_1(u) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)}\mathbf{v}_2 dW_2(u) - b, 0 \right) v_0 \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t)} \end{aligned}$$

Vi ønsker å uttrykke de to stokastiske integralene ovenfor ved hjelp av en standard normalfordelt variabel. Fra punkt (ii) i definisjon A.1 av en en brownsk bevegelse vet vi at de to integralene er normalfordelte, betegnet med \mathcal{N} , med forventning 0. Variansen finner vi ved hjelp av ito isometri (lemma A.2). Dermed vil fordelingen til integralene være gitt ved

$$\begin{aligned} \int_t^T a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)}\mathbf{v}_1 dW_1(u) &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_1^2) \\ \int_t^T a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)}\mathbf{v}_2 dW_2(u) &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_2^2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

hvor variansene Σ_1 og Σ_2 er som i (3.3). Ved hjelp av informasjonen ovenfor kan vi uttrykke de to stokastiske integralene som

$$\int_t^T a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)}\mathbf{v}_1 dW_1(u) + \int_t^T a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)}\mathbf{v}_2 dW_2(u) \stackrel{d}{=} \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2} Z \quad (3.5)$$

hvor $\stackrel{d}{=}$ betyr likhet i fordeling og Z er en standard normalfordelt variabel. Denne notasjonen vil vi også benytte videre gjennom oppgaven. Forventningen kan derfor uttrykkes ved å benytte (3.5):

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\max(Y(T) - b, 0)v_0 \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}] \\ &= \mathbb{E} \left[\max \left(a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} + \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2} Z - b, 0 \right) v_0 \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t)} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \max \left(a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} + \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2} z - b, 0 \right) e^{-z^2/2} dz \right) v_0 \end{aligned}$$

Maksfunksjonen i integranden ovenfor har en verdi større enn 0 dersom

$$a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} + \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2} Z - b > 0$$

Vi må derfor sette grensene slik at

$$Z > \frac{b - a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x}}{\sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}}$$

Vi betegner nedre grense med $-d$ hvor

$$d = \frac{a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} - b}{\sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}}$$

Videre får vi

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\max(Y(T) - b, 0)v_0 \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^{\infty} \left(a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} - b \right) e^{-z^2/2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^{\infty} \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2} z e^{-z^2/2} dz \right) v_0 \\ &= \left(\left(a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} - b \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-z^2/2} dz + \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2} \right) v_0 \\ &= \left(\left(a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} - b \right) \Phi(d) + \frac{\sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2} \right) v_0 \end{aligned}$$

hvor $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t)$ og Φ er kumulativ normalfordelingsfunksjon for en standard normalfordeling. ■

Det kan være at man får kunstig høye utbetalinger dersom antall smittede i modellen overstiger antallet i befolkningen. Vi kan eventuelt innføre $N(T)$ (antall mennesker) og utbetaling kun dersom $I(T) < N(T)$, men siden modellen benyttes for smittetrykk over en relativt kort tidsperiode og parameterne kan justeres ut ifra smitteutvikling for tidligere epidemier/pandemier vil ikke dette være et problem.

3.3 Premie

Et forsikringselskap må fastsette en premie i forsikringskontrakten. Denne vil avhenge av forventet utbetaling av kontrakten. Ekvivalensprinsippet forteller oss at verdien av forventet utbetaling

(prop. 3.1) skal være lik verdien av premieinnbetalingene, $p(T)$, ved tid T [Mikosch, 2009, s. 78]:

$$p(T) = \mathbb{E}[\max(Y(T) - b, 0)v_0] \quad (3.6)$$

I praksis tar et forsikringsselskap høyere premie enn forventet utbetaling av en forsikringskontrakt. Differansen mellom forventet utbetaling og premien forsikringstaker faktisk må betale er en slags kompensasjon for risikoen forbundet med kontrakten. Riktig beregning av denne risikokompensasjonen kan forhindre forsikringsselskapet i å gå konkurs ved en eventuell ekstremutbetaling. Det finnes flere ulike metoder for beregning av premie med en risikokompensasjon. Her skal vi se på et par ulike metoder. Den første metoden er ved bruk av en kvantil, mens i den andre metoden beregner vi forventet utbetaling under et risikojustert sannsynlighetsmål gitt ved Girsanov transformasjon. Vi skal ta for oss begge disse metodene.

Kvantil

Første metode et forsikringsselskap kan benytte for beregning av premie er å legge til en prosentandel av en kvantil i premien gitt ved ekvivalens prinsippet (3.6). En kvantil q_ϵ av utbetalingsfunksjonen (3.1) ved tid $T \geq t \geq 0$ kan vi finne ved

$$P(\max(Y(T) - b, 0)v_0 \leq q_\epsilon) = \epsilon \quad (3.7)$$

hvor ϵ betegner hvilken kvantil vi ønsker å se på. Vi velger å ta for oss 95% persentilen, altså $q_{0.95}$. Det vil da være 95% sannsynlighet for at smittetrykket er lavere enn $q_{0.95}$ og 5% sannsynlighet for at smittetrykket er høyere og dermed mulighet for ekstremutbetaling. Et forsikringsselskap kan også velge andre kvantiler, men det vil være en fordel å benytte en av de høyeste kvantilene. Grunnen til dette er at sannsynligheten for en utbetaling over beløpene tilhørende en av disse kvantilene vil være liten. Ved bruk av en høyere kvantil som for eksempel 99% persentilen vil det være enda tryggere for forsikringsselskapet, men premien vil da også bli høyere for forsikringstakeren.

Vi finner nå et uttrykk for 95% kvantilen $q_{0.95}$. Det første vi gjør er å finne et uttrykk for sannsynlighetsfunksjonen i (3.7) ved å benytte loven om total sannsynlighet: For hendelser A og B_i , $i = 1, \dots, n$ er

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

Vi lar $P(A)$ være gitt ved sannsynlighetsfunksjonen i (3.7) og innfører to hendelser B_i , $i = 1, 2$ hvor B_1 betegner hendelsen der smittetrykket $Y(T)$ er høyere enn barrieren b ved tid T , mens B_2 betegner hendelsen der barrieren er lik eller høyere enn smittetrykket. Vi får da

$$\begin{aligned} P(\max(Y(T) - b, 0)v_0 \leq q_{0.95}) &= P(\max(Y(T) - b, 0)v_0 \leq q_{0.95} | Y(T) > b)P(Y(T) > b) \\ &\quad + P(\max(Y(T) - b, 0)v_0 \leq q_{0.95} | Y(T) \leq b)P(Y(T) \leq b) \\ &= P((Y(T) - b)v_0 \leq q_{0.95})P(Y(T) > b) \\ &\quad + P(0 \leq q_{0.95})P(Y(T) \leq b) \\ &= P((Y(T) - b)v_0 \leq q_{0.95})P(Y(T) > b) + 1 \cdot P(Y(T) \leq b) \end{aligned}$$

Kvantilen $q_{0.95}$ er alltid positiv siden utbetalingsfunksjonen ikke kan ha negative verdier. Dermed er $P(0 \leq q_{0.95})$ lik en.

Videre finner vi $P((Y(T) - b)v_0 \leq q_{0.95})$. Fra tidligere har vi smittetrykket $Y(T) = aI(T)$ og $I(T)$ fra (2.7). Vi benytter samme metode som i beviset i delkapittel 3.2 til å uttrykke de to

stokastiske integralene i $Y(T)$ ved hjelp av en standard normalfordelt variabel, se (3.5).

$$\begin{aligned}
P((Y(T) - b)v_0 \leq q_{0.95}) &= P\left(\left(a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{X}(t) + \int_t^T a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)}\mathbf{v}_1 dW_1(u) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_t^T a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)}\mathbf{v}_2 dW_2(u) - b\right)v_0 \leq q_{0.95} \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}\right) \\
&= P\left(\left(a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} + \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2} Z - b\right)v_0 \leq q_{0.95}\right) \\
&= P\left(Z \leq \frac{q_{0.95}/v_0 - a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} + b}{\sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{q_{0.95}/v_0 - a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} + b}{\sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}}\right)
\end{aligned}$$

Φ betegner den kumulative normalfordelingsfunksjonen for en standard normalfordeling. Sannsynlighetsfunksjonen i (3.7) er nå gitt ved

$$P(\max(Y(T) - b, 0)v_0 \leq q_{0.95}) = \Phi\left(\frac{q_{0.95}/v_0 - a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} + b}{\sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}}\right) P(Y(T) > b) + P(Y(T) \leq b)$$

Ved å benytte (3.7) kan vi nå finne kvantilen $q_{0.95}$,

$$\begin{aligned}
P(\max(Y(T) - b, 0)v_0 \leq q_{0.95}) &= 0.95 \\
\Phi\left(\frac{q_{0.95}/v_0 - a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} + b}{\sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}}\right) P(Y(T) > b) + P(Y(T) \leq b) &= 0.95 \\
\Phi\left(\frac{q_{0.95}/v_0 - a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} + b}{\sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}}\right) &= \frac{0.95 - P(Y(T) \leq b)}{P(Y(T) > b)}
\end{aligned}$$

Vi lar Φ^{-1} betegne den inverse kumulative normalfordelingsfunksjonen for en standard normalfordeling og får

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}\left(\frac{0.95 - P(Y(T) \leq b)}{P(Y(T) > b)}\right) &= \frac{q_{0.95}/v_0 - a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} + b}{\sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}} \\
q_{0.95} &= \left(\Phi^{-1}\left(\frac{0.95 - P(Y(T) \leq b)}{P(Y(T) > b)}\right) \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2} + a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} - b\right)v_0
\end{aligned}$$

hvor $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t)$ og Σ_1^2 og Σ_2^2 er gitt i (3.3).

Vi har nå funnet 95% persentilen, $q_{0.95}$, til utbetalingsfunksjonen. Et forsikringsselskap kan for eksempel velge å legge til 10% av denne persentilen til forventet utbetaling som kompensasjon for risikoen for en ekstremutbetaling.

Girsanov

Prising av premie ved bruk av et risikojustert sannsynlighetsmål er en annen metode et forsikringssselskap kan benytte. Vi kan la premien være gitt ved forventningen til utbetalingsfunksjonen (3.1) under et ekvivalent sannsynlighetsmål gitt ved Girsanovs teorem (def. A.3).

Før vi ser på denne forventningen definerer vi to ekvivalente sannsynlighetsmål ved hjelp av Girsanov transformasjon. Vi innfører to konstanter θ_1 og θ_2 . Disse betegner vanligvis markedspris for risiko dersom vi ser på et finansmarked. Her vil de tilsvarende betegne forsikringspris for risiko. De måler meravkastningen/tillegg i forsikringspremien som et forsikringssselskap krever for å ta på seg risikoen forbundet med forsikringskontrakten. For disse konstantene finnes det ved Girsanov ekvivalente sannsynlighetsmål $Q_{\theta_1} \sim P$ og $Q_{\theta_2} \sim P$ slik at for $W_1(t)$ og $W_2(t)$ under P er

$$\tilde{W}_1(t) = W_1(t) - \int_0^t \theta_1 ds$$

$$\tilde{W}_2(t) = W_2(t) - \int_0^t \theta_2 ds$$

brownske bevegelser under henholdsvis Q_{θ_1} og Q_{θ_2} . Dette er ekvivalent med:

$$\begin{aligned} d\tilde{W}_1(t) &= dW_1(t) - \theta_1 dt \\ d\tilde{W}_2(t) &= dW_2(t) - \theta_2 dt \end{aligned} \tag{3.8}$$

Vi kan se at θ_1 og θ_2 endrer driften på de brownske bevegelsene. Hva disse konstantene settes til kan være forskjellig fra et forsikringssselskap til et annet. Det avhenger av hvor stor kompensasjon hvert enkelt forsikringssselskap ønsker og θ_1 og θ_2 endres deretter. Siden θ_1 og θ_2 er konstanter holder Novikovs betingelse (se A.4):

$$\mathbb{E} \left[e^{\frac{1}{2} \int_0^t \theta_1^2 ds} \right] = \mathbb{E} \left[e^{\frac{1}{2} \theta_1^2 t} \right] < \infty$$

$$\mathbb{E} \left[e^{\frac{1}{2} \int_0^t \theta_2^2 ds} \right] = \mathbb{E} \left[e^{\frac{1}{2} \theta_2^2 t} \right] < \infty$$

Dermed er $\mathcal{E}(\theta_1 \bullet W_1)$ og $\mathcal{E}(\theta_2 \bullet W_1)$ to uniformt integrerbare martingaler med henholdsvis $\mathcal{E}_t(\theta_1 \bullet W_1) > 0$ og $\mathcal{E}_t(\theta_2 \bullet W_1) > 0$. Ved Girsanovs teorem vil da

$$\left. \frac{dQ_{\theta_1}}{dP} \right|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}_t(\theta_1 \bullet W_1) \quad \forall t \geq 0$$

$$\left. \frac{dQ_{\theta_2}}{dP} \right|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}_t(\theta_2 \bullet W_2) \quad \forall t \geq 0$$

definere to ekvivalente sannsynlighetsmål $Q_{\theta_1} \sim P$ og $Q_{\theta_2} \sim P$ og skifte av sannsynlighetsmålene over er dermed gyldige. Vi definerer et nytt sannsynlighetsmål Q_θ som

$$\begin{aligned} \left. \frac{dQ_\theta}{dP} \right|_{\mathcal{F}_t} &= \left. \frac{dQ_{\theta_1}}{dP} \right|_{\mathcal{F}_t} \cdot \left. \frac{dQ_{\theta_2}}{dP} \right|_{\mathcal{F}_t} \\ &= \mathcal{E}_t(\theta_1 \bullet W_1) \cdot \mathcal{E}_t(\theta_2 \bullet W_2) \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Ved hjelp av dette skifte av sannsynlighetsmål kan vi prise premien ved forventningen til utbetalingsfunksjonen under Q_θ .

