

UiO : **Matematisk institutt**

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Irreversible stokastiske investeringsproblemer

Evaluert i diskret tid og rom

Truls Georg Hermansen

Masteroppgave, høsten 2020



Denne masteroppgaven er levert inn under masterprogrammet *Anvendt matematikk og mekanikk*, studieretning *Computational Science*, ved Matematisk institutt, Universitetet i Oslo. Oppgaven er normert til 60 studiepoeng.

Forsiden viser et utsnitt av rotsystemet til den eksepsjonelle liegruppen E_8 , projisert ned i planet. Liegrupper ble oppfunnet av den norske matematikeren Sophus Lie (1842–1899) for å uttrykke symmetriene til differensiallikninger og spiller i dag en sentral rolle i flere deler av matematikken.

Sammendrag

Emnet for denne oppgaven er stokastiske kontrollproblemer, der formålet er å se på de økonomiske utfordringene ved irreversible investeringer i et fluktuerende marked. T.Ø. Kobila har tidligere utviklet en kontinuerlig modell for denne typen kontrollproblemer og hensikten med denne oppgaven er å diskretisere denne modellen. For å diskretisere [Kob93] konstrueres en Markovkjede og det utvikles differensligninger som erstatning for geometrisk Brownsk bevegelse og differensialligninger. Med disse erstatningene som fundament i den diskret modellen formuleres en definisjon for optimale investeringsstrategier. Gitt at en slik investeringsstrategi eksisterer, så presenteres en diskret profittfunksjon. Videre indentifiseres et diskret forbudsområde med tilhørende randkurver og en optimal diskret profittfunksjon som maksimerer fortjenesten gitt en optimal investeringsstrategi. Ved å kalibrere den underliggende Markovkjeden og de aktuelle parametrene i modellen opp mot Kobilas modell, oppnår den diskret modellen tilsvarende resultater som Kobila presenterer.

Takk

Først og fremst vil jeg takke min veileder Professor Tom Lindstrøm, som alltid har stilt opp og ledet meg på rett vei. Uten han ville ikke denne oppgaven sett dagens lys. Selv etter utallige gjennomlesninger og idiotiske spørsmål var han alltid like tålmodig og behjelpelig. Tusen takk. Til tross for dette så kan ikke eventuelle feil og mangler utelukkes. Disse er helt mine egne.

Jeg vil takke min søster, Tone, for hjelp med språket. Takk til Andreas Lindblad for innsikt i matematikkens anvendelser. Jeg vil også takke min far, Tom, for gjennomlesning av en av de siste versjonene.

Videre vil jeg takke resten av min familie og nære venner som har bidratt med støtte og motivasjon gjennom hele graden. En spesiell takk til min Martine.

*Truls Georg Hermansen
Oslo, 01. september 2020.*

Innhold

Sammendrag	i
Takk	iii
Innhold	v
1 Innledning	1
1.1 Disposisjon	2
I Modellens fundament	3
2 Kobilas artikkel	5
3 Spesifisering av den diskret modellen	13
4 Kalkulering i den diskret modellen	15
4.1 Modellens utgangspunkt	15
4.2 Generell løsning	17
4.3 Spesiell løsning	24
5 Kalibrering av parametre	27
5.1 Diskonteringsfaktoren	27
5.2 Markovkjedens hopp	30
II Modellens anvendelse	39
6 Optimeringsproblemet	41
6.1 Investeringsstrategier	45
7 Forbudsområdet	49
8 Diskret modell	75
9 Diskusjon	79
A Forkunnskap	81

Innhold

B	Utregning	83
C	Notasjon	93
	Bibliografi	97

KAPITTEL 1

Innledning

Formålet med denne oppgaven er å se nærmere på de økonomiske utfordringene ved irreversible investeringer i et fluktuerende marked, i matematikken kalt stokastisk kontrollproblemer.

For å ta et praktisk eksempel på et typisk stokastisk kontrollproblem, kan vi se for oss en bedrift som ønsker å justere sin produksjonskapasitet (ofte en irreversibel investering) etter markedets naturlige svingninger (det fluktuerende markedet). Bedriften søker å øke sin produksjonskapasitet i takt med etterspørselen dersom markedets tilstand stiger, samtidig som de ikke ønsker å ha for stor produksjon dersom markedet skulle falle. Problemet er bare at flere av investeringene som kreves for at bedriften skal kunne ekspandere er irreversible, eller nært irreversible. For eksempel kan utvidelse i særegent produksjonsutstyr være vanskelig å senere selge eller resirkulere. Alternativt kan en økning i arbeidsstyrken være utfordrende å senere redusere som følge av lovmessige og humanitære årsaker. For å møte disse investeringsproblemene er det essensielt for bedriften å ha en strategi som maksimerer den langsiktige profitten, samtidig som den balanserer for fremtidig usikkerhet i markedet.

Tradisjonelt sett har stokastiske kontrollproblemer blitt studert og modellert ved hjelp av stokastiske differensialligninger. Et eksempel på en slik modell ble i 1993 utviklet av T. Ø. Kobila, beskrevet i [Kob93]. Modellen baserer seg på differensialligninger og Brownsk bevegelse i kontinuerlig tid og anses som velutviklet teori for optimal kontroll av stokastiske differensialligninger. I senere tid har fremveksten av moderne teknologi som redskap og bruk av matematiske modeller i anvendelser gjort at behovet for numerisk analyse er blitt stadig større. I numerisk analyse er det særlig fordelaktig med diskretiserte matematiske modeller med diskret og kvantifisert data, noe vi ikke finner i [Kob93]. Med dette som bakteppe, og med utgangspunktet i [Kob93], forsøker denne oppgaven å beskrive hvordan den Brownske bevegelsen og differensialligninger kan erstattes med henholdsvis en Markovkjede med overgangssannsynligheter og differensligninger for å sikre optimale investeringsstrategier i diskret tid. Det er viktig å presisere at denne oppgaven ikke har som hensikt å komme med formelle bevis, men ved fornuftig regning komme med et forslag til hvordan en diskret modell sannsynligvis ser ut.

I de følgende kapitlene vil det først redegjøres for Kobilas kontinuerlig modell,

1. Innledning

da denne danner grunnlaget for den diskret modellen som benyttes i denne oppgaven. Deretter beskrives byggeklossene til den diskret modellen og dens anvendelser. I likhet med Kobilas modell finner den diskret modellen en formel for optimale investeringsstrategier, samt definerer *forbudsområdet* som representerer tilstander der vi ikke utnytter markedets fulle potensial.

1.1 Disposisjon

Oppgaven er delt opp i to hoveddeler. Del I går gjennom den kontinuerlig modellen og legger grunnlaget for den diskret versjonen. Del II tar for seg anvendelsen av modellen og resultater. Resten av oppgaven har følgende oppsett:

Kapittel 2 oppsummerer T.Ø. Kobilas artikkel og gir en innføring i problemstillingen. Kapittelet fungerer også som et lettere tilgjengelig oppslagsverk når kontinuerlig og diskret teori sammenlignes. For et mer fullstendig innblikk i teorien henvises det til [Kob93].

Kapittel 3 presenterer kort teorien og de ulike elementene som legger grunnlaget for den diskret modellen.

Kapittel 4 har de spesifikke utregningene som gir oss den nødvendige differensligningen for optimaliseringsproblemet.

Kapittel 5 går i dybden på de diskret parametrene fra Kapittel 3, slik at Markovkjeden fungerer som en fullverdig Brownsk bevegelse.

Kapittel 6 tar for seg inntekts- og kostnadsfunksjonene for å finne optimal profitt og investeringsstrategier.

Kapittel 7 ser på detaljene rundt forbudsområdet og ulike scenarioer. Her formuleres også den optimale profittfunksjonen.

Kapittel 8 oppsummerer resultatene fra de tidligere kapitlene og presenterer den diskret modellen.

Kapittel 9 er et diskusjonskapittel. Her ser vi tilbake på oppgavens formål og dens resultater, i tillegg til å se på muligheter for veien videre.

Tillegg A inneholder utvalgt forkunnskap som teorien baserer seg på.

Tillegg B inneholder ekstra utregninger for de spesielt interesserte. Dette er utregninger som har blitt veid, og ikke funnet for lett, men for forstyrrende for hovedpoenget i teksten.

Tillegg C inneholder en liste over hyppig brukt notasjon og symboler i oppgaven.

DEL I

Modellens fundament

KAPITTEL 2

Kobilas artikkel

I dette kapittelet vil det gis en innføring i denne oppgavens problemstilling. Det vil også bli gitt en kort presentasjon av hovedtrekkene fra [Kob93] og den kontinuerlige teorien, da denne oppgaven bygger på store deler av teorien fra denne forskningsartikkelen. Det vil dessuten gjøres flere sammenligninger mellom Kobilas resultater og oppgavens egne resultater, hvorpå dette introduksjonskapittelet forhåpentligvis kan fungere som et oppslagsverk dersom det er ønskelig å sjekke resultatene ytterligere. Kapittelet avsluttes med et oppsummerende teorem. Dette teoremet er den formelle fremstillingen av Kobilas modell, og er den modellen oppgaven søker å diskretisere.

Kobila presenterer i [Kob93] en type stokastiske kontrollproblemer med eksplisitte løsninger som lar seg overføre til økonomi. I [Kob93] løses problemet med å finne optimale investeringsstrategier for irreversible investeringer i et fluktuerende markedet ved hjelp av en bestemt metode. Under følger en økonomisk forklaring av problemet og metoden, før vi til slutt beskriver det matematiske.

La oss gå tilbake til eksempelet beskrevet i innledningen av oppgaven der vi har en bedrift som ønsker å justere sin produksjonskapasitet (ofte en irreversible investering) etter markedets naturlige svingninger (det fluktuerende markedet). Kobila forklarer problemstillingen, sett fra et økonomisk ståsted, som en situasjon der man best mulig justerer sin produksjonskapasitet for å oppnå mest mulig profitt i et marked i stadig endring. Nøkkelen ligger da i å ikke investere for mye i utbygging dersom markedet skulle stagnere eller falle, og samtidig ikke investere for lite så man går glipp av potensiell profitt. Fra et matematisk utgangspunkt vil den mest fornuftige måten å angripe et slikt investeringsproblem på være å se på inntekt- og kostnadsfunksjoner, der vi må ta stilling til bedriftens økonomiske situasjon. Kobila forklarer det på følgende måte: Til enhver tid så vil vår bedrifts økonomiske situasjon være bestemt av de to ikke-negative reelle parametrene θ og k , der k er gjeldende produksjonskapasitet, og θ er en økonomisk indikator for tilstanden i markedet. Denne indikatoren forklarer seg på en slik måte at dersom θ tar en høy verdi, så tilsvarer dette en blomstrende økonomi med høy etterspørsel, og tilsvarende dersom θ tar en lav verdi så vil dette indikere et marked med lite aktivitet og lav etterspørsel. For å holde kontroll på inntektene og utbyggingskostnadene til

2. Kobilas artikkel

bedriften benyttes funksjonene

$$\Pi, \Gamma : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$$

som tar de to parametrene θ og k som argument, der $\Pi(\theta, k)$ er nettoinntekten per tidsenhet som bedriften tjener på sin produksjon i den økonomisk tilstanden (θ, k) dersom de ikke bygger ut, mens $\Gamma(\theta, k + \Delta k) - \Gamma(\theta, k)$ er den nødvendige investeringen som trengs for å øke kapasiteten fra k til $k + \Delta k$. Før vi går videre inn på modellen kan det være fornuftig med noe begrepsforklaring. I de neste tre avsnittene ser vi nærmere på parametrene som hittil har blitt nevnt og det underliggende matematiske maskineriet.

Bedriftens økonomiske situasjon vil som nevnt bestemmes av de to parametrene θ og k . Produksjonskapasiteten k er teoretisk relativ enkel å definere da man gjerne har kjente faktorer som setter begrensninger, som for eksempel tilgjengelig arbeidskraft, produksjonstid, mengden råvarer og lignende. Disse er håndfaste variabler som gir oss en konkret makskapasitet. Det er derimot noe mer komplekst å definere markedets tilstand θ . Denne kompleksiteten skyldes at markedet er fluktuerende med flere uavhengige variabler, i tillegg til at vi har behov for å finne både markedets nåværende og fremtidige tilstand. Å spå fremtiden er riktignok umulig, men ved hjelp av stokastisk matematikk er det likevel mulig å anta fremtidige utfall ved hjelp av kvalifisert gjetning.

Stokastisk matematikk baserer seg på sannsynlighetsteori og statistisk analyse, og benytter en sannsynlighetsfordeling for å sortere hvor sannsynlig det er at en gitt hendelse vil skje. Med andre ord beskriver en sannsynlighetsfordeling oppførselen til stokastiske variabler, altså variabler som blir bestemt ut i fra tilfeldige hendelser, som for eksempel et myntkast. Blir det kron, eller blir det mynt? Man kan ikke forutse utfallet av en bestemt hendelse - som et myntkast - men man kan si noen om sannsynligheten for at det ene eller det andre utfallet inntreffer, og hva vi kan forvente å få over tid. Samler vi opp nok data kan vi dermed sette opp en generell fremstilling om hvordan et større utvalg med forskjellige utfall vil fordele seg basert på sannsynlighet, og vi vil få en indikasjon på hvordan utfallene mest sannsynlig vil oppføre seg i fremtiden. En slik samling av stokastiske variabler kaller man en stokastisk prosess, og er litt enkelt sagt en standardisert prosess som tilfører kontrollert tilfeldighet til en modell.

Når vi så skal forsøke å beskrive det økonomiske markedet for en bedrift er vi nødt til å se på den statistiske utviklingen til markedet, typisk modellert ved en stokastisk prosess kalt Brownsk bevegelse. Det er verdt å nevne at denne formen for estimering tar hensyn til hvordan verden er akkurat nå, og basert på den informasjonen vi har akkurat nå, så kan den gi estimater for morgendagen. Riktignok er verden aldri akkurat sånn som den er nå, i morgen.

La oss nå gå tilbake og se hvordan vi kan anvende dette på problemet til bedriften vi introduserte i innledningen. For å modellere den statistiske utviklingen til markedet, benyttes da en éndimensjonale geometrisk Brownske bevegelsen

$$d\Theta_t = \alpha\Theta_t dt + \beta\Theta_t dB_t, \quad \Theta_0 = \theta, \quad (2.1)$$

der trendfaktoren α og volatilitetsfaktoren β er to bestemte reelle konstanter, og B er den Brownske bevegelsen. Dersom markedet er i tilstand θ ved tiden 0, så er tilstanden til den Brownske bevegelsen ved tiden t gitt ved den stokastiske variabelen

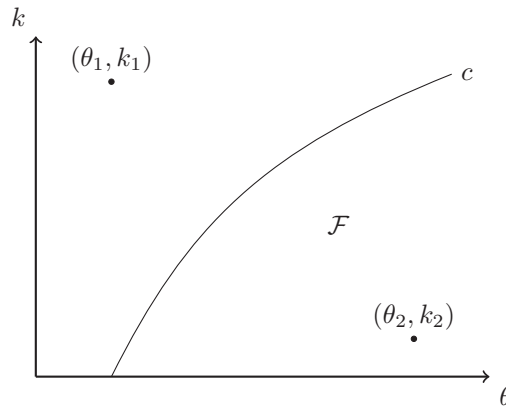
$$\Theta_t = \theta e^{\left(\alpha - \frac{\beta^2}{2}\right)t + \beta B_t}.$$

Kort sagt, så er ekspansjonsstrategien for bedriften gitt ved en tiltagende prosess K_t som er målbar med hensyn på σ -algebraen $\sigma\{\Theta_s : s \leq t\}$ generert av Θ opp til tiden t , og den totale forventede diskonterte nettoinntekten bedriften vil få dersom de følger en slik utbyggingsstrategi K er heuristisk gitt ved

$$J(K) = E^{\theta, k} \left[\int_0^\infty e^{-rt} (\Pi(\Theta_t, K_t) dt - \Gamma_k(\Theta_t, K_t) dK_t) \right], \quad (2.2)$$

der $r \in \mathbb{R}_+$ er en konstant diskonteringsfaktor, Γ_k er den partiellderiverte av Γ med hensyn på k , og $E^{\theta, k}$ betegner forventningen med hensyn på prosessen (Θ_t, K_t) med startverdi (θ, k) . Målet er så å finne den strategien K som maksimerer profitten $J(K)$.

Vi kan angripe dette problemet på en mer intuitiv måte, men som er noe naiv. Anta først at vi starter i en tilstand gitt ved (θ_1, k_1) som vist i Figur 1. Dette er en tilstand der bedriftens kapasitet er høy, mens etterspørselen i markedet er lav.



Figur 1.

Under normale forhold vil vi ikke ønske å bruke penger på å ekspandere i en slik tilstand. Hvis på en annen side vi befinner oss i en tilstand tilsvarende (θ_2, k_2) , der etterspørselen er høy mens vår kapasitet er lav, så ville vi sannsynligvis ønske å ekspandere så fort som mulig for å øke vår produksjonskapasitet for å imøtekomme markedets etterspørsel. Det vil være fornuftig å anta at det er et klart skille mellom de punktene hvor vi ønsker å investere mer i utbygging, og på de punktene hvor vi ønsker å vente på bedre tider. Denne antagelsen er illustrert ved kurven c i Figur 1. Dette er ingen fasit, men et mulig eksempel på hvordan forholdet mellom de to ulike tilfellene kan se ut. Med dette bildet i hodet kan vi lettere få en intuitiv forståelse for hva den optimale fremgangsmåten må

2. Kobilas artikkel

være: Dersom vi starter i et punkt ovenfor kurven c , så bør vi vente til vi treffer på c , og så investere akkurat tilstrekkelig for å alltid holde oss rett ovenfor c . Dersom vi derimot starter under kurven c , så bør vi umiddelbart investere akkurat nok for å komme oss opp til c , for så å følge samme strategi som ovenfor.

Løsningen på optimeringsproblemet er faktisk så enkelt som nevnt ovenfor, men problemet ligger i å identifisere dette forbudsområdet (området under kurven c) som prosessen (Θ_t, K_t) ikke må oppholde seg i. Det viser seg at dette området kan indentifiseres ved hjelp av to funksjoner

$$\psi_1, \psi_2 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty].$$

Før vi kan definere ψ_1 og ψ_2 , så må vi definere noen byggeklosser i bunn. Løsningen på problemet baserer seg på differensialligninger, mer spesifikt på den inhomogene ligningen

$$\frac{1}{2}\beta^2\theta^2u''(\theta) + \alpha\theta u'(\theta) - ru(\theta) = -f(\theta). \quad (2.3)$$

Vi kan her benytte differensialoperatoren A , slik at

$$Au(\theta) = \frac{1}{2}\beta^2\theta^2u''(\theta) + \alpha\theta u'(\theta) - ru(\theta),$$

der den homogene ligningen $Au = 0$ har den generelle løsningen

$$u(\theta) = C\theta^{\gamma_1} + D\theta^{\gamma_2},$$

der γ_1 og γ_2 er henholdsvis den positive og negative roten til den karakteristiske ligningen $\frac{\beta^2}{2}\gamma^2 + \left(\alpha - \frac{\beta^2}{2}\right)\gamma - r = 0$ til den homogene ligningen til Au . Funksjonen f og γ_1, γ_2 er tilknyttet det Lebesgue-målbare rommet $\mathcal{L}_{\gamma_1, \gamma_2}$ definert for alle $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ slik at integralene

$$\int_0^a f(\eta)\eta^{-\gamma_2-1}d\eta \quad \text{og} \quad \int_a^\infty f(\eta)\eta^{-\gamma_1-1}d\eta$$

konvergerer for alle $a \in (0, \infty)$, og Kobilas legger også til en grensebetingelse som sier at C_{γ_1, γ_2}^2 er et sett for alle dobbeltderiverte kontinuerlige funksjoner $u : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ slik at

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta^{-\gamma_2}u(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta^{-\gamma_1}u(\theta) = 0.$$

For å løse det inhomogene problemet benytter vi metoden *variasjon av parametre* og finner den eksplisitte løsningen

$$u(\theta) = \frac{2}{(\gamma_1 - \gamma_2)\beta^2} \left(\theta^{\gamma_2} \int_0^\theta f(\eta)\eta^{-\gamma_2-1}d\eta + \theta^{\gamma_1} \int_\theta^\infty f(\eta)\eta^{-\gamma_1-1}d\eta \right). \quad (2.4)$$

Hvordan denne utregningen gjøres, er beskrevet i detalj i Tillegg B. Med litt mellomregning gir denne differensialligningen uttrykkene

$$\int_0^{\psi_1(k)} \frac{(\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)}{\eta^{\gamma_2+1}}d\eta = 0, \quad (2.5)$$

og

$$\int_0^{\psi_1(k)} \frac{(\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)}{\eta^{\gamma_2+1}} d\eta = 0. \quad (2.6)$$

slik at vi kan definere ψ_1 og ψ_2 ved

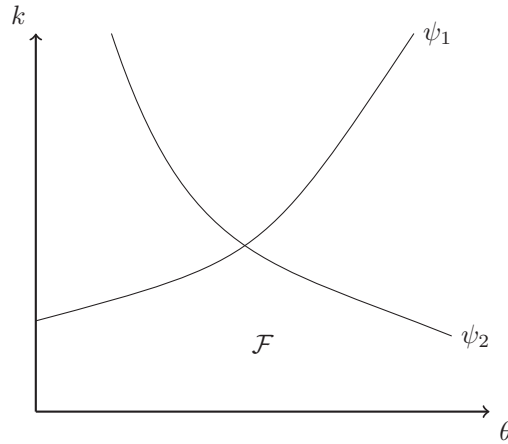
$$\psi_1(k) = \inf\{\theta : \int_0^\theta \frac{(\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)}{\eta^{\gamma_2+1}} d\eta > 0\}, \quad (2.7)$$

og

$$\psi_2(k) = \sup\{\theta : \int_\theta^\infty \frac{(\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)}{\eta^{\gamma_1+1}} d\eta > 0\}, \quad (2.8)$$

der Π_k og Γ_k er de partiellderiverte av Π og Γ med hensyn på k , og vi ser da at for ulike valg av Π og Γ , så kan vi regne ut eksplisitte løsninger av ψ_1 og ψ_2 som den minste/største nullen av et elementært integral. Dersom vi antar at funksjonen $(\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)$ er avtagende i k -variabelen - noe som vil være en fornuftig økonomisk tolkning - så vil funksjonene ψ_1 være tiltakende og ψ_2 avtakende, som vist i Figur 2. Området under begge disse kurvene vil da være det nevnte forbudsområdet, og kan uttrykkes som

$$\mathcal{F} = \{(\theta, k) : \psi_1(k) \leq \theta \leq \psi_2(k)\}$$



Figur 2.

Det er mange forskjellige måter disse kurvene kan oppføre seg på ut i fra hvilke restriksjoner og betingelser man setter på de ulike funksjonene, og vi lister opp noen eksempler på dette i Kapittel 7. En konsekvens av at vi benytter funksjonene ψ_1 og ψ_2 som er verdt å presisere, er at vi kun ser på tilfeller der ψ_1 og ψ_2 danner én topp, slik at en kurve med flere topper og daler som vist i Eksempel 4 i Kapittel 7, er ekskludert.

2. Kobilas artikkel

Vi kan oppsummere metoden hos Kobila med følgende teorem:

Teorem 2.1. *Gitt en geometrisk Brownsk bevegelse*

$$d\Theta_t = \alpha\Theta_t dt + \beta\Theta_t dB_t \quad , \quad \Theta_0 = \theta$$

og en diskonteringsfaktor $r > 0$, la A være operatoren

$$Af(\theta) = \frac{1}{2}\beta^2\theta^2 f''(\theta) + \alpha\theta f'(\theta) - rf(\theta).$$

For ethvert startpunkt $(\theta, k) \in \mathbb{R}_+^2$, så ønsker vi å finne den ikke-avtagende prosessen K_t som er målbar etter sigmaalgebraen $\sigma\{\Theta_s : s \leq t\}$, der $K_0 \geq k$, som maksimerer den totale diskonterte profitten gitt ved

$$J(K) = E^{(\theta, k)} \left[\int_0^\infty e^{-rt} (\Pi + A\Gamma)(\Theta_t, K_t) dt \right] + \Gamma(\theta, k).$$

Gitt at:

- (i) Π er ikke-negativ, Γ er ikke-avtagende i k -variabelen, og de partiellderiverte $\frac{\partial \Pi}{\partial k}$ og $\frac{\partial^{n+m} \Gamma}{\partial \theta^n \partial k^m}$, der $n = 0, 1, 2$ og $m = 0, 1$, eksisterer og er kontinuertlige.
- (ii) Funksjonene

$$M(\theta) = \sup\{ |(\Pi + A\Gamma)(\theta, k)| : k > 0 \}$$

og

$$N^{(k)}(\theta) = \sup\{ |(\Pi_k + A\Gamma_k)(\theta, y)| : 0 < y < k \}$$

tilhører L_{γ_1, γ_2}^1 for alle k .

- (iii) For alle θ , så er

$$\phi(\theta) = \sup\{ k : (\theta, k) \in \mathcal{F} \}$$

endelig.

- (iv) Funksjonen $(\Pi_k + A\Gamma_k)(\theta, k)$ er strengt avtagende i k -variabelen.
- (v) For alle $(\theta, k) \in \mathcal{F}$ er

$$(\Pi + A\Gamma)(\theta, k) \leq (\Pi + A\Gamma)(\theta, \phi(\theta)).$$

er tilfredsstillt, så eksisterer en slik optimal prosess K . Denne prosessen kan bli beskrevet som den vertikale avbøyningen av et forbudsområde \mathcal{F} . Mer presist kan vi si at dersom $\gamma_1 > 0 > \gamma_2$ er de to røttene til den karakteristiske ligningen $\frac{1}{2}\beta^2\gamma^2 + \left(\alpha - \frac{\beta^2}{2}\right)\gamma - r = 0$, og

$$\psi_1(k) = \inf\left\{ \theta : \int_0^\theta \frac{(\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)}{\eta^{\gamma_2+1}} d\eta > 0 \right\}$$

$$\psi_2(k) = \sup\{\theta : \int_{\theta}^{\infty} \frac{(\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)}{\eta^{\gamma_1+1}} d\eta > 0\}$$

$$\mathcal{F} = \{(\theta, k) : \psi_1(k) \leq \theta \leq \psi_2(k)\}$$

$$\phi(\theta) = \sup\{k : (\theta, k) \in \mathcal{F}\},$$

så er

$$K_t = k \vee \sup\{\phi(\Theta_s) : s \leq t\},$$

og den optimale profitten med startpunkt (θ, k) er gitt ved

$$\begin{aligned} h(\theta, k) &= \Gamma(\theta, k) + \int_{\mathcal{F}_k^c} g(\theta, \eta) (\Pi + A\Gamma)(\eta, k) d\eta \\ &\quad + \int_{\mathcal{F}_k} g(\theta, \eta) (\Pi + A\Gamma)(\eta, \phi(\eta)) d\eta, \end{aligned} \quad (2.9)$$

der $\mathcal{F}_k = \{\theta : (\theta, k) \in \mathcal{F}\}$, og g er Greenfunksjonen

$$g(\theta, k) = \begin{cases} \frac{2}{(\gamma_1 - \gamma_2)\beta^2} \theta^{\gamma_2} \eta^{-\gamma_2 - 1} & \text{dersom } \eta < \theta \\ \frac{2}{(\gamma_1 - \gamma_2)\beta^2} \theta^{\gamma_1} \eta^{-\gamma_1 - 1} & \text{dersom } \eta > \theta. \end{cases}$$

For bevis på overnevnte teorem henvises det til [Kob93]. Målet til denne oppgaven er å finne den diskret analogen til Teorem 2.1.

Som Kobila nevner i sin artikkel så må det understrekes at målet med [Kob93] er å finne så presis og eksplisitt informasjon som mulig ut i fra relativt elementære matematiske metoder. Hvis man hadde benyttet mer abstrakte metoder så ville man uten tvil kunne bevise resultater som ville vært gjeldende i mer generelle tilfeller, men det er ikke målet hos Kobila.

KAPITTEL 3

Spesifisering av den diskret modellen

I dette kapitlet skal vi se på hvordan vi kan benytte teorien til Kobila til å konstruere det matematiske grunnlaget for en diskret modell. Vi beskriver her hvordan vi kan erstatte den underliggende Brownske bevegelsen og differensialligningene, som kun eksisterer i kontinuerlig tid, med alternativer som vil fungere i diskret tid og rom. Vi ønsker med andre ord å få tilsvarende resultater i de samme anvendelsene som hos Kobila, men ved å bruke en alternativ modell som er på diskret form i stedet for kontinuerlig.

Før vi går i gang med konstruksjonen må det trekkes frem at det ikke vil være nødvendig å diskretisere parameteren k og funksjonene Π og Γ . Parameteren k kan diskretiseres, men som vi senere vil gå inn på så er ikke det nødvendig, og det ville bare gjøre problemet mer komplisert.

Hos Kobila og i det kontinuerlige tilfellet benyttes en éndimensjonal geometrisk Brownsk bevegelse som en underliggende prosess til den forventede diskonterte nettoinntektsfunksjonen J i Kapittel 2 for å tilføre informasjon om markedet til $J(K)$ når K er utbyggingsstrategien. Den geometrisk Brownske bevegelsen modellerer alene utviklingen i markedet ved hjelp av to reelle parametre α og β som tilfører statistisk data, og B som er den geometrisk Brownske bevegelsen som tilfører støy/tilfeldigheter, og fremstilles konkret som

$$d\Theta_t = \alpha\Theta_t dt + \beta\Theta_t dB_t.$$

I det diskerte tilfellet så benytter vi isteden en Markovkjede som underliggende prosess til $J(K)$ for å tilføre informasjon om markedet. En Markovkjede er kort fortalt en stokastisk modell som beskriver en følge av stokastiske variabler med Markovegenskapen. Denne egenskapen innebærer at neste tilstand (eller hendelse) til kjeden kun er bestemt av den foregående tilstanden, og ingen andre tidligere tilstander. Siden prosessen er diskret, bestemmes tidspunktet for et utfall ut i fra en tellbar tidslinje definert ved

$$\mathbb{T} = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t, \dots\},$$

der $\Delta t > 0$, og lengden på hvert steg Δt frem i tid er et lite tall. Hva dette utfallet er, bestemmes av de to parametrene θ og p . Parameteren θ beskriver

3. Spesifisering av den diskret modellen

tilstanden ved å gi oss et bestemt tall, der et høyt tall tilsvarer et sterkt marked og et lavt tall tilsvarer et svakt marked. Parameteren p gir oss sannsynligheten for havne i denne tilstand. Tilstandsrommet, der $\theta > 1$, definerer vi som

$$\begin{aligned}\mathbb{S} &= \{\dots, \theta_{-2}, \theta_{-1}, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots\} \\ &= \{\theta_n : n \in \mathbb{Z}\},\end{aligned}$$

som inneholder alle mulige utfall. Variablene $\theta_n \in \mathbb{S}$ kan uttrykkes samlet som en prosess Θ med tidslinje \mathbb{T} og tilstandsrom \mathbb{S} . Prosessen Θ er Markovkjeden vi vil benytte. Markovkjeden Θ vil fungere som en underliggende prosess for vår modell og erstatte den geometrisk Brownske bevegelsen i det kontinuerlige tilfellet. Overgangssannsynlighetene til Markovkjeden er styrt av et tall p mellom 0 og 1 på følgende vis: Dersom prosessen befinner seg i tilstand $\Theta_t = \theta_n$, så vil tilstanden $\Theta_{t+\Delta t}$ ha verdien θ_{n+1} med sannsynlighet p og verdien θ_{n-1} med sannsynlighet $(1-p)$. Dette vil si at dersom vi eksempelvis befinner oss i tilstand θ_3 så vil vi forflytte oss til enten θ_2 med sannsynlighet $(1-p)$ eller til θ_4 med sannsynlighet p . Vi har altså kun muligheten til å flytte oss enten ett steg mot venstre eller ett steg mot høyre. Hvordan vi vil tilpasse Markovkjedens overgangssannsynligheter slik at den vil være en fullverdig erstatning for geometrisk Brownsk bevegelse skal vi se nærmere på i Kapittel 5. For mer om overgangsfunksjoner og Markovkjeder henvises det til [Lam77].

