Elevers bruk av matematiske kompetanser i arbeid med åpne og rike oppgaver på ungdomstrinnet

En kvalitativ intervjustudie av elevers tilnærming til åpne og rike oppgaver i matematikk

Lilly Øygarden

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning
Det utdanningsvitenskapelig fakultet

UNIVERSITETET I OSLO

Vår 2020

Elevers bruk av matematiske kompetanser i arbeid med åpne og rike oppgaver på ungdomstrinnet

En kvalitativ intervjustudie av elevers tilnærming til åpne og rike oppgaver i matematikk

Masteroppgave i matematikkdidaktikk

Lilly Øygarden

Elevers bruk av matematiske kompetanser i arbeid med åpne og rike oppgaver på ungdomstrinnet

Lilly Øygarden

http://www.duo.uio.no

Sammendrag

Formålet ved studien har vært å undersøke hvilke matematiske kompetanser elever bruker i tilnærmingen til åpne og rike oppgaver i matematikk. Det ble tatt i bruk to rammeverk for matematisk kompetanse, KOM-rammeverket til Niss og Jensen (2002) og trådmodellen til Kilpatrick et al. (2001). Problemstillingen for studien er: «*Hvilke matematiske kompetanser bruker elever når de tilnærmer seg åpne og rike oppgaver?*».
For å besvare problemstillingen har studien et mindre forskningsspørsmål: «*Bruker elevene andre kompetanser i arbeidet med åpne og rike oppgaver enn med tradisjonelle lukkede?*».

Dette er en kvalitativ studie som tar i bruk oppgavebaserte intervjuer der intervjuguiden kun består av matematiske oppgaver. 4 elever på ungdomstrinnet arbeidet med tilsammen 8 oppgaver over to intervjurunder. Elevenes arbeid med oppgavene ble tatt opp med lydopptak som senere ble transkribert. Transkriberingen ble analysert ut ifra de to rammeverkene for å se hvilke kompetanser en kunne registrere i elevenes uttalelser. Oppgavene som ble tatt i bruk i intervjuene er klassifisert ut ifra Yeo (2017) sitt rammeverk for åpne oppgaver, som sier at oppgaver kan være åpne ved mål, svar, metode, kompleksitet og utvidelse.

Funn fra studien viser en hyppig forekomst av de fleste kompetansene presentert i både rammeverket av Niss og Jensen (2002) og Kilpatrick et al. (2001), med unntak av hjelpemiddelkompetansen og produktiv holdning. Hovedfunnene diskutert i studien omhandler interaksjonen mellom resonnement og kommunikasjon da kompetansene som omhandler dette ofte ble registrert samtidig, hvordan åpne og rike oppgaver krever både ferdigheter i og forståelse for matematiske prosedyrer og det blir drøftet noen utfordrende sider ved bruk av åpne og rike oppgaver i skolesammenheng.
Analysen viste også registrering av flere, og andre, kompetanser i elevenes tilnærming til en lukket oppgave enn ved de åpne og rike oppgavene gitt i intervjuene.

Forord

Det er merkelig å tenke at dette er mine siste ord som lektorstudent, og at disse ordene markerer at en epoke i livet er nå over. Det har vært 5 spennende, utfordrende og lærerike år på Universitetet i Oslo der jeg har lært mye og møtt mange fantastiske mennesker.

Først og fremst vil jeg rette en spesiell takk til min veileder, Arne Hole. Takk for alle Zoom-veiledninger, dine gode og konstruktive råd, og for at du hele tiden har presset meg til å gjøre mitt beste og holdt meg ansvarlig. Uten din veiledning hadde jeg nok fortsatt vært på analysestadiet.

Jeg vil også takke mine fantastiske, morsomme og inkluderende medstudenter for 5 flotte år. Spesielt takk til Camilla og Marthe for utallige obliger, laber og uforståelige oppgaver, uten dere hadde jeg nok ikke bestått første året engang. Trist at studietiden vår skulle avsluttes på denne måten, jeg hadde sett frem til alle kaffekoppene og frustrasjonen vi skulle dele denne våren. Dette har vært en merkelig vår på mange måter, og det er vemodig å skulle avslutte studenttilværelsen på denne måten.

Tusen takk til mine nære og kjære for oppmuntrende ord, forbønn og støtte. En stor takk til Birte som tok seg tid til å «sensurere» oppgaven, takk for konstruktiv kritikk og gode innspill.

Oslo, juni 2020

Lilly Øygarden

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

Dette kapittelet er en redegjørelse for valg av tema, presentasjon av problemstilling og til slutt en beskrivelse av oppgavens oppbygning.

1.1 Begrunnelse for valg av tema

Matematikk er et sentralt fag i den norske skolen og skal forberede elever på å møte et arbeidsliv og samfunn i konstant utvikling (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Vi lever i en teknologisk verden som har behov for velutdannede borgere som kan dekke den etterspørsel samfunnet vårt behøver (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, s. 10). I tillegg behøver den vanlige borgeren gode matematikkunnskaper, fordi teknologi og vitenskap preger det samfunnet vi lever i (Niss, 2003, s. 1).

Læreplanen sier at elever skal utvikle ferdigheter som resonnering, kritisk tenkning, kommunikasjon, generalisering, utforskning og problemløsning gjennom matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Den nye læreplanen legger mer vekt på dybdelæring og ønsker at elever skal få et godt grunnlag for refleksjon, kritisk tenkning, skaperkraft, utforskning og kreativitet. Kompetansemålene er satt slik at elever skal kunne bruke det de har lært for å mestre og løse utfordringer i kjente og ukjente situasjoner (Regjeringen, 2019).

Begrepet *kompetanse* blir ofte brukt når en beskriver det å beherske et område med gjennomslag, oversikt og dømmekraft (Niss & Jensen, 2002, s. 43), og begrepet matematisk kompetanse brukes som et faglig uttrykk for det å mestre matematikk. Den nye læreplanen definerer kompetanse som det å kunne tilegne seg og anvende kunnskap og ferdigheter, slik at en mestrer og løser oppgaver i kjente og ukjente situasjoner. Kompetanse innebærer også forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning (Utdanningsdirektoratet, 2020b). Fra dette ser vi at det å ha kompetanse i matematikk ikke bare innebærer bruk av kunnskaper og ferdigheter, men også omhandler forståelse. På lignende måte definerer Niss og Jensen (2002) matematisk kompetanse som det å ha kunnskap om, forståelse for og kunne ta i bruk matematikk i ulike sammenhenger (Niss & Jensen, 2002, s. 43).

Store deler av det matematiske faget består av å løse oppgaver, og utgjør en stor del av grunnlaget for læring i matematikk (Pettersen & Nortvedt, 2018, s. 950; Sullivan, Clarke & Clarke, 2013, s. 57; Yeo, 2017, s. 175). Forskning viser at høyt læringsutbytte krever deltakelse i kognitivt utfordrende og komplekse oppgaver (Pettersen & Nortvedt, 2018, s. 952), og utvikling av matematisk kompetanse krever at oppgavene legger til rette for dette. Tradisjonelle oppgaver har som mål å innøve og teste elever i lærte prosedyrer (Pehkonen, 1997, s. 89; Pettersen & Nortvedt, 2018, s. 950). Pehkonen (1997) kaller disse for drilloppgaver, og mener at bruk av kun disse vil gjøre at elever ser på matematikk som et fag bestående av prosedyrer og oppgaver (Pehkonen, 1997, s. 89). Drilloppgaver gir elever kunnskap og ferdigheter til å bruke det de har lært, men gir dem ikke nødvendigvis matematisk forståelse. Fordi forståelse er en stor del av matematisk kompetanse vil ikke tradisjonelle oppgaver alene legge til rette for at elever utvikler matematisk kompetanse.

Tradisjonelle oppgaver i denne sammenhengen er oppgaver der start, metode og løsning er satt på forhånd – også kalt lukkede oppgaver. Slike oppgaver er relevante når det kommer til øving og testing av prosedyrer, men er ikke tilstrekkelig når det gjelder ferdigheter som utforskning, kreativitet eller problemløsning (Pehkonen, 1997, s. 8). Det finnes utallige oppgavetyper som ikke hører til under betegnelsen lukkede oppgaver, og for enkelhetens skyld settes disse i denne oppgaven under samlebetegnelsen «åpne oppgaver». Begrepet «åpen» omhandler at en eller flere av oppgavens komponenter ikke er satt. At start, metode og løsning er åpen kan føre til at ulike elever kan ha to helt forskjellige tilnærmelser og/eller løsninger på en og samme oppgave. Sullivan, Clarke og Clarke (2013) mener at det å jobbe med åpne oppgaver kan utvikle ferdigheter som kommunikasjon, generalisering, resonnering og forståelse, i tillegg til matematisk kunnskap og ferdigheter til å bruke det en har lært (Sullivan et al., 2013, s. 57-58).

1.2 Problemstilling og forskningsspørsmål

Problemstillingen for denne oppgaven er:

«*Hvilke matematiske kompetanser bruker elever når de tilnærmer seg åpne og rike oppgaver?*».

En stor andel av de oppgavene som blir gitt i norske klasserom i dag, er som kjent lukkede oppgaver. Lukkede oppgaver bidrar også til å utvikle matematisk kompetanse. Jeg ønsker å undersøke ulikhetene av kompetanser som kommer til syne når elever arbeider med åpne oppgaver sammenlignet med lukkede oppgaver. Som en del av arbeidet med problemstillingen vil jeg prøve å besvare følgene forskningsspørsmål:

«*Bruker elevene andre kompetanser i arbeidet med åpne og rike oppgaver enn med tradisjonelle lukkede oppgaver?*».

1.3 Oppgavens struktur

I kapittel 2 etableres et teoretisk bakteppe for studien. Her presenteres det to rammeverk for matematisk kompetanse, et av Niss og Jensen (2002) og et av Kilpatrick et al. (2001). Videre vil det presenteres en redegjørelse for begrepet åpne oppgaver sammen med tidligere forskning og beskrivelse av bruken av og de ulike sidene ved begrepet. Deretter vil rammeverket til Yeo (2017) presenteres, som er et verktøy for klassifisering av åpne oppgaver. Kapittel 3 omhandler metode. Her beskrives og begrunnes metodevalget i min studie, og studiens troverdighet og etiske perspektiv drøftes. I de påfølgende kapitlene vil resultat og analyse fremlegges, før funn drøftes i lys av relevant teori. Avslutningsvis vil det trekkes konklusjoner og reflekteres rundt studiens pedagogiske implikasjoner. I tillegg vil videre forskning tilknyttet utvikling av matematisk kompetanse gjennom bruk av åpne oppgaver diskuteres.

2 Teori

2.1 Matematisk kompetanse

Begrepet *kompetanse* er sentralt i min studie og er dermed viktig å definere, spesielt dets betydning i matematikkfaget. Som nevnt innledningsvis, definerer Utdanningsdirektoratet kompetanse som det å tilegne og bruke kunnskaper og ferdigheter for å mestre utfordringer i kjente og ukjente situasjoner, i tillegg til å ha forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning (Utdanningsdirektoratet, 2020b). Denne definisjonen er generell for alle fagområder. Samtidig er det rimelig å si at kompetanse er kontekstspesifikt, som betyr at tilegnelse av kompetanse i ulike fagområder er basert på læring og erfaringer i relevante og domenespesifikke situasjoner (Pettersen & Nortvedt, 2018, s. 951). Dette leder oss videre til kompetansedefinisjoner og kompetansebeskrivelser som er spesifikke for matematikkfaget. Samtidig er det viktig å understreke at det ikke finnes noen entydig definisjon av kompetanse generelt sett. For å få en bredere forståelse, er det derfor viktig å se på flere ulike tilnærmingsmåter til dette begrepet.

Matematikksenteret skriver at matematisk kompetanse involverer begrepsforståelse, fleksibilitet i arbeid med matematiske problem, evne til utforskning, evne til å resonnere, og det å ha en positiv holdning til faget (Matematikksenteret, 2016). Denne definisjonen er tydelig matematikkspesifikk. Definisjonen gitt i Niss og Jensen (2002), der matematisk kompetanse defineres som det å ha kunnskap i, forståelse for og å kunne bruke matematikk i mange ulike situasjoner, er i utgangspunktet ikke like spesifikk for matematikkfaget. Niss og Jensen (2002) går imidlertid videre til en oppdeling av begrepet matematisk kompetanse i delkompetanser.

Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) bruker ikke primært begrepet kompetanse, men i stedet begrepet «*mathematical proficiency*». Dette har i noen sammenhenger blitt oversatt som «matematisk kyndighet». Slik det beskrives, består begrepet av fem komponenter: *konseptuell forståelse*, *prosedyrekompetanse*, *strategisk kompetanse*, *adaptiv resonneringsevne* og *produktiv holdning* (Kilpatrick et al., 2001, s. 116) (Egen oversettelse). Visuelt fremstilles disse fem komponentene som tråder i et sammenflettet tau. Til tross for at de selv ikke bruker ordet «kompetanse», ble rammeverket til Kilpatrick et al. (2001) likevel brukt til å beskrive «matematisk kompetanse» i Ludvigsen-utvalgets rapport «Framtidens skole» (Ludvigsen et al., 2015, s. 57). Dette viser at «mathematical proficiency»-begrepet i Kilpatrick et al. (2001) oppfattes som en definisjon av matematisk kompetanse, og at man betrakter deres rammeverk som en beskrivelse av matematisk kompetanse. På samme måte til jeg for enkelhets skyld i fortsettelsen referere til rammeverket deres som et kompetanserammeverk.

Til tross for ulikhetene i definisjonene presentert ovenfor, finner man igjen spesielt to aspekter ved hver definisjon; å kunne ta i bruk kunnskaper og ferdigheter man har, og å vise «forståelse» for faget. Samtidig brukes dette ordet i liten grad i kompetansebeskrivelsene. Begrepet «forståelse» forbindes mer med andre tradisjoner innenfor didaktikken. Der skilles ofte mellom en instrumentell og en relasjonell matematisk forståelse. Skemp (1976) definerer instrumentell forståelse som det å kunne kjenne igjen en matematisk oppgave som en spesifikk klasse av oppgaver der en allerede kjenner en regel, mens relasjonell forståelse er å vite både hva en skal gjøre og hvorfor (Skemp, 1976, s. 259). Mellin-Olsen (1981) mener at den instrumentelle forståelsen ofte relateres til den praktiske bruken av matematiske kunnskap, men har ikke noe dypere struktur og den relasjonelle forståelsen kan forbindes med matematisk forståelse (Mellin-Olsen, 1981, s. 351).

En definisjon kan si mye om hva kompetanse er, men en behøver noe mer hvis en skal måle eller utvikle elevenes kompetanse gjennom undervisning. Det har blitt utarbeidet flere rammeverk for matematisk kompetanse for nettopp å vise at matematikk er et komplekst fagområde, og at det å inneha matematisk kompetanse består av en rekke kompetanser (Kilpatrick, 2014, s. 87). Kilpatrick (2014) beskriver at et rammeverk for matematisk kompetanse er en strukturell plan for å organisere kognitive ferdigheter brukt i læring og gjøring av matematikk. Niss og Jensen (2011) mener at et slikt rammeverk deler matematisk kompetanse i en rekke mentale prosesser, samt at de understreker at det å mestre matematikk ikke bare består av gjennomførelse av prosedyrer og memorering av fakta, men er et komplekst konsept som krever en rekke kompetanser (Niss & Jensen, 2011, s. 31). Mentale prosesser har spilt en viktig rolle i forskning på matematisk kompetanse, fordi elevers organisering av kunnskapsdeler er avgjørende for om de vil kunne utvikle en dyp matematisk forståelse (Kilpatrick et al., 2001, s. 117-118). Når målet ved matematikkundervisning er matematisk kompetanse, vil det påvirke lærerplaner og undervisningspraksisen (Pettersen & Nortvedt, 2018, s. 950).

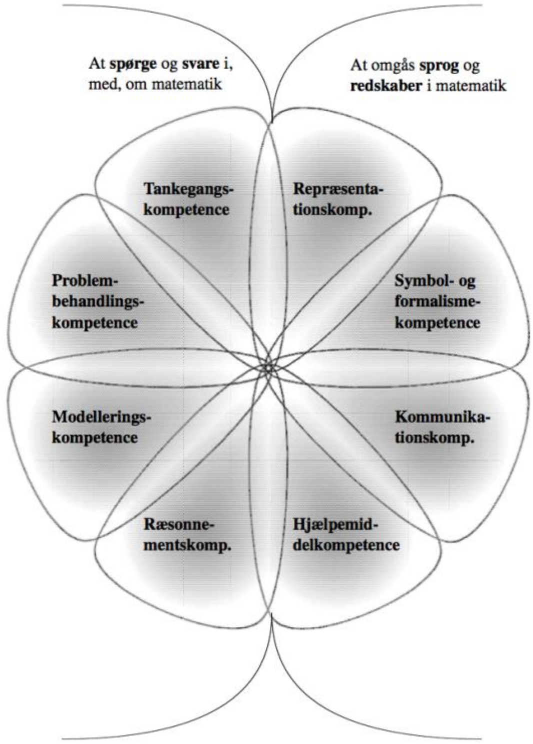
I denne studien vil jeg undersøke hva rammeverkene til Niss og Jensen (2002) og Kilpatrick et al. (2001) legger i det å mestre matematikk. De to rammeverkene blir ofte tatt i bruk i diskusjon og forskning rundt matematisk kompetanse. Jeg vil starte med en separat presentasjon for hver dem, før det avsluttes med en sammenligning.

2.1.1 Rammeverket til Niss og Jensen

Niss og Jensens rammeverk blir ofte kalt KOM-rammeverket og ble utarbeidet av en komite for å besvare hva det vil si å mestre matematikk (Niss & Jensen, 2002, s. 5). For å unngå en ovenfra og ned-holdning ble lærere, skoleledere og organisasjoner inkludert i prosessen. (Niss & Jensen, 2002, s. 5). Dette velkjente rammeverket kan vi finne tendenser til påvirkning fra i våre egne læreplaner, både LK06 og LK20.

Rammeverket skiller mellom matematisk kompetanse og *en* matematisk kompetanse. Prosjektet utarbeidet åtte ulike delkompetanser som man da mener at til sammen utgjør matematisk kompetanse. Selv om delkompetansene er unike og har hver sin identitet, er de sterkt forankret med hverandre, og man kan ikke redusere en kompetanse til de øvrige (Niss & Jensen, 2002, s. 44). Niss og Jensen (2002) beskriver at *en* matematisk kompetanse er en innsiktsfull beredskap for å handle hensiktsmessig i situasjoner som rommer en bestemt matematisk utfordring (Niss & Jensen, 2002, s. 43).

Rammeverket til Niss og Jensen fremstilles ofte som en rose, der hver delkompetanse er et roseblad. Hensikten bak denne fremstillingen er å vise at kompetansene overlapper hverandre, og at de vokser i takt med hverandre (Niss & Jensen, 2002, s. 43). Delkompetansene er samlet i to grupperinger, som svarer til hver sin side av «rosen». Den første grupperingen er «*å stille og svare på spørsmål i, med og om matematikk*» og inkluderer *tankegangskompetansen*, *problembehandlingskompetansen*, *modelleringskompetansen* og *resonnementskompetansen*. Den andre grupperingen er «*å kunne håndtere matematisk språk og redskaper*». Denne grupperingen inkluderer *representasjonskompetansen*, *symbol- og formalismekompetansen*, *kommunikasjonskompetansen* og *hjelpemiddelkompetansen* (Niss & Jensen, 2002, s. 44).



Figur 1: En visuell representasjon av de åtte delkompetansene (Niss & Jensen, 2002, s. 45)

Å stille og svare på spørsmål i, med og om matematikk

Tankegangskompetansen har flere aspekter ved seg. En kan stille spørsmål som er karakteristiske for matematikk, kjenne til typen svar ulike matematiske spørsmål behøver, og vite hvilke spørsmål som kan besvares ved matematikk. Forståelse for matematiske begreper, utsagn og hva det ligger i generalisering, kommer også under denne kompetansen. Saksforhold eller riktigheten av spørsmål, svar eller metoder hører ikke til under tankegangskompetansen. Eksempler på spørsmål som er karakteristiske for denne kompetansen er «finnes det ...?», «hvor mange ...?» og «kan det tenkes at ...?». Slike spørsmål kan besvares med eksempelvis «ja/nei, fordi ...» og «hvis ..., så ...» (Niss & Jensen, 2002, s. 47-48).

Problembehandlingskompetansen innebærer å kunne *stille* og *besvare* matematiske problemer. Å stille matematiske problemer inkluderer å kunne formulere, identifisere og presisere matematiske problemer, samt å kunne besvare et problem på ulike måter. Problemene kan være egne eller andres, ferdig formulert eller ikke og åpne eller lukkede.

I denne konteksten er et matematisk problem et matematisk spørsmål som krever bruk av matematisk undersøkelse for å få en løsning. Det vil si at rutineferdigheter ikke kommer under denne kompetansen. Om et matematisk spørsmål er et matematisk problem, avhenger av den som skal løse det; dersom det krever undersøkelse er det et matematisk problem, men ikke dersom det kun krever rutineferdigheter. En kan ha kompetanse i å stille matematiske problemer, men ikke i besvarelsen av dem – og omvendt (Niss & Jensen, 2002, s. 49-50).

Modelleringskompetansen kan beskrives gjennom to begreper: *matematisering* og *avmatematisering*. Matematisering innebærer å bruke matematikk i ikke-matematiske situasjoner. Man må oversette den ikke-matematiske situasjonen for å kunne løse den matematisk, ved å tilsette et matematisk språk bestående av matematiske uttrykk og symboler. På denne måten blir det dannet matematiske modeller, enten mentale eller konkrete.

Avmatematisering handler om å tolke matematisk innhold på en ikke-matematisk måte (Turner, Blum & Niss, 2015, s. 112). Like viktig som å kunne danne mentale og konkrete modeller, er det å utnytte allerede eksisterende modeller. Det innebærer å kunne analysere og vurdere allerede eksisterende modeller for å kunne ta dem i bruk i nye situasjoner (Niss & Jensen, 2002, s. 52-53).

Resonnementskompetansen omhandler matematiske bevis og resonnement. Man skal kunne følge og bedømme både andres og egne matematiske resonnement, som innebærer å overbevise seg selv og andre om gyldigheten til et resonnement. Man bør også ha forståelse og kunnskap for hva et matematisk bevis er og kunne avgjøre om et resonnement er et gyldig matematisk bevis eller ikke, ved for eksempel å komme med et moteksempel. I tillegg skal en kunne utarbeide og gjennomføre et matematisk resonnement, og gjøre det om til et gyldig matematisk bevis (Niss & Jensen, 2002, s. 54).

Å kunne håndtere matematisk språk og redskaper

Representasjonskompetansen handler om bruk av ulike representasjoner av matematiske objekter, problemer og situasjoner, og å kunne oversette på tvers av dem og ha forståelse for forbindelser mellom ulike representasjoner. Man kan ta reflekterte valg for hvilken representasjon det er hensiktsmessig å bruke i ulike situasjoner. Et eksempel Niss og Jensen (2002) bruker, er at en lineær funksjon kan representeres algebraisk, som en graf eller ved en tabell (Niss & Jensen, 2002, s. 56-58).

Symbol- og formalismekompetansen innebærer på den ene siden å kunne bruke og tolke et matematisk språk bestående av symboler og formler, og å kunne oversette frem og tilbake mellom det og et naturlig språk. På den andre siden kommer ferdigheten til å bruke og utføre symbolholdige uttrykk, som for eksempel formler, og at en har innsikt i «spillereglene» til matematiske systemer (Niss & Jensen, 2002, s. 58). For eksempel at man vet at 5 * (3 + 4) ikke er det samme som 5 * 3 + 4.

Kommunikasjonskompetansen har en uttrykkende og en mottakende side. Den uttrykkende siden innebærer å kunne uttrykke seg matematisk med ulik grad av teoretisk presisjon, og den mottakende siden innebærer å kunne sette seg inn i og tolke andres matematiske utsagn.
I denne konteksten kan kommunikasjon være muntlig, skriftlig eller visuelt (Niss & Jensen, 2002, s. 60-61).

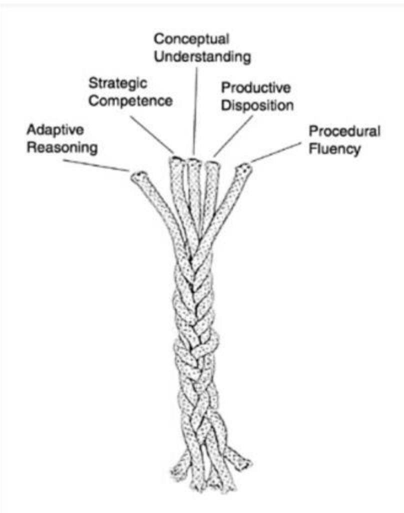
Hjelpemiddelkompetansen innebærer å ha kjennskap til ulike matematiske verktøy, som deres egenskaper, muligheter og begrensninger. Det tas reflekterte valg for når det er hensiktsmessig å ta i bruk et slikt verktøy. Kalkulator, tabeller, lineal og passer er eksempler på slike verktøy (Niss & Jensen, 2002, s. 62).

Niss og Jensen (2002) beskriver at hver kompetanse har en undersøkende og en produktiv side. Den undersøkende siden innebærer forståelse, analyse og kritisk bedømmelse av utførte prosesser og produkter, og den produktive siden består av å gjennomføre de prosessene som kompetansen inneholder (Niss & Jensen, 2002, s. 63-64). Niss og Jensen (2002) mener at for enhver matematisk situasjon en befinner seg i, vil en alltid ta i bruk en eller flere av delkompetansene (Niss & Jensen, 2002, s. 10). De poengterer at en kan besitte en delkompetanse på ulike nivå. En seksåring vil ha en langt mer elementær forståelse enn en elev på videregående, men de kan likevel besitte samme delkompetanse ved ulik grad av oppnåelse. Det er dermed ikke et spørsmål om hvorvidt en besitter en delkompetanse eller ikke, spesielt med tanke på hvor mange aspekter hver delkompetanse har. Forfatterne sier at jo flere aspekter av en delkompetanse en besitter, i desto flere situasjoner kan en ta i bruk delkompetanse. Forfatterne bruker begrepet *dekningsgrad* for å måle hvor mange aspekter en besitter av en kompetanse (Niss & Jensen, 2002, s. 65). Videre vil dette si at det å erverve seg en delkompetanse er en konstant prosess, som gjør at en aldri kan besitte en kompetanse fullt og helt (Niss & Jensen, 2002, s. 70-71). Delkompetansene kan brukes på tvers av årstrinn og matematiske temaer, men kan ikke direkte overføres til andre fagområder (Niss & Jensen, 2002, s. 66).

2.1.2 Trådmodellen til Kilpatrick et al.

Kilpatrick et al. (2001) sin trådmodell er et annet velkjent rammeverk som brukes for å diskutere hva en legger i å mestre matematikk. Som nevnt bruker ikke forfatterne begrepet matematisk kompetanse i sitt rammeverk. I stedet bruker de begrepet «*mathematical proficiency*» som de mener dekker begreper som ekspertise, kompetanse og kunnskap som er nødvendig for å mestre matematikk (Kilpatrick et al., 2001, s. 116). Forfatterne utarbeidet rammeverket på basis av deres varierte erfaringer, hvilken matematikk som skal læres, teori om kognitiv psykologi og matematikkutdannelse, og deres bedømmelse av hvilke kunnskaper, forståelsestyper og ferdigheter mennesker behøver i dagens samfunn (Kilpatrick et al., 2001, s. 115). Som nevnt tidligere, blir rammeverket av Ludvigsen-utvalget brukt som et rammeverk for matematisk kompetanse, selv om forfatterne altså ikke baserer seg på dette ordet. Siden jeg i denne studien har valgt å se på blant annet mestring som tilknyttet matematisk kompetanse, vil jeg videre referere til denne trådmodellen som et rammeverk for matematisk kompetanse.