Proposisjon 3.2. Forventning under Q_θ

Forventningen til utbetalingsfunksjonen (3.1) under et risikojustert sannsynlighetsmål Q_θ ved tid $T \geq t \geq 0$ for gitt $\mathbf{X}(t) = \mathbf{x} = [S(t) \ I(t) \ R(t)]^\top$ er

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{Q_\theta} [\max(Y(T) - b, 0)v_0 \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}] \\ &= \left(\left(a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} - b \right) \Phi(d) + a \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)}(\mathbf{v}_1\theta_1 + \mathbf{v}_2\theta_2)\Phi(d) du \right. \\ & \quad \left. + \frac{\sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2} \right) v_0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

hvor

$$\begin{aligned} d &= \frac{a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} + a \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)}(\mathbf{v}_1\theta_1 + \mathbf{v}_2\theta_2) du - b}{\sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}} \\ \Sigma_1^2 &= \int_t^T a^2 (\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)}\mathbf{v}_1)^2 du \\ \Sigma_2^2 &= \int_t^T a^2 (\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)}\mathbf{v}_2)^2 du \end{aligned}$$

og Φ er kumulativ normalfordelingsfunksjon for en standard normalfordeling.

Bevis. Det første vi må gjøre er å uttrykke $\mathbf{X}(T)$ fra proposisjon 2.1 under Q_θ . Fra tidligere har vi $d(e^{-At}\mathbf{X}(t))$ under sannsynlighetsmålet P (se (2.6)) og vi bruker Girsanov skifte (3.8) til å uttrykke denne under Q_θ :

$$\begin{aligned} d(e^{-At}\mathbf{X}(t)) &= e^{-At}\mathbf{v}_1 dW_1(t) + e^{-At}\mathbf{v}_2 dW_2(t) \\ &= e^{-At}\mathbf{v}_1 (d\tilde{W}_1(t) + \theta_1 dt) + e^{-At}\mathbf{v}_2 (d\tilde{W}_2(t) + \theta_2 dt) \\ &= e^{-At}(\mathbf{v}_1\theta_1 + \mathbf{v}_2\theta_2) dt + e^{-At}\mathbf{v}_1 d\tilde{W}_1(t) + e^{-At}\mathbf{v}_2 d\tilde{W}_2(t) \end{aligned}$$

Integrerer hver side over t til T og får

$$\begin{aligned} e^{-AT}\mathbf{X}(T) &= e^{-At}\mathbf{X}(t) + \int_t^T e^{-Au}(\mathbf{v}_1\theta_1 + \mathbf{v}_2\theta_2) du + \int_t^T e^{-Au}\mathbf{v}_1 d\tilde{W}_1(u) \\ & \quad + \int_t^T e^{-Au}\mathbf{v}_2 d\tilde{W}_2(u) \\ \mathbf{X}(T) &= e^{A(T-t)}\mathbf{X}(t) + \int_t^T e^{A(T-u)}(\mathbf{v}_1\theta_1 + \mathbf{v}_2\theta_2) du \\ & \quad + \int_t^T e^{A(T-u)}\mathbf{v}_1 d\tilde{W}_1(u) + \int_t^T e^{A(T-u)}\mathbf{v}_2 d\tilde{W}_2(u) \end{aligned}$$

Smittetrykket er dermed gitt ved

$$\begin{aligned} Y(T) &= aI(T) = a\mathbf{e}_2^\top \mathbf{X}(T) \\ &= a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{X}(t) + a \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)}(\mathbf{v}_1\theta_1 + \mathbf{v}_2\theta_2) du \end{aligned}$$

$$+ a \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1 d\tilde{W}_1(u) + a \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2 d\tilde{W}_2(u)$$

Vi ønsker også her som i tidligere bevis i delkapittel 3.2 å uttrykke de to stokastiske integralene ved en standard normalfordelt variabel når vi skal løse forventningen under Q_θ . Vi benytter følgende fordeling av de stokastiske integralene,

$$\begin{aligned} \int_t^T a \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1 d\tilde{W}_1(u) &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_1^2) \\ \int_t^T a \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2 d\tilde{W}_2(u) &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_2^2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

og

$$\begin{aligned} \Sigma_1^2 &= \int_t^T a^2 (\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1)^2 du \\ \Sigma_2^2 &= \int_t^T a^2 (\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2)^2 du \end{aligned}$$

Dermed er

$$\int_t^T a \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1 d\tilde{W}_1(u) + \int_t^T a \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2 d\tilde{W}_2(u) \stackrel{d}{=} \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2} Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Vi benytter dette i utregningen av forventningsverdien. Forventningen til utbetalingsfunksjonen (3.1) under Q_θ er nå gitt ved

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{Q_\theta} [\max(Y(T) - b, 0) v_0 \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}] \\ &= \mathbb{E}_{Q_\theta} \left[\max \left(a \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)} \mathbf{x} + a \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} (\mathbf{v}_1 \theta_1 + \mathbf{v}_2 \theta_2) du \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1 d\tilde{W}_1(u) + a \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2 d\tilde{W}_2(u) - b, 0 \right) \right] v_0 \\ &= \mathbb{E}_{Q_\theta} \left[\max \left(a \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)} \mathbf{x} + a \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} (\mathbf{v}_1 \theta_1 + \mathbf{v}_2 \theta_2) du + \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2} Z - b, 0 \right) \right] v_0 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \max \left(a \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)} \mathbf{x} + a \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} (\mathbf{v}_1 \theta_1 + \mathbf{v}_2 \theta_2) du \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2} z - b, 0 \right) e^{-z^2/2} dz \right) v_0 \end{aligned}$$

Maksfunksjonen i integranden ovenfor har en verdi større enn 0 dersom

$$a \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)} \mathbf{x} + a \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} (\mathbf{v}_1 \theta_1 + \mathbf{v}_2 \theta_2) du + \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2} Z - b > 0$$

Vi må derfor sette grensene slik at

$$Z > \frac{b - a \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)} \mathbf{x} - a \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} (\mathbf{v}_1 \theta_1 + \mathbf{v}_2 \theta_2) du}{\sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}}$$

Vi betegner nedre grense med $-d$ hvor

$$d = \frac{a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} + a \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)}(\mathbf{v}_1\theta_1 + \mathbf{v}_2\theta_2) du - b}{\sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}}$$

Dermed får vi at forventningen under Q_θ er gitt ved

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{Q_\theta} [\max(Y(T) - b, 0)v_0 \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^{\infty} \left(a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} - b \right) e^{-z^2/2} dz \right. \\ & \quad \left. + \int_{-d}^{\infty} a \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)}(\mathbf{v}_1\theta_1 + \mathbf{v}_2\theta_2) e^{-z^2/2} du dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^{\infty} \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2} z e^{-z^2/2} dz \right) v_0 \\ &= \left(\left(a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} - b \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-z^2/2} dz \right. \\ & \quad \left. + a \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)}(\mathbf{v}_1\theta_1 + \mathbf{v}_2\theta_2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-z^2/2} dz du + \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2} \right) v_0 \\ &= \left(\left(a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} - b \right) \Phi(d) + a \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)}(\mathbf{v}_1\theta_1 + \mathbf{v}_2\theta_2) \Phi(d) du \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2} \right) v_0 \\ &= \left(\left(a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)}\mathbf{x} - b \right) \Phi(d) + a \int_t^T \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)}(\mathbf{v}_1\theta_1 + \mathbf{v}_2\theta_2) \Phi(d) du + \frac{\sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2} \right) v_0 \end{aligned}$$

for gitt $\mathbf{X}(t) = \mathbf{x} = [S(t) \quad I(t) \quad R(t)]^\top$. ■

Det finnes altså ulike metoder for å prise premien i forsikringskontrakten. Det som er viktig for et forsikringselskap er å ta høyde for risikoen forbundet med kontrakten slik at en kompensasjon for dette blir inkludert i premien. Det vil alltid være en risiko for ekstremutbetalinger og forsikringselskapet må derfor kompenseres for noe av denne risikoen ved for eksempel å legge til en prosentandel av 95% kvantilen i premien eller risikojustere forventningen til utbetalingsfunksjonen. Vi har sett på både forventning og premie ved tid T . Premien kan neddiskonteres med faktor $e^{-r(T-t)}$ slik at vi får verdien ved tid t . Ved bruk av 10% av kvantilen som risikokompensasjon vil da premien ved tid t være gitt som

$$p(t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E} [\max(Y(T) - b, 0)v_0] \cdot 0.1q_{0.95}$$

Ved å risikojustere forventningen ved hjelp av Girsanov vil premien ved tid t være gitt ved

$$p(t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{Q_\theta} [\max(Y(T) - b, 0)v_0]$$

KAPITTEL 4

Reassuranse

Sannsynligheten for at en pandemi inntreffer er liten, men dersom den først inntreffer vil utbetalingene som et forsikringsselskap står overfor være veldig høye. Selv om pandemiforsikring ikke har vært utbredt verken i Norge eller i verden er det likevel noen som har hatt en slik type forsikring. I følge [Dickson, 2020, 13. november] har arrangøren av Wimbledon-turneringen i tennis (All England Club) hatt en pandemiforsikring siden SARS viruset i 2003. Wimbledon er en av få store idrettsarrangementer som har forsikret seg mot en pandemi. Grunnet avlysning av turneringen sommeren 2020 var det forventet at arrangøren skulle få en utbetaling på litt over 100 millioner pund. Det endte til slutt med en utbetaling på 174 millioner pund fra ulike forsikringsselskaper. Selv om dette er en veldig høy utbetaling har de hatt et innteksttap siden Wimbledon normalt sett tjener betydelig mer hvert år. Sammenlignet med andre arrangører verden over har de likevel klart seg mye bedre. Denne utbetalingen til Wimbledon har nok medført at flere har fått øynene opp for forsikringer som dekker tap når en pandemi inntreffer. En slik forsikring vil nok bli mer populær i fremtiden og vil for eksempel være veldig aktuelt for store idretts- og musikkarrangementer. Ved en så enorm utbetaling som i dette tilfellet vil håndtering av risiko være veldig viktig for et forsikringsselskap.

Det finnes flere måter å håndtere risiko på i forbindelse med en forsikringskontrakt. Et forsikringsselskap kan ta inn en premie og satse på at de klarer å dekke en eventuell utbetaling til forsikringstaker. I dette tilfellet må de sette av ganske store reserver for å sikre seg mot utbetaling når en pandemi inntreffer.