Vi har også en diskonteringsfaktor $0 < r < 1$. Den virker slik at en inntekt på K ved tiden $t = n\Delta t$ har en nåverdi ved tiden 0 på $Kr^n = Kr^{\frac{t}{\Delta t}}$.

La oss nå se på hvordan vi kan erstatte differensialligningen (2.3). Vi lar E^{θ_n} betegne forventningen når prosessen starter i tilstand θ_n . Dersom vi ved tidspunkt t får en inntekt på $f(\Theta_t)\Delta t$, vil den totale diskonterte nettoinntekten per tidsenhet være

$$u(\theta_n) = E^{\theta_n} \left[\sum_{t=0}^{\infty} f(\Theta_t) r^t \Delta t \right]$$

der summen spenner over alle $t \in \mathbb{T}$, det vil si at summen også kan skrives som $\sum_{n=0}^{\infty} f(\Theta_{n\Delta t}) r^{n\Delta t} \Delta t$. I Kapittel 4 skal vi vise at $u(\theta_n)$ kan skrives på differensform som

$$u_n = rpu_{n+1} + r(1-p)u_{n-1} + f(\theta_n)\Delta t. \quad (3.1)$$

Vi trenger foreløpig ikke å spesifisere annet enn at $\theta > 1$, $\Delta t > 0$, $0 < r < 1$ og $0 < p < 1$ med tanke på modelleringen av den statistiske utviklingen i markedet i det diskret tilfellet.

Vi har nå beskrevet en Markovkjede med overgangssannsynligheter som erstatter den Brownske bevegelsen (2.1), og en differensligning (3.1) som kan erstatte differensialligningen (2.3). I neste kapittel skal vi gå i dybden på differensligningen.

KAPITTEL 4

Kalkulering i den diskret modellen

I dette kapitlet skal vi se på hvordan vi kan uttrykke løsninger til den diskret modellen. I den kontinuerlige teorien benyttes differensialligningen (2.4), men i Kapittel 3 nevnte vi en differensligning som skulle kunne gjøre samme jobben. I starten av dette kapitlet skal vi derfor først se på bakgrunnen for differensligningen (3.1), samt se på hvordan vi faktisk finner denne ligningen. Videre skal vi analysere både det homogene og inhomogene problemet til (3.1), i tillegg til å finne den løsningen som erstatter den eksplisitte løsningen (2.4) av differensialligningen i det kontinuerlige tilfellet.

4.1 Modellens utgangspunkt

Vi gjør først en kort gjengivelse av Markovkjeden som fungerer som underliggende prosessen med diskret tidslinje og tellbart tilstandsrom gitt ved

$$\mathbb{T} = \{0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots\}$$

for et lite tall Δt , og

$$\mathbb{S} = \{\theta_n : n \in \mathbb{Z}\}$$

der θ er et reelt tall større enn 1 som betegner tilstander i \mathbb{S} . Overgangssannsynlighetene til Markovkjeden var gitt på følgende måte: Dersom prosessen er i tilstand θ_n ved tid $t \in \mathbb{T}$, vil den ved tiden $t + \Delta$ være i tilstand θ_{n+1} med sannsynlighet p og i tilstand θ_{n-1} med sannsynlighet $1 - p$. Videre lar vi Θ^s betegne en realisering av Markovkjeden som starter i punkt $s \in \mathbb{S}$. Hvis f er en funksjon definert på \mathbb{S} , så skal vi være interessert i funksjonen u definert ved

$$u(s) = E \left[\sum_{t \in T} f(\Theta_t^s) r^t \Delta t \right] \quad (4.1)$$

der r er en diskonteringsfaktor som justerer for nåverdien av et fremtidig overskudd. Funksjonen u er den forventede diskonterte nettoinntekten når nettoinntekten per tidsenhet er gitt av f . Dette uttrykket er nesten identisk med det kontinuerlige tilfellet i Kapittel 2. For å uttrykke u på differensform gjør vi følgende: Ser på f som inntekt per tidsenhet, det vil si at dersom prosessen er i tilstand θ ved et tidspunkt t , så vil vi på tidspunktet t få en utbetaling på $f(\theta)\Delta t$. Vi antar også at f er begrenset. Dette er fordelaktig matematisk

4. Kalkulering i den diskret modellen

sett men også generelt fornuftig, siden uendelig inntekt er lite realistisk. På grunn av diskonteringen, vil denne utbetalingen ha en "nåverdi" på $f(\theta)r^t \Delta t$ ved tid 0. Starter prosessen i tilstand θ_n , vil den totale forventede diskonterte utbetalingen dermed være

$$\sum_{t=0}^{\infty} E^{(0,\theta)} \left(f(\Theta_t) r^t \right) \Delta t \quad (4.2)$$

der $E^{(0,\theta)}$ gir den forventede utbetalingen med utgangspunkt i at prosessen starter i punktet θ ved tiden 0. Prosessen kan starte i et hvilket som helst punkt θ_n , men i løpet av sitt liv fra 0 til ∞ går den innom alle disse punktene for θ . Derfor må vi summere for å finne den *totale* forventede utbetalingen.

Fra tidspunkt 0 til tidspunkt Δt skjer følgende: Anta at vi starter i tilstand θ_n ved tiden 0. Vi får da først en inntekt på $f(\theta_n)\Delta t$, og går deretter til tilstand θ_{n+1} med sannsynlighet p og til tilstand θ_{n-1} med sannsynlighet $1-p$. Dersom vi går til tilstand θ_{n+1} , vil den forventede inntekten fra tidspunkt Δt og utover være

$$\sum_{s=\Delta t}^{\infty} E^{(\Delta t, \theta_{n+1})} \left(f(\Theta_s) r^s \right) \Delta t.$$

Skifter vi summasjonsindeks slik at summen starter i 0 istedenfor Δt , så er dette uttrykket lik

$$r \sum_{s=0}^{\infty} E^{(0, \theta_{n+1})} \left(f(\Theta_s) r^s \right) \Delta t \quad (4.3)$$

der vi har ganget med r for å diskontere for tiden mellom 0 og Δt . Dersom vi isteden går til tilstand θ_{n-1} , får vi på tilsvarende måte en fremtidig inntekt på

$$r \sum_{s=0}^{\infty} E^{(0, \theta_{n-1})} \left(f(\Theta_s) r^s \right) \Delta t. \quad (4.4)$$

Vi kan nå kombinere uttrykkene (4.2), (4.3) og (4.4) og beskrive den totale forventede innteken som

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} E^{(0, \theta_n)} \left(f(\Theta_s) r^s \right) \Delta t &= f(\theta_n) \Delta t + pr \sum_{s=0}^{\infty} E^{(0, \theta_{n+1})} \left(f(\Theta_s) r^s \right) \Delta t \\ &\quad + (1-p)r \sum_{s=0}^{\infty} E^{(0, \theta_{n-1})} \left(f(\Theta_s) r^s \right) \Delta t \end{aligned} \quad (4.5)$$

der $f(\theta_n)\Delta t$ er utbetalingen ved tidspunkt 0, mens de to andre leddene er de forventede utbetalingene avhengig av om vi går til θ_{n+1} eller θ_{n-1} i første skritt. Fra (4.2) har vi at

$$u(\theta_n) = \sum_{t=0}^{\infty} E^{(0, \theta_n)} \left(f(\Theta_s) r^s \right) \Delta t$$

og vi kan da skrive (4.5) som

$$u(\theta_n) = f(\theta_n)\Delta t + pru(\theta_{n+1}) + (1-p)ru(\theta_{n-1}). \quad (4.6)$$

Dette er nøyaktig den samme ligningen som (4.1), men her uttrykt på differensform, som også er identisk med (3.1). Her er $f(\theta)$ inntekten bedriften har per tidsenhet når markedet er i tilstand θ , og r er som nevnt diskonteringsfaktoren.

Oppgaven nå er å finne løsninger til denne inhomogene annenordens differensligningen (4.6). Dette vil vi gjøre gjennom to steg. Først finner vi en generell løsning, så benytter vi denne løsningen til å finne en spesiell løsning som er skreddersydd til vår modell. Denne løsningen vil da kunne erstatte (2.4) hos Kobila. Vi vil her benytte en metode som kalles *variasjon av parametre*, som vil bli nærmere forklart underveis i utregningen.

4.2 Generell løsning

Før vi går løs på dette så endrer vi faktoren $u(\theta_n)$ til u_n , i tillegg til å endre på indeksen til u . Dette er for å gjøre utregningen litt ryddigere, i tillegg til at vi ser på det som fornuftig å ha differensligningen skrevet på generell form, slik den blir presentert i [Ela05]. Da får vi at

$$rpu_{n+2} - u_{n+1} + r(1-p)u_n = -f_n\Delta t. \quad (4.7)$$

Ser så først på den homogene ligningen der vi tar utgangspunkt i at f er et polynom. Da setter vi

$$rpu_{n+2} - u_{n+1} + r(1-p)u_n = 0,$$

som kan skrives om til

$$u_{n+2} - \frac{1}{rp}u_{n+1} + \frac{(1-p)}{p}u_n = 0. \quad (4.8)$$

Antar så at vi har en løsning på formen $u_n = g^n$. Dette gir

$$\begin{aligned} g^{n+2} - \frac{1}{rp}g^{n+1} + \frac{(1-p)}{p}g^n &= 0 \\ \Leftrightarrow g^n \left(g^2 - \frac{1}{rp}g + \frac{(1-p)}{p} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Skal dette uttrykket være lik 0 for alle n (inkludert $n = 0$), må

$$g^2 - \frac{1}{rp}g + \frac{(1-p)}{p} = 0. \quad (4.9)$$

Dette er den *karakteristiske* ligningen til den homogene ligningen til u , der g representerer løsninger til u på formen u_n . Den karakteristiske ligningen kan løses ved hjelp av annengradsformelen og vi vil få de to reelle røttene

$$g_1 > 1 \quad \text{og} \quad g_2 < 1.$$

4. Kalkulering i den diskret modellen

Denne utregning er vist i detalj i Tillegg B. Med to reelle røtter vet vi fra Setning 3 i Tillegg A at løsningene til differensligningen (4.8) er nøyaktig de følgene som kan skrives på formen

$$u_n = Cg_1^n + Dg_2^n,$$

som tilsvarer

$$u_n = Cu_n^{(1)} + Du_n^{(2)} \quad (4.10)$$

der C og D er konstanter, og $u_n^{(1)}$ og $u_n^{(2)}$ er to lineært uavhengige løsninger av den homogene ligningen. Dette er den *generelle* løsningen til det homogene problemet, og vi skal nå bruke dette til å finne *partikulærløsningen* til det inhomogene problemet (4.7). Før vi går videre så skriver vi om (4.7) til

$$u_{n+2} - \frac{1}{rp}u_{n+1} + \frac{(1-p)}{p}u_n = -f_n \frac{\Delta t}{rp}. \quad (4.11)$$

Denne differensligningen, som følge av Setning 4 Tillegg A, vil ha løsninger på formen

$$u_n = u_n^p + u_n^h, \quad (4.12)$$

der u^h er den homogene løsningen (4.10) til ligning (4.7), og u^p er partikulærløsningen vi skal finne. Merk at dersom $u_n^{(1)}$ og $u_n^{(2)}$ (som tilsvarer g_1 og g_2) er to løsninger til den homogene ligningen, så er $C_1u_n^{(1)} + C_2u_n^{(2)}$ også en løsning til den homogene ligningen for vilkårlige C_1 og C_2 . Definerer nå Wronskideterminanten som blir nyttig under utregningen.

Definisjon 4.1 Wronskideterminanten W_n er gitt ved

$$W_n = \begin{pmatrix} u_n^{(1)} & u_n^{(2)} \\ u_{n+1}^{(1)} & u_{n+1}^{(2)} \end{pmatrix} = u_n^{(1)}u_{n+1}^{(2)} - u_n^{(2)}u_{n+1}^{(1)}.$$

Antar nå at (4.11) har partikulærløsning på formen

$$u_n^p = A_n u_n^{(1)} + B_n u_n^{(2)} \quad (4.13)$$

der $u_n^{(1)}$ og $u_n^{(2)}$ er de samme løsningene av u som ble funnet i det homogene tilfellet, og A_n og B_n er følger som ikke enda er spesifisert. For å finne disse følgene slik at u er en løsning av den inhomogene ligningen benytter vi metoden variasjon av parametre. Denne metoden består av å erstatte variablene C og D , fra det homogene tilfellet, med følgene A_n og B_n . Disse følgene har varierende størrelser, derav navnet variasjon av parametre, og vi kan skrive at

$$\begin{aligned} u_{n+1}^p &= A_{n+1}u_{n+1}^{(1)} + B_{n+1}u_{n+1}^{(2)} \\ &= A_n u_{n+1}^{(1)} + B_n u_{n+1}^{(2)} + (u_{n+1}^{(1)}(A_{n+1} - A_n) + u_{n+1}^{(2)}(B_{n+1} - B_n)) \\ &= A_n u_{n+1}^{(1)} + B_n u_{n+1}^{(2)} + u_{n+1}^{(1)}\Delta A_n + u_{n+1}^{(2)}\Delta B_n. \end{aligned}$$

Legger så til betingelsen

$$u_{n+1}^{(1)}\Delta A_n + u_{n+1}^{(2)}\Delta B_n = 0, \quad (4.14)$$

for alle n . Vi ønsker å finne en løsning slik at denne betingelsen er oppfylt. Da er

$$u_{n+1}^p = A_n u_{n+1}^{(1)} + B_n u_{n+1}^{(2)}.$$

Siden denne gjelder for alle n , vil den også gjelde om vi bytter ut n med $n+1$, og vi får

$$u_{n+2}^{(1)}\Delta A_{n+1} + u_{n+2}^{(2)}\Delta B_{n+1} = 0.$$

Dermed har vi at

$$\begin{aligned} u_{n+2}^p &= A_{n+1}u_{n+2}^{(1)} + B_{n+1}u_{n+2}^{(2)} \\ &= u_{n+2}^{(1)}(A_{n+1} - A_n) + u_{n+2}^{(2)}(B_{n+1} - B_n) + A_n u_{n+2}^{(1)} + B_n u_{n+2}^{(2)} \\ &= u_{n+2}^{(1)}\Delta A_n + u_{n+2}^{(2)}\Delta B_n + A_n u_{n+2}^{(1)} + B_n u_{n+2}^{(2)}. \end{aligned}$$

Vi har nå funnet uttrykk for u_n^p , u_{n+1}^p og u_{n+2}^p , og kan uttrykke venstre side av (4.11) på følgende måte

$$\begin{aligned} u_{n+2}^p - \frac{1}{rp}u_{n+1}^p + \frac{(1-p)}{p}u_n^p &= (u_{n+2}^{(1)}\Delta A_n + u_{n+2}^{(2)}\Delta B_n + A_n u_{n+2}^{(1)} + B_n u_{n+2}^{(2)}) \\ &\quad + \frac{1}{rp}(A_n u_{n+1}^{(1)} + B_n u_{n+1}^{(2)}) \\ &\quad + \frac{(1-p)}{p}(A_n u_n^{(1)} + B_n u_n^{(2)}) \\ &= u_{n+2}^{(1)}\Delta A_n + u_{n+2}^{(2)}\Delta B_n \\ &\quad + A_n \left(u_{n+2}^{(1)} - \frac{1}{rp}u_{n+1}^{(1)} + \frac{(1-p)}{p}u_n^{(1)} \right) \\ &\quad + B_n \left(u_{n+2}^{(2)} - \frac{1}{rp}u_{n+1}^{(2)} + \frac{(1-p)}{p}u_n^{(2)} \right) \\ &= u_{n+2}^{(1)}\Delta A_n + u_{n+2}^{(2)}\Delta B_n, \end{aligned}$$

siden $u_{n+2}^{(1)} - \frac{1}{rp}u_{n+1}^{(1)} + \frac{(1-p)}{p}u_n^{(1)}$ og $u_{n+2}^{(2)} - \frac{1}{rp}u_{n+1}^{(2)} + \frac{(1-p)}{p}u_n^{(2)}$ er løsninger av den homogene ligningen og dermed lik 0. Ettersom

$$u_{n+2}^p - \frac{1}{rp}u_{n+1}^p + \frac{(1-p)}{p}u_n^p = -f_n \frac{\Delta t}{rp},$$

får vi løsningen

$$u_{n+2}^{(1)}\Delta A_n + u_{n+2}^{(2)}\Delta B_n = -f_n \frac{\Delta t}{rp}. \quad (4.15)$$

4. Kalkulering i den diskret modellen

Vi ser nå at hvis vi kombinerer (4.14) og (4.15) så har vi et helt ordinært ligningssett med to ukjente, ΔA_n og ΔB_n . Skriver om og regner ut:

$$(4.14) : \quad \Delta A_n = -\frac{u_{n+1}^{(2)} \Delta B_n}{u_{n+1}^{(1)}} \quad \text{og} \quad \Delta B_n = -\frac{u_{n+1}^{(1)} \Delta A_n}{u_{n+1}^{(2)}}$$

$$(4.15) : \quad \Delta A_n = -f_n \frac{\Delta t}{rpu_{n+2}^{(1)}} - \frac{u_{n+2}^{(2)} \Delta B_n}{u_{n+2}^{(1)}},$$

der (4.14) innsatt i (4.15) med hensyn på ΔB_n gir

$$\begin{aligned} -\frac{u_{n+1}^{(2)} \Delta B_n}{u_{n+1}^{(1)}} &= -f_n \frac{\Delta t}{rpu_{n+2}^{(1)}} - \frac{u_{n+2}^{(2)} \Delta B_n}{u_{n+2}^{(1)}} \\ \Leftrightarrow \Delta B_n \left(\frac{u_{n+2}^{(2)}}{u_{n+2}^{(1)}} - \frac{u_{n+1}^{(2)}}{u_{n+1}^{(1)}} \right) &= -f_n \frac{\Delta t}{rpu_{n+2}^{(1)}} \\ \Leftrightarrow \Delta B_n \left(\frac{u_{n+2}^{(2)} u_{n+1}^{(1)} - u_{n+1}^{(2)} u_{n+2}^{(1)}}{u_{n+2}^{(1)} u_{n+1}^{(1)}} \right) &= -f_n \frac{\Delta t}{rpu_{n+2}^{(1)}} \\ \Leftrightarrow \Delta B_n \left(\frac{W_{n+1}}{u_{n+2}^{(1)} u_{n+1}^{(1)}} \right) &= -f_n \frac{\Delta t}{rpu_{n+2}^{(1)}} \\ \Leftrightarrow \Delta B_n &= -f_n \frac{u_{n+2}^{(1)} u_{n+1}^{(1)} \Delta t}{W_{n+1} rpu_{n+2}^{(1)}} \\ \Leftrightarrow \Delta B_n &= -\frac{u_{n+1}^{(1)} \Delta t}{W_{n+1} rp} f_n. \end{aligned}$$

Finner så et uttrykk for ΔA_n :

$$\begin{aligned} -\frac{u_{n+1}^{(1)} \Delta A_n}{u_{n+1}^{(2)}} &= -\frac{u_{n+1}^{(1)} \Delta t}{W_{n+1} rp} f_n \\ \Leftrightarrow \Delta A_n &= \frac{u_{n+1}^{(2)} \Delta t}{W_{n+1} rp} f_n. \end{aligned}$$

Med andre ord er

$$\Delta A_n = A_{n+1} - A_n = \frac{u_{n+1}^{(2)} \Delta t}{W_{n+1} rp} f_n,$$

og

$$\Delta B_n = B_{n+1} - B_n = -\frac{u_{n+1}^{(1)} \Delta t}{W_{n+1} rp} f_n.$$

Merk at

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta A_k &= \sum_{k=0}^{n-1} (A_{k+1} - A_k) \\ &= (A_1 - A_0) + (A_2 - A_1) + \cdots + (A_n - A_{n-1}) \\ &= A_n - A_0,\end{aligned}$$

dersom $n > 0$. I tilfellet der $n < 0$ så får vi at

$$\begin{aligned}A_0 - A_n &= (A_{n-1} - A_n) + \cdots + (A_{-1} - A_{-2}) + (A_0 - A_{-1}) \\ &= \sum_{k=n}^{-1} (A_{k+1} - A_k) \\ &= \sum_{k=n}^{-1} \Delta A_k,\end{aligned}$$

som vil si at

$$A_n - A_0 = - \sum_{k=n}^{-1} \Delta A_k.$$

Dette vil si at dersom vi har et uttrykk for ΔA , og ønsker et uttrykk for A_n , så har vi nå to forskjellige formler avhengig av om n er positiv eller negativ, nemlig

$$A_n = A_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta A_k,$$

for positive n , og

$$A_n = A_0 - \sum_{k=n}^{-1} \Delta A_k,$$

for negative n . Dette er upraktisk og vi ønsker å ha én skrivemåte for den samme løsningen for begge tilfeller av n . Introduserer derfor følgende summekonvensjon:

Definisjon 4.2 Dersom $k > m$, så er $\sum_{k=n}^{m-1} = - \sum_{k=m}^{n-1}$.

Dette gjør at vi kan skrive at

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta A_k = - \sum_{k=n}^{-1} \Delta A_k,$$

for negative n , og betyr at vi kun trenger å forholde oss til formelen

$$A_n = A_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta A_k,$$

4. Kalkulering i den diskret modellen

når vi ønsker å finne et uttrykk for A_n både når n er positiv og negativ. Tilsvarende for B får vi at

$$B_n = B_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta B_k,$$

for positiv og negativ n . Dersom vi nå velger at $A_0 = B_0 = 0$, så får vi følgende uttrykk for våre to ukjente følger i (4.13)

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}^{(2)} \Delta t}{W_{k+1} r p} f_k \quad (4.16)$$

$$B_k = \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{u_{k+1}^{(1)} \Delta t}{W_{k+1} r p} f_k, \quad (4.17)$$

slik at (4.13) nå kan skrives som

$$u_n^p = A_n u_n^{(1)} + B_n u_n^{(2)} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}^{(2)} \Delta t}{W_{k+1} r p} f_k \right) u_n^{(1)} + \left(\sum_{k=0}^{n-1} -\frac{u_{k+1}^{(1)} \Delta t}{W_{k+1} r p} f_k \right) u_n^{(2)}.$$

Dette er partikulærløsningen til det inhomogene problemet (4.11). Sammen med den homogene løsningen så kan vi ut i fra formel (4.12) skrive ut den *generelle* løsningen til det inhomogene problemet:

$$u_n = C u_n^{(1)} + D u_n^{(2)} + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}^{(2)} \Delta t}{W_{k+1} r p} f_k \right) u_n^{(1)} + \left(\sum_{k=0}^{n-1} -\frac{u_{k+1}^{(1)} \Delta t}{W_{k+1} r p} f_k \right) u_n^{(2)}.$$

Dette uttrykket kan vi derimot forenkle betraktelig. Setter $u_k^{(1)} = g_1^k$ og $u_k^{(2)} = g_2^k$ inn i uttrykket for A_n , og får at

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_2^{k+1} \Delta t}{W_{k+1} r p} f_k.$$

Ved å utvide Wronskideterminanten kan vi skrive

$$\begin{aligned} \frac{g_2^{k+1}}{W_{k+1}(g_1, g_2)} &= \frac{g_2^{k+1}}{g_2^{k+2} g_1^{k+1} - g_2^{k+1} g_1^{k+2}} \\ &= \frac{g_2^{k+1}}{g_2^{k+1} g_1^{k+1} (g_2 - g_1)} \\ &= \frac{1}{g_1^{k+1} (g_2 - g_1)} \\ &= \frac{g_1^{-k-1}}{(g_2 - g_1)}. \end{aligned}$$

Multipliserer så med (-1) over og under brøkstreken for at uttrykket skal ligne mest på det kontinuerlige tilfellet. Setter dette inn i A_n og får

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{g_1^{-k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2) r p} f_k.$$

Ved å flytte ut av summen det som ikke er påvirket av k , med unntak av Δt , får vi

$$A_n = \frac{1}{(g_1 - g_2)rp} \sum_{k=0}^{n-1} -f_k g_1^{-k-1} \Delta t.$$

Gjør det på samme måte med B_n og får

$$\begin{aligned} B_k &= \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{u_{k+1}^{(1)} \Delta t}{W_{k+1} rp} f_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{g_1^{k+1} \Delta t}{W_{k+1} rp} f_k, \end{aligned}$$

der

$$\begin{aligned} \frac{g_1^{k+1}}{W_{k+1}(g_1, g_2)} &= \frac{g_1^{k+1}}{g_2^{k+2} g_1^{k+1} - g_2^{k+1} g_1^{k+2}} \\ &= \frac{g_1^{k+1}}{g_2^{k+1} g_1^{k+1} (g_2 - g_1)} \\ &= \frac{1}{g_2^{k+1} (g_2 - g_1)} \\ &= \frac{g_2^{-k-1}}{(g_2 - g_1)}. \end{aligned}$$

Multiplisert med (-1) får vi at B_n kan skrives

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_2^{-k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2)rp} f_k.$$

Gjør så samme omflyttingen av faktorer som med A_n , og får

$$B_n = \frac{1}{(g_1 - g_2)rp} \sum_{k=0}^{n-1} f_k g_2^{-k-1} \Delta t.$$

Setter nå uttrykkene for A_n og B_n inn i den generelle løsningen for differensligningen og får

$$u_n = C g_1^n + D g_2^n + \left(\frac{1}{(g_1 - g_2)rp} \sum_{k=0}^{n-1} -f_k g_1^{-k-1} \Delta t \right) g_1^n + \left(\frac{1}{(g_2 - g_1)rp} \sum_{k=0}^{n-1} f_k g_2^{-k-1} \Delta t \right) g_2^n,$$

Som kan forenkles til

$$u_n = C g_1^n + D g_2^n + \frac{1}{(g_1 - g_2)rp} \left(g_2^n \sum_{k=0}^{n-1} f_k g_2^{-k-1} \Delta t - g_1^n \sum_{k=0}^{n-1} f_k g_1^{-k-1} \Delta t \right).$$

Dette er som sagt den generelle løsningen til det inhomogene problemet beskrevet ved (4.6). Med den generelle løsningen klar, kan vi nå se på den spesielle løsningen.

4.3 Spesiell løsning

For at den generelle løsningen til (4.6) skal ha en hensikt i vårt konkrete tilfelle, så er vi avhengig av å vite noe om utfallsrommet til denne ligningen, hvilket betyr at vi må bestemme randbetingelser. Disse betingelsene skal forhindre løsningen vår å ta uendelig antall forskjellige verdier når n går mot enten ∞ eller $-\infty$. Sagt med andre ord må vi gjøre ligningen vår begrenset. For å finne ut om dette lar seg gjøre må vi se på innholdet i ligningen. Siden f er en funksjon for inntekt er det som sagt naturlig å se på denne funksjonen som begrenset. Videre er r , p og g_i konstanter og dermed automatisk begrenset. Dette betyr at de eneste variablene vi kan gjøre noe med for å begrense utfallsrommet til u_n er ved å sette betingelser på de ukjente variablene C og D . Dersom disse variablene kan konkretiseres og være slik at ligningen vår blir konvergent, så vil dette være de randbetingelsene vi ønsker å ha for å få u_n begrenset. En slik løsning med bestemte verdier for C og D kalles den *spesielle* løsningen til (4.6), og vil være den diskret analogen til (2.4) i Kapittel 2. For å finne denne gjør vi følgende: Vi vet fra tidligere at $g_1 > 1$ og $g_2 < 1$. Det vil si at $g_1^n \rightarrow \infty$ når $n \rightarrow \infty$ og $g_2^n \rightarrow \infty$ når $n \rightarrow -\infty$. Dette betyr at også

$$\left. \begin{aligned} Cg_1^n &\rightarrow \infty \\ g_1^n \sum_{k=0}^{n-1} f_k g_1^{-k-1} \Delta t &\rightarrow \infty \\ Dg_2^n &\rightarrow 0 \\ g_2^n \sum_{k=0}^{n-1} f_k g_2^{-k-1} \Delta t &\rightarrow \text{konstant} \end{aligned} \right\} \text{ når } n \rightarrow \infty,$$

og

$$\left. \begin{aligned} Dg_2^n &\rightarrow \infty \\ g_2^n \sum_{k=0}^{n-1} f_k g_2^{-k-1} \Delta t &\rightarrow \infty \\ Cg_1^n &\rightarrow 0 \\ g_1^n \sum_{k=0}^{n-1} f_k g_1^{-k-1} \Delta t &\rightarrow \text{konstant} \end{aligned} \right\} \text{ når } n \rightarrow -\infty.$$

Dersom vi kombinerer leddene i formelen for u_n som går mot uendelig når $n \rightarrow \infty$, får vi

$$\begin{aligned} & Cg_1^n - g_1^n \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f_k g_1^{-k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2)rp} \\ &= g_1^n \left(C - \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f_k g_1^{-k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2)rp} \right), \end{aligned}$$

der som sagt $g_1^n \rightarrow \infty$ når $n \rightarrow \infty$, slik at for å holde uttrykket begrenset må C være slik at det som står inni parenteser går mot null. Med andre ord vil vi at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(C - \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f_k g_1^{-k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2)rp} \right) = 0.$$

Vi vet at rekken $\sum_{k=0}^{n-1} f_k g_1^{k-1} \Delta t$ konvergerer siden f er begrenset og $g_1 > 1$, som er bevist ved Setning 6 i Tillegg A, så vi kan skrive at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(C - \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f_k g_1^{k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2) r p} \right) = C - \frac{\sum_{k=0}^{\infty} f_k g_1^{k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2) r p}.$$

Dersom dette uttrykket skal gå mot 0 når $n \rightarrow \infty$, må

$$C = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} f_k g_1^{k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2) r p}.$$

Dette er den første av de to randbetingelsen vi må ha. Hvis vi setter dette uttrykket for C inn i uttrykket for u_n , der vi kombinerte leddene som går mot uendelig når $n \rightarrow \infty$, får vi at

$$\begin{aligned} C g_1^n - g_1^n \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f_k g_1^{k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2) r p} \\ = g_1^n \frac{\sum_{k=0}^{\infty} f_k g_1^{k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2) r p} - g_1^n \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f_k g_1^{k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2) r p} \\ = g_1^n \frac{\sum_{k=n}^{\infty} f_k g_1^{k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2) r p}. \end{aligned}$$

Likeledes for leddene som går mot uendelig når $n \rightarrow -\infty$, så er

$$\begin{aligned} D g_2^n + g_2^n \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f_k g_2^{k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2) r p} \\ = g_2^n \left(D + \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f_k g_2^{k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2) r p} \right), \end{aligned}$$

der som sagt $g_2^n \rightarrow \infty$ når $n \rightarrow -\infty$. For å holde uttrykket begrenset må D være slik at det som står inni parantesen går mot null. Med andre ord vil vi at

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(D + \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f_k g_2^{k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2) r p} \right) = 0.$$

Siden vi her er interessert i negative n , må vi bruke Definisjon 4.2 for å skrive om summasjonen for å se hva uttrykket "egentlig" er. Vi får at

$$D + \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f_k g_2^{k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2) r p} = D - \frac{\sum_{k=n}^{-1} f_k g_2^{k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2) r p}.$$

Som ovenfor vet vi at rekken $\sum_{k=0}^{n-1} f_k g_2^{k-1} \Delta t$ konvergerer siden f er begrenset og $g_2 < 1$, og vi kan skrive at

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(D + \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f_k g_2^{k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2) r p} \right) = D - \frac{\sum_{k=-\infty}^{-1} f_k g_2^{k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2) r p}.$$

Dersom dette uttrykket skal gå mot 0 når $n \rightarrow -\infty$, må

$$D = \frac{\sum_{k=-\infty}^{-1} f_k g_2^{k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2) r p}.$$

4. Kalkulering i den diskret modellen

Dette er den andre randbetingelsen vi må ha. Setter dette uttrykket for D inn i uttrykket for u_n der vi kombinerte leddene som går mot uendelig når $n \rightarrow -\infty$ og får at

$$\begin{aligned} Dg_2^n + g_2^n \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f_k g_2^{-k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2)rp} \\ &= Dg_2^n - g_2^n \frac{\sum_{k=n}^{-1} f_k g_2^{-k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2)rp} \\ &= g_2^n \frac{\sum_{k=-\infty}^{-1} f_k g_2^{-k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2)rp} - g_2^n \frac{\sum_{k=n}^{-1} f_k g_2^{-k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2)rp} \\ &= g_2^n \frac{\sum_{k=-\infty}^{n-1} f_k g_2^{-k-1} \Delta t}{(g_1 - g_2)rp}. \end{aligned}$$

Dette betyr at den eneste løsningen for u_n som holder seg endelig både når n går mot ∞ og mot $-\infty$, er

$$u_n = \frac{1}{(g_1 - g_2)rp} \left(g_2^n \sum_{k=-\infty}^{n-1} f_k g_2^{-k-1} \Delta t + g_1^n \sum_{k=n}^{\infty} f_k g_1^{-k-1} \Delta t \right). \quad (4.18)$$

Dette er den *spesielle* løsningen til det inhomogene problemet (4.7). Denne løsningen er også unik ettersom enhver annen løsning av den inhomogene differensligningen vil være på formen

$$Cg_1^n + Dg_2^n + u_n,$$

der C og D vil ha verdier som bryter med de grensebetingelsene vi har satt på dem. (4.18) er den diskre analogen til (2.4) i Kapittel 2 og har den formen vi ønsker å ha på ligningen som representerer løsninger til u_n . Vi har gjort en ekstra omskrivning på løsningen (4.18) som viser enda større likhet mellom den diskre løsningen og løsningen (2.4) til det inhomogene problemet i det kontinuerlige tilfellet. Denne omskrivningen er vist i Tillegg B men ikke inkludert her siden omskrivningen er unødvendig for den videre regningen og fungerer heller som en interessant merknad.