Kilpatrick et al. (2001) deler *mathematical proficiency* («matematisk kyndighet») inn i fem delkomponenter: konseptuell forståelse, prosedyrekompetanse, strategisk kompetanse, adaptiv resonneringsevne og produktiv holdning. I Ludvigsen-rapporten «Fremtidenes skole» ble begrepene oversatt til forståelse, beregning, anvendelse, resonnering og engasjement (Ludvigsen et al., 2015, s. 57). Grafisk fremstilles delkomponentene som fem sammenvevde tråder, noe som skal illustrere at delkomponentene ikke er uavhengig av hverandre, men at de representerer ulike aspekter av en kompleks helhet. Vi skal nå se kort på hver av trådene.



Figur 2: «Intertwined Strands of Proficiency» (Kilpatrick et al., 2001, s. 118)

Konseptuell forståelse (conceptual understanding) omfatter en integrert forståelse av matematiske konsepter og metoder, hvor man viser forståelse for mer enn kun isolerte fakta og ser viktige matematiske sammenhenger. Et nøkkelbegrep for denne kompetansen er læring *ved* forståelse. En har en dypere forståelse som gir et bedre grunnlag i møte med ukjente situasjoner og ny kunnskap. Kilpatrick et al. (2001) mener at å lære ved forståelse øker sannsynligheten for at en vil bruke kunnskap på en mer korrekt måte, i tillegg til at å se viktige matematiske sammenhenger gjør at en må lære mindre. Forfatterne mener at en god indikator på om en innehar denne kompetansen er at man tar reflekterte valg rundt matematiske representasjoner. Et eksempel kan være at å addere brøker kan regnes ut aritmetisk, ved hjelp av tegning eller ved bruk av konkreter (Kilpatrick et al., 2001, s. 118-120).

Prosedyrekompetanse (procedural fluency) innebærer å ha god kjennskap til, og gode ferdigheter i å utføre og til å ta reflekterte valg rundt bruken av matematiske prosedyrer.
Kilpatrick et al. (2001) mener at det er viktig at elever kan utføre prosedyrer fleksibelt, korrekt og effektivt da det gir flyt i problemløsningen og støtte i ukjente situasjoner. Uten en slik flyt går elever glipp av oppdagelse av viktige matematiske sammenhenger.
Å ha denne kompetansen mener Kilpatrick et al. (2001) gir elever en dypere matematisk forståelse fordi de ser at prosedyrer kan være kraftige hjelpemidler og at matematikk er et velsmurt maskineri. Mangel på denne kompetansen kan føre til feilaktig læring av prosedyrer som over lang tid kan være vanskelig å fjerne. Dette mener forfatterne er med å påvirke elevers syn på relevansen av det de lærer, og at man mister sammenhengen mellom det som læres på skolen og det man møter i hverdagen og dermed påvirker hva elever søker etter å lære på skolen. Kunnskap og bruk av ulike matematiske hjelpemidler er et annet aspekt ved denne kompetansen, og uten dette vil en ikke kunne gjennomføre prosedyrer like fleksibelt, effektiv eller nøyaktig (Kilpatrick et al., 2001, s. 121-123).

Strategisk kompetanse (strategic competence) innebærer å formulere, representere og løse matematiske problemer. Kompetansen øker for hver erfaring man får, som betyr at elever må møte et bredt spekter av matematiske problemer for å utvikle denne kompetansen. Å representere et problem innebærer forståelse for den gitte situasjonen for å kunne identifisere dens nøkkelelementer, og dermed bruke dem for å lage en mental modell. En må da kjenne til ulike matematiske representasjoner og se hvordan de deler like matematiske strukturer. Et nøkkelbegrep ved løsning av matematiske problemer er fleksibilitet. Man må kunne ta i bruk ulike problemløsningsstrategier ved ukjente situasjoner og kunne bruke flere strategier for samme problem. Kompetansen innebærer både rutineproblemer og ikke-rutineproblemer. Å ha denne kompetansen gjør at man kan overvåke egen løsningsprosess og endre strategi for å effektivisere prosessen (Kilpatrick et al., 2001, s. 124-129).

Adaptiv resonneringsevne (adaptive reasoning) er logisk tenkning om forhold i matematiske situasjoner (Kilpatrick et al., 2001). Resonnering innebærer nøye vurdering av alternativer og kunnskap i hvordan en begrunner konklusjoner. Kilpatrick et al. (2001) mener at resonnering i dette tilfelle omhandler formelle og uformelle bevis, i tillegg til intuitive og induktive resonnement. Et viktig aspekt ved denne kompetansen er å kunne begrunne egne løsninger og strategier. Forfatterne argumenterer for at denne kompetansen fungerer som limet i matematikk. Å ha denne kompetansen gir en mulighet til å navigere gjennom fakta, prosedyrer, begreper og metoder og se en forbindelse mellom dem (Kilpatrick et al., 2001, s. 129-131).

Produktiv holdning (productive disposition) innebærer å se på matematikk som fornuftig, nyttig og verdifullt, og at god og jevn innsats i faget vil lønne seg. En slik holdning til faget vil gi en økt motivasjon da en har forståelse for faget og en ser viktige matematiske sammenhenger. Å se at innsats lønner seg vil gi økt selvtillit for egne evner og kunnskap, som er en viktig faktor for motivasjon. Kilpatrick et al. (2001) hevder at mangel på denne kompetansen gjør det utfordrende å utvikle matematisk kompetanse. Det er avgjørende at en ser på matematikk som forståelig og ikke noe tilfeldig, for å utvikle matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001, s. 131-133).

Kilpatrick et al. (2001) er tydelige på at delkompetansene er vevd sammen og gjensidig avhengige i utviklingen av *mathematical proficiency*. Den grafiske fremstillingen med en tråd sammenvevd av fem komponenter er ment å illustrere at å mestre matematikk innebærer en dyp matematisk forståelse, som krever at en klarer å koble sammen kunnskapsbiter. *Mathematical proficiency* er ikke en-dimensjonal, så en kan ikke utvikle dette ved å fokusere på kun noen av delkompetansene. Elever må delta i situasjoner som gir dem mulighet til å utvikle alle delkompetansene (Kilpatrick et al., 2001, s. 116-118).

2.1.3 Sammenligning av de to rammeverkene

Vil nå sammenligne de to rammeverkene presentert ovenfor. I sin artikkel fra 2012 har van Bommel, Liljekvist og Ottersen-Nylund (2012) undersøkt disse to rammeverkene og trukket frem flere sider ved dem som er ulike fra hverandre. I denne artikkelen argumenteres det for at man kan se en forskjell i fokuset til rammeverkene. De mener at Niss og Jensen (2002) har et mer elevsentrert fokus, mens Kilpatrick et al. (2001) er mer instrukssentrert. Bakgrunnen for dette er at Niss og Jensen (2002) ønsker at deres rammeverk skal komme med ideer og inspirasjon, mens rammeverket til Kilpatrick et al. (2001) er en guide for hvordan ha den beste praksisen (van Bommel, Liljekvist & Ottersten Nylund, 2010, s. 2-3).

Generelt kan man si at fremstillingene av rammeverkene viser en ulikhet i avgrensning og forbindelser av delkompetansene. Begge rammeverkene beskriver at delkompetansene avhenger av hverandre og er sterkt forbundet med hverandre. Kilpatrick et al. (2001) fremstiller delkompetansene sine som tråder som er vevd sammen, noe som gir et bilde av en sterk forbindelse mellom delkompetansene. Ikke bare det, men også at det ikke er en klar avgrensning mellom dem. Beskrivelsene av delkompetansene viser felles aspekter på tvers av dem. Niss og Jensen (2001) fremstiller sitt rammeverk som en rose der delkompetansene er roseblader. Fremstillingen deres viser at rosebladene overlapper hverandre noe, men at det allikevel er en klar avgrensning mellom dem. Beskrivelsene av delkompetansene viser få likhetstegn på tvers. På bakgrunn av dette vil rammeverket til Niss og Jensen (2002) muligens være noe enklere å ta i bruk hvis en ønsker å analysere, vurdere eller klassifisere noe ut ifra et rammeverk for matematisk kompetanse.

Niss og Jensen (2002) bruker begrepet *dekningsgrad* som et verktøy for å måle besittelsen av de ulike delkompetansene, ved å se på hvor mange aspekter ved en delkompetanse en besitter (Niss & Jensen, 2002, s. 65). Et lignende begrep finner man ikke i Kilpatrick et al. (2001).

På bakgrunn av de strukturelle ulikhetene presentert ovenfor er en sammenligning av delkompetansene til de to rammeverkene en noe utfordrende oppgave. For å oppnå en dypere forståelse for rammeverkene og hva matematisk kompetanse innebærer, vil jeg likevel gjøre et forsøk på en sammenligning. En slik sammenligning vil uansett være hensiktsmessig for oppgaven videre. Tilnærmingsmåten her vil være å se enkeltvis på delkompetansene («trådene») til Kilpatrick et al. (2001), og beskrive hvilke aspekter av dem vi kan finne igjen i delkompetansene til Niss og Jensen (2002).

Kilpatrick et al. (2001) beskriver hvordan konseptuell forståelse innebærer at en kjenner til, og kan bruke ulike matematiske representasjoner. Dette er forøvrig også et aspekt ved Kilpatrick et al. (2001) sin delkompetanse *strategisk kompetanse*. Denne beskrivelsen kjenner vi igjen fra Niss og Jensens (2002) beskrivelse av deres representasjonskompetanse (Kilpatrick et al., 2001, s. 119-120; Niss & Jensen, 2002, s. 56-58).

Prosedyrekompetansen til Kilpatrick et al. (2001) har to aspekter vi kan finne igjen i to av delkompetansene til Niss og Jensen (2002). En stor del av prosedyrekompetansen er å kunne gjennomføre prosedyrer. Dette ligner på den beskrivelsen Niss og Jensen (2002) har for symbol- og formalismekompetansen, da et aspekt ved den er å kunne gjennomføre matematiske utregninger (Kilpatrick et al., 2001, s. 121-123; Niss & Jensen, 2002, s. 58). Kunnskap om hjelpemidler og ferdigheter i å bruke dem er et annet aspekt ved prosedyrekompetansen. Dette er sentralt i beskrivelsen som gis av hjelpemiddelkompetansen til Niss og Jensen (2002) (Kilpatrick et al., 2001, s. 121-123; Niss & Jensen, 2002, s. 62).

Kilpatrick et al. (2001) sin delkompetanse *strategisk kompetanse* kan vi si omfavner mye av det som inngår i problembehandlingskompetansen og modelleringskompetansen til Niss og Jensen (2002). Likhetstrekkene mellom strategisk kompetanse og problembehandlingskompetansen er at de begge innebærer å kunne formulere og løse matematiske problem, i tillegg til å finne flere strategier eller metoder for samme problem.
Et annet aspekt ved strategisk kompetanse er å lage mentale modeller, som er et av flere aspekt ved modelleringskompetansen til Niss og Jensen (2002) (Kilpatrick et al., 2001, s. 124-129; Niss & Jensen, 2002, s. 52-53).

Delkompetansene *adaptiv resonneringsevne* og *resonnementskompetansen* innebærer hovedsakelig å begrunne og bedømme matematiske strategier og løsninger (Kilpatrick et al., 2001, s. 129-131; Niss & Jensen, 2002, s. 54).

Kilpatrick et al. (2001) sin delkompetanse *produktiv holdning* er en spesiell delkompetanse som omhandler holdning. Ingen av delkompetansene til Niss og Jensen (200) inkluderer holdningsaspektet. På den annen side kan man argumentere for at tankegangskompetansen eller kommunikasjonskompetansen til Niss og Jensen (2002) ikke har åpenbare likhetstrekk med noen av delkompetansene til Kilpatrick et al. (2001).

2.2 Oppgavetyper i matematikk

Jeg ønsker å undersøke elevers tilnærming til matematikkoppgaver i lys av rammeverkene for matematisk kompetanse som ble presentert i det forrige kapittelet. Oppgaver er en sentral del av matematikkfaget i norsk skole, og for mange forbindes matematikk med at man arbeider med å løse oppgaver. Det florerer av mange ulike typer av oppgaver i matematikkfaget; prosedyreoppgaver, problemløsningsoppgaver, utforskningsoppgaver, rike oppgaver og åpne oppgaver, for å nevne noen. Mange mener at det er oppgaver som gir grunnlaget for læring i matematikk (Pettersen & Nortvedt, 2018, s. 950; Sullivan et al., 2013, s. 57; Yeo, 2017, s. 175). Lenge har matematikkundervisningen brukt tradisjonelle oppgaver der målet har vært at elever skal ha kunnskap om og å kunne gjennomføre matematiske prosedyrer og ferdigheter der en kan se på oppgaver som drilloppgaver (Pehkonen, 1997, s. 89; Pettersen & Nortvedt, 2018, s. 950).

Samtidig skjer det stadig endringer i skolens matematikkfag. Som beskrevet i kapittelet om matematisk kompetanse ønsker en å utdanne elever som er matematisk kompetente, og i dette er forståelse er en viktig faktor. Pehkonen (1997) skriver at hvis en ønsker en endring, holder det ikke å fortsette å gjøre det en har gjort i lang tid og kun legge til nye temaer eller prosedyrer, det må skje en helhetlig endring og da spesielt med tanke på hvilke oppgaver en gir (Pehkonen, 1997, s. 89). Også Pettersen og Nortvedt (2018) mener at det ikke holder å komme med endringer i læreplanene hvis en ønsker elever med bredere eller dypere matematisk kompetanse, en må sikre en endring i undervisningspraksisen også (Pettersen & Nortvedt, 2018, s. 950). All undervisningsaktivitet en tar i bruk i ens matematikklasserom må legge til rette for at elevers læring kan bli ført videre, og dette innebærer at elever må få mulighet til å utvikle sin matematiske kompetanse i disse aktivitetene (Kilpatrick et al., 2001, s. 116; Niss & Jensen, 2011, s. 31; Nohda, 2000, s. 41; Pettersen & Nortvedt, 2018, s. 951).

Vi har sett at kunnskap om prosedyrer og ferdigheter til å bruke og gjennomføre dem, er en del av det å ha matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001, s. 121-123; Niss & Jensen, 2002, s. 58), men at det bør betraktes som en relativt liten del av dette. Så det holder ikke å gi elever kun prosedyreoppgaver hvis en ønsker å utdanne matematisk kompetente elever – det må skje en endring i hvilke oppgaver elever møter i matematikklasserommet (Pettersen & Nortvedt, 2018, s. 950).

Ulike oppgavetyper stiller ulike kognitive krav til elevene (Yeo, 2017, s. 175). I forskning Pettersen og Nortvedt (2018) viser til, hevdes det at hvis en ønsker et høyere læringsutbytte, er det avgjørende at elever møter mer kognitivt krevende og komplekse

oppgaver (Pettersen & Nortvedt, 2018, s. 952). Da er det viktig at matematikklærere har kunnskap om ulike oppgavetyper, og hvilke kognitive krav disse stiller, slik at lærerne kan velge passende oppgaver i ulike situasjoner som stimulerer elevenes læring og gir dem mulighet til å utvikle matematisk kompetanse (Pettersen & Nortvedt, 2018, s. 952; Yeo, 2017, s. 176). Pettersen og Nortvedt (2018) mener at rammeverk for matematisk kompetanse er en viktig støtte for lærere for å oppnå mer kunnskap og forståelse for hvilke typer oppgaver elever må møte for å ha mulighet til å utvikle kompetanse (Pettersen & Nortvedt, 2018, s. 952-953).
Åpne og rike oppgaver er relativt nye begreper innenfor matematikkutdanning, og tidligere forskning på spesielt åpne oppgaver har vist at bruk av slike oppgaver kan føre til et høyere læringsutbytte og kan stimulere elevers utvikling av matematisk kompetanse. Vil nå undersøke de to fenomenene, hva de er og hva tidligere studier og andre sier om bruken av slike oppgaver i matematikkundervisningen.

2.2.1 Åpne oppgaver

Når det kommer til definisjon av åpne oppgaver finnes det utrolig mange definisjoner og variasjoner. Vi kan si at åpne oppgaver er et paraplybegrep for mange ulike typer oppgaver, som for eksempel «open-ended» oppgaver, rike oppgaver og problemløsningsoppgaver. Pehkonen (1997) definerer et lukket problem dersom problemets start- og målsituasjon er lukket, det vil si nøyaktig beskrevet, men dersom start- og/eller målsituasjonen ikke er lukket er det et åpent problem.(Pehkonen, 1997, s. 8). Vi ser i denne definisjonen at Pehkonen (1997) mener en kan definere om en oppgave er åpen eller lukket ut ifra hvordan dens startsituasjon og sluttsituasjon er definert. I figur 3 ser vi en oversikt over Pehkonens definisjon med tanke på hvilke typer av oppgaver han legger inn i de ulike variasjonene av åpenhet.

goal situation / starting situation	CLOSED (i.e. exactly explained)	OPEN
CLOSED (i.e. exactly explained)	closed problems	open-ended problems real-life situations investigations problem fields problem variations
OPEN	real-life situations problem variations	real-life situations problem variations projects problem posing

Figur 3: klassifiseringen av problemer i henhold til deres start- og målsituasjoner (Pehkonen, 1997, s. 9)

Vi ser at i rubrikken der startsituasjonen er lukket, men målsituasjonen er åpen, finner vi «open-ended problems». Dette er et velkjent domene innenfor åpne oppgaver og er kanskje det en ofte tenker på når det er snakk om åpne oppgaver. Det er oppgaver som har mer enn et mulig svar (Nohda, 2000, s. 40; Sullivan et al., 2013, s. 57; Yeo, 2017, s. 179). En annen tilnærming til åpenheten av oppgaver er «åpen tilnærmelsesmetode» som både Nohda (2000) og Munroe (2015) beskriver. Munroe (2015) beskriver denne metoden som noe som går utover kun åpenhet av svarene, og inkluderer også åpenheten av løsningsmetode (Munroe, 2015, s. 97-98). Nohda (2000) har disse to forgående aspektene ved sin definisjon av denne metoden, men legger til at en oppgave også kan være åpen med tanke på muligheter for å utvide oppgaven (Nohda, 2000, s. 44).

At det foreligger mange ulike definisjoner av begrepet åpne oppgaver, kan være en utfordring i forskningssammenheng. Yeo (2017) utviklet derfor et rammeverk for å både å ha et felles grunnlag når det kom til forskning og diskusjon rundt åpne oppgaver, men også som et verktøy for å analysere åpenheten av oppgaven. Yeo (2017) mener at oppgaver har fem aspekter ved seg som kan være åpne eller lukket: målet, metoden, kompleksiteten, utvidelsen og svaret (Yeo, 2017, s. 175). En mer utdypende beskrivelse av denne rammeverket kommer senere i dette delkapittelet. Nå ønsker jeg å se på hvorfor det er hensiktsmessig å ta i bruk åpne oppgaver og hvordan en underviser og bruker slike typer oppgaver.

Sullivan et al. (2013) har forsket på bruken av «open-ended problems», og de mener at det å ta i bruk slike typer oppgaver i undervisningen kan fremme handlinger som etterforskning, problematisering, kommunikasjon, generalisering og forståelse av prosedyrer (Sullivan et al., 2013, s. 57). Det er stor forskjell når det kommer til arbeid med åpne oppgaver i forhold til arbeid med lukkede oppgaver. Lukkede oppgaver mener Pehkonen (1997) ikke gir rom for kreativ tenkning, og Yeo (2017) kaller oppgaver der det kun finnes ett svar for prosedyreoppgaver, der hensikten er at elever skal øve på prosedyrekunnskaper. Ved slike oppgaver blir elever kun spurt om å huske en regel eller en prosedyre for å kunne løse den aktuelle typen oppgave (Pehkonen, 1997, s. 8; Sullivan et al., 2013, s. 58; Yeo, 2017, s. 175-176). Yeo (2017) viser til forskning som sier at det å kun kunne ta i bruk prosedyrer ikke strekker til når det en møter nye og ukjente problemer. En må derfor ta i bruk flere oppgaver som stimulerer matematisk tenkning (Yeo, 2017, s. 176). Sullivan et al. (2013) mener at nøkkelelementene for at elever skal oppnå matematisk læring er at de må få muligheten til å vurdere begreper og prosedyrer, ta avgjørelser om prosessen for å løse et problem, vurdere muligheten for at det er flere svar og finne passende tilnærmingsmetoder (Sullivan et al., 2013, s. 58). Sullivan et al. (2013) mener at gode «open-ended problems» kan gjøre at elever får innblikk i viktige matematiske ideer, i motsetning til å kun prøve å huske og bruke regler og prosedyrer (Sullivan et al., 2013, s. 59). Monroe (2015) mener også at ved å arbeide med åpne oppgaver blir elever stimulert til kritisk tenkning, i tillegg til at elevene får se praktiske bruksområder som de kan ta i bruk i sin egen hverdag (Munroe, 2015, s. 98).

Pehkonen (1997) mener at «open-ended problems» motiverer elever til å lære matematikk ved at de igjennom slike oppgaver gjør og lager matematikk selv (Pehkonen, 1997, s. 88). Pehkonen (1997) viser til forskning og annen litteratur der det hevdes at arbeid med åpne oppgaver kan føre til egenskaper som kreativ tenkning, matematisk aktivitet, undersøking, testing, forklaring, utdyping og oppsummering (Pehkonen, 1997, s. 90). Også Nohda (2000) mener at å arbeide med åpne oppgaver og sammenligne ens arbeid med andres kan gjøre at en ser matematiske strukturer og lærer å generalisere (Nohda, 2000, s. 45). Sullivan et al. (2013) spurte matematikklærere hva som var fordelen ved å ta i bruk åpne oppgaver i matematikkundervisningen. Da kom det frem at det ifølge lærerne motiverer elever til å utvide deres tenkning, det støtter kreativitet, åpner opp muligheter, elever tenker dypere og det motiverer elever til å være presise (Sullivan et al., 2013, s. 67).

En annen fordel ved å ta i bruk åpne oppgaver i undervisning er den naturlige differensieringen det kan gi. Sullivan et al. (2013, s. 59) sier at i en heterogen klasse kan alle tilnærme seg en åpen oppgave på ulike måter og på ulike nivåer. Slike oppgaver er generelt mer tilgjengelige for en rekke elever enn lukkede oppgaver (Sullivan et al., 2013, s. 59). En bra åpen oppgave er formulert slik at elever på ulike nivå innenfor en klasse kan løse problemet basert på ens evner, erfaringer og forståelse av det gitte problemet. Oppgaven skal være vanskelig nok til å utfordre høypresterende elever, men allikevel enkel nok til at de lavpresterende elevene kan finne minst én løsning (Munroe, 2015, s. 98). Lærerne Sullivan et al. (2013) intervjuet, mente også at åpne oppgaver er positive å ta i bruk med tanke på differensiering. De nevnte aspekter som at hver elev har en mulighet til å løse oppgaven på sin egen måte, alle opplever noe suksess, kan imøtekomme en rekke av evner, og elever får jobbe på deres eget nivå (Sullivan et al., 2013, s. 67).

Et aspekt som er problematisk ved bruken av åpne oppgaver er det å sikre matematisk kunnskap med tanke på det som kreves ut ifra læreplanen (Sullivan et al., 2013, s. 58). Blant lærerne Sullivan et al. (2013) intervjuet kom dette aspektet frem som en spesiell utfordring lærerne så ved åpne oppgaver: «usikkert hvor mye matematikk som kommer ut av det» (Sullivan et al., 2013, s. 68). Arbeid med åpne oppgaver kan utvikle mange matematiske egenskaper som diskutert ovenfor, men for å sikre at elevene lærer den matematiske kunnskapen læreplanen forventer, må dette implementeres i oppgavene en bruker i undervisningssammenheng. Sullivan et al. (2013) kaller slike oppgaver for *innholdsspesifikke, åpne oppgaver* og definerer dem som oppgaver som har flere mulige svar og løsningsmetoder, de gir innsikt til spesifikke matematiske konsepter ved at elever diskuterer alle mulighetene og identifiserer mønstre i de ulike svarene (Sullivan et al., 2013, s. 58).

Som hevdet tidligere, har det norske matematikklasserommet lenge vært gjennomsyret av tradisjonelle, lukkede oppgaver som en bruker for at elever skal øve seg i å ta i bruk prosedyrer. Undervisning rundt åpne oppgaver er en ny måte å undervise på, og en kan ikke lett overføre praksisen ved bruk av tradisjonelle oppgaver til bruk av åpne oppgaver. Sullivan et al. (2013) mener at det er spesielt viktig når elever arbeider med åpne oppgaver å la dem få utforske oppgavene selv, og ikke gi dem for mye veiledning, da dette kan minimere læringsutbyttet. Dette kommer jeg til å bruke i intervjusituasjonen, for å sikre analyse av flere matematiske kompetanser. Når en skal avgjøre hvordan elever har gjort det ved en oppgave ser en ofte på sluttresultatet, men dette er umulig å gjøre ved mange åpne oppgaver. Sullivan et al. (2013) mener da at en må bruke tid til å hente inn informasjon om elevers prosess og tankegang på en nøyaktig, effektiv og målbevisst måte, slik at en får mer innsikt i elevenes kunnskap og nivå (Sullivan et al., 2013, s. 62-64).

2.2.2 Rike oppgaver

Begrepet rik oppgave, eller et rikt problem, ble introdusert av Hagland, Hedrén og Taflin i 2005 i deres bok «rika matematiske problem». Vi kan si at rike oppgaver er en form for problemløsningsoppgaver der løsningsmetoden er ukjent.
Utdanningsdirektoratet (2015) mener at for at en oppgave skal kunne kalles rik må den oppfylle visse krav og disse kravene er de samme kriteriene Hagland et al. (2005) beskriver i deres bok. En rik oppgave skal introdusere viktige ideer eller løsningsstrategier der elever kan til dels ta i bruk det de har lært fra før, i tillegg til å lære noe nytt i oppgaveløsningen. Oppgavene skal ha en lav inngangsterskel slik at elever uavhengig av faglig nivå kan ha mulighet til å arbeide med oppgaven, men at det allikevel føles som en utfordring for enhver elev. Rike oppgaver skal kunne løses på ulike måter med ulike strategier og representasjoner, og på denne måten sette i gang faglige diskusjoner på grunnlag av de ulike strategiene elever kommer med, som kan føre til at elever formulerer nye problemer ut ifra eksisterende oppgaver. Til slutt skal rike oppgaver kunne være en brobygger mellom ulike fagområder (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005, s. 28-31; Utdanningsdirektoratet, 2015, s. 2).

Som beskrevet i det forrige delkapittelet, brukes begrepet åpne oppgaver av mange som et paraplybegrep for mange typer oppgaver, og rike oppgaver være en oppgavetype som går under denne paraplyen. Den vanlige oppfatningen av rike oppgaver er at løsningsmetoden ikke er satt, men at det finnes et riktig svar.

