UiO : Matematisk institutt
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Ikke-standard analyse i undervisningsperspektiv

Helene Røkkum

Masteroppgave, våren 2019

Denne masteroppgaven er levert inn som en del av programspesialiseringen *Matematikk* under *Lektorprogrammet* ved Universitetet i Oslo. Oppgaven er normert til 30 studiepoeng.

Forsiden viser et utsnitt av rotsystemet til den eksepsjonelle liegruppen E_8, projisert ned i planet. Liegrupper ble oppfunnet av den norske matematikeren Sophus Lie (1842–1899) for å uttrykke symmetriene til differensiallikninger og spiller i dag en sentral rolle i flere deler av matematikken.

Ikke-standard analyse i undervisningsperspektiv

Helene Røkkum

21. mai 2019

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på fem år som student på Lektorprogrammet i realfag ved Universitetet i Oslo. Et studie der jeg har fått utvikle meg som pedagog og fagdidaktikker, samtidig som jeg har fått studere fagene jeg brenner for. Spesielt har det gjennom studiet oppstått en forkjærlighet til matematikkfaget, og entusiasme for matematikkens overraskende presise måte å beskrive fenomener vi omgir oss med i det daglige. Denne oppgaven har på mange måter vært en mimretur gjennom matematikkutdanningen min ved universitetet, og det har vært utrolig givende å få oppleve og ta i bruk så mye av det jeg har lært gjennom fem år i dette siste prosjektet. Samtidig kan jeg innrømme at det er godt å vite at mimreturen nå er over, for den har gitt meg en 'godt og blandet pose' med følelsesliv gjennom dette siste halvåret.

Med det sagt, vil jeg først og fremst rette en stor takk til veilederen min Tom Lindstrøm. Ikke bare for uvurderlig veiledning i forbindelse med denne oppgaven, men også for å vekket en spesiell interesse for matematikk som foreleser i flere av mine kurs ved universitetet.

En takk rettes også til mine medstudenter gjennom fem givende, lærerike og ikke minst svært krevende år på Lektorprogrammet. Takk for alle sene kvelder på lektorkroken og rom 120. Spesielt vil jeg takke Amund Aasbrenn og Simen Varkøy Jørgensen for alle gangene vi har rodd oss i land sammen med harde skippertak.

Sist, men ikke minst fortjener mamma en god klem og en stor takk for å alltid ha hatt troen på meg. For å ha støttet meg gjennom alle valg jeg har tatt og for å alltid ha lagt til rette for at jeg har kunnet nå målene jeg har satt meg.

Sammendrag

Denne oppgaven har som mål å drøfte ikke-standard analyse som et alternative til tradisjonell undervisning i kalkulus på videregående skole og begynnende universitet. For å kunne drøfte denne problemstillingen, vil oppgaven først gi en innføring i ikke-standard analyse som er tilstrekkelig for at leseren kan følge de didaktiske drøftingene. I innføringen vil det først bli gitt eksempler for å bygge en intuitiv forståelse for infinitesimale størrelser og et historisk perspektiv på ikke-standard analyse. Deretter vil konstruksjon av hyperreelle tall presenteres og den algebraiske strukturen til mengden av slike tall. Dette vil benyttes til å utvide begrepet om mengder, følger og funksjoner fra klassisk kalkulus, som videre legger grunnlaget for å kunne presentere ikke-standard karakteriseringer av de grunnleggende begrepene grenseverdi, konvergens, kontinuitet, derivasjon og integrasjon. Disse karakteriseringene vil benyttes for å gi ikke-standard bevis for sentrale resultater og teoremer fra kalkulus på videregående skole og begynnende universitet.

I tillegg til oppgavens fokus på de rent tekniske matematiske bevisene og argumentasjonene, vil det i denne innføringen også bli lagt vekt på de bakenforliggende resonnementene og problemene, som har ledet matematikere frem til de definisjoner som er gjeldene i dag. På bakgrunn av denne innføringen, vil oppgaven ta for seg å analysere eksisterende lærebøker som benytter en ikke-standard tilnærminger, for å drøfte fordeler og ulemper. Helt til slutt vil det bli gitt en teoridrevet drøfting av didaktiske implikasjoner for og i mot en ikke-standard tilnærming til analyse i et undervisningsperspektiv, vurdert opp mot den tradisjonelle klassiske analysen.

Abstract

The main purpose of this master thesis is to examine how non-standard analysis can form an alternative to the traditional teaching of calculus, in high school and pre-university level. In order to discuss the validity of the non-standard analysis, this thesis will aim to give a satisfactory introduction to non-standard analysis so that the reader is able to follow the didactic. As an introduction there will first be given examples, aiming to form an intuitive understanding of infinitesimals, and second the historical development of non-standard analysis. Then, a construction of hyperreal numbers will be presented and the algebraic structure on the set of hyperreals. The construction will be used to extend the concepts of sets, sequences, and functions from classical calculus, which leads to a presentation of non-standard characterizations of the basic concepts of limits, convergence, continuity, the derivative and integral. These characterizations provide the tools to give non-standard proofs of basic theorems and results, which are relevant for calculus in high school and at pre-university level.

In addition to the task of providing rigorous mathematical proofs and arguments with a non-standard approach. This thesis will emphasize on explaining the reasoning and underlying problems, which have led mathematicians to the definitions that formed the calculus which we are familiar with today. Based on the introduction to non-standard analysis, the task will be to analyze textbooks using the non-standard approach to calculus and further discuss the pros and cons of the respective approaches. Ultimately, this thesis will give a theory-driven discussion of the didactic implications towards a non-standard approach. The nonstandard approach will be assessed both from a teaching perspective and as an alternative to the traditional analysis.

Innhold

Figurer

KAPITTEL 1

Intuisjon og historisk perspektiv

Dette første kapittelet vil ta for seg å bygge opp en intuitiv forståelse for det vi senere skal lære å kjenne som *hyperreelle tall*. Det er disse hyperreelle tallene som danner grunnlaget for at vi videre kan gi en innføring i ikke-standard analyse. Det vil bli gitt eksempler og forklaringer med mål om å instille leseren på denne kanskje ukjente størrelsen på den hyperreelle tallinja. Deretter vil ikke-standard analyse settes inn i et historisk perspektiv, fra Newton og Leibniz først introduserer infinitesimaler og oppdager infinitesimalregningen, til Abraham Robinson konstruerer den hyperreelle tallinja $\mathbb{R}^*$ og innfører *ikke-standard analyse* for bare 60 år siden. Målet er at dette historiske perspektivet vil bidra til en forståelse for ikke-standard analysens grunnlag og bruksområde.

1.1 Infinitesimaler

For å få en intuitiv forståelse av hva ikke-standard analyse er og på hvilken måte slik analyse skiller seg fra klassisk analyse, må vi i denne oppgaven først introdusere begrepet *infintesimal*. Begrepet infinitesimalregning blir brukt som en samlebetegnelse på de matematiske operasjonene derivasjon og integrasjon, som omhandler endringsprosesser. Begrepet infinitesimal derimot ble i mange år kun brukt som en metafor på uendelig små størrelser, og hang igjen fra 1600-tallet da derivasjon og integrasjon først ble introdusert. Et infinitesimal er nemlig betegnelsen på tall av så liten størrelse at de ikke kan måles, de er mindre alle positive reelle tall, men samtidig større enn null. Det var disse uendelig små størrelsene som la grunnlaget for oppdagelsen av infinitesimalregningen. Likevel skulle det vise seg at infinitesimalene, slik de ble brukt på 1600-tallet, inneholdt selvmotsigelser som gjorde dem uegnet som et rigorøst grunnlag for matematisk analyse. Infinitesimalene forsvant fra analysen i et par hundre år, helt til Robinson løste infinitesimal-gåten i 1960. Robinsons konstruksjon av den hyperreelle tallinja og en entydig bestemt definisjonen av infinitesimaler, regnes som en av de største oppdagelsene i matematikken i det 20. århundre.

Vi skal senere i denne oppgaven begi oss ut på å konstruere en hyperreell tallinje lik den Robinson konstruerte for 60 år siden. Denne konstruerte tallinja vil blant annet romme infinitesimale størrelser og reelle tall. Før vi går løs på konstruksjonen og gir en formell definisjon av et infinitesimal, forsøker vi oss på å bygge opp en viss intuisjon ved å se på noen eksempeler.

Vi ser først på tallet 1 og tallet $0.\overline{9}$. Der $0.\overline{9}$ er notasjon for at 9 repeteres uendelig mange ganger bak komma. Da kan det vises at $1 = 0.\overline{9}$ ved geometriske rekker, og 1 og $0.\overline{9}$ er altså bare to navn på samme tall. Det kan også eksemplifiseres på følgende måte

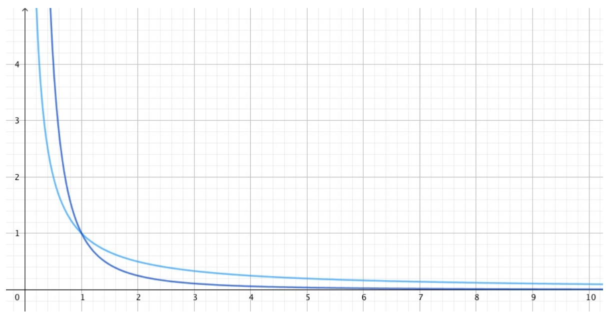
$$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}, \quad \frac{1}{3} \times 3 = 1 \quad \text{og} \quad 0.\overline{3} \times 3 = 0.\overline{9}$$

Tallet $0.\overline{9}$ har desimalutvikling $0.a_1a_2a_3...$ der $a_n = 9$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Dersom vi nå ser på et tall med en desimalutvikling $0.a_1a_2a_3...a_n...$ og forestiller oss at vi har desimaler for uendelig store verdier n. Videre, kan vi da si at for dette tallet er $a_n = 9$ for alle endelige verdier av $n \in \mathbb{N}$, men at $a_N \neq 9$ for minst én uendelig stor verdi N, der $N \geq n$. Vi kaller et slikt tall for x. Det er kanskje åpenbart at x må være uendelig nære 1, men observerer samtidig at $x \neq 0.\overline{9} = 1$ slik vi beskrev desimalutviklingen til x. Altså bør differansen $1 - x$ være uendelig liten. Begrepet om en *uendelig liten størrelsesforskjell* er det vi skal lære oss å kjenne som en infinitesimal størrelsesforskjell mellom 1 og x, og skriver $1 \approx x$ når $1 - x$ er et infinitesimal.

Vi ser på et nytt eksempel. Gitt to følger

$$\{\tfrac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, ...\} \quad \text{og} \quad \{\tfrac{1}{n^2}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{9}, ...\}$$

Når $n \to \infty$ sier vi at begge følgene går mot, eller konvergerer mot 0, men ser vi nærmere på tallfølgene observerer vi at $\{\frac{1}{n^2}\}$ går raskere mot 0 enn det $\{\frac{1}{n}\}$ gjør. For å visualisere konvergensen kan vi se på disse følgene som funksjoner med tilhørende kurver: Spørsmålet blir om det finnes måter å skille disse to tall-



Figur 1.1: Mørk blå graf representerer følgen $\{\frac{1}{n^2}\}$. Lys blå graf representerer følgen $\{\frac{1}{n}\}$.

følgene på, og svaret er ikke-standard analyse og hyperreelle tall. De hyperreelle tallene, som vi nevnte i innledningen, kjent ved notasjon $\mathbb{R}^*$, inneholder slike infinitesimale eller uendelig små størrelser. De hyperreelle tallene inneholder også endelige tall, og blant disse finner vi de reelle tallene $\mathbb{R}$ som vi kjenner fra skolematematikken. Den siste kategorien av hyperreelle tall, er de uendelig store størrelsene, kalt de uendelige tallene. Disse tre kategoriene av hyperreelle tall vil bli gitt definisjoner slik at vi kan skille de fra hverandre, men som hyperreelle tall vil de samtidig basere seg på en konstruksjon ved hjelp av ekvivalensklasser av reelle tallfølger. Dermed vil vi flere ganger i denne oppgaven komme tilbake til tallfølgene fra eksempelet over, og det skal vise seg at disse to tallfølgene er det vi skal kalle for *representanter* for hyperreelle tall. Mer spesifikt skal vi se at disse to tallfølgene er representanter for to ulike infinitesimaler. Før vi kan vise denne sammenhengen mellom tallfølger og hyperreelle tall, må vi først konstruere denne tallmengden $\mathbb{R}^*$ slik at den inneholder tall vi kan differensiere. Samtidig må vi sørge for at $\mathbb{R}^*$ fungerer slik vi er vant med at mengder av tall gjør.

Kanskje spør leseren nå seg selv: Hvordan kan vi bare konstruere en ny tallmengde etter behov? Det er ikke første gang. Opp igjennom historien, har matematikere utviklet tallsystemer etterhvert som man har støtt på nye utfordringer i det matematiske landskapet, som har krevd å definere flere størrelser enn man tidligere hadde hatt behov for. Til å begynne med hadde man bare positive heltall $1, 2, 3, 4, ...$ og så videre, i dag kjenner vi disse tallene som mengden *de naturlige tallene* med notasjon $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Etterhvert ble det også behov for negative størrelser, dermed oppsto tallmengden som vi i dag kjenner som heltallene $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$. Senere ble de reelle tallene $\mathbb{R}$ aktuelle, som i tillegg til $\mathbb{Z}$ inneholder størrelser slik som $\sqrt{2}$ og π, som er sentrale i geometrien. Det er de reelle tallene $\mathbb{R}$ vi kjenner som *tallinja* fra skolematematikken. Lenger ut i matematikkens historie ble det nødvendig å utvide det reelle tallområdet for å kunne løse alle typer andregradslikninger. Slik ble de komplekse tallene $\mathbb{C}$ introdusert, som i tillegg til de reelle tallene også inneholder imaginære tall der $i = \sqrt{-1}$ er definert. Ikke uventet ble det også på et tidspunkt ønskelig å kunne benytte størrelser som var enda mindre enn de reelle tallene. Slik kom infinitesimalene inn i matematikken og senere den *hyperreelle tallinja*, som i tillegg til de reelle tallene inneholder andre endelige tall, og uendelig små og store tall.

Så hva er da et *infinitesimal* helt bestemt? Gitt en korrekt matematisk definisjon er et infinitesimal av følgende karakter:

Definisjon 1.1.1. Et element $x \in K$, der x ulik fra null og K er en ordnet kropp, er et *infinitesimal* hvis og bare hvis absoluttverdien er mindre enn et hvert element i K på formen $\frac{1}{n}$ for $n \in \mathbb{N}$.

Pust ut! Denne definisjonen kommer vi tilbake til når vi skal konstruere de hyperreelle tallene $\mathbb{R}^*$ senere i kapittelet. Nå skal vi først gå noen hundre år tilbake i tid og se på ikke-standard analyse i et historisk perspektiv, før vi går løs på den tunge matematikken.

1.2 Fra infinitesimaler til hyperreelle tall

Det var på 1600-tallet at fysikeren Isaac Newton (1642-1726) og universalisten Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), uavhengig av hverandre, introduserte infinitesimalregningen, en fellesbetegnelse på de matematiske operasjonene derivasjon og integrasjon. Infinitesimalene, uendelig små tall ulike fra null, ble grunnlaget for oppdagelsen av sammenhengen mellom derivasjon og integrasjon, og at disse er motsatte operasjoner. Newton benyttet infinitesimaler i sin teori om fluksjoner. I Newtons teori var infinitesimaler definert som *momentet til* *fluksjonen*, en uendelig liten tidsforskjell. Leibniz på sin side kalte infinitesimaler for differensialer angitt ved notasjon dx og dy, og definerte disse som en uendelig liten endring i x og y. Disse uendelig små størrelsene skulle bli en nøkkel for intuisjon og gi en enorm regnekraft i infinitesimalregningen, og hadde i de første 150 årene etter en sentral rolle i matematisk analyse. For Newton var de effektive for å forklare naturfenomener med matematisk språk. For Leibniz la hans notasjon og bevisføring i differensialregning, grunnlaget for den notasjon man bruker i kalkulus i dag. Enda viktigere ble hans idé om å konstruere en tallmengde der infinitesimalene kunne tilføyes de reelle tallene.

Likevel hadde infinitesimalene to sterke svakheter. For det første var det ingen som kunne forklare hva disse uendelig små størrelsene var. For det andre kunne disse uendelig små tallene i blant oppføre seg som uendelig små tall ulike fra null, og andre ganger hadde de egenskapene til tallet null. For å vise frem et eksempel på disse selvmotsigelsene, kan vi se på hvordan Leibniz brukte infinitesimaler i definisjonen av den deriverte. Av Leibinz ble den deriverte av y som en funksjon av x, opppfattet som kvotienten av dy/dx. Der dy er en infinitesimal endring av y ved en infinitesimal endring eller tilvekst av x, gitt ved dx. Den deriverte av y med hensyn på x ble følgelig definert av Leibniz ved

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x+dx) - y(x)}{dx} = y'$$

For å sammenlikne, er den deriverte av en funksjon f av én variabel i klassisk analyse definert ved grenseverdien

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x - f(x))}{\Delta x} = f'(x)$$

Ved Leibniz' notasjon er dy og dx uttrykk for infinitesimale endringer, og ble som sagt gitt navnet differensialer. I klassisk analyse benytter man fremdeles notasjonen dy og dx i infinitesimalregningen, men betrakter differensialer som funksjoner som går mot 0 fremfor å betrakte de som uendelig små størrelsesendringer. Dermed bentytter man ofte notasjonen Δx og Δy for endringene i x- og y-variablene, og ser på grenseverdien til kvotienten når $\Delta x \to 0$. Vi ønsker nå å vise frem et eksempel på bruken av definisjonen av den deriverte med infinitesimal-tilnærmingen til Leibniz. Med dette eksempelet, ønsker vi å illustrere selvmotsigelsen i definisjonen av dx som et infinitesimal ulik fra 0, der dx på samme tid vil oppføre seg som tallet 0.

Påstand: Den deriverte av x^2 er $2x$

Bevis. La dx være en infinitesimal endring av x, og dy den korresponderende endringen av y. Da er $dy = (x+dx)^2 - x^2$ slik at

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{2x(dx) + (dx)^2}{dx} = 2x + dx$$

Siden dx er et infinitesimal kan den sløyfes, og svaret er $2x$. ■

Dette virker jo logisk siden dx er uendelig liten og det samme tenkte nok Leibniz og Newton, men metoden har en klar selvmotsigelse i sitt siste argument.

Dersom $dx = 0$, så kan vi ikke dele dy på dx, men hvis $dx \neq 0$ så kan den ikke sløyfes. Filosofen og matematikeren George Berkeley (1685-1753) var en av de som kritiserte nettopp denne selvmotsigelsen i boken *The analyst* (1734) [Ber34]. Han påpekte problemet knyttet til definisjonen av den deriverte basert på infintesimaler, der han skriver om infinitesimaler at

> *They are neither finite Quantities nor Quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call them the ghosts of departed quantities?* [Ber34, p. 59]

Det skulle vise seg at disse små selvmotsigelsene skulle bli infinitesimalenes undergang som et grunnlag for matematisk analyse. For når Bolzano, Weierstrass og Cauchy får ordnet opp i analysens fundament 1800-tallet, og grensebegrepet blir formalisert i (ϵ,δ)-definisjonen av grenseverdier, erstattes infinitesimaltilnærmingen med en grense-tilnærming i analysen. Vi kan nevne at infinitesimaler var med i Cauchys opprinnelige definisjon av den deriverte, men av Cauchy ble infinitesimaler oppfattet som funksjoner som konvergerer mot null. Dermed blir infinitesimalene redefinert fra en størrelse slik Leibniz og Newton oppfattet dem, til en funksjon med grenseverdi i 0. Infinitesimalene forsvinner fra analysen og må bane vei for tilnærmingen basert på (ϵ,δ)-definisjonen av en grense.

Likevel har én og annen matematiker opp igjennom historien forsøkt å blåse liv i infinitesimalene, men som oftest uten stort hell. Forsøkene har hatt rot i ulike konstruksjoner av en utvidet reell tallinje, men disse har ofte vist seg å begrense analysens funksjonelle område. Hans Hahn var en av matematikerne som konstruerte en utvidelse av de reelle tallene som inneholdt infintesimaler. Hahns konstruksjon førte imidlertid til at utvidelsen ikke kunne romme transcendente funksjoner. Eksempler er trigonometriske funksjoner som $sin(x)$ eller eksponentielle funksjoner som e^x. Fellesnevneren til disse funksjonene er at de ikke tilfredsstiller kravet om å være en løsning av en polynomlikning slik algebraiske funksjoner gjør, og dermed ble Hahns teori begrenset. Problemet til Hahn ble senere løst av Laugwitz og Schmieden, men de innførte *nulldivisorer*. I deres konstruksjon kunne et produkt være lik null uten at noen av faktorene var null, og dermed ble mangelen på ordningsrelasjon deres undergang.

Det ble derfor aldri funnet en god løsning på problemene knyttet til infinitesimaler, før en matematiker ved navn Abraham Robinson konstruerer sin utvidede tallinje $\mathbb{R}^*$ i 1960, og gir tallinjen navnet *de hyperreelle tallene*. Med dette introduserer Robinson *ikke-standard analyse*, og blåser liv i en infinitesimal-tilnærming til analysen. Robinsons utvidede tallinje tallinje baserer seg på Leibinz idé om en konstruert tallmengde med infinitesimaler og reelle tall, men Robinson tilføyer også endelige og uendelige hyperreelle tall. Med dette løser han en trehundre år gammel gåte om hvordan infinitesimaler kan danne grunnlaget for kalkulus. Robinson evner, på bakgrunn av sin konstruksjon av de hyperreelle tallene, å overføre og definere regneoperasjonene som gjelder de reelle tallene til den nye tallmengden, og gir også de hyperreelle tallene ordningsrelasjonen fra $\mathbb{R}$. Videre blir alle funksjoner som er definert for reelle tall gitt en naturlig utvidelse fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^*$, og det samme med delmengder av $\mathbb{R}$. I kjølevannet av disse utvidelsene, oppstår også spennende resultater slik som *hyperendelige mengder* og *interne funksjoner*.

KAPITTEL 2

Konstruksjonen

Målet med dette kapittelet blir å konstruere tallmengden $\mathbb{R}^*$. I denne oppgaven vil vi basere konstruksjonen av de hyperreelle tallene på den konstruksjonen gitt i artikkelen *Uendelig små og store tall - og litt om hva de kan brukes til* av Lindstrøm [Lin96]. Lindstrøms [Lin96] konstruksjon bygger på at man først lager en inndeling av de naturlige tallene $\mathbb{N}$ i to klasser; *tynne* og *fete* delmengder av $\mathbb{N}$. Denne klassifiseringen vil vi benytte oss av for å konstruere hyperreelle tall ved hjelp av ekvivalensklasser av reelle tallfølger, indeksert ved $\mathbb{N}$.

Vi ber leseren merke seg at beviset for eksistensen av den overnevnte inndelingen av $\mathbb{N}$ ikke vil bli gitt i denne oppgaven. Beviset finnes, men det setter langt større krav til bakgrunnskunnskaper enn det resten av denne oppgaven gjør. Beviset opplever vi heller ikke som nødvendig for at leseren skal kunne følge de didaktiske drøftingene. Dermed gjør vi som vi ofte gjør i matematikk; vi antar noe. Ideelt sett ville vi også bevist det, men heldigvis finnes *det store internett* for de spesielt interesserte leserne av denne oppaven.

2.1 Inndeling av de naturlige tallene

Før vi setter i gang med å gi klassifiseringen av disse tynne og fete delmengdene, minner vi om definisjoner vil benytte oss av og lager en liten huskeliste. Merk at alle som føler seg stødige i mengdelære kan hoppe rett til inndelingen. Vi informerer også om at denne type lister vil være en gjenganger for hver seksjon både i dette og neste kapittelet, og at leseren står fritt til å velge å hoppe over disse listene.

- *For to delmengder $A, B \in \mathbb{N}$ er unionen, angitt ved notasjon $A \cup B$, mengden av alle elementer som er i A eller B, eller begge.*
- *For to delmengder $A, B \in \mathbb{N}$ er snittet, angitt ved notasjon $A \cap B$, mengden av alle felles elementer i A og B.*
- *For en delmengde $A \in \mathbb{N}$ er komplementet til A, angitt ved notasjon A^c, alle elementer i $\mathbb{N}$ untatt de elementene som også er i A.*
- *De Morgans lover sier at (1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ og (2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$*
- *En samling er en mengde der elementene er mengder. En mengde av mengder med andre ord.*

- *Vi sier at to mengder A og B er disjunkte dersom de ikke har noen felles elementer. Vi skriver $A \cap B = \emptyset$, der $\emptyset$ er den tomme mengden.*

Før vi begynner på selve konstruksjonen av $\mathbb{R}^*$, skal vi som sagt lage en inndeling av delmengder av de naturlige tallene $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ i to klasser; tynne og fete delmengder. Denne klassifiseringen legger grunnlaget for å definere ekvivalensklasser av reelle tallfølger, som igjen vil definere et hyperreelt tall. For å lage en slik inndeling av $\mathbb{N}$ gjør vi følgende antakelser for en delmengde $A \subset \mathbb{N}$:

i For enhver delmengde A er enten A fet eller A^c fet

ii Enhver endelig delmengde A er tynn

iii Dersom A er fet og $A \subset B$, så er B fet

iv Dersom A og B er fete, så er $A \cap B$ fet

Fra disse fire punktene ønsker vi i tillegg å utlede tre nye antakelser for en delmengdene av $\mathbb{N}$ som vi kan tilføye listen vår. Først ønsker vi å kunne gi tilsvarende sammenhenger for tynne mengder, slik som punktene (iii) og (iv) gir for fete mengder. Til slutt skal vi utlede et punkt som viser at denne klassifiseringen danner en separasjon av $\mathbb{N}$.

Vi ser på et eksempel med to endelige delmengder av $\mathbb{N}$ for å bygge litt intuisjon, og lar $N_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ og $N_2 = \{3, 4, 5\}$. Da er er N_1 og N_2 per (ii) tynne. Unionen $N_1 \cup N_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ er også endelig, og følgelig per (ii) tynn. Dette er klart for de tynne delmengdene som er endelige, men det er ikke slik at alle tynne delmengder er endelige. Det vil si at den motsatte påstanden av punkt (ii), som ville vært *enhver tynn delmengde er endelig*, er ikke sann. Vi ønsker dermed å vise at unionen av to tynne delmengder også er en tynn delmengde for enhver tynn delmengde av $\mathbb{N}$, ikke bare de endelige. Vi formulerer et lemma.

Lemma 2.1.1. *Hvis A og B er tynne, så er $A \cup B$ tynn.*

Bevis. Antar at A og B er tynne delmengder, per antakelse (i) så er A^c og B^c fete. For fete delmengder A^c og B^c har vi per antakelse (iv) at $A^c \cap B^c$ er en fet delmengde. Per de Morgans lover er $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$. Siden $(A \cup B)^c$ er en fet mengde, så er $A \cup B$ en tynn mengde per (i). ■

Vi ser igjen på et eksempel med endelige delmengder av $\mathbb{N}$. La $N_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og $N_4 \subset N_3$. Siden N_3 er endelig er N_3 per (ii) tynn. Ettersom N_4 er en delmengde av N_3, kan N_4 høyst inneholde de fem elementene $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ i N_3. Følgelig er N_4 endelig, og per (ii) en tynn delmengde. Igjen minner vi om at ikke alle tynne delmengder endelige. Vi ønsker å vise at en delmengde av en tynn delmengde er tynn, for enhver tynn delmengde av $\mathbb{N}$. Vi formulerer et nytt lemma:

Lemma 2.1.2. *Dersom A er tynn og $B \subset A$ så er B tynn.*

Bevis. Dersom A er tynn er A^c fet per (i). Siden $B \subset A$, så må $A^c \subset B^c$. Da er B^c fet per (iii), og følgelig må B være tynn per (i). ■

Det siste vi ønsker å føye til listen vår er som sagt en antakelse, slik at vi kan skille de tynne og fete delmengdene i to klasser. Vi ønsker at klassifiseringen av tynne og fete delmengder, faktisk er en *klassifisering* og følgelig danner en seprasjon av $\mathbb{N}$. Dermed må vi vise at en delmengde $A \in \mathbb{N}$ er enten tynn eller fet, og aldri begge deler. Vi formulerer følgende lemma:

Lemma 2.1.3. *En delmengde A er enten tynn eller fet, aldri begge deler.*

Bevis. Vi antar for å fremprovosere en motsigelse at delmengden A er både tynn og fet. Siden A er tynn har vi per (i) at A^c må være fet. Men da er $\emptyset = A \cap A^c$ en fet mengde per (iv) som snittet av to fete mengder. Dette er åpenbart umulig, for da ville alle delmengder av $\mathbb{N}$ vært fete. Ved denne motsigelsen kan vi dermed si at en delmengde A ikke kan være både tynn og fet, og beviset er fullført. ■

Vi oppsummerer utledningene med å tilføye de nye antakelser til den opprinnelige listen og heretter henvise til nummereringen av disse punktene. Den nye listen blir som følger:

i. For en hver delmengde A er enten A fet eller A^c fet

ii. En delmengde A er enten tynn eller fet, aldri begge deler

iii. Enhver endelig delmengde A er tynn

iv. Dersom A er fet og $A \subset B$, så er B fet

v. Dersom A er tynn og $B \subset A$, så er B tynn

vi. Dersom A og B er fete, så er $A \cap B$ fet

vii. Dersom A og B er tynne, så er $A \cup B$ tynn

Før vi begir oss ut på selve konstruksjonen av $\mathbb{R}^*$ tar vi med to lemma som vi vil ha bruk for senere i konstruksjonen. Det første lemma er knyttet induksjon på n for påstand (vi) og (vii) og det andre til union og disjunkte delmengder.

Lemma 2.1.4. *Hvis $A_1, A_2, ..., A_n$ er fete delmengder så er*

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$$

en fet delmengde. Hvis $A_1, A_2, ..., A_n$ er tynne delmengder så er

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$$

en tynn delmengde.

Bevis. For å bevise første del av lemma antar vi at A_1 og A_2 er fete. Da er $A_1 \cap A_2$ fet. Hvis A_3 er fet, så er $(A_1 \cap A_2) \cap A_3$ en fet mengde. Antar at dette stemmer for alle A_i opptil $i = (n-1)$ slik at $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}$ er fet. Hvis A_n er fet så er også $(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) \cap A_n = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1} \cap A_n$ fet. Beviset for andre del av lemma, der $A_1, A_2, ..., A_n$ er tynne delmengder, er tilsvarende som det for de fete mengdene. ■

Lemma 2.1.5. *Antar at $A_1, A_2, ..., A_n$ er disjunkte delmengder av $\mathbb{N}$ og at $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ er fet. Da må nøyaktig én A_i være fet.*

Bevis. Dersom A_i er tynn for alle $1 \leq i \leq n$ så ville unionen $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ per antakelse (vii) være en tynn delmengde. Dermed må minst én A_i være fet, siden unionen er fet. Videre har vi per antakelse (i) at hvis A_i er fet så er A_i^c tynn. Ettersom alle delmengdene er disjunkte, må $A_j \subset A_i^c$ for alle $j \neq i$. Dermed er A_j inneholdt i en tynn delmengde, og per antakelse (v) selv en tynn delmengde. Dermed må nøyaktig én av delmengdene $A_1, A_2, ..., A_n$ være fet når unionen $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ er fet. ■

2.2 Konstruksjon av den hyperrelle tallinja

Vi begynner igjen med å klargjøre begreper som vi ønsker at leseren forstår betydningen av, og som vi skal benytte oss av, uten nærmere forklaring, i denne seksjonen:

- *En* ***partisjon*** *er en oppdeling av en mengde A i ikke-tomme, disjunkte delmengder.*
- *Elementer som er* ***ekvivalente*** *deler et sett med bestemte egenskaper, uten å være identiske.*
- *Med notasjonen $\emptyset$ mener vi* ***den tomme mengden****, som ikke inneholder noen elementer.*
- *Et* ***nullelement*** *er en generalisering av tallet 0 til andre algebraiske strukturer. Slik som for eksempel nullvektor $\overline{0} = [0, 0]$ i planet.*

Vi starter med å lage en samling $\mathcal{F}$ som inneholder alle reelle følger $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ der $x_n \in \mathbb{R}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi informerer leseren om at vi forenkler notasjonen ved å heretter bruke $\{x_n\}$ for en reell følge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Lar vi følgene $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$ være to elementer i $\mathcal{F}$, kan vi gi følgende to definisjoner for forholdet mellom reelle følger i $\mathcal{F}$:

Definisjon 2.2.1. Vi sier at de to følgene $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$ er *ekvivalente* dersom

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n = y_n\}$$

er en fet mengde. Hvis $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$ er *ekvivalente* skriver vi $\{x_n\} \equiv \{y_n\}$.