I dette kapitlet har vi funnet den eksplisitte løsningen til det diskret differensproblemet. Denne løsningen skal hjelpe oss med optimeringsproblemet i Kapittel 6, og å indentifisere randkurvene og den maksimale profittfunksjonen i Kapittel 7. I neste kapittel skal vi ta et steg tilbake og se nærmere på detaljene i den diskret modellen.

KAPITTEL 5

Kalibrering av parametre

I Kapittel 3 presenterte vi den diskrete modellen ut i fra noen enkle parametre. Disse parametrene skal vi gå mer i dybden på her. Vi vil i dette kapitlet illustrere hvordan vår diskrete modell henger sammen med den kontinuerlige i Kapittel 2. Det betyr at vi skal gå i detalj på hvilke betingelser vi må ha på Markovkjeden slik at den fremstår som en fullverdig diskret versjon av en geometrisk Brownsk bevegelse gitt ved

$$d\Theta_t = \alpha\Theta_t dt + \beta\Theta_t dB_t, \quad \Theta_0 = \theta.$$

For at den diskrete modellen skal være lik den kontinuerlige, må vi se på scenarioet der $\Delta t \rightarrow 0$. Dersom Δt blir veldig liten, vil intervallene i den diskrete tidslinjen \mathbb{T} bli så små at tidslinjen vil være tilnærmet lik kontinuerlig tid. Vi definerte i Kapittel 3 tidslinjen som

$$\mathbb{T} = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t, \dots\},$$

og tilstandsrommet, som inneholdt alle mulige utfall, som

$$\mathbb{S} = \{\theta_n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

I den diskrete modellen har vi tre parametre å ta hensyn til; diskonteringsfaktoren r , den økonomiske indikatoren θ og sannsynlighetsfaktoren p . Mens vi i det kontinuerlige tilfellet har; diskonteringsfaktoren r (uttrykt som e^r), trendfaktoren α og volatilitetsfaktoren β . Mer presist er $\alpha\Theta_t dt$ forventningen, og $\beta\Theta_t \sqrt{dt}$ variansen i den geometriske Brownske bevegelsen.

Hittil har vi bare presisert at $\theta > 1$, $\Delta t > 0$, $0 < r < 1$ og $0 < p < 1$. Nå skal vi gi en mer presis formulering av disse parametrene ved å kalibrere parametrene slik at når $\Delta t \rightarrow 0$, vil disse parametrene gjøre at vår diskrete modell fremstår som en diskret versjon av en geometrisk Brownsk bevegelse.

5.1 Diskonteringsfaktoren

Vi starter med diskonteringsfaktoren r . For r ved tiden $t = n\Delta t$, vil vi at

$$r^n \approx e^{\rho t},$$

der vi i eksponentialfunksjonen bruker ρ istedenfor r , som det opprinnelig er i den kontinuerlige diskonteringsfaktoren, for å representere renten. Vi gjør

5. Kalibrering av parametre

denne navneendringen for å hindre overbelastning for betydningen av r , slik at r kun er diskonteringsfaktoren i det diskret tilfellet.

Dersom vi så setter $r = 1 - \rho\Delta t$, kan vi gjøre følgende utledning:

$$r^n = r^{\frac{t}{\Delta t}} = (1 - \rho\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} = \left((1 - \rho\Delta t)^{\frac{1}{\Delta t}} \right)^t \approx (e^{-\rho})^t = e^{-\rho t}$$

når Δt er liten. Sagt med andre ord, når Δt blir liten nok, vil diskonteringsfaktoren r^t i det diskret tilfellet være indentisk med diskonteringsfaktoren $e^{-\rho t}$ i det kontinuerlige tilfellet. For å vise at denne approksimasjonen faktisk stemmer, trenger vi først en formel.

Binomialformelen. Denne formelen beskriver den algebraiske utvidelsen av potensen til et binom $(x + y)$. Anta at vi har et polynom $(x + y)^n$ der $n \in \mathbb{N}$, så kan vi uttrykke dette som en sum av termer på formen $ax^b y^c$, der eksponentene b og c er ikke-negative heltall slik at $b + c = n$, og der binomialkoeffisienten a til hvert term er ikke-negativ og bestemt av b og n . Det vil si at

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Bevis.

Se [Lin06] side 53.

Denne formelen skal vi benytte i utregningen i følgende setning:

Setning 5.1 Dersom ρ er et reelt tall, $\Delta t > 0$ og $n \in \mathbb{N}$, er

$$(1 - \rho\Delta t)^{\frac{1}{\Delta t}} \approx e^{-\rho}$$

når $\Delta t \rightarrow 0$.

Bevis.

Vi kan vise at binomialformelen også gjelder for binomer som involverer subtraksjon. Siden $\Delta t \rightarrow 0$, dvs. at Δt er et lite tall og vi kan uttrykke det som $\frac{1}{n}$ når $n \rightarrow \infty$, kan vi for å forenkle utregningen skrive

$$(1 - \rho\Delta t)^{\frac{1}{\Delta t}} = \left(1 - \rho \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^n = \left(1 + \left(-\frac{\rho}{n}\right)\right)^n.$$

Anvender binomialformelen og får

$$\left(1 + \left(-\frac{\rho}{n}\right)\right)^n = \binom{n}{0} \left(\frac{-\rho}{n}\right)^0 + \binom{n}{1} \left(\frac{-\rho}{n}\right)^1 + \binom{n}{2} \left(\frac{-\rho}{n}\right)^2 + \dots + \binom{n}{n} \left(\frac{-\rho}{n}\right)^n,$$

der den k 'te termen til summen er gitt ved

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \left(\frac{-\rho}{n}\right)^k &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{-\rho}{n}\right)^k \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} \cdot (-\rho)^k, \end{aligned}$$

der

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} \longrightarrow 1 \quad \text{når} \quad n \rightarrow \infty.$$

Dette betyr at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{-\rho}{n}\right)^k = \frac{(-\rho)^k}{k!},$$

som indikerer at $\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^n$ kan skrives som serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\rho)^k}{k!} = e^{-\rho}.$$

Ettersom $(1 - \rho\Delta t)^{\frac{1}{\Delta t}} \approx \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^n$, så er

$$(1 - \rho\Delta t)^{\frac{1}{\Delta t}} \approx e^{-\rho}.$$

■

Alternativt kan man faktisk også bevise likhet, slik at

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 - \rho\Delta t)^{\frac{1}{\Delta t}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^n = e^{-\rho},$$

ved bruk av L'Hôpitals regel.

L'Hôpitals regel. Anta at $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (eller $= \infty$) og at grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

eksisterer (vi tillater at den er lik ∞ eller $-\infty$). Da eksisterer også grenseverdien $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$ og

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bevis.

Se [Lin06] side 270.

Denne regelen skal vi benytte i følgende setning:

Setning 5.2 Dersom ρ er et reelt tall, $\Delta t > 0$ og $n \in \mathbb{N}$, er

$$(1 - \rho\Delta t)^{\frac{1}{\Delta t}} = e^{-\rho}$$

når $\Delta t \rightarrow 0$.

Bevis.

Dersom vi skriver om

$$(1 - \rho\Delta t)^{\frac{1}{\Delta t}} = \left(e^{\ln(1 - \rho\Delta t)}\right)^{\frac{1}{\Delta t}} = e^{\frac{\ln(1 - \rho\Delta t)}{\Delta t}},$$

5. Kalibrering av parametre

og siden eksponentialfunksjonen er kontinuert, er

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1-\rho\Delta t)}{\Delta t}} = e^{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-\rho\Delta t)}{\Delta t}}.$$

Det vil da være nok å regne ut $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-\rho\Delta t)}{\Delta t}$. Dette er et "0/0"-uttrykk, og vi kan bruke L'Hopitals regel:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-\rho\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{-\rho}{(1-\rho\Delta t)}}{1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-\rho}{(1-\rho\Delta t)} = \frac{-\rho}{1-0} = -\rho,$$

altså er

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1-\rho\Delta t)^{\frac{1}{\Delta t}} = e^{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-\rho\Delta t)}{\Delta t}} = e^{-\rho}.$$

■

5.2 Markovkjedens hopp

Nå skal vi gå litt mer i detalj på hvordan mekanismen i Markovkjeden fungerer. For at vi skal få den diskrete modellen til å fremstå som en diskret versjon av en geometrisk Brownsk bevegelse, vil vi at den diskrete modellen oppfyller

$$E[\Theta(t+\Delta t) - \Theta(t) | \mathcal{F}_t] = \Theta_t(\alpha\Delta t + o(\Delta t))$$

og

$$E[(\Theta(t+\Delta t) - \Theta(t))^2 | \mathcal{F}_t] = \Theta_t^2(\beta^2\Delta t + o(\Delta t)),$$

der $o(\Delta t)$ betegner størrelser som går mot null raskere enn Δt når $\Delta t \rightarrow 0$. Det vil være mulig å få likhet mellom disse leddene uten å benytte $o(\Delta t)$, men vi vil da få unødvendig stygge uttrykk som ikke vil ha noen nevneverdig betydning for det vi prøver å vise, så for å gjøre beviset mer ryddig og enkelt benytter vi heller $o(\Delta t)$. Merk at selv med denne forkortelsen så vil utregningen bli noe uoversiktlig. Vi vil definere mer konkret hva vi mener med funksjonen $o(\Delta t)$ litt senere. Men først, hvis vi setter

$$\theta = 1 + \beta\sqrt{\Delta t},$$

og

$$p = \frac{1}{2} + \frac{\alpha - \frac{\beta^2}{2}}{2\beta}\sqrt{\Delta t},$$

og setter dette inn i det første uttrykket for forventet verdi av neste tilstand til Θ , får vi

$$\begin{aligned}
 E[\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t) | \mathcal{F}_t] &= \theta_{n+1}p + \theta_{n-1}(1-p) - \theta_n \\
 &= \theta_n \theta_1 p + \theta_n \theta_{-1}(1-p) - \theta_n \\
 &= \Theta_t \theta p + \Theta_t \frac{1}{\theta}(1-p) - \Theta_t \\
 &= \Theta_t \left(\theta p + \frac{1}{\theta}(1-p) - 1 \right),
 \end{aligned}$$

siden Θ er mengder av u og tar formen $pru_{n+1} + (1-p)ru_{n-1} - u_n$. Vi inkluderer ikke diskonteringsfaktoren r , siden vi ser på den ikke-diskonterte prosessen, slik at r kommer først inn i uttrykk der vi tar hensyn til diskonteringen. Dersom vi nå setter inn uttrykkene for θ og p , får vi at

$$\begin{aligned}
 E[\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t) | \mathcal{F}_t] &= \Theta_t \left(\left(1 + \beta\sqrt{\Delta t} \right) p + \frac{1}{1 + \beta\sqrt{\Delta t}}(1-p) - 1 \right) \\
 &= \Theta_t \left(\left(1 + \beta\sqrt{\Delta t} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha - \frac{\beta^2}{2}}{2\beta} \sqrt{\Delta t} \right) + \frac{1}{1 + \beta\sqrt{\Delta t}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha - \frac{\beta^2}{2}}{2\beta} \sqrt{\Delta t} \right) - 1 \right) \\
 &= \Theta_t \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha - \frac{\beta^2}{2}}{2\beta} \sqrt{\Delta t} + \frac{\beta\sqrt{\Delta t}}{2} + \frac{\alpha - \frac{\beta^2}{2}}{2\beta} \beta \Delta t + \frac{1}{2 + 2\beta\sqrt{\Delta t}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\alpha - \frac{\beta^2}{2}}{2\beta + 2\beta^2\sqrt{\Delta t}} \sqrt{\Delta t} - 1 \right) \\
 &= \Theta_t \left(\frac{\alpha\sqrt{\Delta t}}{2\beta} - \frac{\beta\sqrt{\Delta t}}{4} + \frac{\beta\sqrt{\Delta t}}{2} + \frac{\alpha\Delta t}{2} - \frac{\beta^2\Delta t}{4} + \frac{1}{2 + 2\beta\sqrt{\Delta t}} - \frac{\alpha\sqrt{\Delta t}}{2\beta + 2\beta^2\sqrt{\Delta t}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\beta^2\sqrt{\Delta t}}{4\beta + 4\beta^2\sqrt{\Delta t}} - \frac{1}{2} \right),
 \end{aligned}$$

samler uttrykkene på en felles brøkstrek, der fellesnevner er $4\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})$, og får

$$\begin{aligned}
 &= \Theta_t \left(\frac{\alpha\sqrt{\Delta t}(2 + 2\beta\sqrt{\Delta t}) - \beta\sqrt{\Delta t}(\beta + \beta^2\sqrt{\Delta t}) + \beta\sqrt{\Delta t}(2\beta + 2\beta^2\sqrt{\Delta t})}{4\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha\Delta t(2\beta + 2\beta^2\sqrt{\Delta t}) - \beta^2\Delta t(\beta + \beta^2\sqrt{\Delta t}) + 2\beta - 2\alpha\sqrt{\Delta t} + \beta^2\sqrt{\Delta t}}{4\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{-2\beta - 2\beta^2\sqrt{\Delta t}}{4\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} \right),
 \end{aligned}$$

5. Kalibrering av parametre

som kan skrives som

$$= \Theta_t \left(\frac{2\alpha\sqrt{\Delta t} + 2\alpha\beta\Delta t - \beta^2\sqrt{\Delta t} - \beta^3\Delta t + 2\beta^2\sqrt{\Delta t} + 2\beta^3\Delta t}{4\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} + \frac{2\alpha\beta\Delta t + 2\alpha\beta^2\Delta t^{\frac{3}{2}} - \beta^3\Delta t - \beta^4\Delta t^{\frac{3}{2}} + 2\beta - 2\alpha\sqrt{\Delta t} + \beta^2\sqrt{\Delta t}}{4\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} - \frac{-2\beta - 2\beta^2\sqrt{\Delta t}}{4\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} \right),$$

og forkortes til

$$= \Theta_t \left(\frac{4\alpha\beta\Delta t + 2\alpha\beta^2\Delta t^{\frac{3}{2}} - \beta^4\Delta t^{\frac{3}{2}}}{4\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} \right).$$

Hvis vi nå skriver litt om på uttrykket over, så har vi at

$$E[\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t) | \mathcal{F}_t] = \Theta_t \left(\frac{\alpha\Delta t}{1 + \beta\sqrt{\Delta t}} + \frac{\alpha\beta\Delta t^{\frac{3}{2}}}{2(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} - \frac{\beta^3\Delta t^{\frac{3}{2}}}{4(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} \right).$$

For å videre analysere dette uttrykket innfører vi følgende definisjon:

Definisjon 5.3 Vi sier at en funksjon $f(\Delta t)$ går mot null raskere enn Δt og skriver $f(\Delta t) = o(\Delta t)$ dersom

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{f(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

Generelt har vi at $\Delta t^p = o(\Delta t)$ for $p > 1$.

Ut i fra denne definisjonen er det også verdt å merke seg at dersom $f(\Delta t) = o(\Delta t)$ og $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} g(\Delta t) = a \neq 0$, som vil si at $g(\Delta t) \notin o(\Delta t)$, så er likevel $\frac{f(\Delta t)}{g(\Delta t)} \in o(\Delta t)$. Hvis vi anvender denne definisjonen på de ulike faktorene inni parantesen i uttrykket

$$\Theta_t \left(\frac{\alpha\Delta t}{1 + \beta\sqrt{\Delta t}} + \frac{\alpha\beta\Delta t^{\frac{3}{2}}}{2(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} - \frac{\beta^3\Delta t^{\frac{3}{2}}}{4(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} \right),$$

så er:

1.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\alpha\Delta t}{\Delta t} = \alpha \neq 0 \quad \text{slik at} \quad \alpha\Delta t \notin o(\Delta t).$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1 + \beta\sqrt{\Delta t}}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\beta}{\sqrt{\Delta t}} \\ &= \infty + \infty \neq 0 \quad \text{slik at} \quad 1 + \beta\sqrt{\Delta t} \notin o(\Delta t). \end{aligned}$$

3.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\alpha\beta\Delta t^{\frac{3}{2}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \alpha\beta\sqrt{\Delta t} = 0 \quad \text{slik at} \quad \alpha\beta\Delta t^{\frac{3}{2}} \in o(\Delta t).$$

4.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\beta^3\Delta t^{\frac{3}{2}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \beta^3\sqrt{\Delta t} = 0 \quad \text{slik at} \quad \beta^3\Delta t^{\frac{3}{2}} \in o(\Delta t).$$

Dette betyr at også

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\alpha\beta\Delta t^{\frac{3}{2}}}{2(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} = 0 \quad \text{slik at} \quad \frac{\alpha\beta\Delta t^{\frac{3}{2}}}{2(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} \in o(\Delta t),$$

og

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\beta^3\Delta t^{\frac{3}{2}}}{4(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} = 0 \quad \text{slik at} \quad \frac{\beta^3\Delta t^{\frac{3}{2}}}{4(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} \in o(\Delta t).$$

Vi kan da ut i fra definisjonen for funksjonen $o(\Delta t)$, som representerer en funksjon som går raskere mot 0 enn Δt når $\Delta t \rightarrow 0$, skrive at

$$\Theta_t \left(\frac{\alpha\Delta t}{1 + \beta\sqrt{\Delta t}} + \frac{\alpha\beta\Delta t^{\frac{3}{2}}}{2(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} - \frac{\beta^3\Delta t^{\frac{3}{2}}}{4(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} \right) = \Theta_t \left(\frac{\alpha\Delta t}{1 + \beta\sqrt{\Delta t}} + o(\Delta t) \right).$$

Her er vi nesten i mål med å bevise at

$$E[\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t) | \mathcal{F}_t] = \Theta_t(\alpha\Delta t + o(\Delta t)),$$

vi trenger bare å bli kvitt nevneren til $\alpha\Delta t$. Det viser seg at leddet $\frac{\alpha\Delta t}{1 + \beta\sqrt{\Delta t}}$ avviker fra $\alpha\Delta t$ med en størrelse som er $o(\Delta t)$. For å se dette starter vi med å legge til og trekke fra $\alpha\Delta t$ inni parantesen til Θ_t , slik at

$$\Theta_t \left(\frac{\alpha\Delta t}{1 + \beta\sqrt{\Delta t}} + o(\Delta t) \right) = \Theta_t \left(\alpha\Delta t + \frac{\alpha\Delta t}{1 + \beta\sqrt{\Delta t}} - \alpha\Delta t + o(\Delta t) \right),$$

som, med andre og tredje ledd på en felles brøkstrek, blir

$$\begin{aligned} &= \Theta_t \left(\alpha\Delta t + \frac{\alpha\Delta t - \alpha\Delta t(1 + \beta\sqrt{\Delta t})}{1 + \beta\sqrt{\Delta t}} + o(\Delta t) \right) \\ &= \Theta_t \left(\alpha\Delta t + \frac{\alpha\Delta t - \alpha\Delta t - \alpha\beta\Delta t^{\frac{3}{2}}}{1 + \beta\sqrt{\Delta t}} + o(\Delta t) \right) \\ &= \Theta_t \left(\alpha\Delta t - \frac{\alpha\beta\Delta t^{\frac{3}{2}}}{1 + \beta\sqrt{\Delta t}} + o(\Delta t) \right). \end{aligned}$$

Dersom vi nå anvender definisjonen for $o(\Delta t)$ på leddet $\frac{\alpha\beta\Delta t^{\frac{3}{2}}}{1 + \beta\sqrt{\Delta t}}$, ser vi at leddet er av størrelsesorden $o(\Delta t)$ siden

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\alpha\beta\Delta t^{\frac{3}{2}}}{\Delta t} = 0,$$

5. Kalibrering av parametre

som betyr at

$$\frac{\alpha\beta\Delta t^{\frac{3}{2}}}{1 + \beta\sqrt{\Delta t}} \in o(\Delta t),$$

og vi kan skrive at

$$\Theta_t \left(\alpha\Delta t - \frac{\alpha\beta\Delta t^{\frac{3}{2}}}{1 + \beta\sqrt{\Delta t}} + o(\Delta t) \right) = \Theta_t \left(\alpha\Delta t + o(\Delta t) \right).$$

Vi har nå regnet oss frem til at

$$\begin{aligned} E[\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t) | \mathcal{F}_t] &= \Theta_t \left(\frac{\alpha\Delta t}{1 + \beta\sqrt{\Delta t}} + \frac{\alpha\beta\Delta t^{\frac{3}{2}}}{2(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} - \frac{\beta^3\Delta t^{\frac{3}{2}}}{4(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} \right) \\ &= \Theta_t(\alpha\Delta t + o(\Delta t)), \end{aligned}$$

gitt at

$$\theta = 1 + \beta\sqrt{\Delta t} \quad \text{og} \quad p = \frac{1}{2} + \frac{\alpha - \frac{\beta^2}{2}}{2\beta}\sqrt{\Delta t},$$

og at $o(\Delta t)$ er definert som nevnt tidligere. Hvorfor dette er av interesse er fordi når $\Delta t \rightarrow 0$, vil

$$E[\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t) | \mathcal{F}_t] = \Theta_t(\alpha\Delta t + o(\Delta t)) \rightarrow \Theta_t(\alpha dt + 0) = \alpha\Theta_t dt,$$

der dt representerer en størrelse som går mot 0, og uttrykket $\alpha\Theta_t dt$ er identisk med faktoren som modellerer forventningen i den geometriske Brownske bevegelsen

$$d\Theta_t = \alpha\Theta_t dt + \beta\Theta_t dB_t$$

i det kontinuerlige tilfellet. Det betyr at vi med betingelsen

$$E[\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t) | \mathcal{F}_t] = \Theta_t(\alpha\Delta t + o(\Delta t))$$

er et skritt nærmere å bevise at vår diskret modell vil kunne gjøre de samme modelleringene som den kontinuerlige modellen når vi lar $\Delta t \rightarrow 0$, og vi ønsker derfor at den andre betingelsen

$$E\left[(\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t))^2 | \mathcal{F}_t\right] = \Theta_t^2(\beta^2\Delta t + o(\Delta t))$$

skal gi oss et uttrykk for variansen $\beta\Theta_t\sqrt{dt}$ i den kontinuerlige modellen. Utregning av varians gitt $\Theta(t) = \theta_n$ blir da:

$$\begin{aligned} E\left[(\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t))^2 | \mathcal{F}_t\right] &= (\theta_{n+1} - \theta_n)^2 p + (\theta_{n-1} - \theta_n)^2 (1 - p) \\ &= (\theta_{2n+2} - 2\theta_{2n+1} + \theta_{2n}) p \\ &\quad + (\theta_{2n-2} - 2\theta_{2n-1} + \theta_{2n}) (1 - p) \\ &= \theta_{2n} ((\theta_2 - 2\theta_1 + 1) p + (\theta_{-2} - 2\theta_{-1} + 1) (1 - p)). \end{aligned}$$

Setter inn verdien for θ og får

$$\begin{aligned}
 & E \left[(\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t))^2 \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= (\theta_n)^2 \left(\left((1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2 - 2(1 + \beta\sqrt{\Delta t}) + 1 \right) p \right. \\
 &\quad \left. + \left((1 + \beta\sqrt{\Delta t})^{-2} - 2(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^{-1} + 1 \right) (1 - p) \right) \\
 &= \Theta_t^2 \left((1 + 2\beta\sqrt{\Delta t} + \beta^2 \Delta t - 2 - 2\beta\sqrt{\Delta t} + 1) p \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} - \frac{2}{(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} + 1 \right) (1 - p) \right) \\
 &= \Theta_t^2 \left((\beta^2 \Delta t) p + \left(\frac{1}{(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} - \frac{2}{(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} + 1 \right) (1 - p) \right),
 \end{aligned}$$

setter inn verdien for p og får

$$\begin{aligned}
 &= \Theta_t^2 \left(\beta^2 \Delta t \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha - \frac{\beta^2}{2}}{2\beta} \sqrt{\Delta t} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} - \frac{2}{(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} + 1 \right) \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{\alpha - \frac{\beta^2}{2}}{2\beta} \sqrt{\Delta t} \right) \right) \\
 &= \Theta_t^2 \left(\frac{1}{2} \beta^2 \Delta t + \frac{\alpha - \frac{\beta^2}{2}}{2} \beta \Delta t^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} - \frac{1}{(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} - \frac{\alpha - \frac{\beta^2}{2}}{2\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} \sqrt{\Delta t} + \frac{\alpha - \frac{\beta^2}{2}}{\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} \sqrt{\Delta t} - \frac{\alpha - \frac{\beta^2}{2}}{2\beta} \sqrt{\Delta t} \right) \\
 &= \Theta_t^2 \left(\frac{1}{2} \beta^2 \Delta t + \frac{\alpha}{2} \beta \Delta t^{\frac{3}{2}} - \frac{\beta^3}{4} \Delta t^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} - \frac{1}{(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} - \frac{\alpha\sqrt{\Delta t}}{2\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} + \frac{\beta^2\sqrt{\Delta t}}{4\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} + \frac{\alpha\sqrt{\Delta t}}{\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\beta^2\sqrt{\Delta t}}{2\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} - \frac{\alpha\sqrt{\Delta t}}{2\beta} + \frac{\beta^2\sqrt{\Delta t}}{4\beta} \right).
 \end{aligned}$$

Før vi går videre kan vi luke ut to ledd som er av størrelsesorden $o(\Delta t)$, nemlig $\frac{\alpha}{2} \beta \Delta t^{\frac{3}{2}}$ og $\frac{\beta^3}{4} \Delta t^{\frac{3}{2}}$. Siden ledd som inneholder Δt^p der $p > 1$ er av størrelsesorden $o(\Delta t)$, er $\frac{\alpha}{2} \beta \Delta t^{\frac{3}{2}} \in o(\Delta t)$ og $\frac{\beta^3}{4} \Delta t^{\frac{3}{2}} \in o(\Delta t)$. Vi kan dermed forkorte uttrykket

5. Kalibrering av parametre

litt ved skrive de nevnte leddene som $o(\Delta t)$, slik at

$$\begin{aligned} & E \left[(\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t))^2 | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \Theta_t^2 \left(\frac{1}{2} \beta^2 \Delta t + \frac{1}{2(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} - \frac{1}{(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} + \frac{1}{2} - \frac{\alpha\sqrt{\Delta t}}{2\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} \right. \\ &\quad + \frac{\beta^2\sqrt{\Delta t}}{4\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} + \frac{\alpha\sqrt{\Delta t}}{\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} - \frac{\beta^2\sqrt{\Delta t}}{2\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})} - \frac{\alpha\sqrt{\Delta t}}{2\beta} \\ &\quad \left. + \frac{\beta^2\sqrt{\Delta t}}{4\beta} + o(\Delta t) \right). \end{aligned}$$

Setter de resterende leddene på en felles brøkstrek, med fellesnevner lik $4\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2 = 4\beta + 8\beta^2\sqrt{\Delta t} + 4\beta^3\Delta t$. Dette gir

$$\begin{aligned} &= \Theta_t^2 \left(\frac{\beta^2\Delta t(2\beta + 4\beta^2\sqrt{\Delta t} + 2\beta^3\Delta t) + 2\beta - 4\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})}{4\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} \right. \\ &\quad + \frac{(2\beta + 4\beta^2\sqrt{\Delta t} + 2\beta^3\Delta t) - 2\alpha\sqrt{\Delta t} + \beta^2\sqrt{\Delta t} + 4\alpha\sqrt{\Delta t}(1 + \beta\sqrt{\Delta t})}{4\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} \\ &\quad - \frac{2\beta^2\sqrt{\Delta t}(1 + \beta\sqrt{\Delta t}) - \alpha\sqrt{\Delta t}(2 + 4\beta\sqrt{\Delta t} + 2\beta^2\Delta t)}{4\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} \\ &\quad \left. + \frac{\beta^2\sqrt{\Delta t}(1 + 2\beta\sqrt{\Delta t} + \beta^2\Delta t)}{4\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} + o(\Delta t) \right) \\ &= \Theta_t^2 \left(\frac{2\beta^3\Delta t + 4\beta^4\Delta t^{\frac{3}{2}} + 2\beta^5\Delta t^2 + 2\beta - 4\beta - 4\beta^2\sqrt{\Delta t} + 2\beta + 4\beta^2\sqrt{\Delta t}}{4\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} \right. \\ &\quad + \frac{2\beta^3\Delta t - 2\alpha\sqrt{\Delta t} + \beta^2\sqrt{\Delta t} + 4\alpha\sqrt{\Delta t} + 4\alpha\beta\Delta t - 2\beta^2\sqrt{\Delta t} - 2\beta^3\Delta t}{4\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} \\ &\quad \left. - \frac{2\alpha\sqrt{\Delta t} - 4\alpha\beta\Delta t - 2\alpha\beta^2\Delta t^{\frac{3}{2}} + \beta^2\sqrt{\Delta t} + 2\beta^3\Delta t + \beta^4\Delta t^{\frac{3}{2}}}{4\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} + o(\Delta t) \right), \end{aligned}$$

som kan forkortes til at

$$\begin{aligned} & E \left[(\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t))^2 | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \Theta_t^2 \left(\frac{4\beta^3\Delta t + 5\beta^4\Delta t^{\frac{3}{2}} + 2\beta^5\Delta t^2 - 2\alpha\beta^2\Delta t^{\frac{3}{2}}}{4\beta(1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} + o(\Delta t) \right). \end{aligned}$$

Leddene

$$5\beta^4\Delta t^{\frac{3}{2}}, 2\beta^5\Delta t^2, 2\alpha\beta^2\Delta t^{\frac{3}{2}}$$

er alle av størrelsesorden $o(\Delta t)$ siden potensen til Δt -leddet er større enn 1, og vi kan føye leddene inn i $o(\Delta t)$ slik at vi sitter igjen med

$$E \left[(\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t))^2 | \mathcal{F}_t \right] = \Theta_t^2 \left(\frac{4\beta^3 \Delta t}{4\beta (1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} + o(\Delta t) \right).$$

Vi er her nære ved å bevise at betingelsen

$$E \left[(\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t))^2 | \mathcal{F}_t \right] = \Theta_t (\beta^2 \Delta t + o(\Delta t))$$

er oppfylt, og i likhet med den første betingelsen, viser det seg at leddet $\frac{4\beta^3 \Delta t}{4\beta (1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2}$ avviker fra $\beta^2 \Delta t$ med en størrelse som er $o(\Delta t)$. For å se dette benytter vi samme teknikk som i den første betingelsen. Ved å legge til og trekke fra $\beta^2 \Delta t$ inni parantesen til Θ_t^2 , så er

$$\Theta_t^2 \left(\frac{4\beta^3 \Delta t}{4\beta (1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} + o(\Delta t) \right) = \Theta_t^2 \left(\beta^2 \Delta t + \frac{4\beta^3 \Delta t}{4\beta (1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} - \beta^2 \Delta t + o(\Delta t) \right),$$

som, med andre og tredje ledd på en felles brøkstrek, gir

$$\begin{aligned} &= \Theta_t^2 \left(\beta^2 \Delta t + \frac{4\beta^3 \Delta t - \beta^2 \Delta t (4\beta + 8\beta^2 \sqrt{\Delta t} + 4\beta^3 \Delta t)}{4\beta (1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} + o(\Delta t) \right) \\ &= \Theta_t^2 \left(\beta^2 \Delta t + \frac{4\beta^3 \Delta t - 4\beta^3 \Delta t - 8\beta^4 \Delta t^{\frac{3}{2}} - 4\beta^5 \Delta t^2}{4\beta (1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} + o(\Delta t) \right) \\ &= \Theta_t^2 \left(\beta^2 \Delta t + \frac{-8\beta^4 \Delta t^{\frac{3}{2}} - 4\beta^5 \Delta t^2}{4\beta (1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} + o(\Delta t) \right). \end{aligned}$$

Det er nå tydelig at nevneren inneholder kun ledd av størrelsesorden $o(\Delta t)$ siden

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{-8\beta^4 \Delta t^{\frac{3}{2}}}{\Delta t} = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{4\beta^5 \Delta t^2}{\Delta t} = 0,$$

og per definisjon av $o(\Delta t)$, så er også leddet

$$\frac{8\beta^4 \Delta t^{\frac{3}{2}} - 4\beta^5 \Delta t^2}{4\beta (1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} \in o(\Delta t),$$

og vi kan føye leddet inn i $o(\Delta t)$ slik at

$$\Theta_t^2 \left(\beta^2 \Delta t + \frac{-8\beta^4 \Delta t^{\frac{3}{2}} - 4\beta^5 \Delta t^2}{4\beta (1 + \beta\sqrt{\Delta t})^2} + o(\Delta t) \right) = \Theta_t^2 (\beta^2 \Delta t + o(\Delta t)).$$

5. Kalibrering av parametre

Vi har med dette bevist at

$$E\left[(\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t))^2 \mid \mathcal{F}_t\right] = \Theta_t^2 \left(\dots \right) = \Theta_t^2 (\beta^2 \Delta t + o(\Delta t)).$$

Av samme grunn som i den første betingelsen så er dette interessant, fordi når $\Delta t \rightarrow 0$, vil

$$E\left[(\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t))^2 \mid \mathcal{F}_t\right] = \Theta_t^2 (\beta^2 \Delta t + o(\Delta t)) \longrightarrow \Theta_t^2 (\beta^2 dt + 0) = \beta \Theta_t dB_t,$$

der vi har brukt regelen $\sqrt{dt} = dB_t$. Uttrykket $\beta \Theta_t dB_t$ er identisk med faktoren som modellerer variansen i den geometrisk Brownske bevegelsen

$$d\Theta_t = \alpha \Theta_t dt + \beta \Theta_t dB_t$$

i det kontinuerlige tilfellet. Vi har nå bevist at med betingelsene

$$E[\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t) \mid \mathcal{F}_t] = \Theta_t (\alpha \Delta t + o(\Delta t))$$

og

$$E\left[(\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t))^2 \mid \mathcal{F}_t\right] = \Theta_t^2 (\beta^2 \Delta t + o(\Delta t)),$$

der

$$\theta = 1 + \beta \sqrt{\Delta t} \quad \text{og} \quad p = \frac{1}{2} + \frac{\alpha - \frac{\beta^2}{2}}{2\beta} \sqrt{\Delta t},$$

så er den betingede forventningen av et hopp fra en tilstand til en annen i vår diskret modell, identisk med den geometrisk Brownske bevegelsen i den kontinuerlige modellen når vi lar avstanden mellom hvert punkt på vår tidslinje bli veldig små, med andre ord, når $\Delta t \rightarrow 0$. Vi har også bevist at dersom diskonteringsfaktoren r i det diskret tilfellet er definert ved $r = 1 - \rho \Delta t$, så er

$$r^n = e^{\rho t},$$

der $e^{\rho t}$ er diskonteringsfaktoren i det kontinuerlige tilfellet.

