

UiO : Matematisk institutt

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Dødelighets- og Langtlivrisiko i Solvency II

Arman Færø Johnsen

Masteroppgave, våren 2018



Denne masteroppgaven er levert inn under masterprogrammet *Modellering og dataanalyse*, studieretning *Statistikk og dataanalyse*, ved Matematisk institutt, Universitetet i Oslo. Oppgaven er normert til 60 studiepoeng.

Forsiden viser et utsnitt av rotsystemet til den eksepsjonelle liegruppen E_8 , projisert ned i planet. Liegrupper ble oppfunnet av den norske matematikeren Sophus Lie (1842–1899) for å uttrykke symmetriene til differensiallikninger og spiller i dag en sentral rolle i flere deler av matematikken.

Sammendrag

Usikkerhet rundt menneskers fremtidige levealder resulterer i stor risiko for livsforsikringselskap. Retningslinene for kalkulering av slik risiko er satt av EU-kommisjonen og heter Solvency II. Denne oppgaven vil presenteres i to deler. I del I introduseres sentrale begreper ved livsforsikring og Solvency II. Deretter vil realistiske modeller for fremtidige dødeligheter og det finansielle markedet bli evaluert. I del II etableres et fiktivt livsforsikringselskap. Metodene som ble gjennomgått i del I brukes til numeriske studier av solvens kapitalreserven som behøves for ulike aldersfordelinger, og ulike kontraktsammensetninger. Hensikten med dette er å finne ut hvor godt Solvency II direktivet lykkes med å kombinere dødelighet- og langtlivrisiko med hverandre, og om risikokapitalen som kreves er rettferdig i forhold til reell risiko i markedet. Det vil bli introdusert en intern modell som figurerer utenfor premissene satt av Solvency II som et sammenligningsgrunnlag.

Forord

Først og fremst vil jeg takke min veileder Erik Bølviken. Hans kunnskap og engasjement rundt aktuarfaget har vært svært inspirerende under gjennomføringen av oppgaven, og er noe jeg vil ta med meg videre i yrkeslivet. Jeg vil også takke medstudent og kamerat Håkon Nordtorp som har vært en god samarbeidspartner under hele prosessen.

Innhold

1	Innledning	1
I	Begreper og modeller	3
2	Aktuarmetoder og Solvency II	5
2.1	Beregninger av forpliktelser i livsforsikring	5
2.1.1	Livsforsikring	5
2.1.2	Overlevelsesmodellering	6
2.1.3	Kontraktsverdi og premie	8
2.2	Solvency II i livsforsikring	10
2.2.1	Balanseark	10
2.2.2	SCR - Standard Capital Requirement	12
2.2.3	BE - Best Estimate	12
2.2.4	Stresstester	13
2.2.5	Standardformelen	15
2.3	Hedging	17
3	Dødelighetsmodellering	19
3.1	Valg av dødelighetsdata	19
3.2	Historiske dødelighetsendringer i Norge	20
3.2.1	Økning i dødelighet	21
3.2.2	Reduksjon i dødelighet	23
3.2.3	Seleksjon	25
3.3	Dynamiske dødelighetsmodeller	25
3.3.1	Lee-Carter modellen	25
3.3.2	Justeringer	28
3.3.3	Norge vs Russland	32
3.4	Multifaktor-modeller	33
3.4.1	Kohort effekt	33
3.4.2	Renshaw and Haberman	33
3.4.3	Cairns-Blake-Dowd	34
3.4.4	Cairns-Blake-Dowd med kvadrert alder	35
3.4.5	Cairns-Blake-Dowd med kvadrert alder og kohort	35
3.4.6	Goodness-of-fit	36
3.4.7	P-splines	38
3.5	Solvency II med dynamisk dødelighet	40

3.5.1	Svakheter ved standardformelen	41
4	Wilkie-modellen	45
4.1	Modellens oppbygning	45
4.2	Utleddning av Investeringsmuligheter	47
4.3	Parameterverdier	49
4.4	Pengepolitiske endringer	50
4.4.1	Modifikasjon av inflasjonsparametere	50
4.4.2	Modifikasjon av renteparametere	52
4.4.3	Modifikasjon av aksjeparametere	54
4.5	Kalibrering mot Solvency II	55
4.6	Oversikt over parameterendring	55
II	Et forenklet forsikringssselskap	57
5	Grunnlag for modellen	59
5.1	Pensjonskontrakter	59
5.2	Dødsfallkontrakter	62
5.3	Asset Liability Management	63
5.3.1	Scenario 1: Ung portefølje	64
5.3.2	Scenario 2: Middels portefølje	65
5.3.3	Scenario 3: Gammel portefølje	65
6	Sammenligninger av stresstester	67
6.1	Standard utregning av kapitalreserve	67
6.2	Lee-Carter justert kapitalreserve	69
6.3	Lee-Carter kombinert med Sjokk	70
6.4	Dynamiske vs statiske dødeligheter	71
6.5	Intern stressmodell	72
6.6	Hedgesammensetninger	73
6.6.1	Pensjon/Liv 75/25	73
6.6.2	Pensjon/Liv 25/75	74
6.6.3	Hedge-sammenligning	75
6.7	Reell risiko	77
7	Konkluderende diskusjon	81
7.1	Alternativ stressmodell	82
7.2	Forslag til påfyllende studier	83
8	Appendix	85
8.1	Matematiske formuleringer	85
8.1.1	Singulær-verdi-dekomposisjon av Lee-Carter modellen	85
8.1.2	Utregning av investeringsjokk	85
8.1.3	R-kode	87

Kapittel 1

Innledning

I 2014 publiserte EIOPA et nytt EU-direktiv for kalkulering av risiko innen forsikringsbransjen. Deres filosofi er at land med tilknytning til EU og EØS skal samles rundt et felles nettverk som setter garantien for tilbakebetaling mellom forsikringselskap og forsikringstaker i fokus. Ved det nye direktivet må selskap følge et reglement som skal garantere kunden pengene de har krav på med 99.5% sikkerhet. Dette medfører at ved kun 1-av-200 tilfeller skal selskapet havne i en situasjon hvor kapitalen ikke er tilstrekkelig. Direktivet ble godkjent i 25 november 2009, og besto av over 300 artikler, før det ble videreutviklet og publisert som det offisielle direktivet kalt Delegated Acts i 2014[7]. Videreutviklingen besto hovedsakelig av veiledning rundt matematiske tilnærmelser kalkuleringer av risiko. Solvency II ble iverksatt i forsikringsindustrien den 1. januar 2016, og direktivet består av store mengder dokumentasjon som ikke er lett å holde styr på.

Innstramningen av handlingsrommet til forsikringselskapene har ført til misnøye hos aktørene i forsikringsindustrien. Et økt behov for risikokapital fører til mer tidkrevende og presise analyser av risiko i markedet. Målet for forsikringselskapene er å konstruere en portefølje som reduserer nødvendig risikokapital. Innen livsforsikring vil en slik reduksjon kunne oppnås ved å tilby både pensjon- og dødsfallkontrakter, ettersom risikoen ved disse kontraktene øker ved motsatte endringer i dødelighet. Hvor godt belønner Solvency II et forsikringselskap med god spredning i både alder- og kontraktporteføljene? En god spredning bør resultere i et redusert krav om risikokapital, og spørsmålet er hvorvidt Solvency II tar hensyn til slike spredninger. Derfor vil det i denne oppgaven introduseres en intern modell som ikke benytter de skjematiske retningslinjene satt av Solvency II som sammenligningsgrunnlag. Formålet med denne interne modellen er å etablere et bedre hedgepotensial mellom langtliv og dødelighet enn det standardmodellen gjør.

Levetiden i Norge øker for hvert år, noe som har stor effekt for forsikringsindustrien. Hvor godt passer stresstest-kriteriene til Solvency II de historiske dødelighetene i Norge? Økningen i levealder har vært gradvis og representerer ikke den plutselige endringen i dødelighet som Solvency II skal beskytte mot. Dette betyr at samtidig som EIOPA har strammet inn friheten til selskap når det gjelder risikobehandling, så øker også nødvendigheten av presis dødelighetsmodellering. For å kunne beregne den nødvendige risikokapitalen et selskap behøver er det essensielt med en god

predikasjonsmodell for dynamiske dødeligheter. Den mest tradisjonelle modellen for dynamiske dødeligheter er Lee-Carter modellen, men i nyere tid har det også dukket opp nye konkurrerende modeller som lover en bedre tilnærming. For å belyse hvor godt standardformelen approksimerer reell risiko vil det i tillegg til en dødelighetsmodell bli introdusert en realistisk finansmodell til å modellere fremtidige endringer i det finansielle markedet. Kapittel 3 og 4 vil ta for seg en grundig evaluering av realismen bak slike modeller, og hvorvidt de kan benyttes til å kalkulere reell risiko.

Formålet med oppgaven

- Etablere grunnleggende begreper innen livsforsikring og Solvency II.
- Vurdere ulike dødelighetsmodeller under norske forhold.
- Undersøke mulige svakheter ved håndteringen av langtliv- og dødelighetsrisiko hos Solvency II.
- Sammenligne Solvency II med en intern modell, og kalkuleringen av reell risiko.

Del I

Begreper og modeller

Kapittel 2

Aktuarmetoder og Solvency II

Ved fastsettelse av kontrakt mellom forsikringsselskap og kontrakttaker dannes det en risiko for at en av partene ikke kan holde sin del av avtalen. Det nye Solvency II direktivet har fastsatt at forsikringsselskapets tilbakebetalingkraft skal støttes opp mot 99.5% sikkerhet. Aktuariell kompetanse er ettertraktet innad i forsikringsselskap for å kalkulere verdien av risiko kontraktene medfører, samt finansiell risiko rundt forvaltning av ressurser. Dette kapittelet vil introdusere grunnprinsippene bak aktuarell vitenskap og utregning av kontraktsforpliktelser. Videre introduseres Solvency II, og hvordan dette direktivet behandler risikoen i markedet.

2.1 Beregninger av forpliktelser i livsforsikring

Kontraktene som nedtegnes innen livsforsikring er basert på den personlige tilstanden til forsikringstakeren. Innbetalinger til selskapet i form av premie og utbetalinger til forsikringstaker, bestemmes av dødelighets sannsynligheten til forsikringspopulasjonen samt den finansielle situasjonen i landet. Selskapet benytter informasjon om kunden for å kalkulere en rettferdig premie kunden skal betale for senere å motta penger ved pensjon eller død. Disse utregningene er svært sammensatte, og baseres ikke bare på kundenes garanti for tilbakebetaling, men også renteutviklingen i det finansielle markedet. Den strategiske oppbygningen av polise-porteføljen til selskapet avhenger av tall basert på historiske data. De matematiske tilnærmingene til utregning av forpliktelsene i livsforsikring er hentet fra kapittel 12 i Bølviken[1].

2.1.1 Livsforsikring

Livsforsikring er et prinsipp som setter verdi på personers liv, og kontraktene blir evaluert basert på en relevant overlevelses-modell. Ved å basere seg på dødelighetstall fra et landsgjennomsnitt krever forsikringsselskapet premier av forsikringstaker, for å senere dekke utbetalinger ved oppnådd pensjonsalder eller død. Et livsforsikringsselskap tilbyr to forskjellige forsikringskontrakter: pensjon- og dødsfallforsikring.

Pensjonsforsikring

Begrepet pensjon er noe de fleste vil komme i kontakt med i løpet av livet. Dette deles inn i tre kategorier: pensjon fra folketrygd, arbeidsgiver og egen sparing. Alle

i Norge har plikt på pensjon fra folketrygden, men det man mottar fra arbeidsgiver er avtalebasert og kan variere stort. Hvis disse to beløpene ikke legger grunnlag for en ønskelig pensjonisttilværelse er det nødvendig å fokusere på egen pensjonssparing. I dette tilfellet skrives en kontrakt med et livsforsikringsselskap. Prinsippet bak pensjonsforsikring er at forsikringstakeren betaler en sum penger i året, for så å få pensjonsutbetalinger ved oppnådd pensjonsalder.

I Norge er pensjonsalderen satt til 67 år, med mulighet for førtidspensjon fra 62 år. Det er lov til å ta ut førtidspensjon hvis dette ikke fører til mangelfulle utbetalinger ved fylte 67 år, for ved oppnådd pensjonsalder skal ingen motta mindre enn minste pensjonsnivå. Forsikringsselskapet forvalter de innbetalte premiene som sine egne ressurser, men samtidig er de også forpliktet til å betale tilbake pensjon til kunden ved oppnådd pensjonsalder. Disse utbetalingene pågår helt til kundens død, eller til avtalt kontraktslutt. Hvis selskapet baserer seg på kunder fra land med lav levealder og levestandard vil det lønne seg med en majoritet av pensjons-poliser. Lav levealder fører til færre pensjonsutbetalinger, som igjen gir en positiv pengestrøm for selskapet.

Dødsfallforsikring

Denne kontrakten omhandler kundens eget liv, og utbetaling forekommer ved død. Ved nedskrivning av dødsfallforsikringer avtales det alltid en bestemt kontraktlengde. Grunnen til dette er at en persons liv stadig er i endring, og faktorer som sykdom og levestandard spiller inn i etableringen av en kontrakt. Ettersom det ikke finnes garanti for at en frisk person ikke skal bli rammet av faktorer som kan prege levealderen, så er det vanlig å kun nedtegne korte kontraktperioder.

Et selskap som tilbyr dødsfallkontrakter vil ha stor interesse i informasjon angående forsikringstaker ettersom dette kan avgjøre gunstig prisnivå og utbetaling. Beskrivelser angående alder, utdanning, sivilstatus og jobb gir selskapene rom til å gruppere kunden inn i ulike prisnivå. I løpet av kontraktsårene betaler forsikringstakeren en premie hvert år, og kontrakten avsluttes enten ved avsluttet kontraktlengde, eller ved forsikringstakerens død. Ved død følger det en utbetaling til en mottaker som bestemmes ved kontraktens nedtegnelse. I land med høy levealder som for eksempel Japan og Norge, vil det lønnes seg med en majoritet av dødsfall-forsikringspoliser. I dette tilfellet vil det forekomme få utbetalinger, som er svært gunstig for selskapets finansielle situasjon og resulterer i en positiv pengestrøm.

2.1.2 Overlevelsesmodellering

En av de viktigste variablene innen livsforsikring er overlevelses-variabelen p_l . Denne variabelen beskriver sannsynligheten for at et individ skal overleve år l i en gitt populasjon. Det finnes flere måter å modellere disse sannsynlighetene på. I tilfeller med stort utvalg velges en **ikke-parametrisk** modellering som bruker historiske overlevelsesdata, og i tilfeller med smalt utvalg foretrekkes **parametrisk** modellering.

Der man i pensjonsforsikring ser på overlevelses-sannsynligheter, ser man i dødsfallforsikring på dødelighets-sannsynligheter. Overgangen er enkel og angis som:

$$q_l + p_l = 1 \quad \text{hvor} \quad q_l = 1 - p_l \quad (2.1.1)$$

For å utregne sannsynligheten for at et individ overlever til alder $l + k$ brukes såkalte **levetidstabeller**.

$${}_k p_l = Pr(L \geq l + k | L \geq l) \quad (2.1.2)$$

Ved 2.1.2 forklares ${}_k p_l$ som sannsynligheten for å overleve k år frem i tid, gitt at individet befinner seg i år l . Sannsynlighetsfordelingen til L er kjent som en levetidstabell, og beskriver alle mulige utfall av ${}_k p_l$, gitt $k = 0, 1, \dots, K$ og $l = l_0, l_1, \dots, l_e$. Her representerer K totalt antall forsikringsår, og l_e maksimal levetid for en forsikrings-taker. Dette ender opp i en matrise med alle mulige overlevelsessannsynligheter med start i alle mulige aldre l til en gitt levealder L . Disse sannsynlighetene er gitt ved rekursjonen ${}_{k+1} p_l = (1 - q_{l+k}) \cdot {}_k p_l$ hvor ${}_0 p_l = 1$.

$${}_k q_l = Pr(k + l - 1 \leq L < l + k | L \geq l) \quad (2.1.3)$$

Ligning 2.1.3 beskriver sannsynligheten for å overleve til år $k - 1$ for så å dø i år k . Disse sannsynlighetene finnes ved rekursjonen: ${}_{k+1} q_l = q_{l+k} \cdot {}_k p_l$. Denne typen levetidstabell benyttes ved kalkuleringen av dødsfallforsikringer.

Ikke-parametrisk dødelighetsmodellering

En modellering med historiske data er enkel å behandle, men har stor feilmargin ved lite utvalg. Prinsippet ved bruk av historiske data er å kunne følge med på hvor mange personer som overlever hvert år fra et spesifikt utvalg. Hvis utvalgsstørrelsen fastsettes fra start av, vil størrelsen til populasjonen synke gradvis etterhvert som personene i gruppen dør.

$$n_{l_0} \geq n_{l_0+1} \geq \dots \geq n_{l_e}$$

Her er n_l antall personer som lever i år l . Sannsynligheten for å overleve fra år l til år $l + 1$ er gitt ved en enkel ligning:

$$p_l = \frac{n_{l+1}}{n_l} \quad (2.1.4)$$

Ved funksjon 2.1.4 beskriver n_l det totale antall individer i utvalget i år l , og n_{l+1} beskriver alle individene som overlever år l . Hvis dette regnestykket gjøres for et omfattende utvalg i alle aldre, så resulterer det i en levetidstabell. Dette er en liste med sannsynligheter som beskriver overlevelsessannsynligheten hvert år frem til et år som anses som uoppnåelig for største del av befolkningen gitt ved l_e .

Parametrisk dødelighetsmodellering

I tilfeller med mindre datasett foretrekkes parametrisk modellering, og den mest tradisjonelle av de parametriske modellene er Gompertz-Makeham modellen. Denne dødelighet-beskrivende modellen tegner intensiteten som en parametrisk kurve med θ -parametere som estimeres ved maksimum-likelihood. Metoden bruker med andre ord ikke historiske data, men produserer intensiteter ved $\mu_{kT} = \theta_0 + \theta_1 e^{\theta_2 kT}$, og deretter produseres overlevelsessannsynligheter 2.1.5 ved integrasjon av intensiteten.

$${}_k p_l = \exp\left(-\theta_0 kT - \frac{\theta_1}{\theta_2} (e^{\theta_2 kT} - 1) e^{\theta_2 lT}\right) \quad (2.1.5)$$

Verdien til disse θ -parameterne vil variere basert på landets dødeligheter. Modellen er hentet fra side 440 i Bølviken[1], og levetidstabellene angis som:

$${}_k p_l = Pr(Y > (l+k)T | Y > lT) \quad (2.1.6)$$

$${}_k q_l = Pr((k+l)T - 1 \leq Y < (l+k)T | Y \geq lT) \quad (2.1.7)$$

Modellen opererer med tidsleddet T , som definerer handlingsrommet til levetidstabellen. Denne verdien kan blant annet settes til årlige, kvartalbaserte, eller ti-årige tidsrom. I denne oppgaven vil vi kun operere med $T=1$, og alt foregår på årlig basis.

2.1.3 Kontraktsverdi og premie

De grunnleggende begrepene innen livsforsikring er etablert, og veien videre er å regne ut den fullstendige kontraktsverdien. Et matematisk oppsett av en slik kontrakt avhenger av hvilke kriterier som skal oppfylles. En forsikringskontrakt beskriver en grunnleggende pengestrøm, hvor den matematiske formuleringen kan deles i to; penger inn, og penger ut av selskapet. Kalkuleringene i denne oppgaven er basert på helt vanlige utgaver av pensjon- og dødsfallkontrakter, hvor disse kontrakttypene vil inneholde forskjellige tilnærminger.

Pensjonskontrakter

En tradisjonell pensjonskontrakt deles inn i to faser: en innbetaling- og en utbetalingsfase:

$$E(PV_0^\pi) = -\pi \sum_{k=0}^{l_r-l_0-1} d^k {}_k p_{l_0} \quad \text{og} \quad E(PV_0^s) = s \sum_{k=l_r-l_0}^{\infty} d^k {}_k p_{l_0} \quad (2.1.8)$$

Nåverdien til polisen avhenger av hvilket år av kontrakten man befinner seg i. Oppnådd pensjonsalder angis ved l_r , og l definerer kontrakttafers nåværende alder. Hvis $l < l_r$ vil det fortsatt gjenstå premieinnbetalinger til selskapet, men hvis $l \geq l_r$ vil den gjenværende fasen av kontrakten bestå av utbetalinger i form av pensjon til forsikringstaker. Kontrakten vil dermed ha et tilfelle hvor $E(PV_0^s) > E(PV_0^\pi)$. Denne polisen vil være en utgift i porteføljen, og må derfor støttes opp av yngre forsikringstakere som befinner seg i et år av kontrakten som er mellom l_0 og l_r .

Premien π er den årlige summen som betales av forsikringstakere fra kontraktens begynnelse l_0 , til pensjonsalder l_r . Denne premien ganges med en diskontering, samt en levetidstabell. Når forsikringstakeren oppnår alder l_r vil en årlig premie byttes ut med en årlig utbetaling i form av pensjon, gitt ved s . Denne utbetalingen ganges også med en sum av årlig diskontering og overlevelsessannsynligheter, og pensjonen s vil bli utbetalt helt frem til kundens død. Satt sammen vil ligningene i 2.1.8 gi den totale nåverdien til kontrakten:

$$E(PV_0) = -\pi \sum_{k=0}^{l_r-l_0-1} d^k {}_k p_{l_0} + s \sum_{k=l_r-l_0}^{\infty} d^k {}_k p_{l_0} \quad (2.1.9)$$

Premie π og pensjon s er ennå ikke bestemt, men den tradisjonelle metoden å gjøre dette på vil være at selskapet fastsetter s etter kundens tilpasning, og deretter løser

ut for π . Dette gjøres ved å sette 2.1.9 lik null, og dermed kreves kun en enkel matematisk omformulering:

$$\pi = \frac{s \sum_{k=l_r-l_0}^{\infty} d^k {}_k p_{l_0}}{\sum_{k=0}^{l_r-l_0-1} d^k {}_k p_{l_0}} \quad (2.1.10)$$

Variabelen π omtales som en ekvivalenspremie og beskriver premien kunden må betale for at kontraktsverdien skal være lik null. Gitt tilfellet hvor et selskap innehar en portefølje med pensjonskontrakter hvor ekvivalenspremiene er utregnet basert på et landsgjennomsnitt. Da vil selskapet være avhengige av at populasjonen viser til en gjennomsnittlig levealder tilsvarende 81.75 år[19]. Problemet med dette tallet er at dette ikke beskriver en gjennomsnittlig forsikringstaker, ettersom individer som søker om forsikring har en statistisk bedre livskvalitet enn landsgjennomsnittet. Denne seleksjonen utdypes nærmere i seksjon 3.2.3 som omhandler dynamisk dødelighetmodellering.

Dødsfallkontrakter

Disse kontraktene har en annen tilnærming enn pensjonkontrakter.

$$E(PV_0^\pi) = -\pi \sum_{k=0}^{K-1} d^k {}_k p_{l_0} \quad \text{og} \quad E(PV_0^s) = s \sum_{k=1}^K d^k {}_k q_{l_0} \quad (2.1.11)$$

Avtalen spenner over K år, hvor forsikringstaker betaler en premie hvert år i betaling mot å forsikre sitt eget liv. Hvis forsikringstaker dør innen de avtalte K årene er gjennomført vil selskapet utbetale en sum s til en avtalt part. Ettersom utbetaling forekommer ved død vil levetidstabellen ${}_k p_l$ endres til dødelighetstabellen ${}_k q_l$ (2.1.3) i utbetalingfasen.

$$E(PV_0) = -\pi \sum_{k=0}^{K-1} d^k {}_k p_{l_0} + s \sum_{k=1}^K d^k {}_k q_{l_0} \quad (2.1.12)$$

Ved omformulering av nåverdien til kontrakten finnes ekvivalenspremien π :

$$\pi = \frac{s \sum_{k=1}^K d^k {}_k q_{l_0}}{\sum_{k=0}^{K-1} d^k {}_k p_{l_0}} \quad (2.1.13)$$

Kalkuleringen av ekvivalenspremie vil ha det samme fremgangsmåten som i pensjonskontrakter bortsett fra at at ${}_k q_{l_0}$ erstatter ${}_k p_{l_0}$ i utbetalings-leddet over brøkstrekken. Dette resulterer i en større ekvivalenspremie ved høyere dødeligheter.