En annen mulighet til å håndtere risikoen ved slike utbetalinger er at et forsikringsselskap forsikrer seg selv ved å fjerne noe av risikoen. Noen krav fra forsikringstakere kan være så store at et forsikringsselskap alene ikke vil klare en slik utbetaling. På samme måte som en forsikringstaker ønsker å fjerne risiko ved å inngå en kontrakt med et forsikringsselskap kan et forsikringsselskap gjøre det samme med et annet forsikringsselskap, kalt reassuranseselskap. Forsikringsselskaper forsikrer dermed seg selv for å diversifisere risikoen forbundet med kontrakten de har inngått med forsikringstaker. Forsikringsselskapet må betale en premie til reassuranseselskapet som kompensasjon for at de tar på seg noe av risikoen. Premien som forsikringstaker betaler blir derfor fordelt mellom selskapene. Forsikringsselskapet som overfører risikoen og kjøper en reassuransekontrakt er kalt cedent, mens reassuranseselskapet er kalt reassurandør. Risikoen vil nå fordele seg slik [Bølviken, 2014, s. 6]:

$$\begin{array}{ccc} X & X^{ce} = X - X^{re} & X^{re} \\ \text{opprinnelig forsikringstaker} & \text{cedent} & \text{reassurandør} \end{array}$$

Her betegner X den opprinnelige risikoen som forsikringstaker overfører til et forsikringsselskap. Dette forsikringsselskapet overfører noe av risikoen, X^{re} , videre til et reassuranseselskap, slik at gjenværende risiko hos cedent er X^{ce} . Et forsikringsselskap kan enten benytte seg av et reassuranseselskap eller et annet forsikringsselskap når de skal inngå en reassuransekontrakt.

I stedet for å søke reassuranse hos et reassuranseselskap kan et forsikringsselskap ta i bruk markedet. De kan ved opsjoner på delindekser eller hele markedet sikre seg mot utbetalinger. Dette er en form for hedging, en risikojusteringsstrategi. Hedging vil kunne minimere eller fjerne risiko ved en annen risikofylt investering. Forsikringsselskapet kan altså foreta en investering for å håndtere risiko ved forsikringskontrakten. Vi kan se på strategien som en type forsikring som beskytter mot negative hendelser og hedging er derfor ofte også brukt for å beskytte en portefølje. Salgsopsjoner kan for eksempel benyttes for å beskytte en portefølje mot store prisfall. Det er dette vi skal benytte som reassuranse videre.

Vi skal her se på muligheter for å finne statiske hedger ved bruk av salgsopsjoner som kan minimere risikoen forbundet med utbetaling av forsikringskontrakten mot pandemier. Dersom et forsikringsselskap kjøper en salgsopsjon vil en slik type kontrakt gi selskapet rett til å selge et underliggende aktivum til en bestemt pris ved innløsning av opsjonen kalt strike eller innløsningspris. Opsjoner kan enten innløses i perioden fra kjøpet til utløpsdato på opsjonen (amerikanske opsjoner) eller kun på utløpsdato (europeiske opsjoner). Vi vil ta for oss europeiske salgsopsjoner og disse opsjonene vil kun ha verdi dersom innløsningsprisen er høyere enn markedsprisen på utløpsdato. Dette sikrer derfor mot et prisfall under innløsningsprisen ved utløpsdato og innløsningsprisen vil dermed være en minstepris. Salgsopsjonene vil være en slags forsikring for forsikringsselskapet, men i stedet for å benytte et annet forsikringsselskap/reassuranseselskap benyttes markedet. Vi vil se nærmere på utbetalingsfunksjonen for en salgsopsjon og prisen på denne i delkapittel 4.2.

Under en pandemi vil ofte aksjemarkedet påvirkes negativt og under nåværende covid-19 pandemi kan vi se at dette gjelder spesielt for flysektoren, restaurant- og hotellbransjen og generelt sektorer knyttet til ferie. Selv om andre sektorer har klart seg veldig bra, vil vi her ta utgangspunkt i de som påvirkes negativt av en pandemi. Et forsikringsselskap kan for eksempel kjøpe salgsopsjoner i en sektor de har utstedt pandemiforsikring i. Når smittetrykket i samfunnet går opp vil mest sannsynlig kursene falle i denne sektoren og salgsopsjonene vil dermed gi en utbetaling som forsikringsselskapet igjen kan bruke til å betale forsikringstaker. Det er denne formen for reassuranse vi skal se på videre. I delkapittel 4.3 skal vi forsøke å optimere en portefølje av salgsopsjoner som vil gi utbetaling dersom en pandemi inntreffer. Målet vil være at disse salgsopsjonene gir like stor utbetaling som det et forsikringsselskap må betale ut i forbindelse med forsikringskontrakten.

4.1 Indeksdynamikk

Når vi senere skal se på utbetaling og priser på salgsopsjoner trenger vi en indeksdynamikk for finansiell modellering. Vi betrakter et finansmarked som består av risikofylte aktiva (aksjer) og risikofrie aktiva (bankkonto) hvor vi antar at det er et friksjonsfritt marked uten transaksjonskostnader eller skatt. Vi antar også at det ikke blir utbetalt utbytte på underliggende aktiva til en opsjon gjennom en opsjons løpetid. En modell som ofte er brukt i finansiell modellering er den geometriske brownske bevegelsen (se [Munk, 2013, s. 45]). Vi innfører en indeksdynamikk basert på en geometrisk brownsk bevegelse som samvarierer med den stokastiske SIR-prosessen (2.3). Dynamikken til en geometrisk brownsk bevegelse $S = (S(t))_{t \geq 0}$ er gitt ved

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) d\hat{W}_3(t) \quad (4.1)$$

hvor μ (drift) og $\sigma > 0$ (volatilitet) er konstanter [Munk, 2013, s. 51]. Startverdien til prosessen er gitt og positiv og i resten av oppgaven vil $S(t)$ betegne prisen på et finansielt aktivum ved tid t . Driftkonstanten μ er forventet avkastning i hver periode eller tidsintervall $[t, t + dt]$ og volatiliteten σ er standardavviket til avkastningen i hvert av disse tidsintervallene. Siden μ og σ kun avhenger av den nåværende verdien av prosessen og ikke av tidligere verdier så er en geometrisk brownsk bevegelse også en Markov prosess [Munk, 2013, s. 45].

Vi lar den drivende brownske bevegelsen \hat{W}_3 være korrelert med de brownske bevegelsene i SIR-dynamikken (2.3) slik at

$$\begin{aligned} d\hat{W}_3(t) &= \rho_{13} dW_1(t) + \sqrt{1 - \rho_{13}^2} d\hat{W}(t) \\ d\hat{W}(t) &= \rho dW_2(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_3(t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

hvor ρ_{13} er korrelasjonen mellom $W_1(t)$ og $\hat{W}_3(t)$ og ρ er korrelasjonen mellom $W_2(t)$ og $\hat{W}(t)$.

Black & Scholes brukte denne dynamikken for aksjekurser ved utledning av prisformel på opsjoner. Dette kommer vi tilbake til i delkapittel 4.2. Vi kan nå løse indeksdynamikk (4.1) under sannsynlighetsmål P slik at vi får S på en eksplisitt form.

Lemma 4.1. *Den stokastiske prosessen S under sannsynlighetsmål P har eksplisitt form*

$$S(T) = S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(\hat{W}_3(T) - \hat{W}_3(t))} \quad (4.3)$$

for $T \geq t \geq 0$, hvor $S(t) = S_t$ er gitt.

Bevis. Vi benytter Ito (A.5) på $d(\ln S(t))$ med $f(t, x) = \ln x$:

$$\begin{aligned} d(\ln S(t)) &= \frac{1}{S(t)} dS(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{S(t)^2} (dS(t))^2 \\ &= \frac{1}{S(t)} (\mu S(t) dt + \sigma S(t) d\hat{W}_3(t)) - \frac{1}{2S(t)^2} \sigma^2 S(t)^2 dt \\ &= \mu dt + \sigma d\hat{W}_3(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\ &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma d\hat{W}_3(t) \end{aligned}$$

Integrerer så begge sider over t til T og får $S(T)$ under sannsynlighetsmål P på eksplisitt form,

$$\begin{aligned} \ln S(T) &= \ln S(t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t) + \sigma(\hat{W}_3(T) - \hat{W}_3(t)) \\ S(T) &= S(t) e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(\hat{W}_3(T) - \hat{W}_3(t))} \end{aligned}$$

■

Senere ved prising av opsjoner i delkapittel 4.2 trenger vi den stokastiske prosessen S under et risikonøytralt sannsynlighetsmål. Vi benytter derfor Girsanovs teorem (teorem A.3) til å foreta et skifte av sannsynlighetsmål fra P til et risikonøytralt sannsynlighetsmål (også kalt ekvivalent martingalmål) Q .

Definisjon 4.2. *Et sannsynlighetsmål $Q \sim P$ er et ekvivalent martingalmål dersom de neddiskonterte pris-prosessene $S(t)$ er Q -martingaler for alle t .*

[Filipović, 2009, Definisjon 4.1, s. 68]

Vi må benytte denne definisjonen til å velge en γ (i teorem A.3) slik at Q er et ekvivalent martingalmål. Dette kan gjøres ved å benytte følgende egenskap:

$$d(e^{-rt}S(t)) = \sigma e^{-rt}S(t) d\tilde{W}_3(t) \quad (4.4)$$

hvor risikofri avkastning r er konstant og $\tilde{W}_3(t)$ er en ny brownsk bevegelse under Q . Dersom ligning (4.4) er oppfylt er den neddiskonterte prisen, $e^{-rt}S(t)$, en Q -martingal siden dynamikken er uten drift. Dersom vi setter $\gamma = \frac{\mu-r}{\sigma}$ vil vi senere se at ligning (4.4) er tilfredsstilt og dermed vil

$$\left. \frac{dQ}{dP} \right|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}_t(-\gamma \bullet \hat{W}_3) \quad \forall t \geq 0 \quad (4.5)$$

definere et ekvivalent risikonøytralt sannsynlighetsmål $Q \sim P$. Dette gjelder i følge Girsanovs teorem siden $\mathcal{E}(\gamma \bullet \hat{W}_3)$ ved Novikovs betingelse (teorem A.4) er en uniform integrerbar martingal med $\mathcal{E}_t(\gamma \bullet \hat{W}_3) > 0$. Ved Novikov får vi at

$$E \left[e^{\frac{1}{2} \int_0^t \|\gamma(s)\|^2 ds} \right] = E \left[e^{\frac{1}{2} \int_0^t \left| \frac{\mu-r}{\sigma} \right|^2 ds} \right] < \infty$$

siden γ er konstant. Prosessen

$$\begin{aligned} d\tilde{W}_3(t) &= d\hat{W}_3(t) - (-\gamma) dt \\ &= d\hat{W}_3(t) + \frac{\mu-r}{\sigma} dt \end{aligned}$$

er dermed en Q -brownsk bevegelse ved Girsanovs teorem. For å uttrykke dynamikken til S i (4.1) under Q kan vi dermed benytte følgende dynamikk,

$$d\hat{W}_3(t) = d\tilde{W}_3(t) - \frac{\mu-r}{\sigma} dt \quad (4.6)$$

Ved å benytte dynamikk (4.6) kan vi se at ligning (4.4) er tilfredsstilt og $e^{-rt}S(t)$ er dermed en martingal under Q . Dette kan vi se ved å benytte Ito (se A.5) med $f(t, x) = e^{-rt}x$ for å løse $d(e^{-rt}S(t))$ under Q .

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}S(t)) &= df(t, S(t)) \\ &= -re^{-rt}S(t) dt + e^{-rt} dS(t) \\ &= -re^{-rt}S(t) dt + e^{-rt}(\mu S(t) dt + \sigma S(t) d\hat{W}_3(t)) \\ &= e^{-rt}(\mu - r)S(t) dt + \sigma e^{-rt}S(t) d\hat{W}_3(t) \\ &= e^{-rt}(\mu - r)S(t) dt + \sigma e^{-rt}S(t) (d\tilde{W}_3(t) - \frac{\mu-r}{\sigma} dt) \\ &= \sigma e^{-rt}S(t) d\tilde{W}_3(t) \end{aligned}$$

Vi har dermed konstruert en ny brownsk bevegelse under Q slik at neddiskontert pris er en martingal under et ekvivalent sannsynlighetsmål Q . Dette medfører at Q er risikonøytral. γ betegner markedspris for risiko (se [Filipović, 2009, s. 69]). Dette er et mål på risikojustert meravkastning, den meravkastningen man får for å påta seg ekstra risiko ved en investering. Meravkastningen er gitt ved differansen mellom avkastningen på en risikofylt investering, μ og risikofri avkastning, r . Markedsprisen for risiko beskriver dermed forholdet mellom meravkastningen og standardavviket (volatiliteten) til avkastningen μ , altså meravkastning per enhet risiko.