For å oppsummere har vi kalibrert parametrene våre i den diskret modellen på en slik måte at dersom vi lar Δt i tidslinjen \mathbb{T} gå mot 0, vil vår diskret modell gi de samme resultatene som en kontinuerlig modell med en geometrisk Brownsk bevegelse som underliggende prosess.

DEL II

Modellens anvendelse

KAPITTEL 6

Optimeringsproblemet

I dette kapitlet skal vi se nærmere på hvordan vi kan formulere ligninger som kan erstatte den forventede diskonterte nettoinntektsfunksjonen (2.2) i Kapittel 2. Vi ser også på hva slags type strategier som må brukes for å maksimere denne funksjonen, samt hvordan de vil se ut.

Vi begynner som vi gjorde i innledningen av oppgaven og innfører en inntektsfunksjon Π og en utbyggingsfunksjon Γ . Tolkningen av Π vil være at dersom man ved tiden t er i tilstand θ og har produksjonskapasitet k , vil nettoinntekten i dette tidspunktet være $\Pi(\theta, k)\Delta t$ dersom man ikke bygger ut. Dersom man i samme situasjon ønsker å bygge ut kapasiteten fra k til \hat{k} , vil dette koste $\Gamma(\theta, \hat{k}) - \Gamma(\theta, k)$.

Ettersom alt skjer i diskret punkter, har vi et spørsmål om rekkefølge som ikke finnes i den kontinuerlige teorien. Dersom vi i tidspunkt t er i tilstanden θ , har kapasitet k og planlegger å bygge ut til \hat{k} , er spørsmålet om produksjonsinntektene skal regnes ut fra den nye eller den gamle kapasiteten. Regner man ut i fra den nye kapasiteten, vil nettoinntekten i tidspunktet t dersom man bygger ut være

$$\Pi(\theta, \hat{k})\Delta t - \left(\Gamma(\theta, \hat{k}) - \Gamma(\theta, k)\right),$$

mens regner man ut i fra den gamle kapasiteten, vil nettoinntekten være

$$\Pi(\theta, k)\Delta t - \left(\Gamma(\theta, \hat{k}) - \Gamma(\theta, k)\right).$$

Økonomisk sett er det ikke noen nevneverdig forskjell på rimeligheten til disse to modellene, men én må velges, i våre beregninger har vi derfor valgt det første alternativet, der produksjonsinntekten regnes ut fra den nye kapasiteten.

La oss nå se nærmere på notasjonen. Der vi tidligere har brukt variabelen θ som en økonomisk indikator for markedet, vil vi heretter benytte *prosessen* Θ til å beskrive markedets tilstand i sin helhet, og for produksjonskapasitetsvariabelen k vil vi nå på samme vis benytte *prosessen* K . Vi antar så at når vi kommer til tidspunkt t , så er markedet i tilstand Θ_t og produksjonskapasiteten er $K_{t-\Delta t}$. Dette betyr at vi regner startkapasiteten k som $K_{-\Delta t}$. I tidspunkt t blir da kapasiteten øyeblikkelig justert til K_t og vi får produksjonsinntekter gitt ved funksjonen $\Pi(\Theta_t, K_t)\Delta t$. Ettersom tiden t er bestemt av elementene

6. Optimeringsproblemet

i tidslinjen $\mathbb{T} = \{0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, n\Delta t, \dots\}$, slik at t er på formen $t = n\Delta t$, så er diskonteringsfaktoren r^n gitt ved $r^{\frac{t}{\Delta t}}$. Den diskonterte nettoinntekten i tidspunkt t er dermed

$$\left(\Pi(\Theta_t, K_t)\Delta t - (\Gamma(\Theta_t, K_t) - \Gamma(\Theta_t, K_{t-\Delta t})) \right) r^{\frac{t}{\Delta t}},$$

og den totale nettoinntekten fra tid 0 til tid T er

$$\sum_{t=0}^T \left(\Pi(\Theta_t, K_t)\Delta t - (\Gamma(\Theta_t, K_t) - \Gamma(\Theta_t, K_{t-\Delta t})) \right) r^{\frac{t}{\Delta t}},$$

der vi summerer over alle elementene i tidslinjen \mathbb{T} . La oss se på bidragene fra utbyggingene isolert:

$$\sum_{t=0}^T (\Gamma(\Theta_t, K_t) - \Gamma(\Theta_t, K_{t-\Delta t})) r^{\frac{t}{\Delta t}}.$$

Dette er nesten en *teleskoperende* sum, som vil si at vi har en sum der nesten alle leddene utligner hverandre slik at vi kun sitter igjen med det siste leddet og initialleddet etter at vi har summert sammen alle leddene. For å utnytte teleskopegenskapen adderer og trekker vi fra et ledd slik at

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^T (\Gamma(\Theta_t, K_t) - \Gamma(\Theta_t, K_{t-\Delta t})) r^{\frac{t}{\Delta t}} \\ &= \sum_{t=0}^T \left(\Gamma(\Theta_{t+\Delta t}, K_t) r^{\frac{t}{\Delta t}+1} - \Gamma(\Theta_t, K_{t-\Delta t}) r^{\frac{t}{\Delta t}} \right) \\ & \quad - \sum_{t=0}^T \left(\Gamma(\Theta_{t+\Delta t}, K_t) r^{\frac{t}{\Delta t}+1} - \Gamma(\Theta_t, K_t) r^{\frac{t}{\Delta t}} \right), \end{aligned}$$

der første og tredje ledd utligner hverandre siden

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^T \left(\Gamma(\Theta_{t+\Delta t}, K_t) r^{\frac{t}{\Delta t}+1} - \Gamma(\Theta_t, K_{t-\Delta t}) r^{\frac{t}{\Delta t}} \right) \\ & \quad - \sum_{t=0}^T \left(\Gamma(\Theta_{t+\Delta t}, K_t) r^{\frac{t}{\Delta t}+1} - \Gamma(\Theta_t, K_t) r^{\frac{t}{\Delta t}} \right) \\ &= (\Gamma(\Theta_{\Delta t}, K_0) r^1 - \Gamma(\Theta_0, K_{-\Delta t}) r^0) - (\Gamma(\Theta_{\Delta t}, K_0) r^1 - \Gamma(\Theta_0, K_0) r^0) \\ & \quad + (\Gamma(\Theta_{\Delta t+\Delta t}, K_{\Delta t}) r^{\frac{\Delta t}{\Delta t}+1} - \Gamma(\Theta_{\Delta t}, K_{\Delta t-\Delta t}) r^{\frac{\Delta t}{\Delta t}}) \\ & \quad - (\Gamma(\Theta_{\Delta t+\Delta t}, K_{\Delta t}) r^{\frac{\Delta t}{\Delta t}+1} - \Gamma(\Theta_{\Delta t}, K_{\Delta t}) r^{\frac{\Delta t}{\Delta t}}) \\ & \quad + (\Gamma(\Theta_{2\Delta t+\Delta t}, K_{2\Delta t}) r^{\frac{2\Delta t}{\Delta t}+1} - \Gamma(\Theta_{2\Delta t}, K_{2\Delta t-\Delta t}) r^{\frac{2\Delta t}{\Delta t}}) \\ & \quad - (\Gamma(\Theta_{2\Delta t+\Delta t}, K_{2\Delta t}) r^{\frac{2\Delta t}{\Delta t}+1} - \Gamma(\Theta_{2\Delta t}, K_{2\Delta t}) r^{\frac{2\Delta t}{\Delta t}}) \\ & \quad + \dots + (\Gamma(\Theta_{T+\Delta t}, K_T) r^{\frac{T}{\Delta t}+1} - \Gamma(\Theta_T, K_{T-\Delta t}) r^{\frac{T}{\Delta t}}) \\ & \quad - (\Gamma(\Theta_{T+\Delta t}, K_T) r^{\frac{T}{\Delta t}+1} - \Gamma(\Theta_T, K_T) r^{\frac{T}{\Delta t}}). \end{aligned}$$

Dersom vi fjerner leddene som utligner hverandre, så kan dette skrives om til at

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=0}^T (\Gamma(\Theta_t, K_t) - \Gamma(\Theta_t, K_{t-\Delta t})) r^{\frac{t}{\Delta t}} \\
&= (\Gamma(\Theta_{\Delta t}, K_0) r^1 - \Gamma(\Theta_0, K_{-\Delta t}) r^0) + (\Gamma(\Theta_{\Delta t+\Delta t}, K_{\Delta t}) r^{\frac{\Delta t}{\Delta t}+1} \\
&\quad - \Gamma(\Theta_{\Delta t}, K_{\Delta t-\Delta t}) r^{\frac{\Delta t}{\Delta t}}) + (\Gamma(\Theta_{2\Delta t+\Delta t}, K_{2\Delta t}) r^{\frac{2\Delta t}{\Delta t}+1} \\
&\quad - \Gamma(\Theta_{2\Delta t}, K_{2\Delta t-\Delta t}) r^{\frac{2\Delta t}{\Delta t}}) + \dots + (\Gamma(\Theta_{T+\Delta t}, K_T) r^{\frac{T}{\Delta t}+1} \\
&\quad - \Gamma(\Theta_T, K_{T-\Delta t}) r^{\frac{T}{\Delta t}}) - \sum_{t=0}^T \left(\Gamma(\Theta_{t+\Delta t}, K_t) r^{\frac{t}{\Delta t}+1} - \Gamma(\Theta_t, K_t) r^{\frac{t}{\Delta t}} \right) \\
&= (\Gamma(\Theta_{\Delta t}, K_0) r^1 - \Gamma(\Theta_0, K_{-\Delta t}) r^0) + (\Gamma(\Theta_{2\Delta t}, K_{\Delta t}) r^2 - \Gamma(\Theta_{\Delta t}, K_0) r^1) \\
&\quad + (\Gamma(\Theta_{3\Delta t}, K_{2\Delta t}) r^3 - \Gamma(\Theta_{2\Delta t}, K_{\Delta t}) r^2) + \dots \\
&\quad + (\Gamma(\Theta_{T+\Delta t}, K_T) r^{\frac{T}{\Delta t}+1} - \Gamma(\Theta_T, K_{T-\Delta t}) r^{\frac{T}{\Delta t}}) \\
&\quad - \sum_{t=0}^T \left(\Gamma(\Theta_{t+\Delta t}, K_t) r^{\frac{t}{\Delta t}+1} - \Gamma(\Theta_t, K_t) r^{\frac{t}{\Delta t}} \right) \\
&= -\Gamma(\Theta_0, K_{-\Delta t}) r^0 + \Gamma(\Theta_{T+\Delta t}, K_T) r^{\frac{T}{\Delta t}+1} \\
&\quad - \sum_{t=0}^T \left(\Gamma(\Theta_{t+\Delta t}, K_t) r^{\frac{t}{\Delta t}+1} - \Gamma(\Theta_t, K_t) r^{\frac{t}{\Delta t}} \right) \\
&= \Gamma(\Theta_{T+\Delta t}, K_T) r^{\frac{T}{\Delta t}+1} - \Gamma(\Theta_0, K_{-\Delta t}) r^0 \\
&\quad - \sum_{t=0}^T \left(\Gamma(\Theta_{t+\Delta t}, K_t) r^{\frac{t}{\Delta t}+1} - \Gamma(\Theta_t, K_t) r^{\frac{t}{\Delta t}} \right) \\
&= \Gamma(\Theta_{T+\Delta t}, K_T) r^{\frac{T}{\Delta t}+1} - \Gamma(\theta, k) - \sum_{t=0}^T \left(\Gamma(\Theta_{t+\Delta t}, K_t) r^{\frac{t}{\Delta t}+1} - \Gamma(\Theta_t, K_t) r^{\frac{t}{\Delta t}} \right),
\end{aligned}$$

der vi har brukt at startkapasiteten k er $K_{-\Delta t}$. Hvis vi tar forventningen av dette, så får vi at

$$\begin{aligned}
& E^{s,k} \left[\sum_{t=0}^T \left(\Gamma(\Theta_t, K_t) - \Gamma(\Theta_t, K_{t-\Delta t}) \right) r^{\frac{t}{\Delta t}} \right] \\
&= E^{s,k} \left[\Gamma(\Theta_{T+\Delta t}, K_T) r^{\frac{T}{\Delta t}+1} - \Gamma(s, k) \right] \\
&\quad - E^{s,k} \left[\sum_{t=0}^T \left(\Gamma(\Theta_{t+\Delta t}, K_t) r - \Gamma(\Theta_t, K_t) \right) r^{\frac{t}{\Delta t}} \right],
\end{aligned}$$

der vi for ordens skyld har endret starttilstanden for forventningen fra (θ, k) til (s, k) ettersom det blir overbelastning når θ både er navnet på en vekstfaktor og navnet til en generell starttilstand. Under rimelige antagelser på Γ , vil leddet $E^{s,k} \left[\Gamma(\Theta_{T+\Delta t}, K_T) r^{\frac{T}{\Delta t}+1} \right]$ gå mot 0 når $T \rightarrow \infty$. Dette er fordi $r^{\frac{T}{\Delta t}+1} \rightarrow 0$ når $T \rightarrow \infty$ siden $r < 1$. Dermed sitter vi igjen med at

6. Optimeringsproblemet

$$\begin{aligned} E^{s,k} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \left(\Gamma(\Theta_t, K_t) - \Gamma(\Theta_t, K_{t-\Delta t}) \right) r^{\frac{t}{\Delta t}} \right] \\ = -\Gamma(s, k) - E^{s,k} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \left(\Gamma(\Theta_{t+\Delta t}, K_t) r - \Gamma(\Theta_t, K_t) \right) r^{\frac{t}{\Delta t}} \right]. \end{aligned}$$

Vi kan nå dele opp forventningen ved å bruke tårnegenskapen til betingede forventninger.

Setning 6.1 *Denne setningen, kjent som tårnegenskapen, sier at dersom X er en tilfeldig variabel men forventet verdi $E(X)$, og Y er en vilkårlig tilfeldig variabel i det samme sannsynlighetsrommet, så er*

$$E(X) = E(E(X|Y)),$$

som vil si at forventningen til den betingede forventningen av X gitt Y er det samme som forventningen av X .

Bevis.

Se [Øks95] side 240.

Vi kan da skrive at

$$\begin{aligned} E^{s,k} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \left(\Gamma(\Theta_{t+\Delta t}, K_t) r - \Gamma(\Theta_t, K_t) \right) r^{\frac{t}{\Delta t}} \right] \\ = E^{s,k} \left[\sum_{t=0}^{\infty} E \left[\Gamma(\Theta_{t+\Delta t}, K_t) r - \Gamma(\Theta_t, K_t) | \Theta_t \right] r^{\frac{t}{\Delta t}} \right]. \end{aligned}$$

Ettersom innholdet i klammeparantesen, det vil si bidragene til utbyggingene, er mengder av u og tar formen $pru_{n+1} + (1-p)ru_{n-1} - u_n$, kan vi skrive at

$$\begin{aligned} E \left[\Gamma(\Theta_{t+\Delta t}, K_t) r - \Gamma(\Theta_t, K_t) | \Theta_t \right] \\ = pr\Gamma(\Theta_t^+, K_t) + (1-p)r\Gamma(\Theta_t^-, K_t) - \Gamma(\Theta_t, K_t), \end{aligned}$$

der vi har brukt følgende notasjon: Hvis $\Theta_t = \theta_n$, så er $\Theta_t^+ = \theta_{n+1}$ og $\Theta_t^- = \theta_{n-1}$. Hvis vi nå introduserer operatoren A ved

$$Af(\theta_n) = \frac{rpf(\theta_{n+1}) - f(\theta_n) + r(1-p)f(\theta_{n-1})}{\Delta t},$$

som bortsett fra nevneren er identisk med teknikken vi brukte når vi løste differensligningen (4.6) i Kapittel 4, så får vi at

$$E \left[\Gamma(\Theta_{t+\Delta t}, K_t) r - \Gamma(\Theta_t, K_t) | \Theta_t \right] = A\Gamma(\Theta_t, K_t)\Delta t.$$

Setter vi $A\Gamma(\Theta_t, K_t)\Delta t$ tilbake inn i summen, får vi

$$\begin{aligned} E^{s,k} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \left(\Gamma(\Theta_{t+\Delta t}, K_t)r - \Gamma(\Theta_t, K_t) \right) r^{\frac{t}{\Delta t}} \right] \\ = E^{s,k} \left[\sum_{t=0}^{\infty} A\Gamma(\Theta_t, K_t)r^{\frac{t}{\Delta t}} \Delta t \right], \end{aligned}$$

som innsatt i ligningen for forventningen av utbyggingen gir oss at

$$\begin{aligned} E^{s,k} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \left(\Gamma(\Theta_t, K_t) - \Gamma(\Theta_t, K_{t-\Delta t}) \right) r^{\frac{t}{\Delta t}} \right] \\ = -\Gamma(s, k) - E^{s,k} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \left(\Gamma(\Theta_{t+\Delta t}, K_t)r - \Gamma(\Theta_t, K_t) \right) r^{\frac{t}{\Delta t}} \right] \\ = -\Gamma(s, k) - E^{s,k} \left[\sum_{t=0}^{\infty} A\Gamma(\Theta_t, K_t)r^{\frac{t}{\Delta t}} \Delta t \right]. \end{aligned}$$

Setter vi dette inn i uttrykket for den totale nettoinntekten fra tid 0 til tid T , men isteden summerer fra tid 0 til ∞ , får vi

$$E^{(s,k)} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \left(\Pi(\Theta_t, K_t) + A\Gamma(\Theta_t, K_t) \right) r^{\frac{t}{\Delta t}} \Delta t \right] + \Gamma(s, k).$$

som er et uttrykk for den forventede diskonterte nettoinntekten fra tid 0 til ∞ dersom man følger en utbyggingsstrategi K der markedets tilstand og produksjonskapasiteten har startpunkt (s, k) . Dette er den diskret analogen til formel (2.2) i Kapittel 2. I likhet med formel (2.2) så tar denne formelen også hensyn til hopp ettersom alt i det diskret tilfellet er hopp.

6.1 Investeringsstrategier

Vi må bestemme hva slags type investeringsstrategier vi tillater, og hvordan de er definert. Det er mange måter å gjøre dette på, både i det kontinuerlige og det diskret tilfellet. Definisjonen som er brukt av Kobila i det kontinuerlige tilfellet er nesten en av de mest generelle man kan bruke - den tillater at strategien avhenger av hele den tidligere historien til Θ . Det er derfor i utgangspunktet rimelig å benytte en tilsvarende definisjon også i det diskret tilfellet.

Siden utvidelsen fra $K_{t-\Delta t}$ til K_t skjer etter at den underliggende prosessen har nådd tilstanden Θ_t , vil vi i utvidelsesøyeblikket ha kjennskap til verdiene $\Theta_0, \Theta_{\Delta t}, \dots, \Theta_t$. Dette betyr at prosessen K_t bør være tilpasset en filtrasjon $\mathcal{F} = \sigma\{\Theta_0, \Theta_{\Delta t}, \dots, \Theta_t\}$. Det er verdt å legge merke til at selv om Θ er diskretisert og lever på \mathbb{S} , så er det ikke nødvendig å diskretisere K . Dette leder til følgende definisjon:

6. Optimeringsproblemet

Definisjon 6.2 Anta at $\theta \in \mathbb{S}$ og $k \in (0, \infty)$. En (θ, k) -strategi K er en stokastisk prosess $k : \mathbb{T} \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ slik at:

- (i) K er ikke-avtagende.
- (ii) $K_0 \geq k$.
- (iii) K_t er \mathcal{F}_t -målbar, der $\mathcal{F} = \sigma\{\Theta_0, \Theta_{\Delta t}, \dots, \Theta_t\}$.

Grunnen til at K er ikke-avtagende er et forenkende valg vi tar. Tanken er at kapasiteten vil være der selv om vi kanskje ikke får utnyttet den helt ut. Det er mulig å lage modeller der vi kan redusere K , og dermed få noe av utbyggingskostnaden igjen når markedet faller, men disse modellene er mer komplekse og vil ikke bli utforsket her. At $K_0 \geq k$ betyr at vi ønsker at K skal gi oss strategier som er tilpasset gjeldende produksjonskapasitet eller høyere. Vi er med andre ord ikke interessert i strategier som vurderer en tilstand med lavere produksjonskapasitet enn hva vi har, ettersom vi ser på irreversible utbygginger. Det vil si at dersom marked utvikler seg negativt eller er stillestående, og vi har for stor produksjonskapasitet eller akkurat tilstrekkelig i forhold til etterspørselen i markedet, så vil K anbefale ingen utbygging og dermed være lik dagens startkapasitet k . Denne egenskapen tillater også at vi kan gjøre initialutbygginger ved tiden $t = 0$. Det siste punktet kommer som nevnt fra hvilken informasjon vi sitter inne med ved en gitt tid t , der σ -algebraen $\sigma\{\Theta_t : t \in \mathbb{T}\}$ definerer sett av hendelser som er målbare. I sannsynlighetssammenheng representerer σ -algebraen “spørsmål vi har svaret på ved tiden t ”. Det vil si at all informasjon som hvert punkt Θ_t inneholder, fra tidspunkt 0 til og med tidspunkt t , om markedstilstanden, vil være tilgjengelig og målbar i σ -algebraen. Denne informasjonen vil også bli mer og mer presis ettersom mer informasjon om markedstilstanden blir tilgjengelig slik at filtrasjonen \mathcal{F} representerer den voksende mengden av σ -algebraer. Vi kan nå uttrykke et kriterium som konkretiserer hovedmålet for det irreversible investeringsproblemet:

Kriterium 6.3 For hvert par (θ, k) ønsker vi å finne den (θ, k) -strategien som maksimerer

$$J(K) = E^{(s,k)} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \left(\Pi(\Theta_t, K_t) + A\Gamma(\Theta_t, K_t) \right) r^{\frac{t}{\Delta t}} \Delta t \right] + \Gamma(s, k). \quad (6.1)$$

dersom den eksisterer. Vi ønsker også å ha et uttrykk som maksimerer den forventede diskonterte nettoinntektsfunksjonen (6.1), gitt som den optimale profittfunksjonen

$$h(\theta, k) = \sup\{J(K) : K \text{ er en } (\theta, k)\text{-strategi}\}. \quad (6.2)$$

■

Siden den strategien vi leter etter skal være optimal ut i fra den dynamiske markedstilstanden modellert av Markovkjeden Θ , så bør vi presisere mer konkret hvordan vi faktisk finner en slik optimal strategi. Ut i fra definisjonen for (θ, k) -strategier, forkortet til K , så er K målbar ut i fra en σ -algebra gitt ved $\sigma\{\Theta_t : t \in \mathbb{T}\}$. I denne algebraen ligger som sagt informasjon om

markedstilstanden og verdien av den økonomiske indikatoren θ . Etter hvert som t blir stor og vi får flere σ -algebraer med informasjon, så samler vi dette under en felles variabel vi kaller filtrasjonen \mathcal{F} . Det betyr at etter hvert som vi får informasjon om markedstilstanden, gitt ved θ , så vil vi kunne danne en funksjon som følger den økonomiske utviklingen i markedet. Denne funksjonen tar θ som argument og vil bli kontinuerlig når $\Delta t \rightarrow 0$. Vi kaller denne funksjonen ϕ .

Funksjonen ϕ vil representere randen til et forbudsområde som vi ønsker å unngå. Hvis vi ser for oss ϕ som en funksjon i et koordinatsystem, så vil vi med dette mene at ϕ er en grafisk fremstilling av kjøpekraften i markedet, der en produksjonskapasitet k som havner under denne grafen tilsvare utnyttet potensial. Sagt med andre ord, hadde vi hatt større produksjonskapasitet, så kunne vi solgt mer siden etterspørselen er større enn hva vi klarer å produsere. Så dersom vi klarer å ligge litt i overkant, eller helt likt, og dermed følge denne grafen ϕ , så vil det bety at potensialet i markedet er optimalt utnyttet. Dette betyr at vi er avhengig av at $k \geq \phi(\theta)$ for å finne en optimal strategi, og vi kan definere forbudsområdet som

$$\mathcal{G} = (\theta, k) : k \leq \phi(\theta).$$

Her kan det være greit med en presisering. Filtrasjonen og forbudsområdet er ikke en og samme sak. Filtrasjonen er den som sitter på og samler inn tilgjengelig informasjonen, mens forbudsområdet behandler og anvender denne informasjonen. Funksjonen ϕ og forbudsområdet er derimot noe av det samme i form av at ϕ representerer randen til forbudsområdet. Så hvis man vet forbudsområdet så kan man finne randen og motsatt, men begge er avhengig av informasjon fra filtrasjonen i første omgang. Uten filtrasjonen i bunn har vi ikke noe å bygge opp funksjonen ϕ på eller forbudsområdet.

Med forbudsområde definert, kan vi mer konkret definere hvilke egenskaper vi ønsker at strategien skal ha. For ethvert punkt (θ, k) vil vi at

1. $K_0 = k \vee \phi(\theta)$.
2. $K_t \geq \phi(\Theta_t) \quad \forall \quad t \in \mathbb{T}$.
3. K er en kontinuerlig og ikke-avtagende prosess som kun øker når $K_t = \phi(\Theta_t)$.

Med den første egenskapen bestemmes initialverdien til strategien ut i fra om markedstilstanden er høyere eller lavere enn dagens produksjonskapasitet. Det vil si at dersom etterspørselen i markedet er lavere enn dagens produksjonskapasitet, så vil strategien K være lik nettopp denne produksjonskapasiteten som vil si at vi ikke investerer i ny utbygging, men holder oss på stedet hvil, og venter på at en eventuell fremtidig oppsving i markedet vil komme og øke etterspørselen. Dersom etterspørselen i markedet er høyere enn dagens produksjonskapasitet, så settes enkelt sagt K lik funksjonen for randen til forbudsområdet, som betyr at vi gjør et hopp, det vil si at vi investerer i utbygging umiddelbart, slik at vi kommer oss ut av forbudsområdet og får en ny produksjonskapasitet tilpasset etterspørselen i markedet. Dette er likefult ikke hele sannheten ettersom strategien også tar fremtidige muligheter med i betraktningen, for eksempel kan det hende at man ikke bygger helt ut til dagens

6. Optimeringsproblemet

etterspørsel dersom man er redd for fremtidige tilbakeslag. Så denne betingelsen er noe mer subtil. Med egenskap nummer to tilpasser vi alle videre strategier til å følge tilsvarende prosedyre som i første punkt. Dersom K_t alltid er større enn, eller lik funksjonen for forbudsområdet, så vil alltid produksjonskapasiteten være på høyde med etterspørselen for ethvert punkt t på tidslinjen, og vi vil ikke gå glipp av uutnyttet potensial i markedet. Dette blir konkretisert i siste punkt, ved at K ikke skal øke, det vil si at vi gjør ingen ny investering før etterspørselen i markedet har tatt igjen produksjonskapasiteten.

Oppsummert kan vi si at verdien til K bestemmes av

$$K_t = k \vee \sup\{\phi(\Theta_s) : s \leq t\}.$$

Så er spørsmålet om man kan finne ϕ . For å finne svar på dette må vi først definere hva ϕ er. Dette skal vi se på i neste kapittel.

I dette kapitlet har vi funnet den diskre analogen til den forventede diskonterte nettoinntektsfunksjonen (2.2) ved (6.1), i tillegg til å definere hva slags type investeringsstrategier K_t vi må ha, dersom strategien eksisterer, og en funksjon for optimal profitt (6.2) som maksimerer den forventede diskonterte nettoinntektsfunksjonen for en strategi K .

KAPITTEL 7

Forbudsområdet

I dette kapitlet skal vi se på hva vi mener med forbudsområdet utover det som ble nevnt i forrige kapittel. Vi er spesielt interessert i randen til forbudsområdet ettersom det er i nærheten av denne vi finner de optimale strategiene. Når denne randen har blitt identifisert kan vi formulere den diskre analogen til funksjonen (2.9) i Kapittel 2 som maksimerer profitten. I forrige kapittel definerte vi forbudsområdet som

$$\mathcal{G} = \{(\theta, k) : k \leq \phi(\theta)\},$$

og fant frem til at vi ønsker at prosessen K , som bestemmer investeringsstrategier, skal følge bestemmelsen

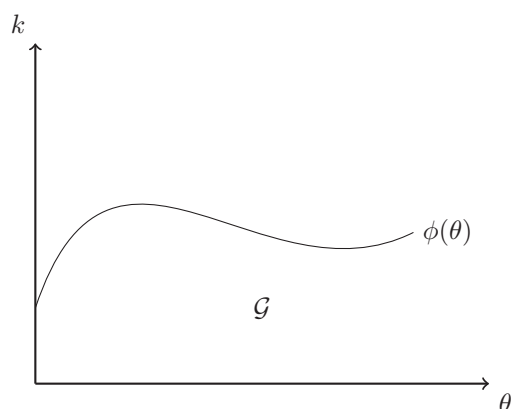
$$K_t = k \vee \sup\{\phi(\Theta_s) : s \leq t\}.$$

Spørsmålet som så ble stilt var om det er mulig å finne ϕ . Som en funksjon av θ , beskriver ϕ randen til forbudsområdet \mathcal{G} , der θ er den økonomiske indiktaoren som beskriver markedets tilstand. På samme måte som vi definerte forbudsområdet \mathcal{G} , kan vi definere ϕ matematisk som

$$\phi(\theta) = \sup\{k : (\theta, k) \in \mathcal{G}\}.$$

Med denne definisjonen mener vi at for alle (θ, k) som ligger i forbudsområdet, så vil vi at ϕ tar den θ som er i par med den største k som argument. Dersom ϕ følger denne enkle forutsetningen, så vil ϕ danne en funksjon som følger randen til forbudsområdet som vist i Figur 1.

