UiO : Matematisk institutt
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

En numerisk tilnærming til differensialligninger

Kan det være læringsfremmende?

Konrad Thoresen

Masteroppgave, våren 2019

Denne masteroppgaven er levert inn som en del av programspesialiseringen *Matematikk* under *Lektorprogrammet* ved Universitetet i Oslo. Oppgaven er normert til 30 studiepoeng.

Forsiden viser et utsnitt av rotsystemet til den eksepsjonelle liegruppen E_8, projisert ned i planet. Liegrupper ble oppfunnet av den norske matematikeren Sophus Lie (1842–1899) for å uttrykke symmetriene til differensiallikninger og spiller i dag en sentral rolle i flere deler av matematikken.

Sammendrag

Datamaskinen har i det siste århundret drastisk endret måten vi forholder oss til matematiske og naturvitenskapelige problemer, da en datamaskin har en beregningskapasitet som vi før bare kunne drømme om. Som en følge av dette har utvikling av algoritmer og programvare blitt en nøkkelkompetanse for matematikere og naturvitenskapelige forskere.

Som et svar på denne utviklingen har UiO i alle bacheloremner implementert programmering satt i en faglig kontekst. Et viktig spørsmål å stille seg da er om dette kan gjøres på en måte som ikke bare blir et supplement til et emne, men heller som en måte å fremme læringen i matematikk og naturvitenskap.

Jeg skal i min masteroppgave studere denne problemstillingen i lys av studenters læring av ordinære differensialligninger, med spesiell vekt på løsningsmetoder, både numeriske og analytiske.

Studentene som er involvert i min studie går sitt første år ved UiO og har bakgrunn fra bachelorprogrammene: ”Fysikk og astronomi” og ”Matematikk og økonomi”. Jeg vil gjennom kvalitativ forskningsmetode få innsikt i studentenes forståelse av ordinære differensialligninger, med spesiell vekt på løsningsmetoder, både numeriske og analytiske. Dette gjøres ved å ta utgangspunkt i et teoretisk rammeverk knyttet til studentenes konseptuelle forestillinger av matematiske idéer.

Resultatene viser at studentene får en bedre forståelse av differensialligninger ved en numerisk tilnærming. En numerisk tilnærming gjør at studentene lettere vil koble sammen de matematiske konseptene differensialligninger og den deriverte. Resultatene viser også indikasjoner til at studentene gjennom raske tilbakemeldinger gjennom bruk av datamaskin til visualisering kan bedre forståelsen av differensialligninger. Dette gjenstår for videre forskning å avdekke.

Forord

Denne masteroppgaven setter punktum for min studietid ved Universitet i Oslo, og jeg spesielt rette en stor takk til min veileder Knut Mørken for veldig god oppfølging gjennom hele perioden, og til Elise Lockhart og Tol Ole Odden for gode bidrag til min masteroppgave. Jeg vil også rette en stor takk til medstudenter for gode samtaler, og til slutt vil jeg takke familie og venner for god støtte underveis.

Gjennom prosessen med å skrive en masteroppgave har jeg lært veldig mye, og på mange måter skulle jeg ønske jeg visste fra første dag det jeg nå vet om å skrive en masteroppgave. Det har vært en krevende prosess, men jeg kom meg heldigvis i mål på et vis.

Leirsund, 22. mai, 2019

Konrad Thoresen

Innhold

KAPITTEL 1

Introduksjon

1.1 Bakgrunn og problemstilling

Nye realfagsstudenter ved et universitet møter som regel kalkulus som ett av sine første emner de skal gjennom i sin bachelor- eller mastergrad, som vil si at de blant annet får god trening i å derivere og integrere forskjellige typer funksjoner. Kanskje er det derfor ikke så rart at man velger å la studentene få en algebraisk tilnærming til differensialligninger, når de etter hvert møter dette senere i kurset. Et spørsmål man derfor kan stille seg er om en algebraisk tilnærming er den beste måten for studentene å lære om differensialligninger eller om andre tilnærminger kan være mer hensiktsmessig.

En algebraisk tilnærming til differensialligninger kjennetegnes ofte ved at studentene lærer å klassifisere forskjellige typer differensialligninger slik at de videre kan bruke en kjent integrasjonsteknikk for å løse ligningen, noe studentene er kapable til å utføre, siden de er kjent med grunnleggende kalkulus. Men kalkulus ble innført for over 300 år siden, og siden den tid har det skjedd store framskritt i teknologien, spesielt i form av at datamaskinen har blitt et unnværlig verktøy for matematikere og for vitenskapen generelt.

Universitetet i Oslo har møtt dette nye perspektivet ved naturvitenskapen ved å blant annet integrere programmering inn i realfagsemner på bachelornivå. Dette bryter med den vanlige konvensjonen de fleste universiteter har, nemlig at programmering inngår i et eget emne ved siden av de tradisjonelle realfagsemnene. Men ved å integrere programmering inn i tradisjonelle emner, så er det også ønskelig at dette gjøres på en måte som bidrar til økt læring for studentene.

En viktig ting å merke seg er at å programmere ikke nødvendigvis betyr å skrive kode i for eksempel Python. Det ligger en hel prosess bak det å kode, fordi det handler hovedsaklig om å løse et problem slik at en datamaskin skal kunne ende opp med å løse det til slutt, og en datamaskin er egentlig veldig dum på den måten at den må få veldig presise kommandoer for å kunne hjelpe oss. Derfor hviler naturvitenskapelige problemer på oss mennesker som må bruke forskjellige teknikker for å formulere løsning på problemet på en slik måte at en datamaskin skal kunne forstå hva den skal gjøre.

Min tanke er at det ligger en mulighet for å lære et matematisk konsept som differensialligninger gjennom å angripe et problem slik en datamaskin ville gjort det, og innenfor differensialligninger er derfor naturlig å ha en numerisk tilnærming til forskjell fra en algebraisk tilnærming som beskrevet tidligere.

Jeg vil ta utgangspunkt i studenter fra to forskjellige bachelorprogram ved Universitet i Oslo, og analysere deres tanker, assosiasjoner og fremgangsmåter tilknyttet det å løse ordinære differensialligninger, for samtidig å undersøke om en numerisk tilnærming til å løse differensialligninger kan bidra til en bedre forståelse. Studenters tanker, assosiasjoner og fremgangsmåter er med på å utforme det jeg heretter vil omtale som studentenes konseptbilde, og derfor ønsker jeg i min masteroppgave å ta utgangspunkt i følgende forskningsspørsmål:

1. Hvordan ser studentenes konseptbilde av differensialligninger ut?
2. Kan en numerisk tilnærming til å løse differensialligninger utvide studentenes konseptbilde?
3. Har studentenes faglige bakgrunn mye å si for deres forståelse av differensialligninger?

1.2 Oppgavens oppbygning

Nedenfor beskriver jeg hvordan min masteroppgave er bygd opp. Den består av følgende kapitler:

Grunnleggende om differensialligninger gir en innføring i teori som er relevant videre for min oppgave, og også for å forstå tankene bak studentenes resonnering senere i oppgaven.

Hvorfor kan en numerisk tilnærming være hensiktsmessig for en student? gir en begrunnelse for hvorfor en numerisk tilnærming til differensialligninger kan være hensiktsmessig for en student. Jeg argumenterer for dette fra et historisk perspektiv, deretter ved å se på modellering som et anvendelsesområde for differensialligninger, og til slutt en minianalyse av dagens måte å undervise differensialligninger til studenter på.

Teoretisk rammeverk gir en oversikt over relevante begreper og tidligere forskning knyttet til studenters konseptbilde. Dette er relevant for å analysere studentenes forståelse av differensialligninger.

Metode beskriver mitt forskningsdesign, valg av forskningsmetode, forskningens validitet og avsluttes hvordan jeg har bygd opp oppgavesettet gitt til studentene.

Analyse trekker frem relevante dialoger mellom studentene som gir innsikt i deres tankegang og refleksjoner rundt det å løse oppgavene i oppgavesettet. Dette brukes videre til å diskutere deres forståelse av differensialligninger ut ifra det teoretiske rammeverket knyttet til konseptbilder.

Diskusjon trekker studentenes tankegang gitt i analysen opp mot teorien, og trekker frem mulige generaliseringer.

Konklusjon oppsummerer funnene av forskningen gjort av meg, og angir mulige forslag til videre undervisning av differensialligninger på universitetsnivå.

KAPITTEL 2

Grunnleggende om differensialligninger

I dette kapittelet skal jeg introdusere teori om differensialligninger som danner et bakteppe for oppgavene studentene møter senere i oppgaven. Jeg vil starte med det helt grunnleggende før jeg beveger meg over mot et historisk perspektiv av differensialligninger for å prøve å grunngi hvorfor en numerisk tilnærming til differensialligninger kan være hensiktsmessig fremfor en algebraisk tilnærming.

2.1 Hva er en differensialligning?

En differensialligning er en ligning som relaterer en mengde til endringen av mengden i seg selv. La for eksempel $x(t)$ være en ukjent mengde som varierer med tiden t. En generell differensialligning vil da kunne skrives på følgende måte:

$$f(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)}) = 0 \tag{2.1}$$

der f er en funksjon. Mer presist kaller vi dette en ordinær differensialligning, siden x kun varierer med én variabel. En differensialligning som varierer med to eller flere variabler kaller vi for en partiell differensialligning. Det finnes flere kjente eksempler på ligninger av begge typer som forklarer forskjellige naturvitenskapelige fenomen, blant annet Schrödingers ligning, Maxwells ligninger, Cauchy-Eulers ligning og Laplaces ligning for å nevne noen.

Hvorfor kan ofte naturvitenskapelige fenomen representeres ved en DL? Det er fordi mange ting i verden er i forandring, og differensialligninger blir et verktøy for oss å kunne modellere virkeligheten i den grad det kan gjøres. La meg vise dette ved et eksempel hentet fra fysikkens verden.

Eksempel

Eksempelet tar utgangspunkt i et eksempel hentet fra Tom Lindstrøms ”Kalkulus” [9, s. 555-556], men representerer et vanlig eksempel som studenter møter, som derfor har en analytisk løsningsmetode knyttet til seg.

Tenk deg at du holder en ball festet til enden av en fjær som igjen er festet i taket. Du holder ballen slik at fjæren er i likevektstilling, altså at forlengelsen x_0 av fjæren fra sin utgangsposisjon er null. Du ønsker å studere bevegelsen til ballen når du slipper den.

Ballen blir påvirket av tre krefter: tyngdekraften, fjærkraften og luftmotstand. Tyngdekraften er gitt ved $G = mg$ der m er massen til ballen og g er tyngdens akselerasjon. Fjærkraften er fra Hookes lov gitt ved $F = -kx$ der x er ballens forflytning fra likevektsstilling, altså fjærens forflytning. Luftmotstanden kan vi anta er proporsjonal med hastigheten til ballen v, og kan da uttrykkes som $L = -lv$, der l er proporsjonalitetskonstanten. Merk at luftmotstanden er negativ, fordi den virker i motsatt retning av hastigheten til ballen.

La oss nå anta at klossen er i bevegelse og befinner seg en avstand x fra likevektsstillingen med hastighet rettet nedover. Summerer vi opp alle krefter vi har, med positiv retning nedover, får vi:

$$F = mg - k(x_0 + x) - lv \tag{2.2}$$

I likevekststilling vet vi også fra Newtons første lov at tyngdekraften er like stor i størrelse som fjærkraften, slik at $mg - kx_0 = 0$. Det gjør at uttrykket (2.2) kan forenkles til

$$F = -kx - lv \tag{2.3}$$

Fra Newtons andre lov vet vi at $F = ma$. I tillegg vet vi at $v = x'$ og $a = v' = x''$. Bruker vi disse relasjonene får vi til slutt ligningen

$$x'' + \frac{l}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0 \tag{2.4}$$

Her har vi altså en ordinær differensialligning på formen $f(t, x, x', x'') = 0$ som vi kjenner igjen fra (2.1), og dette er et eksempel på hvordan man kan gå fra et fysisk problem og til en symbolsk representasjon av problemet ved hjelp av en differensialligning.

2.2 Å løse en ordinær differensialligning

Som eksempelet viser, er det en prosess av trinn involvert i å løse naturvitenskapelige problemer. Jeg velger å illustrere det som vist i figur ...

Analytisk løsning

Å løse en ordinær differensialligning analytisk vil si å bruke bestemte integrasjonsmetoder til bestemte type ligninger, for til slutt å ende opp med et uttrykk for funksjonen vi anser som en løsning av differensialligningen vi skal løse. En klassisk fremgangsmåte består derfor av følgende steg steg:

1. Bestemme hvordan type ligning det er (klassifisere)
2. Koble riktig løsningsmetode til type ligning det er
3. Bruke metoden til å få en funksjon som løsning ved bruk av integrasjon på en eller annen måte

Å klassifisere en ordinær differensialligning vil si å kjenne igjen mønstre i ligningen som kan kobles til en generell form kjent for mange. Vi er da ofte ute etter å blant annet kjenne igjen hvilken orden ligningen har og om ligningen er lineær eller ikke. For eksempel kan vi gjenkjenne ligningen

$$x' + 3x = e^t$$

til å være en lineær førstordens ordinær differensialligning. Vi kan videre gi det eksplisitte uttrykket for løsningene ut ifra setning (2.2.1) hentet fra Tom Lindstrøms "Kalkulus" [9, s. 496].

Theorem 2.2.1. *Anta at funksjonene f og g er kontinuerlige på et åpent interall I, og la F være en vilkårlig antiderivert til f på I. Da er løsningene av differensialligningen*

$$x' + f(t)x = g(t)$$

på I gitt ved

$$y = e^{-F(t)} \left(\int e^{F(t)} g(t)\, dt + C \right).$$

Det holder derfor å ha kunnskap om forskjellige typer differensialligninger og integrasjonsregning for å kunne finne løsningene av en differensialligning, i tillegg til å sørge for at visse betingelser er oppfylt. Problemet er så at dette fungerer bare for visse typer ligninger, det vil for eksempel si for separable, førsteordens lineære, andreordens homogene og andreordens inhomogene differensialligninger. Hva gjør vi så hvis vi møter på en ikke-lineær differensialligning?

Numerisk løsning

Til forskjell fra analytiske løsninger, så er numeriske løsninger basert på tilnærmelser, men tilnærmelser er ofte godt nok for å få å kunne trekke konklusjoner for et problem. Vi trenger ikke alltid den presise analytiske løsningen for å kunne løse et problem, og ved numeriske løsningsmetoder kan vi i tillegg til å få en tilnærmet, kontrollere størrelsen på feilen som inngår i beregningene. Differensialligninger har som regel til hensikt å modellere naturlige fenomen, og siden modeller sjeldent er helt riktige, så vil heller ikke en analytiske løsningsmetoder gi helt riktige løsninger. Verden er kompleks, og derfor kan numeriske metoder kombinert med stor datakraft være et veldig viktig verktøy i møte med naturvitenskapelige problemer.

Eksempler på numeriske metoder er for eksempel Eulers metode og Eulers midtpunktsmetode, som kan anses som litt naive løsningsmetoder, men som allikevel gir en fin geometrisk tolkning av hva en numerisk løsningsmetode er, noe som kan være veldig relevant for studenters første møte med numeriske løsningsmetoder. Jeg skal forklare idéen bak disse metodene, fordi det er relevant for hva studentene senere tenker rundt det å løse differensialligninger. Alle metoder tar utgangspunkt i formuleringer og notasjon hentet fra kompendiet i emnet MAT-INF1100 ved Universitet i Oslo [11].

Eulers metode

Eulers metode kan brukes til å tilnærme en løsning til førsteordens differensialligninger. Metoden utnytter at man vet hellingen til løsningskurven i stasjonære enkeltpunkter, siden dette er gitt ved en differensialligning på formen

$$x' = f(t, x), \quad x(0) = x_0 \tag{2.5}$$

Ved å gjøre tilnærmelsen at det finnes et lite intervall, dt, der hellingen til løsningskurven er konstant kan vi bygge opp en løsningskurve fra punktet vi starter i, x_0 og fremover ved å følge tangentlinjene. Symbolsk kan dette skrives på følgende måte:

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t \tag{2.6}$$
$$x_{k+1} = x_k + f(t_k, x_k)\,\Delta t \tag{2.7}$$

Eulers midtpunktsmetode

Eulers midtpunktsmetode er en forbedring av Eulers metode på den måten at den tar hensyn til løsningskurvens helling i to punkter på et lite intervall dt, i stedet for bare ett som i Eulers metode. Kort sagt kan du bruke Eulers metode et intervall $dt/2$ fremover, deretter beregne hellingen i dette tilnærmede punktet, før du til slutt går tilbake til det opprinnelige startpunktet og følger tangenten gitt ved hellingen i midtpunktet et helt steg dt fremover. Symbolsk kan dette skrives på følgende måte:

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t \tag{2.8}$$
$$x_{k+1} = x_k + f(t_{k+1/2}, x_{k+1/2})\,\Delta t \tag{2.9}$$

der $t_{k+1/2} = t_k + \frac{1}{2}\Delta t$ og $x_{k+1/2} = x_k + \frac{1}{2} f(t_k, x_k)\,\Delta t$.

KAPITTEL 3

Hvorfor kan en numerisk tilnærming være hensiktmessig for en student?

Differensialligninger oppstår når vi ønsker å undersøke hvordan noe i naturen utvikler seg fremover i tid, og derfor er modellering av virkeligheten en veldig stor del av differensialligningers opphav. Men å lage modeller som representerer naturlige fenomen baserer seg på antagelser og forenklinger som gjør at analytiske løsninger av tilhørende differensialligninger bare vil være en tilnærming til det virkelige problemet, akkurat som numeriske løsninger er tilnærminger. Så hvorfor holder man på tradisjonen om å lære bort analytiske løsningsmetoder av differensialligninger? Og kan en numerisk tilnærming være et bedre alternativ?

Jeg skal starte med å gi et historisk overblikk over differensialligningers utvikling for å prøve å besvare dette, deretter gå videre til å begrunne hvilken rolle modellering har for læring av differensialligninger, og til slutt gi et overblikk over dagens pensum for forskjellige universiteter for å se etter mønster.

3.1 Historisk overblikk

Differensialligninger har vært omtalt helt siden slutten av 1600-tallet, omtrent på samme tid som teori om kalkulus ble utviklet. Selv om det var et nettverk av matematikere og vitenskapsfolk rundt om i Europa, så er det spesielt Isaac Newton og Gottfried Leibniz som står frem som opphavsmenn for differensialligninger [9, s. 573].

I forkant av deres gjennombrudd, har blant annet forskjellige tangentproblemer vært et problem som forskjellige matematikere har utforsket [7, s. 327], som for eksempel René Descartes og Pierre de Fermat på starten av 1600-tallet. Lenge så var integrasjon og differensiering to adskilte deler av matematikken, og det var ikke før Barrow fant ut at integrering og differensiering er motsatte operasjoner, som førte til utledningen av analysens fundamentalteorem [7, s. 69-71]. Dette ga derfor mulighet for senere matematikere som Newton, Leibniz, Bernoulli-brødrene, Euler, osv, å utlede analytiske løsninger til kommende differensialligninger[7].

Differensialligninger har sitt utspring fra problemer i den virkelige verdenen, og mekaniske problemer har ofte ført til diskusjon og idéutveksling mellom matematikere på et internasjonalt plan.

Et veldig tidlig eksempel er tautokronproblemet. Dette problemet går ut på å finne en kurve som er slik at uansett hvor du slipper et objekt fra langs denne kurven, så vil objektet bruke like lang tid til sitt laveste punkt i banen, så uavhengig av startposisjon langs den tautokrone kurven, så skal objektet bruke like lang tid fra startposisjon og til bunnpunktet i kurven [7, s. 327].

For å angripe dette problemet så finnes det flere måter å gå frem på. Christiaan Huygens løste problemet sammen med Leibniz ved å bruke geometriske argumenter allerede i 1689 [7, s. 327], eventuelt enda tidligere i 1658 i hans forskning på sykloider [6]. Problemet kan uansett bli løst ved å se på energibevaring for en pendel, ved å ta utgangspunkt i at den potensielle energien nødvendigvis er lik den potensielle energien. Uten å gå så mye mer inn på fysikken bak dette, så kan det vises at kurven er en sykloide, og i løpet av denne utledningen ender man opp med ligningen:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gx_2} \tag{3.1}$$

der ds er buelengden til pendelens kurve [19]. Ved la horisontal posisjon være x_1 og vertikal posisjon være x_2, så er $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$. Man går videre med å bekrefte at matematiske egenskaper ved en sykloide vil gi at tiden fra et gitt punkt til bunnpunktet vil gi en konstant tid, men dette må gjøres substitusjon og integrasjonsteknikker, som er mer tungvindt enn det trenger å være. Et alternativ for oss i moderne tid er å ta i bruk en datamaskin til å gjøre all jobben for oss, og derfor gir en numerisk tilnærming til problemet en mye mer fleksibel løsning, fordi fremgangsmetoden bak den numeriske tilnærmingen er ikke knyttet til kun dette problemet. Den er anvendelig i mange andre situasjoner, som bygger på samme fremgangsmåte.

Det krever likevel en matematisk innsikt i problemet i forkant for å kunne knytte sammen matematiske relasjoner. Å tro at det er en tilfeldig regel som sier at den deriverte av s^2 er $2s$ betyr ingenting om du ikke vet fra definisjonen av den deriverte at

$$(s^2)' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(s + \Delta t)^2 - s^2}{\Delta t} = 2s \tag{3.2}$$

Det er som regel de største matematikerene vi hører om når vi går så langt tilbake som 1600 og 1700-tallet, og det de har vist er en grundig matematisk innsikt i deres arbeid, hvor vi ser at de bruker matematiske konsepter som differensiering og integrering til å gå løs på nye problem som å løse en differensialligning. Som en konsekvens har det for ettertiden blitt et fokus å lære sluttproduktet av tidligere matematikeres arbeid, i stedet for å ha hovedfokuset på de grunnleggende matematiske konseptene som ligger til grunn, og som også er helt essensielt når vi i dag løser differensialligninger med en datamaskin.

Tautokronproblemet er bare én av mange mekaniske problemer som opptok flere matematikeres oppmerksomhet, og utover 1700-tallet ble det gjort mye arbeid i å finne generelle løsninger av spesielle typer differensialligninger, og selv om ordinære differensialligninger har mye teori knyttet rundt seg, så begynte man videre å utforske teori knyttet til partielle differensialligninger, altså differensialligninger med to eller flere variable, som vi for eksempel kjenner igjen i Schödingers ligning fra kvantefysikken og Maxwells ligninger fra elektromagnetismen. Dette preget mye av forskningen rundt differensialligninger på 1800-tallet og fremover.

Kort oppsummert kan vi se at matematikken som førsteårsstudenter møter i sitt første kalkulus-emne ved universitet ble oppdaget allerede før 1750, og fram til 1900-tallet har man gravd dypere og dypere i teori rundt løsninger av både ordinære og partielle differensialligninger, ofte i sammenheng med andre grener av naturvitenskap som ofte er utspringet til de ligningene man har studert.

Jeg skal nå hoppe fram til år 1881 hvor den franske matematikeren Henri Poincaré skriver følgende [7, s. 350-351]:

> To study an algebraic equation on begins by examining what is the number of real roots using Sturm's theorem. Likewise, to study an algebraic curve, we begin by constructing the curve, as they say in the Special Mathematics course [in the lycée, a course for students of mathemtical talent], that is to say that we investigate which are the closed branches of the curve, which are the infinite ones, etc. Naturally it is by the qulaitative part of the subject that we should approach the theory of any function, and for that reason the problem which presents itself in the first place is the following: to construct the curves defined by differential equations.

Poincaré åpner opp for en kvalitativ tilnærming til det å studere differensialligninger, altså finne ut hvordan en løsningsfunksjon oppfører seg, hvor man konstruerer løsningskurver basert direkte på differensialligninger. All teori knyttet til differensialligninger fram til dette punktet har hovedsaklig hatt en kvantitativ tilnærming, og selv om tilnærmede løsningsmetoder var oppdaget, så er utregninger fortsatt svært tidkrevende uten en datamaskin til å hjelpe seg. Når vi så beveger oss inn på 1900-tallet så gjør derfor utviklingen av datamaskinen det mye lettere å kunne gjøre beregninger fort, som åpner opp for hyppigere bruk av numeriske metoder til å beregne løsningskurver til forskjellige typer differensialligninger.

3.2 Modellering ved bruk av differensialligninger

Å modellere vil offisielt si å formulere virkelige fenomener ved matematisk språk, og for å gjøre dette kreves det stor innsikt i problemet man studerer for å vite hvilke forenklinger man kan gjøre og hvordan dette kan settes opp matematisk.

Et argument for å ha en numerisk tilnærming som utgangspunkt for å løse differensialligninger er mulighetene det gir for studenter å kunne modellere for eksempel fysiske fenomener. Siden selve modelleringen kan være krevende, så betyr ikke det at prosessen fra å ha en differensialløsning å løse til å trekke konklusjoner ut ifra resultatet skal være et hinder. Hvis studentene kan ut ifra matematiske relasjoner, som det for eksempel Eulers metode bygger på, kunne argumentere for hvordan utviklingen av en mengde x varierer med t uten å måtte være avhengig av å huske og gjenkjenne spesielle type ligninger og løsninger, så danner gir det en større innsikt i hvordan en løsningskurve

Hva	Modell
Dyrepopulasjon	$x' = kx$
Halveringstid for radioaktive stoffer	$x' = -kx$
Toricellis lov	$x' = -k\sqrt{x}$
Newtons andre lov	$x'' = \frac{F}{m}$

Figur 3.1: Vanlige modeller studenter blir introdusert for i møte med differensialligninger [9]

faktisk blir bygges opp. En datamaskin kan på den måten også fungere som et verktøy for studenter til å utforske oppførselen til en differensialligning slik som Poincaré åpnet for å gjøre.

Flere modeller som studenter møter i innlæringsfasen til differensialligninger er plukket ut for å demonstrere bruk av spesielle analytiske metoder. I Figur 3.1 er det listet opp flere vanlige modeller og deres anvendelse som er vanlige å introdusere for studenter.

Disse anvendelse av differensialligninger tar utgangspunkt i at studentene har en grunnleggende forståelse av kalkulus, siden det fint går an å løse disse ligningene ved analytiske metoder. Fordelen med numeriske metoder er for det første at du ikke trenger å komme inn i tankegangen om å klassifisere og integrere, men du kan uavhengig av hvilken type ordinær differensialligning resonnere deg fram til hvordan en løsningskurve vil utvikle seg over tid (eller enhet du har langs første akse). For det andre baserer en numerisk metode seg på generelle matematiske konesepter som ligger tett knyttet opp til differensialligningen vi løser, og jeg tenker da spesielt på Eulers metode som er et naturlig førstevalg for studenter å bli introdusert for som deres første numeriske metode, siden den samtidig gir en intuitiv geometrisk forståelse av hvordan man bygger opp en løsningskurve.