Vi kan nå uttrykke S på eksplisitt form under Q .

Lemma 4.3. Den stokastiske prosessen S under et risikonøytralt sannsynlighetsmål Q gitt ved (4.5) har eksplisitt form

$$S(T) = S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(\tilde{W}_3(T) - \tilde{W}_3(t))} \quad (4.7)$$

for $T \geq t \geq 0$, hvor $S(t) = S_t$ er gitt.

Bevis. Vi finner først dynamikken til $S(t)$ under Q ved å erstatte $d\hat{W}_3$ i indekstdynamikken (4.1) med uttrykket i (4.6),

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)(d\tilde{W}_3(t) - \frac{\mu - r}{\sigma} dt) \\ &= rS(t) dt + \sigma S(t) d\tilde{W}_3(t) \end{aligned}$$

Vi benytter så Ito (teorem A.5) på $d(\ln S(t))$ med $f(t, x) = \ln x$,

$$\begin{aligned} d(\ln S(t)) &= \frac{1}{S(t)} dS(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{S(t)^2} (dS(t))^2 \\ &= \frac{1}{S(t)} (rS(t) dt + \sigma S(t) d\tilde{W}_3(t)) - \frac{1}{2S(t)^2} \sigma^2 S(t)^2 dt \\ &= r dt + \sigma d\tilde{W}_3(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\ &= (r - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma d\tilde{W}_3(t) \end{aligned}$$

Integrerer begge sider over t til T slik at vi får $S(T)$ under sannsynlighetsmål Q på eksplisitt form,

$$\begin{aligned} \ln S(T) &= \ln S(t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t) + \sigma(\tilde{W}_3(T) - \tilde{W}_3(t)) \\ S(T) &= S(t) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(\tilde{W}_3(T) - \tilde{W}_3(t))} \end{aligned}$$

■

Vi kan nå benytte dette til å finne pris på salgsopsjoner.

4.2 Salgsopsjoner

Videre vil vi benytte et marked med indekstdynamikken gitt i delkapittel 4.1. Vi vil nå finne prisen på en europeisk salgsopsjon som vi senere kan benytte til å prisse en optimal portefølje av salgsopsjoner. Denne porteføljen kan et forsikringselskap benytte som reassuranse og premien i forsikringskontrakten kan benyttes til kjøp av salgsopsjonene. Dette kommer vi tilbake til i neste delkapittel. Utbetalingsfunksjonen for en europeisk salgsopsjon med pris S på underliggende aktivum, strike K og utløpstid T er gitt ved

$$\max(K - S(T), 0) \quad (4.8)$$

(se [Munk, 2013, s. 511])

En salgsopsjon har altså kun verdi dersom innløsningsprisen (strike) er høyere enn prisen på underliggende aktivum ved utløpstid T . Hvis innløsningsprisen derimot er lavere vil ikke opsjonen

bli innløst og den vil utløpe uten verdi. Det vil derfor kun være et begrenset tap ved kjøp av en salgsopsjon hvor tapet ikke vil være større enn betalt premie (pris) på opsjonen. Vi benytter utbetalingsfunksjon (4.8) til å finne prisen. Ved bruk av arbitrasjeteorien er prisen på en europeisk salgsopsjon definert som nåverdien (verdi når kontrakten blir inngått) av utbetalingsfunksjonen under et risikonøytralt sannsynlighetsmål. Dermed er prisen ved tid t gitt ved

$$P(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_Q[\max(K - S(T), 0) | S(t) = S_t] \quad (4.9)$$

(se [Filipović, 2009, s. 74])

Forventningen er gitt under et risikonøytralt sannsynlighetsmål Q (se (4.5) i delkapittel 4.1) og $e^{-r(T-t)}$ er diskonteringsfaktoren. Dette er under forutsetning at forventningen er veldefinert. S er alltid positiv og $\max(K - S(T), 0)$ er begrenset siden

$$0 \leq \max(K - S(T), 0) \leq K$$

Derfor er $\max(K - S(T), 0)$ integrerbar og forventningen er dermed veldefinert. Ved å benytte lemma 4.3 kan vi finne en prisingsformel for en europeisk salgsopsjon.

Proposisjon 4.4. *La prisen S på et underliggende aktivum ved tid t være gitt, $S(t) = S_t$. Prisen P på en europeisk salgsopsjon ved tid $t \leq T$ med risikofri avkastning r , utløpstid T og strike K er*

$$P(t, S_t) = K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1) \quad (4.10)$$

hvor

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

og Φ er kumulativ normalfordelingsfunksjon for en standard normalfordeling.

Bevis. Vi finner først forventningen under sannsynlighetsmål Q fra (4.9) ved å benytte $S(T)$ under Q på eksplisitt form fra lemma 4.3. Siden \tilde{W}_3 er en brownsk bevegelse er

$$\tilde{W}_3(T) - \tilde{W}_3(t) \sim \mathcal{N}(0, T-t)$$

og

$$\tilde{W}_3(T) - \tilde{W}_3(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{T-t} Z$$

hvor Z er en standard normalfordelt variabel. Vi benytter dette i utregningen nedenfor til å uttrykke det brownske inkrementet ved en standard normalfordelt variabel.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q[\max(K - S(T), 0) | S(t) = S_t] &= \mathbb{E}_Q\left[\max(K - S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(\tilde{W}_3(T) - \tilde{W}_3(t))}, 0)\right]_{S_t=S(t)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \max(K - S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}z}, 0) e^{-z^2/2} dz \end{aligned}$$

Maksfunksjonen i integranden ovenfor har en verdi større enn 0 dersom

$$K - S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Z} > 0$$

Grensene må derfor settes slik at

$$Z < \frac{\ln \frac{K}{S_t} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Vi betegner øvre grense med $-d$ hvor

$$d = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Videre får vi,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[\max(K - S(T), 0) | S(t) = S_t] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d} (K - S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}z}) e^{-z^2/2} dz \\ &= K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d} e^{-z^2/2} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \int_{-\infty}^{-d} e^{-\frac{1}{2}(z - \sigma\sqrt{T-t})^2 + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} dz \\ &= K\Phi(-d) - S_t e^{r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d - \sigma\sqrt{T-t}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\ &= K\Phi(-d) - S_t e^{r(T-t)} \Phi(-d - \sigma\sqrt{T-t}) \\ &= K\Phi(-d_2) - S_t e^{r(T-t)} \Phi(-d_1) \end{aligned}$$

hvor $S_t = S(t)$ og

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Prisen på en salgsopsjon ved tid t er dermed gitt ved

$$\begin{aligned} P(t, S_t) &= e^{-r(T-t)} (K\Phi(-d_2) - S_t e^{r(T-t)} \Phi(-d_1)) \\ &= K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1) \end{aligned}$$

■

Formelen i proposisjon 4.4 er Black & Scholes prisingsformel for en salgsopsjon. Black & Scholes modellen er den mest brukte modellen for å fastsette rettferdig pris på opsjoner. Som vi kan se av formel (4.10) blir prisen på en salgsopsjon i Black & Scholes modellen ved tid t beregnet ved å benytte pris på underliggende aktivum (ofte aksjer) ved tid t , innløsningsprisen på opsjonen, tid til utløp, risikofri rente og volatilitet. Som sagt innledningsvis benytter vi oss av det samme markedet med indekssynamikken introdusert i delkapittel 4.1. Black & Scholes modellen gjør noen antagelser om markedet slik vi også har gjort ved introduksjon av indekssynamikken (se [Munk, 2013, s. 516]). Antagelsene vi gjør ved utledning av prisformel (4.10) er følgende:

- utbytte vil ikke bli betalt ut i løpet av en salgsopsjons løpetid
- det er ingen transaksjonskostnader forbundet med kjøp av opsjonene

- vi benytter kjent risikofri rente r og volatilitet σ hvor begge er konstanter
- effektivt marked (markedsprisene reflekterer all tilgjengelig informasjon)

Opsjonene kan også kun innløses på utløpsdato ved bruk av denne prisingsformelen. Dette er oppfylt siden vi ønsker å benytte oss av europeiske salgsoptioner som reassurans for et forsikringsselskap. Det er også en forutsetning om at avkastning på underliggende aktivum er log-normalfordelt, noe som er tilfredsstillende ved bruk av indeksdynamikken med en geometrisk brownsk bevegelse (se (4.1)).

Videre vil vi optimere en portefølje av europeiske salgsoptioner og benytte proposisjon 4.4 til å prise den optimale porteføljen.

4.3 Optimering

Når et forsikringsselskap inngår en pandemiforsikringskontrakt med en forsikringstaker, for eksempel et flyselskap, kan de kjøpe en portefølje av europeiske salgsoptioner i flysektoren. Flyselskaper vil generelt tape mye økonomisk under en pandemi. Etterspørselen etter flyreiser vil gå ned siden reisevanene til folk endrer seg. Årsaken til dette kan være at myndigheter innfører reiserestriksjoner, men selv om dette ikke skulle være tilfellet vil folk kunne endre reisevanene sine grunnet frykt for viruset. Flytrafikken vil dermed kunne bli hardt rammet både innenlands og utenlands. Dette vil også ofte ha påvirkning i samme sektor i markedet. Aksjekurser påvirkes av mange faktorer, men en veldig sterk faktor er forventninger. Kursen på flyaksjene vil kunne falle mye grunnet forventninger om at flyselskapene vil klare seg dårlig når en pandemi inntreffer. Dette fører til lavere etterspørsel etter disse aksjene og dermed lavere kurser. Når kursene faller under innløsningsprisen til en salgsoption vil optionen gi en utbetaling. Denne utbetalingen kan et forsikringsselskap benytte til å betale forsikringstaker. En slik portefølje av salgsoptioner vil dermed fungere som reassurans. Dette vil minimere risikoen ved forsikringskontrakten slik at et forsikringsselskap vil kunne klare seg økonomisk selv om en pandemi inntreffer og det skulle oppstå ekstremutbetalinger. Deler av premien i en forsikringskontrakt kan benyttes til å dekke kostnaden ved kjøp av disse salgsoptionene. Vi kommer tilbake til prisen på disse salgsoptionene i delkapittel 4.5.

Vi ønsker å optimere en portefølje av europeiske salgsoptioner slik at utbetalingen fra optionene samsvarer med utbetalingen av forsikringskontrakten. En optimal portefølje kan oppnås ved å minimere differansen mellom utbetalingsfunksjonen for forsikringskontrakten og utbetalingsfunksjonen for salgsoptionene. Vi lar porteføljen bestå av n ulike europeiske salgsoptioner hvor option nummer i har en strike K_i og utløpstid T_i . Vi tenker oss at de ulike salgsoptionene vi velger er gitt i markedet slik at strike K_i og utløpstid T_i for hver option i er gitt. Ved videre optimering betegner vi utbetalingsfunksjonen for forsikringskontrakten (3.1) med F_T og utbetalingsfunksjonen for salgsoptionene (4.8) med P_{T_i, K_i} , $i = 1, \dots, n$.

Utbetalingen fra porteføljen av salgsoptioner vil dermed være

$$\sum_{i=1}^n x_i P_{T_i, K_i} = \sum_{i=1}^n x_i \max(K_i - S(T_i), 0) \quad (4.11)$$

hvor x_i , $i = 1, \dots, n$ betegner antall av option nummer i .