2.2.3 Rammeverket til Yeo

Yeo (2017) utviklet et rammeverk for å avgjøre åpenheten av matematiske oppgaver ved å bruke fem variabler for bestemmelse av åpenheten til en oppgave: Mål, svar, metode, kompleksitet og utvidelse. Hvis man finner at en oppgave har åpenhet tilknyttet en av disse variablene, mener Yeo (2017) at man også kan gå videre og se på ulike undertyper av åpenhet knyttet til den aktuelle variabelen., men disse variasjonene av åpenhet går jeg ikke inn på.

Yeo sier at en oppgave har et åpent *mål* hvis det i oppgaveformuleringen ikke er spesifisert et mål, og oppgaveløser derfor må velge egne mål å undersøke. Ut ifra denne definisjonen kan vi si at utforskningsoppgaver har et åpent mål, mens problemløsningsoppgave og prosedyreoppgaver har et lukket mål da det er spesifisert i oppgaven (Yeo, 2017, s. 180). Yeo mener en kan si at utforskningsoppgaver har et generelt mål, men det er da prosessorientert: Det er å undersøke eller utforske (Yeo, 2017, s. 180).

Variabelen en ofte tenker på ved åpne oppgaver er oppgavens *svar*. Yeo (2017) definerer at en oppgave har et lukket svar hvis svaret er bestemt og et åpent svar hvis ikke, der det siste innebærer at det ikke er mulig å finne alle korrekte svar på oppgaven (Yeo, 2017, s. 179).

Yeo (2017) definerer *metoden* som lukket i en oppgave hvis det kun finnes en korrekt metode å ta i bruk, eller hvis metoden som kreves kun innebærer kjente rutineoperasjoner. På den andre siden skriver Yeo (2017) at en oppgave har en åpen metode hvis det er mulig å ta i bruk flere ulike løsningsmetoder som innebærer problemløsningsheuristikk, men ikke kjente prosedyrer (Yeo, 2017, s. 182).

En annet aspekt ved oppgaver som kan være åpent, er dens *kompleksitet*. Oppgaver kan være enkle og de kan være kompliserte. Dette avhenger både av oppgaveløseren, alderstrinnet og oppgaveformuleringen. Yeo (2017) skriver at kompleksiteten til en oppgave beskriver hvordan oppgaveløser opplever vanskelighetsgraden, og om at en vet hvor en skal starte (Yeo, 2017, s. 184).

Den siste variabelen Yeo (2017) bruker for å beskrive graden av åpenhet ved en oppgave, er muligheten til *utvidelse*. Yeo (2017) beskriver en oppgave som lukket for utvidelse dersom den ikke kan utvides, eller ikke bør utvides. Men det mener han at en eventuell utvidelse bare vil føre til at det essensielt skapes en ny oppgave som ikke er relatert til den opprinnelige. Oppgavens har en åpen utvidelse, eller åpen for utvidelse, dersom arbeid med den kan føre til at en oppdager underliggende mønstre eller matematiske strukturer i oppgaven (Yeo, 2017, s. 186).

Med tanke på beskrivelsene til Hagland et al. (2005) og Utdanningsdirektoratet (2015) rundt rike oppgaver kan man ut ifra dette rammeverket til Yeo (2017) sette at en *rik* oppgave har spesielt en åpen metode og et lukket svar.

3 Metode

Opprinnelsen av ordet *metode* kommer fra det greske ordet «*methodos*», og betyr «veien til målet» (Johannessen, Tufte & Christoffersen, 2010, s. 29; Kvale, Brinkmann, Anderssen & Rygge, 2015, s. 140). Jeg vil i dette kapitlet redegjøre for valg av metode i studien, samt drøfte studiens troverdighet og etiske perspektiv. Kapittelet avsluttes med en analyse av oppgavene gitt i intervjuene, ut ifra rammeverket til Yeo (2017) som er presentert i kapittel 2.2.3.

3.1 Kvalitative studier

Studiens problemstilling bør være utgangspunktet for valg av forskningsdesign, og en må bruke metoder som besvarer problemstillingen på en pålitelig og troverdig måte (Everett & Furseth, 2012, s. 128; Kvale et al., 2015, s. 140). Da studiens formål er å undersøke *hvordan* elever tilnærmer seg åpne og rike oppgaver, vil det være hensiktsmessig å benytte en kvalitativ tilnærming. Forskjellen mellom kvalitative og kvantitative studier er en byttehandel mellom dybde og bredde, der kvalitative studier gir mulighet til en dypere forståelse (Patton, 1999, s. 257). En kvalitativ tilnærming vil kunne besvare problemstillingen med dybde.

3.1.1 Redegjørelse for valg av metode

Den benyttede metoden i studien er oppgavebasert intervju, der hensikten var å få et dypere innblikk i hvordan elever arbeider med åpne og rike oppgaver. Det ble gjennomført to intervjurunder med de samme intervjuobjektene, for å analysere modning i elevenes tilnærmelser. Sullivan et al. (2013) hevder at å arbeide med åpne oppgaver krever modning og erfaring (Sullivan et al., 2013, s. 60). Perioden mellom intervjurundene skulle gi elevene flere erfaringer med åpne og rike oppgaver. Uforutsigbare hendelser og travle skolehverdager førte til at elevene ikke fikk de erfaringene som det først ble antatt at de kunne få, noe som gav et dårligere grunnlag for å analysere elevenes modning enn planlagt.

Det ble vurdert å benytte en sekundær metode, da det kan være fordelaktig å supplere datamaterialet fra primærmetoden (Everett & Furseth, 2012, s. 129). Sekundærmetoden ville vært deltakende observasjon. Deltakende observasjon brukes når målet for observasjonen ikke er satt, og det finnes en grad av deltakelse (Kleven, 2014, s. 41). Jeg planla å være delaktig i klasserommet under elevenes arbeid med åpne og rike oppgaver, for dermed å innhente ytterligere informasjon. Dette skulle gjennomføres i perioden mellom de to intervjurundene.

En vanlig fallgruve nye forskere havner i ved kvalitative studier, er imidlertid at en innhenter for mye datamateriale. Det er bedre med en dyp forståelse, enn mye datamateriale (Everett & Furseth, 2012, s. 129; Silverman, 2011, s. 44, 55). Til slutt bestemte jeg meg for å droppe sekundærmetoden i dette prosjektet. Vurderingen var at konsentrasjon på intervjusituasjonene ville gi meg tilstrekkelig informasjon om tilnærmingen til elevene.

3.2 Intervju som metode

En benytter seg av intervju dersom en ønsker en dypere forståelse for hvordan mennesker opplever virkeligheten (Dalen, 2011, s. 13; Tjora, 2012, s. 104). Intervju kan gi informasjon om menneskers følelser, erfaringer og tanker (Dalen, 2011, s. 13).

Et dybdeintervju er hensiktsmessig å bruke når en ønsker å oppnå forståelse hvor hvordan et individ opplever virkeligheten og dets refleksjoner rundt dette (Tjora, 2012, s. 105). Et intervju kan være strukturert, delvis strukturert eller ustrukturert (Kleven, 2014, s. 38-39; Kvale et al., 2015, s. 144). Det som skiller de tre variasjonene er i hvor stor grad spørsmålene og rekkefølgen er bestemt på forhånd. Et strukturert intervju gir lite rom for fleksibilitet, mens et ustrukturert kan gjøre det vanskelig å analysere og sammenligne elevarbeidet i ettertid (Kvale et al., 2015, s. 144). Jeg valgte dermed å gjennomføre et delvis strukturert intervju. Dette gav fleksibilitet til å utforske interessante utsagn, men allikevel gav det muligheten for å holde meg til de planlagte oppgavene. En slik fleksibilitet er viktig, da det kan avdekke viktige og interessante forhold (Kleven, 2014, s. 39).

3.2.1 Oppgavebasert intervju

Oppgavebaserte intervju gir mulighet for dyptgripende forståelse av elevers arbeid med matematikk. En får innblikk i elevers prosesser og ikke kun informasjon om hvilke oppgaver elever fikk rett eller galt på (Goldin, 2000, s. 519-520). Som beskrevet i kapittel 2.2.1, kan en ikke bedømme riktigheten av løsningen på åpne oppgaver ved å se på svaret. En må få innblikk i hele løsningsprosessen (Sullivan et al., 2013, s. 62-64).

For å få et mest mulig reelt bilde av elevenes tilnærming til oppgavene gitt i intervjuet, mener Goldin (2000) at det er avgjørende at en ikke gir veiledning og støtte før det er absolutt nødvendig (Goldin, 2000, s. 542). Dette er noe Sullivan et al. (2013) også poengterer ved åpne oppgaver, så jeg hadde dette i tankene under intervjuene og prøvde dermed å være en observatør. Goldin (2000) poengterer viktigheten av opptak og innhenting av elevarbeid for å sikre tilstrekkelig informasjon (Goldin, 2000, s. 519).

3.2.2 Intervjuguide og pilotering

Intervjuformen jeg brukte var semi-strukturert, der det kun var oppgavene som var utformet på forhånd. En god intervjuguide mener Dalen (2011) har tydelige spørsmål som gir rom for unike og utradisjonelle svar (Dalen, 2011, s. 26-28). Da min intervjuguide, se vedlegg 3, består av åpne oppgaver, er det viktig at oppgaveformuleringene ikke er tvetydige, men at de allikevel gir rom for nytenkning.

Det ble gjennomført en pilotering å få informasjon om hvordan oppgavene ville fungere, og hva som eventuelt kunne dukke opp (Dalen, 2011, s. 30-31). En pilotering er også hensiktsmessig for å utvikle mine ferdigheter som intervjuer, da dyktigheten til intervjueren er avgjørende for kvaliteten på intervjuet (Kvale et al., 2015, s. 84, 195). Et semi-strukturert intervju stiller store krav til meg som intervjuer. For å få et fruktbart intervju må jeg ta raske avgjørelser om hvilke elevutsagn jeg vil undersøke, og hvilke forhold det er viktig å få avklart (Kvale et al., 2015, s. 195-196). Tjora (2013) mener at som intervjuer vil en bli mer komfortabel i intervjusituasjonen etter et par intervjuer, og at man da kan frigjøre seg mer og engasjere seg fullt og helt i samtalen (Tjora, 2012, s. 135).

3.3 Datainnsamlingsprosessen

3.3.1 Utvalg

Et viktig aspekt med enhver forskningsstudie er valg av deltakere (Johannessen et al., 2010, s. 103). Hvem deltakerne er trenger ikke være like strengt regulert ved kvalitative studier, der en ikke kan forvente en generaliserbar representasjon (Fangen, 2011, s. 46-47). Hensikten med kvalitative studier er å gå i dybden, og Firebaugh (2008) mener at det derfor er viktigere med et godt utvalg, enn et stort utvalg bestående av upassende deltakere (Firebaugh, 2008, s. 21).

Mitt utvalg, som man kan beskrive som et typisk bekvemmelighetsutvalg, består av fire ungdomsskoleelever der alle går i samme klasse og har samme matematikklærer. Begge kjønn er representert i utvalget.

Jeg introduserte meg for klassen, presenterte studien og forklarte hva det ville innebære å delta i denne studien. Deretter fikk hele klassen informasjonsskriv og samtykkeskjema (se vedlegg 2). Læreren samlet inn samtykkeskjemaene fortløpende de påfølgende dagene. Ut ifra samtykkeskjemaene satte læreren sammen to elevpar som læreren mente kunne fungere sammen.

3.3.2 Gjennomføring av pilotering og intervjuer

Pilotering og intervjuer ble gjennomført i løpet av to måneder, med tre ukers mellomrom mellom de to intervjurundene.

Piloteringen ble gjennomført et par dager før den første intervjurunden. Den ble gjennomført på to elever fra samme årstrinn som elevparene brukt i intervjurundene, men fra en annen klasse og med en annen matematikklærer. Ved intervjurunde 2 ble det ikke gjennomført pilotering, På det tidspunktet var jeg langt sikrere på hvilke oppgaver som ville passe og hvilke situasjoner som kunne oppstå, da jeg etter intervjurunde 1 var blitt kjent med elevene og deres faglige nivå.

Begge intervjurundene ble gjennomført i et grupperom ved siden av elevenes klasserom. Tjora (2013) mener det er viktig at intervjuet foregår på et sted der intervjuobjektene føler seg trygg og avslappet (Tjora, 2012, s. 120). Å få en god relasjon til elevene var viktig for å få dem avslappet slik at de kunne være seg selv, og se at det å snakke åpent og tenke høyt var tillatt (Tjora, 2012, s. 110). Brinkmann og Kvale (2009) mener at basisen en legger de første minuttene i et intervju, er avgjørende for kvaliteten på resten av intervjuet (Brinkmann & Kvale, 2009, s. 160). De første minuttene av intervjuene ble derfor brukt på å bli litt kjent og snakke om hverdagslige ting.

Vi gikk kort igjennom hvordan intervjuet ville foregå, at det ville bli tatt opp lydopptak og elevene fikk stille noen spørsmål. Jeg gjorde det klart for elevene at jeg ønsket at de skulle samarbeide om oppgavene og de ble oppfordret til å tenke høyt. Da det var viktig for meg å se elevenes tilnærmelse til oppgavene mine, ble elevene fortalt at det ble forventet at de skulle prøve å løse oppgavene på egenhånd, uten støtte fra meg. Men det ble poengtert at jeg ville selvfølgelig gi noen hint hvis de sto helt fast. Her er det viktig å ikke gå for langt; støtte fra meg vil påvirke elevenes tilnærmelse og dermed analysen.

Jeg valgte å ikke utdype noe særlig om hvorfor jeg ønsket å observere elevene når de løste oppgavene, da dette kan påvirke informantenes svar.

Hvert av de fire intervjuene varte i overkant av 45 minutter. Elevene fikk oppgavene i samme rekkefølge, slik at den mest kompliserte oppgaven kom til slutt. Dermed kunne jeg regulere tiden med tanke på tidsbruk ved de andre oppgavene, oppfølgingsspørsmål og støtte til den siste oppgaven.

Elevene fikk beskjed om å ta med alt av skrivesaker og hjelpemidler de ønsket, nødvendige hjelpemidler ble så utdelt ved starten av intervjuet. Jeg fortalte igjen at det ble tatt lydopptak og la lydopptakeren foran dem slik at det ble tatt opp god lyd av det de gjorde. De fikk utdelt ark av meg som de kunne bruke til å kladde eller skrive ned løsninger og gav beskjed om at jeg kom til å samle inn alt etter at intervjuet var slutt.

3.4 Forskningsetiske betraktninger

Relabilitet og validitet

Reliabilitet og validitet er viktige aspekter innenfor enhver forskningsstudie, og kalles ofte pålitelighet og troverdighet. De er indikatorer på kvaliteten til forskningen (Tjora, 2012, s. 202), der relabilitet relateres til en intern logikk gjennom hele forskningsprosessen, mens validitet handler om en logisk sammenheng mellom studiens utforming, funn og de spørsmålene en ønsker svar på (Tjora, 2012, s. 202).

Reliabilitet omhandler kvaliteten på funnene og gjennomføringen. Dette har å gjøre med om en ville fått det samme resultatet hvis andre forskere ved andre tidspunkt hadde gjennomført lik datainnsamling og analyse (Johnson, 2013, s. 279; Kvale et al., 2015, s. 276; Larsen, 2017, s. 93). Reliabilitet er en viktig faktor innenfor kvantitative studier, men det er tilnærmet umulig å få til dette ved kvalitative studier, da ingen forskere er nøytrale og objektive gjennom hele prosessen, og en vil analysere ulikt (Kvale et al., 2015, s. 276; Larsen, 2017, s. 93; Tjora, 2012, s. 203). Ved å gi en detaljert beskrivelse av prosessen, konteksten og fremgangsmåter kan en styrke studiens pålitelighet (Johannessen et al., 2010, s. 230; Johnson, 2013, s. 306-307). Har prøvd å gi en tilstrekkelig beskrivelse av datainnsamlingen og behandlingen slik at lesere kan få tilstrekkelig innblikk og forståelse for å bedømme resultatene (Tjora, 2012, s. 205).

Validitet omhandler i hvilken grad metodene en tar i bruk måler det en skal undersøke, og hvordan funnene reflekterer det fenomenet en undersøker (Johnson, 2013, s. 299; Kvale et al., 2015). Det er flere faktorer som kan styrke validiteten, ønsker å se på overførbarhet og forskerbias.

Som nevnt kan en ikke forvente generaliserbare resultater ved kvalitative studier (Johnson, 2013, s. 306). Mitt utvalg er heller ikke representativt for en større populasjon, da jeg kun har intervjuet fire elever som alle går i samme klasse og har samme matematikklærer. Men allikevel kan min studie og mine resultater hjelpe forskere og lærere til å forstå hvordan elever tilnærmer seg åpne og rike oppgaver, og hvilke matematiske kompetanser som kan komme til uttrykk ved å ta i bruk slike oppgaver. Som ved mange kvalitative studier er formålet her å beskrive et eksisterende fenomen.

Patton (1999) mener at enhver studie der forskeren og forskningsobjektet interagerer risikerer en at forskningsobjektets handlinger blir påvirket (Patton, 1999, s. 1202) i tillegg til at analyse og tolkning av data vil alltid variere da enhver forsker har ulik bakgrunn og erfaring som påvirker analysen (Johannessen et al., 2010, s. 229). Jeg tror allikevel at interaksjonen mellom meg og elevene under intervjusituasjonene ikke spiller en stor rolle når det kommer til hvilke kompetanser som kommer til syne i elevenes tilnærming til oppgavene, foruten de gangene elevene behøvde veiledning og hjelp. Analyseresultatene vil være unike for meg og jeg er klar over at andre ville tatt ulike valg med tanke på registrering av kompetanser.

Etiske betraktninger

Alle forskningsprosjekter må meldes inn til Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD) og godkjennes før en kan starte datainnsamlingen. Søknaden min ble vurdert av NSD, og jeg fikk tilbakemelding om at innsamlingen og håndteringen av datamaterialet blir håndtert etter deres kriterier, (se vedlegg 1). Jeg kunne da starte datainnsamlingen. All deltakelse i forskningssammenhenger skal være bygget på samtykke og denne samstykkelsen skal være gitt frivillig og basert på god informasjon og ikke minst forståelse (Befring, 2015, s. 31). Dette prøvde jeg å ha i tankene under hele datainnsamlingen. Som beskrevet i gjennomførelsen dro jeg til skolen for å dele ut informasjonsskriv og samtykkeskjema, der jeg fortalte elevene hva min forskningsstudie gikk ut på og hva det ville innebære å delta i min studie. Jeg prøvde overfor elevene, og læreren, å være klar på at dette var frivillig. I informasjonsskrivet (se vedlegg 2) ble det også godt informert, og det stod eksplisitt at det ikke ville få noen konsekvenser for elevene om de valgte å ikke delta, eller om de etter gitt deltakelse i intervju trakk seg fra studien. Det ble også gjort klart for elevene, både muntlig og i informasjonsskrivet, at det ble tatt opp lyd av intervjuene, men at alt ville bli anonymisert og behandlet konfidensielt (Befring, 2015, s. 32). Da alle deltakerne var over 15 år fikk de selv gi skriftlig samtykke.

Informasjonsskrivet ble utformet med et forenklet språk, slik at jeg sikret meg at elevene hadde god forståelse om hva som stod der, slik at samtykke ble bygget på forståelse. Befring (2015) skriver at det kan være spesielt utfordrende å sikre helt frivillig samtykke fra barn, da det ikke er like lett for dem å si nei til en autoritær voksen, som meg eller matematikklæreren deres. Det er derfor viktig å klare å kommunisere til dem at dette er helt greit å si nei, og bruke et språk de forstår (Befring, 2015, s. 32).

3.5 Analysemetode

3.5.1 Analytiske verktøy og gjennomføring

Da studien min dreier seg om å undersøke hvilke matematiske kompetanser som kommer til syne når elever tilnærmer seg åpne og rike oppgaver, må jeg se etter bevis for matematisk kompetanse i elevenes uttalelser. Da datainnsamlingen var over startet jeg å transkribere lydopptakene fra de fire intervjuene.

I teorikapittelet har jeg presentert hver delkompetanse innenfor de to rammeverkene hver for seg, og ut ifra denne beskrivelsen til Niss og Jensen (2002) og Kilpatrick et al. (2001) utarbeidet jeg et analyseverktøy. Jeg laget en skjematisk oversikt over de ulike delkompetansene, hva som inngår i de ulike og konkrete aspekter en kan se etter ved delkompetansene. Dette ble brukt som en kodingsmanual, der jeg markerte setninger og sekvenser fra transkriberingen med koder fra rammeverkene. Jeg gikk systematisk igjennom oppgavene og elevparenes tilnærming, og kodet for ett og ett rammeverk om gangen.

Jeg så det også som nødvendig å analysere oppgavene som ble brukt under intervjuene, da de i seg selv representerer data. Jeg tok i da bruk rammeverket til Yeo (2017), som er beskrevet i delkapittel 2.2.3, og analyserte oppgavene mine ut ifra de fem variablene Yeo (2017) beskriver. Jeg valgte dette rammeverket fremfor rammeverket til Pehkonen (delkapittel 2.2.1) fordi Yeos rammeverk baserer seg på bruk av flere variabler jeg vurderte som relevante for min studie.

I kvalitative studier har man ofte et stort datasett som i starten kan virke uoversiktlig, og en vet ikke helt hvor en skal starte for å finne relevant informasjon i materialet. Som Larsen (2017) skriver, bør man ta i bruk systematisk analyse for å finne mønstre og sammenhenger. Hun mener at i kvalitative studier har man tre hovedfaser ved analysen: koding, kategorisering og å finne mønstre (Larsen, 2017, s. 113-114). Ved å kode og kategorisere datamaterialet kan en luke bort data som er overflødig. I en intervjusituasjon vil en få mye informasjon, og en del av dette kan ikke brukes videre. Når det kommer til koding kan man skille mellom to typer: deduktiv koding og induktiv koding. Induktiv koding innebærer å lage koder ut ifra det datamaterialet man har, mens deduktiv koding, som ofte kalles teoridrevet innholdsanalyse, har koder som er utviklet fra allerede eksisterende teori (Fauskanger & Mosvold, 2014, s. 130, 135). Da jeg skal se etter forekomst av matematisk kompetanse i transkriberingen av intervjuene, er det naturlig å ta i bruk deduktiv koding, i form av de to rammeverkene av Kilpatrick et al. (2001) og Niss og Jensen (2002).

3.5.2 Presentasjon og kategorisering av oppgavene

I dette delkapittelet skal jeg presentere og kategorisere oppgavene brukt i denne studien. Innholdet i dette delkapitlet dreier seg ikke kun om metode, men det er likevel naturlig å ta det med her. Hovedmålet er å beskrive i hvilken grad de valgte oppgavene er åpne, og derigjennom begrunne den valgte sammensetningen av oppgaver. Oppgavene utgjør analyseverktøyet mitt, så slik sett er denne kategoriseringen av oppgavene en del av metodearbeidet i min studie.

Delkapittel 2.2.3 presenterer et rammeverk for klassifisering av oppgaver utformet av Yeo (2017). Hensikten bak rammeverket er å hjelpe lærere til å forstå ulike oppgavetyper, og å definere teoretisk hvor grensene for åpne oppgaver går med tanke på forskning (Yeo, 2017, s. 176). Som nevnt i kapittel 2, legger Yeo til grunn at en oppgaves grad av åpenhet kan klassifiseres ved fem variabler: svar, mål, metode, oppgavens kompleksitet og mulighet for utvidelse.

Det ble brukt seks ulike oppgaver i denne studien. Disse vil nå bli presentert i kronologisk rekkefølge, der oppgave 1.1 referer til første oppgave ved første intervjurunde. Presentasjonene her er relativt korte. For full informasjon om oppgavene, se vedlegg 3.

Oppgave 1.1

«Ovenfor ser dere en stabel av krakker. Hver krakk er 49 cm høy. Når to krakker stables, er stabelen 55 cm høy. Finn høyden fra gulvet til toppen av den øverste krakken når 6 krakker stables»

Denne oppgaven har et lukket mål, da målet er presisert i oppgaveformuleringen: «finn høyden...» (Yeo, 2017, s. 181-182). Det finnes kun et korrekt svar på denne oppgaven, så det er dermed mulig å finne alle korrekte svar. Oppgavens svar er dermed lukket (Yeo, 2017, s. 179). Også metoden er lukket, da det essensielt kun finnes en korrekt metode å bruke for elevene, og den ikke innebærer problemløsning (Yeo, 2017, s. 182). Kompleksiteten er lukket, da elevene får nok informasjon for å løse oppgaven og det skal ikke være vanskelig for elevene å løse den (Yeo, 2017). Jeg vil derimot si at utvidelsen til oppgaven er åpen, da det å utvide oppgaven ved å endre noen av forholdene kan føre til at elevene ser et mønster og dermed kanskje lager en generell formel (Yeo, 2017, s. 186).

Oppgave 1.2

I denne oppgaven fikk elevene utdelt et rutenett med en figur.

a) «*Gi en forklaring på hvordan du kan finne arealet til figuren ovenfor*»

Målet med oppgaven var at elevene skulle finne en metode for å finne arealet til figuren. Dette står eksplisitt i oppgaveformuleringen, som angir et lukket mål ut ifra kriteriene.
Figuren elevene skulle finne arealet til, var en sammensatt figur, og det er mange måter en kan finne ut dens areal. I tillegg finnes det mange måter elever kan gi en slik forklaring på, det vil være umulig å finne alle korrekte svar. Dette gjør oppgaven åpen når det kommer til svaret.
Å løse oppgaven krever problemløsning, da en må undersøke hvordan en kan gå frem. Det er ikke oppgitt noen tall, og det er en sammensatt figur. I tillegg til at det ikke finnes en korrekt løsningsmetode, er altså oppgaven også metodemessig åpen. Til tross for mangel på tall, består figuren av ruter som gir elevene den informasjonen de behøver for å løse oppgaven. Ut ifra dette kriteriet er kompleksiteten lukket i denne oppgaven.

Utvidelsen er åpen, da en kan stille spørsmål som: «*hva hvis figuren var dobbel så stor?*» eller «*hva hvis vi legger til et kvadrat?*», som kan gjøre at elever oppdager viktige strukturer og sammenhenger innenfor areal.

b) «*Hvis dere kan klippe i dette arket, hvordan kan dere gjøre om denne figuren slik at omkretsen til figuren blir størst mulig? Slik at den blir minst mulig?*»

Målet med denne oppgaven var å endre figuren slik at omkretsen ble størst eller minst mulig, og dette oppdraget sto eksplisitt i oppgaveteksten. Så dermed er målet lukket. Svaret til oppgaven er også lukket, da det finnes en korrekt måte å gjøre omkretsen størst mulig på, og en korrekt måte å gjøre den minst mulig. Det kreves problemløsning for å løse oppgaven, ikke bare en korrekt metode, dermed er metoden åpen. Elevene får lite informasjon for hvordan en skal gå frem for å løse oppgaven. Jeg vil derfor hevde at kompleksiteten til oppgaven er åpen, da det vil være utfordrende for flere å komme i gang med denne oppgaven. Min vurdering er videre at utvidelsen til oppgaven er åpen, da elever kan oppdage viktige strukturer og sammenhenger for både omkrets og areal. En kan stille spørsmål som for eksempel: «*hva hvis den originale figuren ser slik ut?*», og endre noen av de originale forholdene.
Denne oppgaven kan man kalle for en *rik* oppgave da den har et lukket svar, men en åpen metode.