7. Forbudsområdet

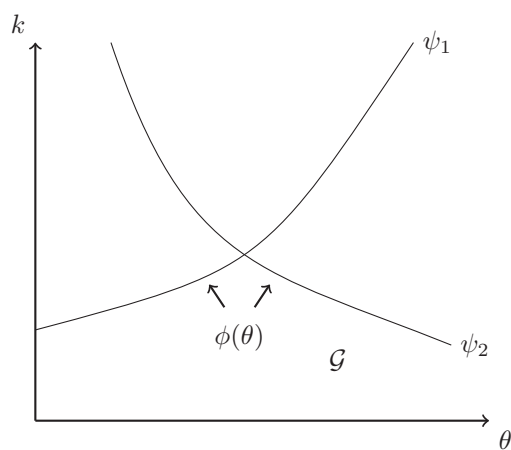


Figur 1.

Til tross for ϕ følger randen til forbudsområdet, så betyr ikke det at vi ikke kan befinne oss i, eller investere i utbygging slik at vi havner i et punkt ovenfor forbudsområdet. Sagt med andre ord er ϕ den optimale funksjonen å følge, men ikke den eneste. Vi kan derfor definere forbudsområdet på en ny måte:

$$\mathcal{G} = \{(\theta, k) : \psi_1(k) \leq \theta \leq \psi_2(k)\},$$

der ψ_1 er en voksende funksjon og ψ_2 er en avtagende funksjon. Som vist i Figur 2, beskriver ψ 'ene og ϕ det samme området, men ψ 'ene bruker k som uavhengig variabel isteden for θ . Vi ønsker å heller bruke ψ 'ene til å finne randen til forbudsområdet siden disse er lettere å regne med enn ϕ .



Figur 2.

Med funksjonene ψ_1 , ψ_2 og ϕ har vi nå fått funksjoner til å representere variablene θ og k , nemlig ved at

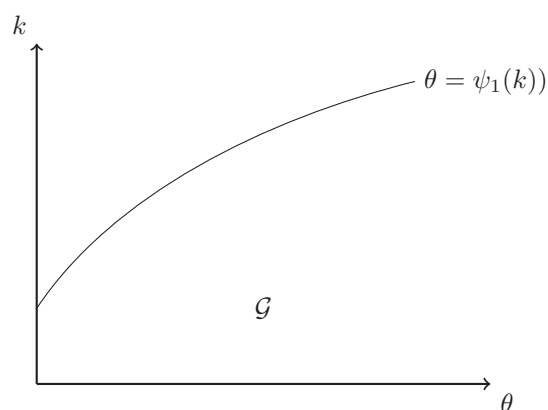
$$\theta = \psi_1(k), \quad \theta = \psi_2(k) \quad \text{og} \quad k = \phi(\theta).$$

Forbudsområdet er enkelt å greite arealet under begge kurvene ψ_1 og ψ_2 . Ved å inkludere disse funksjonene ser vi hvordan profitten vil oppføre seg både

utenfor og innenfor forbudsområdet. Hvis vi nå ser for oss at vi starter en optimal prosess i to ulike punkter, (s, k_1) og (s, k_2) , der (s, k_1) ligger utenfor forbudsområdet og (s, k_2) ligger innenfor men ikke på randen, så vil prosessen i punkt (s, k_1) ikke foreta seg noe, bare vente på bedre tider, mens prosessen i punkt (s, k_2) vil gjøre et umiddelbart hopp til randen, det vil si til punktet $(\theta, \phi(\theta))$, for så å oppføre seg identisk med randen ϕ . Så snart prosessen med startpunkt (s, k_1) treffer på randen, så vil den også følge ϕ . Vi kan dermed si at forskjellen i profitt mellom de to prosessene er alene bestemt av forskjellen i prosessenes initialutbygging. Dette skal vi se nærmere på senere i kapitlet. Men først, la oss få et innblikk i hvordan et forbudsområde kan se ut. Under har vi lagt inn noen eksempler hentet fra [Kob93] på mulige økonomiske modeller bestemt ut i fra kurvene til ψ_1 og ψ_2 :

Eksempel 1.

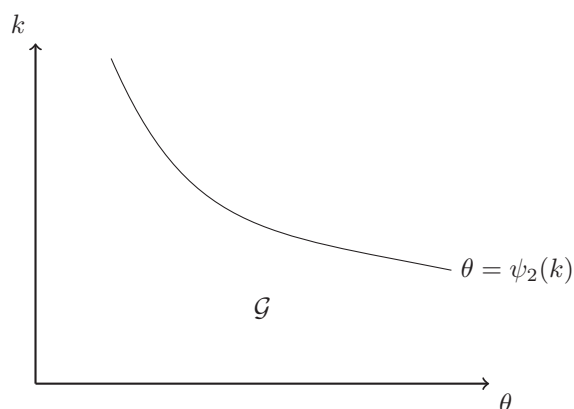
Dersom $\psi_2(k) = \infty$ for alle k , så vil vi ha et forbudsområde lik Figur 3.



Figur 3.

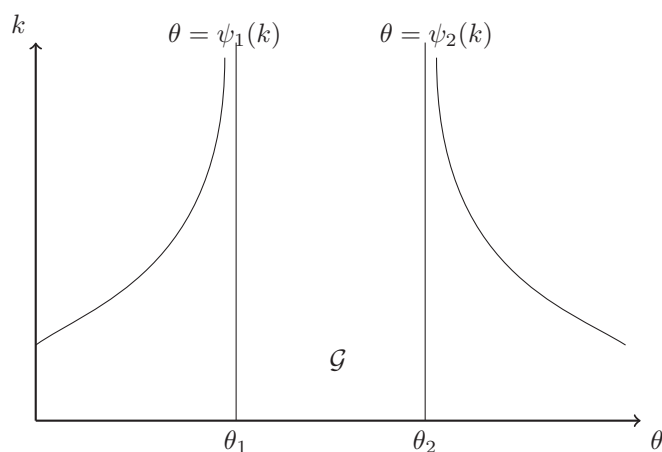
Eksempel 2.

Matematisk mulig, men mer usannsynlig fra et økonomisk ståsted, er det motsatte tilfellet av Eksempel 1, der $\psi_1(k) = 0$ for alle k . Da vil vi få et forbudsområde lik Figur 4.



Figur 4.

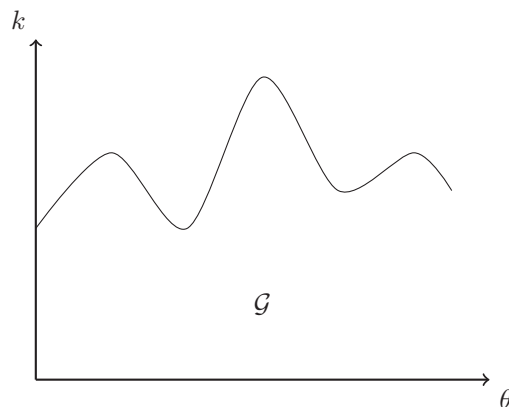
Eksempel 3. Vi kan også få et tilfelle der ψ_1 og ψ_2 aldri møtes, og vi vil da heller ikke få noen optimal strategi, gitt at vi ikke tillater uendelig produksjonskapasitet, men vi kan til tross for dette like fullt produsere tilnærmet optimale strategier som vist i Figur 5. Når det er sagt, så er denne situasjonen økonomisk urealistisk i den forstand at det i midtpartiet av grafen lønner seg å investere så mye som overhodet mulig, helst uendelig mye. Dette er selvfølgelig umulig av ressursmessige grunner, men vi inkluderer dette eksempelet for å vise at det ikke er bygget ressursbegrensninger inn i den matematiske modellen.



Figur 5.

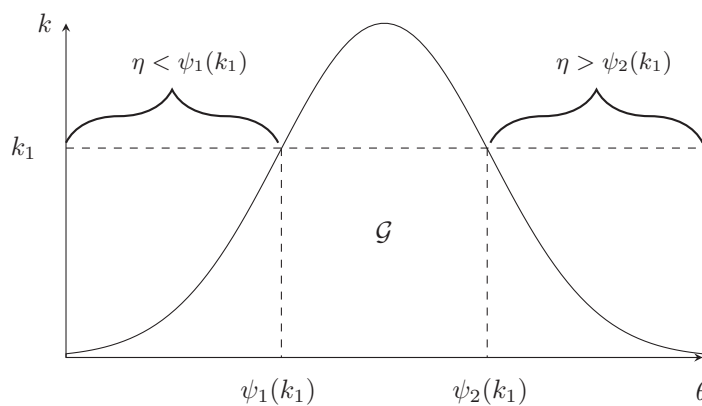
Eksempel 4.

En situasjon som er ekskludert på grunn av tekniske forhold, men som fint kan oppstå, er vist i Figur 6. Her har forbudsområde flere humper og kan ikke lenger bli beskrevet av funksjonene ψ_1 og ψ_2 .



Figur 6.

Dette var flere eksempler på hvordan forbudsområdet kan se ut med utgangspunkt i hvilke forutsetninger bedriften og markedet har. I Figur 7 illustrerer vi hvilket utgangspunkt vi tar med tanke på vår egen model, som er tilsvarende Figur 2.



Figur 7.

Figuren ovenfor illustrerer hvordan vi antar at forbudsområdet ser ut, med produksjonskapasitet k på y -aksen og økonomisk indikator θ på x -aksen. Alt under kurven er forbudsområdet kalt \mathcal{G} . Kurven, eller randkurven som vi også har kalt den gjennom utregningene, er beskrevet på to forskjellige måter, enten ved $\phi(\theta)$ eller ved $\psi_1(k)$ og $\psi_2(k)$. Poenget er at ϕ og ψ_1, ψ_2 , som begge beskriver samme kurve, benytter ulike frie variable. ϕ med θ som fri variabel og ψ_1, ψ_2 med k som fri variabel. Siden kurven har en hump, trenger vi to funksjoner til å beskrive den når k er fri variabel, der ψ_1 er den voksende funksjonen og ψ_2 den avtagende funksjonen. Det vil si at kurvens høyeste punkt i y -retning er der $\psi_1(k)$ møter $\psi_2(k)$, som vil si at venstre halvdel av $\phi(\theta)$ er lik $\psi_1(k)$, og høyre halvdel av $\phi(\theta)$ er lik $\psi_2(k)$. Metaforisk, men ikke matematisk korrekt, kan vi si at ψ_1 og ψ_2 tilsammen beskriver samme kurve som ϕ .

Figur 7 er delt opp i tre deler, avmerket med de stiplede linjene, der k_1

7. Forbudsområdet

er et punkt på k -aksen og $\psi_1(k)$ og $\psi_2(k)$ er to punkter på θ -aksen. Vi ser i dette tilfellet på et spesielt tilfelle der vi har valgt oss én bestemt verdi k_1 , og ser på hvordan dette valget av k vil påvirke hvor vi befinner oss i forhold til forbudsområdet. Fra venstre, så er første del der $\eta < \psi_1(k_1)$ (merk at $\eta = \theta^m$). Denne notasjonen er skrevet med hensyn på k -aksen. Vi kan også uttrykke den med hensyn på θ -aksen som, kanskje noe mer intuitivt, $k > \phi(\eta)$, som vil si at vi her har en k -verdi som ligger ovenfor kurven i y -retning. På samme vis i del tre, der $\eta > \psi_2(k_1)$ - som er med hensyn på k -aksen - kan skrives med hensyn på θ -aksen som $k < \phi(\eta)$. I del tre har vi også en verdi for k som gjør at vi ligger ovenfor kurven. I begge disse tilfellene produserer vi altså mer enn hva vi får solgt. I del to derimot er ikke produksjonskapasiteten tilstrekkelig og k -verdien havner under kurven og vi befinner oss i forbudsområdet. Her har vi da tilfellet der markedet etterspør mer enn vi kan produsere og vi taper en mulig profitt. Det mest optimale tilfellet, der vi får solgt nøyaktig så mye som vi produserer, er skjæringspunktet mellom kurven og de stiplede linjene, mens det minst optimale tilfellet er helt til venstre i første del, midt i andre del, og helt til høyre i tredje del. Her befinner produksjonskapasiteten seg lengst unna markedets etterspørsel og vi taper penger. Poenget med Figur 7 er å illustrere hvordan produksjonskapasiteten k bør, så langt det er mulig, følge kurven $\phi(\theta)$ så nært som mulig. Dersom vi kan tilpasse k til θ så vil det være den optimale strategien som gir oss mest mulig profitt.

Som nevnt i begynnelsen av kapitlet antar vi at det forbudte området \mathcal{G} er gitt ved en funksjon ϕ , det vil si at \mathcal{G} består av alle punkter (s, k) slik at $k < \phi(s)$. Dersom $k > \phi(s)$ så vil punktet (s, k) ligge utenfor forbudsområdet. Den antatt optimale kontrollen dersom vi starter i tilstand (s, k) er da gitt ved

$$K_t^{(s,k)} = k \vee \max\{\phi(\Theta_r^s) : r = -\Delta t, 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t\}.$$

der $K_{-\Delta t} = k$ er starttilstanden. Dette er den samme definisjonen for investeringsstrategier K som nevnt i starten av kapitlet, men vi har her skrevet den om til å gjelde for strategier med startpunkt (s, k) i tillegg til at vi inkluderer en r som er slik at vi ser på alle tidspunkter r mindre enn en gitt t på tidslinjen \mathbb{T} . Vi er med andre ord ikke interessert i én spesiell r , men vi er interessert i historien opp til tid t fordi de valgene vi allerede har gjort, påvirker de valgmulighetene vi nå har. Denne r 'en må ikke forveksles med den r 'en som betegner diskonteringsfaktoren. At vi har endret fra sup til max spiller ingen rolle siden mengden vi ser på er endelig. Vi lar $h(s, k)$ betegne det diskonterte utbytte dersom vi starter i tilstanden (s, k) . Vi vil alltid bruke (s, k) isteden for (θ, k) når vi snakker om en starttilstand.

Vi har hittil omtalt forbudsområdet og randen til forbudsområdet som den samme mengden, men det vil være nyttig å skille randpunktene i \mathcal{G} fra de indre punktene. Dersom s er et element i tilstandsrommet $\mathbb{S} = \{\theta^n : n \in \mathbb{Z}\}$, så lar vi s^- være et punkt i \mathbb{S} til venstre for s , og s^+ være punktet i \mathbb{S} til høyre for s . Det vil si at hvis $s = \theta^n$, så er $s^- = \theta^{n-1}$ og $s^+ = \theta^{n+1}$. Vi kan nå definere det indre til \mathcal{G} ved

$$\mathcal{G}^\circ = \{(s, k) \in \mathcal{G} : (s^-, k), (s^+, k) \in \mathcal{G}\},$$

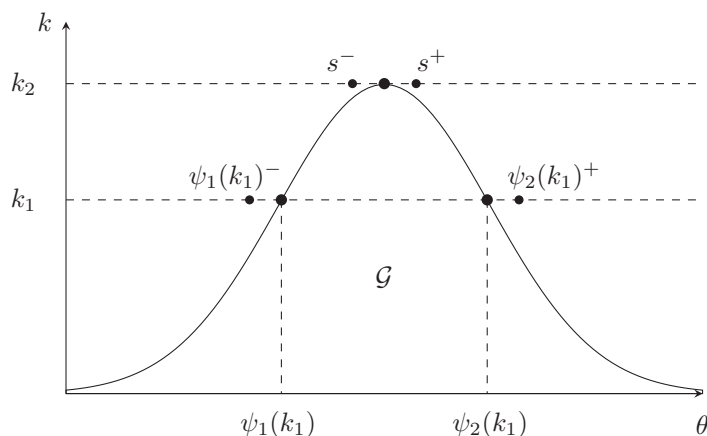
og *randen* til \mathcal{G} ved

$$\partial\mathcal{G} = \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}^\circ.$$

Med $\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}^\circ$ mener vi det relative komplementet til \mathcal{G}° med hensyn på mengden \mathcal{G} .

Vi er nå interessert i å regne ut $Ah(s, k)$ i forskjellige type punkter, der $Ah(s, k)$ økonomisk sett “måler” hvordan verdien til en investering endrer seg med tiden hvis man ikke gjør noe med den (operatoren A er den samme som vi introduserte i Kapittel 6). Ut i fra det vi har beskrevet ovenfor, så vil vi få tre forskjellige type punkter, nemlig $(s, k) \notin \mathcal{G}$, $(s, k) \in \mathcal{G}^\circ$ og $(s, k) \in \partial\mathcal{G}$, som alle må behandles hver for seg. Hvor vi befinner oss i forhold til disse punktene vil ha direkte påvirkning på hvordan profittfunksjonen h vil se ut.

Før vi går løs på de ulike tilfellene, la oss se på Figur 8, som tar samme utgangspunkt som Figur 7, men nå illustrert med de ulike overgangene.



Figur 8.

I Figur 8 ser vi at dersom vi velger en k -verdi tilsvarende k_1 , så har det forbudte området to randpunkter, $\psi_1(k_1)$ og $\psi_2(k_1)$. Disse punktene ligger i \mathcal{G} , men har venstre og høyre randpunkter utenfor \mathcal{G} , henholdsvis punktene $\psi_1(k_1)^-$ og $\psi_1(k_1)^+$. De må derfor behandles i henhold til det vi kaller Tilfelle 3 nedenfor, der punktet $\psi_1(k_1)^-$ må behandles etter det som beskrives som (s^-, k) -varianten, og $\psi_1(k_1)^+$ etter (s^+, k) -varianten. Her merker vi oss at for denne k -verdien (og de aller fleste andre), ikke finnes noen $s \in \mathcal{G}$ der både (s^-, k) og (s^+, k) ligger utenfor \mathcal{G} . Dette forekommer bare for k -verdien helt på toppen av kurven, som for k_2 i Figur 8. Det betyr at for én og samme k , vil vi ikke ha både ensidige og tosidige punkter (det vil si punkter med henholdsvis ett og to nabopunkter på utsiden av \mathcal{G}), og siden de tosidige punktene bare forekommer for helt spesielle k -verdier, velger vi å utelate dem fra regnestykket vårt. Dette vil vi komme tilbake til i beskrivelsen i Tilfelle 3.

La oss nå se på hvordan vi kan regne på de tre ulike tilfellene.

7. Forbudsområdet

Tilfelle 1: $(s, k) \notin \mathcal{G}$

I dette tilfellet gjør vi ingen investering. Vi befinner oss her i en tilstand der vi har for høy produksjonskapasitet i forhold til markedets etterspørsmål, slik at forskjellen i optimal profitt med hensyn på produksjonskapasiteten er mindre enn utbyggingskostnadene og vi vil tape penger dersom vi velger å bygge ut. Vi befinner oss altså i en situasjon (s, k) utenfor forbudsområdet der vi ikke gjør noen ny investering, men vi vil inkassere en inntekt $\Pi(s, k)$, før vi deretter forflytter oss til enten (s^+, k) eller (s^-, k) med sannsynlighet henholdsvis p og $(1 - p)$. Siden profitten h er mengder av u og tar formen $pru_{n+1} + (1 - p)ru_{n-1} - u_n$, så er profitten i et slikt tilfelle gitt ved

$$h(s, k) = \Pi(s, k)\Delta t + prh(s^+, k) + (1 - p)rh(s^-, k).$$

Hvis vi så anvender operatoren A på h , får vi

$$\begin{aligned} Ah(s, k) &= \frac{prh(s^+, k) - h(s, k) + (1 - p)rh(s^-, k)}{\Delta t} \\ &= \frac{prh(s^+, k) - (\Pi(s, k)\Delta t + prh(s^+, k) + (1 - p)rh(s^-, k))}{\Delta t} \\ &\quad + \frac{(1 - p)rh(s^-, k)}{\Delta t} \\ &= -\Pi(s, k). \end{aligned}$$

Her er det verdt å merke seg at profitten ved tiden t er $\Pi(t, k)\Delta t$. Grunnen til at vi får noe negativt i utregningen av $Ah(s, k)$, er at den tar fremtidig forventet inntekt (fra tiden $t + \Delta t$) minus forventet inntekt (fra tiden t). Dersom vi innfører funksjonen

$$v = h - \Gamma,$$

og anvender A på denne i punktet (s, k) , får vi ligningen

$$Av(s, k) = \frac{prv(s^+, k) - v(s, k) + (1 - p)rv(s^-, k)}{\Delta t},$$

som kan utvides til at

$$Av(s, k) = \frac{prh(s^+, k) - pr\Gamma(s^+, k) - h(s, k) + \Gamma(s, k) + (1 - p)rh(s^-, k)}{\Delta t} - \frac{(1 - p)r\Gamma(s^-, k)}{\Delta t},$$

som tilsvare

$$Av(s, k) = \frac{prh(s^+, k) - h(s, k) + (1 - p)rh(s^-, k)}{\Delta t} - \frac{pr\Gamma(s^+, k) - \Gamma(s, k) + (1 - p)r\Gamma(s^-, k)}{\Delta t}.$$

Dette kan forkortes til at

$$\begin{aligned} Av(s, k) &= -\Pi(s, k) - A\Gamma(s, k) \\ &= -(\Pi + A\Gamma)(s, k). \end{aligned}$$

Det er ikke så stor forskjell på å arbeide med h og v , de skiller seg fra hverandre bare med den kjente funksjonen Γ , men grunnen til at vi innfører v er, som vi senere vil se, fordi v gir litt penere og mer oversiktlige funksjoner.

Tilfelle 2: $(s, k) \in \mathcal{G}^\circ$

Når $(s, k) \in \mathcal{G}$, så befinner vi oss i det forbudte området og vi vil øyeblikkelig betale $\Gamma(s, \phi(s)) - \Gamma(s, k)$ for å bygge ut kapasiteten til $\phi(s)$ for å følge etterspørselen i markedet. Ved å øke kapasiteten fra k til $\phi(s)$ vil vi flytte oss fra det indre \mathcal{G}° til randen $\partial\mathcal{G}$. Vi ser her på et øyeblikksbilde, det vil si at vi regner (ganske urealistisk) med at vi kan gjennomføre kapasitetsutvidelsen før s rekker å endre seg. Vi vil deretter inkassere $\Pi(s, \phi(s))$ og så forflytte oss til $(s^+, \phi(s))$ eller $(s^-, \phi(s))$ med sannsynlighet henholdsvis p og $(1 - p)$. Med startpunkt (s, k) får vi derfor profittligningen

$$\begin{aligned} h(s, k) &= \Gamma(s, k) - \Gamma(s, \phi(s)) + \Pi(s, \phi(s))\Delta t \\ &\quad + prh(s^+, \phi(s)) + (1 - p)rh(s^-, \phi(s)). \end{aligned}$$

Ligningen for startpunktet $(s, \phi(s))$, der vi ikke gjør noen utbygging siden vi da befinner oss på eller nære randen $\partial\mathcal{G}$, kan vi skrive ut på tilsvarende vis der vi utelater utbyggingskostnadene slik at

$$h(s, \phi(s)) = \Pi(s, \phi(s))\Delta t + prh(s^+, \phi(s)) + (1 - p)rh(s^-, \phi(s)).$$

Trekker vi den første fra den andre, får vi

$$\begin{aligned} h(s, \phi(s)) - h(s, k) &= \Pi(s, \phi(s))\Delta t + prh(s^+, \phi(s)) + (1 - p)rh(s^-, \phi(s)) \\ &\quad - (\Gamma(s, k) - \Gamma(s, \phi(s)) + \Pi(s, \phi(s))\Delta t + prh(s^+, \phi(s)) \\ &\quad + (1 - p)rh(s^-, \phi(s))), \end{aligned}$$

som forkortes til

$$h(s, \phi(s)) - h(s, k) = \Gamma(s, \phi(s)) - \Gamma(s, k).$$

Den eneste forskjellen mellom å starte i (s, k) og å starte i $(s, \phi(s))$ er altså at vi i det første tilfellet må betale for utbygging fra kapasitet k til kapasitet $\phi(s)$. Siden vi nå er i en situasjon der også (s^-, k) og (s^+, k) er i \mathcal{G} , har vi også at

$$h(s^-, \phi(s^-)) - h(s^-, k) = \Gamma(s^-, \phi(s^-)) - \Gamma(s^-, k),$$

og

$$h(s^+, \phi(s^+)) - h(s^+, k) = \Gamma(s^+, \phi(s^+)) - \Gamma(s^+, k).$$

7. Forbudsområdet

Anvender vi operatoren A på h , har vi dermed

$$\begin{aligned}
 Ah(s, k) &= \frac{prh(s^+, k) - h(s, k) + (1-p)rh(s^-, k)}{\Delta t} \\
 &= \frac{1}{\Delta t} \left(pr(h(s^+, \phi(s^+)) - \Gamma(s^+, \phi(s^+)) + \Gamma(s^+, k)) \right. \\
 &\quad \left. - (h(s, \phi(s)) - \Gamma(s, \phi(s)) + \Gamma(s, k)) \right. \\
 &\quad \left. + (1-p)r(h(s^-, \phi(s^-)) - \Gamma(s^-, \phi(s^-)) + \Gamma(s^-, k)) \right) \\
 &= \frac{prh(s^+, \phi(s^+)) - h(s, \phi(s)) + (1-p)rh(s^-, \phi(s^-))}{\Delta t} \\
 &\quad - \frac{pr\Gamma(s^+, \phi(s^+)) - \Gamma(s, \phi(s)) + (1-p)r\Gamma(s^-, \phi(s^-))}{\Delta t} \\
 &\quad + \frac{pr\Gamma(s^+, k) - \Gamma(s, k) + (1-p)r\Gamma(s^-, k)}{\Delta t} \\
 &= Ah(s, \phi(s)) - A\Gamma(s, \phi(s)) + A\Gamma(s, k) \\
 &= A(h - \Gamma)(s, \phi(s)) + A\Gamma(s, k).
 \end{aligned}$$

Hvis vi nå innfører operatoren $\widehat{}$ som gjør en funksjon $g(s, k)$ av to variable til en funksjon $\widehat{g}(s)$ av én variabel ved å sette

$$\widehat{g}(s) = g(s, \phi(s)),$$

kan ligningen ovenfor skrives som

$$Ah(s, k) = A(\widehat{h - \Gamma})(s) + A\Gamma(s, k).$$

Setter vi nå som før

$$v = h - \Gamma,$$

så kan vi skrive denne formelen som

$$\begin{aligned}
 Ah(s, k) &= A(\widehat{v})(s) + A\Gamma(s, k) \\
 \iff Ah(s, k) - A\Gamma(s, k) &= A(\widehat{v})(s) \\
 \iff A(h - \Gamma)(s, k) &= A(\widehat{v})(s) \\
 \iff Av(s, k) &= A\widehat{v}(s).
 \end{aligned}$$

Grunnen til at vi innfører operatoren $\widehat{}$ er at skrivemåten $Av(s, \phi(s))$ er tvetydig. Det er ikke klart om vi anvender A på den sammensatte funksjonen $\widehat{v}(s) = v(s, \phi(s))$ eller om vi mener A anvendt på $v(s, k)$ i et punkt der $(s, k) = (s, \phi(s))$, og det er det siste som er tilfellet. Det vil si at vi først anvender A på $v(s, k)$, og så setter inn $k = \phi(s)$ etterpå. Så med denne operatoren gjør vi det klart at vi evaluerer Av i et punkt (s, k) som viser seg å ha formen $(s, \phi(s))$. Det som er viktig å notere seg her er at uttrykket nå *ikke* avhenger av k , siden vi nå har at $\widehat{v}(s)$ er en forkortelse for $v(s, \phi(s))$ der k er blitt erstattet av $\phi(s)$.