Definisjon 2.2.2. For enhver følge $\{x_n\} \in \mathcal{F}$ lar vi $\langle x_n \rangle$ betegne *ekvivalensklassen* til denne følgen. Der $\langle x_n \rangle$ er mengden av alle følger $\{y_n\} \equiv \{x_n\}$, slik at

$$\langle x_n \rangle = \{\{y_n\} \in \mathcal{F} : \{x_n\} \equiv \{y_n\}\}$$

Konsekvensen av denne definisjonen blir at et hvert par ekvivalente følger er inneholdt i samme ekvivalensklasse. Som en videre konsekvens har vi dermed at enhver følge i $\mathcal{F}$ vil være inneholdt i én og kun én ekvivalensklasse. Ekvivalensklassene danner med andre ord en *partisjon* av $\mathcal{F}$. Vi formulerer disse observasjonene i følgende to lemma:

Lemma 2.2.3. *Dersom $\{x_n\} \equiv \{y_n\}$ så er $\langle x_n \rangle = \langle y_n \rangle$.*

Bevis. Antar $\{x_n\} \equiv \{y_n\}$ og $\{z_n\} \in \langle x_n \rangle$, og vi ønsker å vise at $\{z_n\} \in \langle y_n \rangle$. Ved antakelse har vi at $\{n \in \mathbb{N} : x_n = z_n\}$ og $\{n \in \mathbb{N} : x_n = y_n\}$ er fete mengder, siden $\{x_n\}$ er ekvivalent med $\{y_n\}$ og $\{z_n\}$ er i ekvivalensklassen. Vi vet at snittet av to fete mengder, igjen er en fet mengde per (vi). Dermed er

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n = z_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : x_n = y_n\}$$

en fet mengde. Men siden

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n = z_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : x_n = y_n\} \subset \{n \in \mathbb{N} : z_n = y_n\}$$

så vet vi at $\{n \in \mathbb{N} : z_n = y_n\}$ også må være en fet mengde per (iv). Per Definisjon 2.2.1 av *ekvivalens* så er $\{z_n\} \equiv \{y_n\}$, og per Definisjon 2.2.2 av *ekvivalensklasse* er $\{z_n\} \in \langle y_n \rangle$, slik vi ønsket å vise. For å vise at $\{y_n\} \equiv \{z_n\}$ og $\{z_n\} \in \langle x_n \rangle$ medfører $\{z_n\} \equiv \{x_n\}$ er beviset helt tilsvarende. ■

Lemma 2.2.4. *Dersom* $\{x_n\} \not\equiv \{y_n\}$ *så er* $\langle x_n \rangle \cap \langle y_n \rangle = \emptyset$

Bevis. For å vise dette bruker vi den konstrapositive påstanden: *Hvis* $\langle x_n \rangle \cap \langle y_n \rangle \neq \emptyset$ *så er* $\{x_n\} \equiv \{y_n\}$. Dermed antar vi at det finnes en følge $\{z_n\} \in \langle x_n \rangle \cap \langle y_n \rangle$ og ønsker å vise $\{x_n\} \equiv \{y_n\}$. Siden $\{z_n\} \in \langle x_n \rangle \cap \langle y_n \rangle$ så må både $\{n \in \mathbb{N} : z_n = x_n\}$ og $\{n \in \mathbb{N} : z_n = y_n\}$ være fete mengder. Dermed er snittet av mengdene også en fet mengde per (vi). Siden

$$\{n \in \mathbb{N} : z_n = x_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : z_n = y_n\} \subset \{n \in \mathbb{N} : x_n = y_n\}$$

så er $\{n \in \mathbb{N} : x_n = y_n\}$ en fet mengde, som per definisjon av ekvivalens gir at $\{x_n\} \equiv \{y_n\}$, som var det vi ønsket å vise. ■

Nå har vi verktøyene til å formulere mengdedefinisjonen av den *hyperereelle tallinja* $\mathbb{R}^*$. Vi kan tenke på et hyperreelt tall som ekvivalensklassen til en spesifikk tallfølge. For denne spesifikke tallfølgen innfører vi begrepet *representant*, slik at en reell følge $\{x_n\}$ er en representant for et hyperreelt tall $x \in \mathbb{R}^*$ dersom x er lik ekvivalensklassen til $\{x_n\}$. Vi formulerer dette i følgende definisjon:

Definisjon 2.2.5. Vi lar $\mathbb{R}^*$ være mengden av alle ekvivalensklasser $\langle x_n \rangle$, slik at

$$\mathbb{R}^* = \{\langle x_n \rangle : \{x_n\} \in \mathcal{F}\}$$

Av denne definisjonen følger det at for et hyperreelt tall $x \in \mathbb{R}^*$ finnes følger $\{x_n\} \in \mathcal{F}$ slik at $x = \langle x_n \rangle$. En slik følge $\{x_n\}$ vil vi kalle en representant for x.

KAPITTEL 3

En ordnet kropp

Nå som $\mathbb{R}^*$ er en definert tallmengde, ønsker vi å bygge en teori som sier noe om hvordan vi kan regne med disse hyperreelle tallene. Det virker jo å være uinteressant å konstruere en tallmengde for så å ikke engang kunne bruke den til enkle regneoperasjoner, slik som addisjon og multiplikasjon. Det er nemlig en del egenskaper vi forventer av en tallmengde, men som vi kanskje tar for gitt at kjente tallmengder som for eksempel de reelle tallene $\mathbb{R}$ og de naturlige tallene $\mathbb{N}$ innehar. Egenskaper slik som gjør at vi kan forvente et visst resultat når vi addere eller multipliserer, eller når vi sammenlikner størrelsen på tallene.

Målet vårt i dette kapittelet stammer fra Robinsons tanke om å overføre egenskaper ved $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^*$. Dermed må vi forsøke å lete etter de grunnleggende egenskapene ved tallmengden $\mathbb{R}$ som vi ønsker at $\mathbb{R}^*$ også innehar. Det virker dermed naturlig å først identifiserer og beskrive de egenskapene ved $\mathbb{R}$ som vi ønsker å overføre. I dette kapittelet har vi både hentet inspirasjon fra Lindstrøm [Lin96] og Fraleighs lærebok *A First Course in Abstract Algebra* [Fra03].

Først gir vi nok en gang et par definisjoner som kan være nyttig å ta med seg inn i dette kapittelet.

- *Kompletthetsprinsippet for reelle tall garanterer at enhver ikke-tom, begrenset delmengde av* $\mathbb{R}$ *har en minste øvre skranke.*
- *Hvis R er en delmengde av* $\mathbb{R}$*, er en minste øvre skranke til R, det minste tallet i* $\mathbb{R}$ *som er større enn eller lik alle tallene i R. For eksempel hvis* $R = (0, 2)$ *er* 2 *en minste øvre skranke til det åpne intervallet* $(0, 2) \subset \mathbb{R}$.
- *Hvis R er en delmengde av* $\mathbb{R}$*, er en største nedre skranke til R, det største tallet i* $\mathbb{R}$ *som er mindre enn eller lik alle tallene i R. Tilsvarende er* 0 *en største nedre skranke til det åpne intervallet* $(0, 2) \subset \mathbb{R}$*.*

3.1 De reelle tallene - En ordnet kropp

Som nevnt, ønsker vi å først identifisere de egenskapene ved $\mathbb{R}$ som vi ønsker å overføre til $\mathbb{R}^*$. Dermed blir målet med dette delkapittelet å forsøke å besvare spørsmålet: *Hvilke egenskaper har egentlig* $\mathbb{R}$*?* Det er en mengde med tall, vi vet at alle de de fire regneoperasjonene er definert for reelle tall og at vi har kontroll over størrelsesforholdet mellom de ulike tallene. For å eksemplifisere, vet vi at $1+1=2$, $1<2$ og $\sqrt{2}*\sqrt{2}=2$ fra grunnskolen. Spørsmålet er om det finnes en generalisering av disse egenskapene vi *vet* at $\mathbb{R}$ har, slik at vi klarer å overføre de til $\mathbb{R}^*$.

Med denne tanken, må vi først inn på det matematiske begrepet *kropp*, ettersom mengden av reelle tall $\mathbb{R}$ er nettopp en *kropp*. Andre kjente kropper er de rasjonale tallene $\mathbb{Q}$ og de komplekse tallene $\mathbb{C}$, og ønsket vårt er selvsagt at også $\mathbb{R}^*$ er en kropp. Begrepet *kropp* henviser til en grunnleggende algebraiske stuktur for mengder, og betegner de mengder der addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon er definert. Enkelt sagt er en kropp alle mengder der vi kan legge sammen, trekke fra, gange og dele elementene. Videre, tilfredsstiller disse regneoperasjonene et sett med regler vi kaller kropp-aksiomer, og det er disse kropp-aksiomene som må oppfylles for at en mengde kan betegnes som en kropp. Vi skal nå gi en setning som formelt sier at $\mathbb{R}$ er en kropp:

Setning 3.1.1. *For alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gjelder følgende*

a. *Kommutative lover: $x+y=y+x$ og $xy=yx$*

b. *Assosiative lover: $(x+y)+z=x+(y+z)$ og $(xy)z=x(yz)$*

c. *Distributive lover: $x(y+z)=xy+zy$*

d. *Additivt identitetselement: 0 slik at $x+0=x$ for alle $x \in \mathbb{R}$*

e. *Multiplikativt identitetselement: 1 slik at $x \cdot 1 = x$ for alle $x \in \mathbb{R}$*

f. *Additiv invers: Det finnes et tall $y \in \mathbb{R}$ slik at $x+y=0$ for alle $x \in \mathbb{R}$*

g. *Multiplikativ invers: For $x \neq 0$ finnes et tall $y \in \mathbb{R}$ slik at $xy=1$ for alle $x \in \mathbb{R}$*

Denne setningen skal vi benytte oss av litt senere for å vise at $\mathbb{R}^*$ også er en kropp, men først den andre egenskapen på ønskelisten vår; ordning. De reelle tallene er nemlig ikke bare en kropp, men en *ordnet* kropp. Vi ønsker at $\mathbb{R}^*$ også er en *ordnet kropp*. Med en ordnet mengde mener vi en tallmengde der størrelsesforholdet mellom tallene er entydig bestemt. Det er ved ordningen av de reelle tallene vi vet at $1<2$. Vi ønsker å kunne gi tilsvarende sammenhenger for de hyperreelle tallene, og dermed forsøke å overføre ordningsrelasjonen $<$ fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^*$. Ordningsrelasjonen $<$ gir oss at for to tall $x, y \in \mathbb{R}$ så er enten $x<y$, $x=y$ eller $x>y$. Vi gir nå en setning, slik vi gjorde for den algebraiske strukturen kropp, som vi senere skal benytte oss av for å vise at ordningsrelasjonen $<$ holder i $\mathbb{R}^*$.

Setning 3.1.2. *For alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ har vi at*

A. *én av de tre mulighetene $x<y$, $x=y$ eller $x>y$ er oppfylt.*

B. *hvis $x<y$ og $y<z$, så er $x<z$.*

C. *hvis $x<y$, så er $x+z<y+z$*

D. *hvis $x<y$ og $z>0$, så er $xz<yz$*

Vi har nå ved Setning 3.1.1 og Setning 3.1.2 beskrevet de egenskapene ved $\mathbb{R}$ som vi ønsker å overføre til $\mathbb{R}^*$. Disse setningene sier formelt at de reelle tallene er en*ordnet kropp*. Vårt ønske er selvsagt å vise at også $\mathbb{R}^*$ er en ordnet kropp.

Før vi går i gang med å vise at $\mathbb{R}^*$ er en ordnet kropp, er det et viktig prinsipp vi ønsker å se litt nærmere på; *Kompletthetsprinsippet*. Dette prinsippet er nemlig det vi ønsker at er veiskillet for $\mathbb{R}^*$ og $\mathbb{R}$. Kompletthetsprinsippet forteller oss at for alle mengder som oppfyller prinsippet, vil enhver ikke-tom, oppad begrenset delmengde ha en minste øvre skranke. Med en konsekvens at enhver ikke-tom, nedad begrenset delmengde har en største nedre skranke. De reelle tallene $\mathbb{R}$ er et eksempel på en mengde som oppfyller kompletthetsprinsippet, og dermed har disse overnevnte egenskapene. De hyperreelle tallene $\mathbb{R}^*$ skal vi se at ikke oppfyller prinsippet. Samtidig, hadde $\mathbb{R}^*$ hatt alle de samme egenskapene som $\mathbb{R}$, ville jo det bety at vi har brukt en hel del tid på å konstruere en ny tallmengde $\mathbb{R}^*$ og kun endt opp med en kopi av $\mathbb{R}$. Og det hadde jo vært litt kjedelig. Hvorfor nettopp Kompletthetsprinsippet er skillet, kommer av at det kan vises at enhver ordnet kropp som oppfyller dette prinsippet, er nettopp en kopi av $\mathbb{R}$. Vi skal også se at en av de viktigste egenskapene ved de hyperreelle tallene som et redskap i analysen, er at de ikke oppfyller prinsippet.

3.2 Addisjon, multiplikasjon og identiteter av hyperreelle tall

For å kunne vise at Setning 3.1.1 og Setning 3.1.2 holder for $\mathbb{R}^*$ må vi definere addisjon og multiplikasjon av hyperreelle tall. Når vi i denne seksjon gir disse definisjonene, vil leseren kanskje spørre seg hva som skjedde med subtraksjon og divisjon. Vi nevnte jo innledningsvis at en kropp er en mengde der addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon er definert. Hvorfor velger vi da å definere kun addisjon og multiplikasjon? Svaret er at definisjonene våre av addisjon og multiplikasjon i $\mathbb{R}^*$ også vil inkludere subtraksjon og divisjon.

For å utdype; man bruker ofte bregrepet *lukket under* om en mengde og en tilhørende regneoperasjon. Det henviser til at dersom man utfører en regneoperasjon på to vilkårlige tall i en mengde er resultatet av regneoperasjonen også et tall i den samme mengden. For eksempel så er $\mathbb{R}$ *lukket under multiplikasjon* ettersom produktet rs er et reelt tall når r og s selv er reelle tall. For å vise et eksempel på en tallmengde som ikke er *lukket under subtraksjon*, ser vi på $\mathbb{N}$. Ta for eksempel de naturlige tallene 1 og 2, da er $1 - 2 = -1$, men -1 er ikke et naturlig tall.

Grunnen til at $\mathbb{R}$ er lukket under subtraksjon er at $\mathbb{R}$ inneholder både positive og negative størrelser for alle reelle tall, slik vi har definert en *additiv invers* til ethvert reelt tall i punkt (g). Dermed kan subtraksjon oppfattes som addisjon med negative størrelser slik at $s-r = s+(-r)$. Tilsvarende kan vi også forklare at $\mathbb{R}$ er lukket under divisjon ved hjelp av punkt (f) om eksistensen av en *multiplikativ invers* for et reelt tall. Siden det for enhver $r \in \mathbb{R}$ finnes et tall $s \in \mathbb{R}$ slik at $rs = 1$, må s være på formen $s = \frac{1}{r}$. Slik kan divisjon oppfattes som multiplikasjon med brøker. Disse sammenhengene vil være tilsvarende for

$\mathbb{R}^*$ ettersom et hyperreelt tall er definert til å være ekvivalensklassen av reelle tallfølger.

For å kunne vise at $\mathbb{R}^*$ er en kropp, må vi som nevnt, definere addisjon og multiplikasjon av hyperreelle tall, for så å vise at punktene (a)-(f) fra Setning 3.1.1 holder for alle tall i $\mathbb{R}^*$. På bakgrunn av konstruksjonen vår av hyperreelle tall, som ekvivalensklasser av reelle tallfølger, ønsker vi en komponentvis definisjon av addisjon og multiplikasjon. En slik komponentvis definisjon vil sørge for at egenskapene ved de hyperreelle tallene som inngår i regneoperasjonene gjenspeiles i summen eller produktet av de. Definisjonen vår blir som følger:

Definisjon 3.2.1. La $x, y \in \mathbb{R}^*$ og la $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$ være de respektive representantene. Vi definerer henholdsvis addisjon og multiplikasjon ved

$$x + y = \langle x_n + y_n \rangle$$

og

$$xy = \langle x_n y_n \rangle$$

Denne definisjonen forteller oss at for å addere $x = \langle x_n \rangle$ og $y = \langle y_n \rangle$, adderer vi først komponentene i de respektive representantene $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$. Deretter tar vi ekvivalensklassen til den nye følgen $\{x_n + y_n\}$, og får $\langle x_n + y_n \rangle$ som resultat. Tilsvarende gjør vi for multiplikasjon. Vi sier at addisjon og multiplikasjon er definert *komponentvis* i $\mathbb{R}^*$.

Det neste vi ønsker å vise er at Definisjon 3.2.1 er veldefinert. Dermed må vi vise at addisjon og multiplikasjon for et tall $x \in \mathbb{R}^*$ er uavhengig av hvilken representant $\{x_n\}$ vi velger for x. Slik forsikrer vi oss om at definisjonene våre gjelder for alle representantene for det hyperreelle tallet. Vi formulerer dette i følgende lemma:

Lemma 3.2.2. *Antar at* $\{x_n\} \equiv \{x'_n\}$ *og* $\{y_n\} \equiv \{y'_n\}$. *Da er* $\{x_n + y_n\} \equiv \{x'_n + y'_n\}$ *og* $\{x_n y_n\} \equiv \{x'_n y'_n\}$.

Bevis. Vi lar $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n = x'_n\}$ og $B = \{n \in \mathbb{N} : y_n = y'_n\}$ slik at A og B er fete mengder per Definisjon 2.2.1 av ekvivalens. Da er også $A \cap B$ en fet mengde per (vi). Siden

$$A \cap B \subset \{n \in \mathbb{N} : x_n + y_n = x'_n + y'_n\}$$

og

$$A \cap B \subset \{n \in \mathbb{N} : x_n y_n = x'_n y'_n\}$$

og per (iv) må også $\{n \in \mathbb{N} : x_n y_n = x'_n y'_n\}$ og $\{n \in \mathbb{N} : x_n + y_n = x'_n + y'_n\}$ være fete mengder. Følgelig er også $\{x_n + y_n\} \equiv \{x'_n + y'_n\}$ og $\{x_n y_n\} \equiv \{x'_n y'_n\}$, slik vi ønsket. ∎

Det siste vi trenger før vi kan vise at $\mathbb{R}^*$ er en *kropp*, er å angi identitetselementene for addisjon og multiplikasjon gitt i punkt (g) og (f) i Setning 3.1.1 for $\mathbb{R}$. Vi definerer identitetselementet for addisjon, tilsvarende 0, til å være ekvivalensklassen til den konstante følgen $\{0, 0, 0, ...\}$, slik at det additive identitetselementet er $\langle 0, 0, 0, ... \rangle$. Vi definerer videre identitetselementet for multiplikasjon, tilsvarende 1, til å være ekvivalensklassen den konstante følgen $\{1, 1, 1, ...\}$, slik at det multiplikative identitetselementet er $\langle 1, 1, 1, ...\rangle$.

3.3 De hyperreelle tallene - En kropp

Da er vi klare for å vise at $\mathbb{R}^*$ faktisk er en kropp, og gir følgende setning som vi ønsker å bevise:

Setning 3.3.1. *For alle $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ gjelder følgende*

a. *Kommutative lover: $x + y = y + x$ og $xy = yx$*

b. *Assosiative lover: $(x + y) + z = x + (y + z)$ og $(xy)z = x(yz)$*

c. *Distributive lover: $x(y + z) = xy + zy$*

d. *Additivt identitetselement: 0 slik at $x + 0 = x$ for alle $x \in \mathbb{R}^*$*

e. *Multiplikativt identitetselement: 1 slik at $x \cdot 1 = x$ for alle $x \in \mathbb{R}^*$*

f. *Additiv invers: Det finnes et tall $y \in \mathbb{R}^*$ slik at $x + y = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}^*$*

g. *Multiplikativ invers: For $x \neq 0$ finnes et tall $y \in \mathbb{R}^*$ slik at $xy = 1$ for alle $x \in \mathbb{R}^*$*

Bevis. La $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ der addisjon og multiplikasjon er definert, og la de additive og multiplikative identitetselementene være respektivt definert ved $0 = \langle 0, 0, 0, ...\rangle$ og $1 = \langle 1, 1, 1, ...\rangle$. Vi lar $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ og $\{z_n\}$ være representanter for henholdsvis x, y og z, og bruker at $x_n, y_n, z_n \in \mathbb{R}$ der vi vet at $\mathbb{R}$ er en kropp.

a. Vi har at
$$x + y = \langle x_n + y_n\rangle = \langle y_n + x_n\rangle = y + x$$
og
$$xy = \langle x_n y_n\rangle = \langle y_n x_n\rangle = yx$$
siden $x_n, y_n \in \mathbb{R}$.

b. Vi har at
$$(x + y) + z = \langle (x_n + y_n) + z_n\rangle = \langle x_n + (y_n + z_n)\rangle = x + (y + z)$$
og
$$(xy)z = \langle (x_n y_n) z_n\rangle = \langle x_n(y_n z_n)\rangle = x(yz)$$
siden $x_n, y_n, z_n \in \mathbb{R}$.

c. Vi har at
$$x(y + z) = \langle x_n(y_n + z_n)\rangle = \langle x_n y_n + x_n z_n\rangle = xy + xz$$
siden $x_n, y_n, z_n \in \mathbb{R}$

d. For det additive identitetselementet 0 har vi at

$$x + 0 = \langle x_n + 0 \rangle = \langle x_n \rangle = x$$

siden for en hver følge $\{x_n\} \in \langle x_n \rangle$ så er $\{x_n\}+\{0,0,0,...\} = \{x_1, x_2, x_3, ...\}+\{0,0,0,...\} = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ og $x_n, 0 \in \mathbb{R}$ for alle n.

e. For multiplikative identitetselementet 1 har vi at

$$x \cdot 1 = \langle x_n \cdot 1 \rangle = \langle x_n \rangle = x$$

siden for en hver følge $\{x_n\} \in \langle x_n \rangle$ så er $\{x_n\} \cdot \{1,1,1,...\} = \{x_1, x_2, x_3, ...\} \cdot \{1,1,1,...\} = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ og $x_n, 1 \in \mathbb{R}$

f. La $x \neq 0$, da må

$$A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}$$

være en fet mengde. For hver $n \in A$ kan vi finne en $y_n \in \mathbb{R}$ slik at $x_n y_n = 1$. Velger y_n vilkårlig fra alle andre $n \in A$ og lar $y = \langle y_n \rangle$. Siden

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n y_n = 1\} = A$$

er en fet mengde, så er følgelig $xy = 1$ slik vi ønsket å vise.

Ved punktene a.-f. er $\mathbb{R}^*$ en kropp. ■

3.4 Ordning av hyperrelle tall

I denne siste seksjonen skal vi vise at $\mathbb{R}^*$ er en *ordnet* kropp, og vi gjør slik som for addisjon og multiplikasjon: definerer ordningsrelasjonen $<$ på $\mathbb{R}^*$, sjekker at definisjonen av $<$ er veldefinert i $\mathbb{R}^*$ og viser at $\mathbb{R}^*$ er en ordnet mengde ved Setning 3.1.2 for hyperreelle tall.

I definisjonen av ordningsrelasjonen $<$ på $\mathbb{R}^*$ vil vi holde fast ved den komponentvise strukturen fra Definisjon 3.2.1 av addisjon og multiplikasjon. Vi sier at for to hyperreelle tall x og y med respektive representanter $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$, så er $x < y$ hvis mengden av komponenter i $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$ der $x_n < y_n$ er fet. Dette gir oss følgende definisjon av ordningsrelasjonen:

Definisjon 3.4.1. La $x = \langle x_n \rangle$ og $y = \langle y_n \rangle$ være to elementer $\mathbb{R}^*$. Da er $x < y$ dersom

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n < y_n\}$$

er en fet mengde.

Vi sjekker først at definisjonen av $<$ veldefinert, det vil si at $<$ er uavhengig av hvilke representanter $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$ vi velger for $x, y \in \mathbb{R}^*$.

Lemma 3.4.2. *Antar at* $\{x_n\} \equiv \{x'_n\}$, $\{y_n\} \equiv \{y'_n\}$ *og* $\langle x_n \rangle < \langle y_n \rangle$. *Da er* $\langle x'_n \rangle < \langle y'_n \rangle$

Bevis. La $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n = x'_n\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} : y_n = y'_n\}$ og $C = \{n \in \mathbb{N} : x_n < y_n\}$. Da er $A \cap B$ en fet mengde per (vi), og per (vi) igjen er $(A \cap B) \cap C$ også en fet mengde. Men siden

$$A \cap B \cap C \subset \{n \in \mathbb{N} : x'_n < y'_n\}$$

og per (iv) må da også $\{n \in \mathbb{N} : x'_n < y'_n\}$ være en fet mengde. Følgelig er $\langle x'_n \rangle < \langle y'_n \rangle$. ■

Da er vi klare for å sjekke om ordningsrelasjonen vi har definert på $\mathbb{R}^*$ holder, slik at $\mathbb{R}^*$ er en ordnet tallmengde og formulerer følgende setning:

Setning 3.4.3. *For alle $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ gjelder følgende*

A. *nøyaktig én av de tre mulighetene $x < y$, $x = y$ eller $x > y$ er oppfylt.*

B. *hvis $x < y$ og $y < z$, så er $x < z$.*

C. *hvis $x < y$, så er $x + z < y + z$*

D. *hvis $x < y$ og $z > 0$, så er $xz < yz$*

Bevis. La $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ der ordningsrelasjonen $<$ er definert. Vi lar $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ og $\{z_n\}$ være representanter for henholdvis x, y og z.

A. Observerer vi først at for to elementer $x, y \in \mathbb{R}^*$ der $x = \langle x_n \rangle$ og $y = \langle y_n \rangle$ så er

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n < y_n\} \cup \{n \in \mathbb{N} : x_n = y_n\} \cup \{n \in \mathbb{N} : x_n > y_n\} = \mathbb{N}$$

I følge Lemma 1.2.1 må nøyaktig én av de tre mengdene $\{n \in \mathbb{N} : x_n < y_n\}$, $\{n \in \mathbb{N} : x_n = y_n\}$ og $\{n \in \mathbb{N} : x_n > y_n\}$ være en fet mengde. Følgelig er nøyaktiv én av mulighetene $x < y$, $x = y$ eller $x > y$ oppfylt.

B. Lar $x < y$ og $y < z$, da er $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n < y_n\}$ og $B = \{n \in \mathbb{N} : y_n < z_n\}$ fete mengder. Per (vi) er også $A \cap B$ en fet mengde. Siden

$$A \cap B \subset \{n \in \mathbb{N} : x_n < y_n\}$$

så er $\{n \in \mathbb{N} : x_n < z_n\}$ en fet mengde per (iv). Følgelig er $x < z$

C. Lar $x < y$. Da er $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n < y_n\}$ er en fet mengde. Siden addisjon er veldefinert og

$$A \subset \{n \in \mathbb{N} : x_n + z_n < y_n + z_n\}$$

er $\{n \in \mathbb{N} : x_n + z_n < y_n + z_n\}$ en fet mengde. Følgelig er $x + z < y + z$

D. Lar $x < y$ og $z > 0$. Da $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n < y_n\}$ og $B = \{n \in \mathbb{N} : z_n > 0\}$ fete mengder. Per (iv) er også $A \cap B$ en fet mengde. Siden

$$A \cap B \subset \{n \in \mathbb{N} : z_n x_n < z_n y_n\}$$

er også $\{n \in \mathbb{N} : z_n x_n < z_n y_n\}$ fet per (vi). Følgelig er $zx < zy$

Per A.-D. er $\mathbb{R}^*$ ordnet. ■

Da har vi klart å vise at $\mathbb{R}^*$ er en ordnet kropp, en tallmengde der vi kan addere, multiplisere og sammenlikne størrelsen på tallene i mengden.

KAPITTEL 4

De endelige, uendelig små og uendelig store størrelsene

Vi har nå klart å konstruere de hyperreelle tallene $\mathbb{R}^*$ som en utvidelse av de reelle tallene $\mathbb{R}$, og overføre egenskaper fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^*$, ved å definere addisjon, multiplikasjon og ordningsrelasjon. I forrige kapittel nevnte vi *Kompletthets-prinsippet*, i sammenheng med at vi ikke ønsket at $\mathbb{R}^*$ skulle være en kopi av $\mathbb{R}$. Ettersom $\mathbb{R}^*$ ikke er en kopi er det åpenbart at denne tallmengden må inneholde størrelser som vi ikke finner i $\mathbb{R}$. Innledningsvis forklarte vi at det finnes tre kategorier av hyperreelle tall; endelige, uendelig store og uendelig små tall. I dette kapittelet ønsker vi å vie litt tid til å undersøke disse tre kategoriene av størrelser, og vi vil henholdsvis omtale de som hyperreelle tall av typen *endelige*, *uendelige* og *infinitesimaler*. Vi ønsker å se nærmere på hvordan disse størrelsene kan defineres og hvilke egenskaper som skiller de ulike kategoriene. Samtidig vil vi undersøke hvordan de reelle tallene $\mathbb{R}$ kan bli gitt en naturlig utvidelse til $\mathbb{R}^*$, og dermed definere reelle tall slik at enhver $r \in \mathbb{R}$ har en naturlig utvidelse til $\mathbb{R}^*$.

4.1 De reelle hyperreelle tallene

La oss ta opp tråden fra innledningen; vi ønsker at de hyperreelle tallene $\mathbb{R}^*$ er en tallmengde som også inneholder de reelle tallene. Deremed vil vi konstruere en kopi av $\mathbb{R}$, slik at denne kopien er en delmengde av $\mathbb{R}^*$. Følgelig må vi definere kopiene av reelle tall på samme måte som vi har definert hyperreelle tall, ved hjelp av ekvivalensklasser av reelle tallfølger. Vi har gode nyheter, fordi dette har vi allerede gjort! Da vi definerte de additive og multiplikative identitetselementene for hyperrelle tall, tilsvarende de reelle tallene 0 og 1 for $\mathbb{R}$ i forrige kapittel, definerte vi $0 = \langle 0, 0, 0, ... \rangle$ og $1 = \langle 1, 1, 1, ... \rangle$. Vi forklarte ikke på dette tidspunktet hvorfor vi valgte å definere de slik, men ideen bak definisjonen av identitetselementene lar seg generalisere og er knyttet til ekvivalensklasser av konstante følger av reelle tall.