KAPITTEL 4

Teoretisk rammeverk

I dette kapittelet skal jeg gjøre rede for teori som er didaktisk relevant for min problemstilling. Jeg vil starte med å introdusere sentrale begreper, før jeg etterpå gir et bilde av hva som finnes av tidligere forskning på dette området. Dette vil jeg senere bruke som verktøy til å analysere studentbesvarelsene.

4.1 Konseptbilde og konseptdefinisjon

Konseptbilde og konseptdefinisjon er to begreper knyttet til undervisning i matematikk, og de beskriver hvordan et individ bygger opp en forståelse av et matematisk konsept. Begrepene, som jeg har oversatt fra de engelske ordene "concept image"og "concept definition", ble først introdusert av Tall og Vinner i 1981 [17], denne teorien kan ses på i sammenheng med Piagiet sine læringsteorier [15, s. 94-96].

Et konseptbilde består derfor av alle tanker og assosiasjoner en person har om et gitt matematisk konsept [17]. Det inkluderer alle mentale bilder, begreper, metoder og operasjoner personen kan ha for å gi mening til et konsept. Hver person har hvert sitt personlige konseptbilde, og deres konseptbilde er et resultat av alle deres tidligere erfaringer tilknyttet konseptet.

En konseptdefinisjon er, som navnet tilsier, en definisjon av et konsept, men her er det viktig å skille mellom en personlig konseptdefinisjon og en formell konseptdefinisjon [17].

En formell konseptdefinisjon er en definisjon av et konsept som er akseptert i et større matematisk miljø, mens en personlig konseptdefinisjon skiller seg fra en formell konseptdefinisjon ved at det tar utgangspunkt i studentens egen tolkning av et konsept [17], enten ved at studenten prøver å bygge opp sin egen definisjon av konseptet, eller ved at studenten tolker en formell definisjon på sin egen måte, basert på sitt nåværende konseptbilde.

4.2 Hva sier tidligere forskning om konseptbilde og konseptdefinisjon?

David Tall var en av de første personene til å bruke begrepet konseptbilde. Han gjorde i 1986 et forsøk på å utvide konseptbilde til studenter innenfor tangenter, ved å la studentene bruke en datamaskin til å visualisere tangentlinjer [16].

Bakgrunnen for oppgavene han ga studentene tok utgangspunkt i Skemps tre trinns metode for å bygge og teste matematiske konsepter. Trinnene besto av følgende:

- Direkte metode for å bygge opp og teste ved å bruke programvare på datamaskin.
- Diskusjon med lærer.
- Interne prosesser i studenters tanker.

Denne metoden anses som effektiv i å introdusere nye konsepter for studenter som har blitt sett på som abstrakte fra før, men man må passe på at datamaskinen ikke skaper uforutsette problemer, som tar fokuset bort fra det studentene faktisk skal lære [**tal86**]. Tall presiserer at studenter har en annen tilnærming til nye matematiske konsept, og derfor bør de ikke introduseres for et nytt konsept som om de var matematikere, men de bør heller bli gitt moderate kompliserte problem som krever en viss grad av abstraksjon til passende eksempler [**tal86**]. Dette er noe som krever idéutveksling sammen med en kompetent andre.

Utfallet av Talls forskning var at en datamaskin kan hjelpe til å utvide studenters konseptbilde i spesielle tilfeller for å utforske spesielle egenskaper ved et konsept. Det ble vist ved at studentene for eksempel klarte å tolke tangenten i et punkt der funksjonen forandret seg, men gradienten fortsatt forble den samme. Samtidig oppsto det et problem for mange ved at en tangent kan ligge over en lineær graf og da skjære funksjonen i mange punkter, da mange studenter hadde utviklet en personlig konseptdefinisjon av en tangent som å kun skjære funksjonen i ett punkt.

Rösken og Rolka har forsket på hvilen rolle konseptbilde og konseptdefinisjon har for studenters læring av integraler, og resultatene deres viser at definisjoner tilknyttet konseptet spilte en veldig liten rolle for studentenes læring, mens intuisjon som studentene allerede har og som er med på å utfylle studentenes konseptbilde spiller en mye større rolle [13]. En konsekvens av dette er da også at det oppstår oftere problemer for studentene, siden mye bygger på studentens egne subjektive forestillinger, noe som varierer fra student til student.

Resultatene kunne også vise at studentene allerede hadde kjennskap til relevante aspekter ved konseptet, men fikk samtidig utviklet et enda rikere konseptbilde, men desto dårligere var dere konseptdefinisjoner, som ofte var dårlig representert og særlig de analytiske [13]. Problemer som oppsto hos studentene var blant annet knyttet til forskjellen mellom areal og integral, altså koblingen mellom to matematiske konsepter og symbolsk representasjon, i den grad at for eksempel symbolet for integral er koblet til en spesifikk type funksjon.

En viktig konklusjon Rösken og Rolka [13] gjorde var at et konseptbilde må ses på som en del av flere konseptbilder som ofte relateres til hverandre. Da studentene møtte en konflikt, ble løsningen ofte at de ignorerte deler ved oppgaven eller de brukte sine eksisterende assossiasjoner til å tolke oppgaven, som ofte gjorde at resultatet ble feil.

Det som også har blitt gjort i forskning med konseptbilder er å se hva faglig tilhørighet har å si for studenters læring av et konsept. Bingobali og Monoghan utførte i 2008 et forsøk med matematikkstudenter og mekanikkingeniørstudenter der de skulle utforske studentenes forståelse av den deriverte [3]. Spesielt ønsket de å se nærmere på følgende aspekter:

- Studenters utvikling av konseptbilde av den deriverte
- Sammenhengen mellom læring og studenters utvikling av konseptbilde
- Studenters utvikling av konseptbilde basert på deres faglige tilhørighet

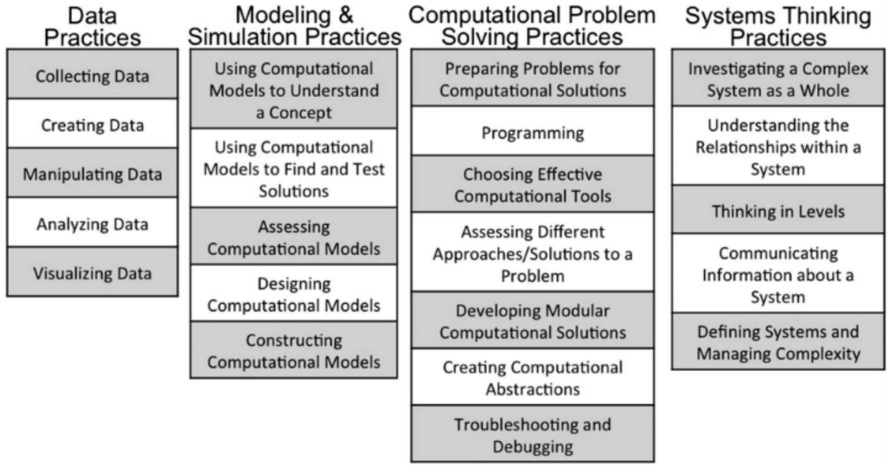
Mekanikkingeniørstudentenes konseptbilde av den deriverte utviklet seg mot å se på den deriverte som «grad av forandring», mens matematikkstudentenes konseptbilde utviklet seg i retning av å se på den deriverte som en tangent, altså at den deriverte utgjør stigningstallet til en tangent. Bingobali og Monoghan konkluderer også med at lærepraksiser og faglig tilhørighet har en påvirkning på studentenes utvikling av konseptbilder og måten de bygger opp sammenhenger på [3]. De viser til at tidligere forskning har basert seg mye på kognitive aspekter, og dermed ikke tatt like mye hensyn til kontekstuelle læringssituasjoner, og resultatet i deres forskning overrasket dem derfor ikke.

En studie fra 2015 gjort av Wagner, Roundy, Dray, Monouge og Weber [14], har også tatt utgangspunkt i studentenes forståelse av konseptet om den deriverte, og denne studien bygger videre på en annen studie gjort av Zandieh i 2000. De ønsket å utvide rammeverket som Zandieh hadde bygd opp, noe de også klarte ved å blant annet legge til en numerisk representasjon av den deriverte. I den forbindelse introduserte de også begrepet «tykk» derivert, som henspiller seg på idéen om at den deriverte kan uttrykkes som en infinitesimal forandring. Numerisk vil ikke dette kunne skje, men «tykk» viser derfor til at det er en veldig liten forandring, som praktisk sett er lik den faktiske deriverte. Det utvidede rammeverket gjør at svaret på «finn den deriverte» har fått flere alternativ å velge mellom, da for eksempel en numerisk representasjon kan være et svar. Poenget er at et svar kan gi mening ut ifra hvilken kontekst man forklarer det ut ifra, men fellesnevneren her er at det krever en konseptuell forståelse av den deriverte i form av forhold, grense og funksjon, hvor det kan ligge en viss «tykkhet» i den deriverte [14]. En instrumentell tilnærming til å finne den deriverte ved å bruke regler for symbolske deriverte krever derimot ikke en konseptuell forståelse av den deriverte Ref.

4.3 Algoritmisk tenkning

Algoritmisk tenkning er et begrep som gjennom de siste tiårende har fått forskeres oppmerksomhet. Begrepet inkluderer forskjellige løsningsstrategier som oppstår i møte med problemløsning. Algoritmisk tenkning er en oversettelse fra det engelske begrepet «computational thinking», som ble først brukt av Papert i 1980 [12].

Begrepet har også blitt populærisert av Jeannette M. Wing i en artikkel hun skrev i tidskriftet «Communications of the ACM», der hun blant annet skriver «Computational thinking is a fundamental skill for everyone, not just for computer scientist» [**win06**], før hun går løs på å forklare de forskjellige aspektene ved



Figur 4.1: Taksonomi utviklet med bakgrunn i algoritmisk tenkning [18, s. 135]

algoritmisk tenkning som omfatter blant annet rekursiv tenkning, abstraksjon, dekomponering, representasjon, mønstergjenkjenning og algoritmer.

Denne tanken har blitt videreført i en studie gjort av en rekke amerikanske forskere [18], der du utvikler en taksonomi rundt algoritmisk tenkning, som vist i Figur 4.1. Jeg har ikke valgt å la dette være hovedfokuset mitt i denne oppgaven, men den gir likevel et utgangspunkt for å utforske deler ved algoritmisk tenkning som kan bidra til økt læring hos studenter. Mest relevant for meg i min masteroppgave går på å bruke modeller til å test og finne løsninger, feilsøking og kategorien som tar for seg tenkning av et system på et høyere nivå.

Det skal sies at algoritmisk tenkning ikke er noe nytt, fordi algoritmer har blitt utviklet i matematikk til alle tider. Det nye er kanskje at vi forsøker å være mer presise rundt hva det er.

KAPITTEL 5

Metode

I dette kapittelet skal jeg starte med å gjøre for forskningsdesignet jeg har valgt å bruke i min studie. Jeg vil deretter presentere bakgrunnen til studentene som er plukket ut før jeg etterpå gjør rede for validiteten bak studiet. Til slutt vil jeg presentere taksonomien jeg har valgt å bruke som et grunnlag for oppgavene studentene skal løse.

5.1 Kvalitativ forskningsmetode

Dalen [4, s. 15] skriver: ”Et overordnet mål for kvalitativ forskning er å utvikle forståelsen av fenomener som er knyttet til personer og situasjoner i deres sosiale virkelighet.”, og dette er også grunnen til at jeg i min masteroppgave har valgt en kvalitativ forskningsmetode. En kvalitativ tilnærming gjør at jeg får innblikk i studentenes måte å tenke på, og kan få et tydelig bilde av hvordan studentene bygger sin kunnskap. Dalen skriver videre at kvalitativ forskning bygger videre på at ”mennesker skaper eller konstruerer sin sosiale virkelighet og gir mening til egne erfaringer”. Sett fra et matematisk perspektiv beskriver dette sitatet en viktig kilde til studenters tilnærming til ny kunnskap, nemlig at de prøver å gi mening til ny kunnskap basert på egne erfaringer. Dette danner grunnlaget for min videre forskning.

5.2 Forskningsdesign

I min masteroppgave har jeg tatt utgangspunkt i to studentgrupper bestående av to studenter i hver gruppe. Studentene skulle løse et oppgavesett bestående av fire hovedoppgaver og hadde ubegrenset tid. I tillegg fikk de i oppgave å lage et tankekart før de begynte på hovedoppgavene, samt å prøve å løse det jeg har kalt en kontrolloppgave, som består av en differensialligning der spørsmålet er hvordan en løsningskurve vil oppføre seg når tiden går mot uendelig. De løste en kontrolloppgave både før og etter hovedoppgavene, men selve differensialligningen varierte. Jeg går nærmere innpå min begrunnelse for valget av oppgaver litt senere.

Sesjonene med studentgruppene ble gjort med omtrent en ukes mellomrom, og studentgruppene hadde aldri kommunikasjon med hverandre. Studentene kjente hverandre innad i hver gruppe, med baktanke om at terskelen for å reflektere høyt og samarbeide skulle være så liten som mulig.

Kilder til datamateriale for videre bearbeiding består av transkriberte lydopptak fra sesjonene i tillegg til notater som studentene gjorde underveis. Transkripsjonene ble gjort i kort tid etter sesjonene for at ikke visuelle detaljer skulle bli glemt i etterkant. Analysen vil bestå av relevante utdrag fra sesjonene etter min egen dømmekraft, og velges ut på bakgrunn av mine forskningsspørsmål.

Selve forskningsdesignet er basert på en interaktiv modell utviklet av Joseph A. Maxwell [10, s. 77]. Dette er illustrert i Figur 5.1. Den har blant annet til hensikt å hjelpe til å strukturere forskningen med en baktanke om at kvalitativ forskning blir påvirket av ny informasjon som kan komme i løpet av forskningsprosessen [10, s. 76]. Det er en prosess som veksler dynamisk mellom de forskjellige elementene i den interaktive modellen. Jeg skal gi en oversikt over hvordan jeg har implementert de forskjellige elementene i modellen i min forskning:

Mål: Mitt mål med masteroppgaven er å kunne utvide studenters konseptbilde av differensialligninger ved å ha en numerisk tilnærming. Det skal forhåpentligvis gi mulighet for studenter å knytte et tettere forhold mellom en differensialligning og dens løsninger. Som et resultat vil jeg prøve å trekke ut generaliseringer i studenters læring av differensialligninger som fremkommer av forskningen.

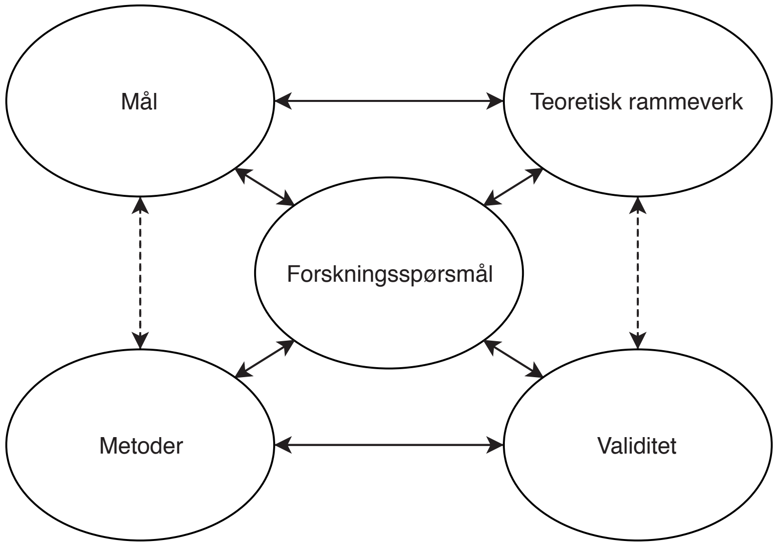
Teoretisk rammeverk: Som et rammeverk for min forskning vil jeg ta utgangspunkt i forskning knyttet til konseptbilde og konseptdefinisjon [17]. Tidligere forskning på dette området går tilbake til 80-tallet, og har blitt plukket opp av flere forskere opp gjennom årene, med mål om å avdekke elevers forståelse av matematiske konsepter.

Forskningsspørsmål: Mine forskningsspørsmål er beskrevet i 1.1, og jeg vil med de prøve å etablere studentenes konseptbilde slik at jeg kan både se forskjeller i studentenes faglige bakgrunn og ikke minst om studentene får utvidet sitt konseptbilde gjennom mine oppgaver.

Metoder: Som jeg har skrevet over blir data som jeg bruker i min analyse innsamlet ved et interaktivt intervju, der studentene utfører mitt oppgavesett, men samtidig har mulighet til å interagere med meg. Intervjuene ble gjort i små grupperom og mine data baserer seg på lydopptak fra hele sesjonen samt ark studentene brukte til å forklare og regne oppgavene.

Validitet: Jeg vil være forsiktig med å trekke bråe konklusjoner fra min forskning, fordi jeg har relativt få studenter med som intervjuobjekter. Resultatene trenger derfor ikke være helt representativt for deres faglige bakgrunn, men jeg vil allikevel argumentere for at det finnes visse resultater som er relevant og trekke det opp mot tidligere forskning for å diskutere dens implikasjoner.

Dette er altså skjelettet som danner utgangspunktet for min forskning, og som gjennom min masteroppgave har endret seg ut ifra nye impulser og retninger jeg har valgt å gå.



Figur 5.1: Joseph A. Maxwells interaktive modell av et forskningsdesign [10, s. 78]

5.3 Studentenes bakgrunn

Studentene var hentet fra bachelorprogrammene Matematikk og økonomi (heretter omtalt som MAEC) og Fysikk og astronomi (heretter omtalt som FA) ved Universitet i Oslo. Det er et poeng at studentene er fra to forskjellige program, da deres faglige bakgrunn er noe forskjellig.

MAEC-studentene har i sitt første semester ved Universitet i Oslo hatt blant annet emnene MAT1100 (Kalkulus) og MAT-IN1105 (Programmering, modellering og beregninger). Det vil si at de har hatt en innføring i Python der de har lært de grunnleggende prinsippene bak programmering, som løkker, tester, plotting og lignende, og de har hatt en innføring i numeriske beregninger, som for eksempel bruk av Eulers metode.

FA-studentene har en litt mer omstendelig bakgrunn. De har tatt emnene MAT1100 (Kalkulus), MAT-INF1100 (Modellering og beregninger) og IN1900 (Introduksjon til programmering for naturvitenskapelige anvendelser). De har altså gått mer i dybden med programmering i Python, og også bedre kjennskap til blant annet differensligninger. I deres nåværende semester tar de også FYS-MEK1110 (Mekanikk) der de aktivt bruker differensialligninger til å løse problem angående for eksempel vei, fart og tid.

5.4 Validitet

I min studie er det kun involvert fire studenter, to og to fra hvert sitt bachelorprogram. Jeg har dermed et lite utvalg som er valgt etter hvilke studenter som meldte seg frivillig til å være med. Denne type forskning kan anvendes til å gjøre generaliseringer som kan gjelde situasjoner slik de er i dag [4, s. 96]. Jeg må som forsker i følge Dalen [4, s. 96] være ”omhyggelig med å frembringe tilstrekkelig og relevant informasjon". Jeg bruker i min forskning oppgavearket som en slags intervjuguide, og kan gjennom intervjuet reagere til studentenes besvarelser ved å stille mer utfyllende spørsmål for å sikre validiteten. Siden datamateriale består av transkiberinger, blir dette gjort klart for studentene i forkant av intervjuet.

5.5 Taksonomi

For å kunne sette ord på studenters læring og tankeprosesser har flere personer prøvd å utvikle system for å kategorisere kvaliteten på studentenes arbeid. Fellesbetegnelser for slike systemer kalles taksonomier.

Taksonomier gjør det mulig å vurdere hvor effektiv læringen hos en student er, og det finnes flere taksonomier som er bygd opp på forskjellige måter. En populær taksonomi som blir mye brukt er Blooms taksonomi. Den består av forskjellige nivåer av kognitive prosesser: Huske - Forstå - Anvende - Analysere - Evaluere - Lage [5]. Den beskriver altså en progresjon i studenters læring som undervisere kan ta utgangspunkt i når de for eksempel planlegger hva elevene skal lære. Likevel så har den blant annet fått kritikk for å ikke skille mellom studentenes svar, da for eksempel noen svar kan være korte og overfladiske, mens andre svar til det samme spørsmålet kan være utfyllende og grundige, uten at det gjør forskjell på hvilken kategori av læring det vil bli klassifisert under. Som et alternativ kan man heller ta utgangspunkt i en annen taksonomi, for eksempel SOLO taksonomi utviklet av John B. Biggs, og det er også denne taksonomien jeg skal bruke i denne oppgaven.

SOLO står for Structure of the Observed Learning Outcome, og ble utviklet av John Biggs og har som hensikt å kunne vurdere studenters forståelse i form av kvalitet og ikke bare basert på kategorisering av besvarelser slik Blooms taksonomi baserer seg på "[2]. Jeg kan altså bruke denne taksonomien som utgangspunkt for å la studenter bygge opp en forståelse av et konsept. Selve oppbygningen av taksonomien består av fem forskjellige nivåer av forståelse, og danner utgangspunkt for oppgavesettet jeg presenterer i delkapittel 5.6. Jeg skal beskrive hvert nivå i mer detalj:

Førstruktrert: Du viser veldig liten kompetanse og har problemer med å forstå et konsept på grunnleggende nivå.

Enstrukturert: Du har kjennskap til grunnleggende begreper, prosedyrer og idéer tilknyttet et konsept, men ser ofte bare én relevant side ved saken.

Flerstrukturert: Du kan vurdere flere relevante aspekter, men du opererer med dem individuelt uten å se relasjoner mellom dem.

Relasjonell: Du kan se relasjonen mellom flere aspekter, og du forstår idéen bak.

Utvidet abstrakt: Du kan konseptualisere til et høyere nivå, slik at du kan bruke dette til å løse nye problemer innenfor andre temaer.

5.6 Oppgavesett

Oppgavesettet jeg utviklet til studentene er basert på SOLO taksonomien beskrevet i delkapittel 5.5, og fokuserer på overgangen mellom det flerstrukturelle stadiet til det relasjonelle stadiet. Oppgavesettene var litt forskjellig mellom studentgruppene, og de finnes i sin fulle form som vedlegg 8.4 og 8.4.

Oppgavesettets oppbygning sett i sammenheng med SOLO-taksonomi

Tankekartet, første kontrolloppgave og oppgave 1 er ment som å avdekke studenters forståelse i henhold til det enstrukturelle og flerstrukturelle perspektivet i SOLO-taksonomien. Her kan de vise kunnskap og forståelse for grunnleggende sider ved differensialligninger og også reflektere over flere aspekter ved det å løse differensialligninger.

Oppgave 2 og 3 skal gi en overgang fra det multistrukturelle perspektivet til det relasjonelle perspektivet. Det gjør den ved å kombinere flere aspekter som kreves for å løse en differensialligning numerisk, og spesielt mitt eksempel som legger til en grad av abstraksjon.

Tankekart og kontrolloppgaver

Som en innledning til differensialligninger valgte jeg å gi studentene i oppgave å lage et tankekart. Hensikten er å kunne få et overordnet inntrykk av deres konseptbilde av differensialligninger, siden alle deres umiddelbare assosiasjoner kommer til uttrykk på en oversiktlig måte.

Etterfulgt av tankekartet fikk studentene i oppgave om å prøve å løse det jeg har kalt en kontrolloppgave. Hensikten er i likhet med tankekartet å få innblikk i deres framgangsmøte i møte med en differensialligningen. Intervjuet med studentene avsluttet med en lignende kontrolloppgave.

Kontrolloppgave **før** oppgaveheftet:

$$x' - x^2 - 2t = 1, \quad x(0) = 0$$

Hvordan vil løsningen oppføre seg når t går mot uendelig? (5.1)

Kontrolloppgave **etter** oppgaveheftet:

$$x' - x^3 - \frac{2}{(t+1)^2} = 1, \quad x(0) = 0$$

Hvordan vil løsningen oppføre seg når t går mot uendelig? (5.2)

Oppgave 1

Den første oppgaven gir studentene fire alternativer til løsning av differensialligningen

$$x' = 2t, \quad x(0) = 0 \tag{5.3}$$

Dette er kanskje den simpleste differensialligningen som eksisterer, men det gjør ingen forskjell i oppgaven. Studentene skulle vurdere hvilke eller hvilket alternativ som viser en løsning til ligning (5.3). Alternativene er valgt slik at det representerer både en analytisk løsning i alternativ (a), en feil løsning i alternativ (c) og to numeriske løsninger i alternativ (b) og (d) løst ved Eulers metode og eneste forskjell er størrelsen på tidssteget som er blitt brukt.

Alternativ (d) er forskjellig mellom MAEC-studentene og FA-studentene på den måten at den den viser kun prikker i de tilnærmede løsningspunktene for FA-studentene, i stedet for prikker med strukne linjer mellom seg for MAEC-studentene. Dette ble en justering i etterkant for å gjøre det tydelig at et alternativ til en løsning kan bestå av punkter og ikke en kontinuerlig funksjon.

Hensikten er å få frem studentenes refleksjoner og kunnskap om numeriske metoder som løsning til en differensialligning.

Oppgave 2

Den andre oppgaven er på mange måter kjernen i oppgaveheftet. Her skal studentene utvikle en numerisk metode basert på differensialligningen gitt ved

$$x' = 1 - x^2, \quad x(0) = 3 \tag{5.4}$$

Dette er en ikke-lineær førsteordens differensialligning, og kan ikke løses analytisk, og derfor er det helt nødvendig med en numerisk metode for å kunne se hvordan en løsningskurve vil kunne oppføre seg.

For at de skal få følelsen av å bygge opp en ny metode, valgte jeg å lage en kombinasjon av Eulers metode, Eulers midtpunktmetode og Heuns metode beskrevet i delkapittel 2.2. Denne metoden bruker først Eulers metode et halvt steg bortover før den videre følger tangenten gitt ved stigningstallet i sluttpunktet. Idéen er å legge inn grad av abstraksjon ved at vi ikke vet verdien i sluttpunktet. Det medfører at studentene er nødt til å argumentere symbolskt og bruke en kombinasjon av flere matematiske konsepter for å kunne ende opp med en algoritme for denne numeriske metoden. Jeg valgte å formulere problemet ved halve tidssteg for at de kunne koble idéen til Eulers midtpunktsmetode.