Oppgave 1.3

«*I en landsby som heter Grønndal herjet det en stor storm som ødela store deler av landsbyen. Borgermesteren bestemte seg da for å plante et tre for å markere denne dagen. De plantet treet i et bed som var 4 ganger 1 meter som er tegnet på dette arket. Borgermesteren ønsker også å legge en ramme med stener rundt dette bedet hvert år, slik at en kan telle seg tilbake til hvor mange år det er siden stormen herjet og da hvor mange år treet er. På arket her ser dere tegninger for år 0, 1 og 2. År 0 er da treet blir plantet og år 1 er når en legger den første rammen rundt bedet. Rammen skal bestå av stener som er 0.5 meter ganger 0.5 meter og borgermesteren ønsker å bruke både røde og hvite stener hvert år. Borgermesteren ønsker å lage et mønster på denne plattingen som rammene etterhvert utgjør. Det skal være et gjenkjennbart mønster slik at innbyggere og andre kan se hvilke stener som kommer neste år.*»

a) «*Første oppdrag er å lage et slikt mønster*.»

Denne oppgaven vil ikke bli brukt i analysesammenheng og vil dermed heller ikke bli analysert her.

b) «*Borgermesteren ønsker å bestille stener for de 5 første årene på en gang. Hvor mange stener trenger han å bestille da?*»

Her jobber elevene ut ifra mønsteret de laget i oppgave a). Målet med oppgaven er å finne hvor mange stener en behøver for de 5 første årene. Da dette står eksplisitt i oppgaveteksten, er målet lukket ut ifra kriteriene i Yeos rammeverk.

Til tross for at oppgaven kun har et korrekt svar ut ifra mønsteret elevene har laget, er det likevel opplagt at en ikke kan finne alle mulige svar på denne oppgaven. Grunnen er at en kan lage utallige ulike mønstre, oppgaven må her ses i sammenheng med deloppgave a). Jeg mener derfor at svaret til oppgaven bør klassifiseres som åpent. Da mønsteret vil utvide seg hvert år og en må bruke to stenfarger, er det ingen lett metode for å løse denne oppgaven. Dette er altså en problemløsningsoppgave med mange løsningsmetoder, metoden er dermed åpen. Elevene får ingen informasjon om hvordan en kan gå frem, de må ta i bruk mønsteret og tegningene for de tre første årene. Da elevene ikke visste hva valg av mønster under a) ville bringe, kan det være utfordrende for elevene hvis mønsteret deres er komplisert. Jeg mener derfor at kompleksiteten er åpen. En kan utvide oppgaven ved å spørre: «*hva hvis* *borgermesteren skal bestille etter 8 år? Etter n år?*». Dette gjør at elevene kan finne matematiske mønstre i bestemmelsen av antall stener etter forskjellige år, og dermed er også utvidelsen til oppgaven åpen.

c) «*Kan dere lage en formel for hvor mange stener borgermesteren behøver å bestille etter n år?*»

Målet til oppgaven står eksplisitt i oppgaveformuleringen: *«lag en formel»*. Dette gjør målet til oppgaven lukket. Jeg mener også her at siden elevene kan lage utallige mønstre på plattingen, vil det gi utallige svar/formler på denne oppgaven, som ut ifra kriteriene til gjør at svaret til oppgaven åpent. En kan ikke bruke kun rutineferdigheter for å lage en formel, det krever problemløsning. Da det i tillegg finnes mange metoder for å finne en formel, gjør dette at metoden er åpen. Elevene får i liten grad informasjon som er tilstrekkelig til å løse oppgaven. Å lage en formel er utfordrende, og vanskegraden vil avhenge av valget elevene selv har gjort under a). Jeg klassifiserer derfor kompleksiteten til oppgaven som åpen. Utvidelse av oppgaven er også åpen, da en kan stille spørsmål som: *«hva hvis du kun skulle finne de hvite stenene?»* eller *«hva hvis vi tar bort en rad?»*, som kan gjøre at elever oppdager viktige matematiske sammenhenger når det kommer til det å lage og endre formler ut ifra gitte kriterier og informasjon.

Oppgave 2.1

I denne oppgaven fikk elevene utdelt et kvadrat som besto av 81 ruter. Rammen til kvadratet var markert blå.

a) «*Hvor mange ruter består rammen av?*»

Målet til oppgaven er klart lukket, da det er å finne ut hvor mange ruter rammen består av, som står presisert i oppgaveformuleringen. Svaret er også lukket da det kun finnes ett svar på hvor mange ruter den blå rammen består av.

Til tross for at det ved første øyekast kan virke som om metoden til oppgaven er lukket, vil jeg argumentere for at den er åpen. Dette på grunnlag av at det å finne ut hvor mange ruter rammen består av, krever mer enn rutineferdigheter. Grunnen er at en ikke bare kan gange to sider av kvadratet sammen, da får man for mange ruter, eller gange en side med fire. I tillegg finnes det mange ulike løsningsmetoder, noe som gjør at metoden til oppgaven er åpen. Elevene får all den informasjonen de behøver for å løse oppgaven, som er kriteriet for at kompleksiteten til en oppgave er lukket.

Utvidelsen til oppgaven er klart åpen, da en kan stille spørsmål som: *«hva hvis kvadratet består av 36 ruter?»* eller *«hva hvis dette var et rektangel?»*. Slike spørsmål kan føre til at elevene oppdager viktige matematiske sammenhenger om geometriske figurer og areal.
Man kan kalle denne oppgaven for en *rik* oppgave da den har en åpen metode og et lukket svar.

b) og c) «*Hvor mange ruter består rammen av, når kvadratet består av 16/32 ruter?*»

Disse oppgavene er tilnærmet lik oppgave a), så jeg henviser til analysen av den oppgaven. Analysen av b) og c) vil være tilsvarende. Det vil si at begge disse deloppgavene også er *rike* oppgaver.

d) «*Hvor mange ruter består rammen av, når kvadratet består av n ruter?*»

Her kan man si at målet med oppgaven er skjult i oppgaveteksten, og ikke skrevet eksplisitt. Målet er å lage en formel og dette står ikke spesifisert i oppgaveformuleringen. Målet er dermed åpent. Svaret er lukket fordi det finnes et begrenset antall korrekte løsninger, altså formler. Metoden for oppgaven er åpen fordi det krever problemløsning, og det finnes flere korrekte løsningsmetoder. Kompleksiteten er åpen da elevene ikke får tilstrekkelig informasjon for å løse denne oppgaven, og for mange elever vil en slik oppgave være krevende.

Utvidelsen til oppgaven er åpen, da en kan stille spørsmål som: *«hva hvis dette var et rektangel?»*. På lik linje som de forrige deloppgavene har denne også en åpen metode og et lukket svar, som gjør at denne deloppgaven og da hele oppgaven i seg selv er en *rik* oppgave.

Oppgave 2.2
«Nedenfor ser dere fire like store kvadrater, alle har sidelengde lik 1. Alle inneholder blå sirkler som berører hverandre, men ikke overlapper hverandre. I hvilken av de fire figurene er det blå arealet størst?»

Målet med denne oppgaven er å finne ut i hvilken av figurene det blå arealet er størst. Da dette er presisert i oppgaveformuleringen, er målet lukket. Det finnes kun ett svar på oppgaven, det vil si at svaret også er lukket. Metoden er derimot åpen, da det ikke finnes en entydig korrekt løsningsmetode, og man må ta i bruk problemløsning for å løse oppgaven.

Selv om elevene rent matematisk får nok informasjon til å regne ut arealet til figurene, kan akkurat dette være utfordrende å innse, da elevene ikke får noe informasjon om hvordan de kan *bruke* informasjonen for å finne en løsning på oppgaven. Jeg mener derfor at kompleksiteten til oppgaven er åpen.

Utvidelsen til oppgaven er åpen, da det er mange tilleggsspørsmål en kan stille elevene for å få dem til å oppdage viktige matematiske sammenhenger innenfor areal og geometri. For eksempel *«hvordan finne arealet til en lignende figur bestående av n sirkler?»*.

Man ser her hvordan metoden til oppgaven er åpen, men svaret er lukket som er beskrivelsen på en *rik* oppgave.

Oppgave 2.3

«Den engelske vindusfabrikken «Happy Windows» produserer vinduer i mange ulike fasonger og størrelser. Prisen på hvert vindu fastsettes ut fra arealet av vinduet og lengden av innramming som trengs. Prisen oppgis i britiske pund, £. Kan dere finne ut hvordan de har fastsatt prisene på vinduene på bildet?»

Målet ved oppgaven er å finne ut hvordan fabrikken bestemmer prisen på vinduene. Dette står presisert i oppgaveformuleringen, noe som tilsier at målet er lukket. Svaret er også lukket, da det kun finnes én korrekt måte som firmaet bestemmer prisen på. Det er umulig å finne ut hvordan firmaet fastsetter pris ved kun rutineferdigheter, dette krever problemløsning da en må finne mønsteret i prisene på vinduene. Det finnes også flere løsningsmetoder, og dermed er metoden åpen.

Oppgaveformuleringen gir elevene mye informasjon, men jeg vil hevde at denne informasjonen ikke er tilstrekkelig for å løse oppgaven. Denne oppgaven krever mye av elevene og jeg vil dermed si at kompleksiteten er åpen. Man kan utvide denne oppgaven på ulike måter som kan bidra til at elever får en dypere forståelse for variabler, areal og omkrets. Dette kan gjøres ved å stille spørsmål som: *«hva hvis prisen på rammen kostet dobbelt så mye som prisen for vindu?»*?

Man kan klassifisere denne oppgaven som en *rik* oppgave da metoden er åpen og svaret er lukket.

4 Resultater

I dette kapittelet skal jeg analysere datamaterialet fra intervjuene, ut ifra rammeverkene til Niss og Jensen (2002) og Kilpatrick et al. (2001). Målet er å identifisere hvilke kompetanser som kommer til syne i elevenes tilnærmelser. Rekkefølgen av analysen vil skje i henhold til rekkefølgen av intervjuene og oppgavene som ble gitt. For å se oppgavene i sin helhet, se vedlegg 3. Alternativt, se kapittel 3.5.2 for en kort presentasjon.

Jeg vil presentere utdrag fra transkriberingen for hver besvarelse. Jeg beskriver så ut ifra disse utdragene hvilke kompetanser man kan identifisere i elevenes uttalelser. I løpet av en besvarelse vil kompetanser gjenta seg ved flere anledninger, men jeg vil ikke primært fokusere på hyppigheten av kompetansene. I stedet vil jeg fokusere på *hvilke* kompetanser elevene bruker i tilnærmingen til de ulike oppgavene.

4.1 Intervjurunde 1

Denne intervjurunden ble gjennomført et par dager etter piloteringen av intervjuguiden. Jamfør kapittel 3. Oppgavene som ble gitt her er oppgave 1.1 – 1.3.

4.1.1 Elevpar 1

Fra første stund virket det som om elevparet hadde et godt forhold seg imellom, og at de samarbeidet godt sammen. Dette kommer tydelig frem i oppgavebesvarelsene, da de sjeldent arbeider på egenhånd, ofte drøfter med hverandre, og ikke er redde for å stille spørsmål ved den andres tanker og løsningsforslag. For enkelhets skyld vil jeg kalle elevene i dette elevparet for E1 og E2.

Oppgave 1.1

E1 starter med å lese oppgaveteksten høyt. Deretter kommer følgende dialog:

E2: ok, den minus den?

E1: ja, ikke sant. De ganges med seks på en måte

E2: ok, så 55 minus 49 er jo 6

E1: 6 ganger 6, ikke sant? Det er 6 krakker, 36

E2: 36, også må vi plusse på 49 fordi det er den første her

E1: 85

E2 sier: «den minus den?», fra denne korte uttalelsen kan man finne bevis for flere kompetanser.

Tankegangskompetansen til Niss og Jensen (2002) innebærer å stille karakteristiske, matematiske spørsmål og å kjenne til naturen av svar et matematisk spørsmål trenger (Niss & Jensen, 2002, s. 47-48). Jeg vil hevde at E2 viser evner til begge disse aspektene, fordi spørsmålet er matematisk, og det kan virke som om E2 har forståelse for hvilken type svar dette problemet trenger.

Uttalelsen til E2 viser også bevis for Kilpatrick et al. (2001) sin delkompetanse *strategisk kompetanse*, som innebærer å identifisere og løse matematiske problem, i tillegg til å lage seg mentale modeller i problemløsningen (Kilpatrick et al., 2001, s. 124-129). Selv om man ikke kan få direkte innsyn i elevers tanker, kan man allikevel tenke seg at E2 ser for seg i hodet hvordan man løse denne oppgaven og dermed danner seg en mental modell. *Modelleringskompetansen* til Niss og Jensen (2002) inkluderer mentale og konkrete modeller (Niss & Jensen, 2002, s. 52-53).

Niss og Jensen (2002) definerer et matematisk problem som et matematisk spørsmål der en må ta i bruk problemløsning og aktivisering av rutineferdigheter ikke strekker til (Niss & Jensen, 2002, s. 49-50). Hva man opplever som et matematisk problem er individuelt, men ved å undersøke denne oppgaven ser man at en kan løse oppgaven ved å kun aktivere rutineferdigheter. Vi kan derfor ikke registrere *problembehandlingskompetansen* da oppgaven ut ifra definisjonen ikke er et matematisk problem.

Kommunikasjonskompetansen til Niss og Jensen (2002) innebærer å sette seg inn i andres matematiske utsagn, og selv kunne uttalelse seg matematisk (Niss & Jensen, 2002, s. 60-61). Begge disse aspektene kan registreres her. Ved at E2 går rett på et løsningsforslag, har vi et tegn på forståelse for oppgaveteksten, som er en form for et matematisk utsagn. Dermed har E2 satt seg inn i et skriftlig matematisk utsagn, oppgaveteksten. E2 stiller et spørsmål til E1, som viser at E2 kan uttrykke seg matematisk. Vi kan se videre i oppgaveløsningen flere sekvenser der vi kan registrere denne kompetansen.

Man kan også identifisere *prosedyrekompetansen* til Kilpatrick et al. (2001), da elevene tar i bruk flere prosedyrer i form av flere regnearter, og utfører dem korrekt og effektivt (Kilpatrick et al., 2001, s. 121-123). Å utføre matematiske utregninger hører også til under *symbol- og formalismekompetansen* til Niss og Jensen (2001), der det er beskrevet som å bruke og utføre symbolholdige uttrykk, i tillegg til å ha et matematisk språk (Niss & Jensen, 2002, s. 58). Elevene behandler enkle symbolholdige uttrykk og har et enkelt matematisk språk.

Når elevene hadde kommet frem til en løsning, ønsket de å sjekke om løsningen deres var riktig:

E2: hver krakk er 49 cm høy, så da blir den første 49 det vet vi. Og når det er to sammen så blir det 55. Så da vet vi at for hver nye krakk så blir det pluss 6 centimeter. Og det er 6 krakker. Men jo. Fordi når det er 6 krakker så vil den nederste ikke har pluss 6 den også

E1: ja, så da blir det minus 6

E2: så det blir jo 5 ja

E1: så det er 74

E2: så det blir 79

E1: nei, ja, 79

E2: 79 centimeter, ikke sant?

E1: ja, det er det

I denne sekvensen ser vi at elevene oppdager at løsningen er feil, da de går igjennom sin egen oppgaveløsning. Et aspekt ved *resonnementskompetansen* til Niss og Jensen (2002) er å følge og bedømme andre, og egne, matematiske resonnement (Niss & Jensen, 2011, s. 54). Her følger og bedømmer elevparet sin egen løsning. Et annet aspekt ved denne delkompetansen handler om å overbevise seg selv og andre om ens løsning (Niss & Jensen, 2011, s. 54). Vi kan si at E2 overbeviser E1, der E1 først sier: «så det er 74». Da sier E2: «så det blir 79» og E1: svarer: «nei, ja, 79». Ved å gå igjennom egen oppgaveløsning for å undersøke om løsningen er korrekt, overbeviser man seg selv om gyldigheten av løsningen. Som diskutert i kapittel 2.1.3, er resonnementskompetansen svært lik *adaptiv resonneringsevne*. Denne kompetansen innebærer også å begrunne egen løsning, men inkluderer i tillegg det å vite *hvordan* en begrunner egen løsning (Kilpatrick et al., 2001, s. 129 - 131).

Elevenes arbeid med denne oppgaven gav bevis for flere kompetanser med ulik dekningsgrad. Dekningsgrad av kompetansene er avhengig av antall aspekter av kompetansen som kommer til syne i elevenes uttalelser (Niss & Jensen, 2002, s. 66). Når det kommer til adaptiv resonneringsevne ser vi at elevene ikke har full dekningsgrad av kompetansen. Analysen viser at elevene kun klarer begrunne egen løsning, og ifølge Kilpatrick et al. (2001) innebærer kompetansen også å vurdere alternativer (Kilpatrick et al., 2001, s. 129-131), som man ikke kan se i elevenes løsning. På den andre siden er dekningsgraden til kommunikasjonskompetansen til Niss og Jensen (2002) full, da vi kan registrere både den mottakende og uttrykkende siden.

Oppgave 1.2

a) Elevene får utdelt oppgaveteksten sammen med en figur, og leser den hver for seg. Dette er de første uttalelsene etter at de har lest oppgaven:

E2: vi skal finne arealet. Dele den opp sånn da

E1: trekant der

E2: firkant der, trekant der og trekant der. Dette her blir en firkant

E1: da deler vi opp figuren da?

E2: ja, så da regner vi ut den første

E1: 1, 2, 3, 4

E2: ja, men er den er liksom regnet som det samme

Utregninger

E2: Så er det bare å plusse sammen, så får man 24, 30

E1: 30 ruter ja

E2: 30 ruter i andre ja. Det virker riktig

Kommunikasjonskompetansen er like fremtredende i disse elevuttalelsene som ved de forrige oppgavene, med de samme aspektene som tidligere. Elevene klarer å sette seg inn i andres matematiske utsagn, har en matematisk diskusjon dem imellom og klarer å uttrykke seg matematisk.

Kompetansene *strategisk kompetanse* og *problembehandlingskompetanse* involveres her ved at elevene klarer å identifisere problemet og å løse det. Jeg mener at siden elevene må dele opp figuren for å finne arealet, kan en ikke løse oppgaven ved kun å aktivere rutineferdigheter, det trengs problemløsning av et slag. Dette gjør at denne oppgaven, ifølge definisjonen til Niss og Jensen (2002), er et matematisk problem.

Elevene danner en modell da de deler opp figuren i mindre deler, finner arealet for de ulike delene, og legger dem så sammen for å finne arealet til den sammensatte figuren. Man kan si at elevene danner en noe konkret, mental modell som gjør at en kan registrere *modelleringskompetansen* og et nytt aspekt ved *strategisk kompetanse*.

For å finne arealet til de mindre delene tar elevene i bruk arealformler for trekanter og firkanter, i tillegg til å sette opp og gjennomføre ulike utregninger. Dette er aspekter ved både *prosedyrekompetansen* og *symbol- og formalismekompetansen*, da jeg vil si at også her har elevene et enkelt matematisk språk.

Det som ikke kommer frem i transkriberingen, men som jeg noterte for meg selv, var hvordan elevene brukte visualiseringer, i tillegg til utregninger, for å komme frem til løsningen. *Representasjonskompetansen* til Niss og Jensen (2002) innebærer å kunne bruke flere representasjoner for samme matematiske situasjon, i tillegg til å kunne oversette mellom dem og ta reflekterte valg om hvilke det er hensiktsmessige å bruke (Niss & Jensen, 2002, s. 56-58). Siden elevene fikk utdelt en visualisering av en figur de skulle bestemme arealet til, er det hensiktsmessig å bruke en visualisering i oppgaveløsningen. Å ta i bruk flere representasjoner er et aspekt av kompetansen *konseptuell forståelse* (Kilpatrick et al., 2001, s. 118-120).

E1: hvis du ser her, vi bare delte her, ikke sant. En trekant her og en firkant her, og denne her delte vi i to trekanter. Men disse to trekantene er på samme størrelse
E2: ja, man kan regne de som en. Fordi det er et parallellogram
E1: også bare adderte vi alle

Her ser man hvordan elevene kommer med en forklaring for hvordan de fant arealet til figuren. I elevenes forklaringer begrunner de egen løsningsstrategi og prøver å overbevise meg om gyldigheten av valgene deres og løsningen. Vi kan dermed registrere r*esonnementskompetansen* og *adaptiv resonneringsevne*.

b) Selv om dette er en fortsettelse av den forrige oppgaven, er oppgavene ganske ulike, og b) krever en helt ny tilnærming. Jeg vil derfor analysere a) og b) separert. Ved andre oppgaver som har flere deloppgaver har jeg valgt en annerledes metode, da disse deloppgavene krever lignende tilnærminger.
E1 begynner med å lese oppgaveteksten høy og da kommer denne dialogen:

E2: minst mulig, da må man jo. Da vil man ha flest inn mot midten av figuren liksom, slik at man ikke har noe på utsiden. Så da blir det vel som et kvadrat eller ganske sånn.
E1: hvis man klipper nå, så blir det enda en ny side som man må regne med omkretsen. Blir det ikke? Den delen her blir to ulike figurer. Så da blir det jo den siden
E2: ja, men skulle vi bare stokke om formen på dem?
I: dere kan gjøre akkurat som dere vil
E2: ja, fordi. Kan jeg se? Jeg tegner jeg, tror det er like greit. Da har vi den figuren å se på liksom. Vi vet at den var 30 sånne ruter, ikke sant? Da kan vi tegne sånn bortover og da blir det sånn. Da blir det 30 også tar vi en opp, ikke sant? Så får vi 30, 30, 1, 1. Så får vi 62. Men

hvis vi lager det som et kvadrat med 6 ganger 5, så blir det jo 6, 5 – 6, 5. Et kvadrat sier jeg, det blir jo et rektangel. Så da får vi jo 6, 12 og 22

Kommunikasjonskompetansen kan hyppig identifiseres i denne dialogen hos begge elever. De klarer å sette seg inn i hverandres matematiske utsagn, og i det matematiske utsagnet som kom i form av oppgaveteksten. De uttrykker seg matematisk ovenfor hverandre.

Man kan se bevis for *strategisk kompetanse* og *problembehandlingskompetanse* da elevene identifiserer problemet og finner en løsningsmetode. I tillegg ser man i en senere dialog at de løser problemet, som også er et viktig aspekt ved de to kompetansene.

Elevene lager tilsynelatende en modell for å gjøre omkretsen til den sammensatte figuren minst mulig, det ser vi når E2 sier: «da vil man ha flest inn mot midten av figuren». Å lage en modell, mental eller ikke, er et aspekt ved *modelleringskompetansen* og *strategisk kompetanse*. *Tankegangskompetansen* til Niss og Jensen (2002) innebærer forståelse for matematiske begreper (Niss & Jensen, 2002, s. 47-48). Det kan vi se i spesielt E2 sine uttalelser, som indikerer god forståelse for begrepet omkrets. Det er kanskje ikke innlysende hvordan en skal gå frem for å løse denne oppgaven, så det at E2 fort ser hva som bør gjøres viser god forståelse. Også kompetansen *konseptuell forståelse* innebærer forståelse for matematiske konsepter og metoder. I tillegg tas det i bruk tidligere kunnskap (Kilpatrick et al., 2001, s. 118-120), dette skjer tydelig her da E2 fort finner en løsningsstrategi.

Elevene tar i bruk flere representasjoner i deres utregninger. E2 sier: «jeg tegner jeg», og elevene bruker figuren og rutene for å tegne opp hvordan de kan gjøre omkretsen til figuren minst mulig. I tillegg bruker elevene skriftlige utregninger. Det å bruke flere representasjoner inngår i *representasjonskompetansen* og *konseptuell forståelse*.

Prosedyrekompetansen registreres også i denne sekvensen da elevene tar i bruk flere av de fire regneartene, i tillegg til formler for omkrets. Utregningene til elevene inngår i *symbol- og formalismekompetansen* i tillegg til at elevene også bruker matematiske begreper i deres dialog: «omkrets», «kvadrat» og «rektangel». Dette viser at elevene har et matematisk språk.

E2: Er det noen måte vi kan gjøre det mindre på?

E1: mindre. Kan egentlig bare si meg enig

E2: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Sånn. Der har vi lik omkrets og så 1, ..., 20. Og der har vi mye omkrets, fordi der får vi mest mulig av figuren inn i midten av figuren, og der er hele greia på utsiden

E1: jeg må si meg enig

E2: er det noen måte vi kan vri og bytte og? Vent da, ja, jeg tror det er den største vi kan få. Det er nok det, det virker riktig

Her ser vi at E2 bruker *resonnementskompetansen* ved å gå gjennom oppgaveløsning for å se om løsningen er korrekt. Ved å gjøre dette overbeviser E2 seg selv og E1 om at løsningen er korrekt. Man kan også registrere bruk av kompetansen *adaptiv resonneringsevne*, da E2 i tillegg til å vurdere egen løsning, vurderer om det finnes andre alternativer (Kilpatrick et al., 2001, s. 129-131).

Et aspekt ved *tankegangskompetansen* vi kan registrere i begge disse dialogene, er hvordan elevene har en metode som generaliserer for alle typer av figurer (Niss & Jensen, 2002, s. 47-48). Dette ser vi i disse to uttalelsene fra E2: «minst mulig, da må man jo. Da vil man ha flest inn mot midten av figuren liksom, slik at man ikke har noe på utsiden. Så da blir det vel som et kvadrat eller ganske sånn» og «der har vi mye omkrets, fordi der får vi mest mulig av figuren inn i midten av figuren».

Oppgave 1.3

Oppgaveteksten ble lest høyt for elevene. Første oppgave var å lage et mønster som skulle brukes i de neste deloppgavene, men det har ingen hensikt å ta den med i analysen da essensielt ingen matematiske kompetanser ble brukt. Deretter ble elevene spurt om de kunne finne ut hvor mange stener en må bestille for de fem første årene, ut ifra mønsteret de laget i starten av oppgaven. Elevene har allerede tegnet opp hvordan mønsteret vil se ut for de fem første årene, og da er E1 sin initiale tanke at de skal telle alle stenene. E2 responderer med å si at de ikke behøver å telle, men at de kan regne på det:

E1: skal vi telle alt det her?

E2: nei, vi trenger ikke å telle. Vi kan sikkert gjøre noe regning på det

E1: vi kan lage noen formler

E2: ja. Etter år en er det åtte. To er, nå tar vi de røde. Så da blir det tre, fire, fem, seks. Nei, men det er kanskje enkleste å begynne med oddetallsgreiene for der er det rød i hjørnene hver eneste gang. At vi først regner på oddetall, også regner vi på partall

E1: år en, tre

E2: så det er atten, nei sytten

E1: nei, det er tolv pluss fire

E2: så det er seksten. Så da ser det ut som det blir fem, trettito kanskje. Eller så blir den tjuefire

E1: ja, tjuefire

Et aspekt ved *prosedyrekompetansen* er å ta reflekterte valg om bruk av prosedyrer i matematiske situasjoner, og vite hvilke som er mest hensiktsmessige for den situasjonen (Kilpatrick et al., 2001, s. 121-123). E2 ser at selv om de kan telle, vil det være mer hensiktsmessig og effektivt å bruke regning for å komme frem til løsningen.

Det at elevene klarer å identifisere og finne en løsningsmetode, gjør at vi kan identifisere bruk av *problembehandlingskompetansen* og *strategisk kompetanse*. Elevene ser at de kan bruke to metoder for å finne løsningen; å telle og å regne, som er et annet aspekt ved problembehandlingskompetansen. Jeg mener at denne oppgaven er et matematisk problem, da en ikke kan bruke kun rutineferdigheter for å komme frem til en løsning, med mindre en ser på telling som noe mer enn en rutineferdighet. Dermed er oppgaven et matematisk problem ut ifra definisjonen til Niss og Jensen (2002).