Tilfelle 3: $(s, k) \in \partial\mathcal{G}$

I dette tilfellet befinner vi oss på randen til forbudsområdet \mathcal{G} , og det er denne randen vi ønsker å være i nærheten av så mye som mulig for å oppnå optimal profitt over tid. Men ved å være på randen av forbudsområdet så er det en risiko for å havne utenfor og dermed bygge ut for mye ut i fra etterspørselen i markedet. Dette vil vi tape penger på. Vi ønsker derfor å kunne justere modellen for å unngå dette scenarioet. Startpunktet vårt (s, k) er med sikkerhet på randen, men spørsmålet er hvor punktene (s^+, k) og (s^-, k) befinner seg. Her har vi tre forskjellige muligheter. Enten kan ett av punktene (s^+, k) , (s^-, k) ligge utenfor \mathcal{G} , eller så kan begge gjøre det. Vi regner først på tilfellet der bare det venstre randpunktet (s^-, k) ligger utenfor \mathcal{G} . Vi går da frem på samme måte som i tilfelle 2, men nå har vi ikke lenger at

$$h(s^-, \phi(s^-)) - h(s^-, k) = \Gamma(s^-, \phi(s^-)) - \Gamma(s^-, k),$$

siden $(s^-, k) \notin \mathcal{G}$. Vi legger derfor inn et justeringsledd $\epsilon(s^-, k)$ slik at vi for punktet (s^-, k) isteden har at

$$h(s^-, \phi(s^-)) - h(s^-, k) = \Gamma(s^-, \phi(s^-)) - \Gamma(s^-, k) + \epsilon(s^-, k).$$

Da vil, dersom $(s^-, k) \notin \mathcal{G}$, $\epsilon(s^-, k)$ -leddet justere oss inn igjen på randen $\partial\mathcal{G}$. Ved de samme regningene som i tilfelle 2, får vi nå

$$\begin{aligned} Ah(s, k) &= \frac{prh(s^+, k) - h(s, k) + (1-p)rh(s^-, k)}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(pr(h(s^+, \phi(s^+)) - \Gamma(s^+, \phi(s^+)) + \Gamma(s^+, k)) \right. \\ &\quad \left. - (h(s, \phi(s)) - \Gamma(s, \phi(s)) + \Gamma(s, k)) \right. \\ &\quad \left. + (1-p)r(h(s^-, \phi(s^-)) - \Gamma(s^-, \phi(s^-)) + \Gamma(s^-, k) - \epsilon(s^-, k)) \right) \\ &= \frac{prh(s^+, \phi(s^+)) - h(s, \phi(s)) + (1-p)rh(s^-, \phi(s^-))}{\Delta t} \\ &\quad - \frac{pr\Gamma(s^+, \phi(s^+)) - \Gamma(s, \phi(s)) + (1-p)r\Gamma(s^-, \phi(s^-))}{\Delta t} \\ &\quad + \frac{pr\Gamma(s^+, k) - \Gamma(s, k) + (1-p)r\Gamma(s^-, k)}{\Delta t} - \frac{(1-p)r\epsilon(s^-, k)}{\Delta t} \\ &= Ah(s, \phi(s)) - A\Gamma(s, \phi(s)) + A\Gamma(s, k) - \frac{1}{\Delta t}(1-p)r\epsilon(s^-, k) \\ &= A(h - \Gamma)(s, \phi(s)) + A\Gamma(s, k) - \frac{1}{\Delta t}(1-p)r\epsilon(s^-, k). \end{aligned}$$

Innfører vi igjen

$$v = h - \Gamma,$$

og operatoren $\widehat{}$, så kan denne formelen skrives som

$$\begin{aligned} A(h - \Gamma)(s, k) &= A(\widehat{h - \Gamma})(s) - \frac{1}{\Delta t}(1-p)r\epsilon(s^-, k) \\ \iff Av(s, k) &= A\widehat{v}(s) - \frac{1}{\Delta t}(1-p)r\epsilon(s^-, k). \end{aligned}$$

7. Forbudsområdet

Dersom det isteden er det høyre randpunktet (s^+, k) som ligger utenfor \mathcal{G} , så får vi på tilsvarende måte justeringsleddet $\epsilon(s^+, k)$ slik at

$$h(s^+, \phi(s^+)) - h(s^+, k) = \Gamma(s^+, \phi(s^+)) - \Gamma(s^+, k) + \epsilon(s^+, k),$$

og med A anvendt på h får vi

$$\begin{aligned} Ah(s, k) &= \frac{prh(s^+, k) - h(s, k) + (1-p)rh(s^-, k)}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(pr(h(s^+, \phi(s^+)) - \Gamma(s^+, \phi(s^+)) + \Gamma(s^+, k) - \epsilon(s^+, k)) \right. \\ &\quad \left. - (h(s, \phi(s)) - \Gamma(s, \phi(s)) + \Gamma(s, k)) \right. \\ &\quad \left. + (1-p)r(h(s^-, \phi(s^-)) - \Gamma(s^-, \phi(s^-)) + \Gamma(s^-, k)) \right) \\ &= \frac{prh(s^+, \phi(s^+)) - h(s, \phi(s)) + (1-p)rh(s^-, \phi(s^-))}{\Delta t} \\ &\quad - \frac{pr\Gamma(s^+, \phi(s^+)) - \Gamma(s, \phi(s)) + (1-p)r\Gamma(s^-, \phi(s^-))}{\Delta t} \\ &\quad + \frac{pr\Gamma(s^+, k) - \Gamma(s, k) + (1-p)r\Gamma(s^-, k)}{\Delta t} - \frac{pr\epsilon(s^+, k)}{\Delta t} \\ &= Ah(s, \phi(s)) - A\Gamma(s, \phi(s)) + A\Gamma(s, k) - \frac{1}{\Delta t}pr\epsilon(s^+, k) \\ &= A(h - \Gamma)(s, \phi(s)) + A\Gamma(s, k) - \frac{1}{\Delta t}pr\epsilon(s^+, k), \end{aligned}$$

som, ved bruk av v og operatoren $\widehat{}$, kan skrives som

$$Av(s, k) = A\widehat{v}(s) - \frac{1}{\Delta t}pr\epsilon(s^+, k).$$

Dersom både (s^-, k) og (s^+, k) ligger utenfor \mathcal{G} , får vi

$$Av(s, k) = A\widehat{v}(s) - \frac{1}{\Delta t}pr\epsilon(s^+, k) - \frac{1}{\Delta t}(1-p)r\epsilon(s^-, k).$$

Vi kan nå oppsummere de tre tilfellene på denne måten:

$$Av(s, k) = \begin{cases} -(\Pi + A\Gamma)(s, k) & \text{hvis } (s, k) \notin \mathcal{G} \\ A\widehat{v}(s) & \text{hvis } (s, k) \in \mathcal{G}^\circ \\ A\widehat{v}(s) - \frac{1}{\Delta t}pr\epsilon(s^+, k) & \text{hvis } (s, k) \in \partial\mathcal{G} \text{ og } (s^+, k) \notin \mathcal{G} \\ A\widehat{v}(s) - \frac{1}{\Delta t}(1-p)r\epsilon(s^-, k) & \text{hvis } (s, k) \in \partial\mathcal{G} \text{ og } (s^-, k) \notin \mathcal{G}, \end{cases}$$

der vi har slurvet litt ved å ikke inkludere hva som skjer når både (s^-, k) og (s^+, k) ligger utenfor \mathcal{G} , siden dette er et sjeldent tilfelle, som forklart i Figur 8. Vi har funnet Ah , nå uttrykt ved Av , altså hvordan profitten vil endre seg med tiden for punkter i de tre forskjellige områdene; inni forbudsområdet, på randen til forbudsområdet og utenfor forbudsområdet. Videre skal vi kombinere uttrykkene for Av med den opprinnelige differensligningen. Vi gjør dette for å

finne et uttrykk for profittfunksjonen og randkurvene. Men først tar vi et lite tilbakeblikk til kapittel 4 der vi fant at

$$u(s) = E \left[\sum_{t \in \mathbb{T}} f(\Theta_t^s) r^t \Delta t \right],$$

der u er en funksjon for forventet diskontert nettoinntekt når nettoinntekt per tidsenhet er gitt av f . Denne funksjonen kunne skrives på differensform som

$$\begin{aligned} u(\theta_n) &= f(\theta_n) \Delta t + pr u(\theta_{n+1}) + (1-p) r u(\theta_{n-1}) \\ \iff pr u_{n+1} - u_n + (1-p) r u_{n-1} &= -f_n \Delta t, \end{aligned}$$

der $u(s) = u(\theta_n)$ forkortes til u_n og $f(\theta_n)$ forkortes til f_n . Siden A anvendt på u er

$$A u_n = \frac{pr u_{n+1} - u_n + (1-p) u_{n-1}}{\Delta t},$$

kan vi forenkle differensligningen betraktelig og skrive den som

$$A u_n = -f_n.$$

Fra kapittel 4 fant vi også ut at den spesielle løsningen til u er gitt ved

$$u_n = \frac{1}{(g_1 - g_2) r p} \left(g_2^n \sum_{k=-\infty}^{n-1} f_k g_2^{-k-1} \Delta t + g_1^n \sum_{k=n}^{\infty} f_k g_1^{-k-1} \Delta t \right).$$

Vi har her en ligning med; u , som er en funksjon for forventet diskontert inntekt, f , som er en funksjon for inntekt per tidsenhet, og g_i , som representerer løsninger til den karakteristiske ligningen til differensligningen, altså er g_i hjelpefunksjoner for å finne den diskonterte inntekten. Denne ligningen kan vi få til å også gjelde for andre ting enn bare inntekt, som eksempelvis profitt. For å håndtere en slik endring innfører vi diskret Greenfunksjoner. I utgangspunktet er det naturlig å tenke på en Greenfunksjon g som en funksjon av heltallige variable $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$g(n, m) = \begin{cases} \frac{1}{(g_1 - g_2) r p} g_2^n g_2^{-m-1} & \text{dersom } m < n \\ \frac{1}{(g_1 - g_2) r p} g_1^n g_1^{-m-1} & \text{dersom } m \geq n. \end{cases}$$

I andre sammenhenger, sånn som denne, så er det imidlertid mer naturlig å tenke på den som en funksjon av to variable, $s, \eta \in \mathbb{S}$, der $s = \theta_n$ og $\eta = \theta_m$. Løser vi disse for henholdsvis n og m , får vi

$$\begin{aligned} \log s &= n \log \theta \\ \iff n &= \frac{\log s}{\log \theta}, \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \log \eta &= m \log \theta \\ \iff m &= \frac{\log \eta}{\log \theta}. \end{aligned}$$

7. Forbudsområdet

Dette gir videre

$$g_1^n = g_1^{\frac{\log s}{\log \theta}} = e^{\log g_1 \frac{\log s}{\log \theta}} = s^{\frac{\log g_1}{\log \theta}} = s^{\xi_1},$$

der $\xi_1 = \frac{\log g_1}{\log \theta}$. Tilsvarende er

$$g_2^n = g_2^{\frac{\log s}{\log \theta}} = e^{\log g_2 \frac{\log s}{\log \theta}} = s^{\frac{\log g_2}{\log \theta}} = s^{\xi_2},$$

der $\xi_2 = \frac{\log g_2}{\log \theta}$. Vi får også at

$$g_1^m = g_1^{\frac{\log \eta}{\log \theta}} = e^{\log g_1 \frac{\log \eta}{\log \theta}} = \eta^{\frac{\log g_1}{\log \theta}} = \eta^{\xi_1},$$

og

$$g_2^m = g_2^{\frac{\log \eta}{\log \theta}} = e^{\log g_2 \frac{\log \eta}{\log \theta}} = \eta^{\frac{\log g_2}{\log \theta}} = \eta^{\xi_2}.$$

Uttrykket for Greensfunksjonen g blir dermed:

$$g(s, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{(g_1 - g_2)rp} s^{\xi_2} \eta^{-\xi_2 - 1} & \text{dersom } \eta < s \\ \frac{1}{(g_1 - g_2)rp} s^{\xi_1} \eta^{-\xi_1 - 1} & \text{dersom } \eta \geq s, \end{cases}$$

der konstantene g_1 og g_2 ikke må forveksles med Greenfunksjonen $g(s, \eta)$. Hvis vi nå går tilbake til u_n , så kan formelen for u_n skrives som

$$\begin{aligned} u(s) &= \sum_{\eta \in \mathbb{S}} g(s, \eta) f(\eta) \Delta t \\ &= \frac{1}{(g_1 - g_2)rp} s^{\xi_2} \sum_{\eta < s} \eta^{-\xi_2 - 1} f(\eta) \Delta t + \frac{1}{(g_1 - g_2)rp} s^{\xi_1} \sum_{\eta \geq s} \eta^{-\xi_1 - 1} f(\eta) \Delta t. \end{aligned}$$

I denne ligningen opptrer det to elementer i \mathbb{S} , nemlig $s = \theta_n$ og $\eta = \theta_k$. Grunnen til at vi ikke betegner noen av dem med θ (selv om vi har gjort det før), er at det er uheldig å bruke θ både som et navn på skaleringsparameteren θ og som et navn på et generelt element i \mathbb{S} . Innholdet i denne formelen er nøyaktig det samme som vi har i formelen for u_n fra Kapittel 4, men den har fått en form som er greiere å arbeide videre med. For å endre denne formelen til å gjelde for profitt v isteden for inntekt u , så innfører vi operatoren G som er slik at

$$u(s) = Gf(s) = \sum_{\eta \in \mathbb{S}} g(s, \eta) f(\eta) \Delta t.$$

Fra kapittel 4 vet vi at $u(s)$ er løsningen til ligningen

$$Au = -f,$$

og vi kan oppsummere forholdet mellom operatorene A og G som

$$AGf = Au = -f \quad \text{og} \quad GAu = -Gf = -u.$$

Vi kan nå skrive om formelen til å gjelde for profitt v og uttrykker dette ved

$$\begin{aligned}
GA v &= -v \\
\iff v &= -GA v \\
\iff v(s, k) &= -\sum_{\eta \in \mathcal{S}} g(s, \eta) Av(\eta, k) \Delta t.
\end{aligned}$$

La oss nå anta at det forbudte området ser ut som i Figur 7 slik at det har et minste element $\psi_1(k)$ og et største element $\psi_2(k)$ for hver k . Setter vi inn uttrykket for $Av(s, k)$ i ligningen ovenfor, får vi

$$\begin{aligned}
v(s, k) &= \sum_{(\eta, k) \notin \mathcal{G}} (\Pi + A\Gamma)(\eta, k) g(s, \eta) \Delta t - \sum_{(\eta, k) \in \mathcal{G}^\circ} A\hat{v}(\eta) g(s, \eta) \Delta t \\
&\quad - g(s, \eta) \left(A\hat{v}(\eta) - \frac{1}{\Delta t} (1-p)r\epsilon(\eta^-, k) \right) \Delta t \\
&\quad - g(s, \eta) \left(A\hat{v}(\eta) - \frac{1}{\Delta t} pr\epsilon(\eta^+, k) \right) \Delta t,
\end{aligned}$$

i normalttilfellet. Her ser vi da på en k der vi bare har ensidige randpunkter og vi har derfor ikke inkludert leddet $g(s, \eta) \left(A\hat{v}(\eta) - \frac{1}{\Delta t} (1-p)r\epsilon(\eta^-, k) - \frac{1}{\Delta t} pr\epsilon(\eta^+, k) \right) \Delta t$ fra uttrykket $Av(s, k)$. Hadde vi derimot valgt en k -verdi med bare et tosidig randpunkt, altså spesialtilfellet der både (s^-, k) og (s^+, k) er utenfor \mathcal{G} , så hadde vi isteden utelatt $g(s, \eta) \left(A\hat{v}(\eta) - \frac{1}{\Delta t} (1-p)r\epsilon(\eta^\pm, k) \right) \Delta t$, og fått ligningen

$$\begin{aligned}
v(s, k) &= \sum_{(\eta, k) \notin \mathcal{G}} (\Pi + A\Gamma)(\eta, k) g(s, \eta) \Delta t - \sum_{(\eta, k) \in \mathcal{G}^\circ} A\hat{v}(\eta) g(s, \eta) \Delta t \\
&\quad - g(s, \eta) \left(A\hat{v}(\eta) - \frac{1}{\Delta t} (1-p)r\epsilon(\eta^-, k) - \frac{1}{\Delta t} pr\epsilon(\eta^+, k) \right) \Delta t.
\end{aligned}$$

Men dette er som sagt et sjeldent tilfelle som bare inntreffer for k helt i toppen av det forbudte området som vist i Figur 8. Siden dette er heuristiske beregninger, så tar vi ikke denne ligningen med videre. Vi konsentrerer oss om normalsituasjonen med ensidige randpunkter og arbeider videre med det første alternativet. Men vi har et lite problem i denne ligningen. I de to siste leddene så har vi noen η 'er som ikke er gitt noen verdi (det er ingen η 'er på venstre side av ligningen og de andre η 'ene er summasjonsvariable). Disse η 'ene representerer punktene der η^- og η^+ ligger utenfor forbudsområdet, det vil si at de er henholdsvis lik $\psi_1(k)$ og $\psi_2(k)$. Vi erstatter derfor disse η 'ene med $\psi_1(k)$ og $\psi_2(k)$. Da får vi

$$\begin{aligned}
v(s, k) &= \sum_{(\eta, k) \notin \mathcal{G}} (\Pi + A\Gamma)(\eta, k) g(s, \eta) \Delta t - \sum_{(\eta, k) \in \mathcal{G}^\circ} A\hat{v}(\eta) g(s, \eta) \Delta t \\
&\quad - g(s, \psi_1(k)) \left(A\hat{v}(\psi_1(k)) - \frac{1}{\Delta t} (1-p)r\epsilon(\psi_1(k)^-, k) \right) \Delta t \\
&\quad - g(s, \psi_2(k)) \left(A\hat{v}(\psi_2(k)) - \frac{1}{\Delta t} pr\epsilon(\psi_2(k)^+, k) \right) \Delta t.
\end{aligned}$$

De to siste leddene er da enkeltpunkter med justeringsfaktoren ϵ som enten vil flytte oss henholdsvis til høyre eller venstre inn igjen på randen som vist i Figur

7. Forbudsområdet

8. Vi løser så opp parentesene og får

$$\begin{aligned} v(s, k) = & \sum_{(\eta, k) \notin \mathcal{G}} (\Pi + A\Gamma)(\eta, k)g(s, \eta)\Delta t - \sum_{(\eta, k) \in \mathcal{G}^\circ} A\widehat{v}(\eta)g(s, \eta)\Delta t \\ & - A\widehat{v}(\psi_1(k))g(s, \psi_1(k))\Delta t + \frac{1}{\Delta t}(1-p)rg(s, \psi_1(k))\epsilon(\psi_1(k)^-, k)\Delta t \\ & - A\widehat{v}(\psi_2(k))g(s, \psi_2(k))\Delta t + \frac{1}{\Delta t}prg(s, \psi_2(k))\epsilon(\psi_2(k)^+, k)\Delta t. \end{aligned}$$

Her har vi tre ledd med $A\widehat{v}(\eta)g(s, \eta)\Delta t$ som kan slås sammen til ett ledd som summerer over hele \mathcal{G} siden

$$\sum_{(\eta, k) \in \mathcal{G}^\circ} A\widehat{v}(\eta)g(s, \eta)\Delta t$$

summerer over de indre punktene, og

$$A\widehat{v}(\psi_1(k))g(s, \psi_1(k))\Delta t \quad \text{og} \quad A\widehat{v}(\psi_2(k))g(s, \psi_2(k))\Delta t$$

er henholdsvis to punkter $(k, \psi_1(k))$ og $(k, \psi_2(k))$ på randen $\partial\mathcal{G}$ - ett på hver side av det forbudte området. Vi kan skrive summen som

$$\begin{aligned} & \sum_{\eta \in \mathcal{G}^\circ} A\widehat{v}(\eta)g(s, \eta)\Delta t + A\widehat{v}(\psi_1(k))g(s, \psi_1(k))\Delta t + A\widehat{v}(\psi_2(k))g(s, \psi_2(k))\Delta t \\ & = \sum_{\eta \in \mathcal{G}} A\widehat{v}(\eta)g(s, \eta)\Delta t, \end{aligned}$$

og vi kan da skrive ligningen for profitt som

$$\begin{aligned} v(s, k) = & \sum_{(\eta, k) \notin \mathcal{G}} (\Pi + A\Gamma)(\eta, k)g(s, \eta)\Delta t - \sum_{(\eta, k) \in \mathcal{G}} A\widehat{v}(\eta)g(s, \eta)\Delta t \\ & + (1-p)rg(s, \psi_1(k))\epsilon(\psi_1(k)^-, k) + prg(s, \psi_2(k))\epsilon(\psi_2(k)^+, k). \end{aligned}$$

Vi kan også skrive om faktorene

$$g(s, \psi_1(k))\epsilon(\psi_1(k)^-, k) \quad \text{og} \quad g(s, \psi_2(k))\epsilon(\psi_2(k)^+, k),$$

til

$$\epsilon(\psi_1(k)^-, k)g(s, \psi_1(k)) \quad \text{og} \quad \epsilon(\psi_2(k)^+, k)g(s, \psi_2(k)),$$

siden når $\eta \in \partial\mathcal{G}$, så er η enten lik $\psi_1(k)$ eller $\psi_2(k)$. Vi får da at

$$\begin{aligned} v(s, k) = & \sum_{(\eta, k) \notin \mathcal{G}} (\Pi + A\Gamma)(\eta, k)g(s, \eta)\Delta t - \sum_{(\eta, k) \in \mathcal{G}} A\widehat{v}(\eta)g(s, \eta)\Delta t \quad (7.1) \\ & + (1-p)r\epsilon(\psi_1(k)^-, k)g(s, \psi_1(k)) + pr\epsilon(\psi_2(k)^+, k)g(s, \psi_2(k)). \end{aligned}$$

Denne ligning er veldig nære profittfunksjonen vi er på jakt etter, men før vi tar det siste steget så må vi få kontroll på funksjonene ψ_1 og ψ_2 .

For å komme videre i å finne uttrykk for randkurvene ψ , så må vi først

finne et uttrykk for den deriverte av $v(s, k)$ med hensyn på k . Men dette er heldigvis ikke så komplisert som det høres ut. Vi begynner med å observere at siden \mathbb{S} er diskret og tellbar, vil ϕ bare anta tellbart mange verdier, og siden ϕ først er voksende og så avtagende, vil det mellom to verdier av ϕ være et åpent intervall av k 'er. Vi hopper altså fra et punkt til neste, og mellom disse to punktene tegner vi bare en rett strek. På at slikt intervall vil ψ_1 og ψ_2 være konstante. Vi antar så at k og $k + \Delta k$ begge tilhører et slikt intervall. Videre inneholder leddet $\sum_{\eta \in \mathcal{G}} A\widehat{v}(\eta)g(s, \eta)\Delta t$ ingen k , så denne vil falle bort dersom vi skulle derivert den med hensyn på k og vi utelater den derfor. Definisjonen for den deriverte av en funksjon f er gitt ved

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

For å finne den deriverte begynner vi derfor med å skrive

$$\begin{aligned} v(s, k + \Delta k) - v(s, k) &= \sum_{(\eta, k) \notin \mathcal{G}} (\Pi + A\Gamma)(\eta, k + \Delta k)g(s, \eta)\Delta t - 0 \\ &\quad + (1-p)r\epsilon(\psi_1(k)^-, k + \Delta k)g(s, \psi_1(k)) \\ &\quad + pr\epsilon(\psi_2(k)^+, k + \Delta k)g(s, \psi_2(k)) \\ &\quad - \sum_{(\eta, k) \notin \mathcal{G}} (\Pi + A\Gamma)(\eta, k)g(s, \eta)\Delta t + 0 \\ &\quad - (1-p)r\epsilon(\psi_1(k)^-, k)g(s, \psi_1(k)) \\ &\quad - pr\epsilon(\psi_2(k)^+, k)g(s, \psi_2(k)). \end{aligned}$$

Merk at vi her ikke endrer k 'ene i $\psi_{1,2}(k)^\pm$ og $\psi_{1,2}(k)$ fra k til $k + \Delta k$ siden vi er i et område der ψ_1 og ψ_2 er konstante. Vi kan så tilpasse indeksvariablene til summasjonstegnet til å være med hensyn på ψ_1 og ψ_2 ved at $\eta < \psi_1(k)$ og $\eta > \psi_2(k)$ representerer $(\eta, k) \notin \mathcal{G}$. Vi gjør da en antagelse om at det forbudte området bare har en hump som vist i Figur 7. Da er

$$\begin{aligned} v(s, k + \Delta k) - v(s, k) &= \left(\sum_{\eta < \psi_1(k)} (\Pi + A\Gamma)(\eta, k + \Delta k)g(s, \eta)\Delta t \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\eta > \psi_2(k)} (\Pi + A\Gamma)(\eta, k + \Delta k)g(s, \eta)\Delta t \right) - 0 \\ &\quad + (1-p)r\epsilon(\psi_1(k)^-, k + \Delta k)g(s, \psi_1(k)) \\ &\quad + pr\epsilon(\psi_2(k)^+, k + \Delta k)g(s, \psi_2(k)) \\ &\quad - \left(\sum_{\eta < \psi_1(k)} (\Pi + A\Gamma)(\eta, k)g(s, \eta)\Delta t \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\eta > \psi_2(k)} (\Pi + A\Gamma)(\eta, k)g(s, \eta)\Delta t \right) + 0 \\ &\quad - (1-p)r\epsilon(\psi_1(k)^-, k)g(s, \psi_1(k)) \\ &\quad - pr\epsilon(\psi_2(k)^+, k)g(s, \psi_2(k)), \end{aligned}$$

7. Forbudsområdet

som, hvis vi bytter om litt på leddene, kan skrives som

$$\begin{aligned}
 & v(s, k + \Delta k) - v(s, k) \\
 &= \sum_{\eta < \psi_1(k)} ((\Pi + A\Gamma)(\eta, k + \Delta k) - (\Pi + A\Gamma)(\eta, k)) g(s, \eta) \Delta t \\
 &+ \sum_{\eta > \psi_2(k)} ((\Pi + A\Gamma)(\eta, k + \Delta k) - (\Pi + A\Gamma)(\eta, k)) g(s, \eta) \Delta t \\
 &+ (\epsilon(\psi_1(k)^-, k + \Delta k) - \epsilon(\psi_1(k)^-, k)) (1 - p) r g(s, \psi_1(k)) \\
 &+ (\epsilon(\psi_2(k)^+, k + \Delta k) - \epsilon(\psi_2(k)^+, k)) p r g(s, \psi_2(k)).
 \end{aligned}$$

Hvis vi så deler på Δk får vi

$$\begin{aligned}
 & \frac{v(s, k + \Delta k) - v(s, k)}{\Delta k} \\
 &= \sum_{\eta < \psi_1(k)} \frac{(\Pi + A\Gamma)(\eta, k + \Delta k) - (\Pi + A\Gamma)(\eta, k)}{\Delta k} g(s, \eta) \Delta t \\
 &+ \sum_{\eta > \psi_2(k)} \frac{(\Pi + A\Gamma)(\eta, k + \Delta k) - (\Pi + A\Gamma)(\eta, k)}{\Delta k} g(s, \eta) \Delta t \\
 &+ \frac{\epsilon(\psi_1(k)^-, k + \Delta k) - \epsilon(\psi_1(k)^-, k)}{\Delta k} (1 - p) r g(s, \psi_1(k)) \\
 &+ \frac{\epsilon(\psi_2(k)^+, k + \Delta k) - \epsilon(\psi_2(k)^+, k)}{\Delta k} p r g(s, \psi_2(k)).
 \end{aligned}$$

Før vi går videre med å finne et uttrykk for den deriverte av v skal vi gjøre en liten omskrivning. Tidligere i dette kapittelet definerte vi

$$\epsilon(s^-, k) = h(s^-, \phi(s^-)) - h(s^-, k) - \Gamma(s^-, \phi(s^-)) + \Gamma(s^-, k),$$

og

$$\epsilon(s^+, k) = h(s^+, \phi(s^+)) - h(s^+, k) - \Gamma(s^+, \phi(s^+)) + \Gamma(s^+, k),$$

som, ved bruk av v , kan skrives som

$$\epsilon(s^-, k) = v(s^-, \phi(s^-)) - v(s^-, k),$$

og

$$\epsilon(s^+, k) = v(s^+, \phi(s^+)) - v(s^+, k).$$

Hvis vi bruker denne omskrivningen på de to siste leddene i ligningen ovenfor, får vi at

$$\begin{aligned}
 \frac{\epsilon(\psi_1(k)^-, k + \Delta k) - \epsilon(\psi_1(k)^-, k)}{\Delta k} &= \frac{v(\psi_1(k)^-, \phi(k)) - v(\psi_1(k)^-, k + \Delta k)}{\Delta k} \\
 &\quad - \frac{v(\psi_1(k)^-, \phi(k)) - v(\psi_1(k)^-, k)}{\Delta k} \\
 &= - \frac{v(\psi_1(k)^-, k + \Delta k) - v(\psi_1(k)^-, k)}{\Delta k},
 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon(\psi_2(k)^+, k + \Delta k) - \epsilon(\psi_2(k)^+, k)}{\Delta k} &= \frac{v(\psi_2(k)^+, \phi(k)) - v(\psi_2(k)^+, k + \Delta k)}{\Delta k} \\ &= - \frac{v(\psi_2(k)^+, \phi(k)) - v(\psi_2(k)^+, k)}{\Delta k} \\ &= - \frac{v(\psi_2(k)^+, k + \Delta k) - v(\psi_2(k)^+, k)}{\Delta k}, \end{aligned}$$

slik at vi kan skrive

$$\begin{aligned} \frac{v(s, k + \Delta k) - v(s, k)}{\Delta k} &= \sum_{\eta < \psi_1(k)} \frac{(\Pi + A\Gamma)(\eta, k + \Delta k) - (\Pi + A\Gamma)(\eta, k)}{\Delta k} g(s, \eta) \Delta t \\ &+ \sum_{\eta > \psi_2(k)} \frac{(\Pi + A\Gamma)(\eta, k + \Delta k) - (\Pi + A\Gamma)(\eta, k)}{\Delta k} g(s, \eta) \Delta t \\ &- \frac{v(\psi_1(k)^-, k + \Delta k) - v(\psi_1(k)^-, k)}{\Delta k} (1 - p) r g(s, \psi_1(k)) \\ &- \frac{v(\psi_2(k)^+, k + \Delta k) - v(\psi_2(k)^+, k)}{\Delta k} p r g(s, \psi_2(k)). \end{aligned}$$

Hvis vi nå går tilbake til å finne uttrykket for den deriverte av v , så ser vi at uttrykket vi har til venstre for likhetstegnet er nesten identisk med formelen for den deriverte. Det eneste vi mangler å gjøre er å ta grenseverdien til dette uttrykket når Δk går mot null. Da får vi

$$\begin{aligned} v_k(s, k) &= \sum_{\eta < \psi_1(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) g(s, \eta) \Delta t \\ &+ \sum_{\eta > \psi_2(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) g(s, \eta) \Delta t \quad (7.2) \\ &- v_k(\psi_1(k)^-, k) (1 - p) r g(s, \psi_1(k)) \\ &- v_k(\psi_2(k)^+, k) p r g(s, \psi_2(k)). \end{aligned}$$

Dette er den deriverte av $v(s, k)$. Vi skal nå bruke v_k til å finne randkurvene ψ_1 og ψ_2 . Men først. De eneste størrelsene som ikke er gitt og som vi ikke har kontroll på i dette uttrykket er $v_k(\psi_1(k)^-, k)$ og $v_k(\psi_2(k)^+, k)$. Å ha kontroll på disse størrelsene vil styrke kontrollen på randkurvene. Så la oss finne dem: Hvis vi setter $s = \psi_1(k)^-$ og $s = \psi_2(k)^+$, så får vi to lineære ligninger med $v_k(\psi_1(k)^-, k)$ og $v_k(\psi_2(k)^+, k)$ som ukjente og vi kan da finne uttrykk for dem begge. Ser først på tilfellet $s = \psi_1(k)^-$, da er

$$\begin{aligned} v_k(\psi_1(k)^-, k) &= \sum_{\eta < \psi_1(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) g(\psi_1(k)^-, \eta) \Delta t \\ &+ \sum_{\eta > \psi_2(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) g(\psi_1(k)^-, \eta) \Delta t \\ &- v_k(\psi_1(k)^-, k) (1 - p) r g(\psi_1(k)^-, \psi_1(k)) \\ &- v_k(\psi_2(k)^+, k) p r g(\psi_1(k)^-, \psi_2(k)). \end{aligned}$$

7. Forbudsområdet

Hvis vi nå, for å forenkle utregningen litt, setter

$$A = \sum_{\eta < \psi_1(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)g(\psi_1(k)^-, \eta)\Delta t \\ + \sum_{\eta > \psi_2(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)g(\psi_1(k)^-, \eta)\Delta t,$$

$$a = -(1-p)rg(\psi_1(k)^-, \psi_1(k)),$$

$$b = -prg(\psi_1(k)^-, \psi_2(k)),$$

så kan vi skrive

$$v_k(\psi_1(k)^-, k) = A + v_k(\psi_1(k)^-, k)a + v_k(\psi_2(k)^+, k)b \\ \iff v_k(\psi_1(k)^-, k) = \frac{-v_k(\psi_2(k)^+, k)b - A}{(a-1)}.$$

Med $s = \psi_2(k)^+$ har vi

$$v_k(\psi_2(k)^+, k) = \sum_{\eta < \psi_1(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)g(\psi_2(k)^+, \eta)\Delta t \\ + \sum_{\eta > \psi_2(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)g(\psi_2(k)^+, \eta)\Delta t \\ - v_k(\psi_1(k)^-, k)(1-p)rg(\psi_2(k)^+, \psi_1(k)) \\ - v_k(\psi_2(k)^+, k)prg(\psi_2(k)^+, \psi_2(k)),$$

som med forkortelsene

$$B = \sum_{\eta < \psi_1(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)g(\psi_2(k)^+, \eta)\Delta t \\ + \sum_{\eta > \psi_2(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)g(\psi_2(k)^+, \eta)\Delta t,$$

$$c = -(1-p)rg(\psi_2(k)^+, \psi_1(k)),$$

$$d = -prg(\psi_2(k)^+, \psi_2(k)),$$

kan skrives som

$$v_k(\psi_2(k)^+, k) = B + v_k(\psi_1(k)^-, k)c + v_k(\psi_2(k)^+, k)d \\ \iff v_k(\psi_2(k)^+, k) = \frac{-v_k(\psi_1(k)^-, k)c - B}{(d-1)}.$$

Vi har da de to lineære ligningene

$$v_k(\psi_1(k)^-, k) = \frac{-v_k(\psi_2(k)^+, k)b - A}{(a-1)}, \quad (7.3)$$

$$v_k(\psi_2(k)^+, k) = \frac{-v_k(\psi_1(k)^-, k)c - B}{(d-1)}, \quad (7.4)$$

som kan gi oss en entydig løsning på ligningssettet. Setter (7.3) inn i (7.4) og får

$$\begin{aligned}
v_k(\psi_2(k)^+, k) &= \frac{-\left(\frac{-v_k(\psi_2(k)^+, k)b-A}{(a-1)}\right)c - B}{(d-1)} \\
v_k(\psi_2(k)^+, k) &= \frac{v_k(\psi_2(k)^+, k)bc}{(a-1)(d-1)} + \frac{Ac - B(a-1)}{(a-1)(d-1)} \\
v_k(\psi_2(k)^+, k) \left(\frac{(a-1)(d-1) - bc}{(a-1)(d-1)}\right) &= \frac{Ac - B(a-1)}{(a-1)(d-1)} \\
v_k(\psi_2(k)^+, k) &= \left(\frac{Ac - B(a-1)}{(a-1)(d-1)}\right) \left(\frac{(a-1)(d-1)}{(a-1)(d-1) - bc}\right) \\
v_k(\psi_2(k)^+, k) &= \frac{Ac - B(a-1)}{(a-1)(d-1) - bc}. \tag{7.5}
\end{aligned}$$

Setter så (7.5) inn i (7.3) og får

$$\begin{aligned}
v_k(\psi_1(k)^-, k) &= \frac{-\left(\frac{Ac-B(a-1)}{(a-1)(d-1)-bc}\right)b - A}{(a-1)} \\
v_k(\psi_1(k)^-, k) &= \frac{-Abc + Bb(a-1) - A(a-1)(d-1) + Abc}{(a-1)^2(d-1) - (a-1)bc} \\
v_k(\psi_1(k)^-, k) &= \frac{Bb - A(d-1)}{(a-1)(d-1) - bc}.
\end{aligned}$$

Med

$$v_k(\psi_1(k)^-, k) = \frac{Bb - A(d-1)}{(a-1)(d-1) - bc}$$

og

$$v_k(\psi_2(k)^+, k) = \frac{Ac - B(a-1)}{(a-1)(d-1) - bc},$$

har vi nå kontroll på alle størrelsene i uttrykket for $v_k(s, k)$. Viktigheten av å kjenne uttrykkene $v_k(\psi_1(k)^-, k)$ og $v_k(\psi_2(k)^+, k)$ kan diskuteres, men vi kan nå behandle de som kjente størrelser.