Oppgave 3

I den tredje oppgaven har studentene enten fått eller skrevet et ferdig program i Python som tar i bruk den numeriske metoden de utviklet i oppgave 2. Oppgaven er delt i tre underpunkter der studentene skal endre på variabler i koden slik at startbetingelsen og tidssteget endrer seg i tillegg til å forklare hvorfor vi gjennom numeriske metoder alltid vil få en feil basert på grunnleggende teori om differensialer. Hensikten er å kunne se hvordan studentene kan bruke programmet til å bedre forstå differensialligninger. Programmet kan ses i vedlegg 8.4

Oppgave 4

I den siste oppgaven skal studentene reflektere over forskjellen mellom framgangsmåten ved en analytisk metode kontra en numerisk metode i møte med en differensialligning. Hensikten er å kunne få innsikt i hvilke refleksjoner de har gjort seg i løpet av oppgavesesjonen med et hovedfokus på en numerisk tilnærming til å løse differensialligninger.

KAPITTEL 6

Analyse

I dette kapittelet skal jeg presentere datamateriale fra studentenes besvarelser til å begrunne to av mine forskningsspørmål:

- Hvordan ser studentenes konseptbilde av differensialligninger ut?
- Kan en numerisk tilnærming til å løse differensialligninger utvide studentenes konseptbilde?

Jeg velger å ikke trekke inn mitt tredje forskningsspørsmål, da resultatene til å underbygge dette punktet fremkommer naturlig fra de to punktene ovenfor. Dette vil heller bli diskutert eksplisitt i neste kapittel 7.

Dette kapittellet vil bestå av analyse av små utdrag fra studentenes refleksjoner og resonneringer som er med på å underbygge mine to forskningsspørsmål ovenfor. Resultatenenes implikasjoner vil jeg diskutere i neste kapittel 7.

For enkelthetsskyld vil jeg referere til de to forskjellige studentgruppene ved følgende forkortelser:

S1: Studentgruppe 1 bestående av to studenter fra bachelorprogrammet MAEC

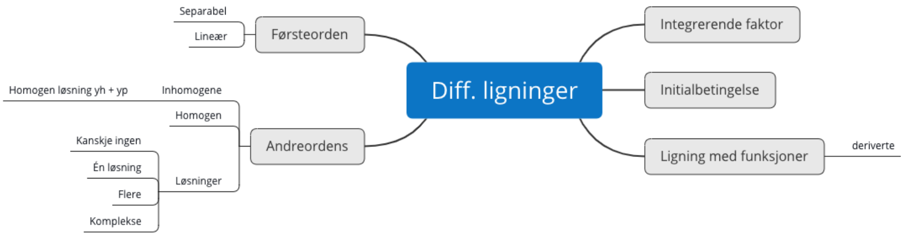
S2: Studentgruppe 2 bestående av to studenter fra bachelorprogrammet FA

6.1 Studentenes konseptbilde

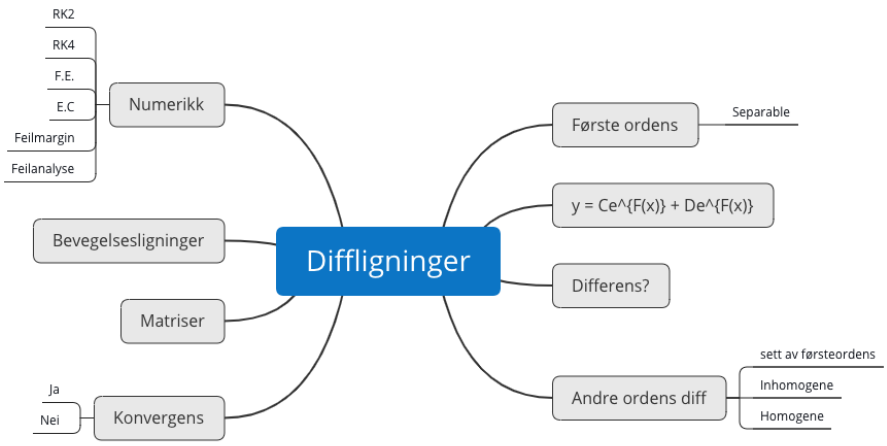
For å gi et bilde av hvordan studentenes nåværende konseptbilde ser ut, kan vi analysere studentenes tankekart og deres besvarelse av oppgave 1. På den måten får vi innblikk i studentenes tanker, assosiasjoner og fremgangsmåter tilknyttet det å løse differensialligninger.

Tankekart

Tankekartene i sin originale form finnes som vedlegg ..., men for å tydeliggjøre tankekartene har jeg gjengitt tankekartet til S1 i Figur 6.1 og tankekartet til S2 i Figur 6.2.



Figur 6.1: Tankekart av differensialligninger gjort av S1



Figur 6.2: Tankekart av differensialligninger gjort av S2

Studentgruppe 1

Tankekartet til S1 er utelukkende preget av begreper som brukes i tilknytning til analytiske løsningsmetoder av differensialligninger. De nevner førsteordens og andreorden som begge er to måter å klassifisere differensialligninger på, og de går litt dypere inn i førsteordens differensialligninger ved å nevne at det finnes separable og lineære differensialligninger. Det samme gjør de for andreordens differensialligninger, der de kobler inn to forskjellige typer, homogene og inhomogene, i tillegg til å huske at det kan finnes forskjellige antall løsninger til differensialligninger. Dette viser i henhold til SOLO-taksonomien er grad av forståelse som gjenspeiler det enstruturelle perspektivet, altså at de kun ser ett enkelt aspekt ved differensialligninger.

Studentgruppe 2

Tankekartet til S2 gjengir mye av det samme som S1 førte opp i sitt tankekart, da de viser til forskjellige ordner og typer av differensialligninger. De viser at de husker en generell løsning av en bestemt type differensialligning som kan løses analytisk.

Forskjellen fra tankekartet til S1 er deres fokus på numeriske metoder. De nevner en rekke metoder, som Runge-Kutta 2 (RK2), Runge-Kutta 4 (RK4), Forward-Euler (F.W.) og Euler-Cromer (E.C) i tillegg til å ta hensyn til feilanalyse. De kobler også disse metodene til bevegelsesligningene vi finner i klassisk fysikk. Gitt at S2 løser differensialligninger tilknyttet strekning, vei og tid i FYS-MEK1110, så gir det mening at de trekker fram det numeriske perspektivet ved differensialligninger, mens S1 ikke gjør det. I henhold til SOLO-taksonomien viser S2 å ha en forståelse av differensialligninger som beveger over mot det flerstrukturelle perspektivet, siden de viser tydelig kunnskap om flere aspekter ved differensialligninger, som S1 ikke gjorde.

Oppgave 1

I oppgave 1 fikk studentene fire forskjellige forslag til grafiske løsninger av differensialligningen

$$x' = 2t, \quad x(0) = 0 \tag{6.1}$$

og oppgaven deres var å begrunne hvilken eller hvilke alternativer som kunne anses som en løsning av nevnte differensialligning. Alternativene var nesten like for hver av studentgruppene, bortsett fra at alternativ (d) for S1 besto av streker mellom de tilnærmede punktene, mens alternativ (d) for S2 besto av kun prikker i selve punktene.

Studentgruppe 1

Under følger et utdrag av fremgangsmåten til S1:

2: Skal vi bare løse den først da?
1: Mhm
2: Så ser vi åssen greie vi får holdt jeg på åsi.
2: Den her er jo bare åintegrere da
1: Ja
2: Blir ikke den bare sånn, nei sånn blir det, og så C=0
2: Så $x(t) = t^2$, så det blir jo
1: Den? (a) Det må være den
2: Ja, for de andre var jo veldig hakkete
1: Det er fordi de er Euler, altså at intervallet er lite liksom
2: Skal bare dobbeltsjekke her, at 1 blir 1, vi er good

Gjennom en analytisk tilnærming til å løse differensialligningen konkluderer de raskt med at riktig svaralternativ er (a), og dette er ikke overraskende, siden ligningen jeg ga dem har en analytisk løsning, som de enkelt fant. Det er allikevel interessant å se at de angir alternativ (a) som det eneste riktige svaret når de tydelig kobler en "hakkete" graf til Eulers metode. Metoden er tydeligvis en del av deres konseptbilde, siden de bringer den fram, men deres første tanke om dens rolle som en løsning av differensialligningen er ikke tydelig.

Men at S1 nevner Eulers metode betyr ikke det at de forstår hva metoden går ut på. Det illustrerer følgende dialog mellom studentene til spørsmål om hva Eulers metode går ut på:

2: Det er forrige punktet i hvert fall
1: Ja, men jeg tror vi brukte noe med den deriverte
2: Ja, det er noe sånn derre, jeg husker jo ikke hva, er det ikke noe sånn $x_n = x_{n-1} + hf(x,t)$?
K: Sier du det fordi du husker det, eller fordi du forstår hva man gjør?

```
2: Nei, det er fordi det sitter her inne (peker på hodet)
```

Studentene husker deler av metoden uavhengig av hverandre, som at det er noe med den deriverte og at formelen sier at $x_n = x_{n-1} + hf(x,t)$, der h refererer til tidssteget vi går bortover, også kalt Δt i min oppgave. Dette utdraget antyder at S1 har en instrumentell forståelse av hva Eulers metode går ut på. Likevel så viser de videre å huske den geometriske representasjonen av metoden. Det kommer frem av følgende dialog:

2: Men jeg husker vi tegnet det slik at vi skjønte det, og da lagde vi masse streker og sånn, og til slutt ble det en graf liksom
K: Og hvordan lagde man de strekene, husker du det?
1: Det husker jeg ikke.
2: Så jeg tror det var, jo var det ikke noe sånn derre greier med at vi fant den neste x-en, nei, det var kanskje ikke på den, hvor man fant en x, og så gikk man opp til grafen og så tok du tangenten, det var kanskje en annen metode det, eller noe annet kanskje
K: Hva er det man gjør ut fra differensialligningen, som gjør at vi kan komme oss videre?
2: Vi har i hvert fall stigningen da, holdt jeg på åsi, til grafen, så vi vet at for t, så skal x gå opp med 2 liksom, typ, at hvis jeg går én t, så skal stigningen være $2t$.

De sier altså at de forsto metoden gjennom å tegne streker, men deres konseptbilde av differensialligninger mangler måter å koble forskjellige matematiske konsept sammen. De har tydeligvis gjennom tidligere læring utviklet en personlig konseptdefinisjon av Eulers metode til å ha noe med begrepene ”streker”, ”tangent” og ”stigningstall” å gjøre, takket være en geometrisk perspektiv ved å løse en differensialligning numerisk.

Etter å ha gitt dem en kort forklaring av Eulers metode i oppgaveheftet, hadde studentene følgende reaksjon:

2: Ja, okey, det var det jeg så for meg i hodet
1: Ja, vi brukte noe med den deriverte husker jeg
2: Ja, der var den $hf(t,x)$-greia og $f(t,x)$ var den deriverte

Det er åpenbart at de har lært metoden før, og at de gjennom en påminnelse får vekket til livet kunnskapen de innehar om akkurat Eulers metode. Det er allikevel tegn til at de heller ikke her klarer å knytte sammen matematiske sammenhenger, fordi de selv sier at de husker fragmenterte deler ved metoden, og dette er tilknyttet spesielle formler de gjenkjenner. For å få bedre innsikt i deres innsikt i metoden spurte jeg videre:

K: Hva er det den deriverte sier oss egentlig?
1: Stigningen, eller helningen til en tangent, er det ikke det? I et punkt?
2: Så da er det bare at vi får liksom stigningen i det punktet og så finner vi et nytt punkt, og så stigningen i det punktet, og det er derfor den blir litt sånn.
1: Og da, for hvert punkt får vi et nytt uttrykk for tangenten som er i det punktet, som vi kan bruke til åkomme videre til det neste punktet da, om jeg husker riktig
K: Hvis vi går tilbake til oppgave 1 igjen, og ser på den her. Hva vil det si da, at den deriverte til x er lik $2t$?
2: Jo, fordi starter du i 0 da, så har du jo at den deriverte blir fortsatt 0, det er derfor den går rett frem, og når du da begynner i en halv, og så tar du $2t$ opp sånn ikke sant fra en halv, den tangenten der, og s å har du tangenten der, og den tangenten der, og til slutt, så bare setter du sammen alt

```
1: Ligningen sier oss stigningen til hver tangent som er i det punktet da
```

Studentene viser at de kjenner til hovedidéen bak Eulers metode, i form av at de har tilegnet seg dens idé ved å huske en algoritme. Algoritmen er basert på bruk av tangenter for å komme seg fra et punkt til et annet, som er interessant, siden gjennom å reflektere over hva den deriverte er har gått fra å bruke begrepet "streker" til å koble strekene opp mot det riktige matematiske begrepet "tangent".

Deres konseptbilde av differensialligninger har fra tankekartet har vist seg å bli endret på den måten at flere sider ved deres fremgangsmåte og tanker om differensialligninger har blitt eksponert. Konseptbildet, som før tilsynelatende var ensrettet mot det analytiske perspektivet ved å løse differensialligninger, har vist seg å bli utfylt med også et numerisk perspektiv. Deres tankegang tyder på at de gjennom et geometrisk bilde klarer å utlede fremgangsmåten bak Eulers metode.

Studentgruppe 2

S2 viste i likhet med S1 en tankemåte som først er preget av det analytiske perspektivet ved å løse differensialligninger, og gitt en enkel ligning som er simpel å løse er ikke dette overraskende.

1: Hvilke av disse kan vi anse som en løsning, som \'e n løsning. Ja for du tenkte .., det blir jo bare åintegrere, så får du at integralet 2t er gitt ved x^2
2: Du mener t^2
1: Ja
2: Du må se at $x(1) = 1$, for den må oppfylle kravet
1: Hæ
2: x(1) = 1, siden $x(t) = t^2$, sant, så må jo roten være seg selv, og det gjelder jo ikke 1, men da kan det jo ikke være den heller

Differensialligningen er lett nok til at de kan regne ut en analytisk løsning i hodet, og også disse studentene sjekker for $t = 1$ at $x(1) = 1$ for å bekrefte hvilket eller hvilke alternativer som er riktig. Ser vi hva studentene gjør videre, ser vi at de etter å ha vurdert den analytiske løsningen vurderer de numeriske alternative (b) og (d), men de kaster fort vekk alternativ (c) av den enkle årsak at den er feil. De er kjent med at en numerisk løsning kan anses som en løsning av en differensialligning, men de er samtidig veldig klare på at det vil finnes en feil, som vi kan se av deres refleksjoner under:

```
1: Ja, det er vanskelig, fordi jeg vil si at a), du må nesten sette en
   slags terskel på hvor, hvis du ser på den analytiske, og du
   sammenligner med den, for du kan si at hvis du tar en iterering, og
   skal finne x-en, og sånn dt som er så stor, at du finner tangenten i
   det punktet, og det er sånn, åanse det som en løsning
2: Det er jo en løsning, det er bare en veldig dårlig en
...
1: Ja, assa det er så vanskelig, altså numerisk, det er litt vanskelig
   hvordan forhold du har til numerisk da, for sånn sett så er jo alle
   feil, for det er ikke, hvis vi ser på analytisk som riktig
...
2: Det kommer an på hvor langt du er villig til åla feilmarginen gå, altså,
   hvis du kan garantere feilmarginen, eller så liten at det er nesten
   ikke snakk om, så er det ikke noe poeng med analytisk løsning
```

```
1: Det er der det kommer med det Knut snakket om, der du hadde det med at
     numerisk løsning, er bare så god som informasjonen om feilmarginen, så
     hvis vi vet at liksom, okay, dette blir ikke riktig, men her er
     terskelen, den kommer til åfalle med så mye, da kan du nesten anse det
     som riktig svar på en måte, men hvis du ikke har den informasjonen i
     bakhodet, så er det vanskelig.
```

Studentene viser til å ha kjennskap til forskjellige aspekter ved numeriske metoder, og kan bruke dette til å reflektere over dens betydning av hva usikkerheten i bruk av numeriske metoder vil si oss. På den måten forsterker de deres eksisterende konseptbilde ved å vise kunnskap som henspiller mot det relasjonelle perspektivet ved SOLO-taksonomien.

Det er også interessant å se at de bruker ordet "iterering" til å beskrive en numerisk metode, og viser til deres tidligere bruk av programmering i utdannelsen. Dette gjentok seg også senere da de skulle programmere algoritmen de utviklet i oppgave 2, da de referte til x_0 som konstanten og t som variabelen, som om det allerede var en del programmet. Dette er et eksempel på hvordan bruk av datamaskin får en til å koble begreper fra programmering til matematiske begrep.

S2 får så vite at alternativ (b) og (d) er blitt laget ved bruk av Eulers metode, og de blir deretter spurt om de eksplisitt husker hva denne metoden går ut på:

```
1: Ja, det blir jo når du, ehmm, for eksempel at når vi bruker det,
     bevegelseslignigene, når du bruker, hvis du har informasjon om
     akselerasjonen, i vårt tilfelle at du samler summen av kreftene, delt p
     å massen, og så har du akselerasjonen, som er den deriverte, la oss si
     at du skal finne posisjonen ...
```

Studenten prøver som første tanke å gi mening til metoden ved å bruke tidligere kunnskap om bruk av numeriske metoder i en fysisk sammenheng, men kommer ikke videre i tankegangen utover dette. De nevnte tidligere begrepet "tangent" knyttet til numeriske metoder, men det har ikke satt seg som en del av deres assosiasjoner til Eulers metode. For å gjøre ting litt mer klart fikk de vite hva Eulers metode gikk ut på fra meg.

1: Ja, ikke sant, så det var ådele opp i sånne jevne mellomrom, så n antall mellomrom, med, hvor mellomrommet er dt stort
K: Nettopp, så jeg har et mellomrom her som er dt stort
1: Så bruker du, finner du den deriverte, er det ikke det?
2: I det neste punktet
1: Finne tangenten
K: Nettopp, vi bruker den til åfinne x'_k
1: Nettopp, finne tangent, så lager du et slags stoppunkt ved slutten av dt.

S2 gir nå uttrykk for å forstå idéen bak Eulers metode, og i likhet med S1 er deres personlige konseptdefinisjon av den deriverte knyttet til tangenter. Deres fremgangsmåte er til forskjell fra S1 basert på symbolsk representasjon av matematikk, som ikke er like presis ved at uttalelsen om å finne x'_k ikke gir mening. Idé fører likevel til samme algoritme som S1 har lært.

Selv om S1 på mange måter viste at konseptbilde deres var mer utfyllende enn det tankekartet først viste, så viser fortsatt S2 tegn til å inneha en bredere forståelse av hvilke implikasjonen en numerisk tilnærming har for å løse en differensialligning.

6.2 Numerisk tilnærming til differensialligninger

Jeg vil nå endre fokuset over til de delene av studentenes besvarelser som gir et innblikk i hvordan en numerisk tilnærming til det å løse differensialligninger har å si for dere matematiske resonnement og tankegang. Dette er derfor hovedsaklig dialog mellom studentene i arbeid med oppgave 2, der de først skulle reflektere over hvordan de kunne forbedre Eulers metode, for deretter å følge en ledet vei mot en numerisk metode utviklet av meg selv.

Studentgruppe 1

Den første innskytelsen for studentene var å minske tidssteget, Δt, som helt riktig vil gi en bedre tilnærming. Videre ble de oppfordret til å finne en bedre tilnærming ved å beholde det samme tidssteget. Det som da ofte går igjen i tankegangen til S1 er bruk av Eulers midtpunktsmetode eller repeterende bruk av Eulers metode. Det viser blant annet følgende dialog:

```
1: Er det ikke den derre Eulers midtpunktsmetoden som gjorde det bare bedre
2: Jo
1: For da gikk man bare et halvt steg, og så gikk man tilbake igjen for å
     finne den stigningen da, sånn at det blir mer
K: Hvorfor blir den bedre da?
1: Mhm
2: Altså jeg husker jo ikke hvordan ligningene ser ut en gang
1: Men du trenger bare bildet på en måte da. Hvorfor den blir bedre, ehm
2: Var det ikke noe sånn at vi fant da xn+1/2, og så bruker du den
     deriverte i xn+1/2 tilbake igjen da til åfinne den neste, så ...
```

Studentene husker at Eulers midtpunktsmetode er en forbedring, og deres måte å huske hva den går ut på knyttes igjen den en geometrisk representasjon, uten at dette blir fulgt opp videre. Det er allikevel interessant at de selv er klar over at en geometrisk tilnærming til de forskjellige numeriske metodene er en inngangsvinkel til å forstå hva metoden går ut på.

Siste del av dialogen viser at studentene prøver å huske den symbolske representasjonen av metoden, uten at det gir et klart bilde av deres forståelse av metoden. Dialogen indikerer at de knytter forskjellige matematiske uttrykk som de assosierer med Eulers midtpunktsmetode, og resonnementet er basert på løse idéer knyttet til metoden. Idéene er riktige, men dessverre ikke fullverdig gode for å trekke noen konklusjon av dere forståelse av metoden. For å gi et bedre bilde av deres forståelse skal jeg henvise til følgende dialog mellom studentene:

```
2: Men, okey, hvis vi bruker Eulers midtpunkt
1: Mhm
2: Da kommer vi vel dit-ish, fordi vi bruker den opp en halv dt, og så går
      vi... Og så der ble jeg litt stuck, hva gjør man da?
2: Da vil jeg si at jeg går ned dit og så tar jeg tangenten derfra, men det
      er jo ikke riktig
K: Hva sa du nå?
2: Man finner punktet der, går så ned på grafen, og finner så tangenten som
      er der i stedet, og så går du tilbake dit, og bruker tangenten der,
     nei jeg vet ikke jeg
```

Denne dialogen gir en mer detaljert forklaring for hvordan de ser for seg algoritmen som ligger bak Eulers midtpunktsmetode, og de resonnerer riktig ved bruk av tangenter, som de gjorde tidligere ved Eulers metode. Det er likevel en usikkerhet i forklaringene deres som gjør at de ikke helt står inne for sine egne resonnementer.

I møte med utfordringen med å bruke start- og sluttpunkt ser de at de kan bruke den deriverte ut i fra differensialligningen, men de prøver samtidig å koble det til Eulers midtpunktsmetode.

```
2: Vi veit vel den deriverte der og? Nei, for det er vel den deriverte for
     alle x-ene våre, så da kan vi jo bare ta og sette den deriverte fra det
      punktet og da. Men da vet jeg ikke om det blir fra det midtpunktet
     midt holdt jeg på åsi, eller fra sluttpunktet. Fordi, kan man ta liksom
      fra det punktet og det punktet, og bare ... Nei
K: Hva er det som kan være et problem i så fall?
2: Altså hvis du bare tar der hvor de tangentene krysser, det kan jo være
     langt i fra der du skal være da, hvis du er her for eksempel da, så får
      du jo plutselig, så får du langt oppi der, det blir jo helt feil. Men
     hvis du er her, så blir det jo mye bedre, sånn sett på en måte, eller
     liksom det spørs litt hvor du er på grafen, hvis du får et skjæ
     ringspunkt som er veldig langt unna.
2: Men vi vet jo at her har vi, den deriverte der blir jo da -8 da, i
     teorien. Og her veit vi at den deriverte er 1-x1^2. Men, jeg har ikke
     peiling.
```

Deres tankegang tilsier at de har en idé om å bruke tangenter i punktene til å finne en fremgangsmetode, men de får problemer med å skjønne hvordan de skal komme seg fra A til B ved hjelp av disse, selv om de uttrykker de deriverte i begge punktene. De tenker opprinnelig å bruke start- og sluttpunktet, men de tenker å følge de forskjellige tangentene til skjæringspunktet mellom tangentene, som skaper problemer for dem. I utledningen av denne idéen gikk de ut ifra en tegning som viste en graf som fungerte som det jeg kaller en hypotetisk analytisk løsning. I prosessen ved å finne nevnte idé ble det gjort i kombinasjon med å illustrere idéen på et kladdeark. Der opererte man konseptuelt med en tilfeldig graf som representerer en analytisk løsning om den hadde eksistert. Sluttpunktet ble for studentene regnet som fasiten for hvor de skulle ende opp, da dette faktisk ikke var tilfelle. Dette skapte forvirring for begge studentgrupper.

Siden de har nevnt Eulers midtpunktsmetode flere ganger, ble de bedt om å forklare metoden ved å tegne en skisse for den:

```
K: Kan du tegne det du har sagt fram til nå?
2: Okey, det er en halv dt, og så blir det det forrige punktet pluss den
     steglengden der ganget med den deriverte der. Jeg vet ikke hvordan jeg
     tegner det jeg.
K: Hva er det du har sagt nå?
2: Jeg tar det gamle punktet mitt, og så går jeg en lengde som er den der
     ganget med den deriverte der.
K: Hvorfor gjør du det?
2: Det er et godt spørsmål, fordi metoden sier man skal gjøre det. Hehe,
     har ikke peiling.
K: Så nå husker du metoden, og ikke nøyaktig hva du gjør?
2: Ja, jeg aner ikke hva jeg driver med.
```

Det kommer fram av dialogen at kunnskapen de har om å bruke Eulers metode tyder på å være basert på hva en formel sier dem. De viser følgelig tegn til en instrumentell forståelse av Eulers midtpunktsmetode, på den måten at de gjennom formler og regning kommer frem til riktig svar, noe også deres forståelse av Eulers metode viste. Men de får så prøve på nytt:

2: Men hvis jeg tar en halv der, da ender jeg opp der. Men da bruker jeg vel 1-x^2 på nytt da
K: Hvilken x skal du bruke da?
2: Den der (den i midten). Da finner jeg tangenten i det punktet

Igjen prøver studentene å bruke tangenter slik de gjør i Eulers metode Dette er ikke en forbedring av selve metoden, som var utfordringen de står ovenfor, bortsett fra at tidssteget har blitt halvert. Det er likevel positivt at de gjennom å ta hensyn til differensialligningen de skal løse kan argumentere for dens betydning i den numeriske løsningen. Studentene begynner så på nytt, men nå med strategi om å starte med konkrete verdier:

2: Så jeg må vite den deriverte, og selve punktet. Det er vel det eneste jeg trenger.
1: Mhm
2: Så kan vi jo lage den tangenten.
K: Hvordan gjør vi det?
2: Du bare liksom, jeg tenker bare sånn ett-punktsformelen. Kan vi bruke den?
2: Spørsmålet er hva den er da. Er den ikke sånn her? Med t og x i stedene da. Er det ikke noe sånn? For det der er jo da den deriverte.
1: Ja
2: Så i den her, da får jeg jo den, så da har jeg at. Da får jeg -8x + 3 tror jeg. I think. Jo. Jo. Er det ikke det?
1: Ja
..
2: Sånn liksom. Det blir jo da x' ganget med t. Nei, jo fordi -8 er x' i det punktet, eller x_k'
K: Så sier du at du skal gå halve t, i en viss retning.
2: Åja, skal jeg skrive ikke den, men den da. Skal jeg skrive x_k da. Eller $x_k + 1/2$ da. Så blir det minus den, det blir jo da y1, det blir jo x0, jeg må bare gjøre alt det her på nytt jeg, eller skjønner jeg ingenting . Det er x', t, $k + (1/2)\check{}t_0$. Da får jeg $x_{k+1} = x0 + x' * t_{k+1/2}\check{}t0$. Den kjenner jeg igjen.