Igjen ser vi hyppige bevis for *kommunikasjonskompetansen* hos begge elever, på lik linje som ved de forrige oppgavene.

Mønsteret elevene allerede har laget kan vi si er en modell i seg selv, men vi ser her hvordan elevene vil lage en formel for å finne løsningen, og siden en formel er en modell kan *modelleringskompetansen* registreres. Det skjer en matematisering, da elevene velger å lage en formel. Her starter elevene fra en ikke-matematisk situasjon, men elevene oversetter den til en matematisk situasjon ved å lage en formel ut av det, og kan dermed løse oppgaven med matematikk.

Elevene må konstant bruke mønsteret de har laget i starten av oppgaven for å komme frem til en løsning. Dette gjør at elevene bruker en visuell og en skriftlig representasjon, og det å bruke flere representasjoner inngår i *representasjonskompetansen* og *konseptuell forståelse*. Etter en del utregninger og utprøvinger, kommer elevene frem til en løsning:

E2: han må ha nittiseks røde og hundre og fire hvite
E1: hvorfor telte vi ikke?
E2: fordi det tar lang tid og vi ville bruke hjernen vår. Men så endte vi opp med at vi bare døde litt, men det går fint

Det kan virke som om E1 syntes arbeidet med å lage en formel var for omfattende, men E2 så fortsatt fordelen ved å ta i bruk en annen prosedyre enn telling, som styrker bruken av *prosedyrekompetansen*.

Et viktig aspekt ved både *problembehandlingskompetansen* og *strategisk kompetanse* er å komme frem til en løsning på et gitt problem, og det ser man elevene gjøre her. Transkriberingen er kortet ned, i realiteten tok dette lang tid, og elevene møtte på flere utfordringer. Kompetansen *produktiv holdning* innebærer at en ser hvordan en jevn og god innsats i matematikk vil lønne seg (Kilpatrick et al., 2001, s. 131-133). Elevene gav ikke opp, selv om de visste at det fantes en enklere metode. Denne innsatsen lønte seg for elevene da neste oppgave var å finne ut hvor mange stener en behøvde etter n år. Dette er E2 sin forklaring på løsningen:

E2: for hele greien, det var der jeg gjorde feil først. Det var at jeg skrev fire n pluss fem, men det skal være fire n pluss fire, tror jeg. For hele greia. Men for de hvite så er det, nei. For de som har hjørnet, for det var hjørnet som byttet på, så ble formelen fire n pluss en. Altså fire, parentes, n pluss en. Og for de som ikke har hjørnet, så var formelen fire, parentes n pluss tre. Og måten vi så det på var at vi satt dem under hverandre. Så først på de med hjørnene, og da så vi at en hadde åtte, av de som hadde samme farge som det som var i hjørnet. To hadde tolv, også så vi to seksten og da ser vi firergangeren opp igjennom her. Og da begynner vi å tenke hva vi bør gjøre med n for at den skal bli åtte, når vi ganger den med fire. Plusser på en. Så det blir fire, parentes n pluss en. Også gjør man det samme med de andre

E2 bruker et godt matematisk språk, i tillegg viser dialogen at elevene kan håndtere og forstå symbolholdige uttrykk som formler. Derfor kan vi registrere flere aspekter av *symbol- og formalismekompetansen*, dette også i flere utregninger tidligere i oppgaveløsningen. En formel er ofte generell, og vi ser her hvordan formelen elevene utarbeidet er en generalisering for antall stener for et vilkårlig år. Generalisering inngår i tankegangskompetansen (Niss & Jensen, 2002, s. 47-48).

E2 går igjennom fremgangsmåten deres for å finne formelen. Ved å gjøre dette overbeviser E2 meg om at løsningen er korrekt, og begrunner de valgene som har blitt tatt underveis. Dette er aspekter vi kjenner igjen fra *resonnementskompetansen* og *adaptiv resonneringsevne*.

Dette er en kompleks oppgave der elever må lage en formel ut ifra et komplisert mønster. Det at elevparet klarte dette uten støtte fra meg, viser relasjonell forståelse. De vet hvordan de kan gjøre det og *hvorfor* (Skemp, 1976). Jeg synes spesielt E2 sin forståelse av prosedyren er fremtredende her, hvordan E2 ser at en kan lage en formel uten at en blir spurt om det, og klarer å bruke det man har lært tidligere for å tilpasse det til en ny situasjon. Det er denne forståelsen jeg tror Yeo (1997) og Pettersen og Nortvedt (2018) ønsker at elever skal ha i matematikk.

4.1.2 Elevpar 2

Det ble fort klart at dette elevpar 2 ikke hadde den samme samarbeidsdynamikken som elevpar 1. Det er ikke nødvendigvis noe negativt, men man observerer en annen tilnærming hos dette elevparet. Som man vil se i elevenes arbeid med oppgavene, er det mindre dialog underveis i oppgaveløsningen, og heller mer individuelt arbeid der elevene drøfter egne løsninger med hverandre. Jeg synes dette var en positiv oppdagelse da det gjør at en kan se enda tydeligere hvordan elever arbeider sammen ved åpne og rike oppgaver. Her vil jeg kalle elevene for E3 og E4.

Oppgave 1.1

Elevene leser oppgaveteksten for seg selv, før denne dialogen:

E3: Da må vi jo. To krakker, det vet vi jo er 55. Så da ville jeg først ganget 2 med 3 kanskje?
E4: ja
E3: 2 ganger 3. Da blir det jo. Tar 3, vent da. Det blir jo 55, nei 3 ganger 55 da. 3 ganger 55, og det er 175 tror jeg.

Kommunikasjonskompetansen til Niss og Jensen (2002) innebærer å sette seg inn i andres matematiske utsagn, og å kunne uttrykke seg matematisk (Niss & Jensen, 2002, s. 60-61). Denne kompetansen kan vi registrere i uttalelsene til E3 da oppgaven er forstått, og E3 har dermed satt seg inn i oppgaveteksten som er en form for matematisk utsagn. I tillegg klarer E3 å uttrykke sine tanker ovenfor E4, og i neste sekvens ser man hvordan kompetansen kan registreres i uttalelsene til E4.

Man kan registrere *strategisk kompetanse*, som innebærer å identifisere og løse problemer, men også at en i oppgaveløsningen lager seg en mental modell (Kilpatrick et al., 2001, s. 124-129). Man ser her at problemet blir identifisert, og hvordan det også blir løst. Selv om man ikke har et direkte innblikk i elevenes tankegang, kan det virke som om E3 lager seg en mental modell for hvordan en kan løse oppgaven. *Modelleringskompetansen* inkluderer også bruken av mentale modeller (Niss & Jensen, 2002, s. 52-53).

Som beskrevet i analysen av elevpar 1 sin tilnærming til denne oppgaven, er ikke denne oppgaven ut ifra definisjonen til Niss og Jensen (2002) et matematisk problem som gjør at man her ikke kan registrere *problembehandlingskompetansen*.

Prosedyrekompetansen innebærer å kjenne til og å ha gode ferdigheter i ulike matematiske prosedyrer (Kilpatrick et al., 2001, s. 121-123) og *symbol- og formalismekompetansen* innebærer å bruke et matematisk språk og å bruke og utføre matematiske uttrykk (Niss & Jensen, 2002, s. 58). Vi kan registrere *symbol- og formalismekompetansen* da E3 bruker og utfører matematiske uttrykk, men kun *prosedyrekompetansen* på et tynt grunnlag da E3 kjenner til prosedyrer, men utfører dem ikke korrekt. Man ser hvordan E3 ganger sammen 55 med 3 og sier det blir 175, når det faktisk blir 165. Kilpatrick et al. (2001) og Niss og Jensen (2002) beskriver viktigheten av hjelpemidler for å gjennomføre prosedyrer effektivt og nøyaktig (Kilpatrick et al., 2001, s. 121-123; Niss & Jensen, 2002, s. 62), og det ser vi E3 kunne ha gjort her ved å bruke en kalkulator.

E3: Er ikke dette svaret?

E4: 175 centimeter fra gulvet til toppen av den øverste? Skal jeg si hva jeg tenker?

E3: ja

E4: fra gulv til første krakk er det 49 centimeter. Fra første krakk til andre er det 6, hvis du tar det 3 ganger så får du 67

E3: ja, det var kanskje en litt enklere måte

Vi ser hvordan elevene har individuelt løst oppgaven på to ulike måter, der forrige sekvens var E3 sin løsning. Her ser vi hvordan de delkompetansene som ble registrert i uttalelsene til E3 i forrige sekvens, her kan registreres i uttalelsene til E4.

Resonnementskompetansen innebærer blant annet å overbevise andre om gyldigheten til ens løsning (Niss & Jensen, 2002, s. 54), og på lik linje innebærer *adaptiv resonneringsevne* å begrunne egen løsning og løsningsstrategi (Kilpatrick et al., 2001, s. 129-131). Vi kan registrere begge disse kompetansene i E4 sine uttalelser, da E4 går gjennom egen løsningsprosess, forklarer valg som er blitt tatt, og prøver å overbevise E3 at denne løsningen er korrekt.

Her var ikke jeg observant nok og la ikke merke til at ingen av løsningene elevene gav, var korrekte. Selv om det ikke er avgjørende for hensikten ved intervjuet, er det allikevel uheldig. Her kan man se at selv om en gjennomgår egen løsning, er det ikke alltid en fanger opp at en har gjort feil. Dette vi si at elevene i denne situasjonen ikke hadde tilstrekkelig resonnementskompetanse og kompetanse for adaptiv resonneringsevne til å se egne feil.

Oppgave 1.2

a) Elevene fikk her utdelt en figur sammen med oppgaveteksten. Elevene leste oppgaveteksten for seg selv før de individuelt startet oppgaveløsningen, man ser at vi kun får en uttalelse fra E3 som stadfester målet ved oppgaven før elevene på egenhånd prøver å løse oppgaven:

E3: Vi skal bare, gi en forklaring ja

Utregninger

E3: jeg vet ikke om jeg har tenkt riktig en gang. Jeg tenkte først på den her inni her, fordi den er enklest. Så ganget jeg 3 med 4. Og da fikk jeg 12, så da vet jeg at det er 12 ruter inni her. Også så jeg på den her, og den er halvparten av den. Så delte jeg 12 på 2. Så fikk jeg 6, så da er det 6 ruter inni her. Og den der ble jeg litt usikker på, men jeg tror den er like stor som den. Men da gjorde jeg det samme, og ganget 3 med 4 og da ble det også 12. og da satt jeg igjen med 12, 12 og 6. og da plusset jeg det og da ble det 30

E4: jeg tenkte egentlig ganske likt. Finne den i midten, som var 4 ganger 3. Også tok jeg den som var halv, så da tok jeg 3 ganger 4, delt på 2. Også er egentlig bare den skyvet opp, så den er ja

Sekvensen ovenfor er så og si hele transkriberingen for denne deloppgaven, og her ser man hvor lite man kan registrere av *kommunikasjonskompetansen* når elever ikke samarbeider om oppgaven. Elevene har på egenhånd kommet frem til en løsning, og vi kan se kommunikasjon der elevene forstår oppgaveteksten. Begge klarer å uttrykke seg matematisk ovenfor den andre, og E4 klarer å sette seg inn i E3 sitt utsagn.

I elevpar 1 sin tilnærming til denne oppgaven bestemte jeg at dette er et matematisk problem ut ifra definisjonen til Niss og Jensen (2002), som gjør at man kan identifisere *problembehandlingskompetansen* her. På lik linje identifiseres også *strategisk kompetanse* da elevene har klart å identifisere problemet, funnet en løsningsstrategi og ikke minst klarer å komme frem til en løsning.

Jeg vil også si at elevene tar i bruk modellering her, da de deler opp figuren i mindre deler og finner arealet til disse delene for så legge dette sammen. Modellering inngår i *strategisk kompetanse* og *modelleringskompetansen*.

En kompetanse som ikke har blitt så hyppig identifisert er *representasjonskompetansen*, men den finner man bevis for i denne tilnærmingen. Denne kompetansen innebærer å ta i bruk ulike representasjoner for samme matematiske situasjon, i tillegg til å kunne oversette på tvers av disse (Niss & Jensen, 2002, s. 56-58). Dette kommer ikke like tydelig frem i transkriberingen, men egne notater viser hvordan elevene bruker en visuell representasjon i form av figurer og en skriftlig representasjon i form av utregninger for dette problemet. Å ta i bruk flere representasjoner er også et aspekt ved kompetansen *konseptuell forståelse* (Kilpatrick et al., 2001, s. 118-120).

Man finner også bevis for *symbol- og formalismekompetansen*, da elevene har et enkelt matematisk språk, setter opp og gjennomfører ulike utregninger. Denne kompetansen har likhetstrekk med *prosedyrekompetansen* da den innebærer å kjenne til og kunne ta i bruk flere prosedyrer, ta reflekterte avgjørelser ved prosedyrevalg og gjennomfører prosedyrer effektivt og nøyaktig. Her bruker elevene flere prosedyrer, blant annet de fire regneartene og arealsetninger.

De to siste kompetansene man kan finne bevis for i denne sekvensen er *resonnementskompetansen* og *adaptiv resonneringsevne* da elevene legger frem sine løsningsstrategier og går gjennom hvert steg av deres oppgaveløsning. Å begrunne egen løsning er noe som hører til i begge disse kompetansene, mens resonnementskompetansen innebærer også å overtale seg selv og andre om gyldigheten og holdbarheten til det resultatet en selv har kommet frem til.

b) Selv om dette er en fortsettelse av den forrige deloppgaven, vil jeg analysere dem som to ulike oppgaver. Dette fordi elevene behøver ulike tilnærminger for å løse disse to oppgavene, og det er dermed ikke sikkert at en vil identifisere de samme kompetansene på lik måte i elevenes arbeid med disse oppgavene.

Også ved denne oppgaven leser elevene oppgaveteksten for seg selv og begynner rett på selve løsningen individuelt. Elevene brukte en del tid på denne oppgaven, men forhørte seg ikke med hverandre eller meg underveis. Plutselig går det opp et lys for E3, og E3 begynner dermed å forklare for E4 hvordan en kan gjøre om denne figuren slik at omkretsen blir størst mulig:

E3: jeg bare brettet den ut jeg. Sånn at jeg hadde en rute, orker ikke å ta det helt nøyaktig nå. Men sånn at jeg hadde en her og 12 her. Sånn at omkretsen her er 12 og omkretsen her er 1. Ikke sant? Så da blir svaret 26, tror jeg. Men jeg tok omkretsen på hele denne figuren, slik du gjorde, men jeg la den sammen i sted. Så tok jeg hele figuren, dette var jo ikke hele en gang, og da fikk jeg også 26. Det var ikke hele figuren en gang og nå tok jeg bare en del av figuren

E4: å ja

E3: så den kan forandre seg. Så hvis, var det omkretsen, hvordan skulle bli størst?

I: ja

E3: da ville jeg lagt ut hele figuren, liksom. Jeg ville tatt alle, jeg vet ikke om det er riktig, men jeg ville tatt, tatt på en måte alle rutene og forminsket det i høyde på en måte. Også ville jeg brettet den så langt ut som mulig. Det ville jeg gjort

Man kan se at E3 har funnet en metode for å gjøre omkretsen til figuren så stor som mulig ved å brette ut rutene figuren består av og legge dem på en rekke, dette er modellering og det er et aspekt ved både *modelleringskompetansen* og *strategisk kompetanse*. Metoden er generell for en hvilken som helst figur bestående av ruter, og generalisering er et aspekt ved *konseptuell forståelse*. Ved å lese den første uttalelsen til E3 ser vi at eleven ikke behøver å sjekke for hele figuren, men bare for en liten del for å se hvordan dette er den beste måten å gjøre det på.
E3 forklarer og begrunner valg som har blitt tatt underveis i løsningsprosessen, som gjør at man kan identifisere *resonnementskompetansen* og *adaptiv resonneringsevne*.

Kommunikasjonskompetansen blir tatt i bruk av begge elevene, men er mer fremtredende fra E3 sin side. E3 klarer å forklare sine tanker på en matematisk måte slik at både jeg og E4 klarer å sette oss inn i elevens sin tankegang, og man ser hvordan E4 klarer nettopp å gjøre dette ved å si «å ja».

Man forstår at E3 har brukt mange ulike prosedyrer for å komme frem til en løsning, og etter litt utprøving klarer eleven å se hvilken som er mest hensiktsmessig å bruke. Prosedyrene E3 tar i bruk er blant annet de fire regneartene, oppdeling av figur og omkretsformler. Derfor kan man registrere *prosedyrekompetansen*, i tillegg til *symbol- og formalismekompetansen* da E3 setter opp og gjennomfører mange utregninger og bruker et matematisk språk.

Dette er klart et matematisk problem ut ifra definisjonen til Niss og Jensen (2002), fordi en må bruke problembehandling for å løse oppgaven, det holder ikke med rutineferdigheter. Med tanke på at E3 klarer å identifisere, finne en løsningsmetode og løse problemet kan man registrere både *problembehandlingskompetansen* og *strategisk kompetanse*. Elevene blir så spurt om hva de kan gjøre for at omkretsen til figuren skal bli minst mulig:

E4: lage en firkant da

E3: da må vi gjøre at de blir mest mulig like på hver side. At de ligner, ja. at de har mest mulig like sider på alle sidene

I: hvordan kan hele figuren få minst mulig omkrets?

E4: de to sidene sammen, firkant, firkant. Også dytte på den til siden

Det at E4 svarer på dette spørsmålet kan bety at også denne eleven har forstått oppgaven og har klart å sette seg inn i E3 sin beskrivelse i forrige sekvens. At elevene klarer å gjøre det omvendte med figuren viser *konseptuell forståelse* da elevene bruker det de kan om omkrets og areal, og den erfaringen de gjorde seg fra forrige oppgave til å se hvordan de kan løse problemet.

Oppgave 1.3

Denne oppgaven omhandler et mønster for en platting og den første deloppgaven er å lage dette mønsteret og tegne opp de 3 første årene. Etter at elevene har laget mønsteret blir de spurt om hvor mange stener en trenger for de 3 første årene, og dette er dialogen som kommer etter gitt oppgave:

E3: ok, så en murstein er?

I: en halv ganger en halv meter

E3: ok. En sten er lik en halv meter, altså 0.5. Nei, kødda det er jo helt feil. Men altså en sten er en halv meter, men hvor mange

E4: 4 meter

E3: åja, det er den. 2 stener blir jo en meter

E4: hvor mange er det?

E3: det er 8

E4: ganger med 2 da

E3: 8 ganger 2 på den i alle fall. Så dette er en halv meter ut?

E4: ja

Igjen ser vi hvor fremtredende *kommunikasjonskompetansen* er i elvenes uttalelser, da de klarer å sette seg inn i oppgaveformuleringen og hverandres utsagn, og de klarer å uttrykke seg matematisk forståelig ovenfor den andre.

Det er vanskelig å identifisere løsningsstrategien ut ifra uttalelsene, men man ser at elevene klarer å identifisere problemet og virker til å ha funnet en løsningsstrategi. Dette gir bevis for *problembehandlingskompetansen* og *strategisk kompetanse*. Jeg vil si at dette er et matematisk problem, da å løse oppgaven krever mer enn aktivering av rutineferdigheter.

Det ser ut som at elevene kun regner et år om gangen, det ser ikke ut til at de tar i bruk noen form for modellering. De bruker samme fremgangsmåte for hvert steg, og finner ut at ved år 2 behøver de 32 stener. Så skal de finne ut hvor mange de trenger ved år 3:

E4: det blir 40 da. Siden det er pluss 8
E3: hvorfor pluss 8?
E4: pluss 8 for hvert år. Blir det ikke det?
E3: det er jo bare en halv. Jo, jeg tror det
I: hva tenkte dere med pluss 8 for hvert år?
E4: fordi det vokser jo i bredden og lengden. Og i hjørnene på en måte. Så man får jo plass til mer og mer
E3: her vokser det jo på år en. Det første året så vokste det jo med 4. Og her så vokste det jo med 2. 2, 4 og her blir det 8. Det dobbelte av 4 er 8. Så det blir vel 24 stener i den. 16 der, og da blir det 40. Var det det du sa?
E4: ja. Ved år 3 blir det 40
I: oppgaven var å finne ut hvor mange stener en behøver for de 3 første årene
E4: da skal han ha 96 stener

Her finner vi et nytt bevis for *problembehandlingskompetansen* og *strategisk kompetansene* da elevene kommer frem til en løsning, som er et viktig aspekt ved begge kompetansene.
Underveis ser vi hvordan begge elevene begrunner valgene de gjør i oppgaveløsningen og prøver å overtale meg og hverandre om gyldigheten til deres løsning, og man kan dermed registrere både *resonnementskompetansen* og *adaptiv resonneringsevne*.

Elevene bruker hyppig de fire regneartene, og det å sette opp og gjennomføre matematiske utregninger hører til *symbol- og formalismekompetansen* og det å bruke ulike prosedyrer effektiv og nøyaktig hører til under *prosedyrekompetansen*.

Elevene blir spurt om hvor mange hvite og røde stener de behøver, og de sier at de kan dele på 2 for å finne ut av det. Deretter blir elevene spurt om de kan finne ut hvor mange stener en behøver for n år. Da kommer denne sekvensen:

E3: formler ja, det husker jeg. Husker du når læreren sa x pluss x, et eller annet?

E4: ja

E3: hva er det vi vet fra før?

E4: vi vet at det er ukjent. Vi kaller det y. Hvor mange stener, eller hvor mange røde og hvite stener?

I: hvor mange røde og hvite

E3: skal vi lage en formel for det? Hvor mange røde og hvor mange hvite for år, hvilket år var det?

E4: y

E3: hvis vi ser på det her. Oppi her er det plass til 16, ikke sant? Oppi her var det 24, var det ikke?

E4: mhm

E3: og år 2 var det 32. Det er jo et lite mønster det da

E4: ja, 8. Så da kan vi egentlig bare pluss på 8. Eller? Nå husker jeg ikke formler

E3: ikke jeg heller. Jeg har glemt det helt

Man kan registrere *konseptuell forståelse* her da elevene har forståelse for hvordan og hva en behøver for å lage en formel ut av gitte forhold. I E3 sin uttalelse mot slutten, «det er jo et lite mønster det da», får vi et inntrykk at elevene vet at de må finne et mønster i de tidligere resultatene for en å lage en generell formel.

Underveis i dialogen stiller elevene mange viktige spørsmål: «hva er det vi vet fra før?» og «skal vi lage en formel for det?». Dette er spørsmål som leder dem videre mot en løsning og det å kunne stille slike spørsmål hører til under *tankegangskompetansen*.
Elevene skriver og noter litt på egenhånd. Så kommer denne siste sekvensen:

E4: det her?

E3: x pluss 8, delt på 2? Hvorfor dele på 2?

E4: fordi røde og hvite

Her kommer elevene frem til en formel, og det er et nytt bevis på *prosedyrekompetansen* og *symbol- og formalismekompetansen*. Da en formel er en modellering, kan vi også registrere *modelleringskompetansen* i tillegg til *strategisk kompetanse*. Generalisering er også et aspekt ved *tankegangskompetansen*.

E4 begrunner løsningen sin ovenfor E3, og viser dermed *resonnementskompetanse* og *adaptiv resonneringsevne*.

Elevene spør om formelen er korrekt. Jeg sier at de kan jo sjekke med et tall de allerede kan. Mens de holder på å prøve og knote litt, ringer skoleklokken og vi må avslutte intervjuet.

4.2 Intervjurunde 2

Denne intervjurunden ble gjennomført et par uker etter den første, med de samme elevene og lignende oppgaver. Som beskrevet i metodekapittelet var den originale planen å sammenligne elevenes tilnærming fra første og andre intervjurunde, men da elevene ikke fikk arbeidet så mye med åpne og rike oppgaver i perioden mellom intervjurundene, syntes jeg at grunnlaget ikke var godt nok til å ta en slik sammenligning. Til tross for dette er denne intervjurunden en ny mulighet til å undersøke mer hvilke kompetanser som kommer til syne i elevers tilnærminger, og det gir meg dermed et bedre grunnlag for å kunne si noe om åpne og rike oppgavers rolle i elevers utvikling av matematisk kompetanse.

Oppgavene som ble gitt i denne intervjurunden er oppgave 2.1 – 2.3 som finnes i sin helhet i vedlegg 3 eller presentert i kapittel 3.5.2

4.2.1 Elevpar 1

Elevpar 1 er samme elevpar 1 som ved forrige intervjurunde.

Oppgave 2.1

Oppgaven har flere deloppgaver, men da deloppgavene krever lignende tilnærminger vil jeg her se på oppgaven under ett med tanke på identifisering av kompetanser.

Oppgaveteksten til deloppgave a) ble lest for elevene av meg i tillegg til at de fikk utdelt en figur. *Kommunikasjonskompetansen* innebærer en uttrykkende side som består av å kunne uttrykke seg matematisk for andre, og en mottakende side som betyr det å kunne sette seg inn i andres matematiske utsagn (Niss & Jensen, 2002, s. 60-61). Denne kompetansen har vært fremtredende i alle de tidligere oppgavene, og det er den også her. Elevene klarer å sette seg inn i oppgaveformuleringen og hverandres utsagn, i tillegg til å kunne uttrykke seg ovenfor den andre.

Dette er transkriberingen av elevenes løsning:

E2: ja, bare finne ut av det

E1: bare å telle da

E2: ja

E1: en, to, tre

E2: kan vi ikke bare ta åtte ganger fire?

E1: åtte ganger fire?

E2: vet du hva?

E1: det er ikke fire

E2: nei, men åtte ganger. Fordi det er åtte i de der oppe, også blir de der åtte også blir de der åtte også blir de der åtte. Så åtte, seksten, tjuefire, trettito

E1: ja, sant det

E2: vi kan dobbeltsjekke ved å telle. En, to, ..., trettito

E1: trettito

Vi ser her hvordan E1 ønsker å telle rutene for å finne ut hvor mange ruter det er i rammen, men E2 stiller spørsmål om de ikke kan gange åtte med fire. Her finner vi bevis for *problembehandlingskompetansen* og *strategisk kompetanse*, da elevene identifiserer problemet, finner en løsningsstrategi og kommer frem til en løsning. Dette er viktige aspekter ved de to kompetansene (Kilpatrick et al., 2001, s. 124-129; Niss & Jensen, 2002, s. 49-50). Jeg vil argumentere at for at oppgaven er et matematisk problem ut ifra definisjonen til Niss og Jensen (2002), da rutineferdigheter, som å gange 8 med 5, ikke er tilstrekkelig for å løse oppgaven korrekt og elevene må dermed ta i bruk problemløsning. Dette gjør at man kan registrere *problembehandlingskompetansen.*

Ved at E2 spør «kan vi ikke bare ta åtte ganger fire?» stiller E2 et spørsmål av matematisk natur, som er et aspekt ved *tankegangskompetansen* (Niss & Jensen, 2002, s. 47-48).

En viktig del av *prosedyrekompetansen* er å velge metoder som er effektive (Kilpatrick et al., 2001, s. 121-123), og det ser vi E2 gjør her. E2 ser at det å telle rutene ikke er like effektivt som det å regne det ut. Elevene ser her hvordan oppgaven kan løses på flere måter, noe som inngår i *problembehandlingskompetansen* og *konseptuell forståelse* (Kilpatrick et al., 2001, s. 118-120; Niss & Jensen, 2002, s. 49-50).