Vi har sagt at for et tall $x \in \mathbb{R}^*$ finnes det følger $\{x_n\} \in \mathcal{F}$ slik at $x = \langle x_n \rangle$. Dermed kan vi se for oss at de reelle tallene er én type hyperreelle tall, og at de vil være kategorisert som et *endelig hyperreelt tall*. Hva det vil si at et tall er *endelig* i $\mathbb{R}^*$ skal vi se nærmere på i Seksjon 4.4. Det første vi ønsker for de reelle tallene er å kunne uttrykke kopier av disse på samme måte som for en vilkårlig $x \in \mathbb{R}^*$, ved $x = \langle x_n \rangle$. Vi lar $r \in \mathbb{R}$ være et reelt tall, og lager oss en delmengde av $\mathbb{R}^*$ på følgende måte

$$\{\langle r, r, r, ... \rangle : r \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^*$$

Da vil ethvert hyperreelt tall fra denne delmengden, på formen $\langle r, r, r, ... \rangle$, svare til nøyaktig et element $r \in \mathbb{R}$. Kopiene av de reelle tallene som er inneholdt i $\mathbb{R}^*$ er med andre ord definert som ekvivalensklassen til de konstante følgene av det samme reelle tallet som de er en kopi av. Addisjon og multiplikasjon i denne delmengden svarer til addisjon og multiplikasjon i $\mathbb{R}$. Vi illustrerer dette med eksempler på henholdsvis addisjon og multiplikasjon, ordningsrelasjonen og kompletthetsprinsippet:

Eksempel 4.1.1. For to hyperrelle tall $r = \langle r, r, r, ... \rangle$ og $s = \langle s, s, s, ... \rangle$ er

$$r + s = \langle r, r, r, ... \rangle + \langle s, s, s, ... \rangle = \langle r + s, r + s, r + s, ... \rangle$$

og

$$rs = \langle r, r, r, ... \rangle \cdot \langle s, s, s, ... \rangle = \langle rs, rs, rs, ... \rangle$$

Eksempel 4.1.2. La r og s være to reelle tall med hyperreelle-kopier $\langle r, r, r, ... \rangle$ og $\langle s, s, s, ... \rangle$. Hvis $r < s$ så må $\langle r, r, r, ... \rangle < \langle s, s, s, ... \rangle$ ettersom $\{n \in \mathbb{N} : r < s\}$ åpenbart er en fet mengde.

Eksempel 4.1.3. La R være en ikke-tom begrenset delmengde av $\mathbb{R}$ og kopien $\{\langle r, r, r, ... \rangle | r \in R\}$ være en delmengde av $\mathbb{R}^*$. R har per antakelse en minste øvre skranke c slik at $r \leq c$ for alle $r \in R$. Vi lager vi oss en kopi av c ved $\langle c, c, c, ...$ Da må åpenbart mengden $\{n \in \mathbb{N} : r \leq c\}$ være fet. Per Definisjon 3.4.1 er dermed $\langle r, r, r, ... \rangle \leq \langle c, c, c, ... \rangle$ for alle $\langle r, r, r, ... \rangle \in \{\langle r, r, r, \rangle | r \in R\}$. Som viser at $\langle c, c, c, ... \rangle$ er en øvre skranke til $\{\langle r, r, r, ... \rangle | r \in R\}$. Siden $\{\langle r, r, r, ... \rangle | r \in R\} \subset \mathbb{R}^*$ finnes en infinitesimal $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ slik at $c - \varepsilon$ er en øvre skranke til $\{\langle r, r, r, ... \rangle | r \in R\}$ som er mindre enn c i $\mathbb{R}^*$.

Følgelig er delmengden $\{\langle r, r, r, ... \rangle : r \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^*$ en kopi av $\mathbb{R}$. For å gjøre det lettere for oss selv vil vi videre i denne oppgaven ikke skjelne mellom de reelle tallene $\mathbb{R}$ og kopien $\{\langle r, r, r, ... \rangle : r \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^*$, det gir nemlig lite avkastning, og vi kan nå tenke oss at $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$ i tråd med ønsket om en utvidelse. Som en videre konsekvens kan vi fra nå av la r og $\langle r, r, r, ... \rangle$ bare være to navn på samme tall.

4.2 Størrelsene

Med begrepet om reelle tall som én type endelige hyperreelle tall på plass, kan vi nå gi en definisjon for de tre ulike kategoriene av hyperreelle tall som vi presenterte innledningsvis; de endelige, uendelig og infinitesimale størrelsene i $\mathbb{R}^*$.

Definisjon 4.2.1. For et tall $x \in \mathbb{R}^*$ er x

a. *endelig* dersom det finnes et tall $r \in \mathbb{R}$ slik at $-r < x < r$.

b. *uendelig* dersom x ikke er endelig

c. et *infinitesimal* dersom $-r < x < r$ for alle positive $r \in \mathbb{R}$

Merknad 4.2.2. Ved denne definisjonen er det eneste infinitesimalet som også er et reelt tall 0, alle andre reelle tall er endelige.

4.3 Uendelig små og uendelige store tall

Vi begynner med å ta for oss de uendelig store og små størrelsene, gitt henholdsvis ved punkt b. og c. i Definisjon 4.2.1. Og vi vender nå tilbake til begynnelsen av dette kapittelet med en utvidet verktøykasse, eller rettere sagt en utvidet talllinje, og ser enda en gang på de to tallfølgene

$$\{\tfrac{1}{n}\} = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, ...\} \quad \text{og} \quad \{\tfrac{1}{n^2}\} = \{1, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{9}, ...\}$$

Vi sa at de to følgene konvergerte mot 0 når $n \to \infty$, og reiste spørsmålet om det fantes måter å skille disse to følgene på. Svaret vårt var hyperreelle tall og ikke-standard analyse, og vi fortalte at vi senere skulle vise at disse tallfølgene var representanter for to ulike infinitesimaler. Nå kan vi si at $\{\frac{1}{n}\}$ og $\{\frac{1}{n^2}\}$ er representanter for to infinitesimaler som vi gir navnene ε og δ, slik at

$$\varepsilon = \langle 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, ..., \tfrac{1}{n}, ...\rangle \quad \text{og} \quad \delta = \langle 1, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{9}, ..., \tfrac{1}{n^2}, ...\rangle$$

Ser vi nå på de to tallfølgene

$$\{n\} = \{1, 2, 3, ...\} \quad \text{og} \quad \{n^2\} = \{1, 4, 9, .., \}$$

er disse representanter for to ulike uendelige tall. Tallfølgene $\{n\}$ og $\{n^2\}$ sier vi at divergerer, eller går mot ∞ når $n \to \infty$. Vi gir de uendelige tallene, med respektive representanter $\{n\}$ og $\{n^2\}$, navnene a og b slik at

$$a = \langle 1, 2, 3, ..., n, ...\rangle \quad \text{og} \quad b = \langle 1, 4, 9, .., n^2, ...\rangle$$

Vi ønsker nå å vise at ε og δ er faktisk er infinitesimaler, og at a og b er uendelig tall. Vi viser dette kun for ε og a ettersom bevisene er tilsvarende for δ og b.

Eksempel 4.3.1. For å vise at $\varepsilon = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\rangle$ er et infinitesimal må vi vise at $\varepsilon = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}..., \frac{1}{n}, ...\rangle$ er mindre enn et hvert positivt reelt tall $r = \langle r, r, r, ...\rangle$. Vi vet at $\varepsilon < r$ dersom mengden $\{n \in \mathbb{N} : 1/n < r\}$ er fet. Siden $\{n \in \mathbb{N} : 1/n < r\}$ inneholder alle n bortsett fra et endelig antall, er komplementet til $\{n \in \mathbb{N} : 1/n < r\}$ endelig. Siden alle endelig mengder er tynne per (iii), må $\{n \in \mathbb{N} : 1/n < r\}$ være fet per (i) og ε er et infinitesimal per (c).

Eksempel 4.3.2. For å vise at $a = \langle 1, 2, 3, ..., n, ..\rangle$ er et uendelig stort tall må vi vise at $a = \langle 1, 2, 3, ..., n, ..\rangle$ er større enn ethvert positivt reelt tall $r = \langle r, r, r, ...\rangle$. Vi vet at $a > r$ dersom mengden $\{n \in \mathbb{N} : n > r\}$ er fet. Siden $\{n \in \mathbb{N} : n > r\}$ inneholder alle n untatt et endelig antall, er komplementet til $\{n \in \mathbb{N} : n > r\}$ endelig. Siden alle endelig mengder er tynne per (iii), må $\{n \in \mathbb{N} : n > r\}$ være fet per (i) og a er uendelig stort per (b).

Intuitivt bør det også holde at summen og produktet av to infinitesimaler er et infinitesimal, og tilsvarende sammenheng for de uendelige tallene. Vi tar kun for oss å vise frem et eksempel på summen av to infinitesimaler.

Eksempel 4.3.3. La ε og δ være infinitesimalene som vi så på ovenfor, og ønsker å vise at $\varepsilon + \delta$ også er et infinitesimal. Siden

$$\varepsilon + \delta = \langle \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n^2} \rangle = \langle \tfrac{n+1}{n^2} \rangle$$

ved Definisjon 3.2.1 av addisjon på $\mathbb{R}^*$, må vi vise at $\phi = \langle 1, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, ..., \frac{n+1}{n^2}, ... \rangle$ er et infinitesimal. Da må vi per punkt (c) i Definisjon 4.2.1 av et infinitesimal vise at ϕ er mindre et ethvert reelt tall $r = \langle r, r, r, ... \rangle$. Per Definisjon 3.4.1 av ordningsrelasjonen er $\phi < r$ hvis mengden $\{n \in \mathbb{N} : \frac{n+1}{n^2} < r\}$ er fet. Siden $\{n \in \mathbb{N} : \frac{n+1}{n^2} < r\}$ inneholder alle n bortsett fra et endelig antall, er komplementet til denne mengden endelig. Siden alle endelige mengder er tynne per (iii), så må $\{n \in \mathbb{N} : \frac{n+1}{n^2} < r\}$ være fet per (i) og ϕ er et infinitesimal.

4.4 Endelige tall

Vi har allerede sett at ved å lage en kopi av de reelle tallene kunne vi si at denne kopien gav én type hyperreelle tall og skrev de på formen $\langle r, r, r, ... \rangle$. Vi tok videre valget om å ikke skille mellom kopien $\{\langle r, r, r, ... \rangle : r \in \mathbb{R}\}$ av $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}$ selv, og lot r og $\langle r, r, r, ... \rangle$ være to navn på samme tall. Slik ble de reelle tallene, og ikke bare kopien, én type hyperreelle tall i våre øyne. Vi nevnte også at reelle tall var kategorisert som endelige hyperreelle tall. En slik kategorisering av de reelle tallene er åpenbart i tråd med punkt a. i Definisjon 4.2.1 for alle reelle tall med unntak av 0, og viser dette med et eksempel:

Eksempel 4.4.1. For å vise at $r = \langle r, r, r, ... \rangle$ er et endelig hyperreelt tall må vi vise at det finnes et reelt tall $s \in \mathbb{R}$ slik at

$$-s < r < s = \langle -s, -s, -s, ... \rangle < \langle r, r, r, ... \rangle < \langle s, s, s, ... \rangle.$$

Vi vet at $r < s$ dersom mengden $\{n \in \mathbb{N} : r < s\}$ er en fet mengde. Da kan vi velge oss $s = r + t$ for et reelt tall t og vi har vist at r er et endelig hyperreelt tall per punkt (a.) i Definisjon 4.2.1.

Videre så vi eksempler på uendelig store tall slik som a og b og infinitesimaler slik som ε og δ. Spørsmålet er om det finnes andre *endelige tall* i $\mathbb{R}^*$ enn de reelle tallene, og hvordan ser disse tallene ut? Vi formulerer en setning og forsøker å bevise den.

Setning 4.4.2. *Ethvert endelig tall $x \in \mathbb{R}^*$ er på formen $x = r + \varepsilon$, der r er et reelt tall og ε er et infinitesimal.*

Bevis. Siden $x \in \mathbb{R}^*$ er endelig finnes det et positivt reelt tall r slik $-r < x < r$. Dermed er mengden

$$\{r \in \mathbb{R} : r < x\}$$

en ikke-tom, begrenset delmengde av $\mathbb{R}$. Ved *Kompletthetsprinsippet* har $\{r \in \mathbb{R} : r < x\}$ en minste øvre skranke $s \in \mathbb{R}$. Det vi ønsker å vise er at $x - s$ er et infinitesimal. For å fremprovosere en motsigelse antar vi at s er en minste øvre skranke for $\{r \in \mathbb{R} : r < x\}$ og at $x - s$ ikke er et infinitesimal. Vi ser på to tilfeller:
(1.) Hvis $x - s > 0$ finnes et positivt reelt tall t slik at $x - s > t$ siden $x - s$ ikke var infinitesimal. Det betyr at $s < s + t < x$. Dermed er $t + s \in \{r \in \mathbb{R} : r < x\}$ et positivt reelt tall større enn s. Som er en motsigelse til antakelsen om at s er

øvre skranke.
(2.) Hvis $x - s < 0$ finnes et negativt reelt tall t slik at $x - s < t$, men da er $x < s + t < s$. Dermed $s + t$ er en øvre skranke for $\{r \in \mathbb{R} : r < x\}$ som er mindre enn s. Dette er en motsigelse av antakelsen vår om at s er minste øvre skranke.
Dermed er $x - a = \varepsilon$ for ε et infinitesimal, slik vi ønsket å vise. ■

Merknad 4.4.3. Vi minner om at 0 var et infinitesimal ved Definisjon 4.2.1, slik at for et reelt tall r og $\varepsilon = 0$ så er $x \in \mathbb{R}^*$ et reelt tall og på formen $x = r + \varepsilon$ slik vi definerte et endelig hypereelt tall.

Tilsvarende sammenhenger som vi nevnte at burde holde for infinitesimaler og uendelige tall, bør intuitivt også både holde for og inkludere de endelige tallene. Eksempelvis at summen og produktet av to endelige tall er et endelig tall. At produktet av et infinitesimal og et endelig tall er et infinitesimal. Eller at summen av et endelig tall og et uendelig tall er uendelig. Vi ser på et eksempel.

Eksempel 4.4.4. Vi ønsker å vise at for to endelige tall x og y så er $x + y$ et endelig tall. Siden x og y er endelige kan vi skrive de på formen $x = s + \phi$ og $y = t + \delta$, for reelle tall t og s og infinitesimaler ϕ og δ. Da er

$$x + y = (s + \phi) + (t + \delta) = (s + t) + (\phi + \delta$$

og siden summen av to reelle tall er et reelt tall kan vi skrive $r = s + t$ for en $r \in \mathbb{R}$. Siden summen av to infinitesimaler er et infinitesimal kan vi skrive $\varepsilon = \phi + \delta$ for et infinitesimal ε. Dermed har vi vist at $x + y$ er et endelig tall på formen $r + \varepsilon$.

Vi lager oss en liste med de sammenhengene vi kommer til å bruke videre i denne oppgaven:

1. Summen og produktet av to infinitesimaler er et infinitesimal.
2. Summen og produktet av to uendelige tall er et uendelig tall.
3. Summen og produktet av to endelige tall er et endelig tall.
4. Summen og produktet av et uendelig tall og et endelig tall ulikt fra 0, er uendelig.
5. Summen av et infinitesimal og et endelig tall er endelig. Produktet er et infinitesimal.
6. Summen av et infinitesimal og et uendelig tall er uendelig.

KAPITTEL 5

De hyperreellene tallenes sammenheng

Før vi gir noen etterlengtede sammenhenger på den hyperreelle tallinja, er det nødvendig å gi en kort oppsummering av hva vi har kommet frem til så langt i denne oppgaven. Vi minner om at vi har konstruert tallmengden $\mathbb{R}^*$ fra en noe finurlig oppdeling av de naturlige tallene $\mathbb{N}$ i to klasser: fete og tynne delmengder. De hyperreelle tallene $\mathbb{R}^*$ definerte vi til å være mengden av alle ekvivalensklasser $\langle x_n \rangle$ av reelle følger $\{x_n\} \in \mathcal{F}$, der $\mathcal{F}$ var en samling av alle slike reelle følger. Videre var to reelle følger $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$ ekvivalente dersom $\{n \in \mathbb{N} : x_n = y_n\}$ var en fet mengde. Slik ble mengden av hyperreelle tall gitt ved

$$\mathbb{R}^* = \{\langle x_n \rangle : \{x_n\} \in \mathcal{F}\}$$

i Definisjon 2.2.5. Fra denne definisjonen kunne vi videre si at for et hyperreelt tall $x \in \mathbb{R}^*$ fantes det reelle tallfølger $\{x_n\} \in \mathcal{F}$ der $x_n \in \mathbb{R}$, slik at $x = \langle x_n \rangle$. Vi definerte addisjon og multiplikasjon på $\mathbb{R}$ komponentvis ved Definisjon 3.2.1. Videre, kunne vi vise at $\mathbb{R}^*$ var en kropp ved Setning 3.3.1, og viste at $\mathbb{R}^*$ var lukket under alle de fire regneoperasjonene slik vi forventer av en utvidelse av $\mathbb{R}$. Vi viste også at $\mathbb{R}^*$ ikke bare var en kropp, men en ordnet kropp ved Setning 3.4.3, og definerte ordningsrelasjonen $<$ på $\mathbb{R}^*$ i Definisjon 3.4.1 ved hjelp av begrepet om fete delmengder av $\mathbb{N}$. Til slutt kunne vi definere tre kategorier hyperreelle tall; *endelige*, *uendelige* og *infinitesimaler* ved Definisjon 4.2.1. Der vi hadde for de *endelige tallene* x at det fantes et reelt tall r slik at $-r < x < r$. De *uendelige tallene* var definert ved at de ikke var endelige. *Infinitesimale tall* x var definert slik at for ethvert positivt reelt tall r var $-r < x < r$.

Med en liten oppfriskning i boks, ønsker vi nå å betrakte sammenhengen mellom de endelige, uendelige og infinitesimale hyperreelle tallene fra Definisjon 4.2.1. Vi vil i dette kapittelet basere definisjonene av *monade* og *standarddel* til et hyperreelt tall på de gitt av Lindstrøm [Lin96]. Fremstillingen av den hyperreelle tallinja vil basere seg på den gitt i boken *Elementary Calulus: An infinitesimal approach* av Keisler [Kei13], kapittelet vil også inneholde et par resultater fra boken *Foundations of Infinitesimal Calculus* [Kei76] av samme forfatter. Målet blir å kunne si noe om hvor størrelsene befinner seg i forhold til hverandre på en hyperreelle tallinje. Når vi senere skal visualisere den hyperreelle tallinja, ønsker vi å betrakte den som en utvidelse av den reelle tallinja vi kjenner fra skolematematikken.

Helt til slutt; dersom leseren har ventet i spenning på en oppklaring av veiskillet for $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^*$, som har vært nevnt flere ganger i denne oppgaven som *Kompletthetsprinsippet*, kan leseren nå fryde seg over å få vite at vi i dette kapittelet endelig vil kunne bevise at prinsippet ikke holder i $\mathbb{R}^*$.

5.1 De hyperreelle tallenes plassering

Vi begynner med å betrakte de endelige hyperreelle tallene, og kan se for oss at vi bruker et mikroskop på $\mathbb{R}^*$ og ser på et endelig tall $x \in \mathbb{R}^*$. I dette mikroskopet vil vi i et omegn av x finne et reelt tall r og uendelig mange hyperreelle tall som ligger uendelig nære x. Vi gir følgende definisjon som karakteriserer det reelle tallet og de hyperreelle tallene som er uendelig nærme:

Definisjon 5.1.1. Anta at $x \in \mathbb{R}^*$ er endelig. Det *ene* reelle tallet r som ligger uendelig nær x kalles *standarddelen* til x og betegnes ved notasjon $st(x)$. Mengden av *alle* tallene i $\mathbb{R}^*$ som ligger uendelig nærme x kalles *monaden* til x og betegnes ved notasjon $\mu(x)$.

Av denne definisjonen har vi at for alle endelige hyperreelle tall, som per definisjon er på formen $x = r + \varepsilon$ for et reelt tall $r \in \mathbb{R}$ og et infinitesimal ε, at $st(x) = r$. Vi ønsker å vise at det kun finnes én slik r for hver endelig $x \in \mathbb{R}^*$, slik at standarddelen til et hyperreelt tall er et unikt reelt tall.

Lemma 5.1.2. *Ethvert endelig tall $x \in \mathbb{R}^*$ er uendelig nære et unikt reelt tall r.*

Bevis. Vi ønsker å vise at r er unik og antar for å fremprovosere en motsigelse at at det finnes reelle tall r og s slik at $r \approx x$ og $s \approx x$. Da er $r - x$ og $s - x$ infinitesimale, og $(r - x) - (s - x) = r - s \approx 0$. Men dette er en motsigelse av antakelsen om at r og s er reelle tal. Følgelig må $r - s = 0$ og $r = s$. Som viser at det reelle tallet r uendelig nære x er unikt. ∎

Videre kan vi ved andre del av definisjonen se på monaden til 0 mengden $\mu(0)$, der $\mu(0)$ inneholder alle infinitesimaler. Vi kan se for oss alle infinitesimaler $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$, de uendelig små størrelsene, ligger i et uendelig lite omegn av 0. Dersom vi bruker et mikroskop på 0, finner vi en galakse av infinitesimaler. Dermed er vi klare for å vise, hold dere fast, at denne galaksen av infinitesimaler $\mu(0)$ er et eksempel på nettopp en ikke-tom og begrenset delmengde av $\mathbb{R}^*$ som ikke har en minste øvre skranke. $\mu(0)$ er åpenbart ikke en tom mengde, da den inneholder alle infinitesimaler, samtidig er mengden begrenset da den ikke inneholder andre hyperreelle tall enn infinitesimalene. Med andre ord; $\mathbb{R}^*$ oppfyller ikke *Kompletthetsprisippet*, og vi formulerer et lemma som vi ønsker å bevise.

Lemma 5.1.3. *Mengden $\mu(0)$ av alle infinitesimaler er begrenset, men har ingen øvre skranke.*

Bevis. Vi skal vise at mengden av alle infinitesimaler $\mu(0)$ ikke har en minste øvre skranke. For å fremprovosere en motsigelse antar vi at $\mu(0)$ har en minste øvre skranke s. Ettersom en minste øvre skranke per definisjon er et tall som er

større enn eller lik alle elementene i $\mu(0)$, er det to muligheter for hva s kan være. Enten er s et positivt infinitesimal slik at $s \in \mu(0)$, ettersom vi ser på en minste øvre skranke til et intervall sentrert i 0. Eller så er s et positivt tall som ikke er et infinitesimal, slik at $s \notin \mu(0)$.
(1) Hvis s er et positivt infinitesimal, så er $2s$ et positivt infinitesimal som er større enn s og et element i $\mu(0)$. Men siden $2s$ er infinitesimal og $2s > s$, så kan ikke s være en øvre skranke til $\mu(0)$.
(2) Hvis s er et positivt tall som ikke er et infinitesimal, så er $\frac{s}{2}$ et ikke-infinitesimalt positivt tall mindre enn s. Følgelig er $\frac{s}{2}$ en øvre skranke som er mindre s, men dette er en motsigelse til antakelsen om at s er *minste* øvre skranke.
Dermed har ikke $\mu(0)$ en minste øvre skranke. ■

Vi tar med et siste resultat knyttet til de grunnleggende algebraiske egenskapene ved standarddelen til et hyperreelt tall. Ettersom standarddelen til et hyperreelt tall er det ene reelle tallet uendelig nærme, kan vi betrakte standarddelen st som en funksjon

$$st : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}.$$

Teorem 5.1.4. *Hvis $x, y \in \mathbb{R}^*$ er endelige tall, så gjelder følgende*

1. $st(x + y) = st(x) + st(y)$
2. $st(x \cdot y) = st(x) \cdot st(y)$

Bevis. La $x = r + \varepsilon$ og $y = s + \delta$, slik at $r = st(x)$ og $s = st(y)$

1.

$$\begin{aligned} st(x+y) &= st((r+\varepsilon) + (s+\delta)) \\ &= st((r+s) + (\varepsilon+\delta) \\ &= r+s \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} st(x \cdot y) &= st((r+\varepsilon) \cdot (s+\delta)) \\ &= st(rs + r\delta + s\varepsilon + \varepsilon\delta) \\ &= rs \end{aligned}$$

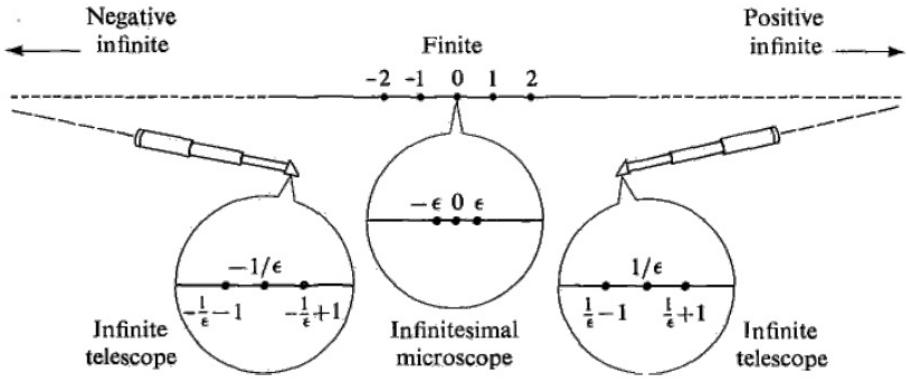
■

Tallinja

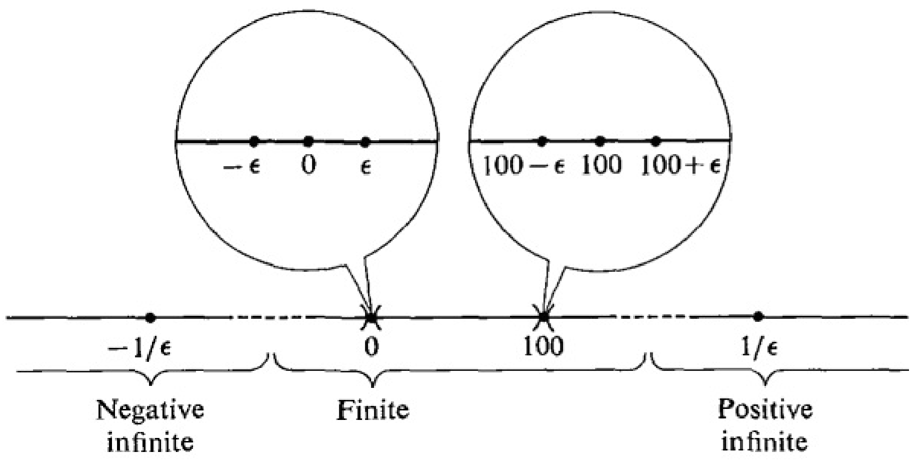
Det neste vi ønsker å ta for oss i dette kapittelet, er å visualisere den hyperreelle tallinja, basert på de sammenhengene vi har presentert så langt i dette kapittelet. Vi vil forsøke å gi et bilde på hvor vi finner disse uendelig små, uendelig store og endelige størrelsene. Tidligere forklarte vi at vi kunne se på et endelig tall x med mikroskop og finne en uendelig galakse av hyperreelle tall nær x. Dette kalte vi for monaden til et endelig tall x, kjent ved notasjon $\mu(x)$. Vi nevnte at

$\mu(0)$ var mengden av alle infinitesimaler, dermed vil vi av samme grunn finne en galakse av infinitesimaler om vi bruker et mikroskop på 0. På den andre siden, finner vi de uendelig store størrelsene om vi ser på endene av tallinja med teleskop. Dersom vi retter teleskopet mot den uendelige positive og negative delen på tallinja, finner vi galakser av uendelige positive og negative størrelser.

For å visualisere dette kan vi se på følgende to figurer figurer som er hentet fra boken *Elementary Calulus: An infinitesimal approach* av Keisler (2013) [Kei13]. Disse figurene fremstiller galaksene av hyperreelle tall når vi retter mikroskop og teleskop mot den reelle tallinja. Den første figuren vil fremstille det infinitesimale mikroskopet og teleskopene rettet mot de uendelige delene av tallinja, som vi nevnte i forklaringen av størrelsenes plassering. Den andre figuren fremstiller galaksen av endelige tall når vi retter mikroskopet mot et reelt tall.



Figur 5.1: De uendelige og infinitesimale tallene, [Kei13, p. 25]



Figur 5.2: De endelige tallene, [Kei13, p. 25]

5.2 Konvergente følger og hyperreelle tall

Da vi i begynnelsen av denne oppgaven tok for gi å leseren en intuitiv forståelse av infinitesimaler så vi på konvergensen til følgene $\{\frac{1}{n}\}$ og $\{\frac{1}{n^2}\}$. Vi nevnte at de begge konvergerte mot tallet 0, men observerte at de konvergerte med ulik hastighet. Deretter bygde vi opp teorien om $\mathbb{R}^*$ med grunnlag i en klassifisering av tynne og fete delmengder av $\mathbb{N}$, og ekvivalente tallfølger i $\mathbb{R}$. Ved definisjonen av ekvivalensklassene som utgjorde $\mathbb{R}^*$, gitt i Definisjon 2.2.2, var det ønskelig å gjøre seg nytte av spesielt én egenskap ved ekvivalensklasser; enthvert par med ulike ekvivalensklasser er disjunkte. Når vi da definerte eksistensen av et hyperreelt tall som ekvivalensklassen til en reell følge, ble det også mulig å skille ethvert par av ulike tall $x, y \in \mathbb{R}^*$. Vi har også sett at for infinitesimaler og uendelige tall vil hastigheten på konvergensen til representantene skille ulike tall fra hverandre. Slik som $\{\frac{1}{n}\}$ og $\{\frac{1}{n^2}\}$ skiller de to infinitesimalene $\varepsilon = \langle\frac{1}{n}\rangle$ og $\delta = \langle\frac{1}{n^2}\rangle$. Spørsmålet vi nå skal forsøke å besvare er hvordan konvergensen til representantene for x og y knytter de hyperreelle tallene sammen i det generelle tilfellet.

Vi har sagt at to tall $x, y \in \mathbb{R}$ ligger uendelig nære dersom $x - y$ er et infinitesimal, og at vi da skriver $x \approx y$. Dette gir oss grunnlaget for å vise en naturlig sammenheng mellom konvergensen til en følge $\{x_n\}$ og det hyperreelle tallet som følgen er representant for. Vi ser på det generelle tilfellet og formulerer en setning.

Setning 5.2.1. *Anta at følgen $\{x_n\} \in \mathcal{F}$ konvergerer mot $r \in \mathbb{R}$. Da er $\langle x_n\rangle \approx r$.*

Bevis. La $x \in \mathbb{R}^*$ slik at $x = \langle x_n\rangle$, la $r = \langle r, r, r, ...\rangle$ være et reelt tall og $\varepsilon = \langle\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, ...\rangle$ være et infinitesimal. For å vise at $x \approx r$ må vi vise at $x - r$ er et infinitesimal, altså må vi vise at

$$-\varepsilon < x - r < \varepsilon$$

som er det samme som å si at

$$-\varepsilon < \langle x_n - r\rangle < \varepsilon$$

Siden $\{x_n\}$ konvergerer mot r vil det bare være et endelig antall naturlige tall n som ikke er med i mengden

$$A = \{n \in \mathbb{N} : -\varepsilon < x - r < \varepsilon\}$$

Da er komplementet til A en endelig mengde og følgelig tynn per (iii) og per (i) er da A en fet mengde. Per definisjon av ordningsrelasjonen $<$ så er da

$$-\varepsilon < x - r < \varepsilon$$

og setningen er bevist. ■

Denne definisjonen forteller oss at hvis $\{x_n\}$ konvergerer mot et reelt tall r så er det hyperreelle tallet $x = \langle x_n\rangle$ slik at $x \approx r$. Som samtidig viser den naturlige sammenhengen mellom konvergensen til en representant for et hyperreellt tall x og plasseringen til x på den hyperreelle tallinja.

Tilbake til våre to kjente, konkrete eksempler vet vi at både $\{\frac{1}{n}\}$ og $\{\frac{1}{n^2}\}$ konvergerer mot 0, og følgelig er standardelene $st(\varepsilon) = st(\delta) = 0$, samtidig er $\varepsilon, \delta \in \mu(0)$. Faktisk sa vi at $\mu(0)$ var mengden bestående av alle infinitesimaler. Ettersom følgene $\{\frac{1}{n}\}$, $\{\frac{1}{n^2}\}$, $\{\frac{1}{n^3}\}$ og $\{\frac{1}{n^4}\}$ alle konvergerer mot 0 og er representanter for de hyperreelle tallene

$$\langle \tfrac{1}{n} \rangle, \quad \langle \tfrac{1}{n^2} \rangle, \quad \langle \tfrac{1}{n^3} \rangle \quad \text{og} \quad \langle \tfrac{1}{n^4} \rangle,$$

der alle disse oppfyller kravet om at $|x| < s$ for alle $s \in \mathbb{R}$, så er

$$\langle \tfrac{1}{n} \rangle, \langle \tfrac{1}{n^2} \rangle, \langle \tfrac{1}{n^3} \rangle, \langle \tfrac{1}{n^4} \rangle \in \mu(0).$$

To andre kokrete eksempler vi så på var tallfølgene $\{n\}$ og $\{n^2\}$, som vi vet divergerer, eller går mot ∞. Vi kunne vise at disse var representanter for to ulike uendelige hyperreelle tall $a = \langle 1, 2, 3, ..., n, ... \rangle$ og $b = \langle 1, 4, 9, ...n^2, ... \rangle$, ettersom de begge oppfylte kravet om at det ikke fantes et tall $s \in \mathbb{R}$ slik at $|x| < s$. Følgelig er også alle de divergente følgene $\{n\}$, $\{n^2\}$, $\{n^3\}$ og $\{n^4\}$ representanter for ulike uendelige hyperreelle tall

$$\langle n \rangle, \quad \langle n^2 \rangle, \quad \langle n^3 \rangle \quad \text{og} \quad \langle n^4 \rangle.$$

Vi kan nå si med sikkerhet at vi i ikke-standard analyse kan skille mellom uendelig små og uendelig store størrelser. Disse størrelsene er ikke lenger bare definert med grenseverdi 0 eller ∞.