Ved å konkretisere problemstillingen ved hjelp av ett-punktsformelen, kommer de frem til et uttrykk for tangenten. Veien til å generalisere ut ifra uttrykket til tangenten ble dermed lettere og de kom fram til hvordan de skulle gå halve veien ved bruk av symbolsk representasjon. Deres neste tanke for å komme videre, er å bruke samme fremgangsmåte igjen, altså Eulers metode, men etter et spørsmål om hva den deriverte var i sluttpunktet kom følgende fremgangsmetode fram:

2: Altså, jeg vet ikke om det her virker for lett men, er det ikke bare det (peker og skriver ned x_{k+1}'=1-x_0^2)?
K: Det er bare det neste, bortsett fra at vi starter i et generelt punkt x_k. Det er et uttrykk for den deriverte i punktet vi skal fram til.
1: Skal vi liksom lage en tangent ta? Med liksom generelle greier?

Studentene har tydeligvis fått en forståelse for enkelte matematiske konsepter, som å vite at stigningstallet i sluttpunktet er $x'_{k+1} = 1 - x_0^2$, og selv om dette var kunnskap de fra før hadde, så har de gjennom å generalisere innsett at de gjennom symbolsk representasjon kan argumentere for den overordnede idéen om å bruke stigningstallet i x_{k+1} generelt til å bygge opp en løsningskurve. I den videre utledningen oppstår et problem om hvilket punkt de skal bruke den deriverte fra:

2: Nei, jeg må tenke. Hvilken derivert er det jeg bruker her igjen? Det er den er det ikke det? For når jeg har brukt den så må jeg bruke k+1/2, s

```
    å det er den deriverte i det punktet, så det er den som jeg har brukt
    der.
K: Gå tilbake til tegningen og sjekk
1: Altså
2: Nei, det er den deriverte i det punktet. Sånn, gud a meg, uff, ehmm. Hva
     er det jeg har satt inn nå? Jeg har satt inn den, nei det har jeg ikke
    , nå har jeg satt inn den. Sånn, nå skal jeg sikkert gjøre mer med den
    her igjen. Sånn I guess.
```

Det er tydelig at de innehar kunnskap om konseptene derivert og tangenter, men de ser ikke selv hvordan de kan bruke det til å løse dette problemet, selv om de ved et hint klarer å komme inn på riktig tanke, som er å tenke på dette mer generelt og abstrakt. De tenker hele tiden på hvor man starter, og hva man bruker hvor, slik at de hele tiden vet hvordan progresjonen deres er. Igjen, så bruker de en geometrisk tolkning til hjelp for å finne ut hvilken derivert de bruker hvor. Når de så ender opp med et uttrykk for x_{k+1} er reaksjonen deres slik:

```
2: Okay, men da har jeg den i annen, og den som 1. Jeg kan ikke sitte igjen
     med en andregradsfunksjon nå. Det går ikke.
K: Hvordan løser man andregradsfunksjoner?
1: Tenker du abc?
```

Å blande inn andre matematiske konsept som å løse en andregradsfunksjon er noe som skaper en konflikt for studentene, men er helt håndterlig etter å vite hva de skal gjøre. Dette har vært et gjennomgående problem for S1 gjennom hele deres prosess.

Helt til slutt skulle de skrive det de har gjort på en helt generell form, noe de klarer, og samtidig kommenterer følgende:

```
1: Du skal jo skrive generelt ikke sant. Nå skjønte vi bedre ved åskrive
    tall da.
1: Vi går jo fra et punkt til neste litt mer spesifikt.
```

Det viser at overgangen fra konkrete tall å regne med til generelt har vært utfordrende for studentene, men at konkretisering av verdier hjelper dem til å generalisere.

Studentgruppe 2

S2 tenkte først, i likhet med S1, å bruke Eulers midtpunktsmetode, følgelig:

```
1: Ja, jeg husker på de midtveis greiene og sånn, at, er det RK hvor man
    bruker tangenten i flere punkter, det var noe sånn med at
K: Hvordan gjør man det i så fall?
1: Jeg husker ikke, men det jeg tror jeg husker, var noe med at, du finner
    tangenten opp til midtveis, stopper halvparten av dt, og så tar du en
    tangent igjen, og så stopper du igjen her, og så var det et eller annet
2: Var ikke det Eulers midtpunktmetode
1: Men så var det et eller annet sånn, ikke holdt jeg på åsi idiotisk, men
    et eller annet med at de droppet den der i midten og så bare gikk de
    derifra, og så lagde de en strek eller noe sånt, det var noe sånt, de
    gikk gjennom det punktet der, men de brukte den ikke helt direkte
    allikevel, det var ikke sånn at de gikk der og der, og så lagde de en
    kurve i mellom, eller var det det? Var det så enkelt
```

Denne dialogen viser at de prøver å huske metoden ved hjelp av tangenter, og at det var en spesiell rekkefølge man måtte følge. Det blir en algoritme bestående av flere elementer, men som ikke viser om de har en god forståelse av hvorfor metoden er slik den er. De prøver derfor videre å skrive opp metoden symbolsk.

```
2: Ja, altså du skal finne i det halve tidssteget, at du finner ut
     funksjonsverdien i det punktet der, og så tar du den deriverte i det
     punktet eller noe sånt. For da finner du en ny tangent som går som det
     her omtrent. X'(dt/2) et eller annet sånt der da.
1: Ja, for det, jeg ville tenkt, ja, x(t) + x'*dt/2
   ...
1: Ja, for jeg tenker bare at, da skal du samle så mange verdier her som
     mulig, så du skal på en måte finne gjennomsnittsverdien mellom her og
     der, er på en måte min intuitive forståelse, men det blir på en måte
     delta delt på delta t her, slik jeg tenker. Og så er det et eller annet
      over, så vi skal finne de verdiene her, men det er så vanskelig å
     skrive med ord
```

S2 finner et uttrykk $x(t/2) = x(t) + x' * dt/2$, etter å ha koblet idé en om den deriverte til tangent. De viser også at deres tidligere erfaringer gjør at de assosierer numeriske beregninger til det å samle forskjellige verdier i et punkt som de sier. Deres vei videre er å bruke samme fremgangsmetode som de har gjort til nå, nemlig Eulers metode.

```
1: Så har vi kommet bort dit, og så ja, Åja, for da kan vi bruke tilde, for
      da har vi verdien der, så hvis vi kommer oss dit, så kan vi la xk+1 =
     tilde da, og så bruker vi den deriverte, fortsatt fra her, er det det?
     Var det det som var hele poenget? For jeg husker bare at det var et
     eller annet jeg irriterte meg over,
2: Startpunktet vårt er tilde nå da
1: Ja, det var det jeg trodde da, men jeg husker det var et eller annet som
      irriterte meg, hvorfor fortsetter vi ikke langs, hvis vi går innom
     midtpunktet, kan vi ikke bruke midtpunktet
```

De har fått et konkret uttrykk for midtpunktet, så dermed tenker de å repetere fremgansmetoden, noe som gir mening, men som ikke var den opprinnelig utfordringen de fikk. Derfor måtte de tenke på nytt, og deres refleksjoner var da følgelig:

```
1: Kan vi gjøre noe sånn der krysspunktet mellom de to deriverte
K: Hvordan da?
1: Jeg tenkte bare at hvis du hadde en slags, la oss gjøre det litt enklere
      for meg da, ehm, ta en sånn, og en der, og så fra der til der så vil
     den deriverte i punktet der vil se ut som en tangent, og så den vil se
     .., nå gjør jeg det litt ekstremt da med tanke på at det blir så mye bø
     lger og sånn, men så da i stedet for ågå der, så kunne du for eksempel
     ha gått der, og så der. Da ville det automatisk se litt finere ut.
2: Men han spør hva informasjon har vi i det punktet der
1: Ja, at du tar den deriverte der, det var derfor jeg stoppet akkurat der,
      men nå var det litt uflaks da, siden nå stoppet den også i kurven, men
      poenget er at du stopper i det punktet de krysser
1: Ja, poenget var liksom at vi går sånn og sånn, så du får liksom med en
     liten grop. Så hvis du har den deriverte, og så har du en gitt
     intervall her, kaller den dt, hvordan vet vi at den deriverte skal
     stoppe i akkurat punktet hvor de to deriverte er like?
2: Kan du bruke middelverdisetning eller noe sånt? Jeg bare kaster ut ting
     som Knut Mørken har brukt før
1: Nei, men sånn, hvis vi starter der, hvordan kommer vi oss dit? Hva er
     det punket der? Da har vi x(t) pluss et eller annet. Pluss x'(t), men
     ikke sant, hvor langt, hvordan, for det punktet der er gitt ved at x'(t
     ), ehh, er lik x'(t1), sånn jeg har definert det punktet der
```

I likhet med S1, tenker også S2 å finne skjæringspunktet mellom to tangentlinjer fra startpuntktet og sluttpuntet, men også de støter på et problem når de ikke ser hvordan dette helt praktisk skal kunne løses ved hjelp av en datamaskin. Studentene prøver så å skrive ned fremgangsmåten generelt.

```
1: Venta, får bare se nå, bare prøve det her. Jeg klarer bare åikke se det
     helt for meg uten å... for det, hvis vi klarte åkomme oss hit halvveis
     ved hjelp av den deriverte der, og så skal vi dit, så brukte du da den
     deriverte av den til åprøve åkomme deg dit. Du veit bare den deriverte
     her.
K: Du starter derifra og bakover. Hva om du bruker stigningen der og
     forover.
1: Ja, okay, ja, ja, ja
K: For du aner ikke hva funksjonsverdien er der egneltig
1: Ja, okay, det kan vi gjøre. Ja, ja, ja, stemmer det. Ja, for når vi har
     kommet oss dit, så har vi på en måte en x0 nå
2: Mhm
1: Og så har vi den deriverte i alle punkt, så kan vi bruke x0 fra der, og
     jajaja, så finner vi jo den deriverte er. Ja, da er jeg med. Det gir
     mening.
```

S2 prøver å gi mening til problemet, men det at stigningstallet (den deriverte) i x_{k+1} er kjent gjør at de knytter det å bruke denne stigningen til bare dette punktet, og tanken om at den kan brukes fra midtpunktet, slår dem aldri, bortsett fra mitt pek fremover, hvilket gjør at det gir mening for dem. Dette gjelder i hvert fall idéen vi er ute etter. De prøver så å bryte ned fremgangsmetoden mer konkret ved å bruke tall, altså de starter i startpunktet vårt, og regner ut stigningstallet halvveis fremover, og deretter prøver å gå fra halvveis og helt frem. Da skjer følgende:

```
1: Delt på 2 pluss xk+1 derivert, ikke sant, og x+1 er jo fortsatt, du
     skriver x+1 derivert, så vi skal bruke den deriverte i det punktet her,
      men den deriverte er jo den samme, vi vet bare ikke hva verdien i det
     punktet er, så da henger det jo ikke på greip. Hvis vi skal finne
     verdien i 1, men så skal vi bruke den deriverte, men den deriverte
     bruker punktet igjen
```

Det oppstår en konflikt når de ikke lenger kan gjøre dette helt konkret, siden de jo ikke vet verdien vår i sluttpunktet. Her har de også satt dt=1 for å ha ting enda mer konkret uten noen generaliseringer. For at de skal komme seg videre, må jeg gi et lite hint om å generalisere det, noe de forsøker:

```
1: Ja, det blir jo bare åsette den derre, at du har sånn x av, x(i+1) = x(i
     ) +, og så formel for den deriverte, plopper inn, et tall, og så ganger
      du med dt.
...
1: x(i+1) = x(i), så her blir det, må huske hvilke ting jeg skal sette inn.
      Ehmm, så x derivert, ehh av t, nei av i, ehh, ganger dt halve pluss og
      så må vi bruke neste deriverte, men det er jo den samme som bare
     setter inn ehhh, den deriverte er den samme. Det blir bare verdien. Så
     nn, ...
K: Mhm, hvordan løste vi den da du du gjorde det første steget med verdier
     i stad da?
1: Da måtte jeg ta en
2: Kan du ikke fyre den over på den sida der da?
1: Men da, da satt jeg inn hele funksjonen
K: Ja
1: Det er kanskje bedre. Ja, det er bedre. (skriver) = x(i) + x' i i,
     ganger med dt/2, ehm, pluss skal jeg løse for akkurat den her?
K: Ja, vi kan løse for akkurat den
```

```
1: (skriver) Ja, parenetes 1 minus x av ..., pluss 1 .. i annen ganger dt/2
```

De ender så opp med en andregradsfunksjon, som de videre ikke har noe problem med å løse eller se at de skal løse den ved abc-formelen.

6.3 Bruk av programmering

I denne deler vil jeg trekke frem utdrag fra studentenes besvarelser som tar utgangspunkt i bruk av programmering og datamaskin til å forstå differensialligninger. Dette består hovedsaklig av studentenes besvarelser i oppgave 3 og 4.

Studentgruppe 1

S1 viste stort engasjement ved å prøve ut forskjellige verdier for startverdien x_0. De prøvde for 3, 5, 1, 10 og deretter spør de:

```
2: Kan man, kan man ta under 0? Prøv 0. Ta minus
```

Ved å prøve seg frem får de enkelt svar på spørsmål de lurer på, og de prøver hele tiden å forklare hvorfor løsningskurven ser ut som den gjør. Som et eksempel konkluderer de med følgende:

```
1: Den gikk sånn liksom i stedet for sånn
2: Nå går den jo feil vei nesten. Prøv 0.8
2: Okay, så basically er det, fra 0 til 1 er den wiii (beveger hånda i en
     kurve som ender med åkonvergere nedenifra mot en rett strek),
1: Sånn
2: Og så for 1 wii (beveger hånda i rett linje), og så over wiii (beveger h
     ånda i en kurve som konvergerer ovenifra mot en rett strek)
1: Basically
```

Til tross for upresist matematisk språk, så konkluderer de riktig, og begrunner det like riktig:

```
K: Det vi har gjort nå er vi startet i startpunktet, gikk en halv t bort,
     delta t bort, så brukte vi stigningen i sluttpunktet vårt til ågå
     videre fra midten av og utover. Så hvis vi starter i x=1. Hvordan vil
     den se ut videre da. Hvorfor ser den ut sånn som den gjør?
2: Fordi vi har en stigning på 0, så den bare går bort, og
1: Neste stigning blir jo bare null i gjen, så fortsetter det sånn
2: Så alle stigningene blir 0 fordi den første er 0. Da blir det en rett
     strek
K: Hvis den er litt høyere enn 1
2: Da får du et negativt stigningstall, så da går den ned sånn. Hvis du er
     litt under
1: Så går den opp
2: Ja, for da får du ikke et tall som er større enn 1, så det blir fortsatt
      positivt.
K: Forklarer det hvorfor løsningene ser ut slik de gjør da? Kunne dere
     forklart hvorfor løsningene ser ut slik på grunn av vår DE?
2: Nå så, men ikke i stad
```

Utforskningsmetoden slik de har gjort har altså gjort at de selv føler de forstår hvorfor en løsningskurve ser ut slik den gjør. På samme måte prøver de seg også frem med forskjellige verdier for tidssteget, der de går fra et lite tall til et større. På spørsmål om hva som skjer med løsningskurven sier de følgende:

```
K: Hva er det som skjer her?
2: Samme greia som i stad, blir det ikke det?
1: Altså mellomrommet mellom grafen og tilnærmingen her, er jo helt, ikke...

2: Men det er vel noe med den deriverte da, at når du har så stor mellomrom,
     så får du den negative vi hadde istad, og nå har vi den positive, og
    da nærmer den seg den igjen
K: Skal vi prøve mer?
2: Ja, ta mer, dette var gøy
```

For S1 var bare det å utforske løsningskurver med forskjellige parametre en motivasjonsfaktor som gjør at de syns at det er gøy, og samtidig bruker de også her det de observerer til å konkludere med at for eksempel $x = -1$ gir at den deriverte er 0 fra differensialligningen som følgende dialog viser:

```
2: Men det blir jo rett som i stad
K: Hvilken verdi går den ned mot?
2: -1 tror jeg
1: Nei, nærmere -1, jeg tror det
K: Hva er det som er spesielt med punktet der da?
1: -1?
2: Det blir jo det samme da. 1-(-1)^2, blir jo 0.
```

I spørsmål om sammenligning mellom numerisk og analytisk sa de følgende:

```
K: Hva har vi nå gjort ved en numerisk tilnærming sammenlignet med
    analytisk tilnærming?
1: Vi har måttet tegne, og se for oss hvordan det faktisk er da, og ikke
    bare se på selve uttrykket
2: Ja, og så at vi bruker den deriverte, i stedet for åbli kvitt den, for i
     analytisk, så blir du kvitt den, og nå bruker vi den hele veien.
```

Deres tanker om det å løse en differensialligning slik vi har gjort ved å ha en numerisk tilnærming i bakhodet er følgende:

```
2: Dette har vært en skikkelig rar måte åtenke på. Det har vært ubehagelig.
     Jo fordi jeg er så vandt til åbare, okei, jeg skal smekk smekk smekk
    ferdig, nå må jeg skjønne hva jeg driver med, det er litt verre.
1: Vi kan alle metodene og sånn, men når du spør sånn, hva går metodene ut
    på, så må man faktisk tenke
2: Den beste metoden, det blir vel egentlig
1: Altså den letteste er jo åfølge en metode
2: Hvis du har en vanskelig en, så er det vel bare åbruke pc-en. Det er jo
    egentlig det letteste, så lenge man skriver den det riktig liksom.
K: Og det åbruke pc da, hva synes dere om det?
2: Akkurat nå er det ikke så ille, fordi koden var skrevet fra før av
K: Er det morsommere?
2: Ja, det er liksom morsommere og prøve åfinne ut av det og sånn, selv om
    jeg husker i IN1900 at jeg ble ganske frustert, da jeg drev og googla
    fordi jeg fikk feilmelding og sånn, det er ganske irriterende, jeg fø
    ler det er bedre, jeg føler det er mer sånn, men det kan også være at
    det er mer nytt da, mer mestringsfølelse.
2: Men for her også er jo også en type fremgangsmåte men det er mer åskjø
    nne hvorfor gjør man det man gjør, for da skjønner man hva er det man
    skal gjøre,
1: Mens når man løser etter de reglene, så gjør man jo bare det, vi skjø
    nner jo ikke hva vi gjør
2: Jo, men det var det når man gjør Eulers metode, man bare gjør metoden,
    men nå skjønner jeg jo faktisk hva det betyr, når jeg er ferdig med
    faget.
```

Bruk av datamaskin tilfører S1 en følelese av at det er morsommere å utforske og finne ut av ting, som gir dem en mestringsfølelse. Selv om S1 ikke skrev koden for algoritmen de utviklet i oppgave 2, så påpeker at selv om de var vandt med en fast fremgangsmåte da de løste ligninger analytisk, så gir denne fremgangsmåten de nå har jobbet med bedre forståele av hva de faktisk gjør. Selv ved Eulers metode pugget de hva operasjonene de skulle gjøre i stedet for å forstå hva de faktisk gjorde, noe som kom frem i snakk om hvordan eksamenen deres hadde gått:

```
2: Ja, for de hadde egentlig bare vist oss åsette dem opp, men ikke regne
     dem ut, men jeg hadde ikke klart det hvis jeg ikke kunne koden. Da
     hadde jeg ikke hatt sjans.
2: Det var lurt jeg pugga på den koden.
1: Jeg er fornøyd med hvordan det gikk uansett
```

I andre kontrolloppgave prøvde de å bruke samme metode som de har bygd opp tidligere i oppgavene, og lage metode fra bunnen av, noe som ble problematisk, siden det nå var et ledd med x^3. De greide allikevel etter hvert å se på matematiske egenskaper ved differensialligningen med hjelp, og starte fra $x(0) = 0$, og ta det derfra. Det gikk slik:

```
K: Okey, så x0=0, starter i 0. og så går vi en eller annen dt bortover. Hva
      skjer med funksjonen vår da, løsningskurven vår. Kan dere si noe om
     hvordan den vil oppføre seg fram til neste punkt.
2: Vi må se på deriverte da, eller
1: Eller, skal vi se på den vi har fått til nå?
2: Den stiger vel
K: Fordi
2: Fordi atte, 1 + 2 = 3, hvis du setter inn 0 for t og + for x, som er det
      der, så vil den jo stige da.
K: Nettopp, så da stiger den, og kommer til en høyere x-verdi. Hva vil skje
      videre da?
2: Da er den der høyere og t-en er også høyere, så den vil stige, eller den
      vil stige der, men vil bli litt mindre da, så det spørs jo litt, men
     jeg tror den stiger generelt, for det blir jo bare et kommatall, blir
     jo ikke minus uansett. Den stiger med litt i hvert fall.
K: Mhm, så i stedet for åtenke helt i starten, la oss si vi har kommet et
     godt stykke videre.
2: Mhm, men x-en vil jo uansett stige, og t-en vil jo bare wiii
```

Studentgruppe 2

S1 har en mer hypotesedrevet fremgangsmetode når det gjelder å prøve ut koden. Ofte tenker de på forhånd hva som vil skje før de bekrefter det ved å kjøre programmet. Det illustrerer følgende utveksling illustrerer:

```
1: Det prøvde jeg jo ikke. Men det vil ikke ha noe åsi, for den her er opph
     øyd i annen. Eller hvis vi starter med minus, så vil, da må du legge
     den under da, da vil det også være minus, ja, så den vil jo faktisk
     starte negativt, men den vil jo gå opp igjen etter hvert.
2: Vil den bevege seg opp sånn her da
1: Ja, ut fra hvor du setter x0, så hvis du setter x0 i minus 0.5, så vil
     den bevege seg oppover. Starter den i 0 beveger den seg også oppover.
K: Skal vi prøve?
2: -0.5
1: Men hva, vil den det?
2: Kjør koden?
1: Med tanke på x^2.
2: Prøv -1/2
```

```
1: Mhm. Ja, okay Det var akkurat det jeg trodde, at den starter i det
     punktet og så beveger den seg opp. Men den beveger seg litt rart da,
     den er jo nesten rett mellom der og der. Den har jo liksom ...
```

I spørsmål om hvorfor vi får en rett strek for x=1 når t stiger svarer de følgende:

```
K: Og hvorfor akkurat 1?
1: Jeg tenker jo på noe med den, kanskje, jeg tenkte jo på det med e opphø
     yd i et eller annet.
K: e opphøyd i et eller annet?
1: Ja, fordi vi drev og snakket om at løsningene til de greiene hadde noe
     med e ågjøre. Jeg tenker kanskje at x-en er gitt ved e opphøyd i 1 over
      noe, sånn at vi da øker t, så vil da
2: Den gå mot 0,
1: Det tallet gå mot 0 og da hele enheten gå mot 1, var sånn jeg tenkte da
K: Hvis vi ser på ligningen vår
1: Ja,
K: DE-en vår. Hva er det som skjer i 1?
1: Skjer i 1? Det blir 0
K: Det blir 0?
1: Ja
K: Hva er det som skjer i 0?
1: Den deriverte, så da slutter den åvokse. Litt lettere måte åse det på
     kanskje.
```

I refleksjon rundt det å løse en differensialligning numerisk kommer følgende ut:

```
2: Hvis du braker det ned til dette hver gang du bruker, så føler du at du
     får et mer personlig forhold til ligningen vi skal løse numerisk
K: Nettopp
2: Så grundig, da får vi liksom sett konsekvensene av ågjøre en iterasjon,
     for du forstår mye mer hvordan den oppfører seg, hvordan den deriverte
     oppfører seg, men
K: Det er jo hele poenget med DE, er at man ser på den deriverte her hele
     tiden,
2: Ja, og når du løser noen så får du på en måte sett det mer klart foran
     deg, konsekvensene av åta en iterasjon, eller 10 eller 20, i motsetning
      til åløse den analytisk, der du bare får et uttrykk, og så kan du
     kaste inn de verdiene du vil, så får du en bane.
...
1: Jeg føler jo også, at når vi tar analytisk løsning, så blir jo det også
     veldig abstrakt også, på mange måter, for da føler jeg at, det at vi
     kan gjøre bygger på 800 sider med bevis, så for meg som bare har gjort
     to emner av matematikk, så gir ikke det meg, sånn jeg stoler veldig på
     det veldig blindt føler jeg da, for sånn integrer her, det gir deg lø
     sningen, det gir deg hele ligningen, men det åbruke sammenhengen mellom
      ågå fra et sted, bruke hvor mye den vokser på det stedet, og så finne
     ut ved hjelp av så og så mange stopp hvor du ender opp, jeg føler det
     kanksje er litt mer sånn, jeg føler det er nesten tryggere på noen må
     ter, samtidig som jeg vet det er en feil.
```

Det kommer ut av samtalen at S2 at å bruke programmet til å utforske lærer dem mer om differensialligninger enn det selve programmering gjør. De syns det er morsomt å programmere når det fungerer, men det er som et verktøy å regne i mange sammenhenger.

```
1: Ja, bare det og bare se på ligningen tenke litt mer sånn, hva vil det si
      for stigningen, og flytte den litt på den måten, og så skrive som (2)
     sa, det lærte oss mye mer om DE, enn ...
K: Selve inntastingen?
1: Ja, og ikke bare det, men til og med hele det poenget med det, når vi
     skulle lære åprogrammere det, jeg kan egentlig huske åha tatt så mye ut
      av det, vi har ikke lært så mye om DE pga det
```

```
K: Men når dere fikk det ferdige programmet da,
1: Da hjalp det jo, da viste det jo masse om grafen ved åbare flytte på ..
    (variabler). Det er jo det han sa også, han i forelesning, en av
    fordelene ved programemring er at du kan justere betingelsene på to
    sekunder, men hadde du hatt en analytisk løsning, men så hadde du bytta
     x0 til noe annet, så måtte du gjøre alt på nytt, så måtte du finne C-
    en ,eller de greiene helt på nytt, det ville tatt mye lenger tid.
K: Vil du si at det er en slags motivasjon? Åbruke pc, et ferdig program da
1,2: Njaa,
2: Eller den hjelper i hvert fall
1: Mhm
K: Men syns dere det er morsomt?
1: Ja,
2: Altså åsitte i 3 timer i strekk åknote med et punkt er ikke gøy, men å
    lage noe og se at det funker, det er det som er gøy.
1: Men det pleier jo ikke se sånn ut, for vi bruker jo de derre
    bevegelsesligningene så og si hver dag, og da har vi jo som regel en så
     og si ferdig kode, og eller hvis vi lager de, det skjer jo av og til
    en gang, men det pleier jo ikke skje at vi ikke får til. Eller det
    skjer jo hver gang, men vi får det til. Jeg vil si at vi får ganske mye
     ut av det.
2: Det er et verktøy som en kalkulator.
```

For S2 er ikke nødvendigvis selve programmeringen det de lærer mest av, men heller måten de kom frem til det på. Det bekrefter også følgende utsagn:

```
2. Prosessen med ålage algoritmen gjorde at vi forsto hva som skjedde, vi
    forsto hvordan vi kan finne veien til det neste steget på en måte.
1: Jeg likte idéen om åbare liksom se på det som en problemstilling der vi
    skulle fra A til B, det som er fint med den, er at, okay, her er
    Forward-Euler, da er det mange aspekter vi ser bortifra, og hvis du, da
     er det litt som at du pugger den, det er veldig ofte at jeg har
    ligninger i forskjellige fag, men hvis du tar, nå som nå, setter deg
    inn i problemløsningen, at tenker okay, det her er ikke bare en løsning
    , det er en løsning fra åkomme seg fra A til B, da husker man mer
    aspektet av det, i ligningen, så hvis vi da skal prøve åkomme på den
    ligningen igjen, så kommer ikke jeg til åhuske ligningen ved åha pugga,
     da kommer jeg til åhuske den på grunn av løsningen av det problemet.
    Og da husker man selvfølgelig at, nå har ikke jeg kommet meg helt dit,
    da må jeg gange med dt, ikke sant, for åkomme meg bort dit, så jeg vil
    si at dette var ganske bra.
```

I kontrolloppgave 2 sier studentene følgende:

```
1: Men hvis vi prøver åfå ... men en ting vi lærte masse av i stad, er jo
    bare åflytte, var jo åbare se på den deriverte, altså ... (skriver alt
    på en side av likhetstegnet)
2: Åja, den er nesten lik. Den kan du drite i.
1: Hæ?
2: Den kan du drite i når t går mot uendelig. Hele det leddet der går jo
    mot 0
1: Ja ja, det er jo sant, så det går mot 0, Men her er det plutselig ikke
    minus lenger, her er det bare pluss x^2,
2: Og startbetingselsen at x(0) = 0
1: Så den deriverte virker jo som, når du kjører, gitt at, nei det har ikke
     noe åsi forresten, x er jo opphøyd i annen, så det har ikke noe åsi
    pluss eller minus eller hva det er, det kommer jo til ågi et bidrag,
    til den deriverte uansett, så den her vil gå mot 0, den vil bare øke og
     øke, så stigningen vil jo øke eksponensielt, så vil jo bare gå
2: Til helvete
```

6.4 Oppsummering og funn

I dette delkapittellet vil jeg oppsummere hovedtrekk fra analysen, og trekke frem aktuelle funn jeg har gjort. Dette er funn som viser hvordan en numerisk tilnærming har hjulpet studentene til å forstå differensialligninger bedre, og det er også funn som har skapt problemer for studentene. Jeg vil belyse alle funn før jeg videre diskuterer betydningen av disse i kapittel 7.