Modellering er også et element i elevenes tilnærmelse, da de danner en modell for å finne ut hvor mange ruter rammen består av. I dette tilfellet tar de 8 ganger 4, som vil si at de tar sidelengdene minus 1, og ganger det med antall sider. Dette er et nytt bevis på *strategisk kompetanse*, i tillegg til at modellering er en sentral del av *modelleringskompetansen* (Niss & Jensen, 2002, s. 52-53).

Resonnementskompetansen består blant annet i å kunne overbevise andre om egen løsning (Niss & Jensen, 2002, s. 54), og *adaptiv resonneringsevne* innebærer blant annet å begrunne egen løsning (Kilpatrick et al., 2001, s. 129-131). Vi kan registrere begge disse kompetansene i elevenes uttalelser, da E2 begrunner ovenfor E1 hvorfor en kan ta 8 ganger 4 og hvordan de sjekker løsningen sin med å ta i bruk en annen, og mer nøyaktig metode, nemlig telling.

Gjennom hele oppgaveløsningen blir figuren hyppig brukt, i tillegg til skriftlige utregninger. Vi ser da at elevene tar i bruk ulike representasjoner som inngår i *konseptuell forståelse* og *representasjonskompetansen* (Kilpatrick et al., 2001, s. 118-120; Niss & Jensen, 2002, s. 56-58).

Elevene ble så spurt om de kunne finne flere løsningsmetoder til den forrige oppgaven:

E1: den her er åtte, ikke sant? Den her er også åtte. Hele den er jo ni. Da tar vi og fjerner to, ikke sant? Så det blir syv. Syv ganger to blir fjorten. Åtte ganger to er seksten, hæ?

E2: hva er det du driver med nå?

E1: jeg husker ikke. Jeg bare tok de sidene, jeg plusset egentlig bare sidene

E2: åja. Tok du liksom ni pluss ni pluss

E1: vent da, er det ni?

E2: ja, det er ni bortover hele der

E1: åja, jeg trodde det var åtte

E2: ni pluss ni pluss syv pluss syv blir det

E1: så det er riktig da

E2: det går også an. Også kan man sikkert, finne ut hva de der er, også plusser man på litt til da. Plusser man på fire, eventuelt

E1: ja, vent litt da. En, to, ..., syv. Så det blir syv ganger fire, pluss fire

E2: nei, det blir seks ganger fire, pluss fire

E1: ja, ja

E2: så seks ganger, men ja det er egentlig sånn som gir mening. Å gange sånn eller telle eller

E1: plusse

Man kan se at elevene finner to ekstra løsningsmetoder for problemet, i tillegg til de to originale metodene de tok i bruk. Den ene metoden var å plusse sidene sammen, og den andre var å gange syv med fire, og så plusse på fire. Å kunne finne flere løsningsmetoder til et og samme problem er et aspekt vi finner igjen i *problembehandlingskompetansen* og *konseptuell forståelse* (Kilpatrick et al., 2001, s. 118-120; Niss & Jensen, 2002, s. 49-50).

Elevene diskuterer med hverandre og prøver å få den andre parten til å forstå ens tankegang, og må dermed begrunne og overtale den andre om at det en tenker er en korrekt måte å tenke på. Elevene bruker dermed en sammensetning av *kommunikasjonskompetansen*, *resonnementskompetansen* og *adaptiv resonneringsevne*.

Elevene ble spurt om å finne ut hvor mange ruter den blå rammen ville bestå av hvis hele kvadratet besto av 16 ruter. Elevene tar i bruk samme fremgangsmåte som ved den første oppgaven, og de begynner å se et mønster i svarene sine. De starter arbeidet med å lage en formel som kan generaliseres til alle kvadratstørrelser:

E2: så det er jo sikkert seksten minus fire da, så da er det jo fire ganger fire. Det er sikkert sånn. At hele den var åttien, så er det sikkert. Vent da, hvor mye var
E1: hæ?
E2: vent, det er jo sikkert det samme. Det gir mening. For den blå, den var jo trettito sånne ruter, ikke sant?
E1: ja
E2: trettito, og hele arealet er
E1: åttien
E2: hvis vi setter det opp sånn fancy. Åttien er trettito. Seksten det er, hvor mange var seksten da, tolv
E1: seksten var tolv ja. Hva er det du gjør?
E2: jeg vet ikke. Jeg prøver og. Du vet når vi hadde sånn n, en formel og greier. Men det kan ta litt tid til å finne den. Vi burde jo ha en til egentlig
E1: skal vi lage en selv da?
E2: ja, vi kan ta fem

Utregninger

E2: den øker med fire hele veien, ser det ut som. Ja, det gir jo mening. For det er hjørnene som blir plusset på, på en måte. To den har jo fire. Fire ganger fire er seksten, minus. Hva må man ta bort? Man må ta bort fire. Vent da, er det ikke? Ja, minus en ganger fire
E1: så fire er bestemt
E2: fordi to minus en er en, ganger fire er fire. Tre minus en er to, ganger fire er åtte. Da har vi formelen. Ok, da har vi en formel også faktisk. Ja, så det er sammenhengen da

Et aspekt ved *tankegangskompetansen* er det å kunne utvide en metode slik at den kan generaliseres til mer enn kun den problemstillingen en står ovenfor (Niss & Jensen, 2002, s. 47-48). Selv om elevene enda ikke fikk i oppgave å lage en generell formel, ser E2 et mønster i løsningene deres og begynner å undersøke om en kan lage en slik formel.

Her kan vi observere at elevene innser at de trenger noe mer informasjon for å kunne fortsette å utvikle en generell formel. De trenger å sammenligne de to tidligere resultatene de hadde, med et nytt. Dette er bevis for *konseptuell forståelse*, som blant annet innebærer å ta i bruk tidligere kunnskap på nye problemer og ha en god forståelse for metoden en bruker (Kilpatrick et al., 2001, s. 118-120).

At elevene ser at de behøver et tredje resultat for å komme frem til en generell formel, sier noe om elevenes tidligere kunnskaper, og at de tar i bruk kunnskap de har ervervet ved en tidligere anledning.

Elevene kom frem til en formel som generaliserer metoden for å finne antall ruter som rammen består av, til alle typer kvadrater. De tok i bruk *symbol- og formalismekompetansen* da de klarte å utvikle en formel som består av flere matematiske symboler, de tok i bruk *prosedyrekompetansen* da de så at det er mer hensiktsmessig å lage en formel enn å regne ut svaret for enkelttilfeller, og ved å finne en generaliserende formel tar de også i bruk *tankegangskompetansen*. Det er også en form for modellering når man lager en formel, og en kan derfor identifisere *modelleringskompetansen* og *strategisk kompetanse* her.

Igjen ser vi hvordan *kommunikasjonskompetansen* blir brukt sammen med *resonnementskompetansen* og *adaptiv resonneringsevne* da E2 prøver å forklare egne tankeganger til E1 slik at E1 kan sette seg inn i E2 sine tanker.
Jeg ba elevene forklare hva formelen er, og forklare den for meg.

E2: så man må finne ut hvilket nummer det er. Så hvis man har seksten ruter da, så tar man kvadratroten av det så får man n. Også tar man n minus 1, og ganger det med fire

Formelen elevene fant var avhengig av n, der n sto for antall ruter en sidelengde av kvadratet besto av. Så jeg spurte dem om hva de måtte gjøre med formelen deres hvis en ønsket at n skulle stå for antall ruter hele kvadratet besto av.

E2: da blir det jo kvadratroten av n, minus en ganger fire

Vi ser her at E2 klarer å tilpasse formelen deres etter min kommentar. Dette viser at E2 har god matematisk forståelse, noe som er et viktig aspekt ved *konseptuell forståelse*. Her brukes også *tankegangskompetansen*, da E2 klarer å utvide formelen slik at den holder generelt for alle typer kvadrater. Vi ser også *modelleringskompetansen* og *prosedyrekompetansen*, da E2 klarer å tilpasse en modell og en prosedyre til en ny situasjon.

Oppgave 2.2

Elevene fikk utdelt oppgaveformuleringen skriftlig, i tillegg til en visualisering. Etter at en av elevene hadde lest oppgaveteksten høyt, kom disse uttalelsene:

E2: den der, tror jeg
E1: det er det det ser ut som
E2: fordi det er liksom mest greier inn i den. Vi kan jo regne det ut også
E1: det er liksom mest hvit også, skjønner du?
E2: ja, det er jo mye
E2: vi kan regne på det, ikke sant? Det var en, formelen for arealet er jo pi, r i annen
E1: så en delt på to er jo en halv. Så pi, r i annen er jo null komma
E2: ja. en halv opphøyd i to ganger tre, komma fjorten er lik 0,785. Da går vi videre til den her da. Her er det 0,75 som er, 0,75 ganger 3,14
E1: 0,75 hva?
E2: fordi det er den der, ikke sant? Nei, det er ikke 0,75. Det er 1,25. Sånn, da prøver vi. Vent da, også må vi gange med fire, fordi det er fire blå. 0,785 den også

Prosedyrekompetansen dreier seg mye om å ha kunnskap om prosedyrer og når en bør ta dem i bruk, og her ser vi at elevene tror de vet hvilken figur som har mest areal, men de ønsker også å regne på det. Å kun ta valg basert på instinkt og følelser fungerer ikke alltid like godt i matematiske sammenhenger, og her ser elevene at det vil være hensiktsmessig å regne på det for å se om det faktisk stemmer. At elevene ser at de kan regne på dette er også en del av *prosedyrekompetansen*. I tillegg ser vi bruk av flere prosedyrer som de fire regneartene og arealformelen.

Noe som er fremtredende i denne sekvensen er elevenes bruk av *symbol- og formalsimekompetansen*, da de tar i bruk arealformelen og flere matematiske symboler som π og *i annen*, for eksempel.

Det virker som om elevene har god forståelse for begrepet areal, og vet hvordan de kan bruke det i denne ukjente sammenhengen. Dette viser god forståelse og bruk av tidligere kunnskap, er aspekter ved *tankegangskompetansen* og *konseptuell forståelse*.

Problembehandlingskompetansen, *strategisk kompetanse* og *modelleringskompetansen* kan også registreres her, da elevene klarer å identifisere problemet og finner en løsningsstrategi som er en modellering. Modellen elevene lager, er å bruke arealformelen og tilpasse den etter hvor mange sirkler kvadratet består av. Denne oppgaven er klart et matematisk problem ut ifra definisjonen til Niss og Jensen (2002), da elevene må bruke problemløsning for å komme frem til et svar.

Kommunikasjonskompetansen er også fremtredende i denne oppgaveløsningen, og dette gjelder begge elever.

I sekvensen under ser vi at elevene begynner å forstå at alle figurene kommer til ha å samme areal.

E1: å, alle er
E2: det ser ut som det er likt da
E1: helt ærlig, alt kommer til å bli likt
E2: det er det samme. Ok, da bare sier vi at det er det samme hele veien da
E1: hva om den siste ikke er lik? La oss bare sjekke. Vi har allerede tatt tre stykker, så det skal være relativt greit

Etter at elevene har sjekket 3 av 4 figurer, ser de at det mest sannsynlig vil være det samme arealet på alle 4 figurene. Men allikevel ønsker E1 å sjekke om det siste arealet faktisk er likt. Dette er bruk av både *resonneringskompetansen* og *adaptiv resonneringsevne*, da de sjekker egen løsning og på denne måten overbeviser seg selv, og meg, om at løsningen deres er korrekt.

Oppgave 2.3

Elevene fikk utdelt oppgaveteksten, som er å finne ut hvordan et firma fastsetter priser på vinduene de selger ut fra en figur av mange vinduer med priser. E1 leser oppgaveteksten høyt, og så følger denne dialogen:

E2: det er jo to variabler
E1: hæ?
E2: fordi prisen er fast i forhold til areal. Både rammene og vinduene, ikke sant?

E1: ja

E2: så finner vi ut da, vi prøver

E1: ok, men da må vi finne ut hvor mange ruter det er da

I denne dialogen kan man finne bevis for *kommunikasjonskompetansen* i elevenes uttalelser. Da E2 sier «det er to variabler» forstår man at E2 har klart å sette seg inn i oppgaveteksten, som er en form for matematisk utsagn. Etter denne uttalelser sier E1 «hæ?» som viser at E1 ikke klarer å sette seg inn i E2 matematisk utsagn. Dette viser også at E2 ikke klarer å uttrykke seg matematisk slik at det er forståelig til den som hører på. Men E2 forklarer videre sine tanker ovenfor E1, og det virker da som om E1 forstår hvordan E2 tenker.

Det at E2 forklarer utsagnet sitt og tankemåten sin, er bevis for *resonnementskompetansen* og *adaptiv resonneringsevne*, fordi E2 begrunner hvorfor det er to variabler.

I den siste uttalelsen til E1 virker det som om begge elevene nå har den samme forståelsen for hvordan de skal fortsette videre. Man kan registrere *problembehandlingskompetansen* og *strategisk kompetanse*, da de klarer å identifisere problemet og finner en plan for å komme frem til svaret. En løsning på oppgaven krever problembehandling, og rutineferdigheter strekker ikke til, som vil si at ut ifra Niss og Jensen (2002) er denne oppgaven et matematisk problem. Man kan altså registrere *problembehandlingskompetansen*.

Etter denne sekvensen bruker elevene tid på å sette opp tre ligninger, der de bruker x som variabel for vindusrutene og y som variabel for rammelengdene. Etter at elevene har funnet de tre ligningene de ønsker å ta i bruk for å finne x og y, kommer følgende dialog:

E1: Og da må vi bare snu og sånn da. Skal finne ut x da

Utregninger

E1: ok, så da er x lik 10 og y lik 20

E2: ja, så da får vi prøve. Det betyr at

E1: finn ut hvordan de har fastsatt prisene på vinduene

E2: tjue, førti. Tre, fire, ..., åtte, ikke sant? Åtte ganger tjue er hundre og seksti. Så er det tre ruter ganger ti, så det er tretti da. Er lik hundre og nitti

E1: vi gjorde det, vi er legender. Det er sånn de har fastsatt prisen

E2: ja, så for hver centimeter med sånn vindusramme, så er det tjue pund. Og for hver kvadratcentimeter med vindu så er det ti pund

Her ser man klart bevis for bruk av *symbol- og formalismekompetansen*, da elevene setter opp tre likninger, og klarer å bruke dem riktig for å komme frem til en løsning.

Vi registrerer også *konseptuell forståelse*, fordi eleven fort ser hva som bør gjøres for å komme frem til et svar. Så dette er et bevis på at elevene har lært på grunnlag av forståelse. Elevene finner en generalisering for alle vinduene, ikke bare for de vinduene de ser på, og man kan derfor registrere *tankegangskompetansen*.

Vi finner også bevis for *prosedyrekompetansen*, da elevene ser at det å sette opp et likningssett er det mest hensiktsmessige for å komme frem til en løsning. De bruker flere prosedyrer her, både det å sette opp likninger, sette likningene sammen til et likningssett og å løse dem. Som nevnt flere ganger tidligere, er det å lage en formel en for form modellering, som gjør at vi kan registrere *modelleringskompetansen* også.

Elevene bruker både en visuell og en skriftlig representasjon i løsningen sin, noe som signaliserer *representasjonskompetanse* og *konseptuell forståelse*.

Vi ser tegn til *adaptiv resonneringsevne* og *resonnementskompetansen*, da elevene undersøker om løsningen deres er korrekt ved å teste formelen på et annet vindu, og de i slutten av sekvensen beskriver hvordan dette firmaet fastsetter pris på vinduene sine.

4.2.2 Elevpar 2

Elevpar 2 er samme elevpar 2 som ved forrige intervjurunde.

Oppgave 2.1

Som forklart i analysen av elevpar 1 sin tilnærming til denne oppgaven, vil jeg behandle alle deloppgavene i denne som en felles oppgave, fordi de krever lignende tilnærming.
Elevene får utdelt figuren man kan finne i vedlegg 3 under oppgave 2.1. Dette er den initielle dialogen mellom elevene:

E4: ok. Er det 9? Skal vi telle? Vi bare sier det

E3: to, fire, seks, åtte, ni. Og det ser ut som det er ni på andre siden også, ja det er ni

E4: er det ni?

E3: det er ni

E3: Det er ikke ni ganger ni?

E4: hæ? Det er ikke det?

E3: nei, for det er bare den blå

Man kan se her hvordan elevene i større grad diskuterer underveis i oppgaveløsningen enn ved dialogene deres i intervjurunde 1, og dette gir flere bevis for *kommunikasjonskompetansen*. Den har to sider ved seg, en uttrykkende og en mottakende side. Den uttrykkende innebærer å kunne utrykke seg matematisk ovenfor andre, og den mottakende siden innebærer å kunne sette seg inn i andres matematiske utsagn (Niss & Jensen, 2002, s. 60-61). Elevene klarer å sette seg inn i oppgaveteksten, formulere seg matematisk ovenfor hverandre og klarer å sette seg inn i hverandres matematiske utsagn.

Man kan registrere tidlig indikasjon på at elevene bruker *strategisk kompetanse* og *problembehandlingskompetansen*, da de to kompetansene innebærer å identifisere et problem, finne en løsningsstrategi og ikke minst å komme frem til en løsning på problemet (Kilpatrick et al., 2001, s. 124-129; Niss & Jensen, 2002, s. 49-50). Jeg satte denne oppgaven som et matematisk problem ut ifra definisjonen til Niss og Jensen (2002) i elevpar 1 sin tilnærming av samme oppgave som gjør at man kan registrere *problembehandlingskompetansen*.

Vi kan se hvordan E3 retter opp i E4 sin antakelse om at man kan ta 9 ganger 9 for å finne løsningen, og ved å gjøre dette overbeviser E3 den andre eleven om at sin løsning er korrekt og begrunner hvorfor. Dette er aspekter ved både *resonnementskompetansen,* som innebærer å bedømme egne og andres resonnement i tillegg til å overbevise andre om gyldigheten til ens løsning (Niss & Jensen, 2002, s. 54). Det er også aspekter ved *adaptiv resonneringsevne*, som blant annet innebærer å begrunne egne metoder og løsninger (Kilpatrick et al., 2001, s. 116-118). Jeg spurte elevene om de kunne forklare hvordan de kom frem til svaret sitt:

E3: først telte vi jo ruter, på siden og her. Og da fant vi at det var ni og da er det jo ni overalt rundt i firkanten. Og den består jo av fire ulike sider. Så tok vi rutene og ganget med de ulike sidene den består av

Vi får her mer informasjon om hva løsningsstrategien til elevene er. Selv om man ikke kan få et direkte innblikk i elevenes tankegang, kan man tenke seg at elevene danner en mental modell, ved at de ser løsningen for seg i hodet. Evne til dette inngår i *strategisk kompetanse* og *modelleringskompetansen* (Kilpatrick et al., 2001, s. 124-129; Niss & Jensen, 2002, s. 52-53).

Elevene bruker flere av de fire regneartene, og det å kunne velge og gjennomføre flere passende prosedyrer i ulike situasjoner inngår i *prosedyrekompetansen* (Kilpatrick et al., 2001, s. 121-123). Man kan også registrere *symbol- og formalismekompetansen*. Selv om elevene har et nokså enkelt matematisk språk, så setter de opp og gjennomfører matematiske utregninger (Niss & Jensen, 2002, s. 58).

Elevene får deretter i oppgave å finne andre måter å løse den forrige oppgaven på:

E4: man kan jo ta ni ganger ni. Finne åttien, også finne ut hva den hvite er. Også ta minus
E3: vi kan jo bare telle over den

Å se at et matematisk problem kan løses på flere ulike måter er aspekter man finner igjen i beskrivelsene av *problembehandlingskompetansen* og *konseptuell forståelse* (Kilpatrick et al., 2001, s. 118-120; Niss & Jensen, 2002, s. 49-50). Jeg spør elevene om de kan telle rutene rammen består av, slik at de kan se at løsningen deres ikke er korrekt:

E3: en, to, ..., trettito
E4: hæ?
E3: jeg visste det. For det de er fire her, vi kan ikke bruk dem på nytt

Elevene ser nå at tallet de får ved å telle, ikke stemmer overens med det tallet de fikk da de løste problemet ved regning. Her tar elevene i bruk et nytt aspekt ved *konseptuell forståelse* enn det de brukte tidligere, nemlig det at en selv ser hvilke feil en har gjort (Kilpatrick et al., 2001, s. 118-120). Det at jeg ledet elevene i den retningen, gjør at en kan diskutere om de noen gang ville ha innsett feilen sin i motsatt fall, og dermed om kompetansen egentlig bør registreres.

At man endrer metode eller løsning er et ikke ukjent fenomen i matematikk, og det kan skje som en konsekvens av mange ulike hendelser. Evne til å endre løsningsmetoden finner man finner i beskrivelsene av *problembehandlingskompetansen*, *modelleringskompetansen* og *strategisk kompetanse* (Kilpatrick et al., 2001, s. 124-129; Niss & Jensen, 2002, s. 49-50, 52-53).

De to neste oppgavene er å finne ut hvor mange ruter rammen vil bestå av når hele kvadratet består av 16 og 64 ruter. Elevene bruker samme metode som de innså de kunne bruke i forrige oppgave, nemlig å gange sidene med fire minus fire. Jeg ber elevene så å finne ut hvor mange ruter rammen består av når hele kvadratet består av n ruter.

E3: jeg er veldig dårlig på sånn. Så jeg er litt usikker her. Har du noen forslag?

E4: nei, vi vet jo at det er et kvadrat. For å finne den ene siden må vi ta kvadratroten. Så kvadratroten av x ganger, hva blir det da? Kvadratroten av x i andre? Nei
E3: jeg aner ikke
E4: ganger kvadratroten av x, er lik x, parentes minus fire

Vi ser at ingen av elevene er helt trygge på hvordan de kan løse dette problemet, men E4 har ideer som kan føre til en korrekt løsning. E4 tar i bruk *symbol- og formalismekompetansen* her, da involveres flere matematiske symboler som x, kvadratrot og opphøyd i andre, som er et viktig aspekt ved denne kompetansen (Niss & Jensen, 2002, s. 58).

Elevene sto fast når det kom til å ferdigstille formelen, og de ble derfor spurt om de kunne lage en formel når kvadratet besto av 36 ruter:

E4: kvadratroten til trettiseks er seks. Ganger seks med fire, siden det er fire sider. Minus fire, som er tjue
I: klarer dere å lage en generell? Hvis jeg sier at et kvadrat består av x antall ruter, kan dere finne ut hvor stor rammen er da?
E4: bytte ut trettiseks med x, går ikke det?

Vi ser her at elevene til slutt klarer å komme frem til en generell formel for utregning av rammen til kvadratet. Som beskrevet før denne sekvensen, fikk elevene en del støtte på veien da de sto litt fast. En kan da diskutere hvorvidt dette er kompetanser elevene tar i bruk, eller kompetanser jeg gav dem. Men hensikten med min oppgave er å undersøke hvilke kompetanser elever tar i bruk i sin tilnærming til åpne og rike oppgaver. Jeg vil hevde at selv om de fikk støtte på veien, viser elevenes arbeid her at de kan ta i bruk disse kompetansene. Som nevnt tidligere er en formel en modell, og modellering er et aspekt ved *modelleringskompetansen* og *strategisk kompetanse*, i tillegg til at det å lage en formel selvsagt også går under *symbol- og formalismekompetansen*.

Tankegangskompetansen innebærer blant annet generalisering av matematiske resultater (Niss & Jensen, 2002, s. 47-48). Da elevene har løst 3 oppgaver med ulike verdier av n, er denne formelen en generalisering av alle kvadrater som har størrelse n.

Man kan også se hvordan elevene tar i bruk flere prosedyrer for å komme frem til den endelige formelen. Blant annet involveres de fire regneartene, det lages en formel og utregninger generaliseres. Dette involverer også *prosedyrekompetansen*. Jeg vil legge til at man også ser bevis for *resonnementskompetansen* og *adaptiv resonneringsevne*, men i svært liten grad. Antakelig skyldes dette kompleksiteten i oppgaven.

Oppgave 2.2

Elevene fikk utdelt figuren man finner i vedlegg 3 under oppgave 2.2, og muntlig oppgaveformuleringen. Dette var den initiale dialogen etter det:

E3: er de ikke like?
E4: like dann? Nå sier jeg at det er et lurespørsmål, det er samme areal overalt
E3: jeg føler det samme
E4: det er for lite informasjon til at vi skal finne ut av dette her
E3: fordi her blir den sirkelen bare delt i fire, virker det som. Eller jeg vet ikke
E4: det blir mindre tomrom i midten
E3: fordi den kunne liksom vært her, men den er. Det er vanskelig å forklare, men jeg føler liksom at det er likt
E4: men jeg er ikke helt sikker

Konseptuell forståelse innebærer god matematisk forståelse, sammen med læring ved forståelse og bruk av tidligere kunnskap (Kilpatrick et al., 2001, s. 118-120). Vi ser at elevene føler at det blå området har like stort areal ved de fire kvadratene, men de klarer ikke helt å forklare matematisk hvorfor det er på denne måten. Man kan også argumentere for at elevene tar i bruk *tankegangskompetansen*, da de virker til å ha god forståelse for begrepet areal, noe som gjør at de kan se hva løsningen er. De bruker også en viss grad av *resonnementskompetanse* og *adaptiv resonneringsevne* i forbindelse med at de prøver å forklare hvorfor de mener at alle arealene er like.

Elevene identifiserer problemet og man kan derfor registrere *problembehandlingskompetansen* og *strategisk kompetanse*, dette kan jeg gjøre fordi jeg satte denne oppgaven som et matematisk problem i elevpar 1 sin tilnærming av denne oppgaven. I neste utdrag fra transkriberingen ser man at elevene finner en metode for å løse oppgaven og klarer til slutt å løse den, og dette er viktige aspekter ved begge disse kompetansene.

Jeg spør så elevene om det går an å sjekke om det de har funnet stemmer:

E3: vi kunne jo ha funnet ut, nei. Det funker ikke
I: hva da?

E3: jeg tenkte på radius og sånn. Jeg vet ikke, det blir jo ikke det samme
E4: hvis det er 1 centimeter, da er diameteren ca. en centimeter, radiusen blir da en null komma fem centimeter eller en halv centimeter. Nå vet jeg egentlig ikke hva jeg holder på med. Nei, jeg har egentlig ikke noe
I: husker dere hva formelen for areal av en sirkel er?
E4: pi, r, i annen?
E3: ja, pi, r, i annen. Tror jeg trenger kalkulator for det

Elevene bruker her *symbol- og formalismekompetansen*, da de tar i bruk formelen for areal og flere matematiske symboler som pi og «i annen». Vi ser også *konseptuell forståelse* her, fordi elevene tar i bruk tidligere kunnskap om areal.

Man kan også se bevis for *hjelpemiddelkompetansen*, da E3 i den siste setningen sier at dette trenger man kalkulator for å regne ut. Å vite når det er hensiktsmessig å ta i bruk hjelpemidler, inngår også i *prosedyrekompetansen*.