Diskontering

Pengestrømmen diskonteres med en risikofri rente for å finne den forventede nåverdien til kontrakten.

$$d + d^2 \dots + d^K = d \frac{1 - d^K}{1 - d} \quad \text{hvor} \quad d = \frac{1}{1 + r}$$

Diskonteringsfaktoren økes for hvert tids-steg, og brytes først ved kontraktslutt eller forsikringstakerens død. Diskontering er i likhet med levetidtabellen det mest essensielle ved utregning av nåverdien til verdien av en livsforsikringskontrakt. En høy rente

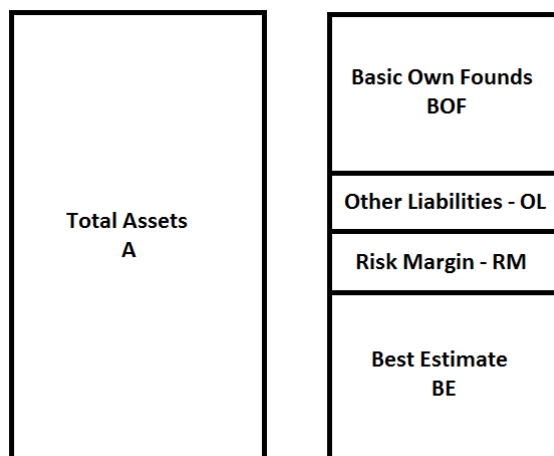
vil føre til en kraftig redusering i nåverdien til kontrakten, og samtidig vil en lav rente gi en høy nåverdi. Grunnen til den store variasjonen er at renten spenner over et tidsrom på K år. I en pensjonskontrakt vil $K = 70$ og på denne tiden vil inflasjon og tapt rente føre til at penger i år K vil ha mye mindre verdi enn i år 1. Diskonteringen er defor et nyttig verktøy for å definere verdien av fremtidig pengestrømmer.

2.2 Solvency II i livsforsikring

Solvency II er et EU-direktiv fra 2016 med formål om å forbedre forsikringstakerens posisjon i forsikringsmarkedet. Det nye regelverket har innført en innstramning i systemet som beskriver omfanget av kapital som kreves innad i et forsikringsselskap for å garantere forsikringstakerne pengene de har krav på. Her skal det tas ansvar for all mulig risiko som kan forekomme, hvor risiko regnes om til en risikokapital. Denne kapitalen skal dekkes ut ifra selskapets ressurser, som er et påregnet overskudd av generelle forpliktelser og andre ressurser fra selskapets forsikringportefølje. Sannsynligheten for at selskapets ressurser er større enn selskapets forpliktelser skal være 99.5%. Dette betyr at det nye regelverket garanterer forsikringstakerne pengene de har krav på med 99.5% garanti.

2.2.1 Balanseark

Et balanseark er en generell mal over den finansielle fordelingen innad i et forsikringsselskap. Dette er en enkel anvisning for forholdet mellom ressurser og forpliktelser.



Figur 2.1: Balanseark for Solvency II

A - Assets

Dette er verdien til alle tilgjengelige ressurser innad i selskapet. Disse ressursene består av innbetalinger i form av premia, eventuell startkapital, og profiterende investeringer. Pengene kan forvaltes i en portefølje bestående av flere elementer, hvor

pengenes plassering utgjør markedrisiko for selskapet. Videre i oppgaven vil pengene plasseres i eiendom, aksjer, obligasjoner og bank, hvor risiko vurderes etter hvilke kvalitetsstempel de ulike investeringene har.

TP - Technical Provisions

Dette er en oversikt over alle forpliktelser som inngår i driften av et forsikrings-selskapet.

$$TP = BE + RM + OL \quad (2.2.1)$$

Alle disse forpliktelsene må dekkes av selskapets tilgjengelige ressurser, hvor den resterende kapitalen behandler den nødvendige kapitalreserven som kreves fra Solvency II.

Best Estimate er den samlede nåverdien til alle kontraktene selskapet har påtatt seg. Her summeres verdien til alle fremtidige premier og utbetalinger. Utregningen av nåverdien er grunnsteinen i utregningen av selskapet finansielle ståsted. Her summeres det kun forpliktelser som avhenger av det totale antall poliser, og dette resulterer i en netto pengestrøm som skal ut av selskapet i form av utbetalinger til forsikrings-takere. For å sette dette i perspektiv, så vil en portefølje med en klar majoritet unge forsikringstakere resultere i et negativt BE, ettersom det da vil strømme mer penger inn i form av premier enn ut i form av pensjonsutbetalinger. For å finne BE må hele verdien til alle nåværende kontrakter i porteføljen summeres.

Risk Margin er kapital som behøves hvis et selskap ikke er interessert i å beholde ansvaret for polisene de har påtatt seg. I dette tilfellet er de nødt til å overføre kundene sine til et annet selskap. Ved en slik overtakelse har selskapet som mottar polisene krav på en betaling som dekker risikoen som medfølger kontraktene, og dette omtales som en risikomargin. Gitt at selskap A bestemmer seg for å si opp sine poliser, så er RM en sum som må betales til et overtagende selskap B for å dekke mulig risiko kontraktene medfører.

Other Liabilities beskriver den delen av forpliktelser som ikke inngår i den generelle utregningen av poliser. Dette inkluderer lønn til ansatte, gjeld, lån eller forbruksvarer innad i bedriften. Denne posten er sterkt varierende og størrelsen av forpliktelsene beveger seg generelt proporsjonalt med størrelsen på selskapet.

BOF - Basic Own Funds

BOF er summen av penger som er igjen etter at alle forpliktelser er betalt og solvenskapitalreserven(SCR) er dekket. Det er denne summen som skal være positiv med 99.5% sikkerhet. For å sette dette i perspektiv så skal $BOF < 0$ kun forekomme hvert 200 år.

$$BOF = Assets - Technical Provisions$$

Hvis et selskap ikke klarer å levere gode nok tall til å opprettholde nødvendig SCR vil de få en advarsel og oppfordring til å forbedre den finansielle situasjonen snarest.

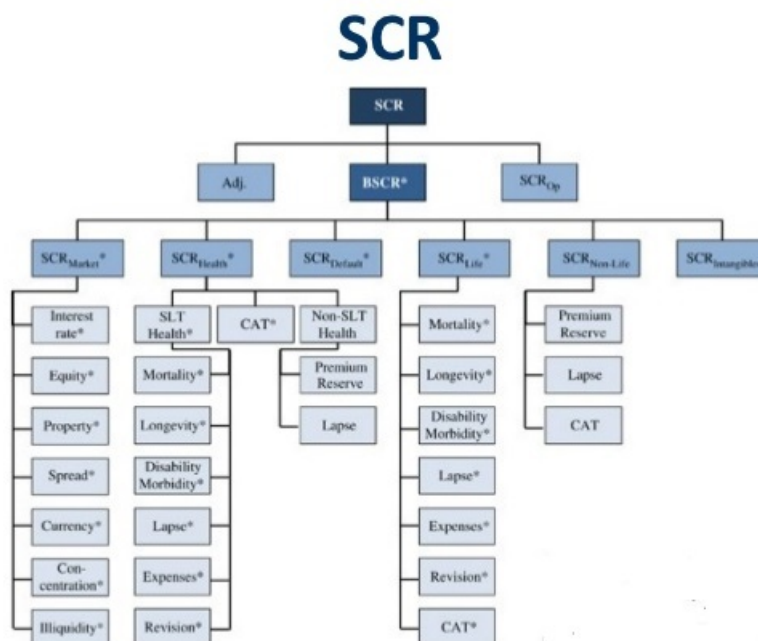
Hvis selskapet derimot ikke klarer å levere gode nok tall til å klare minste kapitalkrav(MCR), vil det føre til umiddelbar suspensjon i opptil 24 måneder.

$$Pr(BOF_1 < 0 | A_0 = TP_0 + SCR) = 0.005 \quad (2.2.2)$$

$$Pr(BOF_1 < 0 | A_0 = TP_0 + MCR) = 0.15 \quad (2.2.3)$$

Der SCR krever en 99.5% garanti, krever MCR kun en garanti på 85% for å levere en positiv BOF.

2.2.2 SCR - Standard Capital Requirement



Figur 2.2: Oversikt over alle risikomodulene i Solvency II. Dette bildet er hentet fra EIOPA[8].

Formålet med solvens-direktivet er å kalkulere hvor mange penger et selskap trenger for å dekke fremtidig risiko. Denne pengemengden blir utregnet ved å kalkulere alle modulene i figur 2.2, hvor hver av disse modulene beskriver omfanget rundt et risikabelt punkt i utregningen av fremtidige inntekter/utgifter. Kalkuleringen av disse modulene gjøres via stresstester, og slås deretter sammen ved hjelp av standardformelen. For å danne et fullstendig bilde av hvor mye solvenskapital som kreves for selskapet, er det nødvendig å slå sammen alle grenene fra figur 2.2, noe som er en svært tidkrevende og komplisert prosess. Denne oppgaven skal kun ta for seg de to modulene som omhandler risiko rundt levetid, nemlig langtliv- og dødelighetsmodulene. Disse modulene befinner seg i SCR_{Life} og kategoriseres som SCR_{Long} og SCR_{Mort} .

2.2.3 BE - Best Estimate

Aktuarmetoder benyttes for å finne nåverdien til de ulike kontrakttypene selskapet har i porteføljen. Kalkuleringen beregnes ved at hvert år av pengestrømmen

diskonteres og summeres for å finne nåverdien til alle fremtidige forpliktelser. Disse forpliktelsene inneholder summen av alle penger inn og ut av selskapet for alle aktuelle kontrakter.

$$BE = \sum_{k=1}^K \frac{L_k}{(1+r_k)^k} \quad (2.2.4)$$

Alle verdiene i ligning 2.2.4 varierer og er basert på antagelser rundt fremtidig økonomi. I likhet med pengestrømmen er renten angitt ved en kurve med forskjellige verdier fra år til år. Dette gjør BE svært varierende under ulike scenario, og flere faktorer kan spille inn på det endelige estimatet. L_k summerer forpliktelser i alle kontraktår ved tids-steg $k = 1 \dots K$. Hvert år som summeres tas det også hensyn til tilhørende risikofri rente r_k , som følger en kurve basert på fremtidige antagelser rundt rentenivå.

Diskonteringsregimer

Renten som brukes til diskontering i 2.2.4 er risikofri, og størrelsen på denne har stor betydning for nåverdien til fremtidige forpliktelser. En høy rente vil gjøre at L_k blir dividert på et stort tall, og nåverdien (BE) vil bli liten. Til sammenligning vil en lav risikofri rente føre til en mindre reduksjon av L_k , og nåverdien til forpliktelsene vil bli stor. Modelleringen av diskonteringsrenten er svært essensiell. Renten brukt i denne oppgaven er hentet fra EIOPA[9]. Dette er markedsrenten i Norge, og det publiseres nye verdier hver måned.

$$d_k^{\text{teknisk}} = \frac{1}{(1+r)^k}, \quad d_k^{\text{marked}} = \frac{1}{(1+r_k)^k} \quad (2.2.5)$$

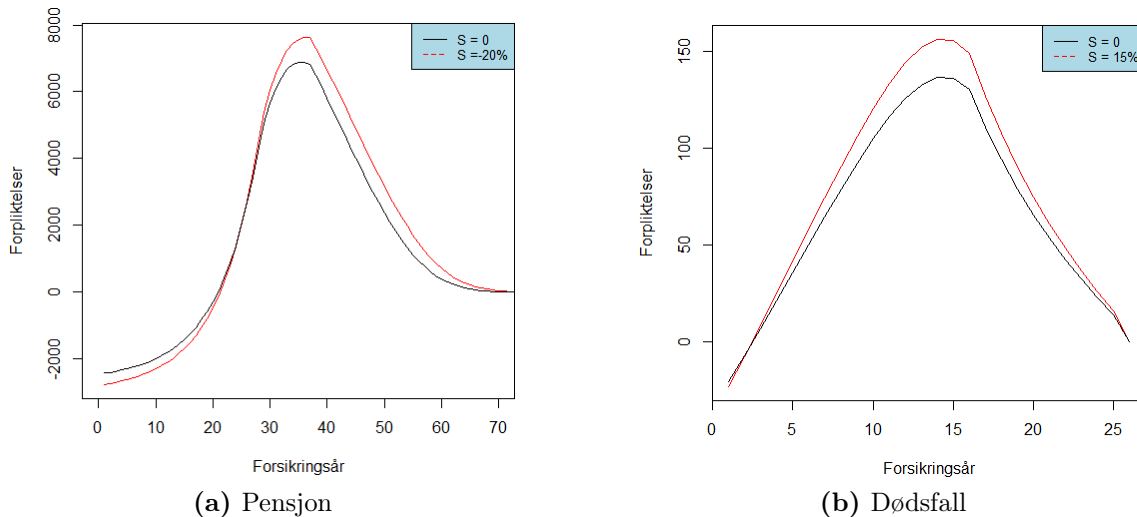
Diskonteringen d_k^{marked} beskriver en rentekurve hvor hvert år tildeles en unik rente, men det er også mulig å diskontere med en teknisk rente d_k^{teknisk} som vil være konstant over hele utregningen. Sistnevnte vil ikke gi svært realistiske verdier i det reelle markedet, men er lettere å behandle.

2.2.4 Stresstester

Nåverdien til de ulike kontrakttypene regnes ut for å finne den nødvendige solvenskapitalen for å dekke tilhørende risiko. Denne risikoen kalkuleres ved å bruke stresstester, og formålet med disse stresstestene er å dekke all risiko med 99.5% sikkerhet. Hver modul er tildelt sitt eget sjokk, og størrelsen på sjokkene er varierende, men gjenspeiler risikoen som hver modul medfører. Ved dødelighet- og langtlivmodulene vil sjokkene beskrive forskjellige tilnærminger til potensielle risikoer tilhørende dødelighetsmomentet i en populasjon.

Selv om et selskap kan vise til en sunn portefølje med en positiv BOF, så sier de nye direktivene fra EIOPA at det skal foretas stresstester. En slik stresstest tar for seg forskjellige endinger hos dødelighets sannsynligheten q_t . Endringer i dødeligheter kan være et reelt fremtidig økonomisk problem for forsikrings selskap. Et selskap hvor majoriteten av porteføljen består av pensjonskontrakter vil være økonomisk utsatt ved en reduksjon i dødelighet. Samtidig vil et selskap med en majoritet av dødsfallkontrakter være økonomisk utsatt ved en økning i dødelighet. Derfor foreslår EIOPA

stresstester hvor dødeligheten synker med -20% og stiger med 15%. Hvis selskapet fortsatt kan vise til en positiv BOF med de sjokkede dødelighetene, så innehar selskapet den nødvendige kapitalen for å takle en slik endring. Kapitalen som kreves for å drive en økonomisk sunn bedrift bestemmes ved å utregne risikoen fra de forskjellige modulene innad i bedriften. Hvert område som kan medføre en eventuell risiko behandles hver for seg, før det til slutt kalkuleres til sammen til en nødvendig kapitalreserve(SCR)



Figur 2.3: Plottene viser eksempler på kontraktens fremtidige forpliktelse sammenlignet med tilhørende sjokk. Begge plottene bruker en ung portefølje. Plott a) tar for seg en pensjonskontrakt med kontraktsperiode på 70 år, og plott b) tar for seg en dødsfallkontrakt med en kontraktsperiode på 25 år.

Langtlivmodulen

Denne modulen omhandler risikoen ved at kunder lever lenger, og er en høyst reell problemstilling for selskaper som praktiserer pensjonsforsikring. Hvis levealderen øker vil det føre til flere pensjonsutbetalinger. Risikoen dette medfører må tas hensyn til ved utregninger av kapitalreserven som et selskap må inneha for å garantere kundene sin andel av kontraktavtalen. Et økende gjennomsnitt pensjonsutbetalinger gjør det nødvendig for forsikringsgiveren å øke premieinnbetalingene ved nye kontrakter. Ved økt levealder vil klok forvaltning av tilgjengelige ressurser være kritisk. EIOPA har tildelt langtliv-modulen et negativt sjokk på -20% [7], som skal dekke en fremtidig reduksjon i dødeligheter med 99.5% sikkerhet.

$$q_j^s = (1 + S)q_j, \quad S = -20\% \quad (2.2.6)$$

Dette sjokket skal ifølge EIOPA dekke all fremtidig risiko ved at kontrakttakerne lever lengre i fremtiden. Solvenskapitalen for langtliv benytter kun dette sjokket ettersom pensjonskontrakter er sårbare for en reduksjon i dødeligheter, og hvis kontrakttaker lever lenge vil antall utbetalinger øke.

$$SCR_{Long} = BE_{Long}^S - BE_{Long} \quad (2.2.7)$$

Figur 2.3a viser at det ikke er store skilnader mellom kurvene for majoriteten av porteføljen når pensjonsalder. De første årene mottar selskapet litt mer premier fra kundene enn ved det sjokkede scenarioet. Grunnen til dette er at lavere dødelighet fører til høyere ekvivalenspremie. Samtidig vil det sjokkede tilfellet også dele ut fler pensjonsutbetalinger, ettersom kundene lever lengre enn vanlig. Hvis det negative sjokket på -20% hadde blir brukt på dødsfallkontrakter ville det resultert i en negativ solvenskapital(SCR), som betyr at dette ikke medfører risiko..

Dødelighetsmodulen

Denne modulen beskriver risikoen ved økt dødelighet for alle mulige demografiske grupper. Dette er et kritisk tema for livsforsikringsselskaper, for økt dødelighet gir flere utbetalinger til kunder med dødsfallforsikring. For å dekke opp for mulige økninger i dødelighet har EIOPA tildelt denne modulen et sjokk på 15%. Dette sjokket skal konstruere en risikokapital stor nok til å dekke opp for risikoen ved økt dødelighet.

$$q_j^s = (1 + S)q_j, \quad S = 15\% \quad (2.2.8)$$

Solvenskapitalen er et resultat av den totale pengestrømmen til dødsfallkontraktene i porteføljen trukket fra en sjokket versjon.

$$SCR_{Mort} = BE_{Mort}^S - BE_{Mort} \quad (2.2.9)$$

Plott 2.3b viser at høyere dødeligheter fører til en jevnlig større pengestrøm ut av selskapet. Flere av kundene dør i løpet av kontraktperioden på 25 år, og dermed vil selskapet bidra med utbetalinger ved flere tilfeller. Hvis det positive sjokket på 15% hadde blir brukt på pensjonskontrakter ville det resultert i en negativ solvenskapital(SCR), som betyr at dette ikke medfører risiko.

De røde kurvene i figur 2.3a og 2.3b viser pengestrømmen til et selskap med stressede dødeligheter. Forskjellen mellom de røde kurvene og kurvene hvor $S = 0$ er det som utgjør SCR_{Long} og SCR_{Mort} . For å slå sammen risikokapitalen til de to modulene og danne den totale risikoen for livsforsikring gitt ved SCR_{Life} er det nødvendig å benytte standardformelen.

2.2.5 Standardformelen

De ulike risikoene illustreres av Solvency II i figur 2.2, hvor hver risiko tildeles sin egen modul. For å danne et fullstendig bilde av den totale risikokapitalen som behøves bindes alle modulene sammen ved bruk av standardformelen.

$$SCR_y = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \times SCR_i \times SCR_j \right)^{1/2} \quad (2.2.10)$$

Korrelasjonen ρ_{ij} hentes ut fra en korrelasjonsmatrise utgitt av EIOPA[7]. Dette gjør det lett å kalkulere risikoen som medføres av ulike moduler. Den nødvendige kapitalen som behøves for å forsikre seg mot risikoen ved høyere dødelighet og lengre levealder er beskrevet i 2.2.7 og 2.2.9 ved SCR_{Long} og SCR_{Mort} . Risikoen disse modulene beskriver er strake motsetninger. SCR_{Mort} forteller om kapitalen som behøves

	Mortality	Catastrophe	Longevity	Disability	Lapse	Expenses	Revision
Mortality	1						
Catastrophe	0.25	1					
Longevity	-0.25	0.25	1				
Disability	0.25	0.25	0	1			
Lapse	0	0.25	0.25	0	1		
Expenses	0.25	0.25	0.25	0.50	0.50	1	
Revision	0	0	0.25	0	0	0.50	1

Tabell 2.1: Oversikt over korrelasjonen mellom modulene i SCR_{Life} .

for å forsikre seg mot en 15 prosents økning i dødelighet, og SCR_{Long} forteller om kapitalen som behøves for å forsikre seg mot en 20 prosents reduksjon i dødelighet. Disse to risikoene er motstridende, ettersom de ikke kan forekomme samtidig. Derfor forklares sammenslående av risikoene med en negativ korrelasjonsfaktor på -0.25. Ved sammenslåing av modulene brukes standardformelen, og her er et eksempel som viser oppbygningen av total risikokapital i livsforsikring ved innsetning av korrelasjon og to moduler:

$$SCR_{Life} = \left(SCR_{Mort}^2 + 2 \times (-0.25 \times SCR_{Mort} \times SCR_{Long}) + SCR_{Long}^2 \right)^{1/2} \quad (2.2.11)$$

I dette eksempelet er korrelasjonen satt til -0.25, som tar hånd om risikoen for en endring i mortality- eller longlivitymodulen. Hvor vidt denne korrelasjonen beskriver risikoen korrekt utdypes mer nøyaktig i kapittel 3.5. Ettersom korrelasjonen er negativ fører det til et tilfelle av risikoreduksjon. Ved sammenslåing av disse modulene vil risikokapitalen nedjusteres, og dette åpner for gode hedging-muligheter.

$$BSCR = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \times SCR_i \times SCR_j \right)^{1/2} \quad (2.2.12)$$

Standardformelen kan også benyttes ved sammenslåing av alle hovedmodulene i figur 2.2. Dette gjøres for å finne samlet risikokapital som kreves for å tilfredsstille kravene i solvens-direktivene. De to største utgiftene for et livsforsikringssselskap vil være SCR_{Life} og SCR_{Market} . Som beskrevet tidligere vil SCR_{Life} dekke risiko rundt endringer i dødeligheter. SCR_{Market} dekker risiko tilhørende renter og forvaltning. For å slå sammen risikokapitalene mellom disse to hovedmodulene behøves en ny korrelasjonsmatrise.

	Market	Life	Non-life	Health	Default
Market	1	0.25	0.25	0.25	0.25
Life	0.25	1	0	0.25	0.25
Non-life	0.25	0	1	0	0.5
Health	0.25	0.25	0	1	0.25
Default	0.25	0.25	0.50	0.25	1

Tabell 2.2: Oversikt over korrelasjonen mellom modulene i $BSCR$, som beskrevet i figur 2.2.

$$BSCR = \left(SCR_{Life}^2 + 2 \times (0.25 \times SCR_{Life} \times SCR_{Market}) + SCR_{Market}^2 \right)^{1/2} \quad (2.2.13)$$

Eksempelet viser en enkel sammenslåing mellom hovedmodulene SCR_{Life} og SCR_{Market} . For et livsforsikringssselskap vil dette bety at risikoen ved endring i dødeligheter kan slås sammen men risikoen rundt diskontering og investeringer.

2.3 Hedging

Risikominimering er av høy interesse hos forsikringsselskap. Det nye regelverket gir mindre rom for selskap til å eie en portefølje med stor risiko, og dermed er det lønnsomt å fordele forpliktelsene etter potensielle endringer hos dødelighetvariabelen. Det viktige er altså å ikke legge alle eplene i samme kurv, men fordele pensjon- og dødsfallpolisene den grad det lar seg gjøre. Denne fordelingen beskrives av korrelasjonen på -0.25 , hvor korrelasjonen er negativ ettersom en fordeling av dødsfall- og pensjonspoliser bidrar til en mindre nødvendig kapitalreserve. Denne fordelingen av kontrakten kalles hedging, hvor man bytter potensielle investeringer for sikring mot risiko. Dette gjøres ved å dele porteføljen opp i forskjellige sammensetninger av kontraktstyper, slik at ikke alle kontraktene kan påvirkes i negativ grad av endringer i levealder.

Potensielle utbetalinger for pensjon er mye høyere enn betaling ved død, siden sannsynligheten er større for at en person når pensjonsalder enn at han/hun dør innenfor kontraktperioden K . Samtidig er det pensjonskontrakter som preges mest økonomisk av endringer i dødelighet, ettersom utbetalingene enten vil strekke seg over gjennomsnittlig kortere eller lengre tid. Dødsforsikringer vil ikke inngås for høye summer med personer ved høy alder, og livstruende sykdommer. Dermed vil ikke denne typen kontrakt være like preget av en realistisk endring i dødelighet. Et kritisk punkt for forsikringsselskapene er dermed hvor mange pensjonkontrakter de kan påta seg før det utgjør en stor risiko for regnskapet.