Studentenes konseptbilde

Å bruke et tankekart som en kilde til å få innsikt i studentenes konseptbilde er en god måte å få en overfladisk innsikt i studenters kunnskap om et tema, men for eksempel i S1 sitt tilfelle viste det seg at dette ikke var nok for å få frem hva de kunne om differensialligninger. S1 hadde kunnskap om både det numeriske og det geometriske perspektivet ved differensialligninger, som støttes av deres tilhørende illustrasjoner til for eksempel Eulers metode, og deres illustrasjoner i prosessen ved å løse problemet i oppgave 2.

S2 viste fra start et mer utvidet konseptbilde enn S1 ved at de raskt koblet inn det numeriske perspektivet ved differensialligninger, men S2 sitt konseptbilte skiller seg tilsynelatende lite fra S1 sitt konseptbilde sett under ett. S2 skiller seg fra S1 ved at de er mer bevisst på feilen som inngår ved bruk av numeriske metoder, samt at de forankrer kunnskap om numeriske metoder til anvendelser fra mekanikk.

Funn 1: Faglig tilhørighet

Det siste funnet jeg vil trekke frem fra min forskning er forskjeller og likheter mellom studentene basert på deres faglige tilhørighet, og jeg vil begynne med å trekke frem likhetene.

Fra forskningsspørsmål 1 kan vi se at tross forskjellige faglig bakgrunn skiller det ikke alt for mye i studentenes konseptbilde av differensialligninger. De viser begge til å ha kontroll på den algebraiske tilnærmingen til å løse differensialligninger, og begge gruppers møte med den første kontrolloppgaven besto av å prøve å klassifisere differensialligningen, og deretter prøve løse den ved forskjellige analytiske metoder.

En interessant situasjon som oppstod var ved utforskning av hvordan en løsning oppfører seg for forskjellige startbetinger, og spesifikt for startbetingelsen $x_0 = 1$ til differensialligningen $x' = x^2 - 1$. S1 adapterte en numerisk måte å tenke på, på den måten at de brukte Eulers metode geometrisk for å resonnere seg til hvordan en løsningskurve ville oppføre seg. For x_0 fikk de naturlig nok en rett strek, $x = 0$, og de kunne begrunne dette ved å se at stigningstallet var først 0 i første punkt, og forble 0 videre. S2 derimot argumenterte for at det måtte ha noe med ”e opphøyd i 1 over t eller noe”. Deres første tanke er altså å forklare oppførselen ved et matematisk uttrykk som ofte opptrer som løsning i analytiske løsningsmetoder. Fordi løsningen de ser på datamaskinen er konstant for $x_0 = 1$, så samsvarer det med at $e^{1/t} \to 0$ når $t \to \infty$. Kun etter å ha blitt tipset om å forklare løsningens oppførsel gjennom selve differensialligningen, ble de klar over at $x_0 = 1$ gir ingen stigningen for løsningskurven.

Funn 2: Kvalitativt syn på differensialligninger

Studentene fikk i oppgave 3 tid til å utforske et Pythonprogram der utgangspunktet for programmet var algoritmen de utledet i oppgave 2.

For S1 var utforsking ved hjelp av Pythonprogrammet en motivasjonsfaktor som ga dem engasjement og lyst til å utforske forskjellige sider ved differensialligningen. Det ga dem mulighet til å prøve og feile, og se direkte konsekvenser av deres endringer av variabler. På den måten fikk de utforsket hvordan løsningskurvene til differensialligningen de studerte så ut, og samtidig bruke resultatene som programmet ga dem til å resonnere seg fram til hvorfor løsningskurven oppførte seg slik den gjorde. Dette vises for eksempel ved at de gjennom og prøve ut forskjellige verdier for initialbetingelsen kunne bruke egenskaper ved differensialligningen til å begrunne hvorfor løsningskurven oppførste seg slik den gjorde for de forskjellige initialbetingelsene.

S2 hadde også utbytte av å kunne bruke programmet til å utforske forskjellige sider ved løsninger til en differensialligning. Deres fremgangsmåte var litt motsatt av hva S1 sin fremgangsmåte var, på den måten at de brukte programmet til å bekrefte hypoteser. For eksempel kunne de resonnere seg fram til at $x_0 = -10$ ga en stigende kurve opp mot 1 før de kjørte programmet før de fikk det bekreftet ved den grafiske løsningen. De sier i likhet med S1 at de kan knytte informasjon fra differensialligning tettere opp mot løsningskurven de får ut av programmet.

På et generelt basis sier S2 at de ikke har fått alt for mye ut av å programmere i seg selv, sett i sammenheng med differensialligninger, men de syns allikevel programmering i seg selv er gøy, for å kunne se at noe man har bygd opp fungerer.

Kontrolloppgave 2 ga oss mer informasjon om studentenes tilegnelse av kunnskap, og S1 var åpenbart påvirket av fremgangsmetoden vi brukte i denne oppgaven, men kunne ved litt hjelp komme over på tanken ved å koble egenskaper ved differensialligningen til oppførselen til en løsningskurve. S2 viste at de gjennom å vurdere de forskjellige egenskapene til differensialligningen kunne konkludere med hvordan en løsningskurve ville utvikle seg.

Funn 3: Numerisk tilnærming knytter konsept sammen

Mitt neste funn støtter idéen om at en numerisk tilnærming til å løse differensialligninger gir en bedre forståelse av hvordan flere matematiske konsept hører sammen og er avhengig av hverandre. Studentene får i oppgave 2 erfart hvordan konsepter bak derivasjon, differensialligninger og løsning av andregradsfunksjon alt henger sammen for å kunne nå målet om å finne et eksplisitt uttrykk for x_{k+1}. Selv om det fins elementer ved studentenes fremgangsmåte som skaper konflikter, så skaper konfliktene samtidig rom for finne ut hvorfor en løsning fungerer, og hva løsningen så skal være.

I løpet av prosessen ved å løse konflikten ved å bruke stigningstallet til tangenten i sluttpunktet du ikke vet verdien til, gikk studentene gjennom en periode der de prøvde å komme med idéer for å gi mening til konflikten. Løsningen ble for begge grupper å bruke differensialligningen til å se en sammenheng mellom hvilken informasjon differensialligningen gir oss og hvordan det kan brukes til å bygge opp en løsningskurve. Studentene hadde begge et perspektiv på at den deriverte kan kobles til tangenter, er derfor ble løsningen for begge å gå fra startpunktet halve veien langs tangenten, og fra sluttpunktet og bakover langs tangenten.

Gjennom oppgave 2 møtte studentene mange konflikter, som gjorde at de måtte begynne tankeprosessen på nytt. Blant annet fikk de gjennom konkretisering et tettere forhold til å generalisere matematiske idéer, noe jeg skriver nærmere om som funn 3, og dette førte til at de videre kunne forstå hvorfor Eulers metode ser ut slik den gjør symbolskt, da det ga dem et verktøy videre for å kunne resonnere seg fram til en løsning på det aktuelle problemet. Etterpå sier også S2 at de gjennom denne prosessen med å lage algoritmen, forsto hva som skjedde underveis, fordi de tok en del av det å utvikle fremgangsmetoden. Både S1 og S2 hadde fra før erfart å få Eulers metode utdelt på den måten at de ved å gjøre matematiske operasjoner enkeltvis kunne få riktig svar, uten å vite hvorfor de akkurat gjorde dette.

Funn 4: Konkretisering ved innsetting av verdier

Min analyse viser at konkrete verdier hjelper studentene i å gi mening til deres matematiske resonnement. Det hendte flere ganger at studentene gjennom å konkretisere matematiske konsept kunne gi mening til en formel eller en idé. Dette skjedde for eksempel i møte med utfordringen der de skulle generalisere den endelige formelen for x_{k+1} hvor begge grupper var avhengig av å starte med konkrete tall. S1 fikk også bruk for dette da de skulle utlede formelen for en tangent gjennom Eulers metode. De startet med ettpunktsformelen, og utledet et uttrykk for tangenten gitt ved stigningstallet i x_0. Etterpå kunne de gi mening til Eulers metode ved å sammenligne hva de forskjellige delene representerte i form av stigningstall og startpunkt.

Funn 5: Symbolsk representasjon

Det kommer fram av min analyse at selv om S1 innehar flere perspektiver tilknyttet differensialligninger, så er kunnskapen de har på mange måter fragmentert. S1 sliter for eksempel med å koble en matematisk idé til en symbolsk representasjon. Dette fremheves spesielt i deres utledning av en symbolsk representasjon av en tangentlinje, og deres fremgangsmåte er basert memorerte formler der de kun trenger å putte inn forskjellige verdier. Dette forsterkes i ytterligere grad av de ikke umiddelbart klarer å koble den symbolske representasjonen av Eulers metode til nettopp tangentlinja de ønsket å finne et uttrykk for, da $x_{k+1} = x_k + f(t_t, x_k)\Delta t$ nettopp beskriver det å følge tangentlinja fra punktet x_k til x_{k+1}.

S2 viser større kompetanse til å formulere muntlige utsagn om til symbolsk representasjon, men på en annen side preger deres symbolske representasjon av problemet de skal løse av tilfeldig valg av parametre, der meningen bak de matematiske uttrykket ikke gir mening. For eksempel er uttrykket $x(\Delta t/2) = x(t) + x' \cdot \Delta t/2$ et eksempel på upresis bruk av Eulers metode. For det første gir det ikke mening at det nye punktet evalueres for $\Delta t/2$ når du starter i et punkt spesifisert ved en generell t. For det andre er ikke x en funksjon av t når vi løser en differensialligning fra et numerisk perspektiv, men det er heller en rekke av punkter, $x_0, x_1, \ldots, x_n$. S2 tenker riktig ved å illustrere og ved å resonnere muntlig, men deres symbolske representasjon er ofte upresis.

Et felles problem for både S1 og S2 var overgangen fra å gå fra idéen om å følge tangenten fra midtpunktet og til sluttpunktet ved å følge en tangent med stigning gitt fra stigningstallet gitt ved sluttpunktet. Selv om idéen var klar for begge studentgrupper, var den symbolske representasjonen et hinder for begge.

Oversikt over funn

En avsluttende oppsummering av funnene fra min analyse av studentbesvarelsene gir meg fem funn å diskutere videre. Funn 1 er basert på forskjeller mellom studentgruppene, funn 2-4 trekker frem positive sider ved en numerisk tilnærming, og funn 5 viser en konsekvens av numerisk tilnærming som for studentene var en hindring i dere fremgangsmåte.

Funn 1: Studentenes faglige bakgrunn ga ikke tydelige forskjeller i kompetansenivå.

Funn 2: Utforskning av program basert på en numerisk metode oppfordrer til økt forståelse av differensialligning. Det kan skje ved at programmet gir en grafisk løsning ut som fungerer som en bekreftelse av studenters hypotese, eller det kan fungere som et analyseverktøy for å forklare en løsningskurves oppførsel.

Funn 3: En numerisk tilnærming gir studenter mulighet til å se hvordan matematiske konsept henger sammen, og kan brukes om hverandre til å løse et problem.

Funn 4: Konkretisering av verdier gjør overgangen til å generalisere matematiske idéer lettere for studentene.

Funn 5: Symbolsk representasjon av studentenes matematiske idéer er en viktig del av å løse differensialligninger numerisk, og kan være et hinder for studentene om de har lav kompetasne i dette.

KAPITTEL 7

Diskusjon

I dette kapittelet skal jeg bruke funnene beskrevet i delkapittel 6.4 til å diskutere deres implikasjoner i lys av mine forskningsspørsmål. Jeg gjentar mine forskningsspørsmål her for å gjøre det tydelig.

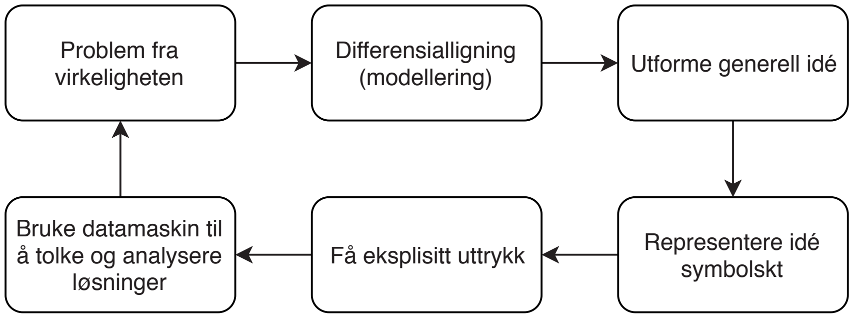
1. Hvordan ser studentenes konseptbilde av differensialligninger ut?
2. Kan en numerisk tilnærming til å løse differensialligninger utvide studentenes konseptbilde?
3. Har studentenes faglige bakgrunn mye å si for deres forståelse av differensialligninger?

Jeg har gjort relativt mange funn, og grunnen til at jeg velger å inkludere alle i diskusjonen er hovedsaklig for å grunngi deres betydning i studenters utvidelse av konseptbilde rundt differensialligninger.

7.1 Studentenes konseptbilde

Mitt første forskningsspørsmål går ut på å etablere studentenes konseptbilde av differensialligninger. Hensikten er å kunne bruke dette til å gi mening til deres resonnering og fremgangsmåte i møte med oppgavesettet studentene fikk utlevert.

Et hovedtrekk som kom frem av analysen var studentenes fiksering ved den algebraiske tilnærmingen til differensialligninger, og spesielt det å løse en differensialligning. Jeg viser nå til forskningens tidlige stadie, før mitt numeriske fokus kom på banen. Hvis man går 300 år tilbake i tid, er det helt klart en foretrukket metode å løse differensialligninger på, slik jeg har beskrevet det i kapittel 2, men anvendelsesområdet er begrenset på den måten at svært få ligninger kan bli løst ved analytiske løsningsmetoder. Innledningsvis i min oppgave satte jeg spørsmål ved kalkulus sin innflytelse på studenters læring av differensialligninger, og begge studentgrupper i min forskning har bekreftet at deres første assosiasjon til å løse en differensialligning, er å bruke analytiske metoder for å få en fin funksjon som svar, selv da de ble gitt en ikke-lineær førsteordens differensialligning. Selv om det er en glatt overgang fra integralregning i kalkulus og til å senere løse differensialligninger, så kan det virke som at



Figur 7.1: Prosess for å løse en differensialligning numerisk

den algebraiske tilnærmingen fester seg som en dominerende del av studentenes konseptbilde [17].

Det første studenter ofte lærer om differensialligninger er at løsningene er funksjoner og ikke tall som ved vanlige ligninger. Dette kan regnes som en formell konseptdefinisjon [17], og spesielt S2 viste at de hadde tilegnet seg dette som en del av deres personlige konseptdefinisjon. Som konsekvens gjør det at S2 fortsetter å tro at en løsning av en differensialligning gjort ved numeriske metoder er en funksjon, da det egentlig er en rekke av punkter som kan uttrykkes ved en differensligning på formen $x_{k+1} = x_k + ...$ Derfor er det litt oppsiktsvekkende at de behandler x som en funksjon, da de etter tankekartet å regne, har differensligninger som en del av sitt konseptbilde av differensialligninger. Selv om det å nevne differensligninger i tankartet var en feil på grunn av navnelikheten, så bør det uansett ikke sette en begrensning på deres videre resonnering tilknyttet numeriske metoder.

På en annen side viser deres muntlige tankegang at de gjennom å skrive x som en funksjon av for eksempel t eller $\Delta t/2$ at de ønsker å presisere karakteristikker ved de forskjellige punktene, slik at grunnen til at de misforstår denne notasjonen, kan være at de har ikke lært betydningen av presis notasjon i matematikk.

Symbolsk representasjon

En betydelig mangel for studentene var, som jeg har skrevet i analysedelen, å formulere matematiske idéer ved en symbolsk representasjon. Selv om dette ikke nødvendigvis begrenser seg til konseptet differensialligninger, så stiller spesielt en numerisk tilnærming betydelige krav til å å representere matematiske idéer symbolskt. Det er fordi overgangen fra å utvikle en algoritme som senere skal kodes i for eksempel Python krever eksplisitte matematiske uttrykk for å finne det neste tilnærmede punktet i løsningen vår.

Oppgave 2 som studentene skulle løse var prosessen med å løse differensialligningen som vist i Figur 7.1. Denne prosessen er syklisk slik at etter å ha funnet en numerisk løsning som kan vises grafisk på en datamaskin, så kan man gå tilbake til differensialligningen og studere løsningens oppførsel ut ifra problemet vi startet med. Men denne prosessen er helt avhengig av å kunne representere idéen symbolskt, for at prosessen ikke skal stoppe opp.

Sett under kan vi se fra analysen at selv om studentgruppene har mange trekk til felles, så viser S2 antydning til å ha en forståelse som ligger mellom det flerstrukturelle og det relasjonelle perspektivet ved SOLO-taksonomien, til forskjell fra S1 som viser tydelig tegn til å forstå differensialligninger på en flerstrukturelt nivå. Det som allikevel viser seg å mangle fra begge gruppers konseptbilde er evnen til å se sammenhenger mellom matematiske konsept.

7.2 Bidrar en numerisk tilnærming til å utvide studentenes konseptbilde?

Jeg lagde oppgavene til studentene med den tanke om at de gjennom å anvende konseptet bak den deriverte, kunne bygge opp en egen numerisk løsningsmetode, altså implementere en tankegang som bygger på algoritmisk tenkning, hvor særlig algoritmedelen står sterkt. En datamaskin må få veldig presise retningslinjer for at den skal forstå hva den skal gjøre, og det er grunnen til at jeg gjennom oppgave 2 i oppgavesettet får studentene til å forstå min tiltenkte numeriske metode, der det er nødvendig å forstå konseptet bak den deriverte og samtidig kunne tenke generelt for å komme i mål. Jeg la inn en viss grad av abstraksjon til et kjent konsept for studentene, som tidligere har vist å være hensiktsmessig ved tilnærming av nye matematiske konsept [16].

En algebraiske tilnærming gir et naturlig grunnlag for å utarbeid fremgangmåter, eller algoritmer om du vil, for å løse en differensialligning, og det var hovedstrategien for både S1 og S2 i møte med en differensialligning. Dette er dog en algoritme som setter større krav til en instrumentell forståelse av differensialligninger [15, s. 112] og krever derfor ingen konseptuell forståelse av hva en differensialligning er [14]. Det som er interessant å trekke ut fra S1 sin besvarelse er at de bevarer den instrumentelle måten fra en algebraisk tilnærming til å forstå Eulers metode. De sa selv at de gjennom å pugge koden for Eulers metode i Python klarte å besvare tilfredsstillende på tilhørende oppgaver på eksamen, og selv om dette er bra for deres resultat, så betyr ikke det at å bruke hodet som om det var en datamaskin at studentene forstår det matematiske konseptet bak. I dette tilfellet gir besvarelsene deres blandede resultater. På en side viser de geometrisk at de forstår idéen, men samtidig viser de liten forståelse for hvordan den symbolske representasjonen for en tangent viser det samme som deres geometriske forklaring. Jeg gir en videre forklaring av dette i delkapittel 7.1.

Til tross for manglende kompetanse i symbolsk representasjon, er konkretisering, som jeg har beskrevet i funn 4, en strategi som hjelper studentene i å se sammenheng mellem den geometriske idéen og det formlene viser. Min analyse har vist at gjennom å analysere hvilken betydningen innsetting av konkrete tall har å si for den matematiske idéen, kan studenter bli flinkere til å generalisere matematiske idéer.

Funn 3 beskriver hvordan studentene gjennom en numerisk tilnærming oppfordres i større grad til å se sammenhengen mellom forskjellige matematiske konsepter. Studentene viste ofte tegn til å kunne ha kontroll over matematiske konsept enkeltvis, uten å skjønne at et problem kunne kombinere disse. For eksempel var det utenkelig for studentene å kunne ende opp med en andregradsligning når vi skulle løse en differensialligning, og selv om dette var spesielt for metoden jeg hadde tiltenkt studentene, så viser det uansett at problemets kontekstuelle situasjon har en innvirkning på hvordan studentene tenker og løser et problem.

Funn 2 indikerer at bruk av datamaskin kan hjelpe studenter å forstå differensialligninger bedre. I min oppgave har jeg brukt Python til lage et program basert på fremgangsmåten som kommer fram i oppgave 2, fordi det gjør det enkelt for studentene å utforske forskjellige sider ved differensialligninger. Studentene opplevde både mestringsfølelse og irritasjon ved bruk av programmet. Irritasjonen skyldtes naturlig nok at programmet ikke fungerte på grunn av små syntaxfeil som tok fokuset bort fra problemet de skulle, noe som medfører mindre effektiv læring [16]. Fordelen ved denne metoden å lære på er læringseffekten studentene får ved rask tilbakemelding [8]. Bruk av et ferdig programmert Pythonprogram fra meg, løste dette problemet delvis, og selv om det noen ganger kommer en feilmelding så kan det også ligge læring i dette, fordi man er nødt til å ha en såpass matematisk innsikt til å kunne sette seg inn i problemet og kunne resonnere seg frem til hvorfor en handling gjort av datamaskinen er ugyldig i henhold til matematikken. Selv om jeg ikke gikk veldig i dybden på dette området i min oppgave, så er det her jeg ville ha flyttet fokuset, spesielt med tanke på at det her på UiO er veldig relevant, siden de implementerer bruk av programmering i veldig mange realfaglige emner.

Selve prosessen ved å endre på variabler og leke seg frem for å se betydningen av endringene er utgangspunktet for begrepet ”tinkering” som er et relativt nytt forskningsområde, og fokuserer blant annet på å prøve og feile [1, s. 201]. For fremtiden er dette et veldig spennende område å utforske, og sett i sammenheng med algoritmisk tenkning så kan dette være et verdifult verktøy for fremtidens studenter som skal lære blant annet differensialligninger.

Kombinere matematiske konsept

Studentene viste tidlig tegn til å forstå differensialligninger på et flerstrukturelt nivå i følge SOLO-taksonomien, og selv om S2 viste antydninger til å reflektere og diskutere virkningene av numeriske løsninger, så var det fortsatt en utfordring å koble sammen flere matematiske konsepter til å forstå et problem. Løsningene deres ble naturligvis basert på deres personlige assosiasjoner, som i seg selv var riktige, men besvarte ikke problemet de skulle løse. I følge Rösken og Rolka [13] er dette en typisk fremgangsmetode for studenter når de møter en konflikt, og ofte kan det føre til at studentene ignorerer deler ved oppgaven. Fra mitt eksempel der S2 skal argumentere for hvorfor programmet gir en rett strek for en viss startbetingelse $x_0 = 1$ ga deres assosiasjoner resultatet at det måtte ha noe med $e^{1/t}$, som jo er feil, men de trekker en sammenheng mellom en løsningskurve som er konstant 1 og grenseverdien til $e^{1/t}$ når $t \to \infty$ fordi det er en del av deres konseptbilde av differensialligninger og også deres konseptbilde av grenseverdier.

Dette er grunnen til at jeg gjennom oppgave 2 ga studentene et problem som var avhengig av at de måtte kombinere de matematiske konseptene differensialligning og derivasjon, som hører mer naturlig til hverandre enn det differensialligninger og integrasjonsteknikker, slik det er ved en algebraisk tilnærming.