KAPITTEL 6

Ikke-standard utvidelser

For at ikke-standard analyse skal kunne være både et rigid og fruktbart alternativ til klassisk analyse, er det avgjørende at vi kan benytte oss av egenskapene til de hyperreelle tallene, og ikke minst at dette gjøres på en hensiktsmessig måte. Dermed skal vi i dette kapittelet se nærmere på hvordan de hyperreelle tallene kan benyttes til å definere utvidelser av reelle mengder, følger og funksjoner. Vi vil kalle disse for ikke-standard utvidelser, og gjenkjenne de ved henholdsvis notasjon R^*, $\{x_N^*\}$ og f^* for reelle mengder R, følger $\{x_n\}$ og funksjoner f. Vi vil gjennomgående forsøke å gi beviser for at definisjonene våre er veldefinerte og uavhengige.

Formålet med ikke-standard utvidelsene for mengder, følger og funksjoner er å kunne gi ikke-standard karakteriseringer av de grunnleggende begrepene grenseverdi, konvergens og kontinuitet fra klassisk analyse i Kapittel 7. I Kapittel 8 *Infinitesimalregning* skal vi gi en ikke-standard karakterisering av derivasjon og integrasjon. I forbindelse med sistnevnte, vil vi også i dette kapittelet i Seksjon 6.5 se et par resultater av utvidelsene våre kalt; *interne mengder* og *funksjoner*. Disse resultatene gir oss en spesiell type interne mengder kalt *hyperendelige mengder*, som kombinert med interne funksjoner, legger grunnlaget for å gi en ikke-standard formulering av integralet. Definisjonene av ikke-standard utvidelsene vil basere seg på de gitt i [Lin96], og resultater slik som Setning 6.4.4 vil være basert på [Kei13].

6.1 Funksjonsbegrepet

For å kunne snakke om kontinuitet og deriverbarhet, og mye mer, er funksjonsbegrepet er helt sentralt i analysen. Samtidig er definisjonen av funksjonsbegrepet noe som historisk sett har vært omdiskutert. Generelt er en funksjon i matematisk analyse en relasjonen mellom to mengder, og dermed en av de viktigste redskapene i analysen. Vi kan si at at en funksjon mellom to mengder A og B, tilordner et hvert element i A et element i B. En funksjon kan sies å være en regel for hva et element i den ene mengden blir i den andre mengden. I læreboken *Matematikk 1T* for videregående skole benyttes definisjonen "*Når det til hver verdi av x svarer én bestemt verdi for y, sier vi at y er en funksjon av x.*"[Hei+06, p. 105]. Denne definisjonen av en funksjon regnes som gjeldene i dag skolematematikken i dag.

Det at funksjonsbegrepet likevel har vært omdiskutert er nok fordi forståelsen av hva en funksjon er, henger sammen med forståelsen for mengder og tallfølger. En funksjon definerer jo en relasjon mellom mengder, og tallfølger er en ordnet liste med tall fra en bestemt mengde. I denne oppgaven blir det dermed naturlig å bygge opp funksjonsbegrepet i sammenheng med mengder og tallfølger. Når vi videre skal se på grunnleggende begreper og resultater fra kalkulus, vil sammenhengen mellom funksjoner, mengder og tallfølger være helt sentral.

Begrepene konvergens, grenseverdi og kontinuitet defineres ulikt ut i fra hvilket område av matematikken vi befinner oss. Definisjonen av en kontinuerlig funksjon mellom topologiske rom vil tilsynelatende defineres ulikt fra kontinuitet for en reell funksjon. Prinsippet er likt i begge definisjonene, men ettersom mengdene funksjonen definerer en relasjon mellom er ulike, må også notasjonen i definisjonen tilpasses deretter. Dermed skal vi i dette kapittelet definere en funksjonsutvidelse $f^* : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ av reelle funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i tråd med ønsket om en utvidelse av $\mathbb{R}$. Deretter benytte oss av denne funksjonsutvidelsen for å gi en ikke-standard karakterisering av begrepene; grenseverdi, konvergens, kontinuitet, deriverbarhet og integralet. Disse karakteriseringene vil sammenliknes med og fremstilles som et alternativ til de gitt for reelle følger og funksjoner i klassisk analyse. På denne måten skal vi bygge opp en teori av ikke-standard karakter for å kunne drive ikke-standard analyse på en fruktbar måte, og gi et grunnlag for drøfting og refleksjon.

6.2 Mengdeutvidelse

Ser vi litt nærmere på målet om å gi funksjonsutvidelsen $f^* : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, observerer vi at vi også må utvide mengdebegrepet vårt, for at f^* skal kunne definere en relasjon mellom hyperreelle mengder. Dermed begynner rekken vår av utvidelser med å definere ikke-standard utvidelsen av reelle mengder, slik at enhver delmengde R av $\mathbb{R}$, blir gitt en naturlig utvidelse til $\mathbb{R}^*$.

Definisjon 6.2.1. La R være en delmengde av $\mathbb{R}$ og la $x \in \mathbb{R}^*$ slik at $x = \langle x_n \rangle$. Den ikke-standard utvidelsen av R er delmengden av $\mathbb{R}^*$ definert ved

$$x \in R^* \quad \text{hvis og bare hvis} \quad \{n \in \mathbb{N} : x_n \in R\} \quad \text{er en fet mengde.}$$

Vi ønsker igjen å sjekke at definisjonen vår er veldefinert og uavhengig av hvilken representant $\{x_n\}$ vi velger for x.

Lemma 6.2.2. *Antar at $\{x_n\} \equiv \{x'_n\}$. Hvis $\langle x_n \rangle \in R^*$ så er $\{n \in \mathbb{N} : x'_n \in R\}$ en fet mengde.*

Bevis. Siden $\langle x_n \rangle \in R^*$ så er $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in R\}$ en fet mengde. Ved antakelse er $\{x_n\} \equiv \{x'_n\}$ og per definisjon av ekvivalens er $\{n \in \mathbb{N} : x_n = x'_n\}$ en fet mengde. Dermed må

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in R\} \cap \{n \in \mathbb{N} : x_n = x'_n\}$$

være en fet mengde per (vi). Videre har vi at siden

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in R\} \cap \{n \in \mathbb{N} : x_n = x'_n\} \subset \{n \in \mathbb{N} : x'_n \in R\}$$

så er $\{n \in \mathbb{N} : x'_n \in R\}$ en fet mengde per (iv). Per Definisjon 6.2.1 er $\langle x'_n \rangle \in R^*$. ■

Slik vi har konstruert $\mathbb{R}^*$ som en utvidelse av $\mathbb{R}$ der $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$, gav vi en ikke-standard utvidelse av en delmengde $R \subset \mathbb{R}$ til en delmengde $R^* \subset \mathbb{R}^*$ ved Definisjon 6.2.1. For å vise at R^* virkelig er en utvidelse av R bør vi i det minste klare å vise at $R \subset R^*$. For å vise at en mengde er en delmengde av en annen mengde, må vi som kjent vise at ethvert element r i delmengden R også er et element i den andre mengden R^*. Med andre ord, har vi at $R \subset R^*$ dersom $r \in R^*$ for alle $r \in R$, og vi formulerer et lemma.

Lemma 6.2.3. *Hvis R^* er ikke-standard utvidelsen av R så er $R \subset R^*$.*

Bevis. Antar at $r \in R$ og må vi vise at $r = \langle r, r, r, ... \rangle \in R^*$. Per Definisjon 6.2.1 er $\langle r, r, r, ... \rangle \in R^*$ hvis og bare hvis $\{n \in \mathbb{N} : r \in R\}$ er en fet mengde. Men mengden $\{n \in \mathbb{N} : r \in R\} = \mathbb{N}$ og følgelig fet, og $\langle r, r, r, ... \rangle \in R^*$. ■

Det neste vi trenger å vise er at $R = R^*$ hvis og bare hvis R er endelig. Dersom en mengde R er endelig kan vi lage en endelig liste av elementene i R. Slik at $R = \{r_1, r_2, r_3, ..., r_k\}$ for et endelig naturlig tall k. Hvis R^* er utvidelsen av denne endelige mengden R, så er et hyperreelt tall $x = \langle x_n \rangle \in R^*$ hvis og bare hvis $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in R\}$ er en fet mengde per Definisjon 6.2.1.

Lemma 6.2.4. *For en delmengde $R \subset \mathbb{R}$ og ikke-standard utvidelsen $R^* \subset \mathbb{R}^*$, er $R = R^*$ hvis og bare hvis R er endelig.*

Bevis. For første del av beviset antar vi at R er endelig, og ønsker å vise at $R = R^*$. Siden R er endelig kan vi skrive $R = \{r_1, r_2, r_3, ..., r_k\}$ for et endelig tall $k \in \mathbb{N}$ og lar $x \in R^*$. Velger en representant $\{x_n\}$ for x slik at $x = \langle x_n \rangle$. Siden $x \in R^*$ så må mengden $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in R\}$ være fet. Siden

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in R\} = \{n \in \mathbb{N} : x_n = r_1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : x_n = r_2\} \cup ... \cup \{n \in \mathbb{N} : x_n = r_k\}$$

så må nøyaktig én av mengdene på venstre side være fet per Lemma 2.1.5. La oss si at $\{n \in \mathbb{N} : x_n = r_i\}$ for $i \in \{1, 2, 3, .., k\}$, så betyr det at $x = r_i$. Siden mengden $\{n \in \mathbb{N} : x_n = r_i\}$ var vilkårlig valgt så må $R = R^*$.

For andre del av beviset argumenterer vi kontrapositivt, og antar at R ikke er endelig og ønsker å vise at $R \neq R^*$. Siden R ikke er endelig må det finnes uendelig mange ulike elementer $r_1, r_2, r_3, ..., r_n, ...$ i R. Lar vi $x = \langle r_1, r_2, r_3, ..., r_n, ... \rangle$ så er $x \in R^*$, men samtidig ulik fra enhver r_i for $i \in \mathbb{N}$, så $x \notin R$, og $R \neq R^*$. ■

Vi ønsker selvsagt at mengdeutvidelsen R^* vil gjenspeile egenskapene til R, og vi skal forsøke å vise denne gjenspeilingen ved hjelp av et par viktige eksempler på delmengder av $\mathbb{R}$; intervaller og de naturlige tallene.

Intervaller

Et viktig eksempel på delmengder av $\mathbb{R}$ er som nevnt intervaller. De reelle tallene fyller ut hele tallinja og vi kan dermed lage oppdelinger av tallinja, fra et reelt tall til et annet, og kaller en slik del for et intervall. Intervaller kan være både lukkede og åpne, henholdsvis gitt ved notasjon $[r, s]$ når endepunktene r og s er inneholdt og (r, s) når endepunktene ikke er med, der r og s er reelle tall slik at $r < s$. Det vi ønsker å se er om ikke-standard utvidelsene $[r, s]^*$ og $(r, s)^*$ av henholdsvis intervallene $[r, s]$ og (r, s), vil gjenspeile egenskapene til de opprinnelige reelle intervallene. Vi formulerer en setning.

Setning 6.2.5. *La $r, s \in \mathbb{R}$ og $r < s$. Da er $[r, s]^* = \{x \in \mathbb{R}^* : r \leq x \leq s\}$ og tilsvarende er $(r, s)^* = \{x \in \mathbb{R}^* : r < x < s\}$.*

Bevis. La $x \in \mathbb{R}^*$ slik at $x = \langle x_n \rangle$. Antar at $x \in [r, s]^*$, da er per Definisjon 6.2.1 $\{n \in \mathbb{N} : r \leq x_n \leq s\}$ en fet mengde. Videre har vi at

$$\{n \in \mathbb{N} : r \leq x_n \leq s\} = \{n \in \mathbb{N} : r \leq x_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq s\}$$

som per (iv) og (vi) gir at $\{n \in \mathbb{N} : r \leq x_n\}$ og $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leq s\}$ er fete mengder. Dette er ekvivalent med at $r \leq x$ og $x \leq s$ per Definisjon 3.4.1, som følgelig gir at $r \leq x \leq s$.
For det åpne intervallet $(r, s)^*$ er beviset tilsvarende. ■

De naturlige tallene

Et annet eksempel på en delmengde av $\mathbb{R}$ er de naturlige tallene $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Vi ønsker nå å se nærmere på ikke-standard utvidelsen $\mathbb{N}^*$, bestående av både de naturlige tallene og ikke-standard naturlige tall. Vi kaller $\mathbb{N}^*$ for de hypernaturlige tallene, og denne mengden består av alle tall i $\mathbb{R}^*$ på formen $\langle x_n \rangle$ der $x_n \in \mathbb{N}$ for alle n. Med denne definisjonen kan vi si at eksemplene våre på uendelige hyperreelle tall

$$a = \langle 1, 2, 3, ..., n, ... \rangle \quad \text{og} \quad b = \langle 1, 4, 9, ..., n^2, ... \rangle$$

samtidig er hypernaturlige tall, ettersom alle tellbare ledd i følgene er tall i $\mathbb{N}$. Sagt på en annen måte er representantene $\{n\}$ og $\{n^2\}$ for henholdsvis a og b følger av naturlige tall. Slik et reelt tall $r \in \mathbb{R}$ er definert som ekvivalensklassen til den konstante følgen ved $\langle r, r, r, ... \rangle \in \mathbb{R}^*$, vil de naturlige tallene $n \in \mathbb{N}$ være definert ved $\langle n, n, n, ... \rangle \in \mathbb{N}^*$.

Vi har tidligere sett at $\mathbb{R}^*$ inneholder tre kategorier av hyperreelle tall; endelige, uendelige og infinitesimale tall. Vi forklarte at de reelle tallene var én type endelige hyperreelle tall, men viste at $\mathbb{R}^*$ også inneholdt endelige tall som ikke var reelle tall. Dette gjelder ikke for $\mathbb{N}$ og $\mathbb{N}^*$. Det viser seg nemlig at utvidelsen $\mathbb{N}^*$, mengden av alle hypernaturlige tall, ikke inneholder andre endelige tall enn de naturlige tallene $\mathbb{N}$. Med andre ord, om vi ser på mengden $\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$, av alle tall $x \in \mathbb{N}^*$ slik at $x \notin \mathbb{N}$, så vil denne mengden kun inneholde uendelig store tall. Altså er et hypernaturlig tall $N \in \mathbb{N}^*$ enten et uendelig hyperreelt tall eller et naturlig tall. Vi formulerer en setning.

Setning 6.2.6. *For mengdeutvidelsen $\mathbb{N}^*$ vil alle elementene i mengden $\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ være uendelig store.*

Bevis. Vi lar $x = \langle x_n \rangle \in \mathbb{N}^*$ være et endelig tall, og ønsker å vise at da må $x \in \mathbb{N}$. Siden x er endelig finnes en $k \in \mathbb{N}$ slik at $x \leq k$. Da kan vi velger en representant $\{x_n\}$ for x slik at $x_n \leq k$ for alle n. Da er

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : x_1 = 1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : x_2 = 2\} \cup ... \cup \{n \in \mathbb{N} : x_n = k\}$$

en fet mengde. Videre har vi ved Lemma 2.1.5 at nøyaktig én av mengdene i unionen er fet. Hvis $\{n \in \mathbb{N} : x_i = i\}$ er denne fete mengden, så er $x_i = i$ som vi ønsket å vise. ■

6.3 Følgeutvidelse

Det neste vi ønsker å se på er ikke-standard utvidelsen av tallfølger. Følger er generelt en mengde der elementene er gitt i en bestemt rekkefølge, og der elementene kan repeteres. For tallfølger er disse elementene, kanskje åpenbart, tall. Antall elementer i en følge kan være enten endelig eller tellbart uendelig. Begrepet om endelighet er jo intuitivt forståelig, men formelt sett kan man si at en endelig følge er en funksjon $f(n)$ med domene $\{1, 2, ..., n\}$ for et endelig antall naturlige tall n. For en tellbar uendelig mengde vil funksjonen $f(n)$ ha domene $\mathbb{N}$, og ikke bare for et endelig antall $n \in \mathbb{N}$. Intuitivt kan man si at det er mulig å lage liste over alle elementene, slik vi for eksempel kan skrive mengden av alle heltall som $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$. Dersom man skulle forsøkt å telle elementen i listen vil man aldri bli ferdig å telle, og følgen

$$\{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{2n}, x_{2n+1}, ...\}$$

er et eksempel på en slik *tellbar uendelig* følge.

Merknad 6.3.1. Med denne definisjonen av en tallfølge, kunne vi inkludert tallfølger i den foregående seksjonen om *Mengdeutvidelser*, men et av hovedmålene i denne oppgaven er å gi en ikke-standard karakterisering av *konvergens*. Dette gir en ikke-standard utvidelse av reelle følger en sentral plass, og vi ønsker å vie litt ekstra tid til dette.

Med litt bakgrunnskunnskap om følger, er vi nå klare for å definere en ikke-standard utvidelse av reelle tallfølger, med mål om å senere kunne gi en ikke-standard karakterisering av konvergens. Intuitivt bør en ikke-standard utvidelse av en reell tallfølge $\{x_n\}$ der $n \in \mathbb{N}$, kunne ta verdier fra de hypernaturlige tallene $\mathbb{N}^*$ som vi betraktet ovenfor. Altså kan vi betrakte en ikke-standard utvidelse av en reell tallfølge som en funksjon $f^*(N) = x_N$ med domene $\mathbb{N}^*$. Med dette i tankene definerer vi ikke-standard utvidelsen av en reell følge $\{x_n\}$ der $n \in \mathbb{N}$ på følgende måte:

Definisjon 6.3.2. La $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge av reelle tall. Den ikke standard utvidelsen av $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er følgen $\{x_N^*\}_{N\in\mathbb{N}^*}$ definert ved

$$x_N^* = \langle x_{N_n} \rangle$$

der $\{N_n\}$ er en representant for $N \in \mathbb{N}^*$

Det vi nå ønsker å sjekke er at $\{x_N^*\}_{N\in\mathbb{N}^*}$ faktisk er en utvidelse av $\{x_n\}$, og dermed må vi i det minste klare å vise at $x_n = x_n^*$ for alle $n \in \mathbb{N}$. For en $n \in \mathbb{N}$ der $n = \langle n, n, ...\rangle$ vil $\{n, n, ...\}$ være en representant. Dermed vil leddene i følgen $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ være gitt ved

$$x_n^* = \langle x_{\{n,n,...\}} \rangle = \langle x_n, x_n, ... \rangle = x_n$$

per Definisjon 6.3.2 og ved definisjonen av et reelt tall i $\mathbb{R}^*$.

Det siste vi ønsker er å vise frem et eksempel som kanskje gjør Definisjon 6.3.2 av følgeutvidelsen litt mer håndfast.

Eksempel 6.3.3. La følgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være gitt ved $x_n = \frac{1}{n+n^2}$ for alle $n \in n$. Da er ikke-standard utvidelsen $\{x^*_N\}_{N\in\mathbb{N}^*}$ gitt ved $x^*_N = \frac{1}{N+N^2}$ for alle $N \in \mathbb{N}^*$

En slik ikke-standard utvidelse av følger gir en dobbelindeksering der en følge $\{x^*_N\}$ tar verdier $N \in \mathbb{N}^*$, der følgen av naturlige tall $\{N_n\}$ for $n \in \mathbb{N}$ er en representant for $N = \langle N_n \rangle$.

6.4 Funksjonsutvidelse

Nå som vi har definert ikke-standard utvidelsene R^* av reelle mengder R og $\{x^*_N\}$ av reelle tallfølger $\{x_n\}$, har vi forhåpentligvis en bedre forståelse for ikke-standard utvidelser. Dermed er vi klare for å gi ikke-standard utvidelsen

$$f^* : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \quad \text{av en reell funksjon} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

som vi presenterte innledningsvis i dette kapittelet. Vi begynner med å gi definisjonen for utvidelsen f^* av en reell funksjon f, for å deretter se på et par enkle resultater som denne funksjonsutvidelsen gir.

Definisjon 6.4.1. Vi lar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en reell funksjon. Den *ikke-standard utvidelsen* av f er en funksjon $f^* : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ definert ved

$$f^*(\langle x_n \rangle) = \langle f(\{x_n\}) \rangle$$

Her er funksjonsutvidelsen til f^* definert komponentvis, slik vi også definerte addisjon og multiplikasjon. Resultatet finner vi ved å ta funksjonen f på hver av komponentene x_n til $x = \langle x_n \rangle$, og deretter ta ekvivalensklassen til resultatet. Igjen ønsker vi å sjekke at definisjonen er veldefinert, det vil si at dette holder uavhengig av hvilken representant $\{x_n\}$ vi velger for en $x \in \mathbb{R}^*$

Lemma 6.4.2. *La $\{x_n\}$ være en representant for x og f^* være ikke-standard utvidelsen til en reell funksjon f. Hvis $\{x_n\} \equiv \{x'_n\}$, så er $\langle f(\{x_n\} \rangle = \langle f(\{x'_n\} \rangle$.*

Bevis. Antar $\{x_n\} \equiv \{x'_n\}$, da er per definisjon av ekvivalens $\langle x_n \rangle = \langle x'_n \rangle$. Per Definisjon 6.4.1 så er $f^*(\langle x_n \rangle) = \langle f(\{x_n\}) \rangle$ og $f^*(\langle x'_n \rangle) = \langle f(\{x_n\})\} \rangle$. Følgelig må $\langle f(\{x_n\}) \rangle = \langle f(\{x'_n\}) \rangle$. ■

Ettersom vi har sagt at $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$, ønsker vi først sjekke at utvidelsen vår av f til f^* holder for et hvert reelt tall. En utvidelse bør jo i det minste genspeile resultat til den reelle funksjonen om vi begrenser oss til de reelle tallene, slik vi viste for både mengdeutvidelsen gitt ved Definisjon 6.2.1 og følgeutvidelsen gitt ved Definisjon 6.3.2. Vi formulerer et lemma.

Lemma 6.4.3. *La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $f^* : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$. For alle $r \in \mathbb{R}$ så er $f(r) = f^*(r)$.*

Bevis. For et reelt tall $r \in \mathbb{R}$ så er $r = \langle r, r, r, ... \rangle$. Dermed har vi per definisjon av ikke-standard utvidelsen av f at

$$f^*(r) = f^*(\langle r, r, r, ... \rangle) = \langle f(r), f(r), f(r), ... \rangle = f(r)$$

og lemma er bevist. ■

Siden f^* er en funksjon fra $\mathbb{R}^*$ til $\mathbb{R}^*$, er funksjonsverdien $f^*(x)$ for et hypereelt tall x også et hyperreelt tall slik at $f^*(x) \in \mathbb{R}^*$. Dermed ønsker vi å definere regneoperasjonene og ordningsrelasjonen, og sjekke at også disse holder for funksjoner f^*.

Setning 6.4.4. *For to reelle funksjoner f og g lar vi ikke standard-utvidelsene være f^* og g^* fra $\mathbb{R}^*$ til $\mathbb{R}^*$, og $\{x_n\}$ være en representant for $x \in \mathbb{R}$. Da er*

a. $(f+g)^*(x) = f^*(x) + g^*(x)$

b. $(f \cdot g)^*(x) = f^*(x) \cdot g^*(x)$

Bevis.

a. $(f+g)^*(x) = \langle (f+g)(\{x_n\}) \rangle = \langle f(\{x_n\}) + g(\{x_n\}) \rangle = \langle f(\{x_n\}) \rangle + \langle g(\{x_n\}) \rangle = f^*(x) + g^*(x)$

b. $(f \cdot g)^*(x) = \langle (f \cdot g)\{x_n\}) \rangle = \langle f(\{x_n\}) \cdot g(\{x_n\}) \rangle = \langle f(\{x_n\}) \rangle \cdot \langle g(\{x_n\}) \rangle = f^*(x) \cdot g^*(x)$

■

6.5 Interne mengder og funksjoner

Vi har nå klart å definere ikke-standard utvidelser av reelle funksjoner og mengder, og gitt de notasjonen f^* og R^*. På bakgrunn av konstruksjonen av de hyperreelle tallene, er addisjon og multiplikasjon på $\mathbb{R}^*$ definert som komponentvise operasjoner. Denne komponentvise ideen tok vi med oss når vi definerte funksjonsutvidelsen f^* og mengdeutvidelsen R^* med komponentvis konstruksjon. Men det stopper ikke der, for den komponentvise ideen lar seg videre generalisere til nye klasser av funksjoner og mengder, av typen *interne*. Vi skal definere interne mengder og funksjoner med mål om å definere en spesiell type interne mengder kalt *hyperendelige mengder*. Det er de hyperendelige mengdene vi er mest intressert i da disse mengdene, kombinert med interne funksjoner, gir oss grunnlaget for å gi en ikke-standard karakteriserisering av intergralet i Kapittel 7.

Slik vi beskrev følger i Seksjon 6.2 er følger en mengde der elementene har en bestemt rekkefølge. Vi kunne se på følger som funksjoner $f(n)$ med domene i enten $\mathbb{N}$ for en uendelig følge eller i $\{1, 2, ..., n\}$ for en endelig følge med n elementer. Vi så videre at vi kunne utvide relle følger $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ der $x_n \in \mathbb{R}$ til følger $\{x_N^*\}$ for hypernaturlige tall $N \in \mathbb{N}^*$. Vender vi derimot tilbake til den generelle definisjonen av en følge, kan det tenkes at disse elementene ikke nødvendigvis må være tall, men også mengder eller funksjoner. Slik som følgen $\{R_n\}_{n\in N}$ av delmengder $R_n \in \mathbb{R}$, som kan gi følger av funksjoner $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ der $f_n : R_n \to \mathbb{R}$.

Interne mengder

Vi begynner med å se på interne mengder og ønsker i denne seksjonen å benytte oss av strategien vi brukte for å definere hyperreelle tall ved $x = \langle x_n \rangle$ der $x_n \in \mathbb{R}$. Slik at vi kan definere delmengder H av $\mathbb{R}^*$ ved $H = \langle R_n \rangle$ der $R_n \subset \mathbb{R}$.

La oss først se hvordan en slik følge $\{R_n\}$ av delmengder av $\mathbb{R}$ utfolder seg i en utvidelse til $\mathbb{R}^*$, og gir definisjonen av en *intern mengde*.

Merknad 6.5.1. Legg merke til at vi benytter oss av notasjonen H for en delmengde av $\mathbb{R}^*$, for å skille disse delmengdene fra ikke-standard utvidelsene R^* av delmengder R av $\mathbb{R}$.

Definisjon 6.5.2. La $\{R_n\}$ være en følge av delmengder av $\mathbb{R}$. Vi lar $x \in \mathbb{R}^*$ der $x = \langle x_n \rangle$. Vi definerer en delmengde H av $\mathbb{R}^*$ der $H = \langle R_n \rangle$, ved

$$x \in H \quad \text{hvis og bare hvis} \quad \{n \in \mathbb{N} : x_n \in R_n\} \quad \text{er en fet mengde.}$$

En delmengde av H av $\mathbb{R}^*$ kalles *intern* hvis den er på formen $H = \langle R_n \rangle$. En mengde som ikke er intern kalles *ekstern*

La oss se på et eksempel med ikke-standard intervaller i $\mathbb{R}^*$

Eksempel 6.5.3. Vi ønsker å vise at for $x, y \in \mathbb{R}^*$, så er ikke-standard intervallet

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{R}^* : x \leq z \leq y\}$$

en intern mengde. Siden $x, y \in \mathbb{R}^*$ lar vi $x = \langle x_n \rangle$ og $y = \langle y_n \rangle$. For $z \in [x, y]$ så er mengdene $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leq z_n\}$ og $\{n \in \mathbb{N} : z_n \leq y_n\}$ fete mengder. Følgelig er snittet

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \leq z_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : z_n \leq y_n\} = \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq z_n \leq y_n\}$$

en fet mengde. Dermed er intervallet $[x, y] = \langle [x_n, y_n] \rangle$, slik at $\langle z_n \rangle \in \langle [x_n, y_n] \rangle$ og $[x, y]$ en intern mengde per Definisjon 6.5.2.

Vi nevnte under konstruksjonen av $\mathbb{R}^*$ at de hyperreelle tallene ikke oppfylte kompletthetsprinsippet slik som $\mathbb{R}$ gjør, og klarte ved Lemma 5.1.3 å vise nettopp dette. Vi viste at mengden av alle infinitesimaler, monaden til 0 med notasjon $\mu(0)$, var en ikke-tom, begrenset delmengde av $\mathbb{R}^*$ som ikke hadde en øvre skranke. Selv om $\mathbb{R}^*$ ikke oppfyller kompletthetsprinsippet, kan det selvfølgelig finnes delmengder av $\mathbb{R}^*$ som er ikke-tomme og begrenset, óg har en minste øvre skranke. Det viser seg nemlig at om vi legger til kravet om at en delmengde er intern, vil kompletthetsprinsippet holde for en slik delmengde isolert sett.

Lemma 6.5.4. *Hvis H er en ikke-tom, begrenset, intern delmengde av $\mathbb{R}^*$, så har H en minste øvre skranke i $\mathbb{R}^*$*

Bevis. Vi lar $\{R_n\}$ være en følge av delmengder i $\mathbb{R}$ og $H = \langle R_n \rangle$. Siden H er begrenset finnes et tall $b = \langle b_n \rangle$ slik at $b \leq x$ for alle $x \in H$. Det betyr at b_n er en øvre skranke til R_n for en fet mengde av $n \in \mathbb{N}$. Vi vet at H er ikke-tom, og dermed finnes en $x = \langle x_n \rangle \in H$ slik at $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in R_n\}$ er en fet mengde. Følgelig er snittet

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in R_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : b_n \geq x_n\}$$

også en fet mengde. Dermed er delmengdene $R_n \in \mathbb{R}$ for disse n, ikke-tomme og begrenset av korresponderende b_n. Ved *Kompletthetsprinsippet* må det for alle disse R_n finnes en korresponderende, minste øvre skranke c_n. Slik c_n er definert må $\{n \in \mathbb{N} : c_n = supR_n\}$ være en fet mengde. Lar vi $c = \langle c_n \rangle$ må $c = \langle supR_n \rangle$, og følgelig må c være en minste øvre skranke til H. ■

Merknad 6.5.5. Ved Lemma 5.1.3 viste vi at $\mu(0)$, som en ikke-tom begrenset delmengde av $\mathbb{R}^*$, ikke hadde en minste øvre skranke. Dermed er $\mu(0)$ et eksempel på en *ekstern mengde* ved Definisjon 6.5.2.

Interne funksjoner

Benytter vi oss nå av følger $\{R_n\}$ av delmengder R_n av $\mathbb{R}$ for $n \in \mathbb{N}$, og definerer indekserte funksjoner f_n fra hver av de indekserte delmengdene R_n inn i $\mathbb{R}$. Slik at

$$f_n : R_n \to \mathbb{R}$$

for tilhørende $n \in \mathbb{N}$. Da får vi en følge $\{f_n\}$ av funksjoner. Slik som vi definerte interne mengder $H = \langle R_n \rangle$, ønsker vi å gi en definisjon av interne funksjoner f slik at $f = \langle f_n \rangle$.