Kapittel 3

Dødelighetsmodellering

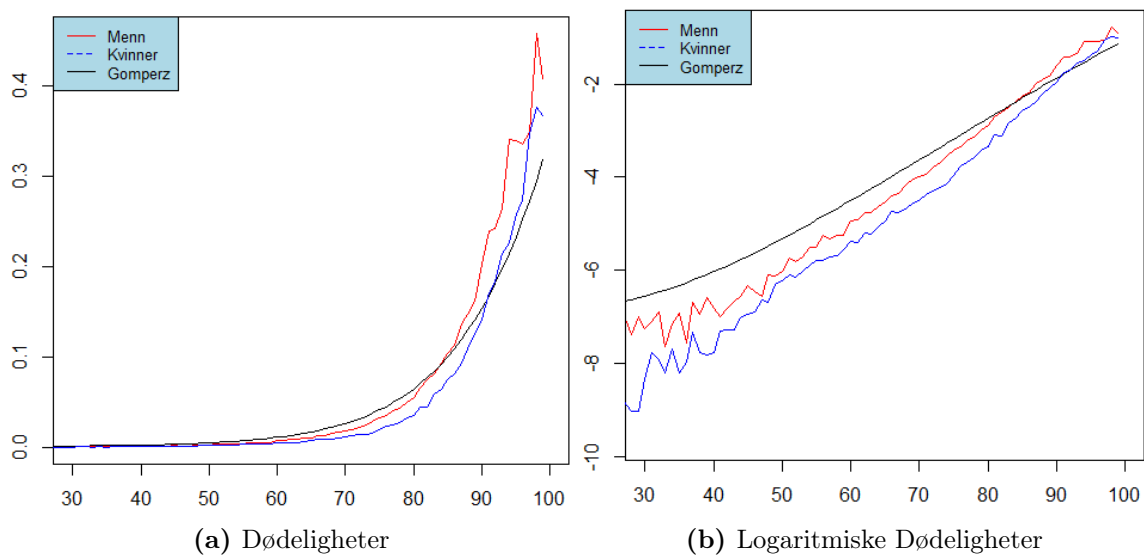
Det nye direktivet forsikringsselskapene må forholde seg til har resultert i en stor økning av nødvendig kapitalreserve. Grunnlaget for kalkuleringen av reservene ligger i stresstestene som er bestemt av EIOPA. Livsforsikringsindustrien i Norge er i tiden fremover nødt til å forholde seg til et dødelighetsjokk på 15% og et langtlevsjokk på -20%. Spørsmålet er om disse stresstestene er for strenge mot forsikringsselskapene, og krever for mye risikokapital. Hvor stor er egentlig risikoen for at en slik dødelighetendring skal forekomme og stabilisere seg? Premissene for at endringen i de registrerte dødelighetene er større enn sjokkene skal ikke gjelde enkelttilfeller, men heller en stabilisering av dødeligheter på et høyere eller lavere nivå over tid. Dødelighetsdataen brukt i dette kapitlet er hentet fra Human Mortality Database[16], og dataen over norsk historie er hentet fra Statistisk Sentralbyrå[10].

3.1 Valg av dødelighetsdata

Det er to forskjellige metoder å fremskaffe dødelighetdata på:

- Ikke-parametrisk: Empiriske dødeligheter hentet fra Human Mortality Database, fra år 1846 frem til år 2014.
- Parametrisk: Konstruerte dødeligheter ved hjelp av Gompertz-Makeham modellen.

Dødelighetsdataen som brukes i det forenklede selskapet vil være svært utslagsgivende for det endelige resultatet, og derfor er det nødvendig å vurdere om det er nødvendig å bruke empirisk eller konstruert data. Parameterne som brukes i GM-modellen er hentet fra Bølviken[1] s.466. Disse parameterne er basert på amerikanske menn, og kan ikke sammenlignes direkte. Det som kan evalueres er troverdigheten til GM-modellen opp mot målte norske data. Forskjellene mellom det empiriske datasettet fra HMD og datasettet konstruert med Gompertz-Makeham metoden illustreres godt i 3.1a og 3.1b. Figur 3.1a viser en klar underestimering i dødelighet av eldre mennesker hos GM-Modellen. Det konstruerte datasettet tar for seg en jevnere økning i dødeligheter enn den nær eksponentielle økningen i de reelle datasettene. Det som tydeliggjøres godt i det logaritmiske plottet 3.1b er den klare overestimeringen til GM-modellen i for unge aldere. Denne målgruppen er den største og mest kritiske økonomisk.



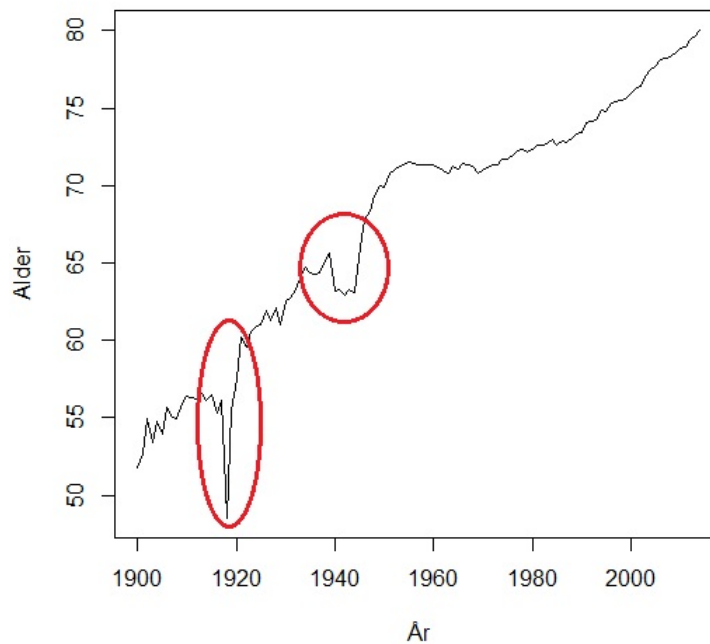
Figur 3.1: Plottet til venstre (a) beskriver dødelighetene i 2014 for norske menn og kvinner mellom 30 og 100 år, sammenlignet med konstruerte Gompertz Makeham dødeligheter basert på amerikanske menn. Plottet til høyre (b) viser de samme dødelighetene på en logaritmisk skala.

Overestimeringen mellom 30 og 80 år utretter en stor forskjell i utbetalinger for et forsikringsselskap. Det empiriske datasettet viser til en lavere dødelighet, og dermed et høyere krav om risikokapital fra selskapet ettersom kundene vil leve lengre enn anslått med GM-modellen. Det er lite troverdig at amerikanske menn har en lavere dødelighet i den eldste delen av populasjonen enn norske menn og kvinner, og tall fra HMD viser at det motsatte er et faktum. Ved sammenligning bør det estimeres parametere for norske data, men det vil ikke bli tatt for seg i denne oppgaven.

Forskjellene i dødelighet argumenterer sterkt for å ikke bruke tall basert på GM-modellen med amerikanske parametere, ettersom det vil gi en lavere estimering av risikokapital enn det som behøves. De empiriske dødelighetene er også basert på hele den norske populasjonen, og forskjellene ville vært enda større hvis datasettene besto av den delen av populasjonen som faktisk kjøper forsikring. Ettersom forsikrede personer statistisk sett har høyere levestandard enn uforsikrede personer.

3.2 Historiske dødelighetsendringer i Norge

Historisk sett har dødeligheten i Norge vært svært variabel. Tilbake til 1700-tallet kunne dødsraten variere stort på få år grunnet sult og epidemier. Mangel på kunnskap førte til få behandlingsalternativer mot sykdom, noe som førte til at alvorlige sykdommer ofte resulterte i død. En slik ustabil dødsrate er lite sannsynlig etter resultatene av moderne forskning. For å evaluere stresstestens relevans i Norge i dag, er det derfor ingen grunn til å gå langt tilbake i historien. Derfor vil evalueringen i denne oppgaven foregå med bokført statistikk fra tidlig 1900-tall og frem til 2017. Hvor sannsynlig er det at dødeligheten skal stige med opp til 15% over kort tid? Figur 3.2 viser de to største økningene i dødelighet for norske menn, samt en klar trend til økende levealder i nyere tid.



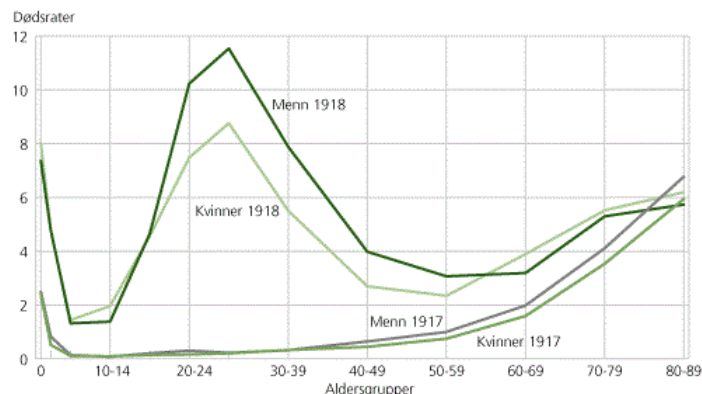
Figur 3.2: Levealder til norske menn mellom 1900 og 2014. De største økningene i dødeligheter er markert.

3.2.1 Økning i dødelighet

Dødelighetssjokket i Solvency II skal dekke store økninger i dødelighet. I nyere norsk historie er det få eksempler på slike dramatiske økninger, og spørsmålet er om dette sjokket er unødvendig strengt fremfor forsikringsselskapene.

Spanskesyken

Den første nedgangen i levealder ved figur 3.2 forklares som en influensaepidemi under krigstider. Epidemien sitt utbrudd i år 1918 krevde mange fler liv enn et vanlig influensa-år. Spanskesyken foregikk samtidig som første verdenskrig, og derfor er det vanskelig å dokumentere eksakt antall dødsfall i Europa som er forårsaket av epidemien. Det er grunnet krigen at dødsomfanget ble så stort som det ble ettersom levekårene hos folk flest var svekket, og svekket immunforsvar sørget for en større smittefare. Norge var nøytrale under krigen, og er derfor ett av få land som godt beskriver den demografiske utviklingen under spanskesyken. Det anslås at ca 1.3 millioner nordmenn ble rammet av sykdommen, og at 15 000 døde[12]. Figur 3.3 viser til en dødsrate på ca. 12 blant menn mellom 25 og 30 år. Dette er den demografiske gruppen som viste til høyest letalitet, som tilsvarer i overkant av 1% av de smittede. Selv om letaliteten var meget lav sammenlignet med andre epidemier, så har spanskesyken satt sine spor demografisk grunnet stort smitteomfang. Dødeligheten steg med ca 40% i 1918 grunnet spanskesyken. En slik omfattende epidemi beskyttes ikke av et sjokk på 15% fra ligning 2.2.8.



Figur 3.3: Forskjellen mellom et vanlig influensa-år(1917) og spanskesyken(1918). Figuren er hentet fra statistisk sentralbyrå[12].

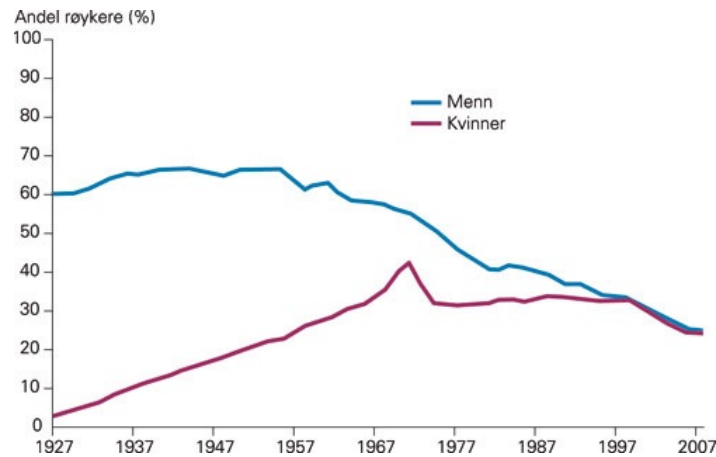
Krigstider

Krig fører til en klar økning i dødelighet ettersom levekårene blir dårligere. Første verdenskrig foregikk uten store norske tap, og krigsrelaterte handlinger foregikk ikke på norsk jord. De nordmennene som døde grunnet krigen jobbet stort sett på norske hangarskip som hjalp til med forsyninger og transport. På samme tidspunkt herjet spanskesyken i Norge, og innvirkningen av krigen ble dekket over av den store influensaepidemien. Under 2.verdenskrig erklærte Norge seg nøytrale, men den tyske okkupasjonen mellom 1940-45 førte til tynge leveforhold og ca 10 000 døde grunnet dette[11]. Dødelighetsøkningen under okkupasjonen er tydelig fra den andre sirkelen i figur 3.2. En stor andel av disse døde var et resultat av hardt tvangsarbeid ved utbygging av infrastruktur og jernbanelinjer for å tilrettelegge for det tyske regimet.

Røyking

Røykevaner er en av de mest helsemessig utslagsgivende vanene i negativ grad en person kan ha. All forskning viser at tobakk er sterkt skadelig og en høy andel røykende har høy korrelasjon med senskader og tidligere dødsfall. Fra 50- til 2000-tallet har andelen røykende menn halvert seg, og dette har bidratt sterkt til den økende levealderen hos menn[10]. Fra figur 3.2 ser vi at levealderen steg med nesten 20 år frem til 50-tallet, kun avbrutt av korte nedganger under krig og epidemi. Deretter stabiliserer levealderen seg på ca 72 år mellom 50- og 70-tallet. Denne stabiliseringen beskriver at økningen i medisinske fremskritt og bivirkninger fra røykevaner har jevnet hverandre ut, og produserer det eneste tilfellet hvor levealderen ikke har økt over en 10-års periode. Denne perioden er lang og kan derfor omtales som en trend, men selv ikke ved dette tilfellet vil levealderen ha en negativ trend.

Det forekom sterkt positiv reklamering for røyking frem til 1975. Deretter grep staten inn med forskningsresultater som påviste klare bivirkninger fra røyking. Aldersgrenser på tobakksvarer ble økt til 18 år i 1996, og tobakkprisene har hatt en sterkt stigende kurve de siste årene, uavhengig av inflasjon. Det blir fremdeles iverksatt nye røykelover mot offentlig røyking og reklamering. Det er grunn til å tro at den store forskjellen i levealder hos kvinner og menn skyldes fordeling av røykere på midten av 1900-tallet. De store andelen røykende menn førte til et stort skille i

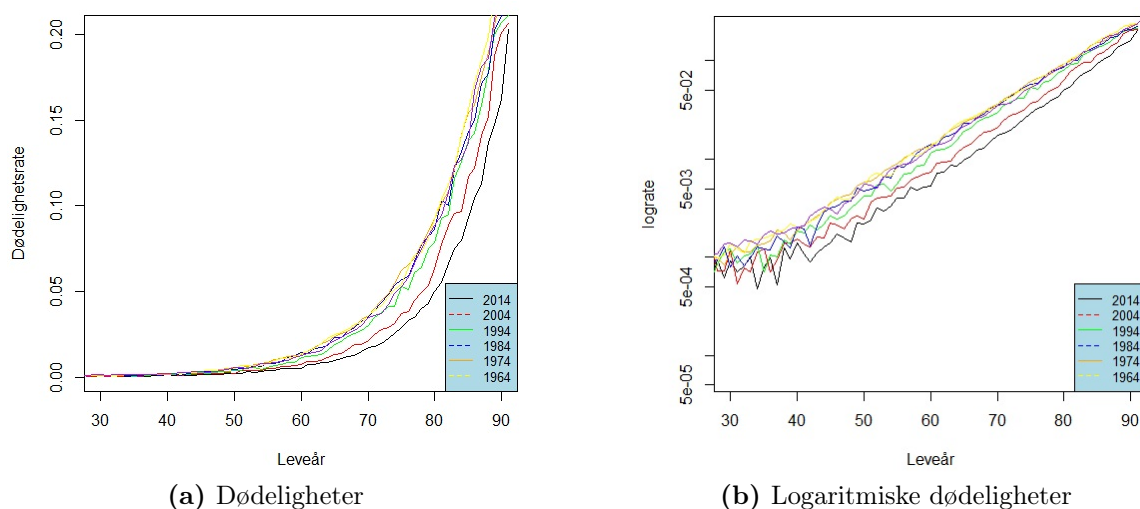


Figur 3.4: Historiske røykevaner til norske menn og kvinner. Figuren er hentet fra statistisk sentralbyrå[10].

dødelighet ettersom røyking er vitenskapelig bevist som en svært signifikant faktor knyttet til dødelighet. Ved nyere målinger er det vist som i figur 3.4 at prosentandelen av røykende kvinner og menn har jevnet seg ut, samtidig som den totale levealderen mellom kvinner og menn er jevnere enn på lenge. Ved estimering av forsikringspremie hos et utvalg bestående av røykende mennesker vil det være behov for å benytte seg av begrepet seleksjon. Sammenlignet med landsgjennomsnittet har røykere en klart høyere dødelighet og burde derfor adresseres med et sjokk $S_{røyk} > 1$.

3.2.2 Reduksjon i dødelighet

I moderne tid er det klart at dødeligheter har en negativ trend, med enkelte unntak som beskrevet tidligere. Dette skyldes at vi generelt har bredere kunnskap rundt helsefarlige tema, samt fremgang innen helsebasert forskning. Plottene 3.5a og 3.5b



Figur 3.5: Dødeligheter for norske menn mellom 1964-2014

viser til den klare reduksjonen i dødeligheter i løpet av de siste 50 årene. Ved plot 3.5a

er det vanskelig å skille de forskjellige årgangene fra hverandre ved ung alder, og derfor inkluderes plot 3.5b med logaritmiske dødeligheter. Det er klart at dødelighetene mellom 1964 og 1984 er svært like, men deretter reduseres dødelighetene gradvis frem mot år 2014.

Kreftforskning

Antall personer med kreft øker for hvert år, men dette skjer i likhet med at befolkningen vokser. Norge er et av de landene med høyest forekomst av krefttilfeller per innbygger. Dette skyldes at Norge har en av de høyest gjennomsnittlige levealdrene, og eldre personer har større sannsynlighet for å få kreft. Der man i gamle dager sammenlignet en kreftsykdom med en sikker død, er det idag svært mange som lever lenge med sykdommen, eller overvinner den. Statistikk basert på kreftsykdommer er vanskelig å etablere uten å gå svært nøyaktig til verks. Grunnen til dette er at de forskjellige krefttypene innehar svært forskjellige dødelighetrater.

Det norske kreftregisteret fører statistikk på antall tilfeller av kreft og i hvilken grad diagnosen fører til død eller ikke. Ved å legge sammen dødelighetene for alle oppførte tilfeller av kreft var det i 1964 30% sjanse for at en mann overlevde en kreftsykdom over et 5-års perspektiv. I 2014 hadde denne overlevelsesraten steget til 70%. De store fremskrittene innen medisin og oppfølging av pasienter har dermed økt overlevelsessannsynligheten med 40% over de siste 50 årene. For menn skyldes denne økningen først og fremst gjennombruddet innen prostatakreftrforskning. Hele 30% av krefttilfeller hos norske menn er prostatakreft, og i løpet av de siste 30 årene har overlevelsessannsynligheten steget fra 55% til hele 95%[13].

Livmorhalskreft er en av de vanligste årsakene til kreft hos kvinner. Idag tilbys gratis HPV-vaksiner til alle kvinner født mellom 1991-1996, som skal beskytte mot dette tilfellet av kreft med 90% sikkerhet. Det er for tidlig å utrede for virkningen av denne ordningen, men sannsynligvis vil en slik gratisordning utløse en kraftig reduksjon av krefttilfeller.

Vaksinering

En av de største demografiske endringene i nyere tid, er prosentandel av barn som vokser opp uten livstruende sykdommer. Grunnen er det systematiske vaksinasjonsprogrammet som legges til rette for den norske befolkningen. Det finnes enkelte vaksinemotstandere, men majoriteten av det norske folk følger vaksinasjonsprogrammet. Statistikken som støtter virkningen bak disse vaksinene er omfattende, og det er klar vitenskapelig konsensus som støtter vaksinering. Tall fra 2016[14] viser at 96% av alle 2-åringer har blitt vaksinert mot: røde hunder, kusma, meslinger, pneumokokk, hib, poliomyelitt, kikhoste, stivkrampe og difteri. Dette har redusert spedbarnsdødeligheten betraktelig. Tidlig på 1900-tallet døde 8% av alle spedbarn det første året etter fødsel. I 1950 var dette redusert til 3.5%, og idag er antall døde helt nede i 0.3%, som er det laveste i hele Europa. Det er helt klart at det er den gode oppfølgingen av vaksineringsprogrammet som er en av hovedårsakene til dette medisinske fremskrittet.

3.2.3 Seleksjon

Ved egenpensjon er det ikke svært nøyaktig å estimere forsikringspremier og forsikringsutbetalinger basert et landsgjennomsnitt. Alle blir tilbudt folketrygd og arbeidstakere blir tilbudt tjenestepensjon, men egenpensjon er svært individuelt ettersom dette blir en ekstra økonomisk påkostning. Den gjennomsnittlige forsikringstaker har derfor høyere lønn, og bedre livsvilkår enn den uforsikrede. Dødelighetene er dermed ofte lavere i forsikrede populasjoner enn ved landsgjennomsnittet, og derfor er det gunstig å utføre en seleksjon innad i den landsdekkende populasjonen for å ende opp med en populasjon bestående av kun forsikringstakere.

$$\tilde{q}_l = q_l \times s_l \quad (3.2.1)$$

I et forsikret utvalg vil $s_l < 1$, som betyr at en forsikret populasjon tildeles en reduksjon i dødeligheter. I 3.2.1 representerer q_l og s_l dagens dødeligheter. Det finnes også tilfeller hvor $s_l > 1$, og eksempler på dette kan være utvalg av personer med høy BMI, arvelige sykdommer eller minstelønn. Denne oppgaven baserer seg på et landsgjennomsnitt ettersom det i Norge er svært vanskelig å anskaffe særegen data om forsikringstakere.

3.3 Dynamiske dødelighetsmodeller

Tradisjonelle levetidstabeller skildrer gjenværende levetid basert på nåværende data, og estimeringen er ikke trendbasert. Ettersom dødeligheten har blitt redusert jevnlig de siste tiårene, så er det også grunn til å tro at den vil reduseres jevnlig i årene som kommer, og dette blir det ikke tatt hensyn til i de mest tradisjonelle modellene. Derfor har det blir mer og mer vanlig å innføre dynamiske dødelighetmodeller som danner prediksjoner for fremtidige dødeligheter basert på empirisk data. Slik fastsettelse av verdier kalles ekstrapolering.

$$q_{l+k} = q_{l_0} e^{-\gamma k} \quad (3.3.1)$$

Prinsippet bak dynamiske dødeligheter er å modellere et fremtidig scenario, og et realistisk scenario vil være en nedgang i dødeligheter. En måte å modellere et slikt utfall i dødeligheter vil være slik som i ligning 3.3.1. Positive γ_k verdier forteller at dødeligheter vil gå ned i fremtiden ettersom $\gamma_k = \gamma_{lk}$ er avhengig av alder l . Dette gir grunnlaget for å skape levetidstabeller med rekursjonen gitt ved:

$${}_{k+1}p_l = (1 - q_{l+k,k}) \cdot {}_k p_l \quad \text{som satt inn gir} \quad {}_{k+1}p_l = (1 - q_{l_0} e^{-\gamma k}) \cdot {}_k p_l \quad (3.3.2)$$

Hvis fremtidsutsiktene tilsier en økning i dødeligheter bør γ_k tildeles en positiv verdi slik at $e^{-\gamma k} > 1$. Denne måten å lage levetidstabeller på vil være avhengig av en manuell endring av γ_k basert på antagelser for fremtiden. Videre i oppgaven gjennomgås metoder som bruker empiriske dødeligheter som grunnlag for å bestemme γ -verdien.

3.3.1 Lee-Carter modellen

Den mest tradisjonelle modellen som brukes til å estimere dynamiske dødeligheter ble foreslått av Ronald D. Lee og Lawrence Carter i 1992[6]. Lee-Carter modellen bruker

empirisk data til å skape stokastiske dødeligheter for fremtiden ved ekstrapolasjon.

$$\ln(q_{l,t}) = \alpha_l + \beta_l \kappa_t + \varepsilon_{l,t} \quad (3.3.3)$$

Parameterene fra modell 3.3.3 beskrives slik:

$q_{l,t}$, dødelighetsrate for alder l i år t .

α_l , den gjennomsnittlige logaritmisk dødeligheten.

β_l , økningene og reduksjonene til ratene i tidstrenden κ_t .

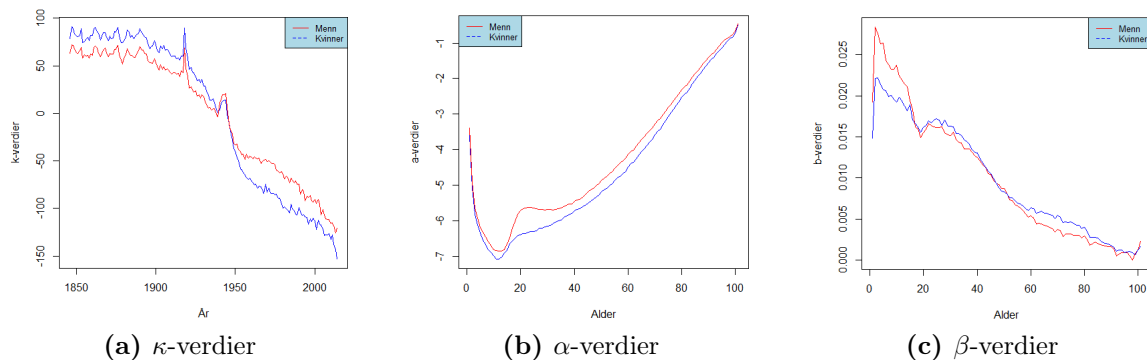
κ_t , tidstrenden til dødelighetene $q_{l,t}$

$\varepsilon_{l,t}$, feilleddet ved alder l i år t .