Optimeringsproblemet kan løses ved å minimere det kvadrerte avviket mellom utbetalingsfunksjonen for forsikringskontrakten og utbetalingsfunksjonen for salgsoptionene, altså ved å

minimere

$$L(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{E} \left[\left(F_T - \sum_{i=1}^n x_i P_{T_i, K_i} \right)^2 \right] \quad (4.12)$$

med hensyn på x_i . L vil alltid være positiv og fra tidligere vet vi at begge funksjonene F_T og P_{T_i, K_i} er integrerbare (se delkapittel 3.2 og 4.2). Dermed er også L veldefinert slik at vi kan løse problemet. Løsningen gir oss optimalt antall av hver enkelt av de n ulike salgsoptionene og dermed optimal investeringsstrategi. Prisen på underliggende aktivum til salgsoptionene ved tid t er gitt $S(t) = S_t$ og smittesituasjonen ved tid t er gitt $\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}$.

Proposisjon 4.5. *Løsningen av problem (4.12) gir en optimal portefølje av europeiske salgsoptioner. Optimalt antall $\mathbf{x}^* = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^\top$ av av de n ulike salgsoptionene er gitt ved*

$$\mathbf{x}^* = A^{-1} \mathbf{b} \quad (4.13)$$

hvor

$$A = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[(P_{T_1, K_1})^2] & \mathbb{E}[P_{T_1, K_1} P_{T_2, K_2}] & \dots & \mathbb{E}[P_{T_1, K_1} P_{T_n, K_n}] \\ \mathbb{E}[P_{T_2, K_2} P_{T_1, K_1}] & \mathbb{E}[(P_{T_2, K_2})^2] & \dots & \mathbb{E}[P_{T_2, K_2} P_{T_n, K_n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}[P_{T_n, K_n} P_{T_1, K_1}] & \mathbb{E}[P_{T_n, K_n} P_{T_2, K_2}] & \dots & \mathbb{E}[(P_{T_n, K_n})^2] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[F_T P_{T_1, K_1}] \\ \mathbb{E}[F_T P_{T_2, K_2}] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[F_T P_{T_n, K_n}] \end{bmatrix}$$

Bevis. Vi ønsker å minimere $L(x_1, \dots, x_n)$ fra (4.12). Til dette vil vi benytte følgende uttrykk for L ,

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n) &= \mathbb{E} \left[\left(F_T - \sum_{i=1}^n x_i P_{T_i, K_i} \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[F_T^2 - 2F_T \sum_{i=1}^n x_i P_{T_i, K_i} + \left(\sum_{i=1}^n x_i P_{T_i, K_i} \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[F_T^2 - 2F_T \sum_{i=1}^n x_i P_{T_i, K_i} + \sum_{i=1}^n x_i^2 P_{T_i, K_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} x_i P_{T_i, K_i} x_j P_{T_j, K_j} \right] \\ &= \mathbb{E}[F_T^2] - 2 \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{E}[F_T P_{T_i, K_i}] + \sum_{i=1}^n x_i^2 \mathbb{E}[P_{T_i, K_i}^2] + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j \mathbb{E}[P_{T_i, K_i} P_{T_j, K_j}] \end{aligned}$$

For å minimere L finner vi stasjonære punkter ved å partiell derivere uttrykket ovenfor med hensyn på x_i og sette de lik null:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= -2\mathbb{E}[F_T P_{T_i, K_i}] + 2x_i \mathbb{E}[P_{T_i, K_i}^2] + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j \mathbb{E}[P_{T_i, K_i} P_{T_j, K_j}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vi får nå følgende ekvivalente ligning,

$$x_i \mathbb{E}[P_{T_i, K_i}^2] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j \mathbb{E}[P_{T_i, K_i} P_{T_j, K_j}] = \mathbb{E}[F_T P_{T_i, K_i}] \quad (4.14)$$

Ved å partiell derivere med hensyn på x_i for alle $i = 1, \dots, n$ vil vi få n ligninger på formen (4.14) som danner et lineært likningssystem gitt ved

$$\mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}$$

hvor

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[F_T P_{T_1, K_1}] \\ \mathbb{E}[F_T P_{T_2, K_2}] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[F_T P_{T_n, K_n}] \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[(P_{T_1, K_1})^2] & \mathbb{E}[P_{T_1, K_1} P_{T_2, K_2}] & \cdots & \mathbb{E}[P_{T_1, K_1} P_{T_n, K_n}] \\ \mathbb{E}[P_{T_2, K_2} P_{T_1, K_1}] & \mathbb{E}[(P_{T_2, K_2})^2] & \cdots & \mathbb{E}[P_{T_2, K_2} P_{T_n, K_n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}[P_{T_n, K_n} P_{T_1, K_1}] & \mathbb{E}[P_{T_n, K_n} P_{T_2, K_2}] & \cdots & \mathbb{E}[(P_{T_n, K_n})^2] \end{bmatrix}$$

Løsningen av det lineære ligningssystemet ovenfor, altså optimal \mathbf{x}^* er gitt ved

$$\mathbf{x}^* = A^{-1} \mathbf{b}$$

■

En mulighet for reassuranse vil dermed være å investere i n ulike salgsopsjoner og la antallet av hver opsjon være bestemt av \mathbf{x}^* . I delkapittel 4.4 vil vi ta for oss utregningene til forventningsverdiene i matrise A og vektor \mathbf{b} fra proposisjon 4.5.

Vi kan som et eksempel finne optimalt investeringsantall av to ulike salgsopsjoner analytisk. Vi ser på tilfellet når $n = 2$,

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[F_T P_{T_1, K_1}] \\ \mathbb{E}[F_T P_{T_2, K_2}] \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathbb{E}[P_{T_1, K_1}^2] \mathbb{E}[P_{T_2, K_2}^2] - \mathbb{E}[P_{T_1, K_1} P_{T_2, K_2}]^2} \begin{bmatrix} \mathbb{E}[P_{T_2, K_2}^2] & \mathbb{E}[P_{T_1, K_1} P_{T_2, K_2}] \\ \mathbb{E}[P_{T_2, K_2} P_{T_1, K_1}] & \mathbb{E}[P_{T_1, K_1}^2] \end{bmatrix}$$

Vi benytter videre proposisjon 4.5 og får følgende løsning av problem (4.12),

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= A^{-1} \mathbf{b} \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}[P_{T_1, K_1}^2] \mathbb{E}[P_{T_2, K_2}^2] - \mathbb{E}[P_{T_1, K_1} P_{T_2, K_2}]^2} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{E}[P_{T_2, K_2}^2] \mathbb{E}[F_T P_{T_1, K_1}] - \mathbb{E}[P_{T_1, K_1} P_{T_2, K_2}] \mathbb{E}[F_T P_{T_2, K_2}] \\ \mathbb{E}[P_{T_1, K_1}^2] \mathbb{E}[F_T P_{T_2, K_2}] - \mathbb{E}[P_{T_1, K_1} P_{T_2, K_2}] \mathbb{E}[F_T P_{T_1, K_1}] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Det vil også være mulig å finne den optimale investeringsstrategien for tre ulike salgsopsjoner analytisk, men dersom et forsikringselskap derimot velger å investere i enda flere ulike opsjoner vil det være vanskelig å løse den inverse til matrise A analytisk. I slike tilfeller kan numeriske metoder benyttes for å finne den optimale investeringsstrategien.

4.4 Utregning av ulike forventningsverdier

Her skal vi se nærmere på forventningsverdiene i den optimale løsningen av antall salgsoptjoner fra proposisjon 4.5.

Elementene utenfor diagonalen i matrise A

Vi ser først på elementene utenfor diagonalen i A matrisen. I utregningen benytter vi lemma 4.1 for $S(T_i)$ og $S(T_j)$. For $i \neq j$, $i = 1, \dots, n$ og $j = 1, \dots, n$ får vi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[P_{T_i, K_i} P_{T_j, K_j}] &= \mathbb{E}[\max(K_i - S(T_i), 0) \cdot \max(K_j - S(T_j), 0)] \\ &= \mathbb{E} \left[\max \left(K_i - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) + \sigma(\hat{W}_3(T_i) - \hat{W}_3(t))}, 0 \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \max \left(K_j - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_j - t) + \sigma(\hat{W}_3(T_j) - \hat{W}_3(t))}, 0 \right) \right]_{S_t = S(t)} \end{aligned}$$

Vi ser på tilfellet hvor $T_i < T_j$ og deler opp det browniske inkrementet $\hat{W}_3(T_j) - \hat{W}_3(t)$ i to uavhengige inkremitter,

$$\hat{W}_3(T_j) - \hat{W}_3(t) = \hat{W}_3(T_j) - \hat{W}_3(T_i) + \hat{W}_3(T_i) - \hat{W}_3(t)$$

Vi betegner de to uavhengige inkrementene med X og Y slik at

$$X = \hat{W}_3(T_i) - \hat{W}_3(t) \quad \text{og} \quad Y = \hat{W}_3(T_j) - \hat{W}_3(T_i)$$

Fra egenskap (ii) til en brownisk bevegelse (def. A.1) har vi at

$$Y \sim N(0, T_j - T_i), \quad Y \stackrel{d}{=} \sqrt{T_j - T_i} Z, \quad Z \sim N(0, 1) \quad (4.15)$$

og

$$X \sim N(0, T_i - t), \quad X \stackrel{d}{=} \sqrt{T_i - t} Z, \quad Z \sim N(0, 1) \quad (4.16)$$

Vi kan nå benytte tårnegenskapen ($\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]]$) i utledningen av forventningsverdien og betinge på variabel X som nå er uavhengig av Y .

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[P_{T_i, K_i} P_{T_j, K_j}] \\ &= \mathbb{E} \left[\max \left(K_i - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) + \sigma X}, 0 \right) \cdot \max \left(K_j - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_j - t) + \sigma(Y + X)}, 0 \right) \right]_{S_t = S(t)} \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\max \left(K_i - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) + \sigma X}, 0 \right) \cdot \max \left(K_j - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_j - t) + \sigma(Y + X)}, 0 \right) \mid X \right]_{S_t = S(t)} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\max \left(K_i - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) + \sigma X}, 0 \right) \mathbb{E} \left[\max \left(K_j - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_j - t) + \sigma(Y + x)}, 0 \right) \right]_{S_t = S(t), x = X} \right] \end{aligned}$$

Videre tar vi for oss utledning av den betingede forventningsverdien og benytter (4.15) for å uttrykke Y ved en standard normalfordelt variabel.

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\max \left(K_j - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_j - t) + \sigma(Y + x)}, 0 \right) \right]_{x = X, S_t = S(t)} \\ &= \mathbb{E} \left[\max \left(K_j - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_j - t) + \sigma(\sqrt{T_j - T_i} Z + x)}, 0 \right) \right]_{x = X, S_t = S(t)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \max \left(K_j - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_j - t) + \sigma(\sqrt{T_j - T_i} z + x)}, 0 \right) e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \end{aligned}$$

Maksfunksjonen i integranden har en verdi større enn 0 dersom

$$K_j - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_j - t) + \sigma(\sqrt{T_j - T_i}Z + x)} > 0$$

Grensene må derfor settes slik at

$$Z < \frac{\ln \frac{K_j}{S_t} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_j - t) - \sigma x}{\sigma \sqrt{T_j - T_i}} = -d$$

Vi betegner øvre grense med $-d$ hvor

$$d = \frac{\ln \frac{S_t}{K_j} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_j - t) + \sigma x}{\sigma \sqrt{T_j - T_i}} \quad (4.17)$$