Definisjon 6.5.6. For hver $n \in \mathbb{N}$ la $f_n : R_n \to \mathbb{R}$ være en reell funksjon og H være den interne mengden $H = \langle R_n \rangle$. La $f = \langle f_n \rangle$ være en funksjon og definerer $f : H \to \mathbb{R}^*$ ved

$$f(x) = \langle f_n(x_n) \rangle$$

der $\{x_n\}$ representant for x slik at $x_n \in R_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. En funksjon som kan skrives på denne formen kalles *intern*

Hyperendelige mengder

Det siste vi ønsker å betrakte i dette kapittelet er *hyperendelige mengder*, som i denne oppgaven kun vil oppfattes som spesifikke interne mengder slik vi så på i Seksjon 6.5. Karakteriseringen av hyperendelige mengder legger grunnlaget for å gi en ikke-standard karakterisering av vår siste definisjon på lista; *integralet*. Vi begynner med å gi definisjonen av en hyperendelig mengde.

Definisjon 6.5.7. En delmengde H av $\mathbb{R}^*$ kalles hyperendelig dersom $H = \langle R_n \rangle$ der alle R_n er endelige.

Dersom R er en endelig mengde vil $|R|$ betegne antall elementer i R. Med antall elementer i en hyperendelig mengde $H = \langle R_n \rangle$ mener vi tallet

$$|H| = \langle |R_n| \rangle$$

som angir antallet reelle mengder R_i i ekvivalensklassen $\langle R_n \rangle$. Dermed kan vi observere at vi må ha $|H| \in \mathbb{N}^*$.

Eksempel 6.5.8. La $N = \langle N_n \rangle$ være et element i $\mathbb{N}^*$. Da kan vi lage oss en mengde

$$H = \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \frac{3}{N}, ..., \frac{N-1}{N}, 1\}$$

med antall elementer $|H| = N - 1$. For å vise at H er en hyperendelig mengde må vi per Definisjon 6.5.7 vise at $H = \langle R_n \rangle$ observerer vi at $R_n = \{0, \frac{1}{N_n}, \frac{2}{N_n}, \frac{3}{N_n}, ..., \frac{N_n-1}{N_n}, 1\}$ La oss se litt nærmere på denne hyperendelige mengden H. Observerer vi at

$$H = \langle R_n \rangle = \langle R_1, R_2, R_3, ..., R_n, ... \rangle$$

og samtidig at hver $R_i \in \langle R_n \rangle$ for en $i \in \mathbb{N}^*$ er gitt ved

$$R_i = \{0, \frac{1}{N_i}, \frac{2}{N_i}, \frac{3}{N_i}, ..., \frac{N_i - 1}{N_i}, 1\}$$

For å visualisere denne sammenhengen kan vi se på følgende likning

$$\begin{aligned} H =& \langle R_n \rangle \\ =& \langle R_1, R_2, R_3, ..., R_n, ... \rangle \\ =& \Big\langle \{0, \tfrac{1}{N_1}, \tfrac{2}{N_1}, \tfrac{3}{N_1}, ..., \tfrac{N_1-1}{N_1}, 1\}, \{0, \tfrac{1}{N_2}, \tfrac{2}{N_2}, \tfrac{3}{N_2}, ..., \tfrac{N_2-1}{N_2}, 1\}, \\ & \{0, \tfrac{1}{N_3}, \tfrac{2}{N_3}, \tfrac{3}{N_3}, ..., \tfrac{N_3-1}{N_3}, 1\}, ..., \{0, \tfrac{1}{N_n}, \tfrac{2}{N_n}, \tfrac{3}{N_n}, ..., \tfrac{N_n-1}{N_n}, 1\}, ... \Big\rangle \end{aligned}$$

og observerer at $H = \langle R_n \rangle$ der hver R_n er endelig, slik at $|R_n| = N + 1$ og $|H| \in \mathbb{N}^*$. Det er tydelig at H er en hyperendelig mengde.

Hvis vi nå lar $H = \langle R_n \rangle$ være en hyperendelig mengde og $f = \langle f_n \rangle$ være en intern funksjon definert på H, lar vi summen av f over H være

$$\sum_{x \in H} f(x) = \Big\langle \sum_{x_n \in R_n} f_n(x_n) \Big\rangle.$$

KAPITTEL 7

Ikke-standard analyse

I dette kapittelet er tiden endelig kommet for å kunne gi ikke-standard karakteriseringer av de tre grunnleggende begrepene i kalkulus; konvergens, grenseverdi og kontinuitet. Med mål om å vise validiteten av en infinitesimal-tilnærming til analysen, noe vi gjennomgående vil forsøke å begrunne og forklare. Som nevnt er det avgjørende at vi klarer å gjøre nytte av egenskapene til de hyperreelle tallene og at dette gjøres på en hensiktsmessig måte. Først da, kan ikke-standard analyse være et alternativ til klassisk analyse. Dermed skal vi benytte oss av funksjonsutvidelsene og mengdeutvidelsene til å karakterisere disse begrepene i på ikke-standard form, og karakteriseringene skal gi oss redskapene til å anvende ikke-standard analyse for å bevise sentrale resultater og teoremer fra Kalkulus.

Våre ikke-standard karakteriseringer av konvergens, grenseverdi og kontinuitet, samt derivasjon og integrasjon i Kapittel 8, vil basere seg på de gitt av Lindstrøm [Lin96]. Eksempler og resultater vil være inspirert og basert på de gitt av Keisler i sine to bøker *Foundations of Infinitesimal Calculus* [Kei76] og *Elementary Calculus* [Kei13], samt læreboken *Analysis with Ultrasmall Numbers* [HLO10] med tilhørende lærer-manual av O'Donovan [ODo16].

Vi vil i dette og neste kapittel gjennomgående presentere definisjoner av konvergens, grenseverdi, kontinuitet, den deriverte og integralet slik de er gitt i klassisk analyse for sammenlikning, for å senere kunne drøfte om ikke-standard analyse kan fungere som et alternativ til klassisk analyse. De klassiske definisjonene vil basere seg på de gitt i læreboken *Kalkulus* [Lin95], og vi vil også basere formuleringen av resultater som Theorem 7.3.6 *Skjæringssetningen* og Theorem 8.3.2 *Analysens fundamentalteorem* på samme bok. Samtidig har vi i de overnevnte definisjonene og resultatene forsøkt å ta hensyn til formuleringene gitt i lærebøkene *Sinus R1* [Old+18] og *Sinus R2* [Old+15] fra videregående skole, og forsøkt å formulere oss tett opp mot disse som grunnlag for den didaktiske drøftingen i Kapittel 10. En siste inspirasjonskilde er Trenchs [Tre12] bok *Introduction to Real Analysis* som gir en innføring reell analyse.

7.1 Grensebegrepet

Robinsons tilnærming til kalkulus ble kalt ikke-standard analyse, for å skille den fra grense-tilnærmingen i kalkulus. Den hyperreelle-tallinja inneholder jo nettopp en størrelse for ideen om en *uendelig liten størrelsesforskjell*; infinitesimal.

Dermed må vi, på samme måte som vi utvidet de reelle tallene til de hyperreelle tallene og slik vi utvidet funksjonsbegrepet, også utvide ideen om en grense. Grensebegrepet er som nevnt helt sentralt i kalkulus, og henviser til verdien en følge eller funksjon nærmer seg når argumentet går mot et spesifikt tall, eller uendelig. For en reell tallfølge $\{x_n\}$ noterer man grenseverdi ved tegnet

$$\lim_{n\to\infty} \{x_n\}$$

når argumentet n går mot uendelig. For en funksjon f skriver vi tilsvarende

$$\lim_{x\to s} f(x) \quad \text{og} \quad \lim_{x\to\infty} f(x)$$

når variabelen x går mot henholdsvis et bestemt tall s eller ∞. Om en funksjon går mot en bestemt verdi eller mot uendelig avhenger av hva man ønsker å undersøke.

Grenseverdier ble et nyttig verktøy for å studere følger og funksjoner da grensebegrepet ble formalisert på 1800-tallet. Det gir nemlig muligheten for å velge verdier x som er tilstrekkelig nære en ønsket verdi r, uten å være lik. For funksjoner er det et vektøy for å eksempelvis studere oppførselen i områder der en funksjon ikke er definert, og vise kontinuitet eller diskontinuitet i punkter. For følger kunne man undersøke konvergens og divergens.

I ikke-standard analyse byttes begrepet om en grense ut med begrepet om en infinitesimal størrelsesforskjell. Nemlig at vi kan velge verdier x uendelig nære en ønsket verdi r, slik at $x \approx r$ og $x - r = \varepsilon$ der ε er et infinitesimal. Dermed kan ønsker vi å benytte oss av dette for å gi ikke-standard karakteriseringer av definisjonene av konvergens av følger og grenseverdien til en funksjon fra klassisk analyse, fremfor en (ε, δ)-definisjon av grensebegrepet.

7.2 Konvergens og grenseverdi

Vi sier at en følge konvergerer dersom grensen eksisterer. For en følge $\{x_n\}$, har vi at den konvergerer mot en verdi r dersom

$$\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = r$$

dersom grensen ikke eksisterer så sier vi at følgen *divergerer*.

Tilsvarende for en funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sier vi at grensen eksisterer dersom

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = r \quad \text{eller} \quad \lim_{x\to s} f(x) = r$$

slik at når x går mot uendelig eller en bestemt verdi s, går funksjonsverdien mot en bestemt punkt r. Om grensen til en funksjon eksisterer eller ikke, gir oss ulike sammenhenger avhengig av hva vi ønsker å undersøke. For eksempel kan vi se på en funksjon $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ der $f(x) = \frac{1}{x}$. Vi ser at f ikke er definert for 0 ettersom $0 \notin (0, \infty)$, og ønsker å undersøke funksjonsverdien når vi lar x nærmer seg 0.

En uformell og intuitiv måte å oppfatte grensebegrepet på for en tallfølge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, er at vi kan tenke på grenseverdien r som et punkt på tallinja. En voksende følge kan ha en øvre grense i r, slik at tallene i følgen vil nærme seg r nedenfra, men aldri overstige r. For en avtagende følge kan r være en nedre grense slik at tallene i følgen vil nærme seg r ovenfra, men ikke være mindre enn r. Det siste alternativet er at r kan være et punkt som tallene i en følge svinger frem og tilbake rundt, som en pendel over r. For en reell funksjon f kan vi oppfatte grenseverdien r ved at funksjonsverdien $f(x)$ nærmer seg et punkt r, når x er nær s, dersom vi kan få $f(x)$ så nære punktet r vi vil ved å velge x nærme, men ulik, s.

Konvergens

En mer formell måte å forklare grenseverdien til en følge er å si at dersom grensen $\lim_{n\to\infty}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eksisterer og er lik et endelig tall r, så *konvergerer* $\{x_n\}$ mot r. I Definisjon 6.3.2 gav vi definisjonen av en ikke-standard utvidelse av reelle tallfølger. Denne definisjonen skal vi nå bruke for å gi en ikke-standard karakterisering av konvergens, men først skal vi se hvordan konvergens av reelle tallfølger blir definert i klassisk analyse.

Definisjon 7.2.1. Følgen $\{x_n\}_{n\in N}$ konvergerer mot et tall $r \in \mathbb{R}$, hvis for alle positive reelle tall ε finnes en $M \in \mathbb{N}$ slik at når $n > M$ så er $|x_n - r| < \varepsilon$.

Her definerer M en nedre grense for hvilke verdier av $n \in \mathbb{N}$ som gjør at $x_n \in \mathbb{R}$ befinner seg nærme r. La oss se om vi klarer å gi en ikke-standard karakterisering av denne definisjonen ved hjelp av de hyperreelle tallene.

Setning 7.2.2. *Følgen $\{x_n\}_{n\in N}$ konvergerer mot et tall $r \in \mathbb{R}$, hvis og bare hvis $x^*_N \approx r$ for alle $N \in \mathbb{N}^*\setminus\mathbb{N}$.*

Bevis. La $\{x^*_N\}_{N\in\mathbb{N}^*}$ være ikke-standard standard utvidelsen til $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, slik at $x^*_N = \langle x_{N_n}\rangle$ der $\{N_n\}$ er representant for $N \in \mathbb{N}^*$.

Vi antar først at $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mot $r \in \mathbb{R}$ og lar $N \in \mathbb{N}^*\setminus\mathbb{N}$. Vi ønsker å vise at $x^*_N \approx r$, altså at for ethvert positivt reelt tall ε så er $|x^*_N - r| < \varepsilon$. Per antakelse kan vi ved Definisjon 7.2.1 si at det må finnes en $M \in \mathbb{N}$ slik at $|x_n - r| < \varepsilon$ for alle $n \in \mathbb{N}$ der $n \geq M$. Vi lot $\{N_n\}$ være representant for N og følgelig må mengden

$$\{n \in \mathbb{N} : N_n \geq M\}$$

være en fet mengde ettersom $N > M$ når $N \in \mathbb{N}^*\setminus\mathbb{N}$. Videre må mengden

$$\{n \in \mathbb{N} : |x^*_N - r| < \varepsilon\}$$

inneholde $\{n \in \mathbb{N} : N_n \geq M\}$. Per (iv) er $\{n \in \mathbb{N} : |x^*_N - r| < \varepsilon\}$ også en fet mengde. Siden mengden er fet, har vi per Definisjon 3.4.1 av $<$ at $|x^*_N - r| < \varepsilon$. Siden dette gjelder for alle positive reelle tall ε må x_N være uendelig nærme r, slik vi ønsket å vise.

For andre del av beviset ønsker vi å vise at hvis $x^*_N \approx r$ for alle $N \in \mathbb{N}^*\setminus\mathbb{N}$, så konvergerer $\{x_n\}_{n\in N}$ mot $r \in \mathbb{R}$. Vi benytter oss av den kontrapositive påstanden for å bevise dette, og antar følgelig at $\{x_n\}_{n\in N}$ ikke konvergerer mot $r \in \mathbb{R}$. Per denne antakelsen finnes et positivt reelt tall ε og en strengt voksende følge av naturlige tall $\{N_n\}$ slik at $|x_{N_n} - r| > \varepsilon$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Dermed er $N = \langle N_n \rangle$ uendelig stor og $|x_N^* - r| > \varepsilon$. ■

Grenseverdi

I den formelle definisjonen av grenseverdien til en funksjon der $\lim_{x\to s} f(x) = r$, vil begrepet om nærhet mellom funksjonsverdien $f(x)$ og punktet r være angitt ved at absoluttverdien til differansen mellom $f(x)$ og r, $|f(x) - r|$, er liten når x nærmer seg s, som er angitt ved at absoluttverdien av differansen mellom x og s, $|x - s|$, er liten. En slik definisjon av grense er blitt kalt (ε, δ)-definisjonen av grenseverdi, og er i klassisk analyse gitt på følgende vis for reelle funksjoner:

Definisjon 7.2.3. La f være en reell funksjon definert på en delmengde R av $\mathbb{R}$. La s være et punkt i eller nær delmengden R og r være et reelt tall. Vi sier at for $x \in R$ er

$$\lim_{x\to s} f(x) = r$$

dersom for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at når $0 < |x - s| < \delta$ så er $|f(x) - r| < \varepsilon$

Slik som for definisjonen av konvergens ønsker vi igjen å benytte oss av de hyperreelle tallenes egenskaper og funksjonsutvidelsen vår, for å gi en ikke-standard karakterisering av grenseverdi. Vi ønsker dermed å redefinere begrepet om nærhet ved hjelp av hyperreelle tall uendelig nære hverandre.

Setning 7.2.4. *La f være en reell funksjon definert på en delmengde R i $\mathbb{R}$. La s være et punkt i eller nær delmengden R og r være et reelt tall. For $x \in R$ så er*

$$\lim_{x\to s} f(x) = r$$

hvis og bare hvis $f^*(x) \approx r$ for alle $x \in \mathbb{R}^*$ slik at $x \approx s$ men $x \neq s$.

Bevis. Vi lar $f^* : R^* \to \mathbb{R}^*$ være ikke-standard utvidelsen av f.

Antar først at $\lim_{x\to s} f(x) = r$ og at x er uendelig nære s. For $t \in \mathbb{R}$ har vi per Definisjon 7.2.3 at det for enhver reell $\varepsilon > 0$ finnes en reell $\delta > 0$ slik at $|f(t) - r| < \varepsilon$ når $|t - s| < \delta$. Velger en representant $\{x_n\}$ slik at $x = \langle x_n \rangle$. Siden $x \approx s$ må mengden

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n - s| < \delta\}$$

være en fet. Men siden $\lim_{x\to s} f(x) = r$ så er

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n - s| < \delta\} \subset \{n \in \mathbb{N} : |f(x_n) - r| < \varepsilon\}$$

Hvilket betyr at mengden $\{n \in \mathbb{N} : |f(x_n) - r| < \varepsilon\}$ også en fet mengde per (iv). Som per Definisjon 3.4.1 av $<$ og Definisjon 6.4.1 av funksjonsutvidelsen gir at $|f^*(x) - r| < \varepsilon$, og følgelig er $f^*(x) \approx r$ for alle $x \approx s$, ettersom x var vilkårlig valgt.

For andre del av beviset antar vi den kontrapositive påstanden; at $\lim_{x\to s} f(x) \neq r$, og må finne en $x \approx s$ slik at $f^*(x) \not\approx r$. Siden grenseverdien $\lim_{x\to s} f(x)$ per antakelse ikke er lik r, må det per Definisjon 7.2.3 finnes en positiv reell ε og en reell følge $\{x_n\} \in \mathcal{F}$ som konvergerer mot s, slik at

$$|f(x_n) - f(r)| > \varepsilon$$

for alle $n \in \mathbb{N}$. Siden $\{x_n\}$ konvergerer mot s har vi ved Setning 5.2.1 at $x = \langle x_n \rangle \approx s$. Men mengden

$$\{n \in \mathbb{N} : |f(x_n) - r| > \varepsilon\}$$

er en fet mengde, og følgelig er $|f^*(x) - r| > \varepsilon$. Dette viser at $f^*(x) \not\approx f(r)$ for $x \approx s$, og beviset er fullført. ∎

O'Donovan [ODo16] gir definisjonen av grenseverdi, men bytter ut begrepet om reelle tall med *observable*, uendelig med *ultralarge* og infinitesimal med *ultrasmall*. Oversatt til norsk kunne vi brukt betegnelsene observerbare tall om reelle tall, ultra store tall om uendelige tall, og ultra små tall om infinitesimaler. Slik blir den reelle tallinja den *observerbare delen* av den hyperreelle tallinja. O'Donovan bruker også betegnelsen *ultra nærme* for to hyperrelle tall x og y der $x \approx y$, der vi i denne oppgaven har sagt at $x \approx y$ når $x - y$ er et infinitesimal. Vi ser på et eksempel fra [ODo16] for å vise bruken av definisjonen av grenseverdi, og ser på en funksjon f i et punkt der funksjonen ikke er definert.

Eksempel 7.2.5. Gitt funksjonen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 3}$$

definert på mengden $R = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$, ønsker vi å undersøke grenseverdien i $s = 3$.
Her er $s = 3$ et punkt nær delmengden R, og f er faktisk definert rundt 3. Lar vi $x \approx 3$, men samtidig $x \neq 3$. Faktoriserer vi telleren får vi $2x^2 - 7x + 3 = (x - 3)(2x - 1)$, og følgelig kan vi skrive

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 3} = 2x - 1 \approx 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

Ettersom 5 ikke avhenger av hvilken x vi velger når $x \approx 3$ og 5 er ultra nærme $f(x)$, må 5 være grenseverdien.

Vi ønsker også å ta med og bevise et teorem som sier at dersom grenseverdien til en funksjon eksisterer i et bestemt punkt, så er denne grenseverdien unik.

Teorem 7.2.6. *Dersom grensenverdien til en funksjon f eksisterer i et punkt s så er grensenverdien r unik.*

Bevis. Vi antar at r_1 og r_2 er to reelle tall, og at

$$f^*(x) \approx r_1 \quad \text{og} \quad f^*(x) \approx r_2$$

for alle $x \approx s$, der $x \neq s$.
Per antakelse må jo også $r_1 \approx r_2$, men siden r_1 og r_2 er relle tall, følger det av Lemma 5.1.2 at $r_1 = r_2$, og vi har vist at grenseverdien må være unik. ∎

Vi tar med et siste teorem i denne seksjonen om de algebraiske egenskapene til grenseverdier av funksjoner.

Teorem 7.2.7.

1. *For enhver konstant* k *er* $\lim_{x\to s} f(kx) = k\lim_{x\to s} f(x)$.
2. $\lim_{x\to s}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to s} f(x) + \lim_{x\to s} g(x)$.
3. $\lim_{x\to s} f(x)g(x) = \lim_{x\to s} f(x)\lim_{x\to s} g(x)$.
4. *Hvis* $\lim_{x\to s} g(x) \neq 0$, *så er* $\lim_{x\to s}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to s} f(x)}{\lim_{x\to s} g(x)}$.

Bevis. Vi beviser punkt (2). Vi lar $x \approx s$, men $x \neq s$. Ved Theorem 5.1.4 om standarddelen til et hyperreelt tall, så er

$$\lim_{x\to s}(f(x)+g(x)) = st(f(x)+g(x)) = st(f(x))+st(g(x)) = \lim_{x\to s} f(x)+\lim_{x\to s} g(x)$$

■

7.3 Kontinuitet

Vi skal nå betrakte kontinuitet og ønsker som nevnt å gi en ikke-standard karakterisering av dette sentrale begrepet i analysen. Men aller først, hva vil det egentlig si at en funksjon er kontinuerlig? En intuitiv og billedlig måte å forklare kontinuitet av en reell funksjon er slik det blir forklart i læreboken *Sinus R1* at man kan "*tegne grafen uten å løfte blyanten fra papiret*"[Old+18, p. 51]. En kontinuerlig funksjon er med andre ord sammenhengende i alle punkter dersom vi ser på grafen. Dette gir oss et bilde av hva vi er på jakt etter, men gir kanskje lite informasjon for å kunne drive analyse. Vi skal først gi definisjonen av *kontinuitet i et punkt* slik den er gitt i klassisk analyse, og deretter en ikke-standard karakterisering av denne definisjonen. Den ikke-standard karakteriseringen skal vi benytte oss av for å vise kontinuitet av sammensatte funksjoner, sum og produkter av funksjoner og til slutt *skjæringssetningen*.

Kontinuitet i et punkt

Generelt kan man si at en funksjon $f(x)$ er kontinuerlig dersom små endringer av variabelen x, gir små endringer av funksjonsverdien $f(x) = y$. Spesifikt vil det si at for en funksjon definert på en mengde, la oss kalle denne mengden definisjonsmengden til f og bruke notasjon D_f slik at

$$f : D_f \to \mathbb{R},$$

så er f kontinuerlig i et punkt $r \in D_f$ dersom

$$\lim_{x\to r} f(x) = f(r)$$

Setter vi denne definisjonen sammen med den formelle definisjonen av grenseverdi fra Definisjon 7.2.3 får vi følgende definisjon av kontiuitet i et punkt fra klassisk analyse:

Definisjon 7.3.1. En funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig i et punkt $r \in \mathbb{R}$ hvis og bare hvis det for en hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at når $|x - r| < \delta$ så er $|f(x) - f(r)| < \varepsilon$.
Vi sier at f er kontinuerlig i $\mathbb{R}$ dersom f er kontinuerlig i alle punkter $r \in \mathbb{R}$

Merknad 7.3.2. Her har vi latt definisjonsmengden til f, D_f, være lik hele $\mathbb{R}$.

Kjernen i denne definisjonen er at når to tall er uendelig nærme hverandre vil også funksjonsverdiene være uendelig nære hverandre. Slik vi sier at grenseverdien til $f(x)$ er lik $f(r)$, når x nærmer seg r, og at $|f(x) - f(r)| < \varepsilon$ når $|x - r| < \delta$, uansett hvor liten vi velger δ og ε til å være. Poenget er at begrepet om at *to tall er uendelig nære hverandre* er noe vi har klart å definere ved hjelp av hyperreelle tall, vi sier at $x \approx y$ dersom $x - y$ er et infinitesimal. La oss se om vi klarer å benytte ikke-standard utvidelsen av en reell funksjon og de hypereelle tallenes egenskaper til å formulere kontinuitet av ikke-standard karakter.

Setning 7.3.3. *La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funksjon, og f^* være ikke-standard utvidelsen av f. Da er f kontinuerlig i punktet $r \in \mathbb{R}$ hvis og bare hvis $f^*(x) \approx f^*(r)$ for alle $x \approx r$.*

Bevis. Vi antar først at f er kontinuerlig i r og at x er et tall uendelig nære r. For å vise at $f^*(x)$ er uendelig nære $f^*(r)$ må vi vise at

$$|f^*(x) - f^*(r)| < \varepsilon$$

for alle positive $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Siden f per antakelse er kontinuerlig i r finnes en et positivt tall $\delta \in \mathbb{R}$ slik at $|f(s) - f(r)| < \varepsilon$ når $|s - r| < \delta$.

Velger oss en representant $\{x_n\}$ slik at $x = \langle x_n \rangle$, og siden $x \approx r$ så må mengden

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n - r| < \delta\}$$

være en fet mengde. Videre er

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n - r| < \delta\} \subset \{n \in \mathbb{N} : |f(x_n) - f(r) < |\varepsilon\}$$

og følgelig må $\{n \in \mathbb{N} : |f(x_n) - f(r)| < \varepsilon\}$ være en fet mengde. Per Definisjon 3.4.1 viser dette at $|f^*(x) - f^*(r)| < \varepsilon$, og den første delen av beviset er gjort.

For andre del av beviset antar vi den kontrapositive påstanden; at f ikke er kontinuerlig i $r \in \mathbb{R}$ og må finne en $x \approx r$ slik at $f^*(x) \not\approx f^*(r)$. Siden f per antakelse ikke er kontinuerlig, må det per Definisjon 7.3.1 av kontinuitet finnes en positiv $\varepsilon \in \mathbb{R}$ og en følge $\{x_n\} \in \mathcal{F}$ som konvergerer mot r, slik at

$$|f(x_n) - f(r)| > \varepsilon$$

for alle $n \in \mathbb{N}$. Siden $\{x_n\}$ konvergerer mot r har vi ved Setning 5.2.1 at $x = \langle x_n \rangle \approx r$. Men mengden

$$\{n \in \mathbb{N} : |f(x_n) - f(r)| > \varepsilon\}$$

er en fet mengde, og følgelig er $|f^*(x) - f^*(r)| > \varepsilon$, som viser at $f^*(x) \not\approx f^*(r)$ når $x \approx r$, og beviset er fullført. ■

Selvom beviset av denne definisjonen kanskje ikke virker mindre tungvindt, så er denne karakteriseringen av kontinuitet ved hyperreelle tall ofte lettere å ta i bruk som en definisjon av kontinuitet, og dette skal vi se eksempler på nå.

Kontinuitet av sammensatte funksjoner

Vi begynner med å se på kontinuitet av *sammensatte funksjoner*. Eksempler på sammensatte funksjoner er $sin(x^2)$ og $e^{cos(x)}$, der vi kan for $sin(x^2)$ la $f(x) = sin(x)$ og $g(x) = x^2$, slik at $f(g(x)) = sin(g(x)) = sin(x^2)$. Fra klassisk analyse har vi følgende teorem for sammensatte funksjoner som vi ønsker å bevise ved hjelp av Setning 7.3.3:

Teorem 7.3.4. *Anta at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig i r og at $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig i $f(r)$. Da er den sammensatte funksjonen $h(x) = g(f(x))$ kontinuerlig i r.*

Bevis. Lar h^*, f^* og g^* være de respektive ikke-standard utvidelsene av h, f og g, og velger en representant $\{x_n\}$ for en x. Siden $h(x) = g(f(x))$ så er ikke-standard utvidelsen av h gitt ved

$$h^*(x) = h^*(\langle x_n \rangle) = \langle h(x_n) \rangle = \langle g(f(x_n)) \rangle = g^*(\langle f(x_n) \rangle) = g^*(f^*(\langle x_n \rangle))$$

Dermed må vi vise at dersom $x \approx r$ så er $g^*(f^*(x)) \approx g^*(f^*(r))$. Siden f er kontinuerlig i r, så er per definisjon $f^*(x) \approx f^*(r)$. Videre, er per antakelse g kontinuerlig i $f(r)$, dermed har vi igjen per definisjon at $g^*(f^*(x)) \approx g^*(f^*(r))$. Det var dette vi ønsket å vise, og det gir oss at den sammensatte funksjonen $h(x) = g(f(x))$ er kontinuerlig i r. ■

Kontinuitet av sum og produkter

Vi skal nå vise at summen og produktet av funksjoner som er kontinuerlige i et punkt, selv er kontinuerlige i punktet ved hjelp av vår ikke-standard karakterisering av kontinuitet og funksjonsutvidelsen.

Lemma 7.3.5. *Hvis to funksjoner f og g er kontinuerlige i r så er også*

1. *$f + g$ kontinuerlig i r*
2. *$f \cdot g$ kontinuerlig i r*
3. *$\frac{f}{g}$ kontinuerlig i r, hvis $g(r) \neq 0$.*

Bevis. Siden f kontinuerlig i r så er $f^*(x) \approx f^*(r)$ for alle $x \approx r$ og siden g kontinuerlig i r så er $g^*(x) \approx g^*(r)$ for alle $x \approx r$. Videre har vi at for summen $f + g$ vist at ikke-standard utvidelsen $(f^* + g^*)(x) = f^*(x) + g^*(x)$ ved Setning 6.4.4. Følgelig må

$$(f^* + g^*)(x) = f^*(x) + g^*(x) \approx f^*(r) + g^*(r) = (f^* + g^*)(r)$$

for alle $x \approx r$, og vi har bevist (1). Beviset er tilsvarende for punkt (2) og (3). ■

Skjæringssetningen

Til slutt ønsker vi å vise frem et resultat fra kalkulus kjent som *Skjæringssetningen*. Skjæringssetningen sier at enhver kontinuerlig funksjon f på et intervall $[r, s]$ vil treffe alle verdier mellom $f(r)$ og $f(s)$. Altså at hvis u er et reelt tall mellom funksjonsverdiene $f(r)$ og $f(s)$, må det finnes et reelt tall t på intervallet $[r, s]$ slik at $f(t) = u$.

Vi har valgt å benytte oss av formuleringen der funksjonsverdien til dette tallet t er lik 0. Intuitivt betyr dette at dersom f er en kontinuerlig funksjon på intervallet $[r, s]$, er den følgelig sammenhengende på intervallet og det er ingen 'hull' eller 'hopp' i funksjonsverdiene. Videre, dersom funksjonsverdien $f(r)$ er et negativt reelt tall og $f(s)$ er et positivt reelt tall, må funksjonsverdiene på et tidpunkt ha skiftet fortegn. Det betyr at det må finnes et tall på intervallet mellom $[r, s]$ slik at funksjonsverdien blir null. Med andre ord: grafen til f vil skjære x-aksen.

I beviset for dette teoremet skal vi benytte oss av egenskapene ved de hypernaturlige tallene, slik at vi kan lage oss en uendelig oppdeling av intervallet funksjonen er definert på. Vi minner om at vi viste at alle hypernaturlige tall, som ikke samtidig var naturlige tall, var uendelig store. Det finnes flere alternative formuleringer og bevis, men vi har valgt å benytte oss av den følgende formuleringen og tilhørende bevis, basert på [ODo16]:

Teorem 7.3.6 (Skjæringssetningen)**.** *La f være en kontinuerlig funksjon på intervallet $[r, s]$ der $r, s \in \mathbb{R}$ og $r < s$, og la $f(r) < 0 < f(s)$. Da finnes et reelt tall $t \in [r, s]$ slik at $f(t) = 0$.*

Bevis. Lar $N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$, slik at $\Delta x = (s-r)/N$ og $H = \{r, r+\Delta x, r+2\Delta x, ..., s-2\Delta x, s - \Delta x, s\}$ være en oppdeling av $[r, s]$ i N like store intervaller. Videre lar vi $x_i = r + i \cdot \Delta x$ være punkter slik at $s = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = r$ for $i \in \{0, 1, 2, ..., n, ..., N\}$.