7.3 Har studentenes faglige bakgrunn noe å si?

Valget om å bruke studenter fra to forskjellige bachelorprogrammer var et bevisst valg for å undersøke om deres faglige bakgrunn hadde innvirkning på hvordan de løste oppgavene, og om utfallet ble forskjellig fra hverandre. Mine funn har vist at, til tross for noen forskjeller i for eksempel deres kompetanse til å programmere og kunnskap om anvendelsesområder, så er hovedtrekkene i fremgangsmåten til begge studentgrupper relativt lik. For eksempel knytter de betydningen av den deriverte direkte til tangenter. For S1 var det tydelig at de bygger dette på en formell konseptdefinisjon av den deriverte, og også S2 er tydelige på at den deriverte er stigningstallet til tangenten gjennom et gitt punkt. Dette står i kontrast til hva Bingobali og Monoghan [3] konkluderte med i sin forskning på matematikk og mekanikkingeniørstudenter, der mekanikkingeniørstudentene utvikler et konseptbilde av den deriverte som grad av forandring"i stedet for matematikkstudentenes konseptbilde som tar tangentperspektivet, slik både S1 og S2 gjorde i min forskning. En forklaring kan være at selv om S2 tar et mekanikkemne denne våren, og også stiller bedre faglig enn S1, så har de blitt lært kalkulus på samme måte, som gjør at de på dette området stiller likt. For selv om Bingobali og Monoghan [3] argumenterer for at faglig tilhørighet har en innvirkning på studentenes konseptbilde, så er ikke tidsrommet i mitt tilfelle tilstrekkelig stort nok til å kunne konkludere med det ene eller det andre.

KAPITTEL 8

Konklusjon

Differensialligninger som et konsept må ses i sammenheng med andre matematiske konsept, som for eksempel konseptet av den deriverte. Gjennom å forstå hva den deriverte kan si om oppførselen til løsningskurven vi ønsker å finne en tilnærming til, kan vi løse en differensialligning på den måten at vi i det minste ser hvordan en løsningskurve oppfører seg, akkurat som Poincaré innførte for litt over 100 år siden [7].

Helt siden datamaskinens inntok på midten av 1900-tallet har teknologien utviklet seg i rasende tempo, men på mange måter kan vi ikke si det samme om undervisningen av differensialligninger. Det velges til stadighet å undervise førsteårsstudenter en algebraisk tilnærming til differensialligninger på universitetsnivå, og hovedgrunnen til dette må vi fastslå er dens smidige overgangen fra intergral kalkulus. Undervisningen av differensialligninger består derfor av å lære bort et arsenal med triks til studentene.

8.1 Studentenes konseptbilde

Studentenes konseptbilde ved starten av min studie viste tegn til at det domineres av den analytiske tilnærmingen til å løse differensialligninger. Det er også naturlig, siden eksemplene de møter er pukket ut med tanke om at det etter å ha laget en modell basert på perfekte fysiske lover, så finnes det en perfekt analytisk metode som gir dem en fin kontinuerlig funksjon. Men dette trekker fokuset bort ved de matematiske egenskapene som vi finner i en differensialligning. Studentene har lært som den ene studenten i min forskning sier: ”Å bli kvitt den deriverte ved å integrere”, men en numerisk tilnærming oppfordrer til det motsatte. Vi ønsker ikke å bli kvitt den deriverte, men heller bruke den til å resonnere oss frem til hvordan en løsningskurve kan bygges opp.

8.2 Har studentene utvidet sitt konseptbilde gjennom en numerisk tilnærming?

Et resultat av min forskning, som baserte seg på nettopp idéen om å bruke den deriverte aktivt, var at studentene utvidet sitt konseptbilde ved å få en bedre forståelse for sammenhengen mellom konseptene differensialligninger og den deriverte. Dette ble hovedsaklig gjort ved å la studentene bygge opp en ny numerisk metode, slik at de underveis møtte konflikter som gjorde at de virkelig måtte forstå hva konflikten var og deretter forstå hvordan konflikten kunne løses.

Et viktig element for å gå fra en matematisk idé til en numerisk løsning er evnen til å representere idé symbolskt. Om dette ikke er direkte relatert til å forstå differensialligninger, så er det en grunnleggende ferdighet som gir mulighet for studenter å utvide sitt konseptbilde ved å tenke gjennom generaliseringer. En mulig fremgangsmåte å klare å representere idéene symbolskt ble for studentene å konkretisere. Det vil si at de gjennom å sette inn konkrete tall kunne bruke dette til å se sammenhenger mellom deres resultat og en symbolsk representasjon.

Det har også vist seg at det ligger et potensial i bruk av datamaskin og følgelig programmering til å utforske studenters forståelse av differensialligninger. Min forskning ga hint til at det ligger en motivasjonsfaktor bak det som kalles ”tinkering” [1], og at studentene gjennom raske tilbakemeldinger fra datamaskinen får muligheten til å se sammenhenger mellom differensialligningen og dens løsningskurver. Min studie ga bare indisier til å kunne forske videre på akkurat denne området.

8.3 Har studentenes faglige bakgrunn noe å si?

Jeg vil være forsiktig med å trekke konklusjoner mellom de to studentgruppene, da mitt utvalg for denne studien har vært begrenset til kun én gruppe på to personer fra MAEC og FA. Det viser seg likevel at de på flere områder har samme fremgangsmåte i deres matematiske resonnement, og det vil jeg påstå skyldes et konseptbilde der en algebraisk tilnærming står sentralt, som beskrevet i delkapittel 8.1.

8.4 Forskningens relevans

Dette har vært en studie som er tatt utgangspunkt i studenter ved Universitet i Oslo. Det har ikke blitt gjort mye forskning ved UiO på førsteårsstudenter, og derfor er denne typen studie et relativt nytt tiltak med mål om å hjelpe studenter i sin læring. UiO har, som tidligere sagt, et fokus på bruk av programmering i sine bacheloremner, og selv om min studie ikke har adressert dette som mitt hovedfokus, så er bruk av numeriske metoder tett knyttet opp mot dette perspektivet. Dette er en god måte for studenter å forstå matematiske sammenhenger, så lenge undervisningen unngår å la studentene føle mestring ved å kun vise flerstrukturell forståelse, men heller legger til rette for å la studentene vise relasjonell forståelse, slik SOLO-taksonomien beskriver det.

Bibliografi

[1] Berland, M. «Making, tinkering, and computational literacy». I: *Makeology: Makers as learners* 2 (2016), s. 196–205.

[2] Biggs, J. *SOLO taxonomy*. URL: http://www.johnbiggs.com.au/academic/solo-taxonomy/ (sjekket 22.04.2019).

[3] Bingolbali, E. og Monaghan, J. «Concept image revisited». I: *Educational Studies in Mathematics* 68.1 (2008), s. 19–35.

[4] Dalen, M. *Intervju som forskningsmetode: en kvalitativ tilnærming*. Universitetsforl., 2004.

[5] Holberg, K. E. I: Høihilder, E. K. og Lingås, L. G. *Pedagogikk 8.-13. trinn: Profesjonsutdanning av lærere*. Gyldendal akademisk, 2014. Kap. De evnerike elevene, s. 207–226.

[6] Huygens, C. og Oscillatorium, H. «The pendulum clock». I: *Trans RJ Blackwell, The Iowa State University Press, Ames* (1986).

[7] Jahnke, H. N. *A history of analysis*. 24. American Mathematical Soc., 2003.

[8] Koedinger, K. R., Corbett, A. mfl. *Cognitive tutors: Technology bringing learning sciences to the classroom*. na, 2006.

[9] Lindstrøm, T. *Kalkulus*. Bd. 3. Universitetsforlaget Oslo, 2006.

[10] Maxwell, J. A. *A realist approach for qualitative research*. Sage, 2012.

[11] Mørken, K. «Numerical algorithms and digital representation». I: *Lecture Notes for course MATINF1100 Modelling and Computations,(University of Oslo, Ch. 11, 2010)* (2013).

[12] Papert, S. *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. Basic Books, Inc., 1980.

[13] Rösken, B. og Rolka, K. «Integrating intuition: The role of concept image and concept definition for students' learning of integral calculus». I: *The Montana Mathematics Enthusiast* 3 (2007), s. 181–204.

[14] Roundy, D. mfl. «An extended theoretical framework for the concept of derivative». I: *Proceedings of the 18th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*. Citeseer. 2015, s. 838–843.

[15] Solvang, R. «Kap. 5: Kunnskaps-og forståelsestyper i matematikklæringen. I R». I: *Solvang (Red.), Matematikk-didaktikk* (1992), s. 75–105.

[16] Tall, D. «Constructing the concept image of a tangent». I: *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Bd. 3. Citeseer. 1987, s. 69–75.

[17] Tall, D. og Vinner, S. «Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity». I: *Educational studies in mathematics* 12.2 (1981), s. 151–169.

[18] Weintrop, D. mfl. «Defining computational thinking for mathematics and science classrooms». I: *Journal of Science Education and Technology* 25.1 (2016), s. 127–147.

[19] Weisstein, E. W. *Tautochrone Problem From MathWorld—A Wolfram Web Resource*. URL: http://mathworld.wolfram.com/TautochroneProblem.html (sjekket 22.04.2019).

Vedlegg

Vedlegg 1: Oppgavehefte til matematikk- og økonomistudenter

Oppgavesett om differensialligninger

22. mai 2019

Introduksjon

Studenters første møte med differensialligninger i videregående skole og på universitetsnivå består ofte av en introduksjon til forskjellige måter å klassifisere differensialligninger på, etterfulgt av spesielle analytiske løsningsstrategier som oftest består av integrasjonsregning. Siden studenter har lært integrasjonsregning fra tidligere, så kan det være naturlig å ha en analytisk tilnærming til løsing av differensialligninger slik det ofte er, men på en annen side er det også en fare for at løsing av differensialligninger forblir algoritmebasert for studentene, der de egentlig ikke trenger å forstå hva man gjør, så lenge de har kontroll på klassifikasjon av differensialligninger og integrasjonsregning.

Vi skal i dette oppgavesettet ha en annen tilnærming til å løse differensialligninger ved å heller tenke som en datamaskin. Det vil si at vi må bryte ned et problem til små deler som må skje i en logisk rekkefølge, slik at vi etter hvert kan bruke for eksempel Python til å gjøre grovarbeidet for oss. Dere vil forhåpentlivis kunne se en tydeligere kobling mellom en differensialligning og dens løsning, og kanskje vil dere også angripe løsing av differensialligninger på en annen måte enn dere har gjort før.

Utførelse av undersøkelsen

Dette oppgavesettet består av fire oppgaver som alle har forskjellige deloppgaver ved seg. Dere får se én og én deloppgave, og skal så angripe oppgaven så godt dere kan, samtidig som dere tenker høyt for å få en innsikt i tankegangen deres. Dere kan spørre om hva som helst gjennom hele oppgavesettet om det er noe som er uklart eller trenger å forklares bedre. Dere har alltid tilgjengelig et eksemplar av Kalkulus av Tom Lindstrøm om dere skulle trenge å slå opp noe. Noe teori vil dere også få i forkant der det er nødvendig.

Før vi starter: Grunnleggende om differensialligninger og notasjon i oppgavesettet

En differensialligning sier oss noe om relasjonen til en størrelse x og dens deriverte $x', x'', x''', \ldots$. Størrelsen x kan være være egentlig hva som helst, for eksempel kan det være mengden vann som renner ut av en tank, mengden radioaktiv stråling i et aktivt materie, populasjonen av en dyrebestand, svingningene til en fjær, osv.. Det er mange eksempler, og alle er med på å beskrive fenomener hentet fra naturvitenskapens verden.

Legg merke til at vi bruker x som benevnelse for mengden vi ser på, og det vil det også gjøre gjennom hele oppgavesettet. Vi kommer også til å se på x som en funksjon av tid, t, da vi tenker oss at vi skal forutse hvordan en mengde utvikler seg i fremtiden basert på det vi vet i nåtiden. Vi kommer derfor til å forholde oss til t-x-koordinatsystem, men vi kunne like gjerne ha forholdt oss til x-y-koordinatsystem, det spiller egentlig veldig liten rolle.

Notasjonsmessig så skriver vi den deriverte på formen x', som representerer den deriverte til x med hensyn på tid. Dette er det samme som

$$x' = x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}(t) = \dot{x} = Dx(t) \tag{1}$$

Alt er bare forskjellige måter å representere den deriverte på. Den andrederivete blir følgelig x'', den tredjederiverte blir x''' osv.. Vi skal uansett kun se på differensialligninger av første orden i dette oppgavesettet, da differensialligninger av høyere orden kan gjøres om til et system av førsteordens differensialligninger.

Hva er en løsning av en differensialligning?

En ligning som ikke inneholder noen derivert av x har som kjent kun tall som løsning. For eksempel har ligningen $t^2 + 4t = 5$ løsningene $t = 1$ og $t = -5$. For en differensialligningen derimot så er løsningen en eller flere funksjoner $x(t)$ som oppfyller ligningen vi skal løse. Noen ganger kan man løse disse analytisk, men som regel er ikke dette mulig og vi må bruke andre metoder for å kunne si noe om hvordan en løsningskurve kan se ut.

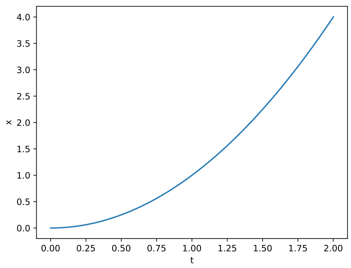
Et aspekt ved løsninger som ikke alltid fremlegges i like stor grad, er hvordan de oppfører seg. Hva skjer med en løsning $x(t)$ når tiden t går mot uendelig for eksempel? Løsningsprosessen stopper ofte med å finne et uttrykk for funksjonen $x(t)$ uten at man egentlig vet så mye om hvordan løsninger av differensialligningen vi studerer oppfører seg. Også dette kan en datamaskin hjelpe oss med å studere når det ikke finnes noen analytisk løsning til ligningen vi skal løse.

Oppgave 1

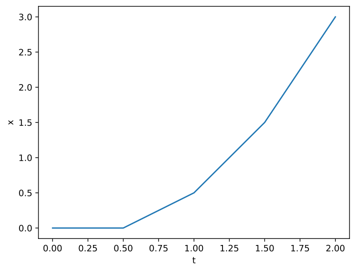
La oss nå i denne første oppgaven ta utgangspunkt i en førsteordens lineær differensialligning gitt ved

$$x' = 2t, \quad x(0) = 0 \tag{2}$$

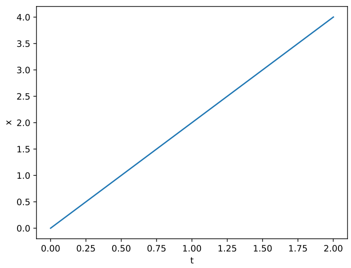
(a) I figurene under ser du forskjellige funksjoner $x(t)$. Hvilke av løsningskurvene kan vi anse som en løsning av (2)? Begrunn svaret.



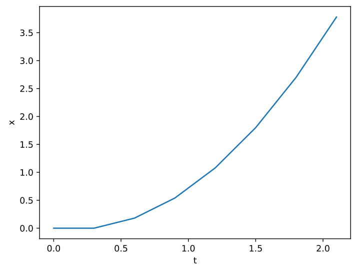
(a) Image



(b) Image



(c) Image

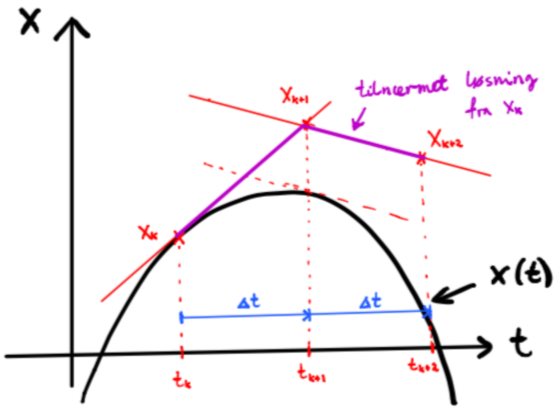


(d) Image

Figur 1: Forslag til løsninger av (2)

Oppgave 2

Løsning b) og d) i oppgave 1(a) ble konstruert ved det som kalles Eulers metode. Dette er en metode som bruker stigningen i ett punkt x_k til å beregne det neste punktet x_{k+1}. Om du ikke er kjent med notasjonen x_k, så betyr det at du startet i x_0, deretter beregnet du x_1, deretter beregnet du x_2, og så videre, helt til du nå har kommet til punktet x_k i den tilnærmede løsningen. Du starter altså i et punkt x_k ved tiden t_k og du ønsker å regne ut neste tilnærmede verdi et lite stykke, Δt, inn i fremtiden. Siden vi vet hva den deriverte er i punktet x_k, det vil si stigningen til $x(t)$ i dette punktet, kan vi tegne opp tangenten i dette punktet og følge denne linjen i en tid Δt bortover. Punktet vi ender i er det tilnærmede punktet x_{k+1}. Deretter kan vi gjenta prosessen til å finne x_{k+2}, x_{k+3}, x_{k+4} osv.. Vi skal i denne oppgaven se nærmere på denne måten å angripe en differensialligning på.



Figur 2: Skissering av Eulers metode

Ta i utgangspunkt i initialproblemet

$$x' = 1 - x^2, \qquad x(0) = 3 \tag{3}$$

(a) Eulers metode brukte altså stigningen i startpunktet x_k til å beregne x_{k+1}. Hvordan kan vi finne en bedre tilnærmet løsning enn det Eulers metode gir oss?

(b) La oss ikke gjøre det alt for komplisert, og forholde oss til et generelt startpunktet, x_k, som vi vet og sluttpunktet vårt, x_{k+1}, som vi ikke vet. Hvordan kan vi beregne x_{k+1}?

Hint: Hva er den deriverte i punktet x_k og x_{k+1}?

(c) Hvordan vil uttrykket for x_{k+1} se ut for en generell differensialligning på formen $x' = f(t, x)$?

(d) Bryt ned fremgangsmåten i oppgave (b) til små logiske steg som i en algoritme, slik at en datamaskin skal kunne forstå og anvende metoden. Skriv gjerne pseudokode om du vil.

(e) Sammenlign algoritmen din med det ferdige programmet `numerical_method.py` som finnes på pc-en. Stemmer det overens? Hvis ikke, hva er forskjellig, og hvilke konsekvenser vil det ha for løsningen vår?

Oppgave 3

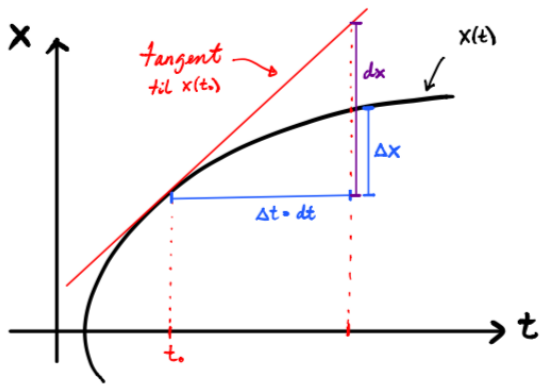
Vi har nå utledet en algoritme som skal hjelpe oss til å konsturere en løsning. I denne oppgaven skal vi endre verdien til noen variabler for å se hvilke konsekvenser dette har for løsningen vår.

(a) Sjekk at programmet fungerer slik det er. Varier `x[0]` for å se hvordan løsningen vil oppføre seg for forskjellige startverdier. Kunne du funnet ut dette ved å kun se på differensialligningen gitt ved (3)?

(b) Endre nå verdien for Δt til å bli gradvis større. Hva ser du? Kan du forklare oppførselen til løsningskurven vår når Δt blir tilstrekkelig stor nok?

La oss nå se på teorien bak hva et differensial er om du ikke husket det fra før. Et differensial er per definisjon en infinitesimal endring i funksjonsverdien $x(t)$. I Figur 3 ser vi differensialet dx skissert sammen med differensialet dt. dt er som du ser lik Δt, men dx er ulik Δx. Når vi har gitt en differensialligning, så er det forholdet mellom differensialene dx og dt vi har gitt, altså ikke Δx, som ville gitt oss den egentlig funksjonsverdien til den eksakte løsningen $x(t)$, om vi later som om denne hadde eksistert. Sammenhengen mellom dx og Δx kan da beskrives ved følgende relasjon

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{4}$$



Figur 3: Skissering av et differensial

(c) Kan du ut ifra teorien om differensialer forklare hvorfor vi alltid vil få en feil ved bruk av numeriske metoder og hvorfor tror du vi allikevel bruker dem?

Oppgave 4

(a) Vi har så langt i dette oppgavesettet hatt en numerisk tilnærming til differensialligninger. Hva er det som skiller fremgangsmåten i en numerisk metode fra en analytisk metode? Hvilke fordeler/ulemper finnes det i hver metode?

(b) Hvilken metode føler du gir en best kobling mellom selve differensialligningen og løsningen, og hvorfor?

Vedlegg 2: Oppgavehefte til fysikkstudenter

Oppgavesett om differensialligninger

22. mai 2019

Introduksjon

Studenters første møte med differensialligninger i videregående skole og på universitetsnivå består ofte av en introduksjon til forskjellige måter å klassifisere differensialligninger på, etterfulgt av spesielle analytiske løsningsstrategier som oftest består av integrasjonsregning. Siden studenter har lært integrasjonsregning fra tidligere, så kan det være naturlig å ha en analytisk tilnærming til løsing av differensialligninger slik det ofte er, men på en annen side er det også en fare for at løsing av differensialligninger forblir algoritmebasert for studentene, der de egentlig ikke trenger å forstå hva man gjør, så lenge de har kontroll på klassifikasjon av differensialligninger og integrasjonsregning.

Vi skal i dette oppgavesettet ha en annen tilnærming til å løse differensialligninger ved å heller tenke som en datamaskin. Det vil si at vi må bryte ned et problem til små deler som må skje i en logisk rekkefølge, slik at vi etter hvert kan bruke for eksempel Python til å gjøre grovarbeidet for oss. Dere vil forhåpentlivis kunne se en tydeligere kobling mellom en differensialligning og dens løsning, og kanskje vil dere også angripe løsing av differensialligninger på en annen måte enn dere har gjort før.

Utførelse av undersøkelsen

Dette oppgavesettet består av fire oppgaver som alle har forskjellige deloppgaver ved seg. Dere får se én og én deloppgave, og skal så angripe oppgaven så godt dere kan, samtidig som dere tenker høyt for å få en innsikt i tankegangen deres. Dere kan spørre om hva som helst gjennom hele oppgavesettet om det er noe som er uklart eller trenger å forklares bedre. Dere har alltid tilgjengelig et eksemplar av Kalkulus av Tom Lindstrøm om dere skulle trenge å slå opp noe. Noe teori vil dere også få i forkant der det er nødvendig.

Før vi starter: Grunnleggende om differensialligninger og notasjon i oppgavesettet

En differensialligning sier oss noe om relasjonen til en størrelse x og dens deriverte $x', x'', x''', \ldots$. Størrelsen x kan være være egentlig hva som helst, for eksempel kan det være mengden vann som renner ut av en tank, mengden radioaktiv stråling i et aktivt materie, populasjonen av en dyrebestand, svingningene til en fjær, osv.. Det er mange eksempler, og alle er med på å beskrive fenomener hentet fra naturvitenskapens verden.

Legg merke til at vi bruker x som benevnelse for mengden vi ser på, og det vil det også gjøre gjennom hele oppgavesettet. Vi kommer også til å se på x som en funksjon av tid, t, da vi tenker oss at vi skal forutse hvordan en mengde utvikler seg i fremtiden basert på det vi vet i nåtiden. Vi kommer derfor til å forholde oss til t-x-koordinatsystem, men vi kunne like gjerne ha forholdt oss til x-y-koordinatsystem, det spiller egentlig veldig liten rolle.

Notasjonsmessig så skriver vi den deriverte på formen x', som representerer den deriverte til x med hensyn på tid. Dette er det samme som

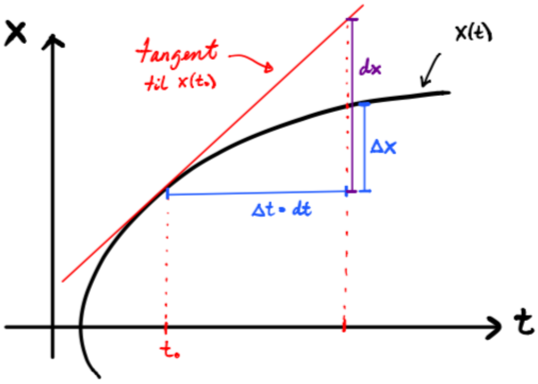
$$x' = x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}(t) = \dot{x} = Dx(t) \tag{1}$$

Alt er bare forskjellige måter å representere den deriverte på. Den andrederivete blir følgelig x'', den tredjederiverte blir x''' osv.. Vi skal uansett kun se på differensialligninger av første orden i dette oppgavesettet, da differensialligninger av høyere orden kan gjøres om til et system av førsteordens differensialligninger.

Hva er et differensial?

Et differensial er per definisjon en infinitesimal (uendelig liten) endring i funksjonsverdien $x(t)$. I Figur 1 ser vi differensialet dx skissert sammen med differensialet dt. dt er som du ser lik Δt, men dx er ulik Δx. Når vi har gitt en differensialligning, så er det forholdet mellom differensialene dx og dt vi har gitt, altså ikke Δx, som ville gitt oss den egentlig funksjonsverdien til den eksakte løsningen $x(t)$, om vi later som om denne hadde eksistert. Sammenhengen mellom dx og Δx kan da beskrives ved følgende relasjon

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2}$$



Figur 1: Skissering av et differensial

Hva er en løsning av en differensialligning?

En ligning som ikke inneholder noen derivert av x har som kjent kun tall som løsning. For eksempel har ligningen $t^2 + 4t = 5$ løsningene $t = 1$ og $t = -5$. For en differensialligningen derimot så er løsningen en eller flere funksjoner $x(t)$ som oppfyller ligningen vi skal løse. Noen ganger kan man løse disse analytisk, men som regel er ikke dette mulig og vi må bruke andre metoder for å kunne si noe om hvordan en løsningskurve kan se ut.