Sammen utgjør variablene gode estimater for dødelighetens utvikling, og modellen avslører samspillet mellom utviklingen i moderne tid med dødelighetsrate. Parameteren α_l finnes ved å regne ut gjennomsnittlige logaritmiske dødeligheter fra datasettet, og parametrene β_l og κ_t estimeres ved å bruke singularverdi-dekomposisjon. Fregangsmåten til disse kalkulasjonene blir gjennomgått i kapittel 8.1. Ved utregning av disse parametrene vil deres tilhørende historiske kurve se ut som i figur 3.6. Dataen som benyttes er to-dimensjonal, og ettersom vi er ute etter en levetidstabell som beskriver dødelighetforløpet for kontrakttakere i alle aldre mellom 30 og 100 år vil dataen behandles på matriseform. Ligning 3.3.3 kan derfor omskrives og matrisen $\mathbf{M} = q_{l,t}$ vil være et resultat av vektorene $\mathbf{a}^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_l})$, $\mathbf{b}^T = (\beta_1, \dots, \beta_{n_l})$, og $\mathbf{k}^T = (\kappa_1, \dots, \kappa_{n_t})$.

$$\ln \mathbf{M} = \mathbf{a} \mathbf{1}^T + \mathbf{b} \mathbf{k}^T + \mathbf{e}^T \quad (3.3.4)$$

Matrisen fokuserer på alle individene i hver aldersgruppe, hvor hver rad definerer startåret til aldersgruppen, og hver kolonne definerer overlevelsessannsynlighetene k år fremover. Etter estimering av $\hat{\alpha}_l$, $\hat{\beta}_l$ og $\hat{\kappa}_t$ er det av interesse å simulere fremtidige



Figur 3.6: Plottene beskriver κ , α og β -verdier i Lee Carter modellen for norske kvinner og menn.

dødeligheter. Dette gjøres ved hjelp av **ARIMA**-metoden:

$$AR(p) : X_k = a_n X_{k-1} + a_2 X_{k-2} + \dots + a_p X_{k-p} + \sigma \varepsilon_k \quad (3.3.5)$$

$$MA(q) : X_k = \sigma(\varepsilon_k + b_1 \varepsilon_{k-1} + \dots + b_q \varepsilon_{k-q}) \quad (3.3.6)$$

$$ARMA(p, q) : X_k = a_k X_{k-1} + \dots + a_p X_{k-p} + \sigma(\varepsilon_k + b_1 \varepsilon_{k-1} + \dots + b_q \varepsilon_{k-q}) \quad (3.3.7)$$

$$ARIMA(p, d, q) : X_k = \delta + a_k X_{k-1} + \dots + a_p X_{k-p} + \sigma(\varepsilon_k + b_1 \varepsilon_{k-1} + \dots + b_q \varepsilon_{k-q}) \quad (3.3.8)$$

Ved predikering av fremtidige dødeligheter behøves en modell som produserer nye stokastiske verdier hvert år basert på empirisk data. En autoregressiv modell AR(p) løser dette problemet ved å bruke korrelasjonen mellom alle tidligere verdier til å estimere nye verdier. Dette gjør at en autoregressiv modell fungerer godt hvis det er mange år med tilgjengelig data som kan korreleres. AR(p) vil ikke fange opp brå endringen i modellen, ettersom den ser på all data som en helhet. For å illustrere virkningen av modellen blir dødeligheter brukt som eksempel.

Hvis et år resulterer i et massivt positivt sjokk i dødelighet vil ikke den autoregressive modellen behandle dette på riktig måte, ettersom modellen kun vil fange opp den totale endringen over mange år. I korte tidsserier vil derfor AR(p) bli unøyaktig, og derfor suppleres modellen med leddet MA(q). MA(p) (Moving average) fanger opp de impulsive endringene i datasettet, og behandles som et feilledd til den autoregressive modellen AR(p). Hvis siste tilgjengelig data er fra 2014, og nettopp dette året resulterte i en ekstrem økning i dødelighet, så vil MA(q) bidra med bedre forståelse om hva som vil skje neste år. Feilleddet legges til videre antagelser for 2015, og den drastiske endringen i 2014 dekkes av MA(q).

Ved dødelighetmodellering i vestlige land er det realistisk å anta en trend med reduserte dødeligheter. For å modellere denne trenden behøves et integrert driftledd som gir en årlig reduksjon i dødeligheter. ARIMA(p,δ,q) har et driftledd δ som fanger opp trenden i datasettet ved å se på utviklingen til de tilgjengelige X-verdiene. Antall predikerte år ganges med driftparameteren δ for å finne fremtidige dødeligheter. Lee og Carter antok at $\hat{\beta}_l$ og $\hat{\alpha}_l$ ikke ville variere i fremtiden, og at den eneste parameteren som ville endre seg i prediksjonen var $\hat{\kappa}_t$. Ved å sette inn parameteren fra Lee-Carter modellen 3.3.3 inn i en ARIMA-modell, er det mulig å finne nye $\hat{\kappa}_t$ -verdier.

$$\hat{\kappa}_t = \delta + a_t \hat{\kappa}_{t-1} + \dots + a_p \hat{\kappa}_{t-p} + \sigma(\varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q}) \quad (3.3.9)$$

Det finnes flere typer ARIMA-modeller, og ulike variasjoner vil være optimale for ulike datasett. Etter å ha testet mange ulike variasjoner av modellen bestemte Lee og Carter seg for å benytte seg av en versjon kalt ARIMA(0,1,0), som finner nye $\hat{\kappa}_t$ -verdier for hver tidsserie parameteren produserer. Denne versjonen kalles tilfeldig gange med forskyvning, og nye $\hat{\kappa}$ -er finnes ved:

$$\hat{\kappa}_t = \hat{\kappa}_{t-1} + \delta + \varepsilon_t \quad (3.3.10)$$

Dette er den mest elementære versjonen av ARIMA-modellen. Både AR(p) og MA(q) nulles ut, og fremtidige $\hat{\kappa}$ -verdier produseres ved at driftparameteren δ måler gjennomsnittlig endring i tidsserien som kun støttes med det ukorrelerte feilleddet ε_t . Ettersom driftparameteren δ er ukjent så erstattes den med estimatet $\hat{\delta}$ hvor t er antall κ -verdier estimert fra singular-verdi-komposisjon før predikering.

$$\hat{\delta} = \frac{1}{t-1} \sum_{i=2}^t (\hat{\kappa}_i - \hat{\kappa}_{i-1}) = \frac{\hat{\kappa}_t - \hat{\kappa}_1}{t-1} \quad (3.3.11)$$

Ved estimering h år frem i tid vil et godt estimat av κ_{t+h} være:

$$\hat{\kappa}_{t+h} = \hat{\kappa}_t + h\hat{\delta} \quad (3.3.12)$$

Etter estimering av alle parametere er det mulig å estimere fremtidige dødeligheter ved innsetting i formel 3.3.13 :

$$\ln(\hat{q}_{l,t+h}) = \hat{\alpha}_l + \hat{\beta}_l \hat{\kappa}_{t+h} \quad (3.3.13)$$

Hvis datasettet som blir brukt til å estimere parametrene α_l , β_l og κ_t er mellom 1980 og 2014, vil en prediksjon av dødelighetene i år 2060 estimeres slik:

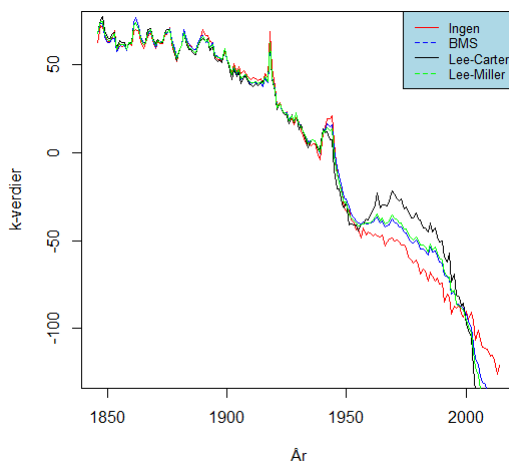
$$\ln(\hat{q}_{l,2060}) = \hat{\alpha}_l + \hat{\beta}_l \times [\hat{\kappa}_{2014} + 46\hat{\delta}] = \hat{\alpha}_l + \hat{\beta}_l \times [\hat{\kappa}_{2014} + 46 \frac{\hat{\kappa}_{2014} - \hat{\kappa}_{1980}}{33}] \quad (3.3.14)$$

Formålet med Lee-Carter modelleringen kan summeres i to steg:

1. Modellere historiske dødeligheter ved hjelp av tre ulike parametere, α , β og κ .
2. Predikere fremtidige dødeligheter ved kalkule nye κ -verdier. Det er verdt å presisere at variasjonen ARMA(0,1,0) ble sett på som optimal for datasettet Lee og Carter behandlet. Dette datasettet besto av dødelighetdata fra USA mellom 1933-1987, og det er gode muligheter for at en annen ARIMA-variasjon vil fungere bedre for norsk data.

3.3.2 Justeringer

Det er vanskelig å konstruere en modell som predikerer presise tall for ulike land. Hvis man laget et graf over historisk forventet levealder ville ingen land vise til nøyaktig de samme tallene, men flere land vil ha grafer med store likhetstrekk. Lee-Carter modellen favoriserer land med stigende levealder, og derfor vil den norske dataen gi en god tilpasning. Andre land har hatt en mer volatil utvikling i levealder, noe som åpner for justeringer. Det er liten konsensus om hvilken justering av Lee-Carter modellen som er den beste, og forskjellene dem imellom er ikke veldig stor. I

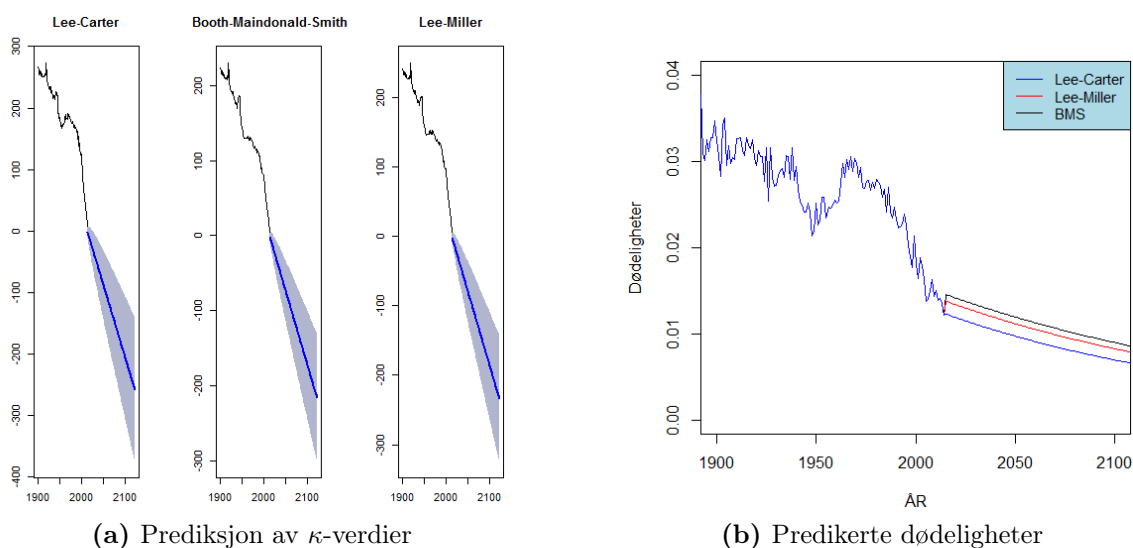


Figur 3.7: Plottet uttrykker predikerte dødeligheter hos 67 årige menn ved fire forskjellige justeringer.

figur 3.7 vises forskjellen i κ -verdier mellom de mest populære justeringene til Lee-Carter modellen. Dokumentasjonen om Booth-Maindonald-Smith metoden(BMS), Lee Miller metoden(LM), og den grunnleggende Lee-Carter metoden(LC) er hentet fra en publisering av Rob J. Hyndman i R-arkivene[18]. Disse justeringene fokuserer på tre områder:

- Størrelsen av datasettet. Der Lee-Carter metoden fokuserer på all tilgjengelig data, legger LM og BMS metodene fokus på tiden etter 1950, og derfor er det nettopp her forskjellene blir synlige i plottet.
- Ulike kalkuleringer av κ -verdier. Forskjellene i κ -verdier viser at LC underestimerer dødeligheter hos eldre i forhold til de to justeringene.
- Verdiene i året empirisk data går over til predikert data, såkalte jump-off verdier.

Disse justeringene er ikke svært forskjellige, og klassifiseres ikke som egne modeller, men heller variasjoner til Lee-Carter modellen. Fra figur 3.8a er det tydelig at Lee



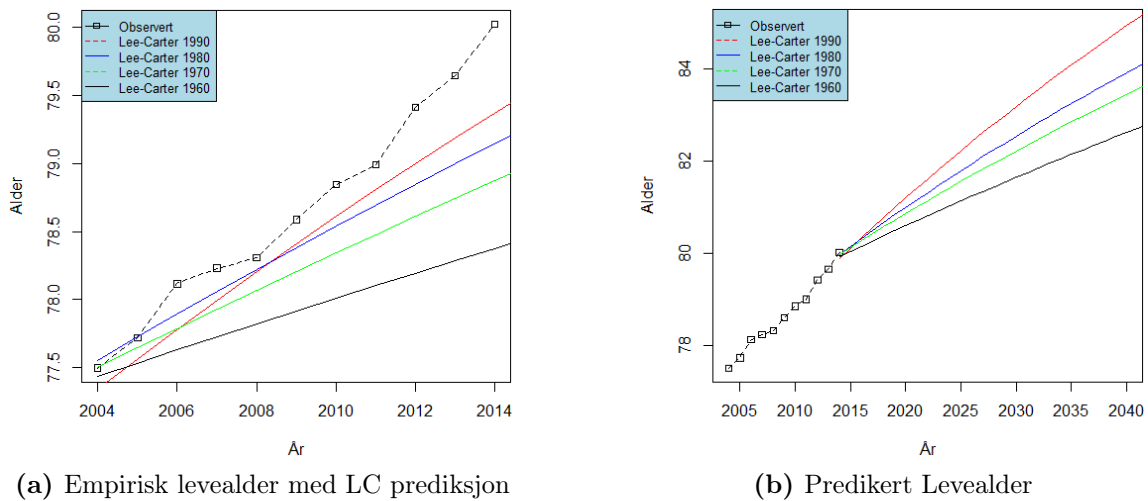
Figur 3.8: Plott a) beskriver predikerte κ -verdier for LC, LM og BMS. Plott b) beskriver forskjellen i predikerte dødeligheter for 67-årige menn.

Carter metoden predikerer en større reduksjon i κ -verdier enn de to andre metodene. Effekten av de ulike estimeringene av κ -verdier blir godt illustrert i figur 3.8b, hvor BMS og LM definitivt produserer høyere predikerte dødeligheter for 67-årige menn. Forskjellen i dødelighet er i midlertidig parallell igjennom hele prediksjonen etter det første året. Dødelighetsansynlighetene i det første året kalles jump-off verdier, som skildrer overgangen fra empirisk data til prediksjon. BMS og LM er langt mindre optimistiske enn LC-modellen i dette jump-off året, og det er stort sett denne endringen som utgjør forskjellen i predikerte dødeligheter.

Utvalg

Starttidspunktet til datasettet er et annet viktig element å se nærmere på. Hvilket år som settes som starttidspunkt for det empiriske datasettet vil gi store utslag på de forventede verdiene som simuleres. Datasettet som brukes er fra Norge, og det er derfor grunn til å unngå informasjon angående dødelighetrater frem til midten av 1900-tallet. Ettersom sent 1800- og tidlig 1900-tallet var preget av svært volatile dødelighetrater som et resultat av krig, sult og epidemier.

Figur 3.9 illustrerer hvor godt Lee-Carter modellen treffer med prediksjonene, og



Figur 3.9: Plott a) viser empirisk levealder for norske 67 år gamle menn 2004-2014, sammenlignet med forskjellige LC prediksjoner med forskjellig startpunkt. Plott b) beskriver forskjellen i prediksjoner mellom de forskjellige LC-modellene.

hvilke utslag starttidspunktet har og si for det endelige resultatet. I figur 3.9a er det mulig å se hvor godt Lee-Carter modellen faktisk har predikert dødelighetene mellom 2000 og 2014. Dette er gjort med ulike datasettet med siste data målt i år 1999. Det er tydelig at LC-modellen underestimerer levalderen, og tidligere starttidspunkt gir lavere predikert levealder. Denne underestimeringen skyldes volatile levealder-data mellom 1950 og 1990, som i kapittel 3.2.1 ble forklart med at eldre menn ble sterkt påvirket av bivirkningene etter et liv med røyking. Figur 3.9b viser prediksjonen til de samme modellene, men med empirisk data helt frem til 2014. Her er også trenden at LC-modellen med det yngste datasettet resulterer i de mest positive økningene i levealder.

Menn	2014	2020	2030	2040	2050	2060	økning 2014-2060
LC60	80.023	80.595	81.648	82.627	83.535	84.380	5.44%
LC70	80.023	80.862	82.228	83.456	84.560	85.552	6.91%
LC80	80.023	80.993	82.547	83.919	85.129	86.194	7.71%
LC90	80.023	81.202	83.194	84.952	86.493	87.839	9.68%

Tabell 3.1: Levealder for norske menn med Lee-Carter og starttidspunkt i 1960, 1970, 1980 og 1990.

Tabell 3.1 bekrefter observasjonene fra plottet, hvor den Lee-Carter modellen med det minste og nyeste datasettet er mest optimistisk med tanke på fremtidig levealder for norske menn. Den store forskjellen mellom modellene skyldes blant annet store medisinske fremskritt mot slutten av 1900-tallet, samt konsensus rundt den negative effekten av røyking. Det er ikke grunn til å tro at levalderen til norske menn vil forbedre seg i like stor grad fremover som den har gjort de siste 20 årene. De siste årene har røyking redusert betraktelig, og behandlingsmetodene for diverse skadelige sykdommer er blitt bredere. Dette fører til at LC90 antar at den helsemessige utviklingen fortsetter i den samme positive retningen som tidligere, og mulig overestimerer levalderen. Reelt sett er det rimelig å anta en jevn økning i levealder fremover,

men ikke så drastisk som det LC90 beregner. Resultatene fra tabellen avslører svært sprikende data. Dette kan tyde på at Lee-Carter modellen ikke er optimal til å estimere dødeligheter utifra volatile data, og for å begrunne denne antakelsen videre sammenlignes estimert levealder for menn med kvinners forventede levealder under de samme LC-modellene. Det kommer tydelig frem fra tabell 3.2 at LC-modellen er

Kvinner	2014	2020	2030	2040	2050	2060	% økning 2014-2060
LC60	84.091	84.418	85.520	86.558	87.535	88.455	5.19%
LC70	84.091	84.508	85.674	86.760	87.769	88.705	5.48%
LC80	84.091	84.553	85.672	86.707	87.662	88.541	5.29%
LC90	84.091	84.685	86.060	87.302	88.452	89.501	6.43%

Tabell 3.2: Levealder data for norske kvinner med LC 1960, 1970, 1980 og 1990.

vesentlig mer presis ved estimering av kvinnelig data. Grunnen til dette er at kvinners levealder har hatt en mye jevnere økning enn det mennene har. Dermed vil ikke prediksjonen til Lee-Carter modellen avhenge like mye av hvilke årstall datasettet er hentet fra. Ettersom det er vanskeligere å estimere fremtidig levealder for menn, vil det også medføre større risiko. Det kommer tydelig frem fra tabell 3.3 at valget

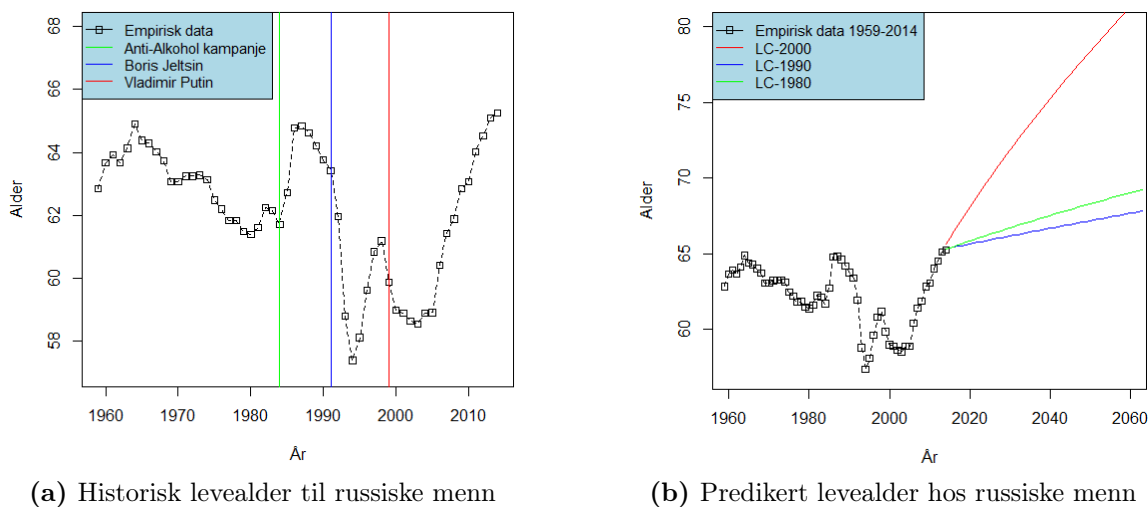
Menn	2014	2020	2030	2040	2050	2060	økning 2014-2060
LC60	80.023	80.595	81.648	82.627	83.535	84.380	5.44%
LC70	80.023	80.862	82.228	83.456	84.560	85.552	6.91%
LC80	80.023	80.993	82.547	83.919	85.129	86.194	7.71%
LC90	80.023	81.202	83.194	84.952	86.493	87.839	9.68%
BMS60	80.023	80.405	81.484	82.484	83.411	84.273	5.31%
BMS70	80.023	80.594	81.950	83.172	84.273	85.267	6.55%
BMS80	80.023	80.723	82.263	83.629	84.839	85.908	7.35%
BMS90	80.023	81.110	83.105	84.866	86.412	87.762	9.67%
LM60	80.023	80.466	81.568	82.587	83.530	84.405	5.47%
LM70	80.023	80.702	82.085	83.329	84.447	85.451	6.78%
LM80	80.023	80.867	82.447	83.842	85.070	86.150	7.65%
LM90	80.023	81.242	83.302	85.111	86.688	88.057	10.04%

Tabell 3.3: Levealder for norske menn med Booth-Maindonald-Smith, Lee-Miller og Lee-Carter 1960, 1970, 1980 og 1990.

av Lee-Carter justering ikke er svært viktig ved bruk av moderne data. Levealderen som predikeres er ikke særlig varierende, og det eneste som kan antydes er at BMS underestimerer prediksjonen i forhold til LC og LM. Grunnet de små forskjellene i prediksjoner er det ingen grunn til å komplisere oppgaven ved å benytte BMS eller LM justeringen. Det er mye vanskeligere å velge starttidspunktet til datasettet. LC60 og LC70 modellene starter datasettet i en tid Norge ikke ennå var stadfestet som en rikt land med gode fremtidsutsikter. Samtidig var helsetilstanden til norske menn variabel grunnet den store andelen som var avhengige av røyking. Disse datasettene velges derfor bort. LC90 modellen inneholder kun data i ekstremt positiv utvikling, og med det minste utvalget vil det sannsynligvis predikere alt for høye verdier. Valget til videre bruk faller derfor på LC80. Dette datasettet inneholder nok data til å predikere en moderat økning som hverken er for optimistisk eller pessimistisk.

3.3.3 Norge vs Russland

Selv om graden av økning i levealder har vært varierende i Norge, så har stignings-tallet stort sett vært positivt. Dette gir gode grunnlag for fremtidsestimeringer. En god illustrering på hvor godt Lee-Carter modellen fungerer i stabile land som Norge er å sammenligne med Russland. De historiske dødelighetene fra Russland er også hentet fra HMD[16]. Den russiske levestandarden har variert drastisk de siste tiårene, noe som gjør det utfordrende å predikere fremtidige dødeligheter. Dødelighetdata fra Russland er et eksempel hvor Lee-Carter modelleringen ikke fungerer optimalt. Dette skyldes mangel på data, og svært volatile målinger mellom 1980 og 2000. Figur 3.10a



Figur 3.10: Plott a) beskriver politiske innblikk på levealderen i Russland. Plott b) beskriver predikert levealder med forskjellige LC-modeller.

beskriver hvor stor virkning politiske inngrep kan ha for levestandarden i et land. På midten av 80-tallet innførte Gorbatsjov en anti-alkohol kampanje for å forhindre alkoholrelaterte dødsfall. Tiltaket førte til en kraftig økning i levealder, men kampanjen ble forkastet når den alkoholvennlige Boris Jeltsin ble valgt som president i 1991. I løpet av de neste årene sank levealderen fra 65 til 57, og det er først nå de seneste årene at levealderen har stabilisert seg på nivået som var under Gorbatsjov-kampanjen.