Anta nå at (s^n, k) , altså startpunktet, ligger i det forbudte området. Vi vil da gjøre en umiddelbar utbygging for å flytte oss ut av det forbudte området. Da er $v_k(s^n, k) = 0$ siden den fremtidige profitten før og etter den umiddelbare utbyggingen vil være den samme, bortsett fra utgiftene man har ved denne utbyggingen. Den deriverte av differansen er derfor lik 0 i det forbudte området for alle s^n mellom $\psi_1(k)$ og $\psi_2(k)$. Men la oss se litt på detaljene bak denne antagelsen. Siden $v = h - \Gamma$, så er det fort gjort å tenke at $v_k < 0$ når profitten er den samme og utbyggingskostnadene øker, men v er ikke den enkleste å tolke økonomisk. Selv om v kombinerer profittfunksjonen h og utbyggingsfunksjonen Γ , så er det en funksjon som er innført mer av matematiske grunner - fordi den forenkler ligningene - enn økonomiske. Ett av problemene med å tolke v , er at vi ikke har kalibrert Γ skikkelig: Siden vi bare er interessert i differanser

7. Forbudsområdet

$\Gamma(\theta, k_2) - \Gamma(\theta, k_1)$ som beskriver utbyggingskostnader, kan vi erstatte Γ med $\Gamma + C$ og få akkurat samme modell. Det er mulig man kan tolke v økonomisk dersom man “normaliserer” Γ ved å kreve at $\Gamma(\theta, 0) = 0$, men det har ikke vi undersøkt i denne oppgaven. Derimot forsvinner problemet ovenfor når man ser på den deriverte v_k , siden vi da deriverer bort kostantleddet C . Vi snur oss derfor mot funksjonene h og Γ . Fra tidligere i kapittelet har vi ligningen

$$h(s, \phi(s)) - h(s, k) = \Gamma(s, \phi(s)) - \Gamma(s, k).$$

Dersom vi deriverer denne ligningen med hensyn på k , så får vi at $h_k = \Gamma_k$ i det forbudte området, der $\Gamma_k \Delta k$ måler det vi må betale for en liten utbygning Δk , mens $h_k \Delta k$ måler den økte inntekten vi får. Altså vil en endring i produksjonskapasitet ikke endre forholdet mellom profitt og utbyggingskostnader. Dette er ekvivalent med at $v_k = 0$. Tilsvarende, dersom startpunktet (s^n, k) ligger utenfor det forbudte området, så vil forskjellen i profitt med hensyn på produksjonskapasiteten være mindre enn utbyggingskostnadene, som forklart i Tilfelle 1. Vi taper altså mer på utbyggingen enn det vi tjener på den økte kapasiteten. Den deriverte av denne differansen vil derfor være mindre enn 0. Om det neste punktet vi flytter oss til i dette tilfellet også er utenfor forbudsområdet, eller på randen, vet vi ikke. Men vi vet at dersom vi fortsatt er utenfor forbudsområdet så vil fortsatt $v_k < 0$, mens hvis vi derimot har havnet på randen til forbudsområdet, så vil $v_k = 0$. Vi kan oppsummere dette på følgende vis:

$$v_k(s, k) = \begin{cases} \leq 0 & \text{dersom } (s, k) \notin \mathcal{G} \\ = 0 & \text{dersom } (s, k) \in \mathcal{G}. \end{cases}$$

La oss nå fortsette med å finne randkurvene ψ og den maksimale profittfunksjonen h . Vi velger nå å sette uttrykkene vi har for Greenfunksjonen g , der

$$g(s, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{(g_1 - g_2)rp} s^{\xi_2} \eta^{-\xi_2 - 1} & \text{dersom } \eta < s \\ \frac{1}{(g_1 - g_2)rp} s^{\xi_1} \eta^{-\xi_1 - 1} & \text{dersom } \eta \geq s, \end{cases}$$

inn i ligningen for

$$\begin{aligned} v_k(s, k) = & \sum_{\eta < \psi_1(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)g(s, \eta)\Delta t \\ & + \sum_{\eta > \psi_2(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)g(s, \eta)\Delta t \\ & - v_k(\psi_1(k)^-, k)(1 - p)rg(s, \psi_1(k)) \\ & - v_k(\psi_2(k)^+, k)prg(s, \psi_2(k)). \end{aligned}$$

For tilfellet der startpunktet for prosessen er i forbudsområdet, har vi da at

$$\begin{aligned}
0 = v_k(s^n, k) &= \sum_{\eta < s} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) \frac{1}{(g_1 - g_2)rp} s^{\xi_2} \eta^{-\xi_2 - 1} \Delta t \\
&+ \sum_{\eta \geq s} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) \frac{1}{(g_1 - g_2)rp} s^{\xi_1} \eta^{-\xi_1 - 1} \Delta t \\
&- v_k(\psi_1(k)^-, k) (1-p)r \frac{1}{(g_1 - g_2)rp} s^{\xi_2} \psi_1^{-\xi_2 - 1}(k) \\
&- v_k(\psi_2(k)^+, k) pr \frac{1}{(g_1 - g_2)rp} s^{\xi_1} \psi_2^{-\xi_1 - 1}(k),
\end{aligned}$$

der vi har endret notasjonen etter hva vi brukte når vi regnet med Greenfunksjonen tidligere i kapittelet. Hvis vi forkorter bort den felles faktoren $\frac{1}{(g_1 - g_2)rp}$ og bytter om litt på leddene får vi

$$\begin{aligned}
0 = s^{\xi_2} &\left(\sum_{\eta < \psi_1(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) \eta^{-\xi_2 - 1} \Delta t - v_k(\psi_1(k)^-, k) (1-p)r \psi_1^{-\xi_2 - 1}(k) \right) \\
&+ s^{\xi_1} \left(\sum_{\eta \geq \psi_2(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) \eta^{-\xi_1 - 1} \Delta t - v_k(\psi_2(k)^+, k) pr \psi_2^{-\xi_1 - 1}(k) \right),
\end{aligned}$$

der vi har endret fra s til $\psi_{1,2}(k)$ på indekseringen til summen slik at det passer som koordinater på θ -aksen i Figur 7. Hvis vi nå holder k fast og ser på hva som skjer når s endrer seg, observerer vi at

$$A = \sum_{\eta < \psi_1(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) \eta^{-\xi_2 - 1} \Delta t - v_k(\psi_1(k)^-, k) (1-p)r \psi_1^{-\xi_2 - 1}(k)$$

og

$$B = \sum_{\eta > \psi_2(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) \eta^{-\xi_1 - 1} \Delta t - v_k(\psi_2(k)^+, k) pr \psi_2^{-\xi_1 - 1}(k)$$

er konstanter som ikke avhenger av s . Uttrykket ovenfor kan derfor skrives som

$$v_k(s^n, k) = s^{\xi_2} A + s^{\xi_1} B.$$

Som nevnt tidligere så vet vi at $v_k(s, k) = 0$ i det forbudte området for alle s mellom $\psi_1(k)$ og $\psi_2(k)$, men siden A og B er konstanter, betyr dette at vi må ha $A = B = 0$. Dermed får vi ligningene

$$\sum_{\eta < \psi_1(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) \eta^{-\xi_2 - 1} \Delta t - v_k(\psi_1(k)^-, k) (1-p)r \psi_1^{-\xi_2 - 1}(k) = 0 \quad (7.6)$$

og

$$\sum_{\eta > \psi_2(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) \eta^{-\xi_1 - 1} \Delta t - v_k(\psi_2(k)^+, k) pr \psi_2^{-\xi_1 - 1}(k) = 0. \quad (7.7)$$

7. Forbudsområdet

Dette er de diskret analogene til ligningene (2.5) og (2.6) i Kapittel 2. Grunnen til de ekstra leddene

$$v_k(\psi_1(k)^-, k)(1-p)r\psi_1^{-\xi_2-1}(k) \quad (7.8)$$

og

$$v_k(\psi_2(k)^+, k)pr\psi_2^{-\xi_1-1}(k), \quad (7.9)$$

er at i den diskret teorien så må ψ_1 og ψ_2 ligge i \mathbb{S} , altså være av formen θ_n for en heltallig n , og vi kan ikke forvente at summene $\sum_{\eta < s} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)\eta^{-\xi_2-1}\Delta t$ og $\sum_{\eta \geq s} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)\eta^{-\xi_1-1}\Delta t$ "treffer" 0 for alle heltall n . Justeringsleddene kompenserer slik at vi får nøyaktig 0 likevel. Det vil imidlertid finnes noen k -verdier slik at én av summene

$$\sum_{\eta < \psi_1(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)\eta^{-\xi_2-1}\Delta t \quad (7.10)$$

og

$$\sum_{\eta > \psi_2(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)\eta^{-\xi_1-1}\Delta t \quad (7.11)$$

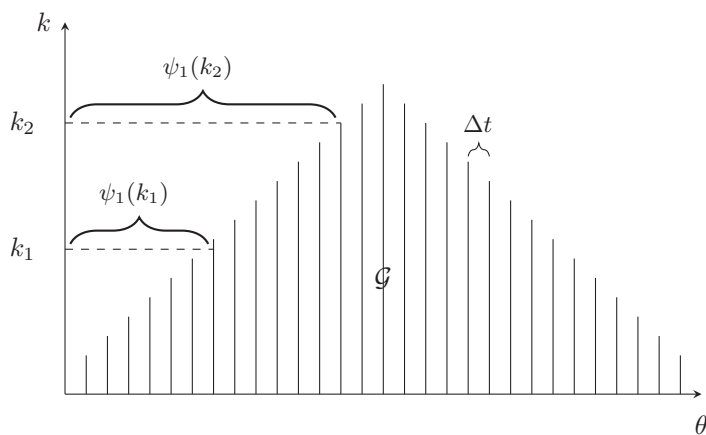
faktisk blir 0 for et heltall n , og vi kan da se bort i fra ekstra leddene. Vi ser nærmere på dette om litt. Videre er det verdt å merke seg at selv om denne løsningen vi har funnet er gjort under antagelsen om at startpunktet (s^n, k) ligger i det forbudte området så vil løsningen også fungere dersom startpunktet befinner seg på randen eller utenfor det forbudte området. Vi kan nå skrive om uttrykkene i (7.6) og (7.7) til henholdsvis

$$\psi_1(k) = \left(\frac{v_k(\psi_1(k)^-, k)(1-p)r}{\sum_{\eta < \psi_1(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)\eta^{-\xi_2-1}\Delta t} \right)^{\frac{1}{\xi_2+1}}$$

$$\psi_2(k) = \left(\frac{v_k(\psi_2(k)^+, k)pr}{\sum_{\eta > \psi_2(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)\eta^{-\xi_1-1}\Delta t} \right)^{\frac{1}{\xi_1+1}},$$

som er de generelle formlene for $\psi_1(k)$ og $\psi_2(k)$, men som vi ser så lar det seg ikke gjøre, ut i fra våre beregninger, å få et eksplisitt uttrykk for $\psi_1(k)$ og $\psi_2(k)$. Det blir derfor noe uklart hva vi kan bruke disse ligningene til, sammenlignet med ligningene man får for $\psi_1(k)$ og $\psi_2(k)$ i den kontinuerlige teorien. Det kan derimot tenkes at uttrykkene kan brukes til å finne henholdsvis $\psi_1(k)$ og $\psi_2(k)$ numerisk, men vi går ikke nærmere inn på det her.

Som vi nevnte tidligere, så vil det finnes noen k -verdier der (7.10) eller (7.11) blir null for en η som ligger i $\mathbb{S} = \{\theta_n : n \in \mathbb{Z}\}$. For disse kritiske k -verdiene vil vi imidlertid kunne bruke (7.10) og (7.11) som formler på henholdsvis ψ_1 og ψ_2 . La oss se på Figur 9. Dette er et mer korrekt bilde av hvordan forbudsområdet egentlig ser ut. Siden θ -aksen er diskret, vil randen til det diskret området bestå av en trapp med vekselvist vertikale og horisontale partier som den optimale prosessen klatrer oppover og nedover på for hver Δt som danner randen til forbudsområdet. Δt er som sagt liten, så Figur 9 viser et forstørret bilde av hvordan det vil se ut. Som beskrevet tidligere i teksten så etterstreber vi å tillate at $\Delta t \rightarrow 0$ slik at den diskret modellen skal være mest mulig lik den kontinuerlige.



Figur 9.

La oss nå skrive om uttrykket for ψ_1 i (7.6) til

$$\psi_1(k) = \min \left\{ s : \sum_{\eta < s} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) \eta^{-\xi_2-1} \Delta t \geq 0 \right\}. \quad (7.12)$$

Uttrykkene (7.6) og (7.12) gir ekvivalente beskrivelser av forbudsområdets venstre halvdel. Dersom vi har en “normal” k som ikke treffer toppen på en av søylene (som k_1 i Figur 9), så vil summen i (7.12) være større enn 0 og justeringsleddet (7.8) vil komme inn (7.12) og justere slik at (7.12) vil få formen til (7.6), og vi vil få 0 likevel. Dersom vi har en k som treffer en av toppene på søylene (som k_2 i Figur 9), så har vi likhet i (7.12) og vi får at

$$\sum_{\eta < \psi_1(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) \eta^{-\xi_2-1} \Delta t = 0.$$

Tilsvarende for $\psi_2(k)$ har vi at (7.7) kan skrives som

$$\psi_2(k) = \max \left\{ s : \sum_{\eta > s} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) \eta^{-\xi_1-1} \Delta t \geq 0 \right\}, \quad (7.13)$$

der (7.7) og (7.13) er ekvivalente beskrivelser av forbudsområdets høyre halvdel. For k -verdier som ikke treffer toppen på søylene, så vil summen i (7.13) være større enn 0 og justeringsleddet (7.9) vil komme inn i (7.13) og justere slik at (7.13) vil få formen til (7.7), og vi vil få 0 likevel. Dersom vi har en k som treffer en av toppene på søylene, så har vi likhet i (7.13) og vi får at

$$\sum_{\eta > \psi_2(k)} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) \eta^{-\xi_1-1} \Delta t = 0.$$

Vi kan også bruke disse beskrivelsene av ψ_1 og ψ_2 til å gi en formel for ϕ :

$$\phi(s) = \inf \left\{ k : \sum_{\eta < s} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) \eta^{-\xi_2-1} \Delta t \geq 0 \right. \quad (7.14)$$

$$\left. \text{eller } \sum_{\eta > s} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) \eta^{-\xi_1-1} \Delta t \geq 0 \right\}.$$

7. Forbudsområdet

Toppene på søylene - som på en måte markerer randen til det forbudte området - tilsvarer derfor k -verdier der summen

$$\sum_{\eta < s} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)\eta^{-\xi_2-1}\Delta t \quad \text{eller} \quad \sum_{\eta > s} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k)\eta^{-\xi_1-1}\Delta t$$

blir lik 0 for et element s i den diskret mengden \mathbb{S} . For andre k -verdier vil summen hoppe direkte fra negative til positive verdier, og det er derfor vi trenger ekstraledningene slik at summen alltid blir 0. Poenget med å illustrere disse forskjellene er for å vise hvorfor vi ikke trenger å ha k diskret. I praksis vil det nok være naturlig å tenke at en produksjonskapasitet er diskre, men matematisk så vil vi ikke utelukke at k kan ta kontinuerlig form i en diskret modell.

Nå som vi har identifisert $\psi_1(k)$ og $\psi_2(k)$ så har vi kontroll på randkurvene. Vi kan gå tilbake til (7.1)

$$\begin{aligned} v(s, k) = & \sum_{(\eta, k) \notin \mathcal{G}} (\Pi + A\Gamma)(\eta, k)g(s, \eta)\Delta t - \sum_{(\eta, k) \in \mathcal{G}} A\hat{v}(\eta)g(s, \eta)\Delta t \\ & + (1-p)r\epsilon(\psi_1(k)^-, k)g(s, \psi_1(k)) + pr\epsilon(\psi_2(k)^+, k)g(s, \psi_2(k)), \end{aligned}$$

og gjøre den siste utregningen for å finne den optimale profittfunksjonen h :

$$\begin{aligned} h(s, k) - \Gamma(s, k) = & \sum_{(\eta, k) \notin \mathcal{G}} (\Pi + A\Gamma)(\eta, k)g(s, \eta)\Delta t \\ & - \sum_{(\eta, k) \in \mathcal{G}} A\hat{v}(\eta)g(s, \eta)\Delta t + (1-p)r\epsilon(\psi_1(k)^-, k)g(s, \psi_1(k)) \\ & + pr\epsilon(\psi_2(k)^+, k)g(s, \psi_2(k)) \\ \iff h(s, k) = & \Gamma(s, k) + \sum_{(\eta, k) \notin \mathcal{G}} (\Pi + A\Gamma)(\eta, k)g(s, \eta)\Delta t \\ & - \sum_{(\eta, k) \in \mathcal{G}} A\hat{v}(\eta)g(s, \eta)\Delta t + (1-p)r\epsilon(\psi_1(k)^-, k)g(s, \psi_1(k)) \\ & + pr\epsilon(\psi_2(k)^+, k)g(s, \psi_2(k)), \end{aligned}$$

som kan skrives som

$$\begin{aligned} h(s, k) = & \Gamma(s, k) + \sum_{\eta < \psi_1(k)} (\Pi + A\Gamma)(\eta, k)g(s, \eta)\Delta t \tag{7.15} \\ & + \sum_{\eta > \psi_2(k)} (\Pi + A\Gamma)(\eta, k)g(s, \eta)\Delta t - \sum_{\psi_1(k) < \eta < \psi_2(k)} A\hat{v}(\eta)g(s, \eta)\Delta t \\ & + (1-p)r\epsilon(\psi_1(k)^-, k)g(s, \psi_1(k)) + pr\epsilon(\psi_2(k)^+, k)g(s, \psi_2(k)). \end{aligned}$$

Dette er formelen som løser optimeringsproblemet, og er den diskret analogen til (2.9) i Kapittel 2.

Vi har i dette kapittelet regnet oss frem til randkurvene ψ_1 og ψ_2 ved henholdsvis (7.12) og (7.13) som er de diskret analogene til (2.7) og (2.8). Vi har også løst optimeringsproblemet beskrevet ved (7.15). Vi har nå funnet alle de nødvendige analogene til Kobilas modell, og i neste kapittel skal vi oppsummere våre resultater.

KAPITTEL 8

Diskret modell

I dette kapitlet skal vi oppsummere resultatene fra de tidligere kapitlene. For å gjøre det mest mulig sammenlignbart med den kontinuerte teorien, presenterer vi det som en setning tilsvarende Teorem 2.1 i Kapittel 2.

Setning 8.1 *Gitt en Markovkjede Θ med følgende overgangssannsynligheter: Dersom $\Theta_t = \theta_n$, vil $\Theta_{t+\Delta t}$ ha verdien θ_{n+1} med sannsynlig p og verdien θ_{n-1} med sannsynlighet $(1-p)$, der $p = \frac{1}{2} + \frac{\alpha - \frac{\beta^2}{2}}{2\beta} \sqrt{\Delta t}$ er en sannsynlighetsfaktor, $\theta = 1 + \beta\sqrt{\Delta t}$ beskriver tilstander i \mathbb{S} , $\Delta t > 0$ og β er en konstant. Tidslinjen og tilstandsrommet er gitt ved henholdsvis*

$$\mathbb{T} = \{n\Delta t : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{og} \quad \mathbb{S} = \{\theta_n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Videre er $r^n = e^{\rho t}$ en diskonteringsfaktor der $0 < \rho < 1$, og la A være operatoren

$$Af(\theta^n) = \frac{rpf(\theta^{n+1}) - f(\theta) + r(1-p)f(\theta^{n-1})}{\Delta t}.$$

For ethvert startpunkt $(s, k) \in \mathbb{R}_+^2$, så ønsker vi å finne den ikke-avtagende prosessen K_t gitt ved $K_t = k \vee \sup\{\phi(\Theta_s) : s \leq t\}$, som maksimerer den totale diskonterte profitten fra Kriterium 6.3 gitt ved

$$J(K) = E^{(s,k)} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \left(\Pi(\Theta_t, K_t) + A\Pi(\Theta_t, K_t) \right) r^{\frac{t}{\Delta t}} \Delta t \right] + \Gamma(s, k).$$

Gitt at:

(i) Π og Γ følger de samme betingelsene som er gitt Π og Γ og deres partielleriverte i [Kob93].

(ii) For alle θ , så er

$$\phi(\theta) = \sup\{k : (\theta, k) \in \mathcal{G}\}$$

endelig.

8. Diskret modell

er tilfredsstillt, så eksisterer en slik optimal prosess K . Dersom $g_1 > 1$ og $g_2 < 1$ er de to røttene til den karakteristiske ligningen $rp g^2 - g + r(1-p) = 0$, og

$$\psi_1(k) = \min \left\{ s : \sum_{\eta < s} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) \eta^{-\xi_2-1} \Delta t \geq 0 \right\}$$

med justeringsledd $v_k(\psi_1(k)^-, k)(1-p)r\psi_1^{-\xi_2-1}(k)$

$$\psi_2(k) = \max \left\{ s : \sum_{\eta > s} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) \eta^{-\xi_1-1} \Delta t \geq 0 \right\}$$

med justeringsledd $v_k(\psi_2(k)^+, k)pr\psi_2^{-\xi_1-1}(k)$

$$\mathcal{G} = \{(\theta, k) : \psi_1(k) \leq \theta \leq \psi_2(k)\}$$

$$\phi(\theta) = \sup\{k : (\theta, k) \in \mathcal{G}\}$$

$$\xi_i = \frac{\log g_i}{\log \theta} \quad \text{for } i = 1, 2,$$

så er

$$K_t = k \vee \sup\{\phi(\Theta_s) : s \leq t\},$$

og den optimale profitten med startpunkt (s, k) er gitt ved

$$\begin{aligned} h(s, k) = & \Gamma(s, k) + \sum_{\eta < \psi_1(k)} (\Pi + A\Gamma)(\eta, k)g(s, \eta)\Delta t \\ & + \sum_{\eta > \psi_2(k)} (\Pi + A\Gamma)(\eta, k)g(s, \eta)\Delta t - \sum_{\psi_1(k) < \eta < \psi_2(k)} A\hat{v}(\eta)g(s, \eta)\Delta t \\ & + (1-p)r\epsilon(\psi_1(k)^-, k)g(s, \psi_1(k)) + pr\epsilon(\psi_2(k)^+, k)g(s, \psi_2(k)), \end{aligned}$$

der g er Greenfunksjonen

$$g(s, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{(g_1 - g_2)rp} s^{\xi_2} \eta^{-\xi_2-1} & \text{dersom } \eta < s \\ \frac{1}{(g_1 - g_2)rp} s^{\xi_1} \eta^{-\xi_1-1} & \text{dersom } \eta \geq s. \end{cases}$$

Som nevnt innledningsvis i oppgaven er ikke formålet med dette arbeidet å komme med formelle bevis, men ved fornuftig regning komme med et forslag på hvordan en diskret versjon av [Kob93] sannsynligvis ser ut. Noe som kommer frem av regningene vi har gjort gjennom oppgaven er at vi beholder inntekt- og utbyggingsfunksjonen Π og Γ som de er hos Kobil. Disse funksjonene har ikke vært nødvendig å diskretisere. Det samme gjelder også for produksjonskapasitetsvariabelen k . Som vi så i Kapittel 7 vil ikke et kontinuerlig valg av k hindre diskretiseringen av modellen. Vi har også kunnet beholde filtrasjonen og definisjonen av investeringsstrategiene K_t relativt likt som i [Kob93]. Derimot har vi erstattet den underliggende geometrisk Brownske

bevegelsen med en Markovkjede for å modellere den statistiske utviklingen i markedet. Videre har vi erstattet differensialligninger med differensligninger og benyttet disse til å indentifisere randkurvene og forbudsområdet, i tillegg til en maksimal profittfunksjon. I neste kapittel tar vi et tilbakeblikk på våre resultater og ser på veien videre.

KAPITTEL 9

Diskusjon

I denne oppgaven har vi sett nærmere på irreversible stokastiske investeringsproblemer i et fluktuerende marked i diskret tid og rom. Utgangspunktet for oppgaven er hentet fra forskningsartikkelen [Kob93], der Kobilas presenterer en matematisk modell, basert på stokastiske differensialligninger og Brownsk bevegelse, som har som formål å identifisere et forbudsområdet og å finne optimale investeringsstrategier.

Formålet med denne oppgaven har vært å diskretisere Kobilas modell ved å finne dens diskret analoger. For å finne disse diskrete analogene ble fundamentet i [Kob93], med differensialligninger og den Brownske bevegelsen, forsøkt erstattet med henholdsvis differensligninger og en Markovkjede. Videre, ved bruk av lignende teknikker som i det kontinuerlige tilfellet, kunne vi presentere både forbudsområdet og en optimal profittfunksjon på diskret form. Som vist i Setning 8.1 i Kapittel 8 lot det seg gjøre å finne en fullverdig diskretisering av Kobilas modell. Av numeriske hensyn ser vi på det som hensiktsmessig med en diskret versjon, ettersom alt behandles diskret i numerikk.

For å kunne oppnå en diskret modell som gir de samme resultatene som Kobilas modell, var vi avhengige av å kalibrere de avgjørende parametrene som utgjorde den diskret modellen. Dette fant vi gode løsninger på i Kapittel 5. Når det gjelder forbudsområdet møtte vi på noen utfordringer når vi skulle identifisere randkurvene, som beskrevet i Kapittel 7. For eksempel, hvis vi holder oss til de k -verdiene som treffer toppene på hver søyle som vist i Figur 9, vil vi få tilsvarende fine ligninger for randkurvene som i [Kob93]. Men, siden vi ikke kan garantere at summene (7.10) og (7.11) blir 0 for alle mulige heltall n , lot det seg ikke gjøre å finne generelle eksplisitte uttrykk for randkurvene for alle k i det diskret tilfellet. Av den grunn ble den formelle definisjonen av randkurvene noe tvetydig, men de utspiller likefullt sin oppgave for den optimale profittfunksjonen.

Det vi presenterer i oppgaven og oppsummerer i Teorem 8.1 er “rimelige” regninger som viser hvordan den diskret modellen sannsynligvis ser ut. For videre arbeid vil det være relevant å se beviser for disse regningene. Det kunne også vært hensiktsmessig å kalibrere noen flere faktorer (som nevnt i Kapittel 7 i forbindelse med utbyggingsfunksjonen). Videre, og som nevnt i slutten av [Kob93], hadde det også vært interessant å se om en ytterligere generalisering av Kobilas modell i form av å la Θ være multidimensjonal, lar seg overføre til

9. Diskusjon

diskret teori. En multidimensjonal Θ ville i så fall tillate oss å ta høyde for trender i markedet, fluktuerende diskonteringsfaktorer og samspillet mellom uavhengige økonomiske faktorer, blant annet. En slik multidimensjonal modell har vært utenfor rammene for denne oppgaven men vil i anvendelser kunne være svært fordelaktig å analysere.

TILLEGG A

Forkunnskap

Dette kapitlet inneholder deler av den grunnleggende forkunnskapen som oppgaven bygger på. Et utvalg av setninger er listet opp uten bevis. Kildene til dette kapitlet er hentet fra [Lay12], [Lin06], [MW13], [Rud76] og [Øks95] der bevisene er å finne.

Setning 1.

En vektor med ikke-negative elementer som summerer opp til 1, kalles en sannsynlighetsvektor. En stokastisk matrise er et rektangulært sett av elementer ordnet i rader og kolonner der kolonnene er sannsynlighetsvektorer. En Markovkjede er en følge av sannsynlighetsvektorer x_0, x_1, x_2, \dots , sammen med en stokastisk matrise P , slik at

$$x_1 = Px_0, \quad x_2 = Px_1, \quad x_3 = Px_2, \quad \dots$$

En Markovkjede kan derfor betegnes av den førsteordens differensligningen

$$x_{k+1} = Px_k \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots$$

Setning 2.

Dersom følgene $\{y_n\}$ og $\{z_n\}$ er to løsninger av differensligningen $x_{n+2} + bx_{n+2} + cx_n = 0$, og C og D er to vilkårlige tall, så er følgen $\{x_n\}$ der $x_n = Cy_n + Dz_n$, også en løsning.

Setning 3.

La $x_{n+2} + bx_{n+2} + cx_n = 0$ være en annenordens differensligning, og anta at den karakteristiske ligningen $r^2 + br + c = 0$ har to forskjellige, reelle røtter r_1 og r_2 . Løsningen til differensligningen er nøyaktig de følgene som kan skrives på formen

$$x_n = Cr_1^n + Dr_2^n$$

der C og D er konstanter.

Setning 4.

Anta at $\{x_n^p\}$ er en løsning av den inhomogene, annenordens differensligningen

$$x_{n+2} + bx_{n+2} + cx_n = f(n). \tag{A.1}$$

A. Forkunnskap

Da vil de andre løsningene av (1) være

$$x_n = x_n^p + x_n^h,$$

der $\{x_n^h\}$ er en vilkårlig løsning av den homogene ligningen

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0.$$

Setning 5.

La Ω være et sett. En ikketom samling \mathcal{A} av delmengder av Ω kalles en σ -algebra dersom de følgende to betingelsene er oppfylt:

- (i) $A \in \mathcal{A}$ impliserer at $A^c \in \mathcal{A}$
- (ii) $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$ impliserer at $\cup_n A_n \in \mathcal{A}$

Setning 6.

La f være en begrenset funksjon. Rekkene

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k g_1^{-k-1} \quad \text{og} \quad \sum_{k=0}^{n-1} f_k g_2^{-k-1}$$

konvergerer dersom $g_1 > 1$ og $g_2 < 1$ når henholdsvis $n \rightarrow \infty$ og $n \rightarrow -\infty$.
For bevis, se Tillegg B.

TILLEGG B

Utregning

Dette kapittelet inneholder utregninger og bevis som ikke er inkludert i teksten, men som likefullt kan være av relevans for oppgavens helhet. Det vil være nevnt i teksten der dette er tilfelle.

Tillegg til Kapittel 2

Under følger utregningen av løsningen til den inhomogene differensialligningen fra den kontinuerlige modellen i Kobilas artikkel.

La

$$d\Theta_t = \alpha\Theta_t dt + \beta\Theta_t dB_t$$

være vår éndimensjonale geometrisk Brownske bevegelse. Videre har vi den inhomogene differensialligningen

$$\frac{1}{2}\beta^2\theta^2 u''(\theta) + \alpha\theta u'(\theta) - ru(\theta) = -f(\theta),$$

som vi skriver om til

$$u''(\theta) + \frac{2\alpha}{\beta^2\theta}u'(\theta) - \frac{2r}{\beta^2\theta^2}u(\theta) = -\frac{2}{\beta^2\theta^2}f(\theta), \quad (\text{B.1})$$

der f er en gitt, kontinuerlig funksjon, og $\alpha, \beta, r > 0$. Denne differensialligningen har løsning på formen

$$u(\theta) = E^\theta \left[\int_0^\infty f(\Theta_t) e^{-rt} dt \right]. \quad (\text{B.2})$$

Vi ønsker nå å bruke differensialligninger for å finne en formel for u .