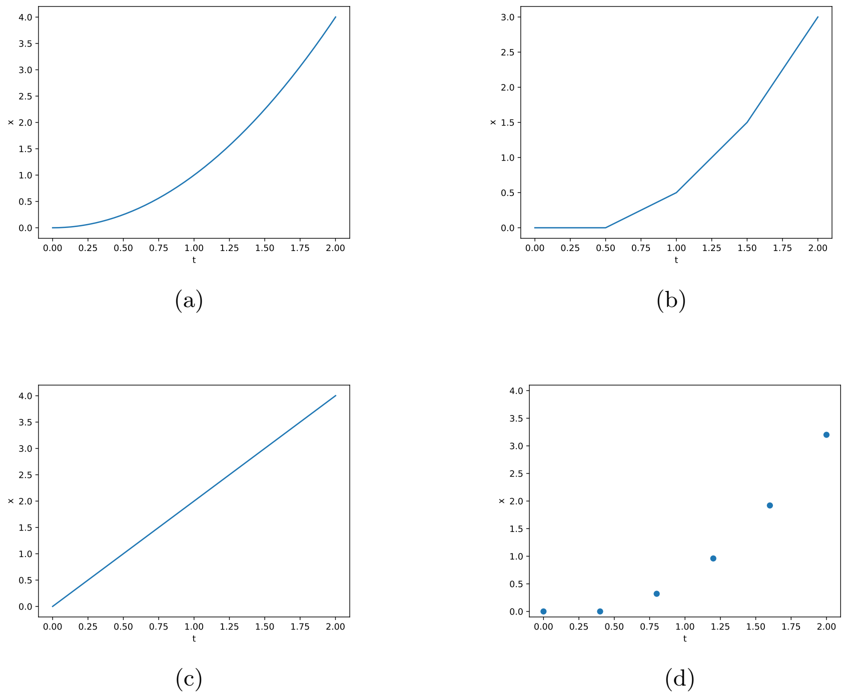
Et aspekt ved løsninger som ikke alltid fremlegges i like stor grad, er hvordan de oppfører seg. Hva skjer med en løsning $x(t)$ når tiden t går mot uendelig for eksempel? Løsningsprosessen stopper ofte med å finne et uttrykk for funksjonen $x(t)$ uten at man egentlig vet så mye om hvordan løsninger av differensialligningen vi studerer oppfører seg. Også dette kan en datamaskin hjelpe oss med å studere når det ikke finnes noen analytisk løsning til ligningen vi skal løse.

Oppgave 1

La oss nå i denne første oppgaven ta utgangspunkt i en førsteordens lineær differensialligning gitt ved

$$x' = 2t, \quad x(0) = 0 \tag{3}$$

(a) I figurene under ser du forskjellige funksjoner $x(t)$. Hvilke av løsningskurvene kan vi anse som en løsning av (3)? Begrunn svaret.



Figur 2: Forslag til løsninger av (3)

Oppgave 2

Løsning b) og d) i oppgave 1(a) ble konstruert ved det som kalles Eulers metode (dere kan lese mer om Eulers metode i Kalkulus av Tom Lindstrøm). Poenget er å bruke den informasjon vi får fra en differensialligning til å kunne si noe om hvordan løsningskurven $x(t)$ vil utvikle seg i fremtiden. Dette gjøres altså ved å starte i et punkt x_0 for deretter finne påfølgende punkter x_1, x_2, $\ldots$, x_k, x_{k+1}, $\ldots$.

Ta nå utgangspunkt i initialproblemet

$$x' = 1 - x^2, \qquad x(0) = 3 \tag{4}$$

(a) Hvordan informasjon kan vi få fra en differensialligning og hvordan kan vi forbedre tilnærmingen til løsningskurven vår? Begrunn hvorfor.

(b) La oss ikke gjøre det alt for komplisert, og forholde oss til et generelt startpunktet, x_k, som vi vet og sluttpunktet vårt, x_{k+1}, som vi ikke vet. Hvordan kan vi finne en tilnærmet løsningskurve ved å bruke informasjon om disse to punktene?

(c) Bryt ned fremgangsmåten i forrige oppgave til en algoritme som en datamaskin kan forstå. Skriv gjerne først pseudokode før du til slutt skriver et ferdig program i python.

(d) Hva ville blitt forandret hvis vi ser på en generell differensialligning på formen $x' = f(t, x)$? Er det noen ligninger som vil skape problemer ved å bruke vår numeriske metode? Er det til motsetning noen som ikke vil skape noen problemer?

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi endre verdien til noen variabler for å se hvilke konsekvenser dette har for løsningen vår.

(a) Hvordan oppfører løsningen seg for forskjellige startbetingelser?

(b) Hva skjer om vi gjør tidsintervallet vårt større og hvorfor?

(c) Kan du ut ifra teorien om differensialer forklare hvorfor vi alltid vil få en feil ved bruk av numeriske metoder og hvorfor tror du vi allikevel bruker dem?

Oppgave 4

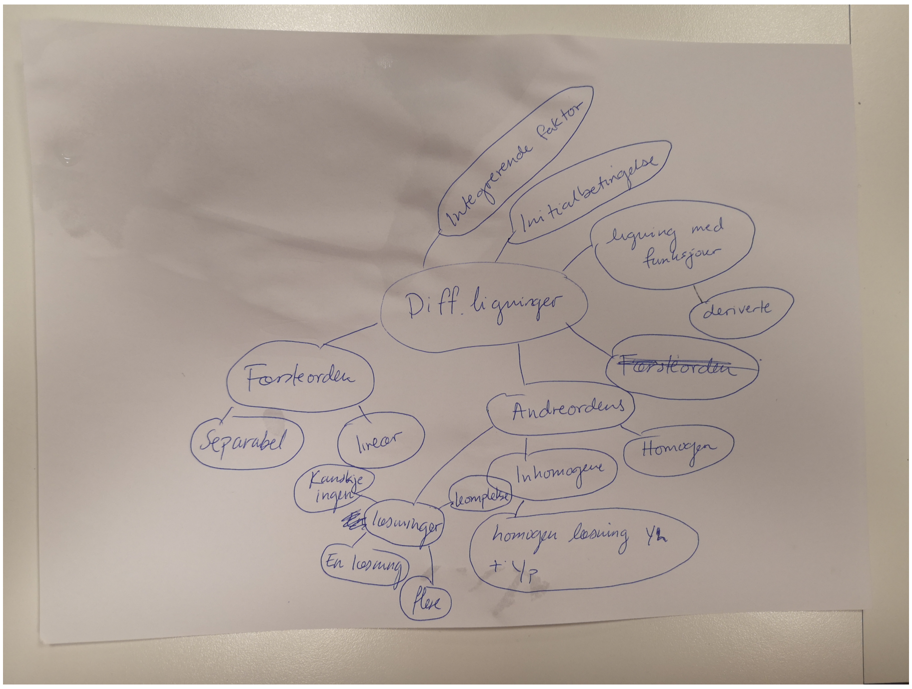
(a) Vi har så langt i dette oppgavesettet hatt en numerisk tilnærming til differensialligninger. Hva er det som skiller fremgangsmåten i en numerisk metode fra en analytisk metode? Hvilke fordeler/ulemper finnes det i hver metode?

(b) Hvilken metode føler du gir en best kobling mellom selve differensialligningen og løsningen, og hvorfor?

Vedlegg 3: Program til oppgave 3 i oppgaveheftet. Eulers metode

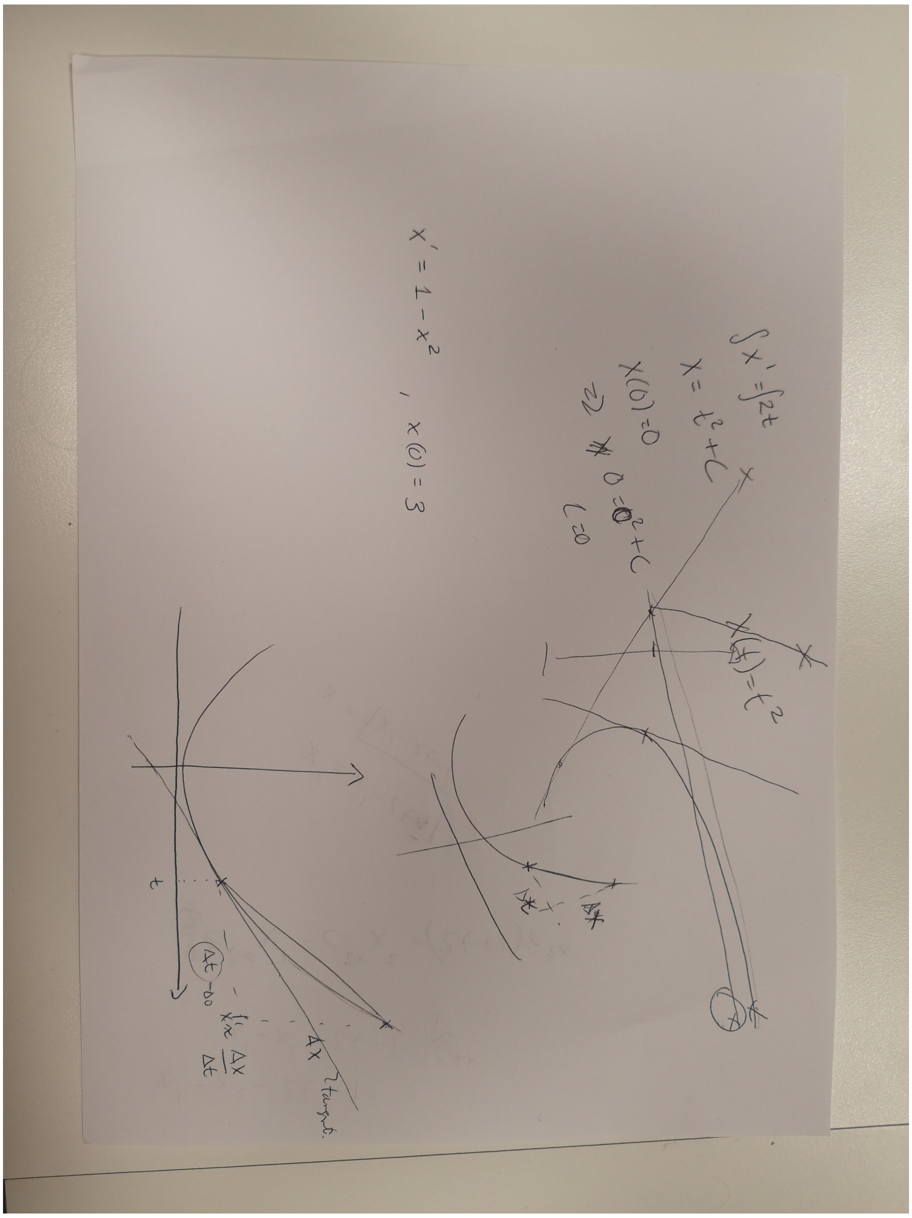
```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import sqrt

# Constants
dt = 0.001  # time step
t_max = 5   # maximum time to plot the solution, arbitrary
t0 = 0      # initial time
x0 = 3      # initial value

# Save values in lists
t_list = [t0]
x_list = [x0]

t = t0
x = x0

def f(t, x):
    return 2*t

while t < t_max: # condition for how long to run.
    x = x + dt*f(t, x)
    t = t + dt
    x_list.append(x)
    t_list.append(t)

# Set plot options
t_min = -0.1
x_min = -0.1
x_max = 4.1
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('x')
plt.xlim([t_min, 2.1])
plt.ylim([x_min, x_max])

# Plot solution
plt.plot(t_list, x_list)
plt.savefig("sol.pdf")
plt.show()
```

Vedlegg 4: Kladdeark til matematikk- og økonomistudenter

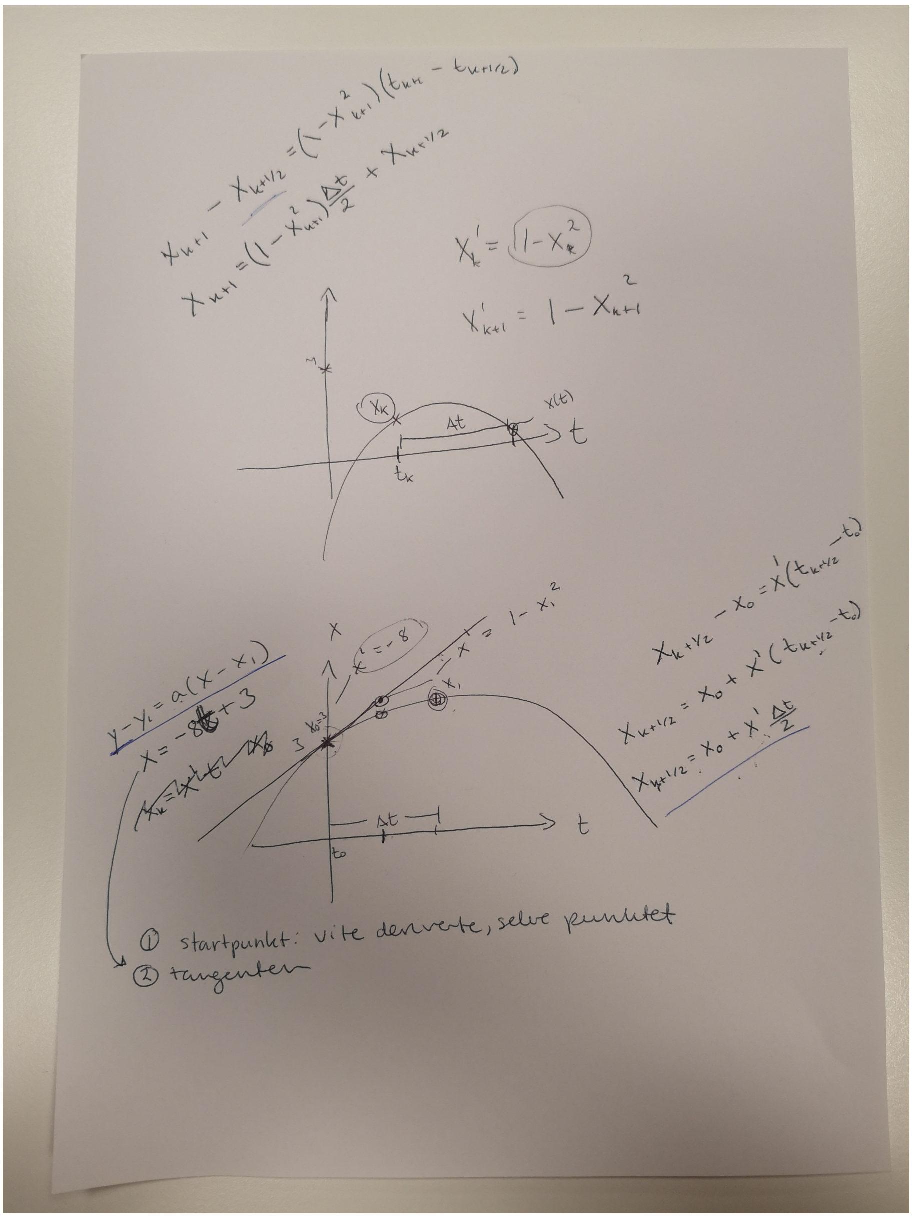


Figur 1: Tankeart fylt ut av matematikk- og økonomistudenter

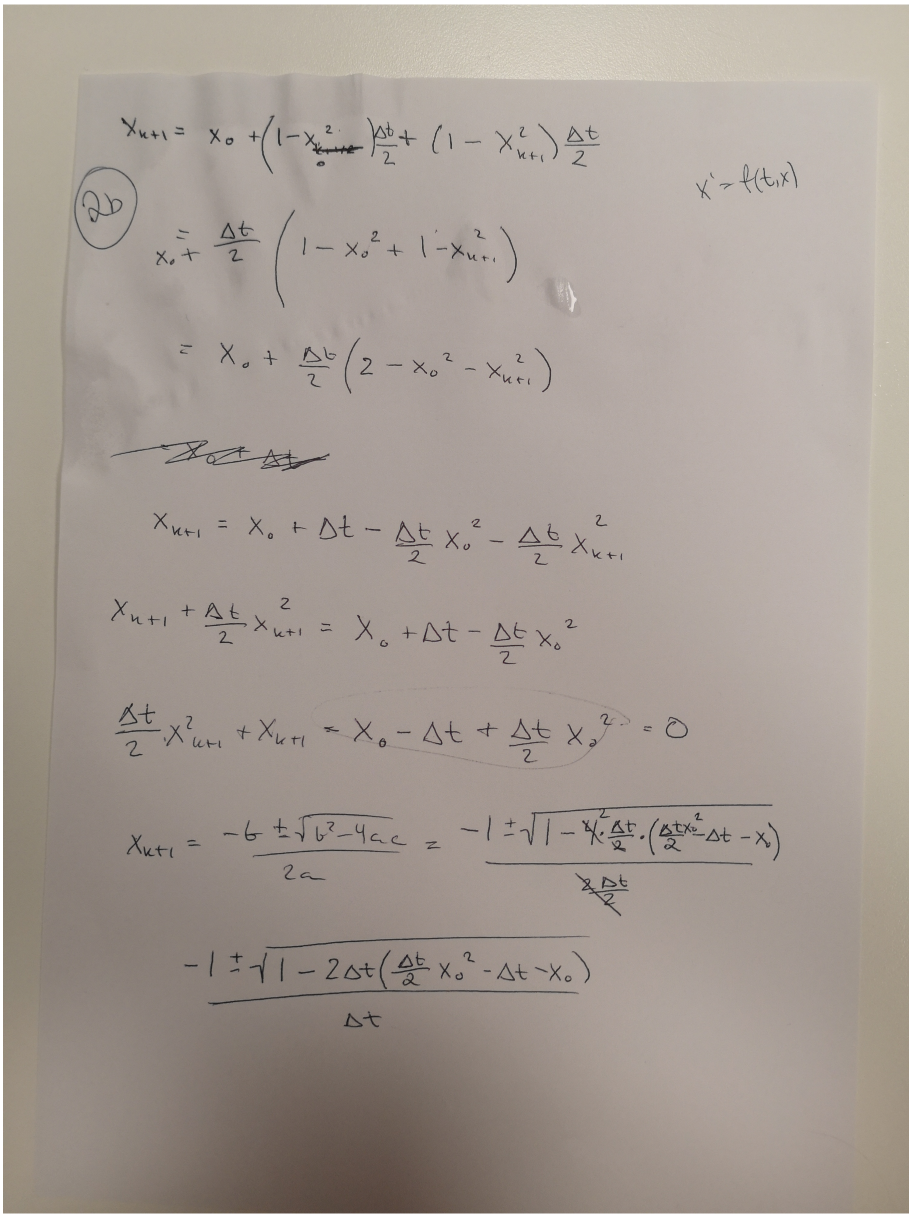
Vedlegg 3: Kladdeark til fysikk- og astronomistudenter



Figur 2: Kladd til oppgave 1 fylt ut av matematikk- og økonomistudenter



Figur 3: Kladd for generell utregning fylt ut av matematikk- og økonomistudenter



$$x_{k+1} = x_0 + (1 - x_0^2)\frac{\Delta t}{2} + (1 - x_{k+1}^2)\frac{\Delta t}{2}$$

$x' = f(t,x)$

2b

$$= x_0 + \frac{\Delta t}{2}\left(1 - x_0^2 + 1 - x_{k+1}^2\right)$$

$$= x_0 + \frac{\Delta t}{2}\left(2 - x_0^2 - x_{k+1}^2\right)$$

$$\cancel{x_0 + \Delta t}$$

$$x_{k+1} = x_0 + \Delta t - \frac{\Delta t}{2}x_0^2 - \frac{\Delta t}{2}x_{k+1}^2$$

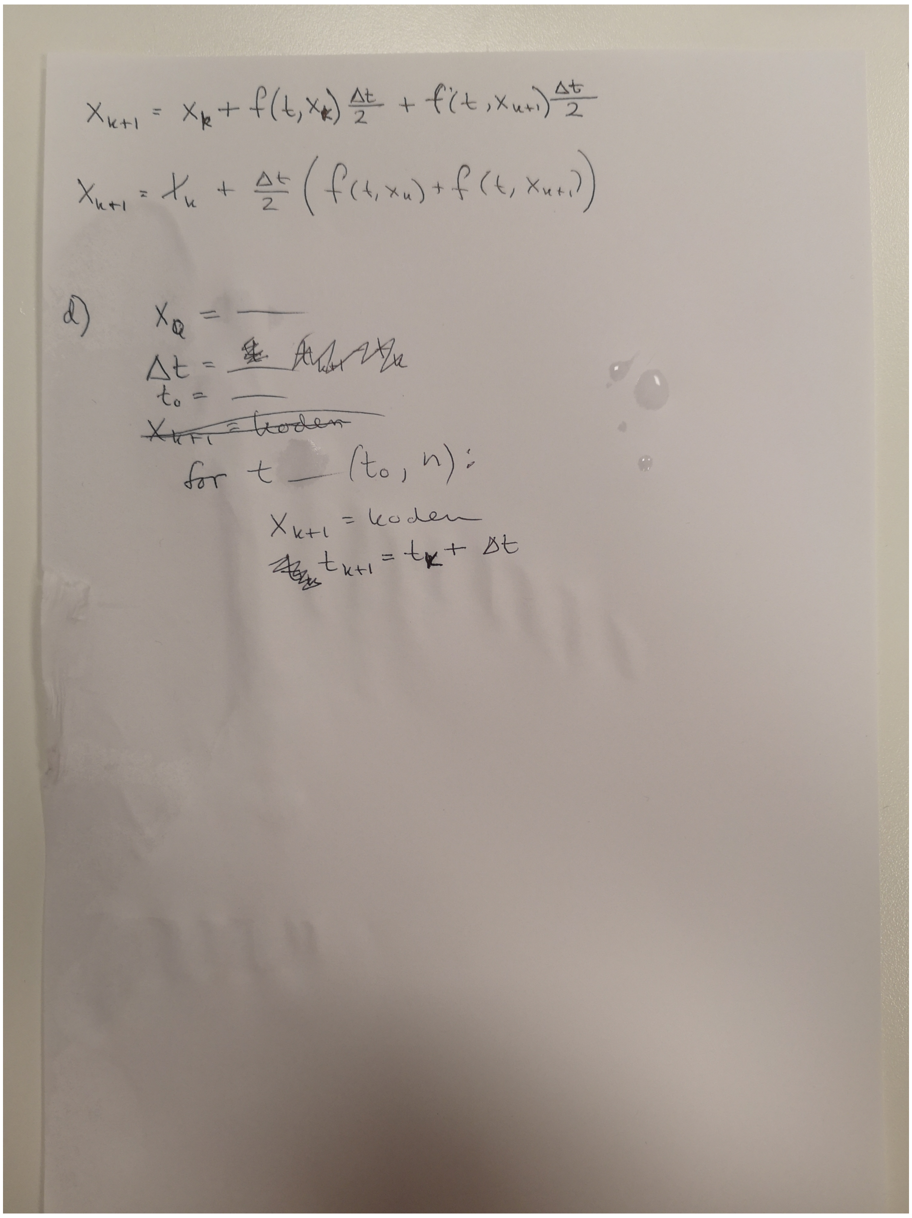
$$x_{k+1} + \frac{\Delta t}{2}x_{k+1}^2 = x_0 + \Delta t - \frac{\Delta t}{2}x_0^2$$

$$\frac{\Delta t}{2}x_{k+1}^2 + x_{k+1} - x_0 - \Delta t + \frac{\Delta t}{2}x_0^2 = 0$$

$$x_{k+1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot\frac{\Delta t}{2}\cdot\left(\frac{\Delta t x_0^2}{2} - \Delta t - x_0\right)}}{\cancel{2\frac{\Delta t}{2}}}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 2\Delta t\left(\frac{\Delta t}{2}x_0^2 - \Delta t - x_0\right)}}{\Delta t}$$

Figur 4: Kladd til generell utregning fylt ut av matematikk- og økonomistudenter



$$x_{k+1} = x_k + f(t, x_k)\frac{\Delta t}{2} + f(t, x_{k+1})\frac{\Delta t}{2}$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{\Delta t}{2}\left(f(t, x_k) + f(t, x_{k+1})\right)$$

d) $x_0 =$ ___

$\Delta t =$ ___

$t_0 =$ ___

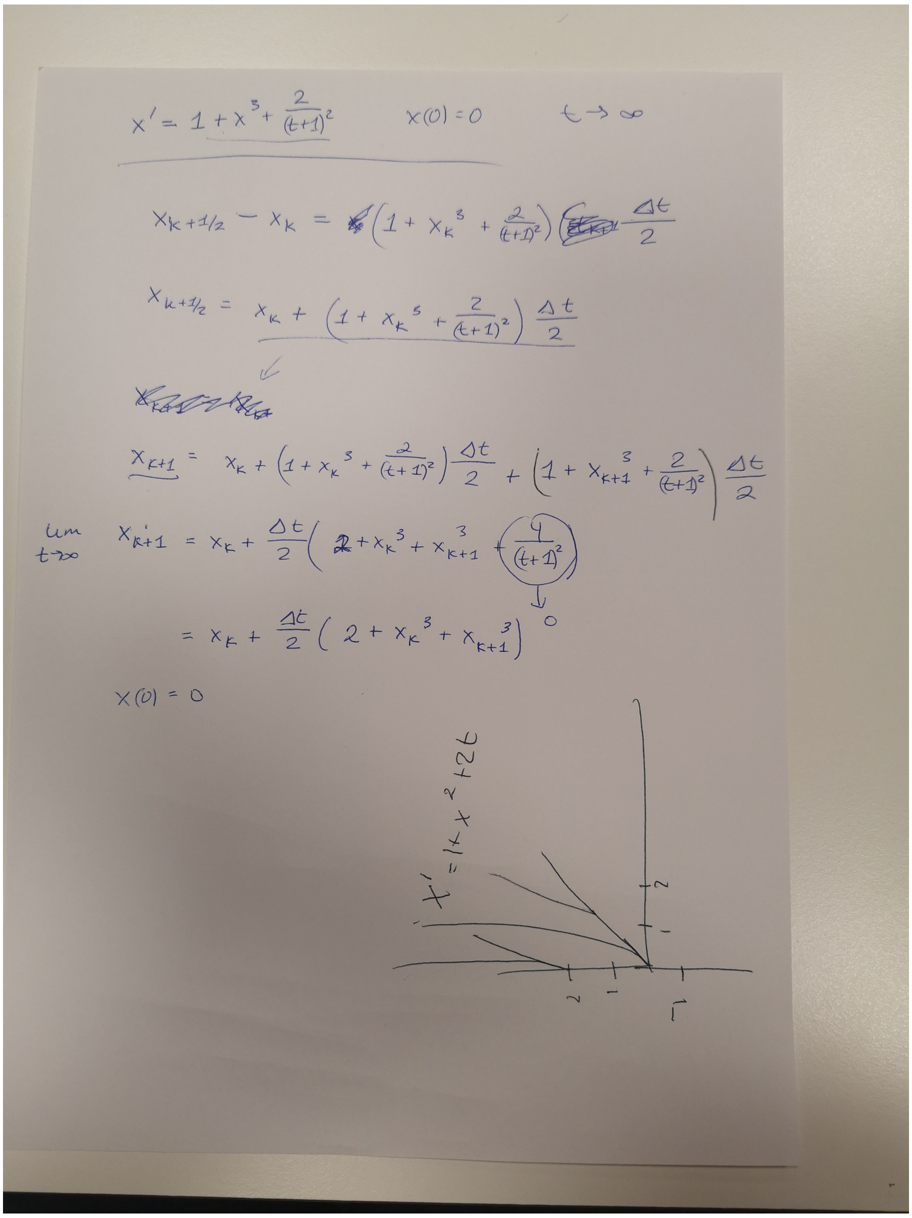
~~x_{k+1} = koden~~

for t ___ (t_0, n):

x_{k+1} = koden

$t_{k+1} = t_k + \Delta t$

Figur 5: Kladd til utledning av algoritme av matematikk- og økonomistudenter



$x' = 1 + x^3 + \frac{2}{(t+1)^2}$ $\quad x(0) = 0 \quad t \to \infty$

$x_{k+1/2} - x_k = \left(1 + x_k^3 + \frac{2}{(t+1)^2}\right)\frac{\Delta t}{2}$

$x_{k+1/2} = x_k + \left(1 + x_k^3 + \frac{2}{(t+1)^2}\right)\frac{\Delta t}{2}$

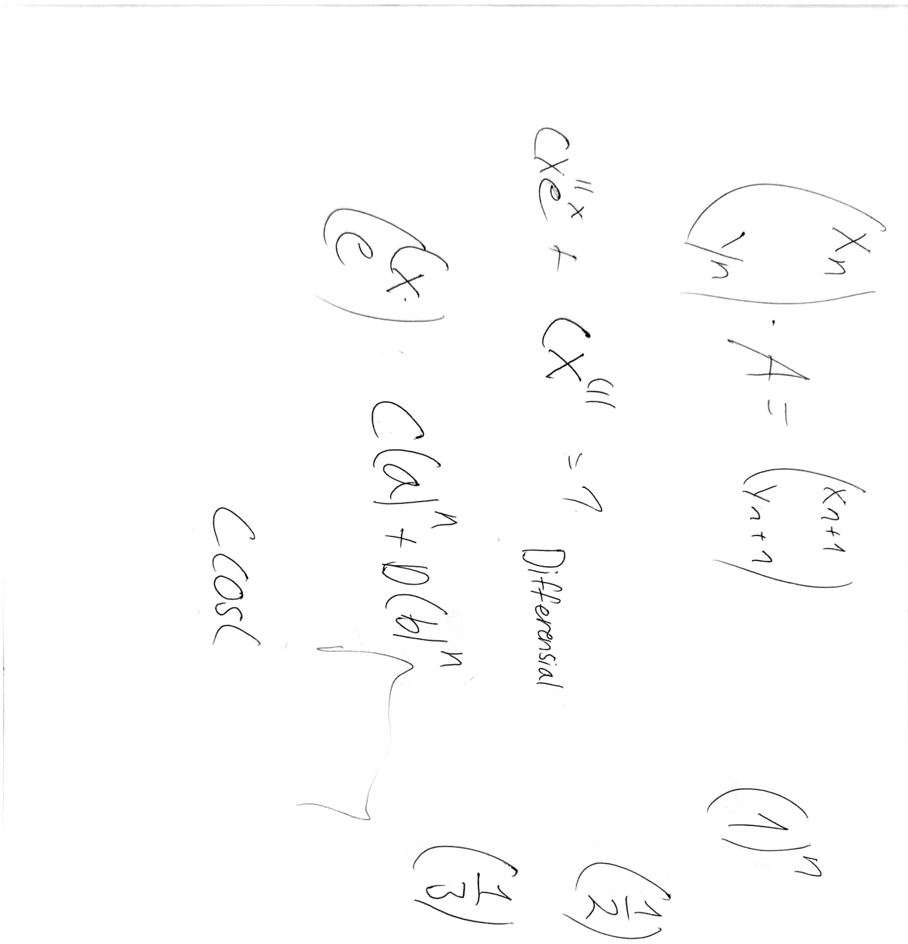
$x_{k+1} = x_k + \left(1 + x_k^3 + \frac{2}{(t+1)^2}\right)\frac{\Delta t}{2} + \left(1 + x_{k+1}^3 + \frac{2}{(t+1)^2}\right)\frac{\Delta t}{2}$