Figur 3.10b viser hvor mye volatile data har å si ved prediksjon av dødeligheter. Ved bruk av data fra kun år 2000 og fremover vil modellen anslå at russiske menn vil øke levealderen betraktelig, og nesten ta igjen levealderen til norske menn. Dette resultatet fanger kun opp en kort periode, hvor empiriske data er i voldsom vekst etter nedgangen på 1990-tallet. Det er dermed mer sannsynlig at levealderen stabiliserer seg på et lavere nivå. Den svært negative trenden på 90-tallet gjør at LC90 modellen predikerer en lavere trend enn LC80. Dette er svært annerledes enn prediksjonen gjort med norske data, hvor levealderen fulgte en lineær trend basert på størrelsen av datasettet. Dette kan konkluderes med at det bør unngås å bruke svært volatile data til å predikere fremtidige dødeligheter.

Predikeringen av russisk dødelighetdata vil behøve en annerledes tilnærming enn den som brukes i Norge. ARIMA(0,1,0) vil ikke fungere optimalt ettersom driftledet δ ser på endringen til historiske κ -verdier. De foregående 30 årene i Russland

resulterer i ekstremt volatile κ -verdier, noe som betyr at det ikke er en stabil trend i datasettet. En ARIMA(1,1,1) modell ville gitt bedre forutsetninger for prediksjon ettersom feilledet MA(q) fanger opp brå endringer i datasettet.

3.4 Multifaktor-modeller

Lee-Carter modellen er det klassiske eksempelet på å fremstille dynamiske dødeligheter, men modellen er utviklet på utdaterte premisser, og enkle justeringer er kanskje ikke nok for å modellere dagens dødeligheter realistisk. Modellen ble utviklet med data som inneholdt svært volatile dødeligheter, og det er muligheter for at den bommer grovt på eldre populasjoner. Dette får spesielt store konsekvenser ved utregning av pensjonskontrakter. Moderne tid og mer kompliserte dødelighetsanalyser åpner opp for modeller med fler parametere som beskriver alder og dødeligheter på en mer presis måte. Det er laget et stort antall nye modeller som skal modellere dødeligheten så tett opp til virkeligheten som mulig. Problemet er at ingen land har nøyaktig lik utvikling når det gjelder dødeligheter, og dermed vil det ikke være mulig å etablere en internasjonal modell som fungerer best på alle dødelighetdata. I dette delkapitlet gjennomgås og evalueres fler av de mest populære alternativene til Lee-Carter modellen.

3.4.1 Kohort effekt

Dette er effekten av å være født i samme årstall, eller tidsperiode. Lee-Carter modellen baserer seg på periodedødelighet, som vil si å den beregner dødsfallene i en enkelt tidsperiode, uavhengig av når personene er født. Kohort dødelighet beregnes derimot ved å se på fødselsårene til de ulike dødsfallene i populasjonen. Dette gjør at det kan ta 100 år for å danne et komplett bilde av dødelighetene til et gitt fødselskull. Det positive med å etablere en kohort effekt i modellen er at de ulike årskullene samles rundt periodiske hendelser som epidemi, kriger osv. Store hendelser som dette har hatt kraftig effekt på målt dødelighetdata.

$$q_l(i) = q_{l0}e^{-\gamma(i)} \quad (3.4.1)$$

Her vil parameteren $\gamma(i)$ flytte de normale dødelighetene i en positiv eller negativ retning avhengig av antagelser rundt lengre liv. Hvis $\gamma(i) > 0$ er tilfellet så indikerer det at populasjonen med fødselsår (i) lever lengre enn det som først var antatt. Rekursjonen for å lage levetidstabeller vil dermed se slik ut:

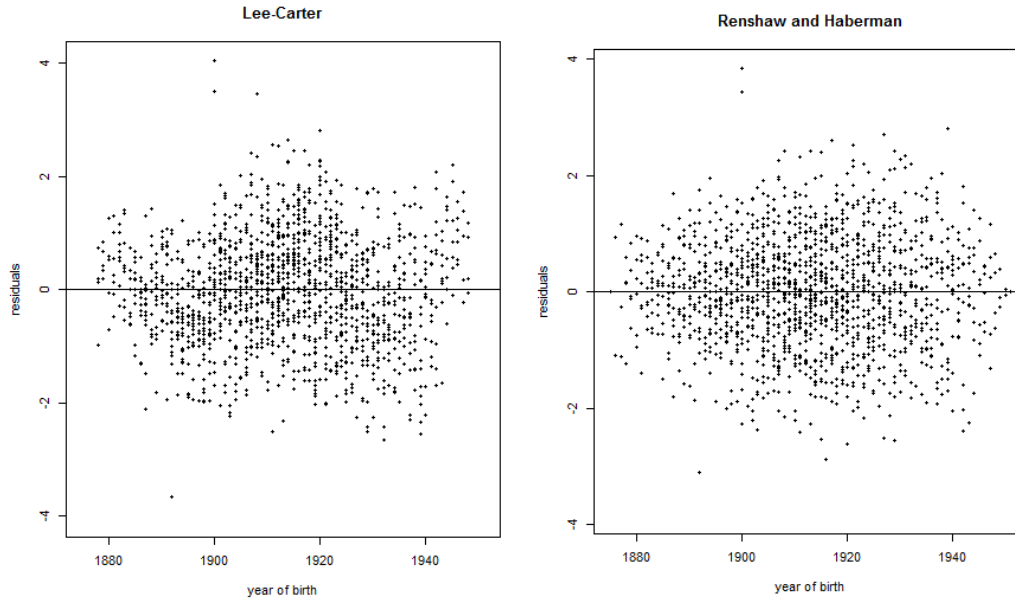
$${}_{k+1}p_l = (1 - q_{l+k}(i)) \cdot {}_k p_l \quad \text{som satt inn gir} \quad {}_{k+1}p_l = (1 - q_{l0}e^{-\gamma(i)}) \cdot {}_k p_l \quad (3.4.2)$$

3.4.2 Renshaw and Haberman

Dette er en enkel utvidelse av Lee-Carter modellen hentet fra Renshaw og Habermann[4]. Forskjellen fra den tradisjonelle modellen er kun et ekstra ledd som tar for seg kohort dødelighet. Dødelighetdataen brukt til utviklingen av denne modellen var fra England og Wales mellom 1961 og 2003.

$$\ln(q_{l,t}) = \alpha_l + \beta_l^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \beta_l^{(0)} \gamma_{k-l} \quad (3.4.3)$$

Kohort effekt kalkuleres i leddet $\beta_l^{(0)} \gamma_{k-l}$, hvor parameteren $\beta_l^{(0)}$ bestemmer påvirkningen av en kohort variabel γ_{k-l} . Det positive med modellen er at den ikke avhenger like mye av fødselsår som det Lee-Carter modellen gjør. Dette er lett å se effekten



Figur 3.11: Sammenligning av devians residualer mellom Lee-Carter og Renshaw-Haberman.

av konstanten γ_{k-l} i RH-modellen fra sammenligning av residualer i figur 3.11. Det er klart at RH har en mer tilfeldig tilnærming, og at Lee-Carter modellen påvirkes i større grad av fødselsår. En annen forskjell fra LC-modellen er prediksjonen av k -verdier. Der Lee og Carter benyttet en enkel ARIMA(0,1,0) metode, bruker Renshaw og Haberman ARIMA(1,1,0) for kvinner og ARIMA(2,1,0) for menn.

3.4.3 Cairns-Blake-Dowd

En undersøkelse gjort av KPMG[17] i 2015 tar for seg alle internasjonalt underlagte avdelinger i konsernet, og et av spørsmålene omhandler stokastiske dødeligheter. Der kommer det frem at de to mest brukte modelleringene (22% hver) av fremtidige dødeligheter er nevnte Lee-Carter, og Cairns-Blake-Dowd. Denne modellen er helt uavhengig fra Lee-Carter modellen, og er designet for å fokusere på langtlevrisko ved utregning av pensjonskontrakter. Den er konstruert til å fungere godt ved modellering av høye aldre, og fokuserer mindre på dødeligheter ved lave aldre. Dette gjør at den fungerer godt i forsikringsindustrien, ettersom målgruppen ligger mellom 30-100 år. Modellen viser at dødelighetene frem til fylte 60 år er relativt uinteressante, og at overlevelsessannsynligheten frem til 60 år forkortes til $P(\text{Overleve til år 60}) = 0.96$. Denne modellen og videre utvidelser er hentet fra en artikkel skrevet av Kevin Dowd, Andrew Cairns og David Blake[5].

$$\ln\left(\frac{q_{l,t}}{p_{l,t}}\right) = \text{logit}(q(l,t)) = \kappa_t^1 + (l - \hat{l})\kappa_t^2 \quad (3.4.4)$$

Parameterene modellen bruker beskrives slik:

- $\frac{q_{l,t}}{p_{l,t}}$, dødelighetsrate for alder l i år t .
- κ_t^1, κ_t^2 , tidsindeks. κ_t^1 måler skjæringspunktet til modellen, og behandler alle aldre likt. κ_t^2 er stigningstallet til modellen, og forskjellig fra κ_t^1 , så påvirker κ_t^2 alle aldre ulikt.
- l , alder.
- \hat{l} , gjennomsnittlig alder under behandling.
- $\varepsilon_{l,t}$, beskriver tidstrenden til dødelighetene $q_{l,t}$

Ved predikering av dødeligheter brukes som i likhet med LC-modellen, en random walk modell med drift. Forskjellen er at CBD-modellen inneholder to tidsvariable $\vec{\kappa}_t = [\kappa_t^1, \kappa_t^2]^T$, og må derfor benytte seg av en vektorbasert autoregressiv modell (VARIMA). Dermed bruker CBD en to-dimensjonal tilfeldig gange modell med drift:

$$\vec{\kappa}_{t+1} = \vec{\kappa}_t + \mu + CN(t+1) \quad (3.4.5)$$

- μ , danner en 2×1 vektor med drift-konstanter
- C , består av en 2×2 øvre triangulær-matrise
- $N(t+1)$, er en to-dimensjonal standardnormal variabel matrise

3.4.4 Cairns-Blake-Dowd med kvadrert alder

Skaperne av CBD-modellen har laget flere forbedrede versjoner av sin egen modell. For å treffe mer nøyaktig på populasjonen ved både yngre og eldre alder, mente de at det var lurt å legge til et kvadrert alderledd.

$$\ln\left(\frac{q_{l,t}}{p_{l,t}}\right) = \text{logit}(q(t,l)) = \kappa_t^1 + (l - \hat{l})\kappa_t^2 + \kappa_t^3 + ((l - \hat{l})^2 - \sigma_l^2) \quad (3.4.6)$$

I dette tilfellet regnes gjennomsnittet annerledes og er gitt ved $\hat{l} = (l_n - l_i + 1)^{-1} \sum_{l=l_i}^{l_n} l$. Variansen er gitt ved $\sigma_l = (l_n - l_i + 1)^{-1} \sum_{l=l_i}^{l_n} (l - \hat{l})^2$. Den nye tidsvariabelen κ_t^3 er en alders-periodisk effekt, hvor aldersleddet er kvadrert og variansen trekkes fra. For å regne ut fremtidige dødelighet benyttes i likhet med CBD en vektorisert ARIMA modell. Den tidligere to-dimensjonale modellen blir nå oppgradert til en 3-dimensjonal modell ved $\vec{\kappa} = [\kappa_t^1, \kappa_t^2, \kappa_t^3]^T$

3.4.5 Cairns-Blake-Dowd med kvadrert alder og kohort

Den siste varianten av CBD er en utvidet form av CBD-kvadrert, hvor ligningen utvides med et kohort ledd. Denne ligningen ble utarbeidet for å fange opp effekten av store hendelser angitt til spesifikke årstall, som i tillegg til kohort dødelighet ville skape det beste resultatet.

$$\ln\left(\frac{q_{l,t}}{p_{l,t}}\right) = \text{logit}(q(t,l)) = \kappa_t^1 + (l - \hat{l})\kappa_t^2 + \kappa_t^3 + ((l - \hat{l})^2 - \sigma_l^2) + \gamma_{t-l}^4 \quad (3.4.7)$$

I en kohort versjonen er det nye leddet angitt som γ_{t-l}^4 , og er ikke multiplisert som en faktor av et av de andre leddene. Dermed vil γ -verdien virke som en konstant. Verdien til konstanten vil avhenge av de gitte verdiene fra de ulike fødselsårene i datasettet.

3.4.6 Goodness-of-fit

Med fler alternativer av modeller, er det nødvendig å teste modellenes tilpasning ovenfor norske data. De forskjellige modellene er utviklet for å fange opp ulike spesifikasjoner. For eksempel er CBD-modellen er ment til å forbedre resultatene for eldre populasjoner, men samtidig er modellen utviklet med hensyn på engelsk og walisisk data, og det er ikke sikkert at den er like godt tilpasset de norske dødelighetene. Ulike land har ulike demografiske sammensetninger, og dermed vil enkelte modeller produsere mangelfull, eller overflødig data. Et godt estimat på hvilke modeller som

Modell	Funksjon
Lee-Carter	$\alpha_l + \beta_l^{(1)} \kappa_t^{(1)}$
Renshaw and Haberman	$\alpha_l + \beta_l^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \beta_l^{(0)} \gamma_{t-l}$
Cairns-Blake-Dowd	$\kappa_t^{(1)} + (l - \bar{l}) \kappa_t^{(2)}$
CBD kvadratisk	$\kappa_t^{(1)} + (l - \bar{l}) \kappa_t^{(2)} + ((l - \bar{l})^2 - \hat{\sigma}_l^2) \kappa_t^{(3)}$
CBD kvadratisk cohort	$\kappa_t^{(1)} + (l - \bar{l}) \kappa_t^{(2)} + ((l - \bar{l})^2 - \hat{\sigma}_l^2) \kappa_t^{(3)} + \gamma_{t-l}$

Tabell 3.4: Oversikt over de mest vanlige modellsammensetningene.

passer best til norske dødeligher fåes ved bruk av en **AIC-test**.

$$AIC = 2(-\log(L_{max}) + K) \quad (3.4.8)$$

AIC-testen finner ut av hvilke modeller som produserer nyttig, og hvilke modeller som produserer overflødig data. Ligningen beskriver negativ maksimal log-likelihood, pluss antall parametere i modellen. Modellen med de minste tallene vil være mest korrelert. Generelt sett vil den modellen med flest parametere oppnå den laveste AIC-verdien.

Hvis en enkelt modell med få parametere nesten oppnår det samme resultatet som en avansert modell med mange parametere, så vil det lønne seg å bruke den enkle modellen. Testen finner dermed ut hvor lønnsomt det er å bruke avanserte modeller i forhold til enkle. Tabell 3.5 viser at modellene fungerer godt ved ulike aldre. **CBD cohort** er den beste modellen ved aldre mellom 60 og 95 år, og vil dermed passe perfekt ved utregning av pensjonkontrakter. Grunnen til at denne modellen fungerer

Modell	AIC_{60-95}	AIC_{30-95}	AIC_{30-60}	AIC_{0-30}
Lee-Carter	17854.6	29907.4	12234.9	9788.5
Renshaw and Haberman	17560.2	29449.5	12262.7	9777.7
Cairns-Blake-Dowd	18606.4	35679.5	12709.0	58978.8
CBD kvadratisk	17671.5	30378.9	12289.4	39607.6
CBD kvadratisk cohort	17541.8	29478.8	12289.4	19719.5

Tabell 3.5: AIC, 1960-2014, alder 60-95, 30-95, 30-60

best ved disse aldre er at den har med et kohort ledd som tar hensyn til hvert enkelt fødselskull. Dermed fanger den godt opp levevilkårene dagens eldre hadde for 60-95 år siden, hvor dødelighetene var svært volatile. Denne modellen fungerer absolutt ikke ved en yngre populasjon, hvor den oppnår svært dårlige AIC-verdier ettersom den inneholder overflødige parametere ment til å behandle den nevnte eldre populasjonen. Det er derfor grunn til å tro at denne modellen vil bli overflødig når den eldre generasjonen dør ut, og den resterende populasjonen har levd et liv med svært stabile dødeligheter.

Lee-Carter modellen presterer godt til det totale datasettet, men ikke optimalt i en forsikringsammenheng ettersom svært unge aldre er irrelevant. Ifølge AIC-testen vil den modellen som presterer best til norsk data være **Renshaw og Haberman**-modellen. Den leverer gode tall for en populasjon i typisk forsikringsalder. Bakgrunnen for dette kan ligge ved at modellen ikke er svært komplisert, og inneholder et kohort ledd. Dette kohorte leddet er som tidligere beskrevet mest utslagsgivende hos årskull under svært volatile tider, og vil kanskje ikke være like relevant i en tid med antatt mer stabile dødeligheter.

AIC-testen belønner modellen som er best tilpasset dataen, men tar ikke hensyn til kompleksiteten bak modellen. Når valget står mellom modellen med ulikt antall variable, og forskjellig oppbygning, kan det lønnes seg å også gjøre en BIC-test.

$$BIC = 2(\log(L_{max}) - \ln(n)K) \quad (3.4.9)$$

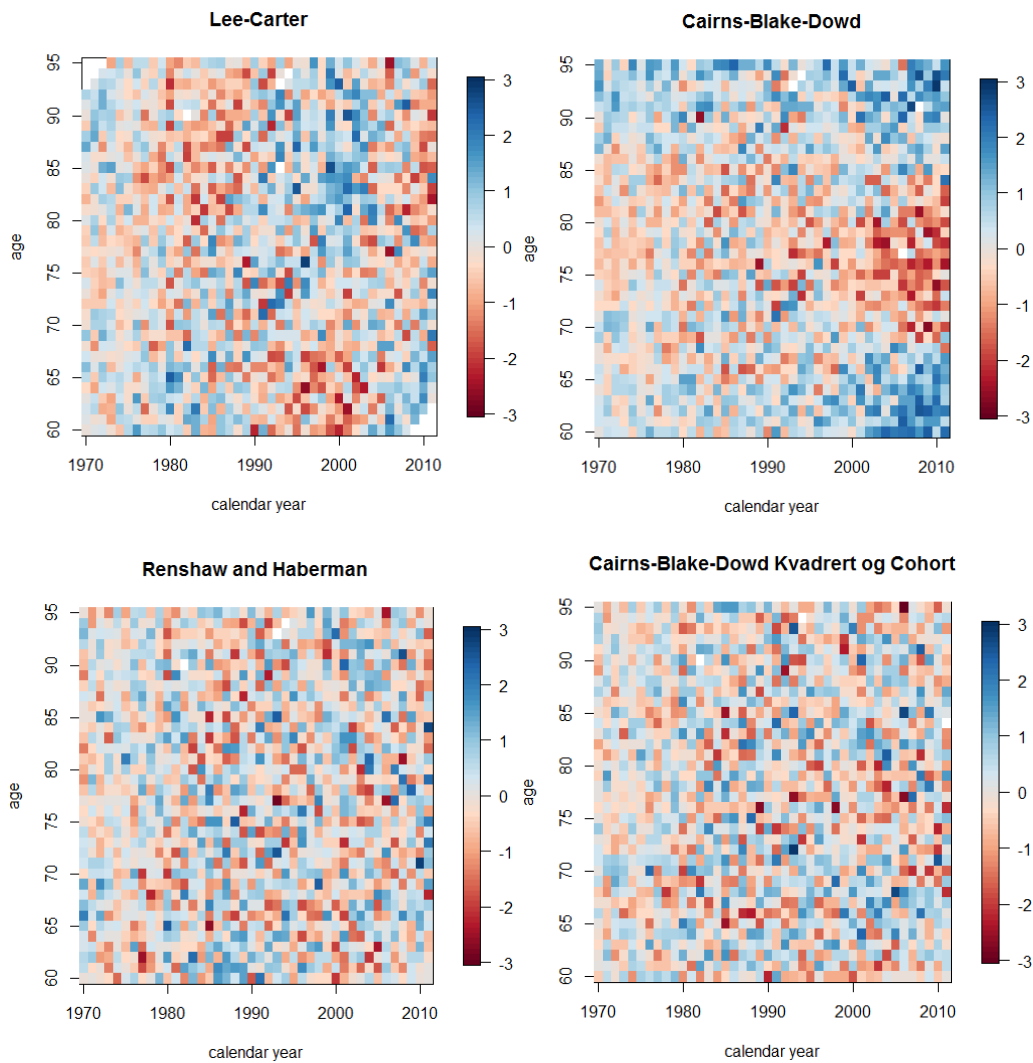
Denne testen tar høyde for oppbygningen av modellen, og det er derfor mulig å utelukke ekstremt komplisert modeller. Fra tabell 3.6 er det **Lee-Carter** modellen som

Modell	BIC_{60-95}	BIC_{30-95}	BIC_{30-60}	BIC_{0-30}
Lee-Carter	17495.3	29310.5	12175.4	9866.7
Renshaw and Haberman	17743.8	29648.2	12629.4	10348.3
Cairns-Blake-Dowd	17897.8	33498.6	12621.1	58064.2
CBD kvadratisk	17522.3	29645.7	12457.9	39305.4
CBD kvadratisk cohort	17892.2	29487.3	12860.7	18941.0

Tabell 3.6: BIC, 1960-2014, alder 60-95, 30-95, 30-60

skiller seg ut fra de andre. Grunnen til dette er at den inneholder mye enklere matematiske forutsetninger. BIC-testen mener dermed at forbedringene som har blitt gjort med LC-modellen ved å skape multifaktormodeller er for kompliserte og unødvendige. Residualplottene i figur 3.12 viser en svært samlende trend hos Lee-Carter og CBD, mens residualene til de kohorte modellene virker å være helt tilfeldige.

Tabellene og residualplottene viser at det kan være hensiktsmessig å kalkulere dynamiske dødeligheter med forskjellige modeller for forskjellige aldersgrupper. CBD kohort og RH treffer best på den eldre delen av populasjonen, mens LC fungerer godt ved de yngre aldersgruppene. Dermed kan den optimale løsningen være å slå sammen ulike modeller for å oppnå det beste resultatet. Hvis man skal velge én modell til norske data vil valget falle på den originale Lee-Carter modellen. Renshaw og Habermann presterte litt bedre på den eldre delen av populasjonen, men Lee-Carter presterte jevnt bra ved alle aldre i både AIC- og BIC testen, og vil derfor være den modellen som blir tatt i bruk videre.



Figur 3.12: Sammenligning av devians residualer i et "heat-map".

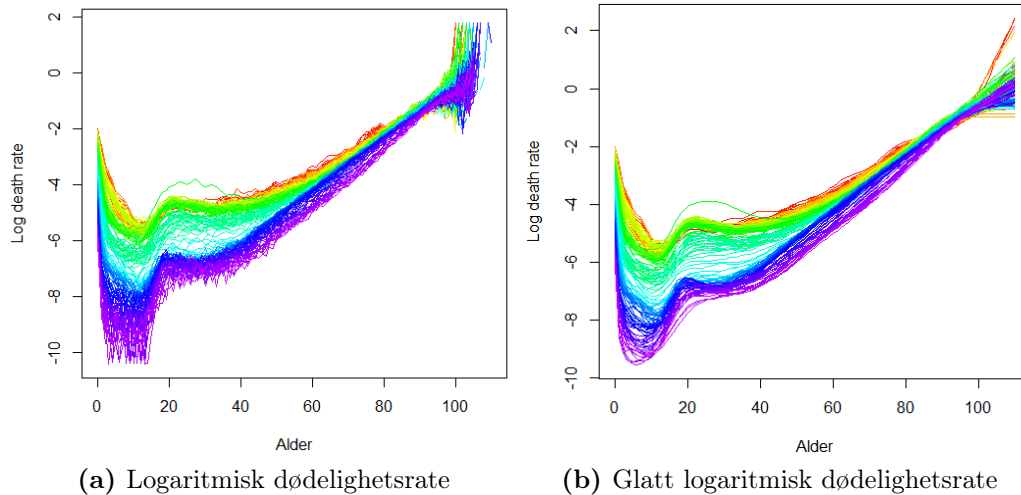
3.4.7 P-splines

Ut i fra de modellene som ble testet ut var det klart at Lee Carter modellen passet best til norske dødelighetdata, men er det mulig å gjøre modellen enda bedre? Lee-Carter modellen estimerer framtidige dødeligheter basert på variablene α_l , β_l og κ_t som modellen ekstraherer fra tidligere dødelighetdata. Disse dataene er varierende og hakkete, og derfor kan det være lurt å interpolere dataene for å få en glattere kurve. Dette kan gjøres på flere måter hvor enkelte er mer nøyaktige enn andre. Lineær interpolering danner en lineær linje igjennom målte data, men fanger ikke opp svingninger i trenden. For å jevne ut dataen er vi heller ute etter å konstruere en kurve, og da kan vi ta i bruk splines. P-splines står for **Penalized splines**, og er en utarbeidet type splinefunksjon som blir beskrevet i Currie[3]. En splinefunksjon er en måte å modellere kurver ved å bruke en serie av polynomer. Dette brukes i interpoleringsproblemer, og jo fler polynomer som blir tatt i bruk, jo glattere kurve er mulig å konstruere. Matrisen 3.3.4 vil nå suppleres med to straffeledde hvor B_l

påvirker alder l , og B_t påvirker tiden t .