Ettersom $f(r) = f(x_0) < 0$ må det finnes et første punkt x_j der $j \in \{0, 1, 2, ..., n, ..., N\}$ slik at $f^*(x_{j+1}) \geq 0$. Da har vi at

$$f^*(x_j) \leq 0 \leq f^*(x_{j+1}).$$

Lar vi nå t være reelle tallet uendelig nære x_j, og begrunner at t må eksistere ettersom x_j er begrenset til intervallet $[r, s]$. Siden $x_j \approx x_{j+1}$ så må også $t \approx x_{j+1}$, og følgelig er $t \in [r, s]$. Videre er f per antakelse da kontinuerlig i t og per Setning 7.3.3 av en kontinuerlig funksjon er

$$f(t) \approx f^*(x_j) \leq 0 \quad \text{og} \quad f(t) \approx f^*(x_j) \geq 0$$

Dermed får vi at $f(t) \approx 0$, men $f(t)$ er et reelt tall, og av Lemma 5.1.2 må

$$f(t) = 0$$

. ■

Vi vil videre i denne oppgaven betrakte Setning 7.2.2, Setning 7.2.4 og Setning 7.3.3 som definisjoner av henholdsvis konvergens, grenseverdi og kontinuitet av ikke-standard karakter.

KAPITTEL 8

Infinitesimalregning

De matematiske operasjonene derivasjon og integrasjon er hjørnestenene i matematisk analyse. Der derivasjon tar for seg å behandle uendelig små endringer av kontinuerlige funksjoner, tar integrasjon på den andre siden for seg å uttrykke en større helhet ved å integrere eller summere mindre enheter. Tiltross for stor ulikhet i målene for operasjonene, er disse operasjonene tett knyttet sammen da derivasjon og integrasjon fremstår som motsatte regneoperasjoner. Derivasjon og integrasjon gis ofte fellesbetegnelsen infinitesimalregning, og knyttes sammen i teoremet, med matematikkens kanskje mest episke navn: Analysens fundamentalteorem.

Før vi går i gang med matematikken ønsker vi å gjøre oss noen betrakninger knyttet til navnet *infinitesimalregning*. På en side kan navngivingen på denne fellesbetegnelsen for derivasjon og integrasjon virke overraskende da infinitesimalene først ble gitt et rigorøst grunnlag i 1960, og infinitesimalene nærmest var bannlyst fra analysen i noen og hundre år slik vi fortalte innledningsvis. På den andre siden kan man betrakte *infinitesimal* som ideen om uendelig små størrelser slik derivasjon behandler uendelig små endringer, og integrasjon tilnærmer seg en enhet ved hjelp av uendelig små oppdelinger. Som en siste betrakning er det heller ikke unaturlig at infintesimalene får noe ære, da disse spilte en sentral rolle i oppdagelsen av sammenhengen mellom derivasjon og integrasjon.

Vi gav i Kapittel 7 en ikke-standard karakterisering av kontinuerlige funksjoner, og det er disse funksjonene vi nå skal behandle i infinitesimalregningen. Men hvorfor er det nettopp kontinuerlige funksjoner vi betrakter? For å eksemplifisere med derivasjon kan vi betrakte en funksjon for bevegelse over et intervall. For betrakte denne bevegelsen er det nødvendig at funksjonen vi ser på er kontinuerlig, ettersom vi ikke kan bevege oss fra et punkt til et annet i dette intervallet uten at vi er alle steder i mellom. For å eksemplifisere denne tanken kan vi si at dersom en person går fra en posisjon A til B langs en vei, må personen samtidig ha vært alle steder mellom A og B på denne veien. Når funksjonen for bevegelsen er kontinuerlig kan vi ved den deriverte finne hastigheten på bevegelsen for ethvert tidspunkt på intervallet.

For å eksemplifisere integrasjon, der vi skal tilnærme oss en større enhet ved å lage en oppdeling i mindre enheter, tar vi for oss en analogi med et gammelt filmkamera. Se for deg et filmkamera som knipser 10 bilder i sekundet. Setter du sammen alle bilder som blir tatt i løpet av 5 sekunder, får du en bildeserie på 50 bilder, som kan settes sammen til en film på 5 sekunder der hvert bilde er tatt på et bestemt øyeblikk. Åpenbart mangler vi bilder av mange øyeblikk på disse 5 sekundene, da vi kun har bilder for 10 av øyeblikkene i hvert sekund, og filmen vil fremstå noe hakkete. Det optimale ville vært å ta uendelig mange bilder per sekund, slik at vi får en uendelig oppdeling av hvert sekund og uendelig mange øyeblikk på film. Da vil overgangene i filmen vår ikke lenger være hakkete og filmen vil gi en god approksimasjon til virkeligheten.

Vi skal i dette kapittelet ta for oss å først gi en ikke-standard karakterisering av derivasjon, den deriverte og hva det vil si at en funksjon er deriverbar. Videre skal vi gi en ikke-standard formulering av integralet.

8.1 Derivasjon

Vi begynner dette kapittelet med å gi en ikke-standard karakterisering av derivasjon og gi en definisjon på hva det vil si at en reell funksjon er *deriverbar*. Generelt er derivasjon av en reell funksjon en operasjon på f for å finne endringen i $f(x)$ når variabelen x endrer seg. Geometrisk sett angir den deriverte til en funksjon i et bestemt punkt, stigningstallet til tangenten på funksjonsgrafen i dette punktet.

Innledningsvis i denne oppgaven tok vi for oss å gi det historiske bakteppet for ikke-standard analyse, og forklarte hvordan infinitesimalene var en hjørnesten da Leibniz og Newton oppdaget differensialregningen. Vi viste også frem et eksempel på hvordan infinitesimaler ble tatt i bruk i definisjonen av den deriverte, og hvordan infinitesimaler gav utrykk for uendelig små endringer i differensialene dx, tilsvarende endring i x, og dy, tilsvarende endring i $f(x)$. Videre var problemet med denne definisjonen basert på en infinitesimal-tilnærming at infinitesimalene dx og dy var antatt som størrelser ulike fra 0, men ville samtidig oppføre seg som tallet 0. Dermed ble definisjonen etter mye kritikk forkastet, og etterhvert byttet ut med $(\varepsilon - \delta)$-definisjonen av grenseverdi. Det er denne grensetilnærmingen vi har benyttet oss av til å sammenlikne med i infinitesimal-tilnærmingen i våre ikke-standard karakteriseringer.

Den deriverte

Nok en gang vil vi først gi definisjonen av den deriverte slik den er kjent fra klassisk kalkulus, før vi går i gang med å gi en ikke-standard karakterisering av definisjonen. Den deriverte av en funksjon av én variabel med definisjonsmengde $\mathbb{R}$ er gitt ved:

Definisjon 8.1.1. En funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er deriverbar i et punkt $r \in \mathbb{R}$ dersom grensen

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(r + \Delta x) - f(r)}{\Delta x}$$

eksisterer. Da er $f'(r) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(r+\Delta x)-f(r)}{\Delta x}$

Merknad 8.1.2. Vi minner om at grenseverdien eksisterer dersom $\lim_{x\to s} f(x) = r$. Altså at når variabelen nærmer seg en grense av en bestemt verdi s eller ∞, så går funksjonsverdien mot en bestemt grenseverdi r.

I Definisjon 8.1.1 angir Δx endringen i den frie variabelen x. Vi kan oppfatte Δx som en funksjon som nærmer seg 0. Geometrisk sett vil en liten endring i x, tilsvarende en svært liten størrelse Δx, gi en god approksimasjon til stigningstallet for tangentlinjen. Og motsatt vil en større størrelse Δx gi en dårligere approksimasjon. Nok en gang kommer vi inn på begrepet om en svært liten størrelse, og et er denne egenskapen ved hyperreelle tall vi skal benytte oss av når vi skal gi vår ikke-standard karakterisering.

Med dette i bakhodet er vi klare for å gi en ikke-standard karakterisering av Definisjon 8.1.1. Vi ønsker å nok engang å erstatte grense-tilnærmingen, med en infinitesimal-tilnærming. Dermed vil vi erstatte Δx med en infinitesimal størrelsesforskjell, et infinitesimal $\varepsilon \in \mu(0)$, og grenseverdien med et tall uendelig nære differensialet. Slik at vi kan benytte oss av funksjonsutvidelsen for å gi en ikke-standard karakterisering av deriverbarhet i et punkt.

Merknad 8.1.3. Husk at $\mu(0)$ var mengden av alle infinitesimaler.

Setning 8.1.4. *En funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er deriverbar i et punkt $r \in \mathbb{R}$ hvis og bare hvis det finnes et reelt tall s slik at*

$$\frac{f^*(r+\varepsilon) - f^*(r)}{\varepsilon} \approx s$$

for alle $\varepsilon \in \mu(0)$. Da er $f'(r) = s$.

Bevis. Antar først at f er deriverbar i $r \in \mathbb{R}$. Per Definisjon 8.1.1 så eksisterer grenseverdien

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(r+h) - f(r)}{h}$$

og er lik $f'(x)$ vi lar $f'(x) = s$. Når $h \to 0$ og uendelig nærme 0, så er $h = \varepsilon$ for en $\varepsilon \in \mu(0)$. Men da er per Setning 7.2.4 av grenseverdi

$$\frac{f^*(r+\varepsilon) - f^*(r)}{\varepsilon} \approx s$$

for alle $\varepsilon \in \mu(0)$.

For motsatt implikasjon, antar vi at

$$\frac{f^*(r+\varepsilon) - f^*(r)}{\varepsilon} \approx s$$

for alle $\varepsilon \in \mu(0)$. Siden $\varepsilon \in \mu(0)$, kan vi la ε være grenseverdien når endringen $h \to 0$ er tilstrekkelig nærme 0. Ved Setning 7.2.4 av grenseverdi så er da

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(r+h) - f(r)}{h} = s$$

som viser at grenseverdien eksisterer og $f'(r) = s$ slik vi ønsket, og beviset er ferdig. ■

Vi skal videre oppfatte Setning 8.1.4 som definisjonen av en deriverbar funksjon.

Kjerneregelen

For å illustrere bruken av Setning 8.1.4 ser vi på et eksempel med derivasjon av sammensatte funksjoner gitt ved *kjerneregelen*. Kjerneregelen er en formel for å regne ut den deriverte av en sammensatt funksjon $h(x) = f(g(x))$.

Vi minner om at vi viste eksempler på slike funksjoner i Seksjon 7.3 da vi så på kontinuitet av sammensatte funksjoner. Vi ønsker nå å vise at en sammensatt funksjon $h(x) = f(g(x))$ er deriverbar i et punkt x dersom komponentene f og g er respektivt deriverbare i $g(x)$ og x. Da følger regelen om at den deriverte av h er $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Vi formulerer et teorem og forsøker å bevise det.

Teorem 8.1.5. *Anta at $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er deriverbar i punktet r og at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er deriverbar i punktet $g(r)$. Da er den sammensatte funksjonen $h(x) = f(g(x))$ deriverbar i r, og $h'(r) = f'(g(r)) \cdot g'(r)$.*

Bevis. Lar $\varepsilon \in \mu(0)$. Vi ønsker å vise at

$$\frac{h^*(r+\varepsilon) - h^*(r)}{\varepsilon} = \frac{f^*(g^*(r+\varepsilon)) - f^*(g^*(r))}{\varepsilon} \approx f'(g(r)) \cdot g'(r),$$

og setter $k = g^*(r+\varepsilon) - g^*(r)$.

I første tilfellet der $k = 0$, så er $g^*(r+\varepsilon) = g^*(r)$, som gir $f^*(g^*(r+\varepsilon)) = f^*(g^*(r))$. Venstresiden av likningen ovenfor blir følgelig

$$\frac{f^*(g^*(r+\varepsilon)) - f^*(g^*(r))}{\varepsilon} = \frac{0}{\varepsilon} = 0.$$

For høyresiden av likningen så er per Setning 8.1.4 av en deriverbar funksjon

$$g'(r) = \frac{g^*(r+\varepsilon) - g^*(r)}{\varepsilon} = \frac{0}{\varepsilon} = 0$$

og følgelig blir $f'(g(r)) \cdot g'(r) = 0$. Dette viser at når $k = 0$ så er $h'(r) = f'(g(r)) \cdot g'(r)$.

For det andre tilfellet der $k \neq 0$, bruker vi omskrivningen $g^*(r+\varepsilon) = g^*(r)+k$. Dersom vi ganger og deler

$$\frac{h^*(r+\varepsilon) - h^*(r)}{\varepsilon} = \frac{f^*(g^*(r+\varepsilon)) - f^*(g^*(r))}{\varepsilon}$$

med k, får vi ved en liten omskrivning at

$$\frac{f^*(g^*(r)+k) - f^*(g^*(r))}{k} \cdot \frac{g^*(r+\varepsilon) - g^*(r)}{\varepsilon} = f'(g(r)) \cdot g'(r).$$

Som var akkurat det vi ønsket å vise.

Dermed er beviset fullført for alle k og vi har klart å vise at $h'(r) = f'(g(r)) \cdot g'(r)$ ved hjelp av vår ikke-standard karakterisering av deriverbarhet. ■

8.2 Integrasjon

Vi er nå klare for å ta for oss siste punkt på ønskelisten vår: en ikke-standard formulering av integrasjon. Ikke-standard analyse blir jo ikke ordentlig analyse dersom vi mangler en av de to grunnstenene. Integrasjon er enkelt forklart en operasjon på en funksjon som gir en ny funksjon, kalt funksjonens integral. Integralet av en kontinuerlig funksjon $f : [r, s] \to \mathbb{R}$ er gitt ved

$$F(x) = \int_r^x f(t)dt$$

Vi forklarte innledningsvis at vi ved hjelp av integralet til en funksjon f kan finne arealet under funksjonskurven. En metode for å tilnærme seg dette integralet er ved hjelp av *Riemann summer*.

Riemann integrasjon

Vi ser på en kontinuerlig funksjon $f : [r, s] \to \mathbb{R}$, og lager oss en partisjon av intervallet $[r, s]$ ved punktene $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ slik at

$$r = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = s.$$

Da kan vi dele opp intervallet i n ulike biter, og lage oss en samling av intervaller I_n ved

$$\mathcal{I} = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]\}$$

slik at

$$\bigcup_{i=1}^{n} I_i = [r, s]$$

Videre kan vi lage rektangler under funksjonsgrafen for hvert intervall i $\mathcal{I}$. For et rektangel tilhørende et intervall I_i er bredden av rektangelet lik $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Vi lar høyden av rektangelet være funksjonsverdien $f(x_i)$ i det øvre punktet x_i i intervallet. Da er arealet av rektangelet gitt ved $f(x_i) \cdot \Delta x_i$. Summerer vi opp alle rektanglene for ethvert intervall $I_i \in \mathcal{I}$ får vi summen

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Dersom vi nå velger høyden på rektanglene til å være funksjonsverdien i det nedre punktet for hvert intervall $I_i \in \mathcal{I}$, slik at høyden er $f(x_{i-1})$. Får vi at arealet av hvert rektangel er gitt ved $f(x_{i-1}) \cdot \Delta x_i$, og summen av alle rektangelene er

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$$

.

Lar vi n=10 i denne summen, begge tilnærmingene til integralet

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i \text{og} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

ha en viss feilmargin. Avhengig av kurvens form vil det for en hver x_i, enten være slik at summen enten gir en litt høyere eller litt lavere verdi enn det faktisk arealet. Samtidig observerer vi at jo flere biter vi deler opp $[r, s]$ i, jo bedre vil tilnærmingen være.

For det første kan vi la høyden av et rektangel på intervallet $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ være gitt ved funksjonsverdien $f(t_i)$ for et punkt t_i mellom x_i og x_{i-1} slik at $x_{i-1} < t_i < x_i$. Vi lar nå rektanglene være gitt med høyde i det midtre punktet, slik at vi får summen

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

For det andre ønsker vi å gjøre tilnærmingen vår bedre ved å la n ta uendelig store verdier slik at intervallet $[r, s]$ blir delt i uendelig mange biter. Da blir hvert av intervallene i $\mathcal{I}$ uendelig små. Dette medfører at rektanglene blir uendelig smale. Med andre ord, vi lar bredden $\Delta x_i \to 0$. Dette gir oss grenseverdien

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

Her kommer sammenhengen mellom Riemann summen og integralet. Grenseverdien til denne summen når $\Delta x \to 0$ er nemlig lik integralet av funksjonen på det samme intervallet. Slik at

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \int_r^s f(x)dx$$

Ikke-standard formulering av integralet

Med litt bakgrunnskunnskap om integralet og hvordan det er definert i klassisk analyse, er det kanskje litt tydeligere hvor vi vil med vår ikke-standard formulering. Ikke-standard analyse skiller seg jo nemlig fra klassisk analyse ved en infinitesimal-tilnærming til fordel for grensetilnærmingen. Dermed ønsker vi å gi ikke-standard formulering av Riemann integralet

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

ved hjelp av en infinitesimal-tilnærming til denne grenseverdien.

Før vi går løs på en ikke-standard formulering av integralet, ser vi bakover i denne oppgaven for å lete etter ledetråder til hvilke egenskaper ved de hyperreelle tallene vi kan benytte oss av. Åpenbart ønsker vi å gi en formulering som baserer seg på en infinitesimal-tilnærming, fremfor en grense-tilnærming, ettersom det er nettopp dette som skiller ikke-standard analyse fra klassisk analyse. Slik vi erstattet grenseverdien når $\Delta x \to 0$ med et infinitesimal ε i Setning 8.1.4, som gav en ikke-standard karakterisering av den deriverte, ønsker vi også er å gi en infinitesimal-tilnærming av Riemann integralet. Vi skal også benytte oss av funksjonsutvidelsen f^* av en reell funksjon, som faktisk kan ta verdier fra de hyperreelle tallene $\mathbb{R}^*$. Videre skal vi gjøre nytte av de hypernaturlige tallene $\mathbb{N}^*$, der vi viste at enhver $N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ var uendelig. Slik kan vi få en uendelig oppdeling av intervallet vi skal integrere over.

I Kapittel 6 gav vi Definisjon 6.5.7 av hyperendelige mengder $H = \langle R_n \rangle$, som ekvivalensklassen til en følge av endelige mengder $R_n \subset \mathbb{R}$. Vi nevnte at det var slike hyperendelige mengder H, sammen med de interne funksjonene $f = \langle f_n \rangle$ gitt i Definisjon 6.5.6 for funksjoner $f_n : R_n \to \mathbb{R}$, som la grunnlaget for å gi en ikke-standard formulering av integralet. Vi minner om at for en hyperendelig mengde $H = \langle R_n \rangle$ og intern funksjon $f = \langle f_n \rangle$ definert på H, var summen av f over H gitt ved

$$\sum_{x \in H} f(x) = \Big\langle \sum_{x_n \in R_n} f_n(x_n) \Big\rangle.$$

Koker vi alt dette sammen klarer vi å gi følgende ikke-standard formulering av integralet:

Definisjon 8.2.1. La $r, s \in \mathbb{R}$ der $r < s$. La $N \in \mathbb{N}^*$ der $N = \langle N_n \rangle$ og la N være uendelig. Videre lar vi $\Delta x = (s-r)/N$ og $H = \{r, r+\Delta x, r+2\Delta x, ..., s-2\Delta x, s-\Delta x, s\}$ være inndelingen av intervallet $[r, s]$ i N like store intervaller. Hvis $f : [r, s] \to R$ er en kontinuerlig funksjon så er

$$\sum_{x \in H} f^*(x)\Delta x \approx \int_r^s f(x)dx$$

Bevis. Vi observerer at $H = \langle R_n \rangle$ der R_n er inndelingen av intervallet $[r, s]$ i N_n like store intervaller. Per definisjon er

$$\sum_{x \in H} f^*(x)\Delta x = \Big\langle \sum_{x \in T_n} f(x)\Delta_n x \Big\rangle$$

der $\Delta_n x = (s-r)/N_n$. Komponentene i summen på likningens høyre side er vanlige Riemannsummer for integralet $\int_r^s f(x)dx$. Gitt en $\varepsilon > 0$ kan vi altså finne en $M \in \mathbb{N}$ slik at

$$\left| \int_r^s f(x)dx - \sum_{x \in T_n} f(x)\Delta_n x \right| < \varepsilon$$

når $N_n > M$. Siden $N = \langle N_n \rangle$ er uendelig må dermed $\{n \in \mathbb{N} : N_n > M\}$ være en fet mengde. Følgelig må mengden

$$\Big\{ n \in \mathbb{N} : \left| \int_r^s f(x)dx - \sum_{x \in T_n} f(x)\Delta_n x \right| < \varepsilon \Big\}$$

også være en fet mengde. Hvilket betyr at

$$\left| \int_r^s f(x)dx - \sum_{x \in T} f^*(x)\Delta x \right| < \varepsilon$$

Siden ε var vilkårlig valgt, så er

$$\sum_{x \in H} f^*(x)\Delta x \approx \int_r^s f(x)dx$$

slik vi ønsket å vise og beviset er ferdig. ■

8.3 Analysens fundamentalteorem

Vi nærmer oss nå enden på denne oppgavens forsøk på å gi en innføring i ikke-standard analyse. En innføring som forhåpentligvis har lagt et godt nok grunnlag for at leseren kan følge den didaktiske drøftingen i neste og siste kapittel, men kanskje også har fått en dypere innsikt i ikke-standard analyse. Med dette sagt ønsker vi å vie denne siste seksjonen av innføringen til å se nærmere på den sammenhengen som la grunnlaget for matematisk analysen; sammenhengen mellom derivasjon og integrasjon. Teoremet har også det passende navnet *Analysens fundamentalteorem*, og viser sammenhengen mellom det bestemte integralet og den antideriverte til en funksjon.

Vi begynner så smått med å se på en kontinuerlig funksjon $f : [r, s] \to \mathbb{R}$. Lar vi x være en hvilken som helst variabel på intervallet $[r, s]$, og tenker på integralet fra r til x. Da får vi et dynamisk areal, som vi kaller $A(x)$, som går fra r opp til s. Da er arealet under funksjonsgrafen fra r til x

$$A(x) = \int_r^x f(t)dt$$

Tenker vi oss så at vi velger oss et nytt punkt x_0 som ligger på intervallet $[x, s]$, slik at $x_0 - x = \Delta x$, og ser på arealet av området under funksjonsgrafen fra x til x_0. Vi kan skrive dette arelet som

$$A(x + \Delta x) - A(x)$$

Dette arealet vil likne på et rektangel, med unntak av den siden funksjonsgrafen utgjør. Siden funksjonen f er kontinuerlig, vil ikke funksjonsgrafen ha store endringer på det lille intervallet fra x til x_0. Vi kan dermed si at arealet av det skraverte området vil være tilnærmet lik arealet av rektangelet med høyde $f(x_0)$ og bredde Δx. Dermed kan vi si at

$$A(x + \Delta x) - A(x) \approx f(x_0) \cdot \Delta x$$

og vi kan dele på Δx på begge sider og få

$$\frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \approx f(x)$$

Dette minner veldig om vår ikke-standard karakterisering av den deriverte i Setning 8.1.4 gitt ved

$$\frac{f^*(r + \varepsilon) - f^*(r)}{\varepsilon} \approx f'(r)$$

Hvor vi her erstattet grense-tilnærmingen fra klassisk analyse med grenseverdien når $\Delta x \to 0$ med en infinitesimal-tilnærming med ε. Dersom vi lar Δx bli mindre og mindre. Altså at den feilen vi gjør i tilnærmingen være et inifnitesimal så bør høyre siden i

$$\frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \approx f(x)$$

per Setning 8.1.4 bli lik den deriverte av $A(x)$ slik at

$$A'(x) = f(x)$$

Dette antyder at om vi tenker på arealet under kurven som dynamisk, en funksjon av x, så vil den deriverte av arealfunksjonen $A(x)$ være lik $f(x)$. Dette gir oss implikasjoner på hvorfor areal er antiderivasjon, men dette er ikke et matematisk bevis. Denne sammenhengen er formelt gitt i Analysens fundamentalteorem, som sier at dersom en funksjon er kontinuerlig på et lukket intervall og deriverbar på det samme intervallet, med unntak av endepunktene, så er integralet på intervallet lik differansen mellom de antideriverte i endepunktene. Før vi gir formelt gir Analysens fundamentalteorem og et ikke-standard bevis for teoremet, tar vi med et resultat fra kalkulus som vi skal benytte oss av i beviset; Middelverdisetningen.

Teorem 8.3.1 (Middelverdisetningen)**.** *La funksjonen f være en kontinuerlig på lukkede intervallet $[r, s]$ og deriverbar på det åpne intervallet (r, s), der $r, s \in \mathbb{R}$ og $r < s$. Da finnes en $t \in (r, s)$ slik at*

$$f'(t) = \frac{f(s) - f(r)}{s - r}$$

Teorem 8.3.2 (Analysens fundamentalteorem)**.** *La f være en kontinuerlig funksjon på intervallet $[r, s]$ og F være den antideriverte til f på $[r, s]$. Da er*

$$\int_r^s f(x)dx = F(s) - F(r)$$

Bevis. Lar $N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$, slik at $\Delta x = (s-r)/N$ og $H = \{r, r+\Delta x, r+2\Delta x, ..., s-2\Delta x, s-\Delta x, s\}$ er en oppdeling av $[r, s]$ i N like store intervaller. Videre lar vi $x_i = r + i \cdot \Delta x$ være punkter slik at $s = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = r$ for $i \in \{0, 1, 2, ..., n, ..., N\}$ og F^* være ikke-standard utvidelsen til F.

Vi skriver $F(s) - F(r)$ som summen

$$F(s) - F(r) = \sum_{i=0}^{N-1} F^*(x_{i+1}) - F^*(x_i) = \sum_{i=0}^{N-1} F^*(x_i + \Delta x) - F^*(x_i).$$

Ved Theorem 8.3.1 *Middelverdisetningen* har vi at det må finnes en $x \in [x_i, x_{i+1}]$ slik at $F^*(x_{i+1}) - F^*(x_i) = F^{*\prime}(x) \cdot \Delta x$, og siden x ligger mellom r og s, kan ikke x være uendelig. Vi lar t være det reelle tallet uendelig nærme x, slik at $t \approx x$. Den deriverte av F er per antakelse kontinuerlig på $[r, s]$, og følgelig må $F^{*\prime}(x) \approx F'(t) \approx F^{*\prime}(x_i)$. Per Setning 4.4.2 er da $F^{*\prime}(x) = F^{*\prime}(x_i) + \varepsilon_i$ for en infinitesimal ε_i. Følgelig er

$$F^*(x_{i+1}) - F^*(x_i) = (F^{*\prime}(x_i) + \varepsilon_i) \cdot \Delta x = (f^*(x_i) + \varepsilon_i) \cdot \Delta x$$

slik at

$$F(r) - F(s) = \sum_{i=0}^{N-1} f^*(x_i)\Delta x + \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon_i \Delta x.$$

Vi må nå vise at

$$\sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon_i \Delta x \approx 0$$

La t være et positivt reelt tall. Da er $t/(r-s)$ også et positivt reelt tall ved Setning 3.1.1, og $|\varepsilon_i| < t/(r-s)$ for enhver i per Definisjon 4.2.1. Følgelig er

$$\Big|\sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon_i \Delta x\Big| \leq \sum_{i=0}^{N-1} |\varepsilon_i| \Delta x < \sum_{i=0}^{N-1} \frac{t}{r-s} \cdot \frac{s-r}{N} = t \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{N} = t$$

Som viser at

$$\Big|\sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon_i \Delta x\Big| < t$$

for et ethvert reelt tall t. Det betyr at summen er et infinitesimal, og per Definisjon 5.1.1 av standarddelen til et hyperreelt tall er

$$\Big|\sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon_i \Delta x\Big| \approx 0.$$

Dermed er

$$F(r) - F(s) \approx \sum_{i=0}^{N-1} f^*(x_i) \Delta x = \sum_{x \in H} f^*(x) \Delta x$$

Videre har vi per Definisjon 8.2.1 at

$$\sum_{x \in H} f^*(x) \Delta x \approx \int_r^s f(x) dx$$

Men siden $F(r) - F(s)$ er et reelt tall så må per Lemma 5.1.2

$$\int_r^s f(x) dx = F(r) - F(s)$$

og beviset er ferdig. ∎

KAPITTEL 9

Undervisningsperspektivet

Vi har så langt i denne oppgaven forsøkt etter beste evne å gi leseren en grundig innføring i konstruksjonen av hyperreelle tall og den algebraiske strukturen til mengden av disse tallen. Vi har også tatt for oss å formidle det grunnleggende innholdet i analyse som et hovedområde innenfor matematikk. Disse tre hovedområdene av oppgaven har hatt som mål å gi innsikt i og forståelse for kjernelementene i ikke-standard analyse, og hvordan en slik tilnærming vil utfolde seg i grunnleggende kalkulus.

Kapittel 1 med navnet *Intuisjon og historisk perspektiv* var ment som en apetittvekker for hvilke problemer ikke-standard analyse beskjeftiger seg med, og bygge opp en intuitiv forståelse for *infinitesimaler* hos leseren. Videre, håper vi at et innblikk i den historiske utviklingen bidro til innsikt i hvilke problemstillinger som har lagt grunnlaget for dagens definisjoner og resultater.

I Kapittel 2 og Kapittel 3 konstruerte vi den hyperreelle tallinja, definerte regneoperasjoner og ordning. Slik kunne vi vise at mengden av hyperreelle tall fungererte slik vi er vant med at de reelle tallene gjør fra skolematematikken. Likevel var det først i Kapittel 4 og Kapittel 5 vi kunne se de større sammenhengene i det vi så langt hadde presentert, og høstet premiene av det som var basert på en grundig konstruksjon og strukturering av den hyperreelle tallinja gitt av [Lin96].

I Kapittel 6 ga vi ikke-standard utvidelser av reelle mengder og funksjoner, som la grunnlaget for å kunne gi en innføring i ikke-standard analyse. I Kapittel 7 og Kapittel 8 fikk vi endelig gitt en presentasjon av ikke-standard analyse, med spesiell vekt på de grunnleggende begrepene for kalkulus i videregående skole og på begynnende universitetsnivå; grenseverdi, konvergens, kontinuitet, derivasjon og integrasjon .

Denne oppgavens hovedmål har vært å kunne drøfte ikke-standard analyse som et alternativ til tradisjonell kalkulus-undervisning på videregående skole og begynnende universitetsnivå. Dermed forsøkte vi i Kapittel 7 og Kapittel 8 å gjennomgående fremstille ikke-standard analyse som et alternativ til klassisk analyse, ved å sammenlikne de ikke-standard definisjonene med de klassiske. Samtidig har vi forsøkt å bygge opp en intuitiv forståelse for innholdet i definisjonene, som grunnlag for å diskutere en infinitesimal-tilnærming mot en grense-tilnærming.

For leseren kan det hende at denne innføringen virker i overkant grundig og tidkrevende, og dermed lite gjennomførbar ved både videregående skole og begynnende universitetsnivå. I undervisning på dette nivået, er begreper som kontinuitet og grenseverdier vanskelige nok å forklare for elever eller studenter, om man ikke i tillegg skal trenge å introdusere begrepet om algebraiske strukturer eller ekvivalensrelasjoner. Dette reiser kanskje spørsmålet om hvordan man kan presentere de ikke-standard definisjonene i undervisning, uten først å introdusere alle egenskaper knyttet til den hyperreelle tallinja. Det viser seg at det ikke er nødvendig å presentere ultrakonstruksjonen, for å kunne introdusere hyperreelle tall og benytte en infinitesimal-tilnærming.

Vi skal i dette kapittelet se på eksisterende lærebøker og undervisningsopplegg i ikke-standard analyse på begynnende universitetsnivå, og spesielt rette oppmerksomheten mot hvordan disse løser den overnevnte utfordringen.

9.1 Lærebokanalyse

For å kunne drøfte både validiteten av en ikke-standard tilnærming i undervisning av analyse på lavere nivå, og vurdere om det kan fungere som et læringsfremmende alternativ til tradisjonell kalkulus undervisning, skal vi se på de forsøkene som allerede er gjort. I dette kapittelet har vi derfor valgt å se nærmere på to lærebøker i kalkulus på begynnende universitetsnivå, som baserer seg på en ikke-standard tilnærming.