$\lim_{t\to\infty} \quad x_{k+1} = x_k + \frac{\Delta t}{2}\left(2 + x_k^3 + x_{k+1}^3 + \underbrace{\frac{4}{(t+1)^2}}_{0}\right)$

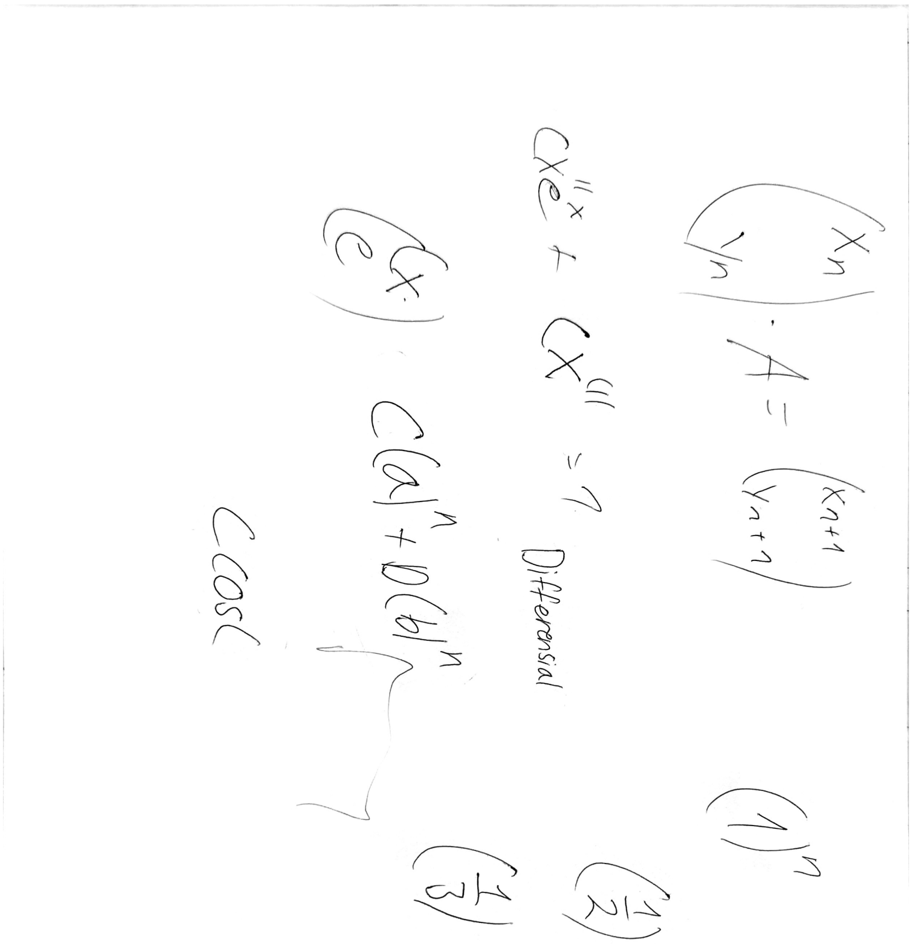
$= x_k + \frac{\Delta t}{2}\left(2 + x_k^3 + x_{k+1}^3\right)$

$x(0) = 0$

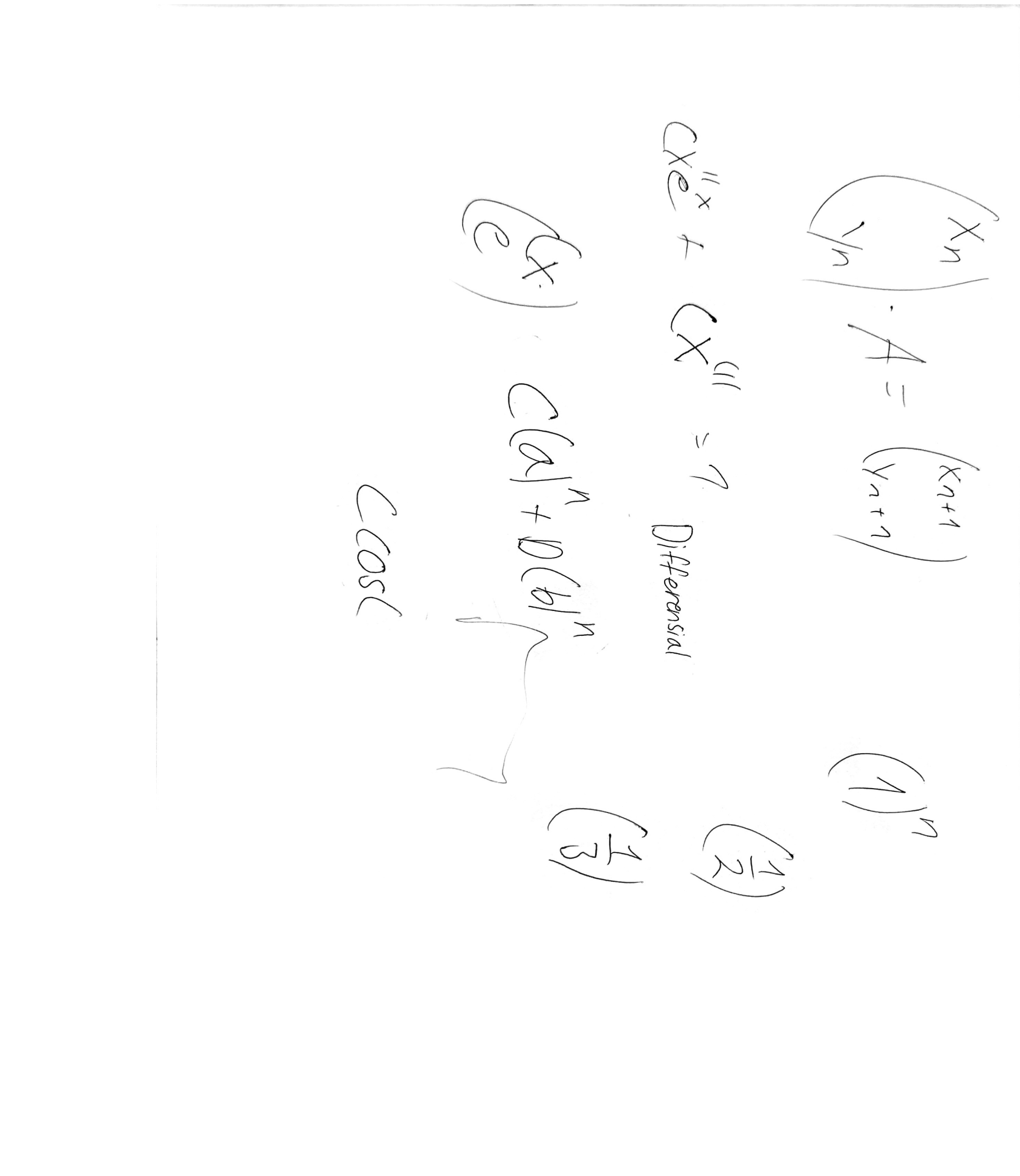
Figur 6: Kladd til kontrollopppgave 2 fylt ut av matematikk- og økonomistudenter



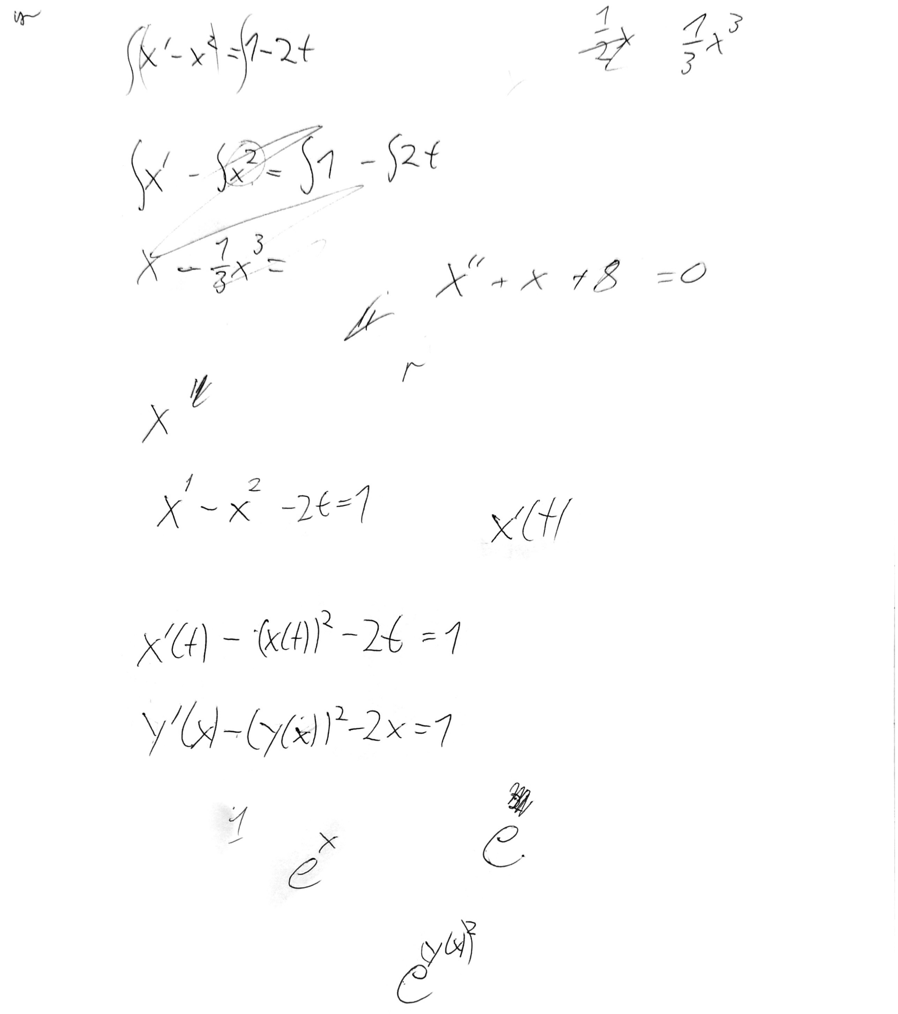
Figur 7: Tankekart fylt ut av fysikk- og astronomistudenter



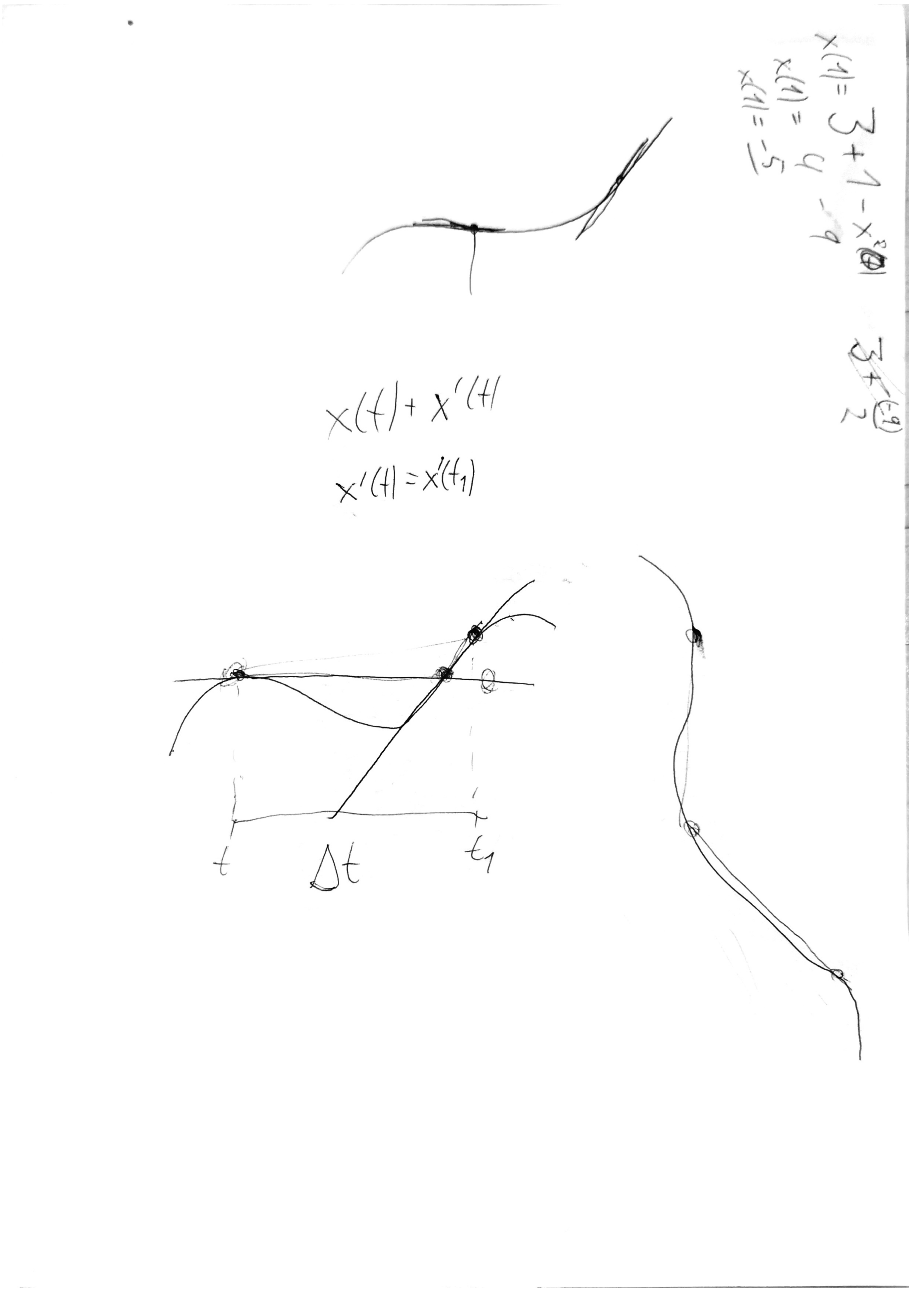
Figur 8: Tankekart fylt ut av fysikk- og astronomistudenter



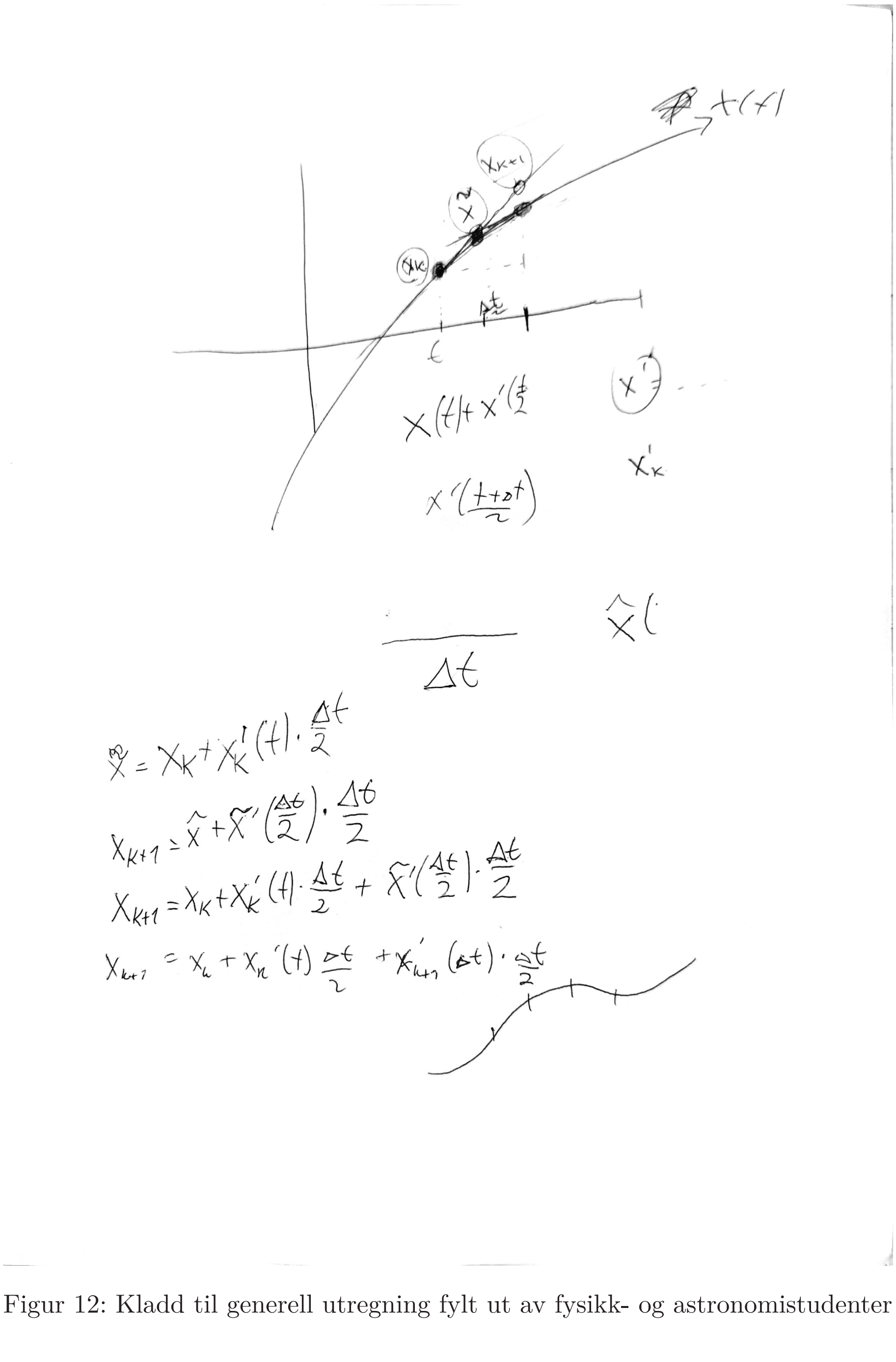
Figur 9: Kladd til tankekart fylt ut av fysikk- og astronomistudenter



Figur 10: Kladd til kontrolloppgave før oppgavehefte fylt ut av fysikk- og astronomistudenter



Figur 11: Kladd til generell utregning fylt ut av fysikk- og astronomistudenter



Figur 12: Kladd til generell utregning fylt ut av fysikk- og astronomistudenter

$$x(1) = 3 + \frac{-5}{2} + \frac{1 - x^2(1)}{2}$$

$$x(1) = 3 + \left(\frac{-5}{2}\right) + \frac{1}{2} - \frac{x^2(1)}{2}$$

$$= \frac{6-4}{2}$$

$$= \frac{x^2(1)}{2} - x(1) + 1$$

$$x[i+1] = x[i] + x'[i]\cdot\frac{\Delta t}{2} + x'[i+1]\cdot\frac{\Delta t}{2}$$

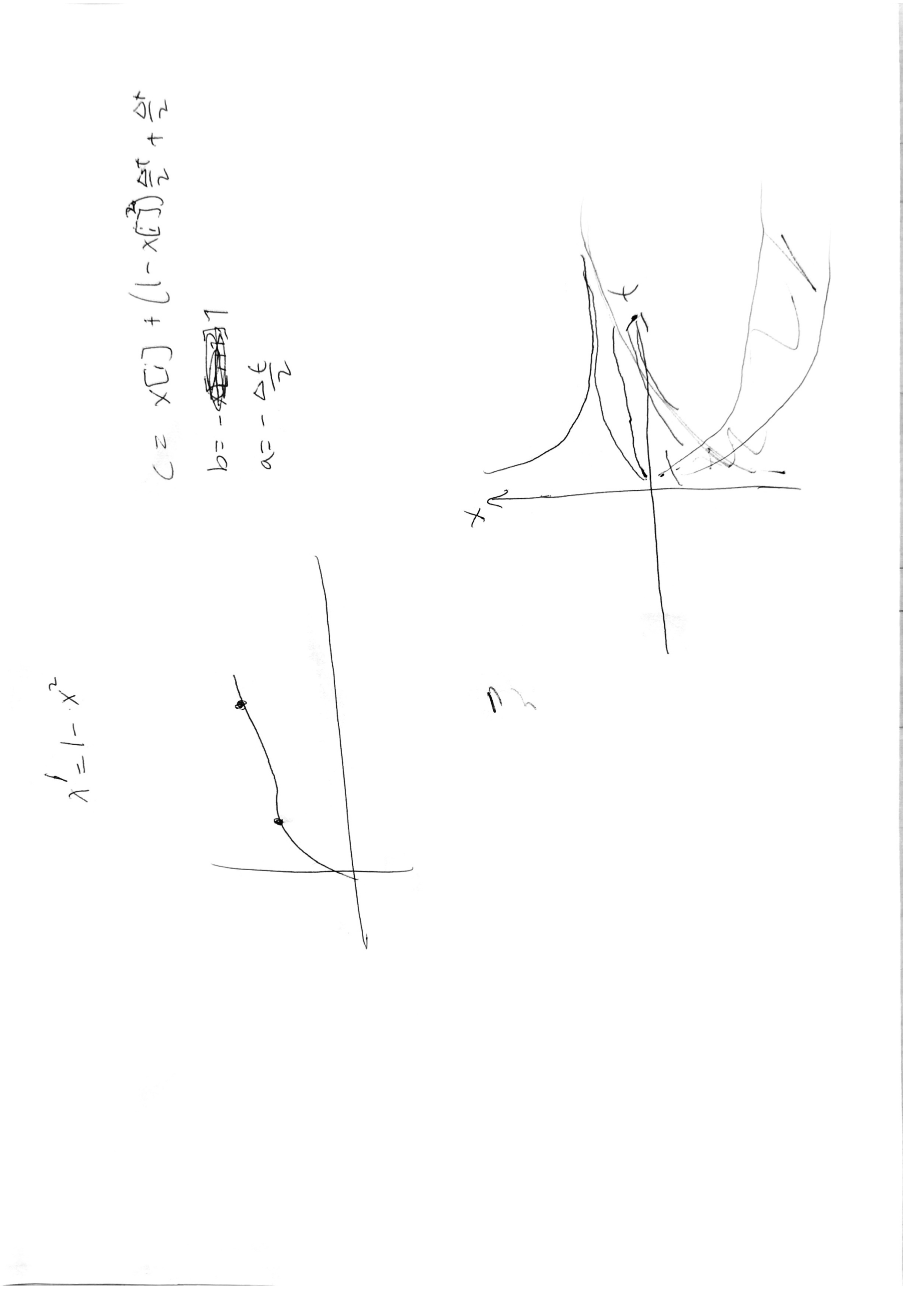
$$x[i+1] = x[i] + x'[i]\cdot\frac{\Delta t}{2} + (1 - x[i+1]^2)\cdot\frac{\Delta t}{2}$$

$$0 = x[i] + x'[i]\cdot\frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{2} - \frac{x[i+1]^2\cdot\Delta t}{2} - x[i+1]$$

$$x[i+1] = \cancel{x[i+1] \pm \sqrt{x[i+1]^2}}$$

$$x[i+1] = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\cdot\frac{\Delta t}{2}\cdot\left(x[i] + x'[i]\frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{2}\right)}}{-\Delta t}$$

Figur 13: Kladd til generell utregning fylt ut av fysikk- og astronomistudenter



Figur 14: Kladd til oppgave 3 fylt ut av fysikk- og astronomistudenter