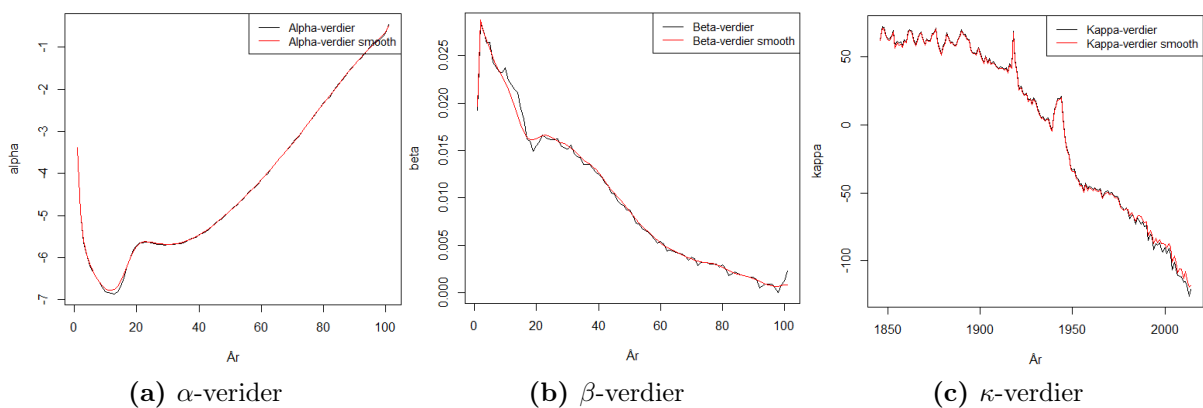
$$\ln \mathbf{M} = \mathbf{a} \mathbf{1}^T + B_t \mathbf{b} \mathbf{k}^T B_t^T + \mathbf{e}^T \quad (3.4.10)$$

Figur 3.13a og 3.13b har klare forskjeller selv om de er basert på samme dødelig-



Figur 3.13: Dødelighetsrater for norske menn mellom 1846-2014. Sammenligningen er gjort mellom reelle og interpolerte verdier.

hetsdata. Forsøke på å jevne ut ytterpunktene i dødelighetkurven kommer tydelig frem i 3.13b ettersom kurven den er mye jevnere og glattere. En slik kurve vil gi et mindre komplisert utgangspunkt for videre bearbeiding, og modellen vil fremstå som mindre komplisert. Det er svært små forskjeller ved α og κ sammenligningene,



Figur 3.14: α , β og κ -verdier med standard og glatt data.

men interpoleringen ved variabel β vil få konsekvenser for modelleringen. Ettersom antall svingninger blir kraftig redusert vil det være mindre støy ved modellen og vil potensielt produsere en mindre AIC. Tabell 3.7 viser at en interpolert Lee-Carter modell vil produsere en mindre AIC ved alle aldre. Ettersom modellen inneholder de samme leddene, men behandler dataen på ulik måte, er det ikke grunn til å gjøre en BIC-test. Tabell 3.8 viser forskjellen i predikert levealder mellom en Lee-Carter

Modell	AIC_{60-95}	AIC_{30-95}	AIC_{30-60}	AIC_{0-30}
Lee-Carter	17854.6	29907.4	12234.9	9788.5
Lee-Carter Glatt	16641.7	27510.0	11148.3	8865.4

Tabell 3.7: AIC-verdier basert på dødelighetsdata mellom 1960-2014, for aldersgruppene 60-95, 30-95, 30-60.

Modell	2014	2015	2020	2030	2040	2050	2060
Lee-Carter	80.02	80.11	80.72	81.87	82.93	83.90	84.79
Lee-Carter Glatt	80.02	80.16	80.77	81.92	82.98	83.95	84.84

Tabell 3.8: Sammenligning i predikert levealder frem til 2060 mellom Lee-Carter og Lee-Carter Smooth.

modell og en glatt Lee-Carter modell. Resultatene viser at ved å interpolere ved å bruke p-splines så vil fremtidig levealder ikke få store utslag fra de originale verdiene, og glatte verdier vil derfor ikke benyttes videre i oppgaven.

3.5 Solvency II med dynamisk dødelighet

Gjennomgangen av de ulike modelltypene viser et omfattende utvalg av ulike modeller. Valget av modell til videre bruk i oppgaven faller på den tradisjonelle Lee-Carter modellen, ettersom den er en av de som er best tilpasset norsk data i tillegg til å være den minst kompliserte modellen. Den gode levestandarden i Norge resulterer i et mindre behov for kompliserte modeller, som heller vil fungere bedre i andre land. Land som Russland vil ha et helt annet behov, og vil trenge mer kompliserte tilnærminger for å fange opp volatiliteten de siste tiårene.

Etter å ha etablert hvilken metode som skal brukes til å modellere fremtidige dødeligheter, er det tid for å se hvilke konsekvenser en dynamisk modell vil ha å si for utregningen av solvenskapital. Store endringer i dødeligheter fører til store endringer i forpliktelser hos et forsikringsselskap. Viktigheten med gode estimeringer for fremtidige dødeligheter er derfor svært stor, og vil gjøre premieberegning og forvaltningsplaner mye lettere for et forsikringselskap. Tabell 3.9 viser oversikten over gjen-

Modell	2014	2030	2060	økning i utbetalinger
Menn LC60	13.02	14.648	17.38	33.5%
Kvinner LC90	17.09	19.06	22.50	31.7%

Tabell 3.9: Antall forventede pensjonsutbetalinger basert på forventede gjenværende leveår etter 67 år, med LC 1960 for menn og LC 1990 for kvinner.

værende pensjonsutbetalinger for den minst optimistiske modellen for menn(LC60), og den mest optimistiske modellen for kvinner(LC90). Dette forteller oss at det først og fremst er menn som bringer størst fremtidig risiko inn i markedet. Ikke alle forsikringsselskap tar hensyn til dynamiske dødeligheter, og beregner kontrakter basert på eksisterende data. Dette kan føre til en kraftig underestimert. LC60 modellens estimering av total levealder virker ikke avskrekkende med en knapp økning på 5% over 50 år, men for pensjonsutbetalinger vil dette utgjøre drastisk forskjell. Hvis menn lever 4.36 år lengre i år 2060, vil det utgjøre en økning på 33.5% (Tabell 3.10) flere

pensjonsutbetalinger enn tidligere. Dette vil gi selskaper store økonomiske problemer hvis de ikke har beregnet med dynamiske dødeligheter. Dette eksempelet bruker LC60, som er den minst optimistiske av Lee-Carter modelleringene fra tabell 3.1. Det er LC80 som vil bli brukt til videre estimeringer i oppgaven og ikke LC60, men det er virkningsfullt å fremstille at selv den modellen med minst økning vil få store konsekvenser økonomisk. Hvis utregningene hadde blitt gjort med den mest optimis-

Modell	2014	2030	2060	økning i utbealinger
LC 1960	13.02	14.65	17.38	33.5%
LC 1970	13.02	15.23	18.55	42.5%
LC 1980	13.02	15.55	19.19	47.4%
LC 1990	13.02	16.19	20.84	60.1%

Tabell 3.10: Antall forventede pensjonsutbetalinger for menn basert på forventede gjenværende leveår etter 67 år, med LC 1960, 1970, 1980 og 1990.

tiske LC90 ville gjenværende leveår vært 20.84, noe som er en økning på hele 60% i pensjonsutbetalinger. Tabell 3.10 viser en gradvis stigning i utbetalinger ved fremtidige år, samt med modeller med yngre data. Dette er basert på at pensjonsalderen holder seg ved 67 år, noe som absolutt ikke er sikkert. Fra 2011 ble det tillatt med førtidspensjon fra fylte 62 år. Etterspørselen angående tidligere pensjonsalder er stor hos begge parter. I flere bedrifter vil arbeidsgiver vil bli kvitt eldre ansatte, og samtidig vil ansatte få mer ut av pensjonisttilværelsen. Høyere levealder vil etterhvert resultere i en endring i pensjonsalder.

3.5.1 Svakheter ved standardformelen

Det er store uenigheter hvorvidt standardformelen rettferdiggjører behandlingen av dødeligheter og kalkulering av SCR i Solvency II. Dette åpner for andre tolkninger av modellen, og andre muligheter for å regne ut solvenskapitalen.

Sjokkene i standardformelen

Den vanlige metoden for å kalkulere solvenskapitalen gitt av EIOPA er som nevnt tidligere ved å regne ut nåverdiene til kontraktene med sjokkede dødeligheter.

$$SCR = BE^S - BE \quad (3.5.1)$$

Det finnes flere punkt å kritisere ved denne metoden. Først og fremst er det kritikkverdige at sjokkene ikke dekker ulike aldre. Det samme sjokket brukes uansett om porteføljen inneholder en majoritet av unge eller gamle kontrakttakere. Det medbringer større langtlevrisiko hos en ung aldersfordeling, ettersom det gjenstår mange år av livene deres. Hos en gammel aldersfordeling er det ikke like stor usikkerhet i dødelighetutviklingen, ettersom det ikke er nødvendig å predikere dødeligheter i like lang tid fremover. Isteden for å kalkulere SCR ved å bruke et sjokk, foreslås det å bruke stokastiske dødeligheter for å regne ut kapitalen med 99.5% sikkerhet. I kapittel 3.3 som tok for seg dynamiske dødeligheter ble Lee-Carter modellen introdusert og verifisert som et god måte å ekstrapolere fremtidige dødeligheter.

$$SCR^{LC} = BE^{LC} - BE \quad (3.5.2)$$

Nåverdien (BE) av forpliktelser vil forbli det samme, men sjokket er byttet ut med en Lee-Carter estimering av fremtidige dødeligheter. En kalkulering av dette forslaget vil bli gjort i kapittel 6.2. En viktig ting å huske på er at Lee-Carter prediksjonen følger en dødelighetstrend basert på et landsgjennomsnitt, og vil ikke fange opp variasjoner i form av seleksjon. Gitt at forsikrede personer stort sett har en lavere dødelighet enn uforsikrede, gjør at LC-modellen ikke har rom for å fange opp denne feilmarginen. Sjokkmetoden åpner derimot for en 15% feilmargin for reservene, men marginen er relativt tilfeldig, og begrunnelsene rundt sjokket er svake.

Korrelasjonsformuleringen

Langtliv- og dødelighetmodulene har en korrelasjonseffekt på -0.25 seg imellom. Dette virker upresist og noe tilfeldig satt ettersom korrelasjonen er statisk og ikke tar høyde for forskjellige aldersfordelinger, og porteføljestørrelser. En portefølje bestående av 50/50 pensjon- og dødsfallkontrakter vil bli skjevt fordelt ettersom pensjonkontraktene er av mye større verdi, og kontraktene er spredt utover et større tidsperspektiv. Dødsfallkontrakter vil ha større verdi hvis de tilbys til en eldre populasjon, ettersom premieinnbetalingene vil være høyere grunnet at dødeligheter stiger med alderen. Aldersfordelingen er svært relevant for verdien av både pensjon- og dødsfallkontrakter.

Dødelighet under katastrofer

Korrelasjonene i standardformelen er laget for å beskrive samspillet modulene imellom. Problemet med denne tilnærmingen er at det er stor unøyaktighet i tildelingen av korrelasjoner. Et godt eksempel på dette er at både langtliv- og dødelighetsmodulen har en korrelasjon med **katastrofemodulen** på 0.25. Dette bør bety at hendelsene som inntreffer i de forskjellige modulene overlapper hverandre i lik grad. Dette er rett og slett ikke riktig i praksis. Risikoen ved at befolkningen lever lengre er basert på en

	Mortality	Catastrophe	Longevity	Disability	Lapse	Expenses	Revision
Mortality	1						
Catastrophe	0.25	1					
Longevity	-0.25	0.25	1				
Disability	0.25	0.25	0	1			
Lapse	0	0.25	0.25	0	1		
Expenses	0.25	0.25	0.25	0.50	0.50	1	
Revision	0	0	0.25	0	0	0.50	1

Figur 3.15: Matrise bestående av korrelasjonsfaktorer med dødelighet- og katastrofemodulen avmerket.

varig trend. Denne trenden har pågått i lang tid som et resultat av bedre leveforhold, medisiner og kunnskap enn tidligere. En slik trendrisiko har lite til felles med en katastroferisiko som kun inntreffer ved enkelte tilfeller. Disse tilfellene er stort sett kortvarige økninger i dødelighet som et resultat av epidemier eller naturkatastrofer. Tilfellene hvor katastrofemodulen skildrer langvarig risiko er ekstremt få. Derimot har SCR_{Cat} store fellestrekk med SCR_{Mort} .

Dødelighetsmodulen beskriver også risikoen for økte dødeligheter, og utifra et historisk perspektiv vil dette stort sett gjelde kortvarige svingninger. Det skal påpekes

at det finnes tilfeller i andre land hvor dødelighetene har steget over flere år. Alkoholpolitikken i Russland, som beskrevet tidligere, er et slikt tilfelle. Likevel vil dette kun ses på som en kort svingning og ingen langvarig trend.

Et godt eksempel hvor økte dødeligheter faktisk er trendbasert vil være steder som har blitt utsatt for store radioaktive skader. Tsjernobyl, Nagasaki og Hiroshima er de mest opplagte eksemplene. De to atombombene-eksplosjonene i Japan, samt eksplosjonen av kjernekraftverket i Ukraina faller innenfor katastrofemodulen, men den radioaktive strålingen var langvarig og dødelighetutviklingen i ettertid vil være en trendbasert økning.

Grunnen til å trekke frem et slikt eksempel er å vise hvor sjeldent at økt dødelighet er en trendbasert risiko. Sammenlignet er risikoen rundt langtlig konstant tilstedeværende og bør ikke behandles på samme måte. Det kan konkluderes med at hverken katastrofe- eller dødelighetsrisiko er trendbasert. SCR_{Mort} og SCR_{Cat} vil beskrive risiko som vises ved korte svingninger i dødelighet, og dermed er det klart at disse to modulene har mer tilfelles enn det korrelasjonsmatrisen i Solvency II påpeker. Disse modulene vil i stor grad overlappe hverandre, og med tanke på at risikoen for økt dødelighet er mest relevant for livsforsikringskontrakter er det grunn til å revurdere sjokket på 15%, samt korrelasjonen med katastrofemodulen på 0.25. Eksempelvis økninger i dødelighet illustreres i figur 3.2. Den første store nedgangen i levealder skyldes både første verdenskrig og spanskesyken. Den andre signifikante nedgangen skyldes 2.verdenskrig. Dette er de eneste tilfellene hvor dødeligheten har steget med mer enn 15% i mer enn en ett års periode. Alle disse hendelsene kan kategoriseres som katastrofer, og er kortvarige hendelser som ikke bestemmer trenden til levealderen. Det er derfor verdt å spørre seg hvor realistisk det er at dødeligheten skal stige i like drastisk over en lengre periode.

Kapittel 4

Wilkie-modellen

Wilkie-modellen er et kritisk verktøy for å simulere den økonomiske utviklingen til inflasjon, renter og investeringavkastninger. Ved prediksjoner frem i tid vil inflasjonen, samt finansielle investeringer være utsatt for endringer, som igjen er kritisk for selskapets ressurser. Wilkies stokastiske investeringsmodell er basert på empiriske data fra det 20 århundret. I dette tidsrommet har inflasjonen vært svært volatil, og inneholder perioder med negativ inflasjon. Disse dataene gir en høyere predikert risiko for negativ inflasjon i fremtiden enn det som anses som sannsynlig. Likevel er Wilkies modell en av de mest innarbeidede modellen i dagens forsikringlære, og den modellen som blir brukt i denne oppgaven. Wilkie-parameterne er basert på empirisk data fra England helt siden 1923. Dette gir grunnlag for å evaluere dagens marked kontra markedet som helhet de siste 100 årene. Wilkie argumenterte for at dagens stabile økonomi ikke er en garanti i fremtiden, og at markedet også vil se volatile svingninger de neste 100 årene. Essensen av modellen er sammensetningen av lineære driverprosesser og stasjonære variable, for så å produsere et resultat iform av en output variabel. Fremstillingen av denne modellen er hentet fra kapittel 13.5 i Bølviken[1], og fra Wilkies egne utregninger[2].

4.1 Modellens oppbygning

Grunnelementet i modellen er de lineære driverprosessene som produserer rekursjoner av høyere og høyere orden i likhet med de autoregressive modellene fra overlevelsesmodellene tidligere i kapittel 3.3. Wilkie-modellen inneholder et flertall slike lineære prosesser for blant annet inflasjon, aksjer, rente og eiendom. Nesten alle X-prosessene

er integrerte av orden 1 i form av AR(1) og ARIMA(1,1,0)-modeller[2].

$$X_k^i = a^i X_{k-1}^i + \sigma^i \epsilon^i \quad \text{Inflasjon} \quad I_k, y_k \quad (4.1.1)$$

$$X_k^y = a^y X_{k-1}^y + \sigma^y \epsilon_k^y \quad \text{Aksjeutbytte} \quad y_k \quad (4.1.2)$$

$$X_k^{dy} = \sigma^d (\epsilon_k^d + b_1^d \epsilon_{k-1}^d) + \theta^{dy} \epsilon_{k-1}^y \quad \text{Inflasjonsutbytte} \quad I_k^d \quad (4.1.3)$$

$$X_k^{di} = a^{di} X_{k-1}^{di} + b_0^{di} X_k^i + b_1^{di} X_{k-1}^i \quad \text{Inflasjonsutbytte} \quad I_k^d \quad (4.1.4)$$

$$X_k^{ry} = a^{ry} X_{k-1}^{ry} + \sigma^r \epsilon_k^r + \theta^{ry} \epsilon_{k-1}^y \quad \text{Langrente} \quad \bar{r}_k \quad (4.1.5)$$

$$X_k^{ri} = a^{ri} X_{k-1}^{ri} + (1 - a^{ri}) X_k^i \quad \text{Langrente} \quad \bar{r}_k \quad (4.1.6)$$

$$X_k^f = a^f X_{k-1}^f + \sigma^f \epsilon_k^f \quad \text{Renteratio} \quad F_k \quad (4.1.7)$$

$$X_k^{pi} = \xi^{pi} + \theta^{pi} I_{k-1} + (1 - \sigma^{pi}) X_{k-1}^{pi} \epsilon_k^{pi} \quad \text{Eiendom} \quad I_k^p \quad (4.1.8)$$

$$X_k^{py} = a^{py} X_{k-1}^{py} + \sigma^{py} \epsilon_k^p \quad \text{Eiendom} \quad y_k^p \quad (4.1.9)$$

Disse prosessene er fluktuierer med tiden, og danner grunnlaget for å kalkulere de stokastiske avkastningene som skal benyttes av det forenklete forsikringssselskapet i del II. De finansielle avkastningene er basert på de stasjonære byggeklossene:

$$I_k = (1 + \xi^i) e^{X_k^i} - 1 \quad \text{Inflasjon} \quad (4.1.10)$$

$$y_k = \xi^y e^{X_k^y + \theta^{yi} X_k^i} \quad \text{Aksje} \quad (4.1.11)$$

$$I_k^d = (1 + \xi^d) e^{X_k^{dy} + X_k^{di}} - 1 \quad \text{Aksje} \quad (4.1.12)$$

$$\bar{r}_k(K) = \xi^r e^{X_k^{ry}} + \xi^i + X_k^{ri} \quad \text{Langrente} \quad (4.1.13)$$

$$F_k = \xi^f + e^{X_k^f} \quad \text{Renteratio} \quad (4.1.14)$$

$$y_k^p = \xi^{py} e^{X_k^{py}} \quad \text{Eiendom} \quad (4.1.15)$$

$$I_k^p = I_{k-1}^p e^{X_k^{pi}} \quad \text{Eiendom} \quad (4.1.16)$$

Wilkie-modellen er kompleks og inneholder svært mange variabler og ligninger. Det er ingen grunn til å ta hensyn til alle de initielle variablene, driver prosessene og output variablene. Derfor er det viktig for denne oppgaven og isolere/reducere modellen til det av interesse. Interesseområdene ved modellen inkluderer driverprosessene som danner grunnlag for inflasjon og rentemodellering, samt de initielle verdiene som hører med.

$$X_k \rightarrow I_k \rightarrow r_k \quad (4.1.17)$$

Inflasjonen er en stasjonær variabel og et viktig bindeledd mellom de lineære prosessene og investeringsavkastningene. Kalibrering av inflasjonsverdiene i Wilkie-modellen vil gi store utslag hos alle de andre kurvene. Et godt eksempel på hvor innflytelsesrik inflasjonen er på markedet fås ved å se på rentekurven \bar{r}_k (4.1.13). Rentekurven angis først ved to parameterverdier. En initiell renteverdi ξ^r ganges med den lineære prosessen $e^{X_k^{ry}}$ i en log-normal forskyvning, og dette plusses sammen med en initiell inflasjonsverdi ξ^i i tillegg til en direkte forskyvning bestående av den lineære prosessen X_k^{ri} . Denne forskyvningen er ikke konstant, men derimot en drivermodell som produserer nye verdier for hver iterasjon. Rentenivået får indirekte påvirkning av inflasjonsdriveren X_k^i (4.1.1) ettersom den er med i oppbygningen til X_k^{ri} (4.1.6). Dermed vil inflasjonsnivået gi store utslag på rentekurven Wilkie-modellen produserer. Grunnet den store påvirkningen inflasjon har for modellen er det god grunn til å evaluere de initielle inflasjonsverdiene som danner grunnlaget for modellen.

4.2 Utledning av Investeringsmuligheter

De lineære driverne og de stasjonære byggeklossene brukes til å kalkulere output-variable. Disse variablene danner kurver som beskriver utviklingen til forskjellige deler av det finansielle markedet, og denne oppgaven skal ta for seg fire av disse:

- Aksjeavkastning, R_k .
- Bankavkastning, r_k .
- Obligasjonavkastning, \bar{r}_k .
- Eiendomavkastning, S_k .

Bedriftens ressurser som enten mottas i form av premier eller som startkapital, utnyttes på best mulig måte ved å bli investert videre. Investeringene inkluderes i en del av pengestrømmen til L_k , og herfra beskrives tilgjengelig kapital til investering som A_k . Andelen til de fire investeringene fordeles ved:

$$\sum_1^4 w_i = 1 \quad \text{for } i = (1, 2, 3, 4) \quad (4.2.1)$$

Selv om alle investeringsmulighetene følger den samme ligningen vil de gi forskjellige resultater. Grunnen til dette er at i hvert tilfelle ganges forpliktelsene med en unik rente tilhørende sitt eget finansielle område.

Aksjeavkastning

Denne avkastningen angis ved R_k og er estimert avkastning etter simuleringer fra Wilkie-modellen. Aksjeforvaltningen illustreres ved at disse avkastningene ganges med tilgjengelig kapital A_k i forpliktelsene L_k , og deretter prosentandelen w_1 som skal benyttes i forvaltningporteføljen.

$$L_{1k}^{inv} = \sum_{k=1}^K A_k \omega_1 (1 + R_k) \quad , \quad w_1 \in [0, 1] \quad (4.2.2)$$

Variabelen av interesse er aksjeavkastningen R_k , og den er bygget opp av to ikke-lineære transformasjoner: aksjeavkastning(4.1.11) og inflasjons dividende(4.1.12). Disse transformasjonene er oppbygget med hjelp av de lineære prosessene og startverdiene beskrevet i seksjonen om Wilkie-modellen. Etter kalkulering av y_k og I_k^d kan uttrykkene settes sammen for å kalkulere variabelen av interesse, nemlig R_k :

$$R_k = (1 + I_k^d) \frac{y_{k-1}}{y_k} - 1 \quad (4.2.3)$$

Aksjeavkastningen avhenger av to stasjonære byggeklosser og vil derfor være svært volatil, ettersom begge fluktuerer uavhengig av hverandre. Kurven som produseres benyttes på samme måte som en liste over fremtidige renter. Dermed er det lett å kalkulere et anslag på hvor lønnsomt det kan være å forvalte ressursene i aksjer.

Bankavkastning

Gitt ved r_k , og er korttidsrenten satt av Wilkie-modellen. Denne renten drives av inflasjon, og skal skildre avkastningen som mottas ved å sette pengene i banken.

$$L_{2k}^{inv} = \sum_{k=1}^K A_k w_2 (1 + r_k) \quad , \quad w_2 \in [0, 1] \quad (4.2.4)$$

Korttidsrenten r_k regnes ut ved å gange langtidsrenten \bar{r}_k med renteratioen F_k :

$$r_k = F_k \times \bar{r}_k(K) \quad (4.2.5)$$

Langtidsrenten \bar{r}_k kalkuleres i ligning (4.1.13), og renteratioen F kalkuleres i ligning (4.1.14). Renteratioen definerer forholdet mellom kort- og langtidsrenten. Etersom en bankrente ikke skal gi like god avkastning som en investering i obligasjoner vil $F < 1$. Dess nærmere renteratioen er 0, jo lavere vil r_k være i forhold til \bar{r}_k .