For ordens skyld så introduserer vi differensialoperatoren A slik at

$$Au(\theta) = \frac{1}{2}\beta^2\theta^2 u''(\theta) + \alpha\theta u'(\theta) - ru(\theta).$$

Ser først på den en homogene ligningen

$$Au = 0, \quad (\text{B.3})$$

B. Utregning

der vi finner løsningen ved hjelp av kvalifisert gjetning. Vi antar at løsningen til (B.3) er på formen θ^γ , der γ er en konstant. Setter så antagelsen $u(\theta) = \theta^\gamma$ inn i (B.3) og får

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\beta^2\theta^2\left((\gamma^2 - \gamma)\theta^{\gamma-2}\right) + \alpha\theta\left(\gamma\theta^{\gamma-1}\right) - r\left(\theta^\gamma\right) &= 0 \\ \frac{\beta^2}{2}(\gamma^2 - \gamma)\theta^\gamma + \alpha\gamma\theta^\gamma - r\theta^\gamma &= 0 \\ \frac{\beta^2}{2}(\gamma^2 - \gamma) + \alpha\gamma - r &= 0 \\ \frac{\beta^2}{2}\gamma^2 + \left(\alpha - \frac{\beta^2}{2}\right)\gamma - r &= 0,\end{aligned}$$

der vi har brukt at

$$(\theta^\gamma)' = \gamma\theta^{\gamma-1} \quad \text{og} \quad (\theta^\gamma)'' = \gamma(\gamma-1)\theta^{\gamma-2} = (\gamma^2 - \gamma)\theta^{\gamma-2}.$$

Dette er den karakteristiske ligningen til den homogene ligningen til Au , der γ representerer løsninger til u . Denne karakteristiske ligningen kan løses ved hjelp av annengradsformelen og vi vil få to røtter γ_1 og γ_2 . Det er lite hensiktsmessig å regne ut nøyaktig hva røttene γ_1 og γ_2 er, ettersom vi blant annet ikke har verdier for α , β og r . Men siden α , β , $r > 0$, så vet vi at røttene er reelle, og vi kan fastslå at (B.3) har den generelle løsningen

$$u = C\theta^{\gamma_1} + D\theta^{\gamma_2},$$

som tilsvare

$$u(\theta) = Cu_1(\theta) + Du_2(\theta), \tag{B.4}$$

der C og D er konstanter (for teorem, se [Lin06] side 539). Dette er den generelle løsningen til det homogene problemet, og vi skal nå bruke dette til å finne partikulærløsningen, det vil si den spesielle løsningen til det inhomogene problemet.

Merk: Ettersom γ_1 og γ_2 er nødt til å ha forskjellig fortegn som følge av annengradsformelen, så lar vi heretter γ_1 være den positive og γ_2 være den negative roten.

Setter vi nå

$$Au = -f, \tag{B.5}$$

så er den spesielle løsningen til (B.1) gitt ved

$$u_n = u_n^p + u_n^h, \tag{B.6}$$

der u_n^h er den homogene løsningen (B.4) til ligning (B.3), og u_n^p er partikulærløsningen vi skal finne (for lemma, se [Lin06] side 545).

Dersom u_1 og u_2 (i.e. θ^{γ_1} og θ^{γ_2}) er to løsninger til den homogene ligningen, så er $C_1 u_1 + C_2 u_2$ også en løsning til den homogene ligningen for vilkårlige C_1 og C_2 .

Før vi går videre trenger vi å definere Wronskideterminanten. Denne determinanten er forskjellig i det kontinuerte og diskrete tilfellet ettersom vi i det kontinuerte tilfellet ser på den deriverte av funksjonen, mens vi i det diskrete tilfellet ser på foroverinkrementene.

Definisjon 1. Wronskideterminanten W_n er gitt ved

$$W = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix} = u_1 u_2' - u_2 u_1'.$$

Antar nå at (B.5) har partikulærløsning på formen

$$u^p(\theta) = c(\theta)\theta^{\gamma_1} + d(\theta)\theta^{\gamma_2},$$

som tilsvare

$$u(\theta) = c(\theta)u_1(\theta) + d(\theta)u_2(\theta), \quad (\text{B.7})$$

der $c(\theta)$ og $d(\theta)$ er funksjoner som enda ikke er spesifisert. Ved bruk av metoden *variasjon av parametre* skal vi finne uttrykk for disse funksjonene slik at u er en løsning til (B.5).

Ved produktregelen på (B.7) har vi

$$u'(\theta) = c'(\theta)u_1(\theta) + d'(\theta)u_2(\theta) + c(\theta)u_1'(\theta) + d(\theta)u_2'(\theta).$$

Deriverer vi en gang til, får vi, ved hjelp av produktregelen

$$\begin{aligned} u''(\theta) &= \left(c'(\theta)u_1(\theta) + d'(\theta)u_2(\theta) \right)' + c'(\theta)u_1'(\theta) + d'(\theta)u_2'(\theta) \\ &\quad + c(\theta)u_1''(\theta) + d(\theta)u_2''(\theta). \end{aligned}$$

Vi har nå funnet uttrykk for $u(\theta)$, $u'(\theta)$ og $u''(\theta)$, og kan nå uttrykke venstre side av (B.1) partikulært på følgende måte

$$\begin{aligned} u''(\theta) + \frac{2\alpha}{\beta^2\theta}u'(\theta) - \frac{2r}{\beta^2\theta^2}u(\theta) &= \left(\left(c'(\theta)u_1(\theta) + d'(\theta)u_2(\theta) \right)' + c'(\theta)u_1'(\theta) \right. \\ &\quad \left. + d'(\theta)u_2'(\theta) + c(\theta)u_1''(\theta) + d(\theta)u_2''(\theta) \right) \\ &\quad + \frac{2\alpha}{\beta^2\theta} \left(c'(\theta)u_1(\theta) + d'(\theta)u_2(\theta) + c(\theta)u_1'(\theta) \right. \\ &\quad \left. + d(\theta)u_2'(\theta) \right) - \frac{2r}{\beta^2\theta^2} \left(c(\theta)u_1(\theta) \right. \\ &\quad \left. + d(\theta)u_2(\theta) \right) \end{aligned}$$

B. Utregning

$$\begin{aligned}
 &= \left(c'(\theta)u_1(\theta) + d'(\theta)u_2(\theta) \right)' + \left(c'(\theta)u_1'(\theta) \right. \\
 &\quad \left. + d'(\theta)u_2'(\theta) \right) + \frac{2\alpha}{\beta^2\theta} \left(c'(\theta)u_1(\theta) + d'(\theta)u_2(\theta) \right) \\
 &\quad + c'(\theta) \left(u_1''(\theta) + \frac{2\alpha}{\beta^2\theta}u_1'(\theta) - \frac{2r}{\beta^2\theta^2}u_1(\theta) \right) \\
 &\quad + d'(\theta) \left(u_2''(\theta) + \frac{2\alpha}{\beta^2\theta}u_2'(\theta) - \frac{2r}{\beta^2\theta^2}u_2(\theta) \right) \\
 &= -\frac{2}{\beta^2\theta^2}f(\theta).
 \end{aligned}$$

Da er

$$\begin{aligned}
 &\left(c'(\theta)u_1(\theta) + d'(\theta)u_2(\theta) \right)' + \left(c'(\theta)u_1'(\theta) + d'(\theta)u_2'(\theta) \right) \\
 &\quad + \frac{2\alpha}{\beta^2\theta} \left(c'(\theta)u_1(\theta) + d'(\theta)u_2(\theta) \right) = -\frac{2}{\beta^2\theta^2}f(\theta), \quad (\text{B.8})
 \end{aligned}$$

siden vi kan si at

$$u_1''(\theta) + \frac{2\alpha}{\beta^2\theta}u_1'(\theta) - \frac{2r}{\beta^2\theta^2}u_1(\theta) \quad \text{og} \quad u_2''(\theta) + \frac{2\alpha}{\beta^2\theta}u_2'(\theta) - \frac{2r}{\beta^2\theta^2}u_2(\theta)$$

er homogene og lik 0, og dermed faller de to siste leddene bort. Hvis vi i tillegg legger til betingelsen at c og d skal være slik at

$$c'(\theta)u_1(\theta) + d'(\theta)u_2(\theta) = 0, \quad (\text{B.9})$$

så kan vi også fjerne første og siste ledd på venstre side til (B.8), og vi ender opp med

$$c'(\theta)u_1'(\theta) + d'(\theta)u_2'(\theta) = -\frac{2}{\beta^2\theta^2}f(\theta). \quad (\text{B.10})$$

Dersom vi nå kombinerer (B.9) og (B.10) så har vi et helt ordinært ligningssett med to ukjente, $c'(\theta)$ og $d'(\theta)$. Skriver om og regner ut:

$$(\text{B.5}) : \quad c'(\theta) = -\frac{d'(\theta)u_2(\theta)}{u_1(\theta)} \quad \text{og} \quad d'(\theta) = -\frac{c'(\theta)u_1(\theta)}{u_2(\theta)}$$

$$(\text{B.6}) : \quad c'(\theta) = -\frac{2}{u_1'(\theta)\beta^2\theta^2}f(\theta) - \frac{d'(\theta)u_2'(\theta)}{u_1'(\theta)},$$

der (B.9) innsatt i (B.10) med hensyn på $d'(\theta)$ gir

$$\begin{aligned}
 -\frac{d'(\theta)u_2(\theta)}{u_1(\theta)} &= -\frac{2}{u_1'(\theta)\beta^2\theta^2}f(\theta) - \frac{d'(\theta)u_2'(\theta)}{u_1'(\theta)} \\
 d'(\theta) \left(\frac{u_2'(\theta)}{u_1'(\theta)} - \frac{u_2(\theta)}{u_1(\theta)} \right) &= -\frac{2}{u_1'(\theta)\beta^2\theta^2}f(\theta) \\
 d'(\theta) \left(\frac{u_2'(\theta)u_1(\theta) - u_2(\theta)u_1'(\theta)}{u_1'(\theta)u_1(\theta)} \right) &= -\frac{2}{u_1'(\theta)\beta^2\theta^2}f(\theta)
 \end{aligned}$$

$$d'(\theta) \left(\frac{W(u_1, u_2)}{u_1'(\theta)u_1(\theta)} \right) = -\frac{2}{u_1'(\theta)\beta^2\theta^2} f(\theta)$$

$$d'(\theta) = -\frac{u_1(\theta)2}{W(u_1, u_2)\beta^2\theta^2} f(\theta).$$

Finner et uttrykk for $c'(\theta)$ på samme vis:

$$-\frac{c'(\theta)u_1(\theta)}{u_2(\theta)} = -\frac{u_1(\theta)2}{W(u_1, u_2)\beta^2\theta^2} f(\theta)$$

$$c'(\theta) = \frac{u_2(\theta)2}{W(u_1, u_2)\beta^2\theta^2} f(\theta).$$

Vi regner nå ut Wronskideterminanten:

$$W(u_1, u_2) = u_1u_2' - u_1'u_2$$

$$= \theta^{\gamma_1}\gamma_2\theta^{\gamma_2-1} - \gamma_1\theta^{\gamma_1-1}\theta^{\gamma_2}$$

$$= (\gamma_2 - \gamma_1)\theta^{\gamma_1+\gamma_2-1}.$$

Setter så inn verdier i uttrykket for $c'(\theta)$

$$c'(\theta) = \frac{2\theta^{\gamma_2}}{(\gamma_2 - \gamma_1)\theta^{\gamma_1+\gamma_2-1}\beta^2\theta^2} f(\theta)$$

$$= \frac{2\theta^{\gamma_2-2-(\gamma_1+\gamma_2-1)}}{(\gamma_2 - \gamma_1)\beta^2} f(\theta)$$

$$= \frac{2\theta^{-\gamma_1-1}}{(\gamma_2 - \gamma_1)\beta^2} f(\theta).$$

Her velger vi å multipliserer med (-1) over og under brøkstreken for å slippe unna ekstra notasjon med minustegn. Da ender vi opp med følgende uttrykk

$$c'(\theta) = -\frac{2\theta^{-\gamma_1-1}}{(\gamma_1 - \gamma_2)\beta^2} f(\theta). \quad (\text{B.11})$$

Tilsvarende for $d'(\theta)$ får vi

$$d'(\theta) = -\frac{2\theta^{\gamma_1}}{(\gamma_2 - \gamma_1)\theta^{\gamma_1+\gamma_2-1}\beta^2\theta^2} f(\theta)$$

$$= -\frac{2\theta^{\gamma_1-2-(\gamma_1+\gamma_2-1)}}{(\gamma_2 - \gamma_1)\beta^2} f(\theta)$$

$$= -\frac{2\theta^{-\gamma_2-1}}{(\gamma_2 - \gamma_1)\beta^2} f(\theta),$$

som multiplisert med (-1) gir

$$d'(\theta) = \frac{2\theta^{-\gamma_2-1}}{(\gamma_1 - \gamma_2)\beta^2} f(\theta). \quad (\text{B.12})$$

Lar nå \hat{F} være den antideriverte til c . Da er

$$\hat{F}(\theta) - \hat{F}(b) = -\frac{2}{(\gamma_1 - \gamma_2)\beta^2} \int_b^\theta f(\eta)\eta^{-\gamma_1-1} d\eta.$$

B. Utregning

Multipliserer med (-1) for å flytte om på grensene til integralet

$$\hat{F}(\theta) - \hat{F}(b) = \frac{2}{(\gamma_1 - \gamma_2)\beta^2} \int_{\theta}^b f(\eta)\eta^{-\gamma_1-1}d\eta$$

Ifølge konvergensbetingelsen på integralene hos Kobila, så er integralet $\int_{\theta}^{\infty} f(\eta)\eta^{-\gamma_1-1}d\eta$ konvergent, og da må grenseverdien når $b \rightarrow \infty$ eksistere. Det vil si at $\lim_{b \rightarrow \infty} \hat{F}(b)$ eksisterer og er lik en konstant C . Dermed er

$$\hat{F}(\theta) - C = \frac{2}{(\gamma_1 - \gamma_2)\beta^2} \int_{\theta}^{\infty} f(\eta)\eta^{-\gamma_1-1}d\eta.$$

Dersom vi setter $F(\theta) = \hat{F}(\theta) - C$, så er F en antiderivert til C , og

$$F(\theta) = \frac{2}{(\gamma_1 - \gamma_2)\beta^2} \int_{\theta}^{\infty} f(\eta)\eta^{-\gamma_1-1}d\eta.$$

På tilsvarende måte lar vi nå \hat{G} være en antiderivert til d . Da er

$$\hat{G}(\theta) - \hat{G}(b) = \frac{2}{(\gamma_1 - \gamma_2)\beta^2} \int_b^{\theta} f(\eta)\eta^{-\gamma_2-1}d\eta.$$

Siden integralet $\int_0^{\theta} f(\eta)\eta^{-\gamma_2-1}d\eta$ konvergerer som følge av konvergensbetingelsen hos Kobila, så eksisterer grenseverdien når $b \rightarrow 0^+$. Det vil si at $\lim_{b \rightarrow 0} \hat{G}(b)$ eksisterer og er lik et tall D . Dermed er

$$\hat{G}(\theta) - D = \frac{2}{(\gamma_1 - \gamma_2)\beta^2} \int_0^{\theta} f(\eta)\eta^{-\gamma_2-1}d\eta.$$

Setter vi $G(\theta) = \hat{G}(\theta) - D$, så er G en antiderivert til d og

$$G(\theta) = \frac{2}{(\gamma_1 - \gamma_2)\beta^2} \int_0^{\theta} f(\eta)\eta^{-\gamma_2-1}d\eta.$$

Dette betyr at vi generelt har

$$c(\theta) = F(\theta) + C = \frac{2}{(\gamma_1 - \gamma_2)\beta^2} \int_{\theta}^{\infty} f(\eta)\eta^{-\gamma_1-1}d\eta + C \quad (\text{B.13})$$

$$d(\theta) = G(\theta) + D = \frac{2}{(\gamma_1 - \gamma_2)\beta^2} \int_0^{\theta} f(\eta)\eta^{-\gamma_2-1}d\eta + D. \quad (\text{B.14})$$

Vi kan nå skrive ut den generelle løsningen til (B.5):

$$\begin{aligned} u(\theta) &= c(\theta)\theta^{\gamma_1} + d(\theta)\theta^{\gamma_2} \\ &= \left(\frac{2}{(\gamma_1 - \gamma_2)\beta^2} \int_{\theta}^{\infty} f(\eta)\eta^{-\gamma_1-1}d\eta + C \right) \theta^{\gamma_1} \\ &\quad + \left(\frac{2}{(\gamma_1 - \gamma_2)\beta^2} \int_0^{\theta} f(\eta)\eta^{-\gamma_2-1}d\eta + D \right) \theta^{\gamma_2} \\ &= \frac{2}{(\gamma_1 - \gamma_2)\beta^2} \left(\theta^{\gamma_2} \int_0^{\theta} f(\eta)\eta^{-\gamma_2-1}d\eta + \theta^{\gamma_1} \int_{\theta}^{\infty} f(\eta)\eta^{-\gamma_1-1}d\eta \right) \end{aligned}$$

$$+ C\theta^{\gamma_1} + D\theta^{\gamma_2},$$

som er nøyaktig på formen beskrevet i (B.6).

Ser vi bort i fra de to siste leddene (den homogene løsningen) så er dette det samme uttrykket som (2.1) i Kapittel 2. Det vil si at dersom $C = D = 0$, så er

$$u(\theta) = \frac{2}{(\gamma_1 - \gamma_2)\beta^2} \left(\theta^{\gamma_2} \int_0^\theta f(\eta)\eta^{-\gamma_2-1} d\eta + \theta^{\gamma_1} \int_\theta^\infty f(\eta)\eta^{-\gamma_1-1} d\eta \right), \quad (\text{B.15})$$

den eneste løsningen som ligger i rommet C_{γ_1, γ_2}^2 . Vi har dermed en unik løsning ettersom enhver annen løsning av $u(\theta)$ er på formen $u(\theta) + C\theta^{\gamma_1} + D\theta^{\gamma_2}$ og vil derfor bryte med minst én av grensebetingelsene hos Kobila som sier at overnevnte integraler er nødt til å konvergerer for alle θ og at grenseverdien til variablene C og D i den homogene løsningen er lik 0 når θ går mot 0 eller ∞ .

Tillegg til Kapittel 4

Under følger utregningen av røttene til den karakteristiske ligningen til den homogene løsningen til u .

Skriver først om uttrykket (4.9) til

$$rpg^2 - g + r(1 - p) = 0,$$

og bruker så *abc*-formelen og regner ut

$$\begin{aligned} g &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4r^2p(1-p)}}{2rp} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4r^2p(1-p)}}{2rp}. \end{aligned}$$

Dersom $r > 1$ så vil det for noen verdier av p gjøre $4r^2p(1-p) > 1$ og vi vil få komplekse røtter. Men siden $r < 1$ så unngår vi dette, og vi vil kun få reelle røtter for g . Ønsker så å vise at løsningene til g er slik at $g_1 > 1$ og $g_2 < 1$. Det vil vise seg senere å være hensiktsmessig å ha denne informasjonen. Det vil si at

$$g_1 : \frac{1 + \sqrt{1 - 4r^2p(1-p)}}{2rp} > 1 \quad \text{og} \quad g_2 : \frac{1 - \sqrt{1 - 4r^2p(1-p)}}{2rp} < 1.$$

Da kan vi omforme uttrykket for g_1 til

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{1 - 4r^2p(1-p)} &> 2rp && \text{siden } r \text{ og } p \text{ er positive} \\ \iff \sqrt{1 - 4r^2p(1-p)} &> 2rp - 1, \end{aligned}$$

der $\sqrt{1 - 4r^2p(1-p)} > 0$ siden $r < 1$. For å kunne kvadrere på begge sider så er vi nødt til å ha samme fortegn på begge sider. Siden vi vet at venstre- og høyresiden er positiv dersom $rp > 1/2$, så kan vi konkludere med at begge er

B. Utregning

positive siden dersom $rp < 1/2$, så vil $2rp - 1$ i uttrykket være negativt, og dermed er ulikheten automatisk oppfylt. Vi kan nå skrive

$$\begin{aligned} & 1 - 4r^2p(1-p) > (2rp - 1)^2 \\ \iff & 1 - 4r^2p(1-p) > 4r^2p^2 - 4rp + 1 \\ \iff & 1 - 4r^2p + 4r^2p^2 > 4r^2p^2 - 4rp + 1 \\ \iff & 4rp - 4r^2p > 0 \\ \iff & 4pr(1-r) > 0 \\ \iff & r(1-r) > 0 \\ \iff & 1 > r. \end{aligned}$$

Siden dette stemmer med betingelsen om at r skal være mindre enn 1, så har vi bevist at $g_1 > 1$. For g_2 får vi

$$\begin{aligned} & 1 - \sqrt{1 - 4r^2p(1-p)} < 2rp \\ \iff & -\sqrt{1 - 4r^2p(1-p)} < 2rp - 1 \\ \iff & \sqrt{1 - 4r^2p(1-p)} > 1 - 2rp \\ \iff & 1 - 4r^2p(1-p) > (1 - 2rp)^2 \\ \iff & 1 - 4r^2p + 4r^2p^2 > 1 - 4rp + 4r^2p^2 \\ \iff & 4rp - 4r^2p > 0 \\ \iff & 4pr(1-r) > 0 \\ \iff & r(1-r) > 0 \\ \iff & 1 > r, \end{aligned}$$

som også stemmer med betingelsen. Vi kan dermed slå fast at

$$g = \begin{cases} g_1 > 1 \\ g_2 < 1. \end{cases}$$

Tillegg til Kapittel 4

Under følger en ekstra omskrivning på løsningen (4.18) til det inhomogene problemet (4.7). Denne omskrivningen viser enda større likhet mellom den diskrete løsningen og løsningen (2.4) til det inhomogene problemet i det kontinuerlige tilfellet.

Merk at u_n er verdien av u i punktet $x_n = \theta^n$. Skriver dette om, og får et uttrykk for n :

$$\begin{aligned} & x_n = \theta^n \\ \iff & \log x_n = n \log \theta \\ \iff & n = \frac{\log x_n}{\log \theta}. \end{aligned}$$

Siden $u_n = g_i^n$ for $i = 1, 2$, så er

$$g_i^n = g_i^{\frac{\log x_n}{\log \theta}} = \left(e^{\log g_i} \right)^{\frac{\log x_n}{\log \theta}} = \left(e^{\log x_n} \right)^{\frac{\log g_i}{\log \theta}} = x_n^{\frac{\log g_i}{\log \theta}}.$$

For u_{n+1} har vi

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \theta^{n+1} \\ \iff \log x_{n+1} &= (n+1) \log \theta \\ \iff n+1 &= \frac{\log x_{n+1}}{\log \theta}, \end{aligned}$$

og siden $u_{n+1} = g_i^{n+1}$ for $i = 1, 2$, så er

$$g_i^{n+1} = g_i^{\frac{\log x_{n+1}}{\log \theta}} = \left(e^{\log g_i} \right)^{\frac{\log x_{n+1}}{\log \theta}} = \left(e^{\log x_{n+1}} \right)^{\frac{\log g_i}{\log \theta}} = x_{n+1}^{\frac{\log g_i}{\log \theta}}.$$

På samme vis blir $u_{n+k} = g_i^{n+k}$ for $i = 1, 2$

$$g_i^{n+k} = g_i^{\frac{\log x_{n+k}}{\log \theta}} = \left(e^{\log g_i} \right)^{\frac{\log x_{n+k}}{\log \theta}} = \left(e^{\log x_{n+k}} \right)^{\frac{\log g_i}{\log \theta}} = x_{n+k}^{\frac{\log g_i}{\log \theta}}.$$

Hvis vi setter dette inn i (4.18), får vi

$$u_n = x_n^{\frac{\log g_2}{\log \theta}} \frac{\sum_{k=-\infty}^{n-1} f_k x_{-k-1}^{\frac{\log g_2}{\log \theta}} \Delta t}{(g_1 - g_2)rp} + x_n^{\frac{\log g_1}{\log \theta}} \frac{\sum_{k=n}^{\infty} f_k x_{-k-1}^{\frac{\log g_1}{\log \theta}} \Delta t}{(g_1 - g_2)rp}.$$

For å forenkle notasjonen setter vi et kortere navn på $\frac{\log g_1}{\log \theta}$ og $\frac{\log g_2}{\log \theta}$. Lar $\gamma_1 = \frac{\log g_1}{\log \theta}$ og $\gamma_2 = \frac{\log g_2}{\log \theta}$, og får

$$u_n = \frac{1}{(g_1 - g_2)rp} \left(x_n^{\gamma_2} \sum_{k=-\infty}^{n-1} f_k x_{-k-1}^{\gamma_2} \Delta t + x_n^{\gamma_1} \sum_{k=n}^{\infty} f_k x_{-k-1}^{\gamma_1} \Delta t \right).$$

Tillegg til Tillegg A

Under følger bevis av Setning 6.

Anta at M er en øvre skranke for f . Da er

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k g_1^{-k-1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} M g_1^{-k-1},$$

der $\sum_{k=0}^{n-1} M g_1^{-k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k g_1^{-k-1}$. Merk at

$$s_n = g_1^{-1} + g_1^{-2} + g_1^{-3} + g_1^{-4} + \dots + g_1^{-n-1} + g_1^{-n-2} = \sum_{k=0}^{n-1} g_1^{-k-1}.$$

B. Utregning

Da kan vi multiplisere med kvotienten g_1^{-1} og få

$$g_1^{-1}s_n = g_1^{-2} + g_1^{-3} + g_1^{-4} + \dots + g_1^{-n-2} + g_1^{-n-3}.$$

Hvis vi nå trekker den første rekken fra den andre, får vi

$$\begin{aligned} s_n(g_1^{-1} - 1) &= g_1^{-n-3} - g_1^{-1} \\ s_n &= \frac{g_1^{-1}(g_1^{-n-2} - 1)}{g_1^{-1} - 1}, \end{aligned}$$

som er summen av den endelige rekken $\sum_{k=0}^{n-1} g_1^{-k-1}$, og vil konvergere dersom leddet g_1^{-n-2} går mot 0 når $n \rightarrow \infty$. Dette oppnår vi dersom $g_1 > 1$. Hvis vi multipliserer denne rekken med M får vi

$$\sum_{k=0}^{n-1} M g_1^{-k-1} = M \frac{g_1^{-1}(g_1^{-n-2} - 1)}{g_1^{-1} - 1},$$

som vil konvergere under samme betingelse. Siden $\sum_{k=0}^{n-1} f_k g_1^{-k-1}$ er dominert av $\sum_{k=0}^{n-1} M g_1^{-k-1}$, så er også $\sum_{k=0}^{n-1} f_k g_1^{-k-1}$ nødt til å konvergere.

Tilsvarende for $g_2 < 1$ når $n \rightarrow -\infty$. ■

TILLEGG C

Notasjon

Notasjonen gjelder for hele oppgaven med unntak av Kapittel 2, der noe av den samme notasjonen er brukt men med en annen betydning.

A er operatoren $Af(\theta_n) = \frac{prf(\theta_{n+1}) - f(\theta_n) + (1-p)rf(\theta_{n-1})}{\Delta t}$.

α er en trendfaktor; konstant.

B er Brownsk bevegelse.

β er en volatilitetsfaktor; konstant.

ϵ er en justeringsfunksjon.

\mathcal{F} er filtrasjonen $\mathcal{F} = \sigma\{\Theta_t : t \in \mathbb{T}\}$.

f er en funksjon for inntekt per tidsenhet.

\mathcal{G} er forbudsområdet; $\mathcal{G} = \{(\theta, k) : k \leq \phi(\theta)\}$, også definert som $\mathcal{G} = \{(\theta, k) : \psi_1(k) \leq \theta \leq \psi_1(k)\}$.

\mathcal{G}° er de indre punktene i forbudsområdet; $\mathcal{G}^\circ = \{(s, k) \in \mathcal{G} : (s^-, k), (s^+, k) \in \mathcal{G}\}$.

$\partial\mathcal{G}$ er randen til forbudsområdet; $\partial\mathcal{G} = \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}^\circ$.

$g(s, \eta)$ er Greenfunksjonen

$$g(s, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{(g_1 - g_2)rp} s^{\xi_2} \eta^{-\xi_2 - 1} & \text{dersom } \eta < s \\ \frac{1}{(g_1 - g_2)rp} s^{\xi_1} \eta^{-\xi_1 - 1} & \text{dersom } \eta \geq s. \end{cases},$$

g_1, g_2 er røttene til den karakteristiske ligningen $rp g^2 - g + r(1 - p) = 0$ til den homogene ligningen $u_n = 0$.

Γ er en utbyggingsfunksjon.

C. Notasjon

h er optimal profitt; $h(s, k) = \sup\{J(K) : K \text{ er en } (\theta, k)\text{-strategi}\}$.

J er forventet diskontert nettoinntekt dersom man følger utbyggingsstrategien K ;

$$J(K) = E^{(s,k)} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \left(\Pi(\Theta_t, K_t) + A\Gamma(\Theta_t, K_t) \right) r^{\frac{t}{\Delta t}} \Delta t \right] + \Gamma(s, k).$$

K_t er optimal investeringsstrategi; $K_t = k \vee \sup\{\phi(\Theta_s) : s \leq t\}$.

k er produksjonskapasitet.

\mathbb{N} er alle naturlige tall.

$n \in \mathbb{Z}$.

p er en sannsynlighetsfaktor, der $p = \frac{1}{2} + \frac{\alpha - \frac{\beta^2}{2}}{2\beta} \sqrt{\Delta t}$

Π er en nettoinntekt per tidsenhet dersom man ikke bygger ut.

ϕ er randen til forbudsområdet; $\phi(\theta) = \sup\{k : (\theta, k) \in \mathcal{G}\}$, også definert som

$$\phi(s) = \inf \left\{ k : \sum_{\eta < s} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) \eta^{-\xi_2 - 1} \Delta t \geq 0 \right. \\ \left. \text{eller } \sum_{\eta > s} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) \eta^{-\xi_1 - 1} \Delta t \geq 0 \right\}.$$

.

$$\psi_1(k) = \min \left\{ s : \sum_{\eta < s} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) \eta^{-\xi_2 - 1} \Delta t \geq 0 \right\}.$$

$$\psi_2(k) = \max \left\{ s : \sum_{\eta > s} (\Pi_k + A\Gamma_k)(\eta, k) \eta^{-\xi_1 - 1} \Delta t \geq 0 \right\}.$$

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

r er diskonteringsfaktor, der $0 < r < 1$

\mathbb{S} er tilstandsrommet $\mathbb{S} = \{\dots, \theta_{-2}, \theta_{-1}, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots\}$, der θ_t representerer tilstand ved tiden t .

(s, k) er et startpunkt.

\mathbb{T} er tidslinjen $\mathbb{T} = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t, \dots\}$, der $\Delta t > 0$.

Θ_t er en Markovprosess.

θ er en tilstand i \mathbb{S} ; $\theta = 1 + \beta\sqrt{\Delta t}$.

u_n (forkortelse av $u(\theta_n)$) er forventet diskontert nettoinntekt når nettoinntekten per tidsenhet er gitt ved f ; $u_n = rpu_{n+1} + r(1-p)u_{n-1} + f(\theta^n)\Delta t$.

v er funksjonen $v = h - \Gamma$.

W er Wronskideterminanten; $u_n^{(1)}u_{n+1}^{(2)} - u_n^{(2)}u_{n+1}^{(1)}$.

$\xi_1 = \frac{\log g_1}{\log \theta}$ og $\xi_2 = \frac{\log g_2}{\log \theta}$.

\mathbb{Z} er alle heltall.

$\widehat{}$ er operatoren som gjør $v(s, \phi(s)) = \widehat{v}(s)$.

Bibliografi

- [Boh03] Bohlin, J. *Irreversible Investment Problems with Relaxed Conditions*. *Cand. Scient. thesis*. Matematisk institutt, Universitetet i Oslo, 2003.
- [Ela05] Elaydi, S. *An Introduction to Difference Equations*. 3. utg. Springer, 2005.
- [Kob93] Kobila, T. Ø. “A Class of Solvable Stochastic Investment Problems Involving Singular Controls”. I: *Stochastics and Stochastic Reports* 43 (1993), s. 29–63.
- [Lam77] Lamperti, J. *Stochastic Processes*. 1. utg. Springer-Verlag New York Inc., 1977.
- [Lay12] Lay, D. C. *Linear Algebra and its Applications*. 4. utg. Pearson Education, 2012.
- [Lin06] Lindstrøm, T. *Kalkulus*. 3. utg. Universitetsforlaget, 2006.
- [MW13] McDonald, J. N. og Weiss, N. A. *A Course in Real Analysis*. 2. utg. Academic Press, 2013.
- [Rud76] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*. 3. utg. McGraw-Hill International Editions, 1976.
- [Øks95] Øksendal, B. *Stochastic Differential Equations*. 4. utg. Springer, 1995.