Dermed er den betingede forventningsverdien gitt ved

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\max \left(K_j - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_j - t) + \sigma(Y + x)}, 0 \right) \right]_{x=X, S_t=S(t)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d} \left(K_j - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_j - t) + \sigma(\sqrt{T_j - T_i}z + x)} \right) e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &= K_j \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_j - t) + \sigma x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d} e^{\sigma\sqrt{T_j - T_i}z - \frac{1}{2}z^2} dz \\ &= K_j \Phi(-d) - S_t e^{\mu(T_j - t) - \frac{1}{2}\sigma^2(2T_j - T_i - t) + \sigma x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d} e^{-\frac{1}{2}(z - \sigma\sqrt{T_j - T_i})^2} dz \\ &= K_j \Phi(-d) - S_t e^{\mu(T_j - t) - \frac{1}{2}\sigma^2(2T_j - T_i - t) + \sigma x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d - \sigma\sqrt{T_j - T_i}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\ &= K_j \Phi(-d) - S_t e^{\mu(T_j - t) - \frac{1}{2}\sigma^2(2T_j - T_i - t) + \sigma x} \cdot \Phi(-d - \sqrt{T_j - T_i}) \\ &= K_j \Phi(-d_1) - S_t e^{\mu(T_j - t) - \frac{1}{2}\sigma^2(2T_j - T_i - t) + \sigma x} \cdot \Phi(-d_2) \end{aligned}$$

hvor $S_t = S(t)$, $x = X$ og

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln \frac{S_t}{K_j} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_j - t) + \sigma x}{\sigma \sqrt{T_j - T_i}} \\ d_2 &= d_1 + \sigma \sqrt{T_j - T_i} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Vi benytter dette videre og utleder forventningen til produktet mellom to ulike salgsopsjoner. X må uttrykkes ved en standard normalfordelt variabel og til dette benytter vi (4.16).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[P_{T_i, K_i} P_{T_j, K_j}] &= \mathbb{E} \left[\max \left(K_i - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) + \sigma X}, 0 \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(K_j \Phi(-d_1) - S_t e^{\mu(T_j - t) - \frac{1}{2}\sigma^2(2T_j - T_i - t) + \sigma X} \cdot \Phi(-d_2) \right) \right]_{S_t=S(t)} \\ &= \mathbb{E} \left[\max \left(K_i - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) + \sigma\sqrt{T_i - t}Z}, 0 \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(K_j \Phi(-d_1) - S_t e^{\mu(T_j - t) - \frac{1}{2}\sigma^2(2T_j - T_i - t) + \sigma\sqrt{T_i - t}Z} \cdot \Phi(-d_2) \right) \right]_{S_t=S(t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \max\left(K_i - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) + \sigma\sqrt{T_i - t}z}, 0\right) \\
 &\quad \cdot \left(K_j \Phi(-d_1) - S_t e^{\mu(T_j - t) - \frac{1}{2}\sigma^2(2T_j - T_i - t) + \sigma\sqrt{T_i - t}z} \cdot \Phi(-d_2)\right) e^{-z^2/2} dz
 \end{aligned}$$

Vi betegner øvre grense med

$$d_3 = \frac{\ln \frac{K_i}{S_t} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t)}{\sigma\sqrt{T_i - t}} \quad (4.19)$$

Vi har benyttet samme metode som i utledning av d i (4.17).

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[P_{T_i, K_i} P_{T_j, K_j}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_3} \left(K_i - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) + \sigma\sqrt{T_i - t}z}\right) \\
 &\quad \cdot \left(K_j \Phi(-d_1) - S_t e^{\mu(T_j - t) - \frac{1}{2}\sigma^2(2T_j - T_i - t) + \sigma\sqrt{T_i - t}z} \Phi(-d_2)\right) e^{-z^2/2} dz \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K_i K_j \int_{-\infty}^{d_3} \Phi(-d_1) e^{-z^2/2} dz \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K_i S_t e^{\mu(T_j - t) - \frac{1}{2}\sigma^2(2T_j - T_i - t)} \int_{-\infty}^{d_3} e^{\sigma\sqrt{T_i - t}z} \Phi(-d_2) e^{-z^2/2} dz \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K_j S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t)} \int_{-\infty}^{d_3} e^{\sigma\sqrt{T_i - t}z} \Phi(-d_1) e^{-z^2/2} dz \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_t^2 e^{\mu(T_j + T_i - 2t) - \sigma^2(T_j - t)} \int_{-\infty}^{d_3} e^{2\sigma\sqrt{T_i - t}z} \Phi(-d_2) e^{-z^2/2} dz
 \end{aligned}$$

hvor $S_t = S(t)$, d_1 og d_2 som i (4.18) og d_3 som i (4.19).

Dersom $T_i > T_j$ vil vi få samme uttrykk som ovenfor med i i stedet for j og j i stedet for i .

Diagonalen i matrise A

For $i = 1, \dots, n$ kan vi finne forventningsverdiene på diagonalen i matrise A , også her med $S(T_i)$ fra lemma 4.1. Det browniske inkrementet i $S(T_i)$ er normalfordelt: $\hat{W}_3(T_i) - \hat{W}_3(t) \sim \mathcal{N}(0, T_i - t)$ (se def.A.1). Dermed har vi at

$$\hat{W}_3(T_i) - \hat{W}_3(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{T_i - t}Z, \quad Z \sim N(0, 1)$$

Vi kan nå benytte dette videre til å finne forventningsverdi nummer i på diagonalen i matrise A .

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[P_{T_i, K_i}^2] &= \mathbb{E}\left[(\max(K_i - S(T_i), 0))^2\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[(K_i - S(T_i))^2 \mathbb{1}_{K_i > S(T_i)}\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\left(K_i - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) + \sigma(\hat{W}_3(T_i) - \hat{W}_3(t))}\right)^2 \mathbb{1}_{K_i > S(T_i)}\right]_{S_t = S(t)} \\
 &= \mathbb{E}\left[\left(K_i - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) + \sigma\sqrt{T_i - t}Z}\right)^2 \mathbb{1}_{K_i > S(T_i)}\right]_{S_t = S(t)}
 \end{aligned}$$

Indikatorfunksjonen ovenfor er gitt ved

$$\mathbb{1}_{K_i > S(T_i)} = \begin{cases} 0 & \text{hvis } K_i \leq S(T_i) \\ 1 & \text{hvis } K_i > S(T_i) \end{cases}$$

Funksjonen P_{T_i, K_i}^2 vil dermed kun ha en positiv verdi dersom

$$Z < \frac{\ln \frac{K_i}{S_t} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t)}{\sigma\sqrt{T_i - t}} = -d$$

Vi benytter dette videre og får

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[P_{T_i, K_i}^2] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d} \left(K_i - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) + \sigma\sqrt{T_i - t}z} \right)^2 e^{-z^2/2} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d} \left(K_i^2 - 2S_t K_i e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) + \sigma\sqrt{T_i - t}z} \right. \\ &\quad \left. + S_t^2 e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) + 2\sigma\sqrt{T_i - t}z} \right) e^{-z^2/2} dz \\ &= K_i^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d} e^{-z^2/2} dz - 2S_t K_i e^{\mu(T_i - t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d} e^{-\frac{1}{2}(z - \sigma\sqrt{T_i - t})^2} dz \\ &\quad + S_t^2 e^{(2\mu + \sigma^2)(T_i - t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d} e^{-\frac{1}{2}(z - 2\sigma\sqrt{T_i - t})^2} dz \\ &= K_i^2 \Phi(-d) - 2S_t K_i e^{\mu(T_i - t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d - \sigma\sqrt{T_i - t}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\ &\quad + S_t^2 e^{(2\mu + \sigma^2)(T_i - t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d - 2\sigma\sqrt{T_i - t}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\ &= K_i^2 \Phi(-d) - 2S_t K_i e^{\mu(T_i - t)} \Phi(-d - \sigma\sqrt{T_i - t}) + S_t^2 e^{(2\mu + \sigma^2)(T_i - t)} \Phi(-d - 2\sigma\sqrt{T_i - t}) \\ &= K_i^2 \Phi(-d_2) - 2S_t K_i e^{\mu(T_i - t)} \Phi(-d_1) + S_t^2 e^{(2\mu + \sigma^2)(T_i - t)} \Phi(-d_3) \end{aligned}$$

for $S(t) = S_t$ og

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln \frac{S_t}{K_i} + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t)}{\sigma\sqrt{T_i - t}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T_i - t} \\ d_3 &= d_1 + \sigma\sqrt{T_i - t} \end{aligned}$$

Elementene i vektor **b**

Det siste vi skal se på er forventningene i vektor **b**. Vi benytter utbetalingsfunksjonen for forsikringskontrakten, F_T , fra (3.1) og $S(T_i)$ i utbetalingsfunksjonen for en salgsoptjon fra lemma 4.1.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F_T P_{T_i, K_i}] &= \mathbb{E}[\max(Y(T) - b, 0)v_0 \cdot \max(K_i - S(T_i), 0)] \\ &= \mathbb{E} \left[\max \left(a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)} \mathbf{x} + \int_t^T a\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1 dW_1(u) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_t^T a \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2 dW_2(u) - b, 0 \Big) v_0 \\
 & \cdot \max \left(K_i - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i-t) + \sigma(\hat{W}_3(T_i) - \hat{W}_3(t))}, 0 \right) \Big]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t), S_t=S(t)}
 \end{aligned}$$

Ved å benytte (4.2) kan det brownske inkrementet $\hat{W}_3(T_i) - \hat{W}_3(t)$ uttrykkes ved tre uavhengige brownske inkremitter:

$$\begin{aligned}
 \hat{W}_3(T_i) - \hat{W}_3(t) &= \rho_{13} (W_1(T_i) - W_1(t)) + \rho \sqrt{1 - \rho_{13}^2} (W_2(T_i) - W_2(t)) \\
 &+ \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{1 - \rho_{13}^2} (W_3(T_i) - W_3(t))
 \end{aligned}$$

Vi antar først at $T > T_i$ og splitter opp de stokastiske integralene fra utbetalingsfunksjonen F_T ovenfor i to uavhengige integraler:

$$\begin{aligned}
 \int_t^T a \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1 dW_1(u) &= \int_t^{T_i} a \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1 dW_1(u) + \int_{T_i}^T a \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1 dW_1(u) \\
 &= X_1 + Y_1 \\
 \int_t^T a \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2 dW_2(u) &= \int_t^{T_i} a \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2 dW_2(u) + \int_{T_i}^T a \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2 dW_2(u) \\
 &= X_2 + Y_2
 \end{aligned}$$

Vi betegner også de brownske inkrementene med Z_1, Z_2, Z_3 :

$$\begin{aligned}
 W_1(T_i) - W_1(t) &= Z_1 \\
 W_2(T_i) - W_2(t) &= Z_2 \\
 W_3(T_i) - W_3(t) &= Z_3
 \end{aligned}$$

Vi har nå at X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_3 alle er uavhengige av hverandre siden W_1, W_2, W_3 er tre uavhengige brownske bevegelser. Derimot vil Z_1 være avhengig av X_1 og Z_2 vil være avhengig av X_2 . Korrelasjonen mellom X_1 og Z_1 er gitt ved

$$\begin{aligned}
 \text{Corr}(X_1, Z_1) &= \frac{\text{Cov}(X_1, Z_1)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\text{Var}(Z_1)}} = \frac{\mathbb{E}[X_1 Z_1] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[Z_1]}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\text{Var}(Z_1)}} = \frac{\mathbb{E}[X_1 Z_1]}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\text{Var}(Z_1)}} \\
 &= \frac{\mathbb{E}\left[\int_t^{T_i} a \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1 dW_1(u) \cdot \int_t^{T_i} 1 dW_1(u)\right]}{\sqrt{\int_t^{T_i} a^2 (\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1)^2 du} \cdot \sqrt{T_i - t}} \\
 &= \frac{\int_t^{T_i} a^2 (\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1)^2 du}{\sqrt{\int_t^{T_i} a^2 (\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_1)^2 du} \cdot \sqrt{T_i - t}}
 \end{aligned}$$

I tredje likhet ovenfor har vi benyttet egenskap (ii) i definisjon til en brownsk bevegelse (A.1) slik at forventningen til både X_1 og Z_1 er null. Når vi nå har gitt korrelasjonen mellom X_1 og Z_1 kan vi skrive X_1 som

$$X_1 = \text{Corr}(X_1, Z_1) Z_1 + \hat{Z}_1$$

hvor \hat{Z}_1 er en stokastisk variabel uavhengig av Z_1 . Samme metode vil gjelde for X_2 og Z_2 slik at X_2 kan skrives som

$$X_2 = \text{Corr}(X_2, Z_2)Z_2 + \hat{Z}_2$$

hvor

$$\text{Corr}(X_2, Z_2) = \frac{\int_t^{T_i} a^2 (\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2)^2 du}{\sqrt{\int_t^{T_i} a^2 (\mathbf{e}_2^\top e^{A(T-u)} \mathbf{v}_2)^2 du} \cdot \sqrt{T_i - t}}$$