Obligasjoner

Gitt ved \bar{r}_k , og er langtidsrenten gitt av Wilkie-modellen. Denne renten beskriver obligasjoner med 10-års løpetid.

$$L_{3k}^{inv} = \sum_{k=1}^K A_k w_3 (1 + \bar{r}_k) \quad , \quad w_3 \in [0, 1] \quad (4.2.6)$$

Varibelen \bar{r}_k kalkuleres i (4.1.13) ved å kombinere startverdiene ξ^r og ξ^i med de lineære driverprosessene $X_k^{r|y}$ (4.1.5) og $X_k^{r|i}$ (4.1.6). Denne output-varibelen er også en av de stasjonære byggeklossene. Dette gjør at obligasjonsavkastningen vil være mye mindre volatil, ettersom de andre avkastningene er satt sammen av flere stasjonære byggeklosser og vil dermed inneholde flere fluktuerende komponenter.

Eiendom

Den siste investeringmetoden er angitt som S_k . Denne kurven følger Wilkie-modellens fremtidige antagelser i boligmarkedet.

$$L_{4k}^{inv} = \sum_{k=1}^K A_k w_4 S_k \quad , \quad w_4 \in [0, 1] \quad (4.2.7)$$

Eiendomsavkastningen fluktueres av de to stasjonære variablene y_k^p (4.1.15) og I_k^p (4.1.16), som gjør at S_k er sterkt påvirket av inflasjonen i markedet. Ved å avhenge av to stasjonære byggeklosser vil eiendomsavkastningen være utsatt for høy volatilitet.

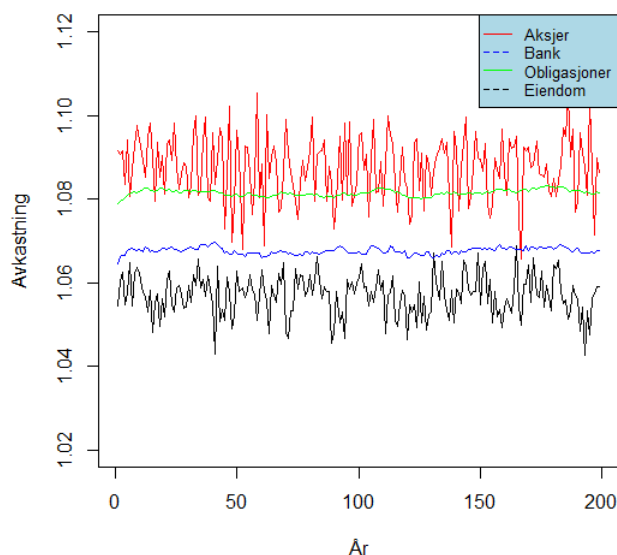
$$S_k = (1 + I_k^p) \frac{y_{k-1}^p}{y_k^p} - 1 \quad (4.2.8)$$

Sammenslåing av de forskjellige investeringmetodene foregår ved at hver investering gis sin tilhørende verdi av w_i basert på hvor mange prosent de benyttes i porteføljen. Deretter summeres de fire forskjellige pengestrømmene sammen:

$$L_k^{inv} = \sum_1^4 L_{ik}^{inv} \quad \text{for} \quad i = (1, 2, 3, 4) \quad (4.2.9)$$

Denne metoden skal benyttes med forskjellige sammensetninger av forvaltningporteføljer, og videre benyttes til å lage et Best Estimate. Ligning 4.2.9 viser til den delen av L_k som er investert. Investeringene vil forekomme i utregningen av nåverdien til kontraten så lenge selskapet har økonomisk overskudd, altså $L_k < 0$.

$$L_k^{inv} \subseteq L_k \quad \text{når} \quad L_k < 0 \quad (4.2.10)$$



Figur 4.1: Oversikt over den stokastiske avkastningen med de originale Wilkie-parameterverdiene. Plottet viser gjennomsnittlig avkastninger over 1000 simuleringer

4.3 Parameterverdier

De originale verdiene som benyttes i modellen er tilpasset det finansielle markedet i England i årene mellom 1923 og 1994. Disse verdiene og tilhørende modell ble presentert i 1995[2]. Tabellen gir en oversikt over de originale verdiene som brukes som startpunkt i denne oppgaven. Verdiene til de forskjellige variablene ble kalkulert av Wilkie for å passe de historiske endringene i moderne tid. Etersom simuleringene i denne oppgaven skal illustrere stabiliteten til norsk økonomi, ses det grunn til å gjøre enkelte endringer på verdiene. I løpet av 1900-tallet har Norge gått fra å være et av Europas fattigste til et av Europas rikeste land, og med store oljeressurser er den økonomiske stabiliteten ikke truet de nærmeste årene. De høye inflasjonverdiene Wilkie presenterer i modellen sin er basert på inflasjonbevegelsen det siste århundret,

Inflasjon			
$\xi^i=0.048$	$a^i=0.58$	$\sigma^i=0.040$	
Inflasjonsutbytte			
$\xi^d=0.065$	$a^d_i=0.87$	$b_0^{di}=0.50$	
$\sigma^d=0.067$	$\theta^d_y=-0.027$	$b_1^{di}=-0.36$	
Eiendom			
$\xi^{py}=0.074$	$a^{py}=0.91$	$\sigma^{py}=0.12$	
$\xi^{pi}=0.0006$	$\sigma^{pi}=0.066$	$\theta^{pi}=0.112$	
Aksjer			
$\xi^y=0.041$	$a^y=0.55$	$\sigma^y=0.16$	$\theta^{yi}=1.79$
$b_1^d=0.57$			
Renter			
$\xi^r=0.0305$	$a^r_y=0.90$	$a^r_i=0.955$	$\xi^f=0.80$
$\sigma^r=0.19$	$\theta^r_y=0.052$	$a^f = 0.74$	$\sigma^f=0.18$

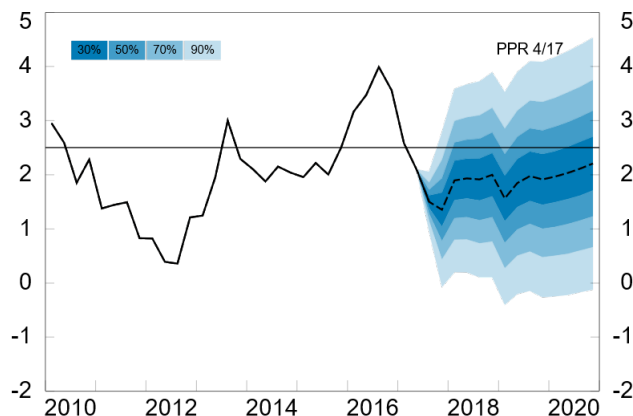
og den har vært svært volatil. Det finnes argumenter begge veier for hvordan inflasjonsutsiktene kommer til å se ut fremover, men antagelsene for at norsk økonomi vil opprettholde et nogen lunde stabilt nivå er sterke. Wilkie-modellen har en så høy som 17% sjanse for negativ inflasjon hvert år, og dette er urealistisk høyt med tanke på dagens fremtidsutsikter. Det er klart at en vil gardere seg mot alle potensielle overraskelser i både inflasjons- og renteutviklingen ved å bruke tallene til Wilkie, men samtidig vil dette føre til at selskaper trenger i overkant store reserver. En slik overestimering kan bli svært dyrt for selskapene, og det kan derfor kan det lønne seg å konstruere en lav-inflasjon utgave av Wilkie-modellen til videre simulering i denne oppgaven.

4.4 Pengepolitiske endringer

For å konstruere en realistisk modell med norske verdier er det nødvendig å ta hensyn til de pengepolitiske målene satt av regjeringen. Dette innebærer inflasjon og renteparametere som er med å styre konsumprisindeksen i Norge. Aksjeavkastningene er også mulig å tilrettelegge opp mot sannsynlige avkastninger fra indeksfond.

4.4.1 Modifikasjon av inflasjonsparametere

Dette er et høyst relevant tema ved videre kalkuleringer. Argumentet bak modifikasjonen av Wilike-modellen er at den initielle inflasjonsverdien er mindre realistisk i dagens økonomi. Ved simulering av Wilkies egne verdier oppnår vi en inflasjonsrate på mellom 4- og 6% hvert år. Dette er langt unna statens mål om en inflasjonsverdi på 2.5%. For å modifisere modellen til å passe norske forhold er det derfor grunn til å endre den initielle inflasjonen ξ^i og dens standardavvik σ^i . Etersom pengepolitikken i Norge legger til rette for en økning i konsumprisindeksen på 2.5% er det derfor gunstig å endre initialverdien til nettopp denne verdien. Halvering av den



Figur 4.2: Norges inflasjonsmål sammenlignet med målte inflasjonsverdier. Figuren er hentet fra Norges Bank sine nettsider[15] og viser til et pengepolitisk inflasjonsmål på 2.5%, men et nytt inflasjonsmål på 2% ble vedtatt 2. mars 2018.

initielle inflasjonsverdien gir en inflasjon som varierer mellom 1.5- og 4%. Disse inflasjonsverdiene er svært realistiske i dagens økonomi. Videre er spørsmålet om de målte verdiene varierer uønsket mye. Den ønskede inflasjonen i Norge er 2.5%, og med et standardavvik på 0.04 fører dette til en svært volatil kurve. Selv om en slik σ^i fører til uønskede verdier fra et pengepolitisk ståsted, gjenspeiler den de virkelige inflasjonstallene på god måte.

Figur viser at inflasjonen absolutt ikke har holdt seg stabilt på 2.5%, men heller har variert mellom 1-3.5% siden 2010. Ved halvering av både den initielle inflasjonen og tilhørende standardavvik sitter vi igjen med inflasjonsverdier på mellom 2- og 3%, og dette jerngrepet rundt inflasjonsnivået virker uoppnåelig i dagens økonomi. Ved nærmere ettertanke vil det utifra norske forhold dermed lønne seg å benytte seg av Wilkie-modellen med en halvert initiell inflasjonsverdi. Selv om inflasjonsmålet er 2.5%, så er det ingen garanti for at staten skal kunne regulere pengepolitikken med så stor nøyaktighet at dette tallet oppnås hvert år. Dermed må standardavviket også tilpasses til et reelt nivå. Den 2. mars 2018 ble det vedtatt et nytt pengepolitisk inflasjonsmål på 2%[15], men denne oppgaven vil fokusere på det tidligere målet på 2.5%. De siste hundre årene har resultert i svært volatil inflasjon, og dermed vil

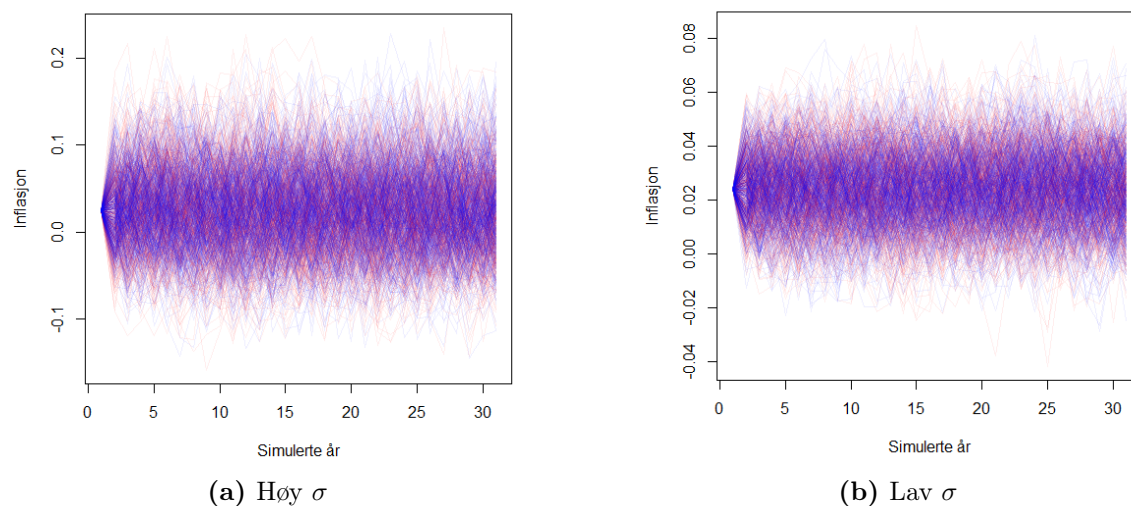
Startverdier	1	5	10	15	20	25	30
$\xi^i = 0.048$ og $\sigma^i = 0.040$	1.048	1.270	1.617	2.057	2.612	3.303	4.257
$\xi^i = 0.025$ og $\sigma^i = 0.020$	1.025	1.128	1.274	1.436	1.614	1.823	2.057
$\xi^i = 0.012$ og $\sigma^i = 0.010$	1.012	1.061	1.127	1.197	1.270	1.351	1.432

Tabell 4.1: Total inflasjonspåvirkning 30 år frem i tid med forskjellige startverdier.

Wilkie's verdier overestimerer risikoen i dagens marked.

Fra figur 4.3a ser vi at standardavviket på 0.04 vil fremprodusere en stor mengde tilfeller med negativ inflasjon, også kalt **deflasjon**. I utgangspunktet vil Wilkie-modellen gi en 17% sjanse for negativ inflasjon med de initielle verdiene til modellen, og med halvert startverdi blir antall år med deflasjon nesten 40%. Mengden med negative år er lite ønskelig og i tillegg svært usannsynlig, og derfor er det grunn til å redusere standardavviket kraftig. Dagens økonomi er for øyeblikket mye mer stabil sammenlignet med de siste 100 årene i sin helhet, og en mer akseptabel sjanse for

deflasjon er 5%. Denne prosentandelen tilsvarer at hvert 20. år resulterer med negativ inflasjon. Dette konstrueres ved å senke standardavviket til 0.0115, og mengden tilfeller med negativ inflasjon vil nå være mer realistisk i dagens økonomi. I løpet av de siste hundre årene det har kun forekommet deflasjon i Norge ved to perioder (1920-1933 og 2002-2003), men det er likevel ingen grunn til å anslå at det vil gå nye 80 år til neste periode. Inflasjonen er en av komponentene med stor innvirkning på rentenivået, og

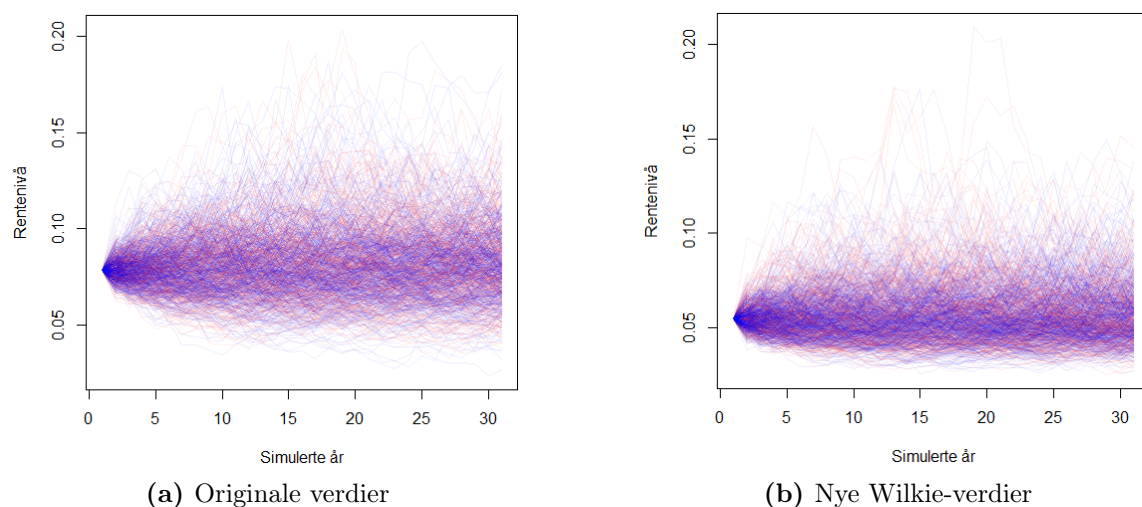


Figur 4.3: Plottet er konstruert av 1000 simuleringer av stokastiske inflasjonsverdier 30 år frem i tid.

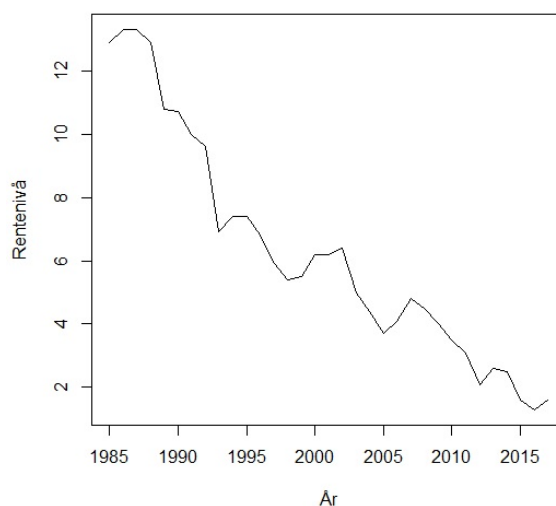
hvis vi tar i bruk de nye Wilkie-verdiene for inflasjonen, vil også rentenivået justere seg kraftig. Figur 4.3 viser forskjellen i inflasjonsnivå ved forskjellig standardavvik. Figur 4.3a med høy σ^i gir høy varians mellom simuleringene, og inflasjonsnivået ligger mellom -5% og 10%. Dette variasjonen beskriver en svært ustabil økonomi med store sjanser for deflasjon. Ved bruk av foreslått $\sigma^i=0.0115$ produseres figur 4.3b, hvor inflasjonsnivået varierer mellom 0.5% og 5%.

4.4.2 Modifikasjon av renteparametere

I forrige seksjon ble de originale Wilkie-verdiene for inflasjon endret for å tilpasse dagens pengepolitikk. Eftersom inflasjon har stor påvirkningskraft på renten, så vil en reduksjon i inflasjon også føre til en reduksjon i renten. De originale verdiene i Wilkie-modellen produserer en rente på 8.2%, og med nye inflasjonsverdier blir renten redusert til 5.7%. Renten Wilkie-modellen benytter seg av er renten til statsobligasjoner med 10 års løpetid, og 5.7% er relativt høyt til slikt bruk. Ut ifra den historiske utviklingen i Norge er renten for øyeblikket ekstremt lav, og dermed kan Wilkies rentenivå på 5.7% fremstå som en grov overestimering. Likevel er det kun de siste 20 årene at renten har beveget seg under dette nivået, og sett i historisk betraktning er det ikke urimelig. Valget av initialt rentenivå er ikke like selvfølgelig som valg av initialt inflasjonsnivå. EIOPA har satt en standard på 4.05% [9] for Norge i 2018, og derfor vil denne bli valgt til videre bruk i oppgaven. Den gjenspeiler ikke det historisk lave rentenivået vi for øyeblikket har i Norge, men er uansett nærmere virkeligheten



Figur 4.4: Plottet er konstruert av 1000 simuleringer av rentenivået 30 år frem i tid. Plott a) har de originale Wilkie-verdiene, og plott b) benytter nye inflasjonsverdier.

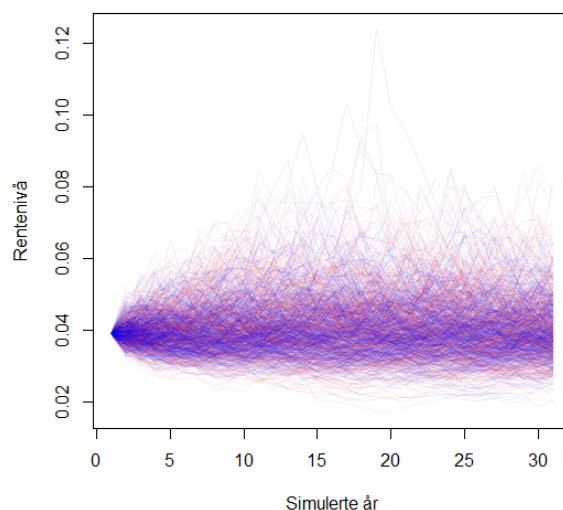


Figur 4.5: Historisk rente på statsobligasjoner med 10 års løpetid.

Startverdier	r_k
$\xi^i = 0.048$ og $\sigma^i = 0.040$	0.081
$\xi^i = 0.024$ og $\sigma^i = 0.020$	0.057
$\xi^i = 0.012$ og $\sigma^i = 0.010$	0.045

Tabell 4.2: Gjennomsnittlig rentenivå ved forskjellige inflasjonsscenario.

enn de 5.7 prosentene som produseres av de originale renteparameterne til Wilkie-modellen. Wilkie-modellen er nå justert ved å endre verdien på totalt 3 forskjellige parametere: σ^i , ξ^i og ξ^r . Hvor alle tre verdiene er modifisert for å tilfredsstille pengepolitiske mål. Alle de tre parametere i tabell 4.3 er redusert med 50% eller mer, som beskriver en tro på en mer stabil økonomi. Det er viktig å ta i betraktning at det ikke er en garanti for at dagens stabilitet i det vestlige pengemarkedet vil fortsette i



Figur 4.6: Gjennomsnittlig rentenivå er redusert til 4.05, som er EIOPAs satte rentenivå. Dette er renten på statsobligasjoner med 10 års løpetid.

	ξ^i	σ^i	ξ^r
Originale verdier	0.048	0.040	0.0305
Nye Verdier	0.024	0.0115	0.0150

Tabell 4.3: Oversikt over endringen i inflasjon- og renteparametere i Wilkie-modellen.

fremtiden. Ustabile statsledere og nye politiske avtaler kan snu opp ned på det vestlige markedet, noe som har forekommet flere ganger i løpet av de siste hundre årene internasjonalt.

4.4.3 Modifikasjon av aksjeparametere

Hittil er det kun inflasjon- og renteparametere som har blitt justert, og disse parametrene har store ringvirkninger i Wilkie-modellen. Alle avkastningene fra investeringene endrer seg ved en endring i disse verdiene, men likevel er enkelte av avkastningene urealistiske i dagens pengepolitikk. Aksjeavkastningene er fortsatt for høye med for stor risiko. Det er nødvendig å redusere startverdien til aksjeutbytte ξ^d samt standardavviket σ^d . Ideen med aksjeavkastningen er at den skal gjenspeile et indeksfond på ca 4-6% ettersom et slikt fond er stabilt og kun krever kurtasje på mellom 0-0.3%. Privatiserte fond er mer uforutsigbare og vil vanligvis ha en årlig avkastning opp mot 8-9%, men samtidig er kurtasjen mellom 1-2%. Endringene gir en gjennomsnittsav-

Parametere	ξ^d	σ^d
Gamle verdier	0.065	0.067
Nye Verdier	0.045	0.036

Tabell 4.4: Oversikt over endringen av parametere ved aksjeavkastning.

kastning på sirka 5%, som absolutt er realistisk i dagens marked.

4.5 Kalibrering mot Solvency II

Parameterendringene gjort tidligere i kapittelet er basert på pengepolitiske antagelser i Norge. Dette har lite å gjøre med sikkerheten Solvency II skal stå for. Antagelsen med at verst tenkelige scenario skal inntreffe kun 1 av 200 ganger er ikke implementert i den Norske pengepolitikken, og for å knytte Wilkie-modellen opp mot Solvency-direktivet er det derfor grunn til å kalibrere volatilitetsparametere slik at investeringene fluktuerer innenfor sjokkene satt av Solvency II. Inflasjonsparameterne er allerede bestemt, og kalibreringen vil ta for seg de fire volatilitetsparameterne til investeringene: $\sigma^y, \sigma^F, \sigma^r$ og σ^{py} .

Først er sjokkene til de forskjellige avkastningene nødt til å kalkuleres. Deretter simuleres årlige avkastninger 100 000 ganger. Av disse simuleringene summeres alle tilfellene som gir en avkastning lavere enn det solvencysjokket produserer. Hvis simuleringen resulterer i at fler enn 0.05% av de årlige avkastningene er lavere enn sjokket, vil det være behov for å endre på Wilkie-parameterne. Dette gjøres helt til 99.5% av avkastningene faller innenfor Solvency II kravene. Etersom porteføljen består av fire forskjellige investeringer, vil det derfor være behov for å kalkulere fire forskjellige sjokk. Sjokkene er gitt av EIOPA[7] og er laget for å produsere egne risikokapitaler til de ulike modulene SCR_{Equity} , SCR_{Spread} og $SCR_{Property}$. Kalkuleringen av disse sjokkene gjennomgås i kapittel 8.1.

Percentiler	Aksjer σ^y	Cash σ^F	Bond σ^r	Eiendom σ^{py}
Wilkie-verdier	0.16(90.4%)	0.18(92.2%)	0.19(99.5%)	0.12(98.7%)
95.0%	0.128	0.147	0.320	0.162
99.5%	0.079	0.037	0.190	0.108
99.9%	0.060	0.010	0.130	0.089

Tabell 4.5: Endring i sigma-verdier for investeringsmuligheter opp mot Solvency II. Percentiler for originale Wilkie-verdier i parentes.