Den ene er læreboken *Elementary Calculus: An infinitesimal approach* av H. J. Keisler [Kei13] og den andre er *Analysis with Ultrasmall Numbers* av K. Hrbacek m.fl [HLO10]. Som bakgrunnsmateriale for undervisere har Keisler også skrevet monografien *Foundations of Infinitesimal Calculus* [Kei76], og som et tillegg til læreboken *Analysis with Ultrasmall Numbers* [HLO10] har medforfatter O'Donovan skrevet en lærer-manual *Analysis using Ultrasmall Numbers* [ODo16]. Både [Kei76] og [ODo16] gir utdypende beskrivelser av prinsippene som legges til grunn for tilnærmingen i lærebøkene [Kei76] og [HLO10]. Vi har dermed opplevd det som relevant å inkludere disse i vår analyse av lærebøkene.

Som nevnt vil vi i all hovedsak ta for oss å undersøke og analysere hvordan hyperreelle tall og ikke-standard analyse introduseres i disse to lærebøkene. Spesielt skal vi se at det ikke blir gitt en konstruksjon av hyperreelle tall. Som første del av analysen skal vi se på hvordan [Kei13] og [HLO10] introduserer infinitesimaler. Deretter skal vi se hvordan førstnevnte introduserer den hyperreelle tallinja, mens sistnevnte unngår å introdusere hyperreelle tall eksplisitt ved prinsippet om observerbarhet. Videre vil vi forsøke å analysere prinsippene som legges til grunn for lærebøkenes respektive tilnærminger til ikke-standard analyse, og hvordan disse prinsippene gjenspeiles i innføringen gitt i denne oppgaven. Vi skal også se på hvordan de ulike kategoriene av størrelser på den hyperreelle tallinja defineres i lærebøkene.

Introduksjon til hyperrelle tall

Læreboken *Elementary Calculus: An infinitesimal approach* [Kei76] innleder med å presentere den reelle tallinja, og forklarer hvordan strukturen til de reelle tallene gradvis blir konstruert gjennom skolematematikken. I læreboken nevnes det at de tar for gitt at studentene er kjent med det reelle tallsystemet, og minner kun om reglene at divisjon med null er ulovlig og at kvadratroten av et negativt tall er udefinert for reelle tall. Videre introduseres intervaller, og noen kjente delmengder av de reelle tallene slik som $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{N}$. Deretter introdusereres punkter i planet, som gir en naturlig overgang til reelle funksjoner og deres tilhørende funksjonskurver.

Læreboken *Analysis with Ultrasmall numbers* [HLO10] innleder kort med et historisk tilbakeblikk på hvordan infinitesimalregningen ble oppdaget på 1600-tallet. [HLO10] forklarer hvordan Newton og Leibniz, uavhengig av hverandre, introduserte kalkulus og utviklet en generell teori om endring, med bakgrunn i to ulike innfallsvinkler. De respektive introduksjonene i [Kei13] og [HLO10] leder i begge lærebøker frem til resonnementet som ligger til grunn for definisjonen av den deriverte; tilnærmingen til stigningstallet i et punkt.

Både [Kei13] og [HLO10] benytter seg av intuitive argumenter for løsningen på dette grunnleggende problemet i kalkulus. Ved å se på to eksempler; stigningstallet til en tangentlinje og hastigheten i et punkt på en funksjon for bevegelse, gir begge lærebøkene resonnementener som legger grunnlaget for å introdusere infinitesimale størrelser. Vi tar kun for oss å se nærmere på førstnevnte slik det presenteres i [Kei13], ettersom kjernen i begge eksempler er grunnleggende lik. [Kei13] forklarer hvordan det er mulig å gi en ikke-rigorøs argumentasjon for stigningstallet i et punkt, ved å se på gjennomsnittlig stigningstall til kurven $y = x^2$, fra et punkt (x_0, y_0) til et annet punkt $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Dette gjennomsnittlige stigningstallet er gitt ved kvotienten av endringen i x og tilhørende endring i y, $\Delta y/\Delta x$.

Dette resonnementet i [Kei13] leder frem til den intuitive argumentasjonen for at det er mulig å tilnærme seg stigningstallet i punktet (x_0, y_0), dersom man lar Δx bli veldig liten, men samtidig ulik fra 0. Argumentet bunner i at dersom Δx er liten, vil punktene (x_0, y_0) og $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ være svært nære hverandre. Videre, at funksjonen må være kontinuerlig slik at det gjennomsnittlige stigningstallet mellom disse punktene blir tilnærmet lik stigningstallet i punktet (x_0, y_0). Ved å utlede at det gjennomsnittlige stigningstallet mellom de to punktene på kurvern $y = x^2$, er gitt ved

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$$

Forklarer [Kei13] at stigningstallet i (x_0, y_0) vil være tilnærmet lik $2x_0$ siden Δx er uendelig liten, og dermed kan sløyfes.

En slik argumentasjonen som både [Kei13] og [HLO10] velger å innlede med, og en begge lærebøker påpeker som intuitiv og ikke-rigorøs, er lik den argumentasjonen som førte Leibniz til sin definisjon av den deriverte basert på infinitesimaler. Seksjon 1.2 i Kapittel 1 eksemplifiserte hvordan Leibniz viste den deriverte av en reell funksjon av én variabel. En definisjon som ble kritisert for selvmotsigelsen i at Δx var antatt til å være et uendelig lite tall, ulikt fra null, og dermed kunne en ikke se bort i fra Δx. På det andre siden, kunne heller ikke Δx være lik 0, ettersom dette ville ført til en ulovlig divisjon i kvotienten $\Delta y/\Delta x$. Dermed kan vi spørre oss selv hvordan to moderne lærebøker i kalkulus, velger å blåse liv i en definisjon som i mange hundre år ble bannlyst fra analysen?

[Kei76] forklarer at det egentlige problemet ved denne intuitive argumentasjonen, er at det ikke kommer klart frem i definisjonen når en størrelse kan sløyfes og ikke. Med denne problematiseringen som utgangspunkt påpeker Keisler [Kei13] at '*What is needed is a sharp distinction between numbers which are small enough to be neglected and numbers which aren't.*' [Kei13, p. 24]. Nødvendigheten av et slik 'klart skille', legger grunnlaget for å introdusere infinitesimaler størrelser i [Kei13]. Det forklares ved at ingen reelle tall, bortsett fra 0, er små nok til at de kan sløyfes, og at det dermed er nødvendig å introdusere en ny type tall; infinitesimaler. Eller *ultra små tall* som de kalles i [HLO10].

I *Analysis using Ultrasmall Numbers* introduseres aldri infinitesimaler eksplisitt, og heller ikke den hyperreelle tallinja slik som i [Kei13]. [HLO10] benytter i stedet et prinsipp om observerbarhet. For å forklare intuisjonen i prinsippet bruker [ODo16] en metafor på den matematisk strukturen. [ODo16] forklarer hvordan visse objekter kan observeres med det blotte øyet, andre krever mikroskop eller teleskop for å kunne observeres. Samtidig finnes det objekter som er enda mindre eller enda lengre borte, som krever elektroniske mikroskop eller radio teleskop for å kunne observeres. Med denne metaforen bes leseren forestille seg at '*in the mathematical structure there is no end to this process.*' [ODo16, p. 5]. Dette prinsippet leder frem til et prinsipp om eksistensen av ultra små tall, der slike ultra små tall eksisterer mellom alle de observerbare reelle tall. [HLO10].

Vi ser dermed at lærebøkene, tiltross for å innelde med de samme intuitive resonnementene for definisjonen av den deriverte, tar to ulike retninger i presentasjonen av sine tilnærminger til ikke-standard analyse. Keisler [Kei13] går fra å introdusere infinitesimaler til presentere hyperreelle tall, og videre de egenskapene ved denne tallmengden som er nødvendig for kurset. Videre gir Keisler [Kei13] tre prinsipper for ikke-standard analyse; prinsippet om utvidelse, overføringsprinsippet og prinsippet om standarddel. Hrbacek [HLO10] på den andre siden innleder med prinsippet om observerbarhet som vi forklarte i forrige avsnitt, og presenterer deretter fem andre prinsipper som legges til grunn for å utlede eksistensen og egenskapene til det som tilsvarer den hyperreelle tallinja. Vi skal likevel se at prinsippene har det samme matematiske innholdet, men skiller seg i karakter ved at de representerer det vi kan kalle for to ulike matematiske dialekter.

Hyperreelle tall og prinsipper for ikke-standard analyse

Slik vi i denne oppgaven først presenterte og definerte infinitesimalene, blir også infinitesimalene først presentert i [Kei13]. Infinitesimalene blir definert som et positivt tall ε, ulikt fra 0, men mindre enn alle positive reelle tall. Deretter blir de hyperreelle tallene presentert som et nytt tallsystem, der infinitesimalene har en plass, sammen med de reelle tallene. Det forklares også at de hyperreelle tallene kan konstrueres fra de reelle tallene, på samme måte som de reelle tallene kan konstrueres fra de rasjonale tallene. Boken gir ingen formell konstruksjon innledningsvis, men henviser til at konstruksjonen finnes i epilogen. Keislers [Kei13] presentasjon av den hyperreelle tallinja er grunnleggende lik denne oppgavens presentasjon i Kapittel 4. Kanskje ikke uventet da både Figure 5.1 og Figure 5.2 er hentet fra denne læreboken. I visualiseringen av tallinja introduseres de infinitesimale mikroskopene og uendelige teleskopene, og hvordan den hyperreelle tallinja kan modelleres fra den reelle tallinja ved hjelp av disse.

Vi valgte i denne oppgaven å førsøke å gi en grundig beskrivelse av strukturen til de hyperreelle tallene. I [Kei76] velger forfatteren å kun presentere de egenskapene som er nødvendig på dette nivået i kalkulus. Listen nedenfor er en kort og punktvis oppsummering av de egenskapene som presenteres i [Kei13]:

1. De hyperreelle tallene er gitt ved notasjon $\mathbb{R}^*$.
2. Alle reelle tall er elementer i $\mathbb{R}^*$, men $\mathbb{R}^*$ har også andre elementer utover de reelle tallene.
3. Det finnes tre typer infinitesimaler i $\mathbb{R}$; positive, negative og det reelle tallet 0.
4. Dersom a og b er hyperrelle tall, og $a - b$ er et infinitesimal, så sier vi at 'a er uendelig nærme b'.
5. Hvis ε er et positivt infinitesimal, er $-\varepsilon$ et negativt infinitesimal.
6. Hvis ε er et infinitesimal så er $\frac{1}{\varepsilon}$ uendelig positivt tall, altså større enn alle reelle tall. På den andre siden, er da $-\frac{1}{\varepsilon}$ et uendelig negativt tall, et tall mindre enn alle reelle tall.
7. Hyperreelle tall som ikke er uendelige eller infinitesimaler, kalles endelige tall.
8. De reelle tallene er spredt utover de endelige tallene.
9. Omkring hvert reelle tall finner vi en samling av hyperreelle tall uendelig nærme.
10. Omkring 0 finner vi samlingen av alle infinitesimaler.

Fra de overnevnte egenskapene til hyperreelle tall presenterer Keisler [Kei13] tre prinsipper for lærebokens infinitesimal-tilnærming til kalkulus; prinsippet om utvidelse, overføringsprinsippet og prinsippet om standarddel.

Prinsippet om utvidelse blir gitt ved tre punktene:

a. $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$, og ordningsrelasjonen $<$ for reelle tall er en delmengde av ordningsrelasjonen for de hyperreelle tallene

b. Det eksisterer et hyperreelt tall som er større enn null og samtidig er mindre enn alle positive reelle tall

c. Enhver reell funksjon f av én eller flere variable, er gitt en korresponderende hyperreell funksjon f^* av det samme antallet variable. Der f^* er den naturlige utvidelsen av f

Utvidelsesprinsippet gir ved punkt a. at de reelle tallene er en delmengde av de hyperreelle tallene. Innholdet i dette prinsippet, tilsvarer slik vi denne oppgaven lagde en kopi av de reelle tallene i Kapittel 4, viste at ethvert element i kopien svarte til nøyaktig et reelt tall. Vi forklarte at vi tenker oss at $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$, til tross for at det var kopien denne relasjonen gjaldt for, ettersom det å skille kopien og selve $\mathbb{R}$ gav lite avkastning. Punkt a. gir også at ordningsrelasjonen fra $\mathbb{R}$ kan utvides til å gjelde for de hyperreelle tallene, slik vi i denne oppgaven ga Definisjon 3.4.1 av ordningsrelasjonen i $\mathbb{R}^*$. Ettersom [Kei13] ikke gir ultrakontruksjonen av de hyperreelle tallene, er det heller nødvendig i denne læreboken å skille mellom reelle tall r og den hyperreelle kopien $\langle r, r, r, ...\rangle$. Av samme grunn trenger ikke læreboken å definere ordningsrelasjonen basert på tynne og fete delmengder av $\mathbb{N}$. Samtidig sikrer antakelsen av overføringsprinsippet at disse relasjonene holder i Keislers [Kei13] aksiomatiske presentasjon.

I neste punkt av i overføringsprinsippet, punkt b., blir eksistensen av minst et infinitesimal antatt, som sikrer at det finnes hyperreelle tall som ikke er reelle tall. Som videre konsekvens er $\mathbb{R}^* \neq \mathbb{R}$, og dermed finnes en utvidet tallmengde som inneholder de reelle tallene. Det siste punktet c. gir muligheten til å anvende reelle funksjoner på hyperreelle tall, og antar eksistensen av utvidelser av reelle funksjoner slik vi definerte de i Definisjon 6.4.1.

Det neste prinsippet er overføringsprinsippet som sier at; enhver regneoperasjon eller sammenheng som holder for én eller flere bestemte reelle funksjoner, holder for de hyperreelle naturlige utvidelsene av disse funksjonene. Prinsippet gir dermed at enhver reell funksjon og dens tilhørende naturlige utvidelse gir samme verdi for de reelle tallene. Dette prinsippet tilsvarer de egenskapene ved funksjonsutvidelsen som vi presenterte i Kapittel 6 om utvidelser, og slik vi viste at $f^*(x) = f(x)$ dersom $x \in \mathbb{R}$.

Standarddel-prinsippet er kort og greit at ethvert endelig hyperreelt tall er uendelig nærme nøyaktig et reelt tall. Innholdet i dette prinsippet gir at dersom standarddelen til et hyperreelt tall x er det reelle tallet r, så er r unik. Dette prinsippet gir dermed tilsvarende sammenheng for standarddelen til et hyperreelt tall som vi ga i Lemma 5.1.2, og at funksjonen $st(x)$ er injektiv.

Observerbarhet og Ultrakalkulus

I [HLO10] legges seks prinsipper til grunn for analyse med ultra små tall. Disse seks prinsippenes forklares grundig i lærermanualen [ODo16]. Der prinsippet om observerbarhet, som vi forklarte intuisjonen i innledningsvis, er kjernen i ikke-standard tilnærmingen i [HLO10]. Det forklares hvordan de reelle tallene er de vi kan observere ved hjelp av modellering; den reelle tallinja, og at omkring disse *observerbare* størrelsene finner man ultra små tall. Disse ultra små tallene kan ikke observeres på den reelle tallinja, men det er ikke dermed sagt at de ikke *kan* observeres. Prinsippet bunner i at dersom man zoomer inn på et observerbart reelt tall, for å observere de ultra små størrelsene, kan man fremdeles se de tidligere observerbare tallene.

Denne intuitive ideen om observerbarhet leder til en formell definisjon av *prinsippet om observerbarhet* ved tre punkter i [HLO10]:

a. Et tall er observerbart relativt til kontekst hvis det er observerbart relativt til minst en parameter i konteksten.

b. Ethvert tall er observerbart relativt til en eller annen kontekst.

c. To distinkte tall vil alltid ha en felles kontekst. Hvis et tall ikke er observerbart relativt til det andre, så er det andre observerbart relativt til det første.

Dette prinsippet postulerer i punkt a. og b. eksistensen av den hyperreelle tallinja, og forklarer tilsvarende sammenhenger som de infinitesimale mikroskopene og uendelig teleskopene fra Kapittel 5 i denne oppgaven. Prinsippet sier i bunn og grunn hvordan vi kan bruke et mikroskop på et reelt tall r, og finne en galakse av endelige hyperreelle tall uendelig nær r, samtidig som vi fortsatt vil kunne observere r. Antakelsen i punkt c. gir muligheten for å kunne skille reelle tall og hyperreelle tallene, som ikke samtidig er reelle, fra hverandre. Med andre ord kan ikke et ultra lite tall observeres på den reelle tallinja, men de reelle tallene vil alltid være observerbare på den hyperreelle tallinja. Dermed gir dette prinsippet at et hvert tall i prinsippet kan være observerbart, men om man kan kalle et tall observerbart i en gitt situasjon kommer an på om konteksten. Der konteksten eksempelvis kan være den reelle eller hyperreelle tallinja.

Det neste prinsippet er prinsippet om lukkethet som sier at alle tall som er definert uten referanse til observerbarhet, alltid er observerbare. Videre, at dersom et tall tilfredsstiller en gitt egenskap så finnes et observerbart tall som tilfredsstiller den samme egenskapen. Dette prinsippet gir at alle kjente reelle tall er observerbare, og videre at dersom vi regner med to observerbare tall vil resultatet av regneoperasjonen også være et observerbart tall. Dette prinsippet gir samme resultat som da vi i denne oppgaven ga de hyperreelle den algebraiske strukturen *en ordnet kropp* i Kapittel 3.

Deretter gir [HLO10] en definisjon av ultra små tall, akkurat slik infinitesimalene er definert både i denne oppgaven og i [Kei13]. Med denne definisjonen som utgangspunkt gis prinsippet om ultra små størrelser. Dette prinsippet sier at uansett hvilket tall x vi ser på, eksisterer det ultra små reelle tall relative til x. Det gir at hvis et tall ε er ultra lite relativt til en kontekst, der denne konteksten inneholder et annet tall r, så er verken ε eller $r + \varepsilon$ observerbare. Dette er tilsvarende sammenheng som vi gav i Definisjon 4.2.1 av endelige, uendelige og infinitesimale hyperreelle tall.

På bakgrunn av disse tre overnevnte prinsippene er det ikke nødvendig for [HLO10] å eksplisitt introdusere hyperreelle tall som et nytt tallsystem. De introduserer istedenfor *ultra små* og *ultra store* reelle tall, tilsvarende infinitesimaler og uendelige tall. Det vi har definert som endelige hyperreelle tall i denne oppgaven, blir i [HLO10] beskrevet som de ikke-observerbare størrelsene omkring de observerbare reelle tallene. Videre definerer de begrepet *ultra nære*, ved at to tall x og y er ultra nære dersom $x - y$ enten er et ultra lite tall eller $x = y$, og at man dermed kan skrive $x \approx y$. Ettersom [HLO10] ikke introduserer hyperreelle tall må $x = y$ bli med i denne definisjonen av *ultra nærme* siden 0 er et observerbart tall. Denne definisjonen tilsvarer denne oppgavens definisjon av uendelig nære, der differansen $x - y$ er et infinitesimal. Vi behøvde ikke å ta med $x = y$ i definisjonen, ettersom 0 er definert som et infinitesimal.

Det neste prinsippet [HLO10] bygger sin tilnærming til analyse på er prinsippet om stabilitet. Dette prinsippet sier at en egenskap er veldefinert hvis og bare hvis den er veldefinert når en kontekst blir erstattet med en utvidet kontekst. Dette er i bunn og grunn utvidelsesprinsippet gitt i [Kei13] og det prinsippet vi har lagt til grunn for denne oppgaven; å konstruere $\mathbb{R}^*$ som en utvidelse av $\mathbb{R}$. Det siste prinsippet som blir gitt i [HLO10] er prinsippet om observerbare omegn. Et observerbart omegn kaller [HLO10] for et nabolag, og skriver at x og y er *naboer* hvis $x \approx y$. Begrepet om *nabolag* i [HLO10] tilsvarer det vi definerte som monaden til et hyperreelt tall, mengden $\mu(x)$, i Definisjon 5.1.1. Prinsippet sier videre at, relativt til kontekst, vil det for ethvert reelt tall x som ikke er ultrastort være et observerbart tall r slik at $x \approx r$, som er slik vi definerte standarddelen til et hyperreelt tall i Definisjon 5.1.1. Av prinsippet om observerbare omegn følger det også at et tall x, som ikke er ultra stort, kan skrives som $x = r + \varepsilon$, der $\varepsilon \approx 0$ og r er et observerbart tall. Dette resultatet er tilsvarende det vi gav i Setning 4.4.2. Der vi viste at ethvert endelig hyperreelt tall er på formen $x = r + \varepsilon$, for et reelt tall r og et infinitesimal ε.

For å oppsummere har vi nå har sett at lærebøkene [Kei13] og [HLO10] har to ulike innfallsvinkler i sin anvendelse av ikke-standard analyse på et lavere universitetsnivå. Der førstnevnte introduserer den hyperreelle tallinja, velger sistnevnte å benytte seg av prinsippet om observerbarhet for å kunne snakke om flere størrelser enn de vi kan observere på den reelle tallinja. Likvel har vi sett at teorien som presenteres og innholdet i prinsippene i begge lærebøkene, tilsvarer konstruksjonen og egenskapene til de hyperreelle tallene som vi har gitt i denne oppgaven. Samtidig har vi sett at begge lærebøkene på hver sin måte, klarer å presentere hyperreelle tall uten å gjennomgå ultrakonstruksjonen. Dermed viser analysen av disse lærebøkene at det er mulig å benytte seg av en ikke-standard tilnærming på et lavere universitetsnivå, uten å måtte gi en grundig innføring i verken konstruksjonen av den hyperreelle tall eller den algebraiske strukturen til denne tallmengden. Dette kan kanskje bidra til at en ikke-standard tilnærming til analyse virker mindre avskrekkende for undervisere. Samtidig er det naturlig å reise spørsmålet om de mer undrende studentene vil kunne komme bort i grunnlagsproblemer uten denne innføringen. Dette er en av spørsmålene vi skal drøfte i neste kapittel.

Vi ønsker avslutningsvis i dette kapitelet å kort begrunne hvorfor vi kun har tatt for oss å analysere lærebøker for begynnende universitetsnivå, når denne oppgavens problemstilling er å drøfte ikke-standard analyse som et alternativ også på videregående nivå. Grunnen er at vi opplever, etter å ha sett på lærebøker for matematikk videregående skole slik som [Old+18] og [Old+15], at heller ikke klassisk analyse blir benyttet i særlig grad på dette nivået. Det oppleves å være et større fokus på innlæring av metoder enn å utvikle forståelse for de grunnleggende begrepene matematikk. Dermed har vi valgt å drøfte en ikke-standard tilnærming på dette nivået i neste kapittel, men vil samtidig heller forsøke å argumentere for at både lærebøker og undervisningen på dette nivået bør fokusere mer på analyse generelt.

KAPITTEL 10

Didaktisk drøfting

Hovedmålet i denne oppgaven har vært å gi en innføring i ikke-standard analyse som er tilstrekkelig for å følge de didaktiske drøftingene. Vi håper at dette målet er oppnådd når vi nå skal gå i gang med å drøfte ikke-standard analyse som et alternativ til tradisjonell kalkulus undervisning, på bakgrunn av den tilnærmingen vi har presentert så langt i denne oppgaven. Vi har hatt hovedvekt på å gi ikke-standard karakteriseringer av de begreper og resultater som er sentrale for videregående- og begynnende universitetsnivå. Det er disse ikke-standard karakteriseringene, og slik vi gjennomgående har sammenliknet de med de klassiske definisjonene, som er grunnlaget for den tilnærmingen vi skal drøfte.

Vi vil i dette kapittelet vende oss mot fagdidaktisk og pedagogisk teori for å forsøke å gi didaktiske implikasjoner for og i mot en ikke-standard tilnærming til matematisk analyse. Vi har sett at de hyperreelle tallene nå kan danne et rigorøst grunnlag, og kritikken rettet mot at infinitesimalene er bedre egnet for intuisjon, enn som et rigid grunnlag for kalkulus [Lin96], er ikke lenger et argument. På den andre siden er spørsmålet, om ikke-standard analyse kan være læringsfremmende som et alternativ til klassisk analyse, fremdeles høyaktuelt. Det er dette spørsmålet vi skal forsøke å finne implikasjoner på i dette kapittelet.

10.1 Didaktiske implikasjoner for en ikke-standard tilnærming

Det kanskje mest åpenbare argumentet for en ikke-standard tilnærming til analyse er *intuisjon*. Det var også infinitesimalenes intuitive format som appellerte til Leibniz og Newton da de introduserte infinitesimalregningen på 1600-tallet. Der klassisk analyse benytter (ε, δ)-definisjonen av grenseverdi for ideen om å nærme seg en uendelig liten størrelse, gir ikke-standard analyse et tall på denne uendelig lille størrelsen. Det er dette poenget vi gjennomgående har forsøkt å trekke frem, benytte og forklare i sammenheng med de ikke-standard karakteriseringene av konvergens, grenseverdi, kontinuitet, derivasjon og integrasjon i denne oppgaven. Et viktig og gjennomgående element i både Kapittel 7 og Kapittel 8 har vært å forklare hvordan og hvorfor vi kan erstatte grense-tilnærmingen med infinitesimal-tilnærmingen.

Sullivan [Sul76] er en av de som trekker frem nettopp ikke-standard analyses mer intuitive tilnærming. I artikkelen *The teaching of elementary calculus using the nonstandard analysis approach* argumenterer Sullivan [Sul76] for ikke-standard analyses intuitive appell, og eksemplifisererer dette med definisjonen av kontinuitet. Det at en funksjon f er kontinuerlig i et punkt s betyr at en x uendelig nærme s impliserer at funksjonsverdiene $f(x)$ og $f(s)$ også er uendelig nærme hverandre. Vi har også i denne oppgaven sett at en ikke-standard definisjonen av kontinuitet er svært anvendelig for å vise kontinuitet av sammensatte funksjoner ved Theorem 7.3.4, eller at summen og produktet av to kontinuerlige funksjoner også er en kontinuerlig funksjon ved Lemma 7.3.5. Vi kan videre trekke frem ikke-standard definisjonen av konvergens, der en reell tallfølge $\{x_n\}$ konvergerer mot et reelt tall r dersom $x_N^* \approx r$ for et uendelig stort tall N. Denne definisjonen er tett opp mot slik vi oppfatter konvergens intuitivt, nemlig at dersom en følge skal gå mot et tall må jo i det minste et ledd uendelig langt ut i følgen være nesten lik dette tallet. Det samme med gjelder for definisjonen av grenseverdi. Dersom $\lim_{x\to s} f(x) = r$ så må funksjonsverdien $f(x)$ være uendelig nære r for alle x uendelig nære s.

Som tilleggsmateriale til boken *Analysis using ultrasmall numbers* [HLO10] skrev medforfatter O'Donavan en manual for lærere [ODo16]. I denne manualen fremkommer et av de argumentene for ikke-standard analyse som vi gjennomgående har forsøkt å få frem i denne oppgaven; utfordringene knyttet til forståelse for ε-δ-definisjonen. I manualen viser O'Donavan til notasjonen for grenseverdi

$$\lim_{x\to s} f(x) = r$$

og at dette vil leses som '$f(x)$ går mot r når x går mot s'. Forfatteren påpeker at dersom en leser 'x går mot s' separert fra kontekst, så er det naturlig å reise spørsmålet om hva denne setningen egentlig betyr? Ettersom x ikke bare kan gå mot s av seg selv, blir setningen meningsløs uten kontekst. Det samme gjelder for '$f(x)$ går mot r'. O'Donovan kommenterer at '*The concept must be grasped in its entirety or not understood at all.*' [ODo16, p. 4]. Han fortsetter med å legge til at i analyse på lavere universitetsnivå, hjelper det i hvert fall ikke å gi et fullstendig bevis ved ε-δ definisjonen. Utfordringene knyttet til å skape forståelse for ε, δ-språket, fører ofte til at undervisere benytter seg av uformelle begrep som 'vilkårlig nære' og 'nærmer seg' om grensebegrepet. Dette er fraser vi kan innrømme å ikke ha klart helt å styre unna i denne oppgaven heller. O'Donovan sier at bruken av disse uformelle begrepene i undervisningen i analyse resulterer i at '*Mathematical rigour is then lost.*' [ODo16, p. 4].

Et annet poeng i O'Donovans (2016) lærer-manual er utfordringene knyttet til å undervise i derivasjon og integrasjon, og trekker frem to eksempler. Det første er at ved å definere den deriverte som stigningstallet til tangentkurven, blir utfordringen å definere tangenten før den deriverte. Det er også slik læreboken *Sinus R2* [Old+15] introduserer derivasjon ved å si at '*$f'(x)$ gir... stigningstallet for tangenten til grafen i punktet*' [Old+15, p. 10]. Det andre eksempelet er knyttet til definisjonen av Riemann-integralet. O'Donovan kommenterer at når man lar summen av smale rektangler være en tilnærming til arealet under en kurve, og videre definerer integralet som grenseverdien til denne summen når bredden på rektanglene går mot null. Dette impliserer jo egentlig en sum av rektangler med areal lik 0, der all fornuft tilsier at en sum $0+0+0+, ...$ må være lik 0. Slik som O'Donovan (2016) poengterer er disse problemene velkjente blant de som underviser i analyse. Dermed har vi i denne oppgaven gjennomgående forsøkt å forklare de bakenforeliggende problemene, og løsningene på disse, som har ledet frem til de definisjonene og resultatene vi har presentert i Kapittel 7 og Kapittel 8.

Den ikke-standard formuleringen av integralet i Definisjon 8.2.1 løser nettopp det problemet O'Donovan (2016) trekker frem; integralet som summen av rektangler med areal lik 0. Den ikke-standard formuleringen gir en uendelig oppdeling av intervallet, fremfor å definere integralet som grenseverdien når bredden på rektanglene $\Delta x \to 0$. Det er likevel verdt å nevne at *hyperendelige mengder* ikke nødvendigvis er enkelt å forstå, men det er likevel ikke presserende at verken elever i videregående skole eller studenter på begynnende universitetsnivå skal bevise definisjonen av integralet. Målet er heller at de skal forstå innholdet i definisjonen og anvende den. Slik vi forklarte at integralet omhandler å *integrere* mindre enheter til en større enhet, kan vi med et ikke-standard språk si at integralet er summen av infinitesimale arealer til et større totalt areal. På den andre siden, løser læreboken *Sinus R2* dette problemet ved å definere det bestemte integralet som

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Her er S_n definert som det totale arealet av de n rektanglene som tilnærmer arealet under kurven. En tilnærming som minner mer om den ikke-standard karakteriseringen av integralet enn den klassiske formuleringen av Riemann-integralet som vi presenterte i Seksjon 8.2.

Et annet eksempel på en ikke-standard definisjon som appellerer til intuisjonen er den deriverte av en funksjon i et punkt. Problemet [ODo16] trekker frem med å definere stigningstallet til tangenten før den deriverte, kan kanskje løses dersom det blir enklere å gi et intuitivt resonnement for definisjonen. Den deriverte av en funksjon i et bestemt punkt angir stigningstallet til tangenten til funksjonskurven i et dette punktet. For å vise et ikke-standard resonnement for intuisjon, kan vi begynne med å se på en parallell til fysikken. Slik vi kjenner hastighet av rettlinjet bevegelse fra fysikken, er dette definert som en strekning delt på tiden det tar å bevege seg over denne strekningen. Vi ser på formelen

$$v = \frac{s}{t}$$

der s angir strekning, t tiden og v hastigheten. Tangenten til en funksjonskurve er en rett linje som tangerer funksjonskurven i et bestemt punkt. Denne rette linjen vil altså aldri skjære funksjonskurven, men kun berøre kurven i nøyaktig et punkt. Dersom vi skal finne stigningstallet til en slik tangent bør vi klare å tilnærme oss rettlinjet bevegelse, der hastighet tilsvarer stigningstallet. Slik vi trakk en parallell mellom en funksjon for bevegelse og derivasjon i innledningen til Kapittel 8, kan vi la f være en funksjon for bevegelse definert på et tidsintervall $[r, s]$. Da får vi gjennomsnittshastigheten ved å finne den rettlinjede strekningen $f(s) - f(r)$ og dele på tiden $r - s$. Målet med den deriverte er å finne denne hastigheten på et uendelig lite tidsintervall, tilnærmet et punkt. Den deriverte av funksjonen f i et punkt r vil dermed være tilnærmet lik

$$f'(r) \approx \frac{f(r+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

for et infinitesimalt tidsintervall ε. Den deriverte av f som funksjon for bevegelse vil dermed gi en tilnærming til hastigheten i punktet r. Eller som det egentlig gir; stigningstallet til tangenten i punktet r.