Elevene regner kun ut arealet til en av figurene før de ser hvorfor arealet til de blå områdene må være det samme i de fire figurene:

E4: da blir jo radiusen null komma tjuefem på figur to. Så da blir to figurer altså en halv, så det blir samme radius. Hvis man tenker begge to
E3: ja, fordi man kan jo bare tenke at man putter de to som er halvparten av sirkelen, og de to som er halvparten av sirkelen

Ved å bruke den visuelle figuren og utregninger for å representere problemet, tar elevene i bruk flere representasjoner. Dette viser både *konseptuell forståelse* og *representasjonskompetanse*. Videre bruker de *kommunikasjonskompetansen*, ved at de klarer å utfolde seg matematisk og E3 klarer å sette seg inn i E4 matematiske utsagn. I løpet av denne sekvensen og arbeidet de har gjort individuelt i forkant, tar elevene i bruk flere prosedyrer til å ende opp der de gjør her, da spesielt formelen for sirkelareal og flere av de fire regneartene. Dermed kan vi igjen registrere *prosedyrekompetansen*.

Elevene bruker også kompetansen *konseptuell forståelse*, da de etter kun en utregning ser og beskriver hvorfor de alle må være like. De bruker dermed også *resonnementskompetansen* og *adaptiv resonneringsevne*.

I disse uttalelsene får man et inntrykk av at elevene ser hvordan disse ulike figurene hører sammen og hvorfor det blå arealet må være like stort i hver figur. Dette er en form for mental modell som er et aspekt ved både *modelleringskompetansen* og *strategisk kompetanse*.

Oppgave 2.3

Det viste seg at dette var en nokså utfordrende oppgavene for elevene, og det ble brukt mye tid på å få elevene til å sette seg inn i oppgaven. Elevene brukte en del tid på å prøve å resonnere seg fram til hva inngangsvinkelen kunne være. I sekvensen nedenfor kan vi observere at elevene er innom mange av de tankesettene som trengs for å løse oppgaven.

I: hva er likheten mellom det vinduet, og det vinduet der da? Sånn i form?
E4: den er to ganger to, den andre er en ganger tre. Det koster ti pund mindre for en rute
I: hva betyr det at en ruter koster da?
E3: ti
I: ja, så en rute koster ti. Hvordan kan dere bruke det for å regne ut? Hva betyr det at en rute med vindu koster ti pund?
E3: vent litt, skal se fort på den. En, ..., fire og en, ..., syv. Fire ganger syv er tjuefire. Nei, det gir fortsatt ikke mening
E4: nå henger jeg ikke med

Her har vi en sekvens der jeg prøver å gi elevene noe støtte og veiledning for at de kanskje skal kunne komme inn på rett vei. Det kan være utfordrende å gi passe støtte i slike situasjoner, for som diskutert i metodekapittelet og teorikapittelet skal man ikke gi for mye veiledning til elever i oppgavebaserte intervjuer eller ved arbeid med åpne oppgaver (Goldin, 2000, s. 542; Sullivan et al., 2013, s. 62-64). Vi kan registrere *kommunikasjonskompetansen*, da elevene til en viss grad klarer å sette seg inn i oppgaveteksten og mine matematiske utsagn, men mot slutten av sekvensen ser vi at elevene har problemer med å forstå mine kommentarer:

E4: det må jo være en glipp i systemet deres. For hvis et vindu, koster ti. Også er det tre der, det blir jo tretti. Og da koster rammen hundre og seksti
I: hvor stor er rammen?
E4: den va jo åtte i omkrets
I: ja, og hva var det du sa rammen kostet til sammen?

E4: hundre og seksti. Å, da fikk jeg tjue. Tjue pund for en rammelengde. Tjue for ramme og ti for vindu.

I: Hva gjør de her da, på G?

E3: da blir det, det blir sikkert ekstra for rammen da. Da må vi ta mange ganger den

E4: teller og gange med to, kanskje?

E3: seks ganger tjue

E4: hundre og tjue

E3: ja, riktig

Fordi elevene fikk såpass mye støtte i denne oppgaven, virker det ikke som om de har behov for å begrunne og forsvare egen løsningsmetode. Men vi ser allikevel tendenser til det, og de klarer til slutt å beskrive hvordan fabrikken bestemmer prisene, så jeg vil hevde at man kan registrere *resonnementskompetansen* og *adaptiv resonneringsevne*.

Elevene har sammenlignet ulike vinduer for å finne en sammenheng som kan gi dem en modell for hvordan firmaet fastsetter prisen på vinduene sine. Modellering inngår i både *modelleringskompetansen* og *strategisk kompetanse*.

4.3 Oppsummering

Tabellen nedenfor viser en oversikt over hvilke kompetanser som ble registrert hos de ulike elevgruppene og oppgavene, og i tillegg er rammeverket til Yeo (2017) lagt til. Tabellen oppsummerer analysene visuelt.

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="16">Oppgaver</th></tr>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="2">1.1</th><th colspan="2">1.2a</th><th colspan="2">1.2b</th><th colspan="2">1.3b&c</th><th>2.1a</th><th colspan="2">2.1b&c</th><th>2.1d</th><th colspan="2">2.2</th><th colspan="2">2.3</th></tr>
<tr><th colspan="2">Rammeverk</th><th>E1</th><th>E2</th><th>E1</th><th>E2</th><th>E1</th><th>E2</th><th>E1</th><th>E2</th><th colspan="2">E1</th><th colspan="2">E2</th><th>E1</th><th>E2</th><th>E1</th><th>E2</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Niss og Jensen (2002)</td><td>Tankegang</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td colspan="2">X</td><td colspan="2">X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Problembehandling</td><td></td><td></td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td colspan="2">X</td><td colspan="2">X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Modellering</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td colspan="2">X</td><td colspan="2">X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>Resonnement</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td>X</td><td colspan="2">X</td><td colspan="2">X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>Representasjon</td><td></td><td></td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td colspan="2">X</td><td colspan="2"></td><td></td><td>X</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Symbol- og formalisme</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td colspan="2">X</td><td colspan="2">X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Kommunikasjon</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td colspan="2">X</td><td colspan="2">X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>Hjelpemiddel</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">Kilpatrick et al. (2001)</td><td>Konseptuell forståelse</td><td></td><td></td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td colspan="2">X</td><td colspan="2">X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Prosedyre</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td colspan="2">X</td><td colspan="2">X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Strategisk</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td colspan="2">X</td><td colspan="2">X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>Adaptiv resonnering</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td colspan="2">X</td><td colspan="2">X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>Produktiv holdning</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">Yeo (2017)</td><td>Mål</td><td colspan="2">L</td><td colspan="2">L</td><td colspan="2">L</td><td colspan="2">L</td><td>L</td><td colspan="2">L</td><td>Å</td><td colspan="2">L</td><td colspan="2">L</td></tr>
<tr><td>Svar</td><td colspan="2">L</td><td colspan="2">Å</td><td colspan="2">L</td><td colspan="2">Å</td><td>L</td><td colspan="2">L</td><td>L</td><td colspan="2">L</td><td colspan="2">L</td></tr>
<tr><td>Metode</td><td colspan="2">L</td><td colspan="2">Å</td><td colspan="2">Å</td><td colspan="2">Å</td><td>Å</td><td colspan="2">Å</td><td>Å</td><td colspan="2">Å</td><td colspan="2">Å</td></tr>
<tr><td>Kompleksitet</td><td colspan="2">L</td><td colspan="2">L</td><td colspan="2">Å</td><td colspan="2">Å</td><td>L</td><td colspan="2">L</td><td>Å</td><td colspan="2">Å</td><td colspan="2">Å</td></tr>
<tr><td>Utvidelse</td><td colspan="2">Å</td><td colspan="2">Å</td><td colspan="2">Å</td><td colspan="2">Å</td><td>Å</td><td colspan="2">Å</td><td>Å</td><td colspan="2">Å</td><td colspan="2">Å</td></tr>
</table>

Figur 4: Oversikt over registrerte kompetanser hos elevpar og oppgaver, samt oppgavenes åpenhet i henhold til rammeverket til Yeo (2017)

Tabellen viser hyppig registrering av de ulike kompetansene ved begge rammeverkene, med unntak av produktiv holdning og hjelpemiddelkompetansen som kun ble registret en gang. Dette mener jeg er grunnet i enkelheten av tallene brukt i oppgavene i tillegg til at bruken av hjelpemidler ikke alltid kom frem i transkriberingen, og at det er utfordrende å få informasjon om elevers holdninger gjennom en transkribering av deres oppgaveløsning.

Det er ikke store variasjoner hos de ulike elevparene sine tilnærminger, som kan tyde på at kompetansene registrert ved de åpne og rike oppgavene er nødvendig for å løse oppgaver av et slikt kaliber. Man kan se at det registreres flere, og andre, kompetanser ved de åpne og rike oppgavene enn ved den lukkede oppgaven, oppgave 1.1.

5 Hovedfunn og diskusjon

Analysen av transkriberingen ut ifra rammeverkene til Kilpatrick et al. (2001) og Niss og Jensen (2002) har gitt mange interessante funn om hvordan elever tilnærmer seg åpne og rike oppgaver. Jeg vil i dette kapittelet trekke frem og drøfte tre hovedfunn fra analysen som jeg fant var spesielt interessant.

5.1 Hovedfunn 1: Interaksjonen mellom kommunikasjon og resonnement

Kommunikasjonskompetansen innebærer på den ene siden å kunne sette seg inn i og tolke andres matematiske utsagn, og på den andre siden å kunne uttrykke seg matematisk. Matematiske utsagn kan komme i en muntlig, skriftlig eller visuell form (Niss & Jensen, 2002, s. 60-61). Resonnementskompetansen innebærer blant annet å kunne følge og bedømme matematiske resonnement, i tillegg til å overbevise seg selv og andre om gyldigheten av matematiske resonnement (Niss & Jensen, 2002, s. 54).

Som beskrevet i delkapittelet 2.1.3 har resonnementskompetansen til Niss og Jensen (2002) store likhetstrekk med Kilpatrick et al. (2001) sin kompetanse *adaptiv resonneringsevne*, og man kan derfor argumentere for at det som blir drøftet rundt resonnementskompetansen i dette hovedfunnet også vil gjelde for adaptiv resonneringsevne.

Analysen viser at kommunikasjonskompetansen og resonnementskompetansen *ofte opptrer samtidig*, noe som indikerer en relasjon mellom dem. For å kunne gi et resonnement må man ta i bruk en eller annen form for kommunikasjon, og dette er noe man finner igjen i analysen. Der man registrerer resonnementskompetansen, har man alltid registrert kommunikasjonskompetansen også.

Observasjon av de to elevparenes interaksjoner i oppgaveløsningen viste at elevpar 1 hadde et bedre samarbeid enn elevpar 2, spesielt med tanke på å det å sammen komme frem til en løsning på oppgavene. Elevpar 1 jobbet stort sett alltid sammen igjennom hele oppgaveløsningen, men det var ofte at elevpar 2 jobbet individuelt. Hos disse foregikk interaksjonen mellom de to kompetansene når begge hadde kommet frem til en løsning, eller hvis de sto fast underveis i oppgaveløsningen.

Elevpar 1 brukte altså i stor grad kombinasjonen av de to kompetansene kontinuerlig i deres oppgaveløsning, mens elevpar 2 brukte kombinasjonen i slutten av oppgaveløsningen.

For at elevene skal kunne komme med en begrunnelse for sin løsning, må de ta i bruk en eller annen form for kommunikasjon. Å begrunne egen løsning kan skje skriftlig, så vel som muntlig, men det krever kommunikasjon. Slik sett kan vi si at kommunikasjonskompetansen er nødvendig for resonnementskompetansen.

Sullivan et al. (2013) mener at hvis elever skal ha mulighet til matematisk læring, må de få mulighet til å selv kunne vurdere og ta avgjørelser i problemløsning, og at dette er noe åpne oppgaver kan gi mulighet for, i tillegg til å fremme kommunikasjon (Sullivan et al., 2013, s. 57-58). Munroe (2015) skriver at å arbeide med åpne oppgaver kan gjøre at elever får ferdigheter til kritisk tenkning og Pehkonen (1997) trekker frem ferdigheter som forklaring, utdyping og oppsummering som arbeid med åpne oppgaver kan føre til (Munroe, 2015, s. 98; Pehkonen, 1997, s. 90). Disse ferdighetene er aspekter vi kan finne igjen i Niss og Jensens (2002) beskrivelse av kommunikasjonskompetansen og resonnementskompetansen. At en oppgave er åpen gjør at det finnes flere muligheter enn ved en lukket oppgave, det finnes flere svar eller flere løsningsmetoder. Dette medfører at det er flere valg å ta og det er viktig å kunne begrunne egne løsninger. Som nevnt tidligere, kan man heller ikke vurdere riktigheten av en løsning på en åpen oppgave ved å kun se på svaret, en må se på hele prosessen fra start til slutt (Sullivan et al., 2013, s. 62-64). For at man som lærer skal få et innblikk i elevers tankegang, må elevene sette ord på tankene bak valgene sine.

Det er her kombinasjonen av kommunikasjons- og resonnementskompetansen kommer inn. Elever må kunne forsvare sine egne løsninger og overbevise andre om at de valgene en har tatt, gjør at ens løsning er gyldig og korrekt. Det er ikke alltid lett å sette ord på hva en tenker, men det er et viktig aspekt ved kommunikasjonskompetansen at en klarer å uttrykke seg matematisk.

Å løse oppgaver sammen og ha et godt samarbeid innebærer at begge parter forstår prosessen, og er med på å ta valg. Vi kan se at elevpar 1 brukte tid på å diskutere og forhøre med hverandre om hvilken vei de skulle ta og om begge forsto og var enig i utregningene og retningene de gikk i. I situasjoner der det ble uenigheter eller mangel på forståelse, måtte de bruke tid på å komme til en enighet. For å gjøre dette må den ene parten klare å sette ord på hva den tenker og hvorfor den mener at retningen den ønsker å gå er den riktige – må overtale den andre om at ens resonnement er en korrekt måte å gjøre det på. En må uttrykke seg matematisk, slik at den andre parten klarer å sette seg inn i ens tankegang. På den andre siden må elevene klare å sette seg inn i den andres matematiske utsagn og klare å følge og bedømme de begrunnelsene og resonnementene den andre kommer med.

Selv om elevpar 2 tilsynelatende ikke hadde et like godt samarbeid, kan vi allikevel se at denne kombinasjonen av kompetanser kommer til syne i deres oppgaveløsning også. I stor grad jobbet elevpar 2 individuelt, og samtalen dem imellom oppsto ofte når begge hadde kommet frem til en løsning, eller hvis en eller begge sto fast i oppgaveløsningen. Også her ser vi altså at kombinasjonen kommunikasjon-resonnement er fremtredende i deres samtale.

5.2 Hovedfunn 2: Forståelse for prosedyrer

I teorien om matematisk kompetanse og åpne oppgaver ser vi at det er flere som tar opp problematikken ved at elever kun kan ta i bruk prosedyrer, men ikke har en underliggende forståelse for dem. Rammeverkene for matematisk kompetansene indikerer at matematisk kompetanse innebærer mer enn å bare kunne utføre matematiske prosedyrer, det handler like mye, om ikke mer, om ulike former for «forståelse». Dette poengteres også i teorien om åpne oppgaver, budskapet er at en kan ikke fortsette med de tradisjonelle oppgavene en har gitt elever i en årrekke. De tradisjonelle oppgavene er prosedyreoppgaver som kan gjøre at elever ser på matematikk som et fag bestående av regler og prosedyrer, og teorien argumenterer for at læring ved forståelse ikke skjer ved bruk av slike oppgaver.

Som beskrevet i teorikapittelet har forståelse i matematikk forståelse i matematikk blitt beskrevet ved begrepsparet *instrumentell* og *relasjonell* forståelse. Den instrumentelle forståelsen innebærer å ha forståelse for hva en gjør, men ikke *hvorfor* en gjør det. Den relasjonelle forståelsen innebærer både å vite hva og hvorfor (Skemp, 1976, s. 259). En kan si at instrumentell forståelse i beste fall refererer til den praktiske bruken av matematikk, mens relasjonell forståelse går dypere og er det man kaller matematisk forståelse (Mellin-Olsen, 1981).

Problematikken ved at elever kan gjennomføre prosedyrer, men ikke har relasjonell forståelse for dem, gir oss en link fra kompetanserammeverkene over til teorien for ulike typer forståelse. Prosedyrekompetansen til Kilpatrick et al. (2001) innebærer ikke bare det å kunne bruke prosedyrer, men vite når de er hensiktsmessig å ta i bruk og å kunne bruke dem fleksibelt, korrekt og nøyaktig (Kilpatrick et al., 2001, s. 121-123). Å kunne bruke prosedyrer fleksibelt innebærer å kunne tilpasse dem til nye situasjoner. Kilpatrick et al. (2001) beskriver at det å inneha konseptuell forståelse er å lære ved forståelse, og dette kan vi forstå som relasjonell forståelse. Lærer en noe som ikke er basert på forståelse vil det være vanskelig å bruke og tilpasse det en har lært til nye situasjoner.

Som diskutert i teorikapittelet finnes det mange typer av åpne oppgaver, der noen er enkle og andre er mer avanserte. Komplekse oppgaver er oppgaver der det ikke er innlysende hva løsningen eller løsningsmetoden er (Yeo, 2017, s. 184-185) I denne studien hadde vi et par slike oppgaver, blant annet vindusoppgaven og rammeproblemet. Ifølge rammeverket til Yeo har disse oppgavene åpenheten når det kommer til kompleksitet, fordi de er utfordrende og det ikke alltid er innlysende hva en skal gjøre.

Ved vindusoppgaven, se oppgave 2.4 i vedlegg 3, skal en finne ut hvordan en butikk avgjør hva et vindu skal koste ut ifra de to variablene vindu og ramme. Elevpar 1 bruker ikke lang tid før de ser at de kan sette dette opp som et ligningssystem med to ukjente, der de ser at de må sette opp tre ligninger for å finne ut hva de to ukjente er. De støter på få problemer og finner fort ut at det ikke holder med to ligninger, og finner fort en tredje. Hvis man har forståelse for ligningssystemer og hvordan en kan finne ut av ukjente variabler ved bruk av ligningssystemer, kan man fort se at dette er en hensiktsmessig prosedyre å ta i bruk ved denne oppgaven. Ut ifra elevpar 1 sin tilnærming vil jeg hevde at de har lært denne prosedyren ved forståelse, fordi de klarer å tilpasse den til den nye situasjonen de står ovenfor. Denne antakelsen blir forsterket ved å undersøke elevpar 2 sin tilnærming. Begge disse elevparene går i samme klasse og har samme matematikklærer, så de vil i utgangspunktet ha samme grunnlag og ha lært det samme. Elevpar 2 bruker mye tid på å prøve å resonnere seg frem til hva inngangsvinkelen kan være, men kommer ikke noe lenger uten støtte fra meg. Med litt veiledning fra meg ved å sammenligne to vinduer kommer elevene til slutt frem til svaret.

Ved å sammenligne de to tilnærmingene ser vi at det kan virke som at elevpar 1 har en mer relasjonell forståelse enn elevpar 2, i tillegg til å ha en bedre konseptuell forståelse og en mer utviklet prosedyrekompetanse.

Det som kan være spesielt utfordrende ved oppgaver som er åpne med tanke på dens kompleksitet, er hvor mye støtte en skal gi til elever som står fast. Dette er en problematikk Sullivan et al. (2013) tar opp. De skriver at det er viktig at en på forhånd har tenkt igjennom hvilken støtte en kan gi til elever uten at en lukker oppgaven for dem. De hevder også at ved å la elevene selv komme frem til en løsning på et problem, gir man dem selvtillit som de kan ta med seg videre, i tillegg til at det vil øke deres forståelse (Sullivan et al., 2013, s. 60-61). Selv om det kan være ubehagelig og tidslukende, er det rimelig å tro at å la elever få jobbe lenge med en oppgave og knote litt, vil gi elevene et bedre utbytte enn hvis man lukker oppgaven for dem. En vet at det å klare noe på egenhånd gir en bedre mestringsfølelse enn hvis noen andre har hjulpet deg, eller til og med har gjort det for deg.

Ved rammeproblemoppgaven, se oppgave 2.2 i vedlegg 3, ser vi en litt annerledes tilnærming blant elevparene. Elevene ble spurt om de kunne finne ut hvor mange ruter rammen av et kvadrat besto av når kvadratet besto av ulikt antall ruter. Elevpar 1 så at det var et mønster, og begynte uoppfordret å finne en generell formel. Den siste deloppgaven til denne oppgaven var nemlig å finne en generell formel for et kvadrat av størrelse n. Begge elevparene klarte oppgaven, men ulikheten bestod i at det ene paret gjorde dette uoppfordret midt i oppgaven, og det andre gjorde det når de ble spurt om det. Det er rimelig å si at det å se etter mønstre uoppfordret er en indikasjon på relasjonell forståelse.

Konklusjonen er at mine funn indikerer at arbeid med åpne og rike oppgaver kan gjøre at elever får utvikle *både* prosedyrekompetansen og konseptuell forståelse. Arbeid med slike oppgaver kan gi elevene relasjonell forståelse, fordi slike oppgaver gjerne krever at en bruker prosedyrer og tilegnet kunnskap på en ny måte.

5.3 Hovedfunn 3: Utfordrende side ved åpne oppgaver

Som drøftet i teorikapittelet, vil det i praksis kunne finnes en usikkerhet rundt hvor mye «matematikk» som vil komme ut av det å sette elever til å arbeide med åpne og rike oppgaver, da spesielt med tanke på kravene fra læreplanen og tidspress. Sullivan et al. (2013) skriver at en løsning på denne problematikken er å ta i bruk såkalte innholdsspesifikke åpne oppgaver, der en implementerer visse matematiske konsepter en ønsker at elevene skal oppdage gjennom arbeid med slike oppgaver (Sullivan et al., 2013, s. 58).

Som diskutert under hovedfunn 1 kan det å arbeide med åpne og rike oppgaver føre til at elever får mer muntlig kommunikasjonskompetanse, da de må klare å sette ord på tankene sine og i diskusjoner rundt oppgaven. De må også klare å sette seg inn i andres matematiske utsagn og uttrykke sine løsningsmetoder på en matematisk måte, slik at ens medelever klarer å sette seg inn i den sier. Selv om muntlig aktivitet får en større og større rolle i matematikken, er det fortsatt et skriftlig fag. Skriftlig kommunikasjon er en viktig kompetanse å ha i matematikk, da store deler av faget dreier seg om skriftlig aktivitet. Matematikk involverer mange symboler og formler en må bruke og sette opp for å kunne løse problemer. Det er da viktig å ha kompetanse innenfor skriftlig kommunikasjon, fordi det skaper forståelse av fagets natur, videre utdanning og ikke minst eksamen.

Resultatene i min studie viser at elevene gav løsningene muntlig. Antakelig var dette fordi dette var en intervjusituasjon, der det var naturlig å gi løsningen muntlig. Det som er mer interessant å diskutere er hvor mye skriftlig arbeid, og da spesielt skriftlig kommunikasjon, elevene gav underveis i arbeidet med oppgavene. Vi ser at elevene stort sett tok i bruk skriftlig arbeid ved utregninger, og utenom de gangene det ble bedt om en formel *skrev de aldri ned den endelige løsningen* eller skrev løsningen slik en hadde forventet hvis det var på en skriftlig vurderingssituasjon. Igjen avhenger dette mye av situasjonen, men ut ifra teorien og anbefalingene rundt arbeid med åpne oppgaver virker det som om det er en viss likhet mellom intervjusituasjonen og den klasseromssituasjonen åpne oppgaver typisk gis i.

Tror mye av dette handler om situasjon og forventning. Hvis elevene vet at en skal diskutere løsningene sine i plenum, vil de kanskje ikke skrive ned en skriftlig helhetlig løsning, Hvis de vet at det er forventet at de skal skrive det ned eller levere det inn, vil de komme med en skriftlig helhetlig løsning. Det er viktig at elevene vet hva som er forventet av dem.

Å arbeide med åpne oppgaver i matematikklasserom er et ukjent territorium for både elever og lærere. Lærere trenger erfaring med å bruke og utarbeide åpne oppgaver, og det virker kanskje enklere å ta i bruk kjente og kjære oppgaver der en vet godt hva elevene skal gjøre, hva en kan forvente at de svarer eller har problemer med og en har god kontroll på hva elever lærer eller skal lære ved å løse slike oppgaver. Samtidig er det viktig at arbeidet med de åpne oppgavene ikke fremstår som adskilt fra den aktiviteten, for eksempel ved at skriftlig kommunikasjon av elevenes løsninger ikke legges vekt på. Elevenes bruk av skriftlighet i min studie eksemplifiserer denne problematikken.

6 Konklusjon og videre forskning

I dette kapittelet skal jeg først gi en kort oppsummering av funnene knyttet til problemstilling og forskningsspørsmål. I den forbindelse vil jeg også komme med noen forslag til videre forskning.

6.1 Utvikling av matematisk kompetanse gjennom åpne oppgaver

Problemstillingen for studien er: «Hvilke matematiske kompetanser bruker elever når de tilnærmer seg åpne oppgaver?». Lukkede oppgaver, som for eksempel prosedyre- eller drilloppgaver, har lenge dominert matematikkfaget. Der elever får øve seg i å bruke prosedyrer. Teori og tidligere forskning viser at ferdighetene elever utvikler gjennom kun lukkede oppgaver, ikke strekker til i utviklingen av matematisk kompetanse. Ønsket også å undersøke hvilken forskjell vi kan se i identifisering av matematiske kompetanser i tilnærming til åpne oppgaver, i forhold til ved lukkede oppgaver. Stilte dermed et ekstra forskningsspørsmål som jeg ønsket å besvare i denne studien: «Bruker elever andre kompetanser i arbeidet med åpne oppgaver, enn med tradisjonelle lukkede oppgaver?»

Åpne oppgaven kan gi elever flere muligheter til å utvikle matematisk kompetanse, enn lukkede oppgaver. Analysen viste identifikasjon av flere, og andre, kompetanser i elevenes tilnærming av de åpne oppgavene enn ved den lukkede. Den viste også hvordan registreringen av kompetansene ved tilnærmingene til den lukkede oppgaven var på et mer elementært grunnlag, lavere dekningsgrad, enn registreringen av de samme kompetansene ved andre oppgaver.

Hvis vi ser på hovedfunnene fra kapittel 5 vil vi se en sammenheng mellom kommunikasjon og resonnement. Dette kan tyde på at oppgaver der elever kommuniserer problemstillingen åpne oppgaver stiller, kan utvikle mer resonnementskompetansen enn ved lukkede.
Et annet hovedfunn fra kapittel 5 er hvordan elevene i større grad behøver forståelse for prosedyrer i arbeid med åpne og rike oppgaver, da disse ofte er nye og ukjente situasjoner for elever. Lukkede oppgaver kan være tilsynelatende like og stiller ikke krav om tilpasning og fleksibilitet i prosedyrekunnskapen. Ser i analysen hvordan elever behøver forståelse for å utvikle prosedyrekompetanse, og dette kan tyde på at åpne oppgaver som krever prosedyrekompetanse utvikler en mer relasjonell forståelse enn lukkede oppgaver.

6.2 Ideer til videre forskning

Som nevnt i kapittel 6.1 er en av konklusjonene ved denne studien at analysen indikerer at en bruker andre, og flere, kompetanser når man jobber med åpne oppgaver, enn med lukkede oppgaver. Det kunne vært interessant å undersøke mer hvilke kompetanser en bruker når en jobber med lukkede oppgaver. En må da gi mer lukkede oppgaver for å gi et godt grunnlag for en slik sammenligning.