Nå kan utbetalingsfunksjonen F_T og P_{T_i, K_i} uttrykkes ved hjelp av variablene ovenfor og vi benytter tårnegenskapen hvor vi først betinger på alle variabler med unntak av Z_3 :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[F_T P_{T_i, K_i}] \\ &= \mathbb{E} \left[\max \left(a \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)} \mathbf{x} + X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2 - b, 0 \right) \right. \\ & \quad \left. \cdot \max \left(K_i - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) + \sigma(\rho_{13}Z_1 + \rho\sqrt{1-\rho_{13}^2}Z_2 + \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{1-\rho_{13}^2}Z_3)}, 0 \right) \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t), S_t=S(t)} \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\max \left(a \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)} \mathbf{x} + X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2 - b, 0 \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \cdot \max \left(K_i - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) + \sigma(\rho_{13}Z_1 + \rho\sqrt{1-\rho_{13}^2}Z_2 + \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{1-\rho_{13}^2}Z_3)}, 0 \right) \right] \right. \\ & \quad \left. \left. \mid X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t), S_t=S(t)} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\max \left(a \mathbf{e}_2^\top e^{A(T-t)} \mathbf{x} + X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2 - b, 0 \right) \right. \\ & \quad \left. \cdot \mathbb{E} \left[\max \left(K_i - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) + \sigma(\rho_{13}z_1 + \rho\sqrt{1-\rho_{13}^2}z_2 + \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{1-\rho_{13}^2}Z_3)}, 0 \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \mid Z_1 = z_1, Z_2 = z_2 \right]_{S_t=S(t)} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t)} \end{aligned}$$

Vi uttrykker Z_3 ved hjelp av en standard normalfordelt variabel. Siden Z_3 er et brownsk inkrement vet vi at

$$Z_3 \sim \mathcal{N}(0, T_i - t)$$

og vi kan dermed la Z_3 være gitt ved

$$Z_3 \stackrel{d}{=} \sqrt{T_i - t}Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Vi benytter dette i den betingede forventningen og får følgende

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\max \left(K_i - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) + \sigma(\rho_{13}z_1 + \rho\sqrt{1-\rho_{13}^2}z_2 + \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{1-\rho_{13}^2}z_3)}, 0 \right) \right]_{z_1=Z_1, z_2=Z_2, S_t=S(t)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \max \left(K_i - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) + \sigma(\rho_{13}z_1 + \rho\sqrt{1-\rho_{13}^2}z_2 + \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{1-\rho_{13}^2}\sqrt{T_i - tz})}, 0 \right) e^{-z^2/2} dz \\ &= K_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d} e^{-z^2/2} dz \\ & \quad - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) + \sigma(\rho_{13}z_1 + \rho\sqrt{1-\rho_{13}^2}z_2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d} e^{\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{1-\rho_{13}^2}\sqrt{T_i - tz} - z^2/2} dz \\ &= K_i \Phi(-d) - S_t e^{\mu(T_i - t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T_i - t)(1 - (1-\rho^2)(1-\rho_{13}^2)) + \sigma(\rho_{13}z_1 + \rho\sqrt{1-\rho_{13}^2}z_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d} e^{\frac{1}{2}(z - \sigma\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{1-\rho_{13}^2}\sqrt{T_i-t})^2} dz \\
 &= K_i \Phi(-d) - S_t e^{\mu(T_i-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T_i-t)(1-(1-\rho^2)(1-\rho_{13}^2)) + \sigma(\rho_{13}z_1 + \rho\sqrt{1-\rho_{13}^2}z_2)} \\
 & \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d - \sigma\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{1-\rho_{13}^2}\sqrt{T_i-t}} e^{\frac{1}{2}u^2} du \\
 &= K_i \Phi(-d) - S_t e^{\mu(T_i-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T_i-t)(1-(1-\rho^2)(1-\rho_{13}^2)) + \sigma(\rho_{13}z_1 + \rho\sqrt{1-\rho_{13}^2}z_2)} \\
 & \cdot \Phi\left(-d - \sigma\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{1-\rho_{13}^2}\sqrt{T_i-t}\right)
 \end{aligned}$$

hvor $S_t = S(t)$, $z_1 = Z_1$, $z_2 = Z_2$ og

$$d = \frac{\ln \frac{S_t}{K_i} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) + \sigma(\rho_{13}z_1 + \rho\sqrt{1-\rho_{13}^2}z_2)}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{1-\rho_{13}^2}\sqrt{T_i-t}}$$

Integralet i utregningen ovenfor har kun verdi dersom

$$K_i - S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i-t) + \sigma(\rho_{13}z_1 + \rho\sqrt{1-\rho_{13}^2}z_2) + \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{1-\rho_{13}^2}\sqrt{T_i-t}Z} > 0$$

Vi har derfor benyttet følgende for å sette øvre grense,

$$Z < \frac{\ln \frac{K_i}{S_t} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t) - \sigma(\rho_{13}z_1 + \rho\sqrt{1-\rho_{13}^2}z_2)}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{1-\rho_{13}^2}\sqrt{T_i-t}} = -d$$

Forventningen til produktet mellom utbetalingsfunksjonen for kontrakten og en salgsopsjon er nå gitt ved

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[F_T P_{T_i, K_i}] &= \mathbb{E} \left[\max \left(a e_2^\top e^{A(T-t)} \mathbf{x} + X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2 - b, 0 \right) \right. \\
 & \cdot \left(K_i \Phi(-d) - S_t e^{\mu(T_i-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T_i-t)(1-(1-\rho^2)(1-\rho_{13}^2)) + \sigma(\rho_{13}Z_1 + \rho\sqrt{1-\rho_{13}^2}Z_2)} \right. \\
 & \left. \left. \cdot \Phi(-d - \sigma\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{1-\rho_{13}^2}\sqrt{T_i-t}) \right) \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t), S_t=S(t)}
 \end{aligned}$$

Vi har nå løst første del av utregningen til forventningen. Dette vil ende opp med et seksdimensjonalt uttrykk. I prinsippet kan vi fortsette å benytte tårnegenskapen og betinge på en mindre variabel for hver gang, slik at vi til slutt kun står igjen med en stokastisk variabel i uttrykket og kan finne forventningen med vanlig metode i siste steg. Ettersom svaret vi vil ende opp med er et høydimensjonalt uttrykk vil ikke dette gi oss noe mer informasjon. Vi stopper derfor den analytiske utregningen her. En annen mulighet til å løse denne forventningsverdien er ved å benytte numeriske metoder. I utregningen ovenfor antok vi at $T > T_i$, så samme metode må benyttes for å finne forventningen når $T < T_i$.

Vi kan se at alle forventningene i den optimale løsningen fra proposisjon 4.5 er ganske komplekse og det er derfor vanskelig å si noe spesifikt om hva de forteller oss. Forventningene fra vektor \mathbf{b} har allerede et langt uttrykk som vi kan se ovenfor, men vil ende opp med et enda lenger og mer komplekst uttrykk enn de andre. For å få mer innsikt i dette kan numeriske metoder benyttes.

4.5 Pris på portefølje av salgsoptjoner

Dersom et forsikringsselskap velger å benytte en portefølje av salgsoptjoner som reassuranse, kan enten deler eller hele premien i forsikringskontrakten benyttes til å dekke kostnaden ved kjøp av salgsoptjonene. Ved bruk av Black & Scholes prisingsformel for en salgsoptjon fra proposisjon 4.9 kan vi finne prisen på hele porteføljen. Vi multipliserer prisen på optjon nummer i med antallet av denne i porteføljen for alle $i = 1, \dots, n$ og summerer over disse fra $i = 1$ opp til $I = n$. Prisen er da gitt ved

$$P(t, S_t) = \sum_{i=1}^n x_i (K_i e^{-r(T_i-t)} \Phi(-d_{i,2}) - S_t \Phi(-d_{i,1}))$$

hvor

$$d_{i,1} = \frac{\ln \frac{S_t}{K_i} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T_i - t)}{\sigma\sqrt{T_i - t}}$$

$$d_{i,2} = d_{i,1} - \sigma\sqrt{T_i - t}$$

og Φ er kumulativ normalfordelingsfunksjon for en standard normalfordeling.

I delkapittel 3.3 så vi på prising av premie ved hjelp av to ulike metoder. Hvilken metode et forsikringsselskap velger og hva premien dermed fastsettes til vil ha betydning for hvordan de velger å sette sammen porteføljen. Forsikringsselskapet velger ut ifra premien hvor mange ulike salgsoptjoner (gitt i markedet) de ønsker å investere i. Antallet av hver av de n ulike salgsoptjonene de velger vil til slutt optimeres slik vi har sett på i delkapittel 4.3.

KAPITTEL 5

Oppsummering

Vi har i denne oppgaven analysert en type forsikringskontrakt mot pandemier. Slike forsikringskontrakter har ikke vært noe særlig utbredt verken i Norge eller verden tidligere, men har fått økt oppmerksomhet under nåværende covid-19 pandemi. Smittetrykket i samfunnet under en pandemi er benyttet til å bestemme en eventuell utbetaling av forsikringskontrakten. Vi har modellert utviklingen av smitten ved hjelp av en stokastisk SIR-modell. Grunnet ikke lineariteter i den klassiske SIR-modellen har vi sett på en forenklet modell for å kunne finne en løsning analytisk. Løsningen av modellen gir oss antall smittede til ethvert tidspunkt T . Dette har vi benyttet til utbetalingsfunksjonen for forsikringskontrakten, hvor utbetalingen er proporsjonal med smittetrykket i samfunnet. Det finnes ulike metoder for å bestemme premien i forsikringskontrakten. Et forsikringsselskap må ta høyde for risiko forbundet med forsikringskontrakten og vi har sett på et par metoder som kan benyttes for å fastsette premien. De kan ta utgangspunkt i forventet utbetaling og legge til en prosentandel av en kvantil som risikokompensasjon. En annen mulighet er å sette premie lik forventet utbetaling under et risikojustert sannsynlighetsmål ved hjelp av Girsanov transformasjon.

Til slutt har vi sett på muligheter for reassurans for å diversifisere risiko. Et forsikringsselskap kan benytte seg av et reassuranseselskap som tar på seg noe av risikoen, men vi har i denne oppgaven valgt å fokusere på reassurans i markedet. Vi har optimert en portefølje av salgsoptjoner hvor forventet utbetaling fra denne porteføljen samsvarer med forventet utbetaling av forsikringskontrakten. Vi har funnet prisen på den optimale porteføljen og deler av eller hele premien kan dermed benyttes til å dekke kjøp av salgsoptjonene.

Utfordringene i denne oppgaven har først og fremst vært knyttet til å finne en analytisk løsning av en stokastisk SIR-modell. Grunnet dette falt valget på en forenklet SIR-modell som består av lineariteter. Modellen vi har benyttet gir oss derfor ikke et helt realistisk bilde av smitteantallet i samfunnet. Den gir oss likevel muligheten til å se på sammenhengen mellom smittetrykket i samfunnet og en utbetaling av forsikringskontrakten. Vi har i oppgaven foretatt simulering av den forenklete SIR-modellen og en stokastisk SIR-modell som ligner mer på den klassiske SIR-modellen. Dersom vi ser på utviklingen av antall smittede til enhver tid i de to modellene, kan vi se at smittetallet var veldig ulikt. Selv om en klassisk SIR-modell gir en mye høyere smittetopp enn den forenklete, har begge en økning i antall smittede før trenden snur og smittetallet går ned igjen. Ingen av simuleringene vi har sett på gir oss et helt realistisk bilde av virkeligheten, men ved justering av parametrene i modellen som inkluderer en parameter for restriksjoner fra myndighetene vil vi kunne komme nærmere. For å få en så realistisk modellering av smitteutviklingen som mulig vil det være viktig å inkludere inngrepene myndighetene gjør for å begrense smitten, i tillegg til å la andre parametere som for eksempel vekstraten variere over tid. Etter covid-19 pandemien vil det være mulighet for at flere selskaper ønsker å inngå

en forsikringskontrakt mot pandemier. Denne vil da potensielt kunne gi en utbetaling ved en fremtidig pandemi. En mulighet for et forsikringssselskap vil da være å benytte tall fra covid-19 pandemien til å estimere parameterne i en SIR-modell og videre benytte dette til å finne forventet utbetaling av forsikringskontrakten. Det er ikke sikkert neste pandemi har helt lik utvikling, men dette kan likevel gi en indikasjon på hvor høy utbetalingen av kontrakten kan bli.