Til tross for de overnevnte argumentene for ikke-standard analyses intuitive appell og didaktiske implikasjoner for en infinitesimal-tilnærming, reiser en ikke-standard tilnærming til analyse, flere spørsmål fra et didaktisk perspektiv. For det første blir spørmålet om studenter eller elever vil oppleve at begrepet om en uendelig liten størrelse er mer begripelig og håndfast enn begrepet om en grense. Når denne uendelig lille størrelsen i tillegg befinner seg på en hyperreell tallinje, som skiller seg fra den tallinja de er vant med fra skolematematikken. Kanskje blir prisen å betale for at lærende blir presentert med enklere, intuitive definisjoner at det det oppstår det Piaget [Wad96] kaller kognitive konflikter i eksisterende skjema. Når hyperreelle tall introduseres utfordres elever og studenters kunnskap om reelle tall. Slik det blir forklart at de reelle tallene fyller ut tallinja, kan det være utfordrende å forklare at det samtidig finnes mindre tall enn reelle tall. Fra en undervisers perspektiv blir spørsmålet hvor dypgående det er nødvendig at kunnskapen om ikke-standard analyse er, slik vi har sett at bakgrunnen for ikke-standard analyse rommer en hel del nye begreper dersom man kommer fra en klassisk matematikkbakgrunn. Til syvende og sist koker det ned til spørsmålet om ikke-standard analyse i samspillet mellom underviser og lærende vil fremme forståelse og læring.

Sullivan [Sul76] argumentasjon for ikke-standard analyse i artikkelen *The Teaching of Elementary Calulus Using a Nonstandard Approach* omtaler resultatene av et forskningsprosjekt i undervisning av ikke-standard analyse. Forskningsprosjektet gikk ut på å sammenlikne studententers forståelse av grunnleggende begreper med en ikke-standard tilnærming, med forståelsen til studenter som ble undervist i kalkulus på tradisjonelt vis på begynnende universitetsnivå. Samtidig tok prosjektet for seg å sammenlikne foreleserene opplevelse av å undervise med en ikke-standard tilnærming versus en klassisk tilnærming, og hvilken som virket å være fordelaktig. For den eksperimentelle gruppen med ikke-standard tilnærming ble kurset undervist med bakgrunn i læreboken av *Elementary Calculus: An infinitesimal approach* av Keisler [Kei13]. Resultatene av forskningsprosjektet i [Sul76] gir tydelige implikasjoner fra både foreleserne og på testresultatene til studentene, at den ikke-standard tilnærmingen hadde gitt studentene en dypere forståelse for de grunnleggende begrepene som analysen bygger på. Videre viste resultatene at bevisføringen av sentrale resultater i analysen ble enklere, ved at flere studenter ga tilfredstillende bevis ved en ikke-standard resonnering. Et klart flertall av foreleserene som var involvert i prosjektet, svarte også at en ikke-standard tilnærming gjorde at bevisene var enklere å forklare, og tettere knyttet til intuisjonen [Sul76, p. 374].

Som nevnt, er argumentet for at en infinitesimal-tilnærming appellerer til intuisjonen, både det mest åpenbare og et argument vi har sett at flere matematikere kan stille seg bak. Ikke uventet, da infinitesimal-tilnærmingen og tanken om uendelig små endringer også var det som førte Leibniz og Newton mot å oppdaget sammenhengen i infinitesimalregningen på 1600-tallet, og infinitesimalene ble en hjørnesten i det som la grunnlaget for matematisk analyse. Samtidig ble infinitesimal-tilnærmingen kritisert for å være bedre egnet for intuisjon enn et rigorøst grunnlag for analysen. Det var heller ingen som på denne tiden kunne forklare hva infinitesimaler egentlig var, og det var heller ikke et matematisk grunnlag for å kunne entydig definere de som størrelser. Dermed inneholdt Leibniz og Newtons teori basert på infinitesimaler subtile selvmotsigelser.

Det rigorøse grunnlaget for ikke-standard analyse ble først gitt av Robinson i 1960, med konstruksjonen av den hyperreelle tallinja. En konstruksjon som inneholder matematikk som ikke var blitt utviklet på 1600-tallet. I dag blir heller ikke denne matematikken introdusert før på et høyere universitetsnivå. Spørsmålene blir hvorvidt det er nødvendig med en gjennomgang av konstruksjonen av hyperreelle tall i sin helhet. En konstruksjon som kan inkludere beviset for eksistensen av en klassifisering av de naturlige tallene, i fete og tynne delmengder, et bevis vi bevisst unnlot å ta med i denne oppgaven, på bakgrunn av matematikkens nivå. Videre, om det er nødvendig å presentere den algebraiske stustrukturen til mengden av hyperreelle tall, som krever forståelser for begreper som ikke presenteres på et elementært nivå. Det alt koker ned til, er om det har negative konsekvenser for forståelsen av ikke-standard analysens kjerneelementer, å unnlate den bakenforeliggende teorien for hyperreelle tall.

10.2 Grunnlagsproblemer

Vi har nå sett at de ikke-standard definisjonene virker nærmere knyttet til intuisjonen. Samtidig har vi sett at en infinitesimal-tilnærming åpenbart en langt mer dyptgående teori enn det som fremkommer i disse definisjonene, og reiste spørsmålet om hvilke konsekvenser det kan ha dersom vi unnlater å gjennomgå denne teorien. I arbeidet med denne oppgaven har vi jo sett at det krever en hel del forarbeid for å faktisk kunne gi ikke-standard karakteriseringene av grenseverdi, konvergens, kontinuitet, derivasjon og integrasjon, og deretter betrakte de som definisjoner. I 9 analyserte vi også to lærebøker som baserer seg på en ikke-standard tilnærming til elementær kalkulus, og vi skal benytte oss av erfaringene fra denne analysen. Spørsmålet blir hvilke utfordringer som kan oppstå ved å benytte en ikke-standard tilnærming i undervisning på et lavere nivå, når den bakenforliggende teorien vil ligge på et langt høyere nivå. Videre blir spørsmålet hvordan man kan løse undervisningssituasjoner med ikke-standard tilnærming på et lavere nivå, i møte med grunnlagsproblemer som rører ved matematikk på et langt høyere nivå.

En utfordring ved en ikke-standard tilnærming kan som nevnt være at de resonnerende og høytpresterende elevene vil støte på grunnlagsproblemer. Problemer som krever presentasjon av egenskaper ved hyperreelle tall, slik vi har presentert i Kapittel 2 om konstruksjonen av den hyperreelle tallinja, Kapittel 3 om den algebraiske strukturen til $\mathbb{R}$ og Kapittel 6 om ikke-standard utvidelser av reelle mengder og funksjoner. I analysen lærebøkene [HLO10] og [Kei13] som benytter en ikke ikke-standard tilnærming i Kapittel 9, så vi at disse overnevnte kapitlene ikke var nødvendig for å kunne undervise analyse med en ikke-standard tilnærming. [Kei13] benytter en aksiomatisk-tilnærming og [HLO10] baserer seg på et prinsipielt grunnlag. Det dermed ikke sagt at studenter med ferdigheter på et høyere kognitivt nivå kan komme over grunnlagsproblemer, som blir vanskelig for en underviser å rette opp i uten å samtidig måtte presentere resultatene vi gav i disse kapitlene. Slik Tall kommenterer [Tal81] er '*The rigorous concepts of modern infinitesimal calculus are hard because of the difficulty of setting up the ordered field structure of the hyperreal numbers.*', og tilnærmingen inneholder begreper som først introduseres i matematikkurs på et høyere nivå. Videre, vil kanskje heller ikke en innføring i begreper som *kropp*, *ordnet*, *ekvivalensklasser* eller logikk knyttet til mengder, nødvendigvis gi spørsmålene knyttet til grunnlagsproblemene et enklere svar. Likevel er disse begrepene de samme som ligger til grunn for de reelle tallenes struktur, men på den andre siden blir de reelle tallenes, med tilhørende struktur og egenskaper, sakte men sikkert bygd opp gjennom skolematematikken over mange år.

Vi kan også nevne at det ikke bare er en utfordring å skulle forklare konseptet bak hyperreelle tall, men at det også er tidkrevende og lar seg kanskje ikke gjøre i en travel undervisningshverdag. Til tross for tidsaspektet så finnes det løsninger. For undervisere som opplever at studenter kommer bort i disse problemene finnes det bakgrunnmateriale på høyere nivå som kan gi svar på spørsmålene, og som disse studentene kan henvises til. Et alternativ er boken *Mathematical Background: Foundations of Infinitesimal Calculus* [Str97], skrevet for studenter som ønsker å se nærmere på den dypere matematikken som ligger til grunn for kalkulus. Et annet alternativ for de studentene som befinner seg på et virkelig høyt nivå, er monografien til Keisler [Sul76]. En monografi vi allerede har nevnt i denne oppgaven, og vi har basert mye av teorien vi har presentert.

En siste utfordring knyttet til grunnlagsproblemer som vi kan se er at når en underviser i en ikke-standard tilnærming til analyse og introduserer hyperreelle tall, kan det samtidig oppstå en kognitiv konflikt knyttet til forståelse for det reelle tallsystemet. Tall [Tal81] kommenterer denne utfordringen og skriver at '*there is the problem that the more sophisticated is the learner, the more likely he is to have ideas in his cognitive structure which do not extend to the hyperreals.*'. Videre forklarer Tall [Tal81] at disse studententene kan ha møtt på slike konsepter som ikke er overførbare til de hyperreelle tallene, slik vi allerede har sett at Kompletthetsprinsippet er et eksempel på, og miste evnen til å skille mellom hvilke utsagn som henholdsvis er korrekte for de hyperreelle og reelle tallene respektivt. Tall [Tal81] skriver på bakgrunn av dette eksempelet at det ender med, for disse studentene, at '*...the hyperreals are less intuitive because it is not clear which ideas in their cognitive structure give correct intuitions.* [Tal81, p. 20].

10.3 Ulike tilnærminger til analyse

Vi har i denne oppgaven forsøkt å sammenlikne infinitesimal-tilnærmingen i ikke-standard analyse, opp mot grense-tilnærmingen ved (ε, δ)-definisjonen i klassisk analyse, med mål om å vurdere førstnevnte som en alternativ tilnærming i matematikkundervisning. Likevel, er disse to tilnærmingene langt i fra de eneste tilnærmingene som finnes, og Tall [Tal81] tar for seg å drøfte validiteten av seks ulike metoder for tilnærminger til kaluklus i sin artikkel *Comments on the Difficulty and Validity of Various Approaches to the Calculus*. Blant disse metodene Tall [Tal81] legger frem finner vi både ε, δ-metoden og det som blir kalt *den moderne infinitesimal metoden*. Sistnevnte er en beskrivelse av metoden som omfatter infinitesimal-tilnærmingen vi har presentert i denne oppgaven. Andre tilnærminger som nevnes i [Tal81] er blant annet *dynamiske grense metoden* og *numerisk metode*. Vi skal ikke gå nærmere inn på disse metodene i denne oppgaven, men ønsker med dette å få frem at de to tilnærmingene vi har tatt for oss å sammenlikne i denne oppgaven, langt i fra er de eneste mulighetene for tilnærminger til matematisk analyse.

Den moderne infinitesimal metoden baserer seg på de samme ideene som den infinitesimal-tilnærmingen Leibniz presenterte på 1600-tallet, men slik vi har sett i denne oppgaven er denne tilnærmingen støttet opp av moderne matematikk for å gi infinitesimale størrelser en presis natur. På den andre siden har vi i Kapittel 9, ved analyse av to lærebøker i ikke standard analyse, sett at den eneste størrelsen som defineres eksplisitt i både [Kei13] og [HLO10] er infinitesimaler, eller ultra små tall for sistnevntes del. Fra antakelsen om eksistensen av infinitesimaler ε utledes de andre hyperreelle tallene; uendelige tallene defineres som $1/\varepsilon$ og endelige tall ved at de verken er uendelig store eller små. Med dette unngår lærebøkene å måtte presentere ultrakonstruksjonen av hyperreelle tall, men samtidig benytte en rigid ikke-standard tilnærming til kalkulus. Slik begge disse lærebøkene introduserte infinitesimaler minner tilnærmingen noe mer på det kaller for Tall [Tal81] kaller for *den gamle infinitesimal metoden*, enn slik vi i denne oppgaven har definert infinitesimalene som en størrelse i tallmengden $\mathbb{R}^*$ med en helt bestemt algebraisk struktur. Slik Tall [Tal81] forklarer innholdet i *den gamle infinitesimal metoden*, er denne tilnærmingen i bunn og grunn lik den tidligere sterkt kritiserte tilnærmingen Leibniz introduserte på 1600-tallet. Samtidig argumenterer Tall [Tal81] i sin artikkel for validiteten av denne metoden, gitt at den brukes riktig, og forklarerer at de grunnlagsproblemene som kan oppstå i analyse på høyere universitetsnivå enkelt kan fjernes på et lavere nivå. Videre, forklare Tall [Tal81] at på lik linje denne metoden ikke var en utfordring for Leibniz på 1600-tallet, vil de heller ikke 'den gamle infinitesimal metoden' skape problemer for matematikkstudenter på et lavere nivå.

Vi forklarte at essensen i 'den nye infinitesimal metoden' er basert på den samme tilnærmingen som Leibniz hadde på 1600-tallet, men nå med moderne matematikk til å støtte opp om teorien. Moderne matematikk som heller ikke var blitt utviklet på 1600-tallet, da Leibniz introduserte differensialregningen. Tall [Tal81] forklarer at når man benytter Leibniz definisjon benyttet på dagens matematikk, oppstår en utfordring i at vi må behandle *egentlige infinitesimaler* og *uegentlige infinitesimaler* på korrekt vis. For å forstå forskjellen på disse, vender vi blikket mot Cauchys opprinnelige (ε, δ)-metode. Slik vi nevnte innledningsvis i denne oppgaven, inkluderte Cauchys opprinnelige definisjon infinitesimaler, men her ble de redefinert fra en størrelse til 'en funksjon som går mot 0'. Som størrelser oppfattes infinitesimaler som variabler, og at disse kan bli uendelig små uten å være lik 0. I Cauchys forestilling defineres en funksjon f til å være et infinitesimal dersom $f(x)$ går mot 0 når variablen x går mot 0.

Dette gir en grunnleggende ulik tolkning av begrepet; infinitesimal. Det første eksempelet definerer et infinitesimal som en størrelse, mens for Cauchy definerte infinitesimal en bestemt egenskap ved funksjoner. På bakgrunn av Cauchys definisjon av infinitesimale funksjoner, viser Tall [Tal81] frem et eksempel for å illustrere forskjellen på *egentlige infinitesimaler* og *uegentlige infinitesimaler*. Funksjonen $f(x) = x(x-1)(x-2)$ er et *egentlig infinitesimal*, ettersom $f(x)$ går mot 0 når x går mot 0, men $f(x)$ er ulik fra 0 for x i et lite omegn av 0. På den andre siden, er funksjonen $g(x) = x\sin(1/x)$, $x \neq 0$, et *uegentlig infinitesimal* ettersom $g(x)$ går mot 0 når x går mot 0, men er samtidig lik 0 i punkter vilkårlig nærme origo. Tall [Tal81] skriver at det er disse *uegentlige infinitesimalene* som er kilden til feil i bruken av definisjonen av den deriverte i kalkulus. Samtidig kommenterer Tall at '*It is not necessary to introduce improper infinitesimals to beginners.*. [Tal81] forklarer at de uegentlige infinitesimaler ikke var et problem for Leibniz i hans teori for kalkulus, ettersom han oppfattet alle infinitesimaler som *egentlige*. Det var heller ikke feil av Leiniz å oppfatte alle infinitesimaler som egentlige, ettersom alle funksjonene han hadde å arbeide med på denne tiden hadde egenskapene til egentlig infinitesimaler. Med dette argumenterer Tall for at '*Provided that improper infinitesimals are suitably handled, the old infinitesimal calculus is mathematically sound.* og skriver videre at *In the calculus of Leibniz improper infinitesimals did not occur.* [Tal81, p. 21].

Vi har så langt drøftet validiteten av tre ulike tilnærminger til kalkulus, og har sett at disse hver for seg godt kan fungere i undervisning. Likevel, er det verdt å vende blikket mot en langt fra triviell utfordring ved flere tilnærminger til kalkulus. Slik Tall [Tal81] skriver i sin artikkel kan det oppstå et grunnleggende kognitivt problem når tilnærmingen omfatter helt ulike betydninger for de prosessene og resultatene som utgjør kalkulus [Tal81, p. 17]. Videre, begrunnes dette i den artikkelen ved med at *..., the various methods ... can have radically different meanings.* og videre at *It is often differences of meaning which cause controversy in the calculus.*[Tal81, p. 17]. Vi lever i en standard verden, slik veileder av denne oppgaven skrev en gang, og det kan argumenteres for at flere tilnærminger kan skape mer usikkerhet hos den lærende, når tilnærmingene gir svært ulike betydninger av de grunnleggende ideene. Det er et poeng at stort sett alle kurs på begynnende universitetsnivå vil benytte klassisk analyse, både her i Norge og andre steder i verden. Dermed kan det være utfordrende å komme fra en annen matematikk bakgrunn i disse kursene, der i blant en ikke-standard tilnærming. Likevel kan vi argumentere for at å begrense analyse til kun den tradisjonelle, vil vi kanskje miste mangfoldet i analysens grunnlag. Et slikt *mangfoldsargument* er kanskje også grunnen til at Keisler [Kei13] i sin lærebok presenterer de ikke-standard karakteriseringene, og betraktningene knyttet til sentrale begreper, parallelt med de klassiske definisjonene og resultatene. Også Tall [Kei13] argumenterer for å bevaret mangfoldet i analysens grunnlag, og kommer med en oppfordring til undervisere når at skriver at: *An educator must do more than just pass on the current mathematical culture, he must analyse it and modify it to make it appropriate for the learning and for its future use and development.* [Tal81, p. 18].

10.4 Utvikling av forståelse

Det overordede målet med denne oppgaven har hele veien vært å belyse ikke-standard analyse i et undervisningsperspektiv, og drøfte infinitesimaltilnærmingen som et alternativ til tradisjonell undervisning kalkulus. Vi har drøftet utfordringer ved tilnærmingen, og vi har sett både eksempler på og argumenter for at ikke-standard analyse kan være et godt alternativ. Til syvende å sist koker alt ned til et spørsmålet om en ikke-standard tilnærming til analyse kan bidra til utvikling av forståelse for matematikkfaget.

Før vi kan drøfte hvor vidt ikke standard-analyse og en infinitesimaltilnærming kan bidra til å utvikle matematikkforståelse hos den lærende, er det nødvendig med en felles oppfatning av hva begrepet om forståelse i matematikk innebærer. Fra både et pedagogisk ståsted, men kanskje viktigst et matematikkdidaktisk ståsted, vil begrepet om *forståelse* kunne defineres ulikt. Både basert på hva man spesifikt ønsker at den lærende danner en forståelse for, eller hva målet med selve undervisningen er, men kanskje spesielt hvilken type matematikkompetanse målet er at lærende utvikler. For å eksemplifisere, kan målet for undervisningen en dag være å *forstå hvordan man deriverer ved hjelp av kjerneregelen*, mens det en annen dag kan være å *forstå innholdet i skjæringssetningen*. Når det kommer til matematikkompetanse, kan man se mot polene og reise spørsmålet om man har som mål å utvikle regnemaskiner eller problemløsere. Vi vil i denne seksjonen basere våre definisjon av *forståelse i matematikk* på den gitt av [Ske76].

Skemp [Ske76] problematiserer i sin artikkel *Relational understanding and Instrumental Understanding* betydningen av *forståelse* fra et matematikkdidaktisk perspektiv. Forfatteren trekker en parallell fra det franske begrepet *faux amis*, som hentyder til ord som er svært like, men har ulik betydning. Slik som foreksempel det norske ordet *historie* og det franske *histoire*, der *histoire* betyr en fortelling. Der forskjellen mellom fortelling og historie er så grunnleggende som det ikke-trivielle skillet mellom fakta og fiksjon. Formålet med denne parallellen er at det også finnes like ord innenfor samme språk, der forskjellen er like lite triviell som forskjellen mellom fakta og fiksjon. Og i matematikk spesielt finner man mange ord som har én betyding i den dagligdagse tale, men med en helt annen betydning som et matematisk begrep. Slik som for eksempel det matematiske begrepet kropp, som ikke hentyder til menneskekroppen slik det gjør i dagligdags tale, men som henviser til en algebraisk struktur på mengder.

På bagrunn av denne analogien, introduserer Skemp [Ske76] i sin artikkel begrepene *instrumentell* og *relasjonell forståelse* i matematikk, og gir med dette en todelt definisjon av begrepet om *forståelse* i matematikk. Instrumentell forståelse blir av Skemp [Ske76] definert ved at den lærende evner å tilegne seg metoder, strategier og formler for å løse en oppgave. Relasjonell forståelse blir definert ved at den lærende evner å bygge opp begrepsmessige strukturer og se sammenhenger mellom disse begrepene. Enkelt sagt kan vi si at disse to formene for forståelse i matematikk, skiller seg ved spørsmålet om den lærende vet *hvordan* oppgaven skal løses, eller om den lærende i tillegg vet *hvorfor*.

Skemp [Ske76] diskuterer fordelene med å undervise i instrumentell kompetanse versus å undervise for relasjonell forståelse, og påpeker at instrumentell matematikk ofte er langt enklere for den lærende å forstå. Han fortsetter med å forklare at instrumentell kompetanse, brukt riktig, enkelt og greit vil gi rett svar på en matematikkoppgave. Å gi formelen '$side \cdot bredde$' for å regne ut arealet av et rektangel, er enklere enn å få den lærende til å forstå hvorfor det er sånn. På samme måte er det enklere å gi regelen for å finne den siste vinkelen i en trekant, ved at man kan subtrahere 180 med summen av de to kjente vinklene. På den andre siden forklarer Skemp (1976) at relasjonell matematikkompetanse har større overføringsverdi til nye problemer, og at det er lettere å huske. For sistenevnte argumenterer, Skemp (1976) at det åpenbart er lettere å lære formelen for arealet av et rektangel, men at den lærende da også må læres separate formler for arealet av en trekant, parallellogram og trapes. Det blir følgelig mer å huske dersom man velger en instrumentell tilnærming i undervisningen, enn om man fokuserer på relasjonell kompetanse og forståelse for resultater og sammenhenger i matematikk.

Det virker dermed å være fordelaktig å utvikle en relasjonell forståelse for matematikk, men dette krever samtidig at undervisningen baserer seg på en relasjonell tilnærming. På bakgrunn av dette kan vi reise spørsmålet om matematisk analyse bør bli gitt et større fokus i undervisning generelt, som en gren av matematikken som først og fremst beskjeftiger seg med relasjonell forståelse.

Vi har i denne oppgaven gjennomgående forsøkt å gi forklaringer, analogier og metaforer på de grunnleggende begrepene fra videregående skole og lavere universitetsnivå i Kapittel 7 og Kapittel 8. Disse forklaringene har vi benyttet oss av for å bygge både intuisjon og forståelse for de formelle matematiske definisjonene av begrepene. Samtidig har vi forsøkt å gi et sammenlikningsgrunnlag for å diskutere infinitesimal-tilnærmingen mot grensetilnærmingene, og hvordan innholdet i disse tilnærmingene reflekteres de definisjoner og resultater som danner grunnlaget for kalkulus. Mer bestemt, har vi gjennomgående forsøkt å fremme en relasjonell tilnærming til matematikk.

På bakgrunn av hvordan begrepene grenseverdi, konvergens, kontinuitet, derivasjon og integrasjon presenteres i kalkulus på begynnende universitetsnivå i boken [Lin95], og på videregående nivå i bøkene [Old+18] og [Old+15], vil denne drøftingen nå ta to veier. For kalkulus på lavere universitetsnivå, vil vi diskutere om en alternativ formulering ved ikke-standard analyse som fremmer forståelse, slik vårt overordnede mål med denne oppgaven hele veien har vært. Mens vi for kalkulus på videregående nivå finner det mer naturlig å argumentere for et større fokus på analyse generelt, og hvordan ikke-standard analyse kan være en vei å gå.

Både fra egen erfaring og ved gjennomgang av lærebøkene [Old+18] og [Old+15] for henholdsvis matematikkfagene R1 og R2, oppleves det som mangel på en relasjonell tilnærming i matematikkundervisningen ved videregående skole. Til tross for at lærebøkene gir en rekke presentasjoner av definisjoner og resultater som stiller krav til relasjonell matematikkkompetanse, virker det å være et større fokus på å utvikle metodekompetanse. Grunnen er kanskje at de definisjonene som setter krav relasjonell forståelse er vanskelige å forklare, og det er enklere å utvikle ren instrumentell kompetanse for metodene som følger fra definisjonene. Slik som det for eksempel er enklere å lære bort en metode for å derivere polynomer, fremfor å forstå og kunne benytte definisjonen av den deriverte. En annen forklaring kan være at instrumentell kompetanse vil kunne vise raskere resultater enn relasjonell kompetanse. I form av riktige svar på spesifikke oppgavetyper knyttet til én metode, i etterkant av en gjennomgang. Problemet med en slik tilnærming er at så fort oppgaven endres, og metoden ikke lenger er gyldig, må en ny metode læres. Dermed er det kanskje ikke et mål i seg selv å finne argumenter for at ikke-standard analyse kan fungere som et alternativ til klassisk analyse i videregående skole. Heller bør man kanskje argumentere for at analyse generelt burde vies mer tid i skolen for å fremme relasjonell matematikkompetanse hos elevene, der ikke-standard analyse er en av flere alternative veier å gå i undervisningen.

Det står i Læreplanen i matematikk for realfag at eleven skal kunne '*gjøre rede for begrepene grenseverdi, kontinuitet og deriverbarhet,...*' [Utd06, p. 5]. Man kan dermed stille spørsmålet i hvilken grad dette kompetansemålet er oppnåelig ved å fokusere på instrumentell matematikkompetanse. I lærebøkene Sinus R2 [Old+18], Sinus R1 [Old+15] og Matematikk 1T [Hei+06], fungerer definisjonene av konvergens, grenseverdi, kontinuitet, derivasjon og integrasjon som innledninger til kapitelene om tema knyttet til disse definisjonene. Likevel opplever vi at det blir gitt få og mangelfulle forklaringer på innholdet i definisjonene, og i nærmest samtlige kapitler hopper forfatterene rett til innlæring av metoder og formler for beregning. Der disse lærebøkene kan sies å ha en induktiv tilnærming i sine presentasjoner, ved å gi rekke formler og regler som tilslutt utfyller metodebehovet for å løse alle typer oppgaver. Kan man si at denne oppgaven har en deduktiv tilnærming, der vi har beveget oss fra konkrete eksempler og forklaringer til de generelle definisjonenene. Kanskje bør analyse og forståelse for definisjoner gis en mer sentral plass undervisningen videregående skole enn det gjøres i dag. Spesielt i kurs som 1T, R1 og R2, der en større andel av disse elevene vil ta kurs i matematikk på universitetet. Der vi også vet at denne overgangen for mange er svært stor og utfordrende. Når det kommer til forståelse for innholdet i definisjonene har vi sett at de ikke-standard definisjonene kan bidra med intuisjon, men også at formuleringen av definisjonene blir enklere med infinitesimaler og dermed kanskje mindre avskrekkende.

For elever på begynnernivå på universitetet, håper vi at leseren kan se en overføringsverdi fra de ikke-standard karakteriseringene vi har gitt for de sentrale begrepene i analysen. Vi ønsker likevel å nevnte at om de ikke-standard karakteriseringene har overføringsverdi til kurs i analyse på intuitivt nivå er en side av saken. Spørsmålet videre er om ikke-standard analyses formulering av grunnleggende definisjoner faktisk kan fremme en dypere forståelse for definisjonene, og dermed kursene på universitetsnivå i sin helhet. Vi har også sett at det er en rekke utfordringer knyttet til grunnlagsproblemer ved å undervise i ikke-standard analyse. Samtidig kan det nevnes at disse grunnlagsproblemene stort sett oppstår hos høytpresterende studenter. Vender vi oss mot Sullivans [Sul76] forskning finner vi implikasjoner for at ikke-standard analyse kan gi en dypere forståelse for innholdet i definisjoner og resultater fra kalkulus, og at det er enklere for studenter å mestre føring av ikke-standard bevis.

Avslutningsvis i denne oppgaven ønsker vi å gjøre leseren oppmerksom på at når vi i dette kapittelet forsøker å 'argumentere for ikke-standard analyse', er ikke dette ekvivalent med å 'argumentere mot klassisk analyse'. Til tross for at denne oppgaven gjennomgående har forsøkt å fremstille ikke-standard analyse som et *alternativ til* klassisk analyse, er det kanskje riktigere å si at vi gjennom arbeidet med denne masteroppgaven har kommet frem til et ønske om at de to skal supplere hverandre fremfor å være motsetninger. Kanskje finner vi svaret i ordtaket '*det er flere veier til Rom*', og at en utvidet tallinje kan gi en utvidet begrepskasse for lærerne i klasserommet eller i forelesningssalene. Om målet med undervisningen er å utvikle forståelse for matematikk, er det kanskje ikke så nøye hvordan vi kommer oss dit.

Bibliografi

[Ber34] Berkeley, G. “The Analyst: a Discourse addressed to an infidel Mathematician”. I: (1734).

[Fra03] Fraleigh, J. B. *A first course in abstract algebra*. Pearson Education India, 2003.

[Hei+06] Heir, O. mfl. *Matematikk 1T*. 2006.

[HLO10] Hrbacek, K., Lessmann, O. og O’Donovan, R. “Analysis with ultrasmall numbers”. I: *The American Mathematical Monthly* 117.9 (2010), s. 801–816.

[Kei13] Keisler, H. J. *Elementary calculus: An infinitesimal approach*. Courier Corporation, 2013.

[Kei76] Keisler, H. J. *Foundations of infinitesimal calculus*. Bd. 20. Prindle, Weber & Schmidt Boston, 1976.

[Lin95] Lindstrøm, T. *Kalkulus*. Bd. 3. Universitetsforlaget Oslo, 1995.

[Lin96] Lindstrøm, T. “Uendelig små og store tall - og litt om hva de kan brukes til”. I: *Normat-Nordisk Matematisk Tidsskrift* 44.2 (1996), s. 71–91.

[ODo16] O’Donovan, R. “Anlalysis using ultrasmall numbers - Teacher’s Manual”. I: (2016).

[Old+15] Oldervoll, T. mfl. “Sinus matematikk R2: Lærebok i matematikk”. I: *Oslo: Cappelen* (2015).

[Old+18] Oldervoll, T. mfl. “Sinus matematikk R1: Lærebok i matematikk”. I: *Oslo: Cappelen* 3 (2018).

[Ske76] Skemp, R. R. “Relational understanding and instrumental understanding”. I: *Mathematics teaching* 77.1 (1976), s. 20–26.

[Str97] Stroyan, K. D. *Mathematical background: Foundations of infinitesimal calculus*. 1997.

[Sul76] Sullivan, K. “The Teaching of Elementary Calculus Using the Nonstandard Analysis Approach”. I: *The American Mathematical Monthly* 83.5 (1976), s. 370–375.

[Tal81] Tall, D. “Comments on the difficulty and validity of various approaches to the calculus”. I: *For the Learning of mathematics* 2.2 (1981), s. 16–21.

[Tre12] Trench, W. F. *Introduction to Real Analysis*. W. Trench, 2012.

[Utd06] Utdanningsdirektoratet. “Læreplan i matematikk for realfag - programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering (MAT3-01)”. I: (2006).

[Wad96] Wadsworth, B. J. *Piaget’s theory of cognitive and affective development: Foundations of constructivism*. Longman Publishing, 1996.