Selv om man skulle finne at man bruker flere kompetanser ved åpne oppgaver, betyr det ikke at lukkede oppgaver er poengløse. Som skrevet i teorikapittelet er lukkede oppgaver hensiktsmessige å ta i bruk for øving på prosedyrer, som er en viktig del av matematisk kompetanse. En slik studie kan gi en dypere forståelse for hvordan en kan implementere de to oppgavetypene slik at de komplimenterer hverandre for utvikling av elevers matematiske kompetanse.

Litteraturliste

Befring, E. (2015). *Forskningsmetoder i utdanningsvitenskap*. Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Brinkmann, S. & Kvale, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (2. utg.). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Dalen, M. (2011). *Intervju som forskningsmetode. En kvalitativ tilnærming* (2. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Everett, E. L. & Furseth, I. (2012). Kunsten å holde stø kurs - å lage en god analyse. . I E. L. Everett & I. Furseth (Red.), *Masteroppgaven. Hvordan begynne og fullføre* (s. 145-161). Oslo: Universitetsforlaget.

Fangen, K. (2011). Analyse av observasjonsmateriale. I K. Fangen (Red.), *Deltakende observasjon* (2. utg., s. 170-194). Bergen: Fagbokforlaget

Fauskanger, J. & Mosvold, R. (2014). Innholdsanalysens muligheter i utdanningsforskning. *Norsk pedagogisk tidsskrift, 98*(02), 127-139.

Firebaugh, G. (2008). There Should Be the Possibility of Surprise in Social Research. I G. Firebaugh (Red.), *Seven Rules for Social Research* (s. 1-30). Princeton: Princeton University Press.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. I A. E. Kelly & R. A. Lesh (Red.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (s. 517-545). New York: Routledge.

Hagland, K. H., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem - inspiration till variation*. Malmö: Liber AB.

Johannessen, A., Tufte, P. A. & Christoffersen, L. (2010). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (4. utg.). Oslo: Abstrakt.

Johnson, B. R. (2013). Valditity of Research Results in Quantitative, Qualitative and Mixed Research. I B. R. Johnson & L. Christensen (Red.), *Educational Research: Quantitative, Qualitative, and Mixed Approaches* (s. 277-316). Los Angeles: Sage.

Kilpatrick, J. (2014). Competency Frameworks in Mathematics Education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of mathematics education* (s. 85-87). Amsterdam: Springer.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kleven, T. A. (2014). Data og datainnsamlingsmetoder. I T. A. Kleven (Red.), *Innføring i pedagogisk forskningsmetode* (s. 27-47). Bergen: Fagbokforlaget.

Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T. M. & Rygge, J. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Larsen, A. K. (2017). Om samfunnsvitenskapelig metode. I A. K. Larsen (Red.), *En enklere metode. Veiledning i samfunnsvitenskapelig metode* (2. utg., s. 17-31). Bergen: Fagbokforlaget.

Ludvigsen, S., Indregard, S., Korpås, T., Rose, S., Gundersen, E., Kleven, K., … Sundberg, D. (2015). *Fremtidens skole, fornyelse av fag og kompetanser*. Oslo.

Matematikksenteret. (2016, 25.09). Kompetanseutvikling. Hentet fra https://www.matematikksenteret.no/om-senteret/kompetanseutvikling/kompetanseutvikling

Mellin-Olsen, S. (1981). Instrumentalism as an educational concept. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 351-367.

Munroe, L. (2015). The Open-Ended Approach Framework. *European Journal of Educational Research, 4*(3), 97-104.

Niss, M. & Jensen, T. H. (2011). Competencies and mathematical learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark.

Niss, M. A. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. I A. Gagatsis & S. Papastavridis (Red.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education - Athens, Hellas 3-4-5 January 2003* (s. 116-124). Athen: Hellenic Mathematical Society.

Niss, M. A. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* Undervisningsministeriets forlag.

Nohda, N. (2000). Teaching by open approach methods in Japanese mathematics classroom. I T. Nakahara & M. Koyama (Red.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 39-53). Hiroshima:

Patton, M. Q. (1999). Enhancing the quality and credibility of qualitative analysis. *Health services research, 34*(5), 1189-1208.

Pehkonen, E. (1997). *Use of open-ended problems in mathematics classroom*. Helsinki, Finland: University of Helsinki, Department of Teacher Education.

Pettersen, A. & Nortvedt, G. A. (2018). Identifying competency demands in mathematical tasks: Recognising what matters. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10763-017-9807-5

Regjeringen. (2019). Nye læreplaner skal gi elevene tid til mer fordypning, (11.05.2020). Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/nye-lareplaner-skal-gi-elevene-tid-til-mer-fordypning/id2678138/?expand=factbox2678142

Silverman, D. (2011). Designing a research project. I D. Silverman (Red.), *Interpreting Qualitative Data* (4. utg., s. 27-56). Thousand Oaks: Sage.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*(1), 20-26.

Sullivan, P., Clarke, D. & Clarke, B. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. New York: Springer.

Tjora, A. (2012). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (2. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Turner, R., Blum, W. & Niss, M. (2015). Using competencies to explain mathematical item demand: A work

in progress. I K. Stacey & R. Turner (Red.), *Assessing mathematical literacy: The PISA experience* (s. 85-115). New York: Springer.

Utdanningsdirektoratet. (2015). Vær bevisst i valg av oppgaver.

Utdanningsdirektoratet. (2020a). *Fagrelevans og sentrale verdiar* Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/fagets-relevans-og-verdier?curriculum-resources=true

Utdanningsdirektoratet. (2020b). *Overordnet del - kompetanse i fagene*. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/prinsipper-for-laring-utvikling-og-danning/kompetanse-i-fagene/

van Bommel, J., Liljekvist, Y. & Ottersten Nylund, C. (2010). *The KOM project and Adding it Up through the lens of a learning situation*. Paper presented at the Madif7, Stockholm, Sweden.

Yeo, J. B. (2017). Development of a framework to characterise the openness of mathematical tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(1), 175-191.

Vedlegg 1: Godkjenning fra NSD

NSD NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

Elevers bruk av matematiske kompetanser i arbeid med åpne og rike oppgaver på ungdomstrinnet

Referansenummer

467968

Registrert

08.07.2019 av Lilly Øygarden - lillyo@uio.no

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Oslo / Det utdanningsvitenskapelige fakultet / Institutt for lærerutdanning og skoleforskning

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Arne Hole, arne.hole@ils.uio.no, tlf: 99798988

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Lilly Øygarden, lillyo@student.uv.uio.no, tlf: 95451614

Prosjektperiode

01.08.2019 - 31.12.2020

Status

20.01.2020 - Vurdert

Vurdering (2)

20.01.2020 - Vurdert

NSD har vurdert endringen registrert 07.01.2020.
Endringen gjelder at barn over 15 år skal samtykke selv til deltakelse.
Informasjonsskrivet er godt utformet, men det bør fremgå av skrivet at det ikke registreres personopplysninger under observasjonen. Videre må dato for prosjektslutt oppdateres til desember 2020, jf. prosjektslutt i meldeskjemaet.
Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 20.01.2020. Behandlingen kan fortsette.
OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.
Lykke til med prosjektet!
Kontaktperson hos NSD: Lise A. Haveraaen
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

24.07.2019 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet 24.07.2019 med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.
MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:
https://nsd.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html
Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.
TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 31.12.2020.
INFORMASJONSSKRIV
Informasjonsskrivet er godt utformet, men dato for prosjektslutt må oppdateres til 31.12.2020 (jf. dato oppgitt i meldeskjema), og de registrertes rettigheter må fremgå.
Ber derfor om at du setter inn følgende avsnitt:
Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og

- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake, så fremt punktene nevnt ovenfor legges til i skrivet. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.
PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:
- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20).
NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.
Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.
FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).
For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.
OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.
Lykke til med prosjektet!
Kontaktperson hos NSD: Lise A. Haveraaen
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

Vedlegg 2: Informasjonsskriv og samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet *«Elevers bruk av matematiske kompetanser i arbeid med åpne og rike oppgaver på ungdomstrinnet»*?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan elever arbeider med såkalte rike og åpne oppgaver. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Forskning viser at rike og åpne oppgaver kan gi elever flere nye matematikkferdigheter enn ved bruk av tradisjonelle matematikkoppgaver. I forbindelse med min masteroppgave ved Universitetet i Oslo ønsker jeg å undersøke i hvilken grad dette stemmer og observere hvilke ferdigheter rike og åpne oppgaver kan hjelpe elever med å utvikle. Masteroppgaven vil kunne gi lærere informasjon om hvilke fordeler og ferdigheter elevers arbeid med rike og åpne oppgaver kan ha.
Du blir spurt om å delta i studien fordi jeg ønsker å gjennomføre mitt forskningsprosjekt på ungdomstrinnet, og fordi rektoren ved din skole og matematikklæreren din har sagt seg villig til å la meg gjennomføre mitt forskningsprosjekt i deres klasse. Jeg ønsker å intervjue 4-6 elever ved to anledninger og å observere hele klassen i matematikkundervisningen i perioden mellom disse to intervjuene.

Hva innebærer det for deg å delta?

Hvis du velger å delta i forskningsprosjektet innebærer det at du, sammen med 3 -5 andre fra klassen din, skal løse et par matematikkoppgaver sammen. Disse oppgavene vil være tatt ut ifra velkjente tema læreren deres på forhånd har fortalt meg. Elever som gir samtykke til å være med vil gjennomføre dette i et eget rom, der jeg vil være tilstede. Det vil bli tatt lydopptak, og det skriftlige arbeidet som elevene produser vil bli samlet inn. Jeg ønsker å gjennomføre et lignende intervju med de samme elevene etter en periode på to uker. Så de som gir samtykke vil gjennomføre to intervju der en skal løse oppgaver.
Siden elevene er over 15 år, kan de selv samtykke for deltakelse.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Alle personlige opplysninger om deg vil behandles konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Datamaterialet vil bli lagret på Universitetet i Oslos database frem til studiens slutt. Det er kun jeg og veileder som vil ha tilgang til datamaterialet. Etter planen vil forskningsprosjektet avsluttes juni 2020, og da vil alt datamaterialet bli slettet. I den endelige masteroppgaven vil all informasjon være anonymisert og det skal ikke være mulig å gjenkjenne deltakerne.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- Innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg
- Å få rettet personopplysninger om deg
- Få slettet personopplysninger om deg
- Få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet)
- Å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i dette forskningsstudie. Hvis du først velger å delta, men senere ombestemmer deg kan du trekke deg når som helst. Å trekke seg fra studien vil ikke gi deg noen ytterligere konsekvenser og vil ikke påvirke ditt forhold til skolen/lærer. Alle opplysninger om deg vil da bli slettet.
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.
På oppdrag fra Universitetet i Oslo har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien ta kontakt med

- Student, Lilly Øygarden på epost lillyo@student.uv.uio.no
- Min veileder, Arne Hole på telefon 99798988, eller på epost arne.hole@ils.uio.no
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen
Prosjektansvarlig Arne Hole (Veileder) | Lilly Øygarden (Student)

Samtykkeerklæring

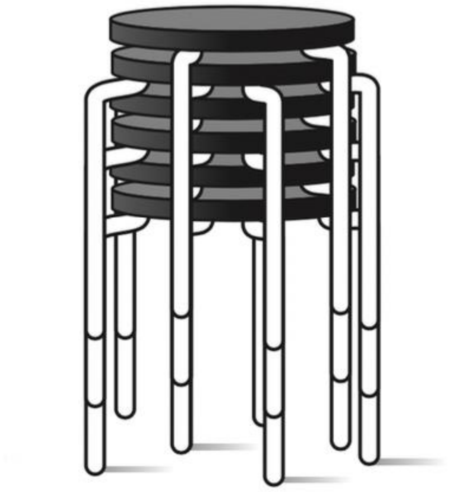
Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Elevers bruk av matematisk kompetanse i arbeid med åpne og rike oppgaver på ungdomstrinnet». Jeg samtykker til å delta i intervju ved to anledninger og at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, 31.12.2020.

Elevens navn:

(Elevens underskrift og dato)

Vedlegg 3: Oppgavene

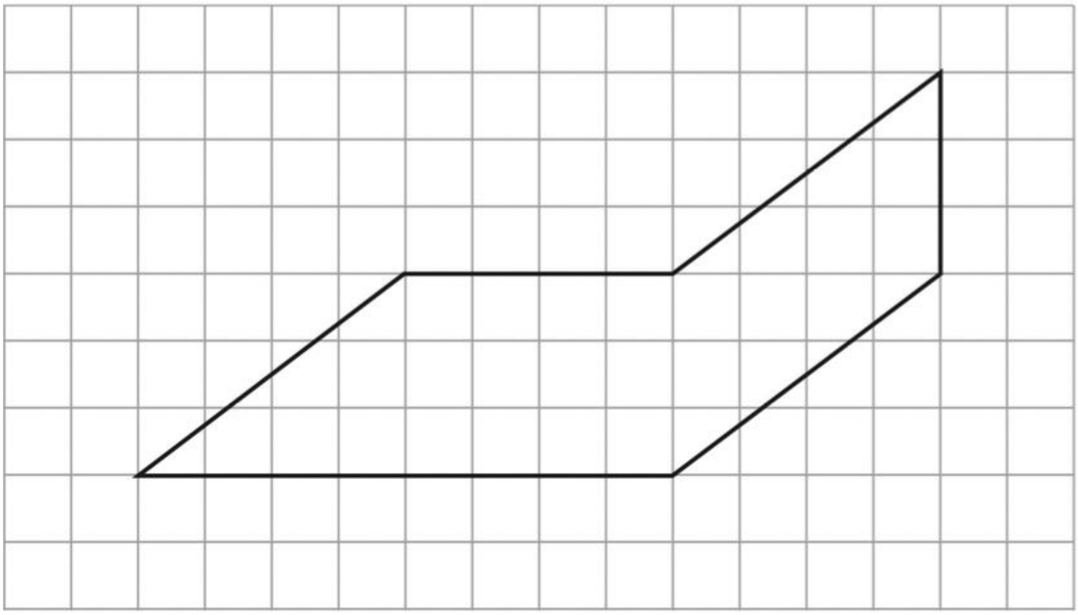
Oppgave 1.1



Ovenfor ser dere en stabel av krakker.
Hver krakk er 49 cm høy.
Når to krakker stables, er stabelen 55 cm høy.

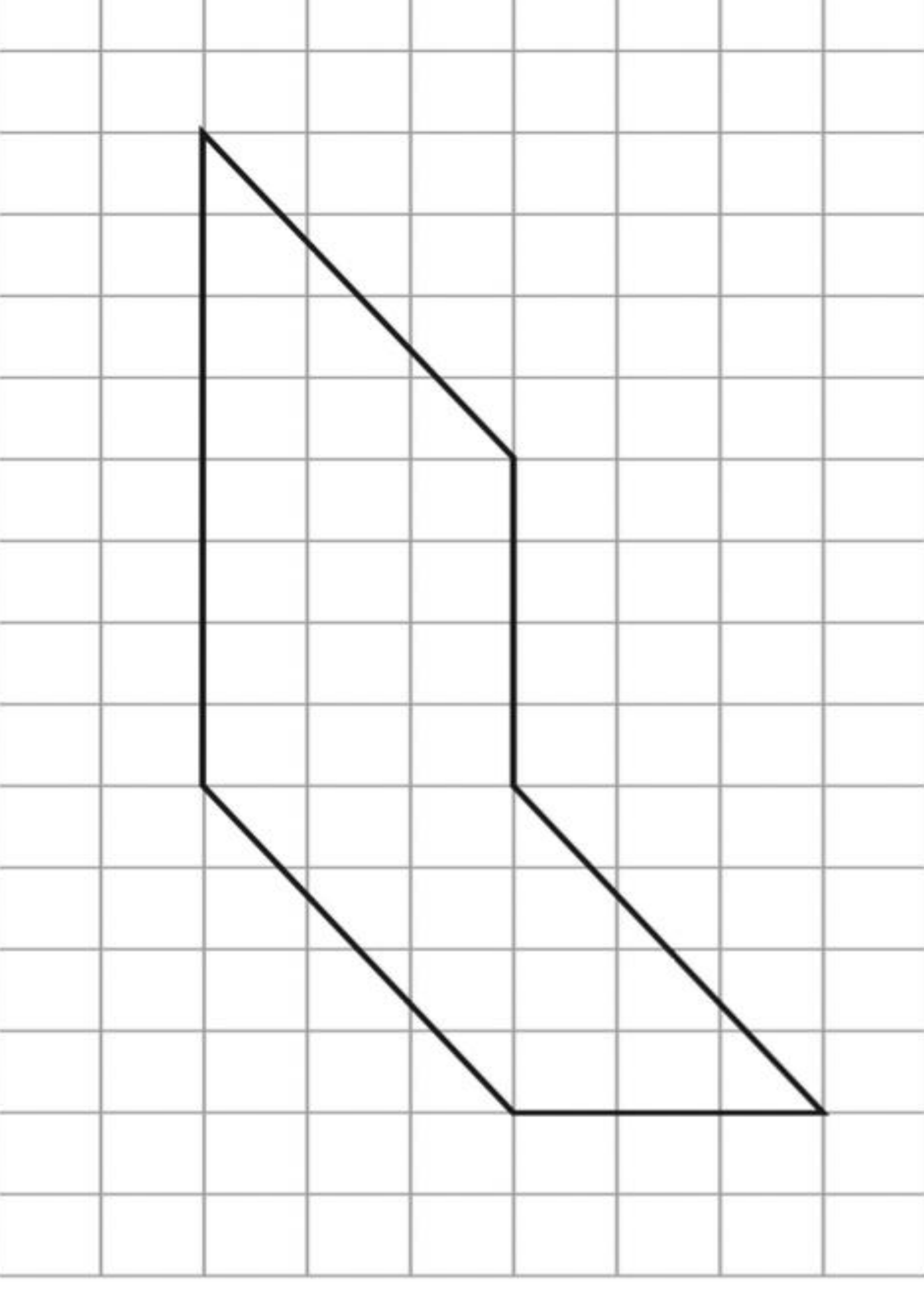
Hva er høyden fra gulvet til toppen av den øverste krakken
når 6 krakker stables?

Oppgave 1.2



a) Gi en forklaring på hvordan du kan finne arealet til figuren ovenfor

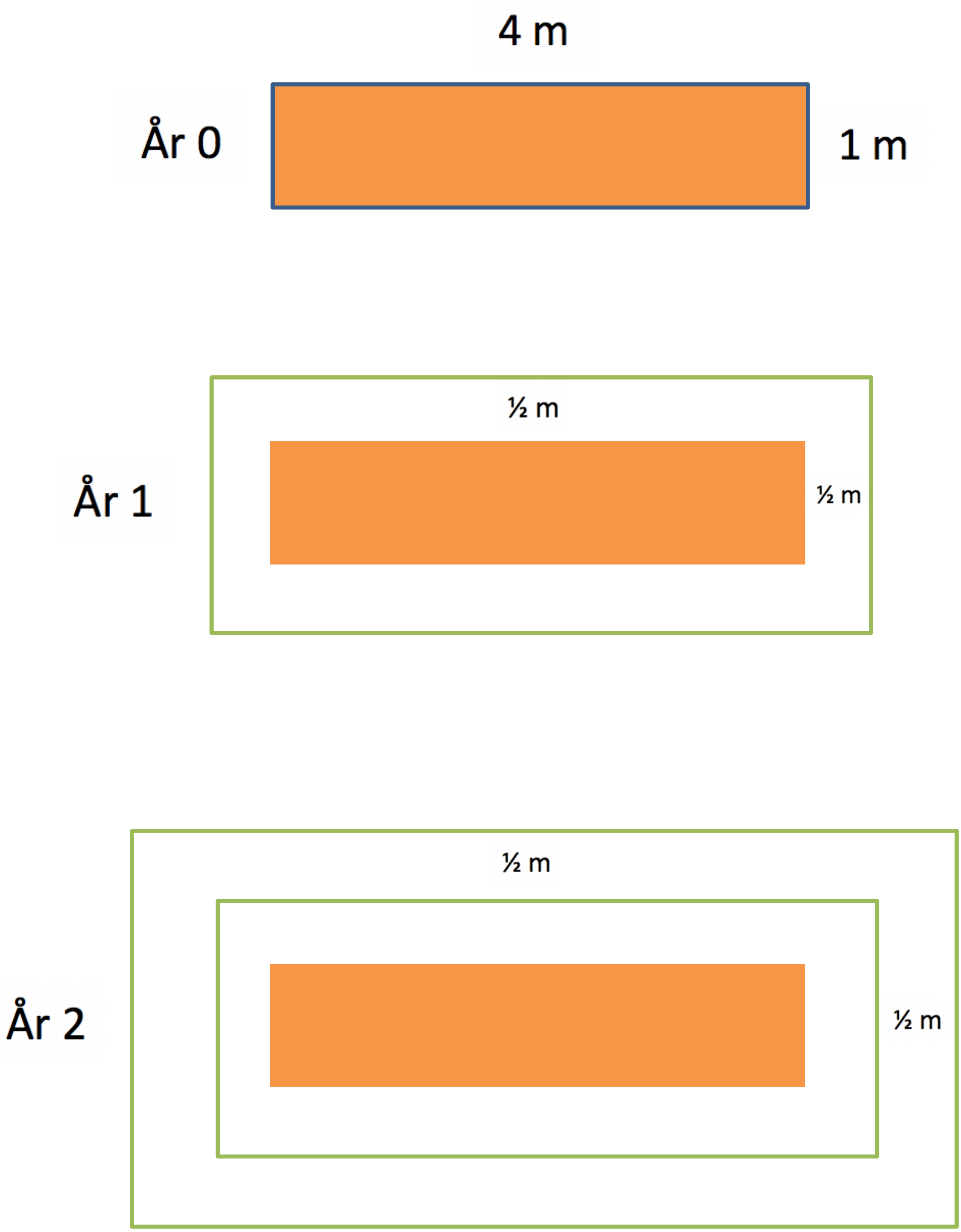
b) Hvis dere kan klippe i dette arket, hvordan kan dere gjør om denne figuren slik at omkretsen til figuren blir størst mulig? Slik at den blir minst mulig?



Oppgave 1.3

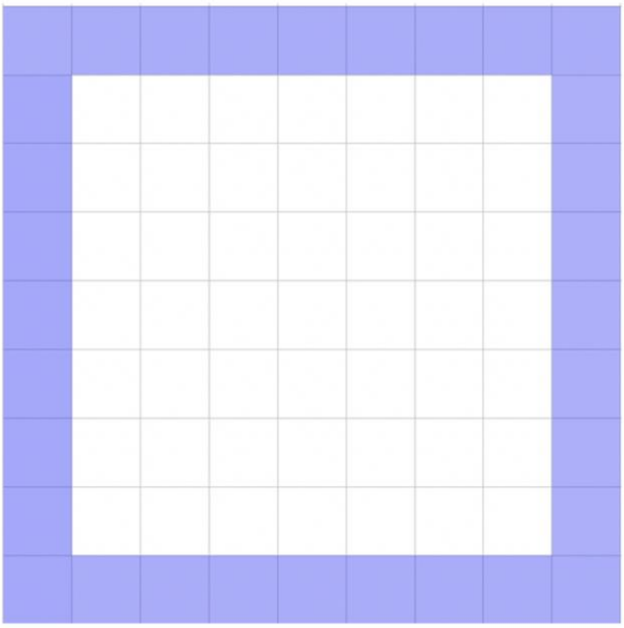
I en landsby som heter Grønndal herjet det en stor storm som ødela store deler av landsbyen. Borgermesteren bestemte seg da for å plante et tre for å markere denne dagen. De plantet treet i et bed som var 4 ganger 1 meter som er tegnet på dette arket. Borgermesteren ønsker også å legge en ramme med stener rundt dette bedet hvert år, slik at en kan telle seg tilbake til hvor mange år det er siden stormen herjet og da hvor mange år treet er. På arket her ser dere tegninger for år 0, 1 og 2. År 0 er da treet blir plantet og år 1 er når en legger den første rammen rundt bedet. Rammen skal bestå av stener som er 0.5 meter ganger 0.5 meter og borgermesteren ønsker å bruke både røde og hvite stener hvert år. Borgermesteren ønsker å lage et mønster på denne plattingen som rammene etterhvert utgjør. Det skal være et gjenkjennbart mønster slik at innbyggere og andre kan se hvilke stener som kommer neste år.

A) Første oppdraget dere får er å lage et sånt mønster
B) Borgermesteren ønsker å bestille stener for de 5 første årene på en gang. Hvor mange stener trenger han å bestille da?
C) Kan dere lage en formel for hvor mange stener borgermesteren behøver å bestille etter n år?


4 m
År 0
1 m
½ m
År 1
½ m
½ m
År 2
½ m

Oppgave 2.1

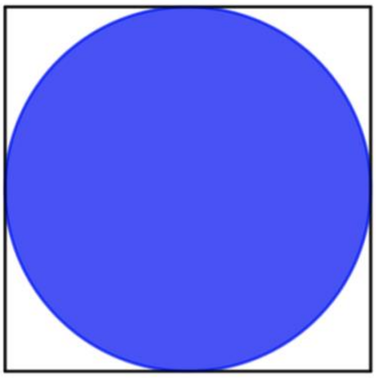
A) Hvor mange ruter består rammen av?
B) Hvor mange ruter består rammen av når kvadratet består av 16 ruter?
C) Hvor mange ruter består rammen av når kvadratet består av 32 ruter?
D) Hvor mange ruter består rammen av når kvadratet består av n ruter?



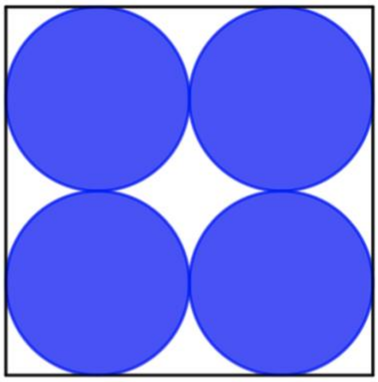
Oppgave 2.2

Nedenfor ser dere fire like store kvadrater, alle har sidelengde lik 1.
Alle inneholder blå sirkler som berører hverandre, men ikke overlapper hverandre.

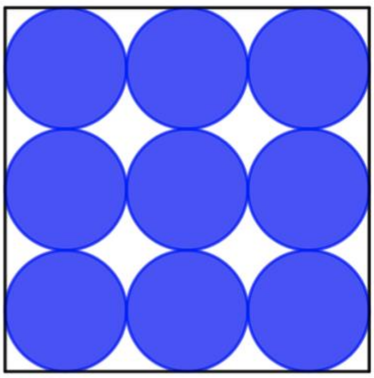
I hvilken av de fire figurene er det blå arealet størst?



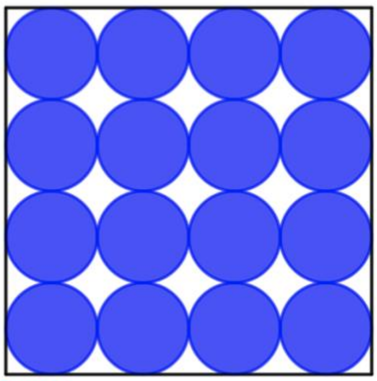
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4

Oppgave 2.3

Den engelske vindusfabrikken «Happy Windows» produserer vinduer i mange ulike fasonger og størrelser. Prisen på hvert vindu fastsettes ut fra arealet av vinduet og lengden av innramming som trengs. Prisen oppgis i britiske pund, £.

Kan dere finne ut hvordan de har fastsatt prisene på vinduene på bildet?