Tillegg

TILLEGG A

Teori

Definisjon A.1. En brownsk bevegelse er en endimensjonal stokastisk prosess $W = (W(t))_{t \geq 0}$ med følgende egenskaper

- (i) $W(t)$ er nesten sikkert kontinuert og $W(0) = 0$
- (ii) stasjonære inkremitter, dvs. for alle $0 \leq s \leq t$ så er $W(t) - W(s) \stackrel{d}{=} W(t - s)$ og $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$
- (iii) uavhengige inkremitter, dvs. for alle $0 \leq s < t \leq v < u$ så er $W(t) - W(s) \perp\!\!\!\perp W(u) - W(v)$

For bevis og mer informasjon om browniske bevegelser, se [Øksendal, 2000, s. 12–14].

Lemma A.2. Ito Isometri

Dersom $\phi(t, \omega)$ er begrenset og elementær, så er

$$E \left[\left(\int_S^T \phi(t, \omega) dW(t, \omega) \right)^2 \right] = E \left[\int_S^T \phi^2(t, \omega) dt \right]$$

[Øksendal, 2000, Lemma 3.1.5, s. 26]

Teorem A.3. Girsanovs teorem

La \mathcal{L} betegne settet av progressive prosesser $g = (g_1, \dots, g_d)$ i \mathbb{R}^d som tilfredsstill

$$\int_0^t \|g(s)\|^2 ds < \infty \quad \forall t > 0$$

La videre $\gamma \in \mathcal{L}$ være slik at den stokastiske eksponentialfunksjonen $\mathcal{E}(\gamma \bullet W)$ er en uniform integrerbar martingal med $\mathcal{E}_t(\gamma \bullet W) > 0$ hvor

$$\mathcal{E}_t(\gamma \bullet W) = e^{\int_0^t \gamma(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma(s)^2 ds}$$

Da definerer

$$\left. \frac{dQ}{dP} \right|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}_t(\gamma \bullet W) \quad \forall t \geq 0$$

et ekvivalent sannsynlighetsmål $Q \sim P$, og prosessen

$$\tilde{W}(t) = W(t) - \int_0^t \gamma(s)^\top ds$$

er en Q - Brownsk bevegelse.

[Filipović, 2009, Teorem 4.6, s. 68]

Teorem A.4. Novikovs betingelse

Den stokastiske eksponentialfunksjonen $\mathcal{E}(\gamma \bullet W)$ er en uniform integrerbar martingal med $\mathcal{E}_\infty(\gamma \bullet W) > 0$ dersom

$$E \left[e^{\frac{1}{2} \int_0^\infty \|\gamma(s)\|^2 ds} \right] < \infty$$

[Filipović, 2009, Teorem 4.7, s. 69]

Teorem A.5. Endimensjonal Itô formel

La $X(t)$ være en Itô prosess (stokastisk prosess definert på (Ω, \mathcal{F}, P)) gitt ved

$$dX(t) = udt + v dW(t)$$

hvor $W(t)$ er en endimensjonal brownsk bevegelse.

La $f(t, x) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$, altså to ganger kontinuerlig differensierbar på $[0, \infty) \times \mathbb{R}$. Da er

$$Y(t) = f(t, X(t))$$

en Itô prosess og

$$dY(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t))(dX(t))^2$$

hvor

$$(dX(t))^2 = vdt$$

grunnet reglene $dt \cdot dt = dt \cdot dW(t) = dW(t) \cdot dt = 0$ og $dW(t) \cdot dW(t) = dt$.

[Øksendal, 2000, Teorem 4.1.2, s. 44]

Teorem A.6. Multidimensjonal Itô formel

La $\mathbf{X}(t)$ være en n -dimensjonal Itô prosess (stokastisk prosess definert på (Ω, \mathcal{F}, P)) gitt ved

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{u}dt + \mathbf{v}d\mathbf{W}(t)$$

hvor $\mathbf{W}(t)$ er en n -dimensjonal brownsk bevegelse slik at

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nm} \end{bmatrix} \text{ og } d\mathbf{W}(t) = \begin{bmatrix} dW_1(t) \\ \vdots \\ dW_m(t) \end{bmatrix}.$$

La $f(t, x) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$, altså to ganger kontinuerlig differensierbar på $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Da er

$$Y(t) = f(t, \mathbf{X}(t))$$

en Itô prosess og

$$dY(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{X}(t))dt + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, \mathbf{X}(t))dX_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, \mathbf{X}(t))dX_i(t)dX_j(t)$$

hvor $dt \cdot dt = dt \cdot dW_i(t) = dW_i(t) \cdot dt = 0$ og $dW_i(t) \cdot dW_j(t) = \delta_{ij}dt$.

[Øksendal, 2000, Teorem 4.2.1, s. 48]

TILLEGG B

R programmeringskode

Vi har simulert de to modellene (2.2) og (2.3) ved hjelp av Euler-Maruyama metoden. Denne metoden vil gi en numerisk tilnærmet løsning på første ordens stokastiske differensialligninger. Dersom vi har en stokastisk differensialligning gitt på formen

$$dX(t) = f(t, X(t)) dt + g(t, X(t)) dW(t), \quad X(t_0) = X_0$$

vil Euler-Maruyama metoden være gitt ved,

$$\begin{aligned} X(t_{j+1}) &= X(t_j) + f(t_j, X(t_j))(t_{j+1} - t_j) + g(t_j, X(t_j))(W(t_{j+1}) - W(t_j)) \\ &= X(t_j) + f(t_j, X(t_j)) dt + g(t_j, X(t_j)) dW_j \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

[Kayode mfl., 2016, ligning (3), (10)]

```
## modell 1 ##
# SIR-modell (2.2)

SIR <- function(E_f,beta,gamma,sigma,p,S_0, I_0, R_0,T){
  S <- c()
  I <- c()
  R <- c()
  S[1] <- S_0
  I[1] <- I_0
  R[1] <- R_0

  dt <- 1 # daglig tidssteg
  dW <- sqrt(dt)*rnorm(T-1,0,1) # brownske inkremitter

  for (t in 1:(T-1)){
    S[t+1] <- S[t] - E_f*beta*S[t]*I[t]*dt
    I[t+1] <- I[t] + (E_f*beta*S[t]*I[t] - gamma*I[t])*dt + sigma*I[t]*dW[t]
    R[t+1] <- R[t] + gamma*I[t]*dt - sigma*I[t]*dW[t]
  }
  return(data.frame(S,I,R))
}

beta <- 7*10^(-7) # vekstraten
gamma <- 0.04     # overgangsraten fra I til R
sigma <- 0.05    # modellerer noe av tilfeldigheten
E_f <- 0.1       # eksponeringsfaktor
```

```

S_0 <- 5.5*10^6      # antall utsatte ved start, dag 1 (t = 1)
I_0 <- 1            # antall smittede ved start, dag 1 (t = 1)
R_0 <- 0            # antall friske/døde ved start, dag 1 (t = 1)
T <- 150            # antall dager
tid <- seq(1,T)

modell <- SIR(E_f,beta,gamma,sigma,p,S_0,I_0,R_0,T)
data <- data.frame(tid, modell)
names(data)[names(data) == "S"] <- "S (utsatte)"
names(data)[names(data) == "I"] <- "I (smittede)"
names(data)[names(data) == "R"] <- "R (friske/døde)"

library(reshape2)
library(ggplot2)
data.melt <- melt(data, id.vars = 1)
plot <- ggplot(data=data.melt, aes(x=tid, value, colour = variable)) +
  <- geom_line(linetype = "solid") + xlab('Tid (dager)') + ylab('Befolkning (antall
  <- personer)') + labs(colour="Klasser") + theme(legend.position='right')
print(plot)

## modell 2 ##
#SIR-modell (2.3)

SIR2 <- function(beta_1,beta_2,gamma,eta_1,eta_2,p_12,S_0,I_0,R_0,T){
  S <- c()
  I <- c()
  R <- c()
  S[1] <- S_0
  I[1] <- I_0
  R[1] <- R_0

  dt <- 1 # daglig tidssteg
  dW_1 <- sqrt(dt)*rnorm(T-1,0,1) # brownske inkremitter
  dW_2 <- sqrt(dt)*rnorm(T-1,0,1) # brownske inkremitter

  for (t in 1:(T-1)){
    dW_hat_2 <- p_12*dW_1[t] + sqrt(1-p_12^2)*dW_2[t]
    S[t+1] <- S[t] - (beta_1*S[t]+beta_2*I[t])*dt
    I[t+1] <- I[t] + (beta_1*S[t]+ (beta_2 - gamma)*I[t])*dt + eta_1*dW_1[t]
    R[t+1] <- R[t] + gamma*I[t]*dt + eta_2*dW_hat_2
  }
  return(data.frame(S,I,R))
}

beta_1 <- 7*10^(-3)      # beta_1 og beta_2 sier noe om økningen i antall smittede
beta_2 <- 9*10^(-3)
eta_1 <- 0.05*10^6       # eta_1 og eta_2 modellerer noe av tilfeldigheten
eta_2 <- 0.03*10^6
p_12 <- 0.2              # korrelasjonen mellom W_1 og W_hat_2

```

```
modell2 <- SIR2(beta_1,beta_2,gamma,eta_1,eta_2,p_12,S_0,I_0,R_0,T)
data2 <- data.frame(tid, modell2)
names(data2)[names(data2) == "S"] <- "S (utsatte)"
names(data2)[names(data2) == "I"] <- "I (smittede)"
names(data2)[names(data2) == "R"] <- "R (friske/døde)"

data.melt2 <- melt(data2, id.vars = 1)
plot2 <- ggplot(data=data.melt2, aes(x=tid, value, colour = variable)) +
  ↪ geom_line(linetype = "solid") + xlab('Tid (dager)') + ylab('Befolkning (antall
  ↪ personer)') + labs(colour="Klasser") + theme(legend.position='right')
print(plot2)
```

Bibliografi

- Benth, S. E., Benth, J. Š. & Koekebakker, S. (2008). *Stochastic modelling of electricity and related markets*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Berglihn, H. & Helle, B. T. (2021, 12. mars). *Petter Stordalen tapte striden om pandemiforsikring. Nå anker han dommen*. Dagens Næringsliv. Hentet 15. april 2021, fra <https://www.dn.no/reiseliv/petter-a-stordalen/jan-birger-jansen/erik-sandtro/petter-stordalen-tapte-striden-om-pandemiforsikring-na-anker-han-dommen/2-1-976928>
- Bølviken, E. (2014). *Computation and Modelling in Insurance and Finance*. Cambridge University Press.
- Dickson, M. (2020, 13. november). *Wimbledon in line for £174MILLION insurance pay-out after All England Tennis club cashed in policy amid Covid-19 pandemic (which saw event cancelled for first time since the Second World War!)*. Daily Mail. Hentet 23. april 2021, fra <https://www.dailymail.co.uk/sport/tennis/article-8947769/Wimbledon-line-174M-insurance-pay-amid-Covid-19-pandemic.html>
- Filipović, D. (2009). *Term-Structure Models*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Hethcote, H. W. (2000). The Mathematics of Infectious Diseases. *SIAM Review*, årg. 42, 599–653.
- Kayode, S., Ganiyu, A. & Ajiboye, A. (2016). On One-Step Method of Euler-Maruyama Type for Solution of Stochastic Differential Equations Using Varying Stepsizes. *OALib*, årg. 03, 1–3.
- Mikosch, T. (2009). *Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with Poisson Process. 2nd edition*. Springer-Verlag.
- Munk, C. (2013). *Financial asset pricing theory*. Oxford University Press.
- Ratliff, E. (2020). *We Can Protect the Economy From Pandemics. Why Didn't We?*. Wired. Hentet 17. februar 2021, fra <https://www.wired.com/story/nathan-wolfe-global-economic-fallout-pandemic-insurance>
- Simha, A., Prasad, R. V. & Narayana, S. (2020). *A simple Stochastic SIR model for COVID 19 Infection Dynamics for Karnataka: Learning from Europe*. arXiv: 2003.11920v3 [q-bio.PE]. <https://arxiv.org/pdf/2003.11920.pdf>
- Øksendal, B. (2000). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications, fifth edition*. Springer-Verlag Heidelberg New York.