4.6 Oversikt over parameterendring

Til slutt i kapittelet presenteres en oversikt over endringene gjort i Wilkie-modellen. Det er i oppgaven gjort to type modifikasjoner på Wilkie-parameterne: pengepolitiske endringer og Solvency II rettede kalibreringer. De pengepolitiske endringene angår først og fremst renten og inflasjonen i Wilkie-modellen, men aksjene blir også endret til et mer realistisk ståsted. De Solvency II baserte endringene er gjort med hensyn på investeringsmetodene som skal benyttes i del II av oppgaven.

Parametere	ξ^i	σ^i	ξ^r	ξ^d	σ^d
Gamle verdier	0.048	0.0400	0.0305	0.065	0.067
Nye Verdier	0.024	0.0115	0.0150	0.045	0.036

Tabell 4.6: Total oversikt over pengepolitiske endringer av parametere i Wilkie-modellen.

Endringen av parametere gir store utslag hos investeringavkastningene. De endelige avkastningene er en klar redusering fra de originale avkastningene. Dette er

Parametere	σ^y	σ^F	σ^r	σ^{py}
Gamle verdier	0.16	0.18	0.19	0.12
Nye Verdier	0.079	0.037	0.19	0.108

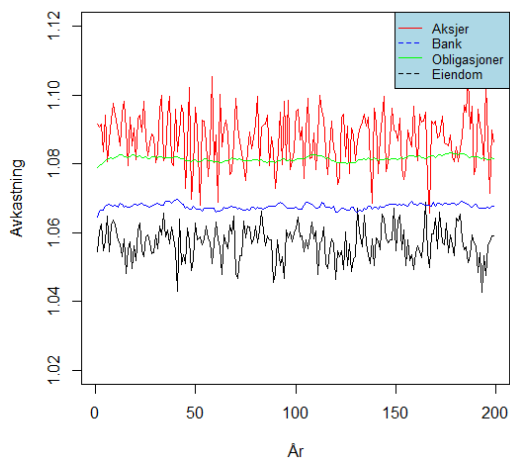
Tabell 4.7: Total oversikt over Solvency II baserte endringer av parametere i Wilkie-modellen. σ -verdiene tilhører: aksjer, bank, obligasjoner og eiendom.

realistisk ettersom norsk økonomi står svært stødig i forhold til andre deler av verden, og med en stor oljereserve vil ikke dramatiske nedgangsperioder forekomme innen nær fremtid.

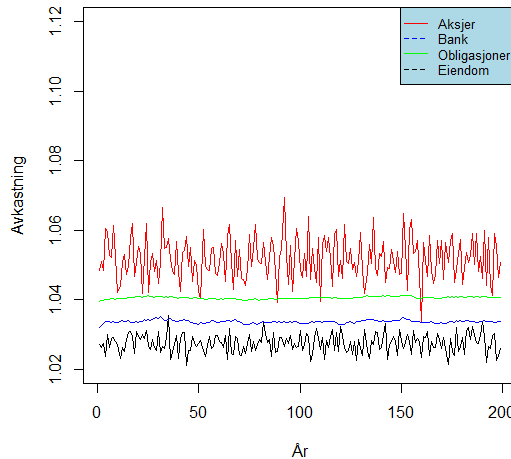
Avkastninger	Aksjer	Bank	Obligasjoner	Eiendom
Gamle verdier	8.73%	6.98%	8.19%	5.72%
Nye Verdier	4.95%	3.24%	4.05%	3.01%

Tabell 4.8: Oversikt over endringen til de ulike avkastningene.

Aksjeavkastningen er troverdig og gjenspeiler avkastningen som oppnås av et standard indeksfond. **Bankrenten** anno april 2018 er på sirka 2% og er lavere enn den som fastsettes i modellen, men det er ingen garanti for at denne renten skal holde seg stabil fremover. Derfor vil en bankrente på litt over 3% være en god tilnærming. **Obligasjonsrenten** som benyttes er den samme som fastsettes av EIOPA. Avkastningen til **eiendomutbytte** bør følge inflasjonskurven relativt tett og bør derfor ikke overstige 5% slikt det gjør i den originale Wilkie-modellen. Det ville være mer realistisk med et utbytte mellom 2.5-3.5%, dermed er den nye avkastningen absolutt innenfor et realistisk scenario. Figur 4.7b viser til lavere avkastninger og mindre



(a) Avkastning med originale Wilkie-verdier



(b) Avkastning med nye Wilkie-verdier

Figur 4.7: Sammenligning mellom avkastningene til aksjer, bank, obligasjoner og eiendom med nye og gamle parameterverdier under Wilkie-modellen. Plottene viser gjennomsnittlig avkastningsbevegelse over 1000 simuleringer

volatilitet hos de nye Wilkie-verdiene som skal bli brukt i del II av oppgaven.

Del II

Et forenklet forsikringselskap

Kapittel 5

Grunnlag for modellen

Det forenklete forsikringsselskapet skal illustrere endringen i solvens kapitalkrav (SCR) ved forskjellige scenario. Scenarioene vil bestå av forskjellige aldersfordelinger, dødelighetprediksjoner, og porteføljekonstruksjoner. Modellen inneholder to forskjellige kontraktstyper: pensjon- og dødsfallkontrakter. Utregningen av nåverdien til de ulike kontraktstypene er basert på ulike antagelser. Den demografiske gruppen av interesse er norske menn mellom 30 og 100 år, og dødelighetene er hentet fra Human Mortality Database. Den risikofrie renten som benyttes til diskontering er hentet fra EIOPA[9] 9. januar 2018.

5.1 Pensjonskontrakter

Modellen vil ta for seg en enkel pensjonkontrakt, med visse spesifikasjoner:

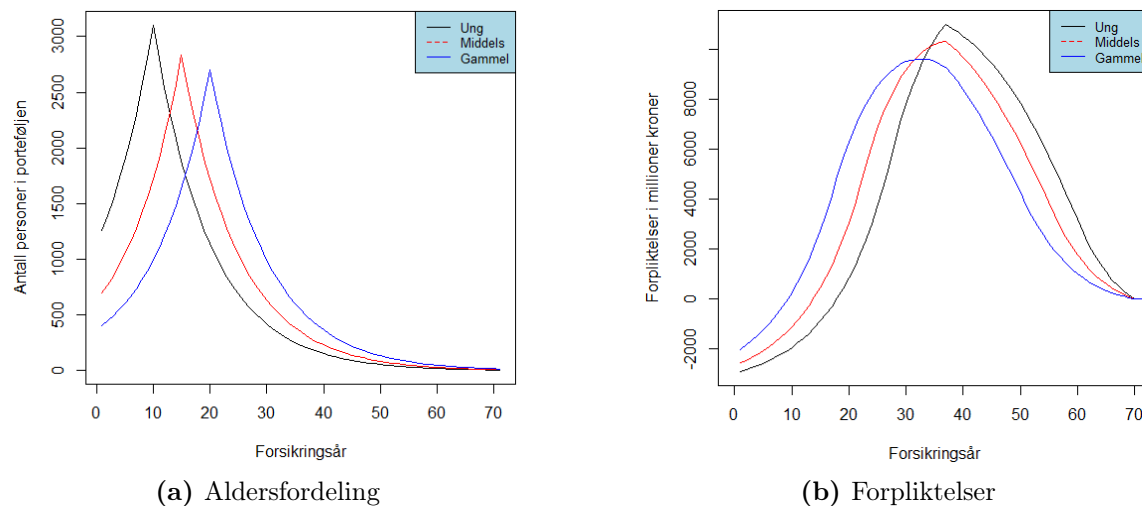
- Antar kontraktstart ved 30 år.
- Ikke lov med avtalefestet pensjon (ATP), og alle pensjoneres ved fylte 67 år.
- Pensjonskontrakter avsluttes ved død.
- Årlig pensjonsutbetaling settes til 250 000 kroner.
- Alle har like ekvivalenspremier og pensjonsutbetalinger. Kun justert ved inflasjon I_k .

Aldersfordeling

Beregningene av nødvendig risikokapital er sterkt preget av aldersfordelingen til polise-porteføljen. Ved en ung portefølje vil selskapet opparbeide seg en stor mengde ressurser i form av pensjonspremier fra kundene som kan brukes til investeringer. Dette gir selskapet muligheten til å redusere nødvendig risikokapital ettersom pensjonsutbetalingene ligger mange år frem i tid. Aldersfordelingen av forsikringstakere i porteføljen bestemmes av to konstanter, γ og μ . Disse konstantene bestemmer spredningen og størrelsen til hver aldersgruppe i porteføljen basert på den populasjonen som er til rådighet.

$$N_j = p_j \times \frac{N^{pop}}{\sum p_j} \quad \text{hvor} \quad p_j = e^{-\gamma|j-\mu|} \quad (5.1.1)$$

Parameteren μ beskriver hvor toppunktet til aldersfordelingen ligger, og parameteren γ beskriver tettheten rundt dette toppunktet. En gammel portefølje vil ha en høy μ , ettersom toppunktet har forskjøvet seg μ -år bortover. Ved høy γ vil større deler av populasjonen samle seg rundt toppunktet μ . Figur 5.1b illustrerer hvordan for-



Figur 5.1: I plot a) er bestemt alderen til den unge porteføljen med ($\gamma = 0.10, \mu = 10$), middels portefølje med ($\gamma = 0.10, \mu = 15$), og den gamle porteføljen er estimert ved ($\gamma = 0.10, \mu = 20$). Plott b) beskriver forpliktelsene til selskapet ved en ung, middels og gammel portefølje.

pliktelsene med en ung, middels og gammel portefølje utarter seg. Pengestrømmen strekker seg over 70 forsikringsår, og dette betyr at pensjonsutbetalingene starter i kontraktsår 37, som tilsvarer en alder på 67 år. Den unge porteføljen gir godt rom for selskapet til videre forvaltning av premie-ressursene, for så å utbetale det kundene har krav på ved pensjonsalder. Figuren viser også at den oppsamlede reserven til forsikringsselskapet bør være lettere tilgjengelig ved en gammel portefølje. Ved dette tilfellet er de fleste i porteføljen ferdige med å betale premier, og er snart klare til å gå av med pensjon. Dette vil føre til et stort antall utbetalinger fra forsikringsselskapet sin side, og for at alle skal få det de har krav på er det viktig at selskapet har forvaltet pengene godt.

Premie og utbetaling

Et kritisk punkt ved modellen er kalkuleringen av premie, samt årlig pensjonsutbetaling. I denne oppgaven har jeg satt årlige pensjonsutbetalinger til 250 000 kroner, noe som godt gjenspeiler dagens utbytte fra individuell pensjonssparing. Antagelsene går dermed ut på at en gjennomsnittlig pensjonkontrakt starter ved fylte år 30, og pensjonstakeren bidrar med en premie π per år. Dette resulterer i en utbetaling på 250 000 ved oppnådd pensjonsalder. Denne utbetalingen er realistisk og rettferdig i dagens marked, men vil kanskje være utdatert når kontraktene nærmer seg kontrakt-slutt. Derfor er det viktig å kalkulere en fremtidig pensjonsutbetaling hvor de 250 000 kronene ganges med kumulativ inflasjon. Denne inflasjonen hentes fra Wilkie-modellen i kapittel 4, og vil bidra til at utbetalingen på 250 000 og premien π stiger med ca 500% innen 70 år.

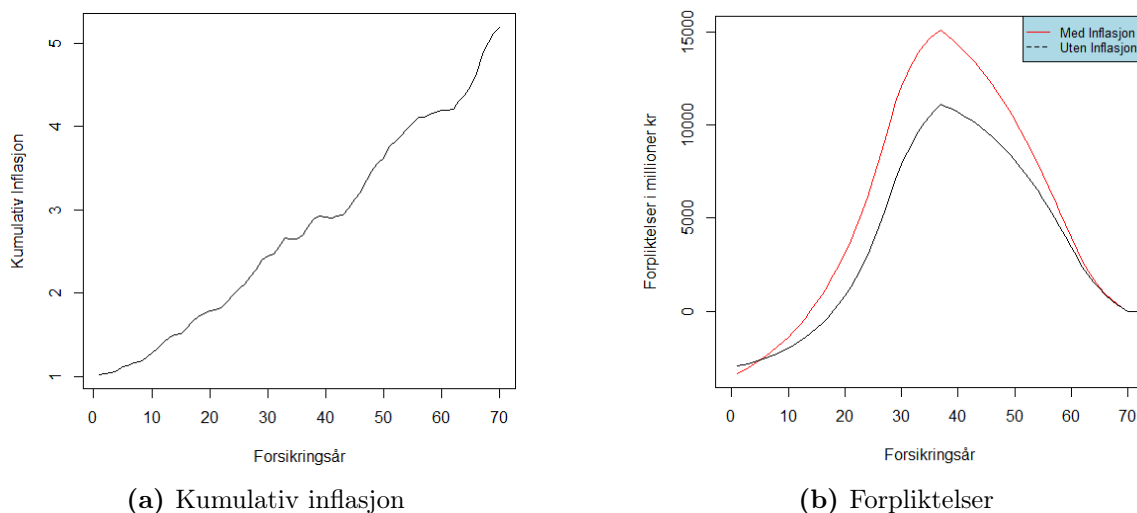
Forpliktelser

Hittil er størrelse og fordeling av forsikringpopulasjonen gitt. Neste steg for bedriften er å etablere en pengestrøm. Dette gjøres ved å samle årlige inntekter iform av ekvivalenspremier π , og sette de opp mot årlige utgifter i form av pensjonsutbetalinger s . Deretter summeres pengestrømmen opp imot aldersfordelingen N_j og levetidtabellen kP_j .

$$L_k = -\pi \sum_{j:j+k < l_r} N_{jk} + s \sum_{j:j+k \geq l_r} N_{jk} \quad \text{hvor} \quad N_{jk} = N_j \times kP_j \quad (5.1.2)$$

Pengestrømmen deles opp i to momenter. Kontraktakerene deles inn etter alder j og den totale kontraktsverdien summeres over k år. Ved $(j + k < l_r)$ vil kunden måtte betale en ekvivalenspremie π frem til oppnådd pensjonsalder $l_r = 67$. Deretter vil kunden få pensjonsutbetalinger ved tilfellet $(j + k \geq l_r)$ helt frem til kontraktakers død.

Den årlige pengestrømmen summeres kumulativt, slik at det er mulig å inspisere den totale pengebeholdningen for hvert enkelt år. Dette gjør det også enkelt å behandle ressursene ved asset liability management. L_k beskriver utviklingen til selskapets ressurser/forpliktelser inkludert startkapital og videre investeringer. Etersom pengestrømmen samles kumulativt, vil det siste tallet i listen være den totale summen selskapet forventes å sitte igjen med når alle kontraktene har utløpt, og ingen nye kunder legges til i porteføljen. Det er denne listen som skal diskonteres for å estimere **Best Estimate** fra ligning 2.2.4. Figur 5.2b viser effekten inflasjonen har på



Figur 5.2: Plot a) viser en eksempelvis simulering av den av kumulative inflasjonen over 70 år i Wilkie-modellen. Plott b) viser forpliktelsene med og uten inflasjon hos en ung portefølje.

forpliktelsene. For en ung kontraktportefølje vil selskapet tjene mer penger de første par årene, men deretter vil inflasjonen føre til at den økte pensjonsutbetalingen gir selskapet større forpliktelser. Inflasjonen bidrar til å øke summene inn og ut av selskapet, men helheten avslører at dette skaper et behov for en større kapitalreserve.

5.2 Dødsfallkontrakter

Dødsfallkontraktene er nødt til å behandles på ulik måte enn pensjonkontraktene, og vil også behøve visse spesifikasjoner:

- Antar kontraktstart ved 30, 35 og 40 år.
- Kontraktavtalen avsluttes kun ved død.
- Ulik kontraktstart gir ulike ekvivalenspremier.
- Utbetaling settes til 2 millioner kroner.
- Inn- og utbetalinger er justert med inflasjon I_k .

Aldersfordeling

Dødsfallkontrakter benytter samme formel for aldersfordeling som i 5.1.1, men parameterverdiene er ulike. Antall forsikringstakere vil være det samme, men toppunktet vil justeres til starten av kontrakten slik at $\mu = 0, 5, 10$. Grunnen til endringen er at en dødsfallkontrakt ikke spenner seg over like mange år som en pensjonkontrakt. Lengden på kontrakten er satt til 25 år, og dermed er det ikke grunn til å spre kontrakttakere like mye utover. Den unge unge porteføljen er satt til kontraktstart ved 30 år, middels er satt til 35 år og starttidspunktet til den gamle porteføljen er satt til 40 år. Det er ikke grunn til å sette en større skilnad mellom kontraktstartene ettersom det ikke er vanlig å tilby lange kontrakter til eldre kontrakttakere.

Premie og utbetaling

Premiene skal betales ved starten av hvert påbegynte år mens kontrakttakeren er i live. Ved død skal avtalt pårørende betales en avtalt utbetaling s . I dette selskapet er s satt til 2 millioner kroner. Ved tilfellet med pensjonskontrakter ble det brukt samme premie til alle tre aldersporteføljene. I tilfellet med dødsfallforsikringer vil en eldre portefølje måtte betale mer enn en ung portefølje ettersom sjansene for utbetaling er større.

Forpliktelser

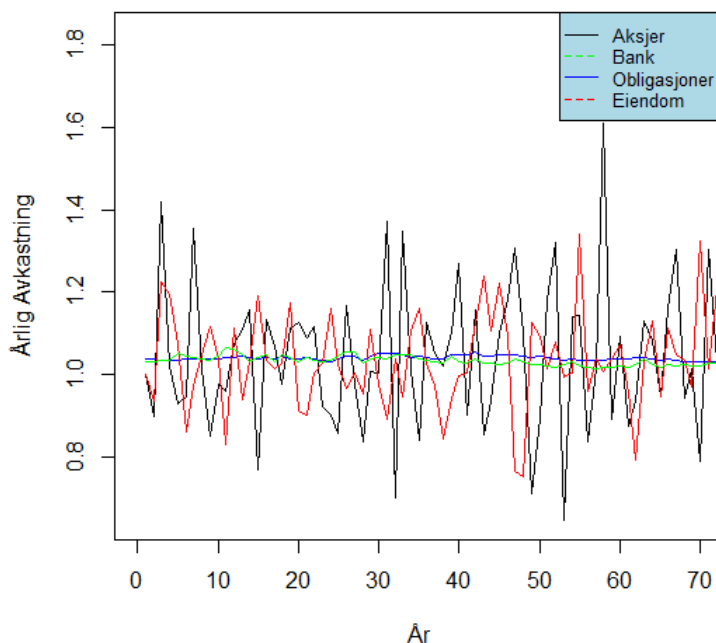
En dødsfallkontrakt vil spenne seg over $K=25$ år, hvor innbetalinger forekommer ved starten av året, og utbetalinger skjer på slutten av året.

$$L_k = -\pi \sum_{j:j+k \leq K-1} N_{jk}^i + s \sum_{j:(j+k+1) \leq K} N_{jk}^{ii} \quad (5.2.1)$$

Ved en dødsfallkontrakt er det nødvendig å introdusere en ny kombinasjon av aldersfordeling og levetidtabell. N_{jk} blir nå omskrevet til N_{jk}^i og N_{jk}^{ii} hvor det første leddet benytter seg av levetidtabellen ${}_k p_j$ og det andre ledder bruker dødelighetstabellen ${}_k q_j$.

$$N_{jk}^i = N_j \times {}_k p_j, \quad \text{eller} \quad N_{jk}^{ii} = N_j \times {}_k q_j \quad (5.2.2)$$

Inflasjonen vil ikke gjøre like store utslag i pengestrømmen som ved pensjonskontrakter. Grunnen til dette er at kontraktperioden i dødsfallkontrakter kun er på 25 år, og fra figur 5.2a tilsvarende dette en økning på sirka 200%.



Figur 5.3: Eksempel på simulering av årlige avkastninger hos de fire investeringsmetodene.

5.3 Asset Liability Management

Et av de mest essensielle valgene et forsikringselskap må ta, er hvordan de skal forvalte ressursene. Selskapet kan for eksempel investere i obligasjoner, aksjer, eiendom, eller avkastningen fra renter i banken. Gevinsten i å forvalte ressursene ligger i å ha større tilbakebetalingkraft til forsikringskundene, og videre kunne øke størrelsen på poliseporteføljen. Det å forvalte ressursene kommer ikke uten risiko, og derfor er det vanlig å investere aksjer, obligasjoner og eiendom i sikre marked. Et trygt marked vil gi lav, men samtidig trygg avkastning. Hvis ressursene forvaltes på en god måte vil selskapet opparbeide seg en stor reserve, og dermed møtekomme den nødvendige risikokapitalen som kreves.

For å risikominimere reservene er det gunstig å fordele investeringene utover flere områder. Dette gjøres ved å skape en bred forvaltningportefølje med forskjellige og uavhengige investeringer. Slik at en dårlig investering i eksempelvis aksjer kan veies opp av flere gode investeringer i eiendomsmarkedet. Figur 5.3 inneholder et predikert

Investeringer	Aksjer	Bank	Obligasjoner	Eiendom
Gjennomsnittlig avkastning	4.95%	3.25%	4.05%	3.01%

Tabell 5.1: Gjennomsnittlig avkastning hos de forskjellige investeringsmulighetene bestemt i kapittel 4 ved bruk av Wilkie-modellen.

eksempel på den årlige avkastningen til alle de fire investeringmetodene for fremtidige år. Det er klart at avkastningene til aksjer og eiendom er mye mer volatile enn avkastningene til bank og obligasjoner. Etter både å ha observert volatiliteten og gjennomsnittet til de forskjellige investeringene, er det god grunn til å konkludere med at eiendom er det minst gunstige stedet å plassere majoriteten av pengene. Eiendom

er sammen med aksjer svært volatilt, men der aksjene produserer en avkastning på nesten 5%, produserer kun eiendom en avkastning på sirka 3%. Derfor er ikke belønningen verdt den risikoen som tas ved å investere stort i eiendomsmarkedet. Selv om prosentandelen vil bli liten, er det å totalt utelukke eiendom ikke nødvendig, ettersom det er lurt å spre investeringsrisikoen ut over fler objekter.

Solvency II setter strenge regler for oppsettet av investeringsporteføljen til selskapet. Investeringsmulighetene deles inn i tre forskjellige kategorier etter hvor stor risiko de tilfører. Selskapets investeringsportefølje må inneholde minimum 50% av kategori 1, maksimum 50% av kategori 2 og maksimum 15% fra kategori 3. Grunnen til disse strenge kravene angående inndeling er minimering av risiko. Hvis et selskap hadde investert 100% av ressursene i høyrisiko-aksjer ville sjansen for å tjene store summer vært stor, men samtidig hadde det vært stor sjanse for å tape store summer. Det å tilføre slik risiko til selskapets ressurser er et av de viktigste scenarioene det nye direktivet vil forhindre. Dette handler om penger som skal betales tilbake til forsikringstakerne, og dermed skal ikke selskapet ha en volatil portefølje med en usikker fremtid.

Spørsmålet er: hvilke investeringer hører til under de ulike kategoriene? Et selskap vil normalt ikke ha en spesiell kategori for aksjer, ettersom stabiliteten og potensiell avkastning varierer. Stabile aksjer kan befinne seg under kategori 1 investeringer, og med en ung portefølje kan investeringene i utgangspunktet bestå av opp til 100% av aksjer. I tilfellet i denne oppgaven blir avkastningen til stabile aksjer godt fanget opp av avkastningen til obligasjoner og bankrenter. Derfor representeres aksjene med volatilt i kategori 3 for å få stor forskjell i investeringsmulighetene.

Kategori 1: Bank og Obligasjoner	Andel: Minimum 50%
Kategori 2: Eiendom	Andel: Maksimum 50%
Kategori 3: Aksjer	Andel: Maksimum 15%

Etter å ha observert avkastningskurvene i plottet over, samt tatt i bruk reglene direktivet har satt angående ALM, er det mulig å konstruere investeringsstrategier for videre bruk i oppgaven. Det skal testes ut tre forskjellige investerings sammensetninger:

- Et scenario med en ung portefølje, hvor selskapet kan prioritere langsiktige investeringer.
- Et scenario med en middels gammel portefølje, hvor alle investeringer settes midt imellom den unge og den gamle.
- Til slutt et scenario med en gammel portefølje, hvor selskapet ikke kan satse på langsiktige investeringer ettersom store utbetalinger skal gjøres i nær fremtid.

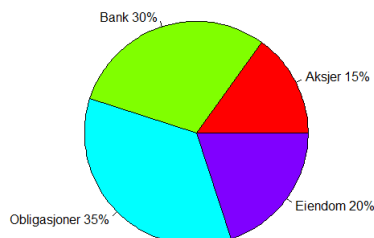
5.3.1 Scenario 1: Ung portefølje

Hvis kontraktporteføljen består av en ung portefølje har selskapet muligheten til å fokusere på langsiktig forvaltning, og det vil i teorien lønne seg å bruke en større andel av investeringene i aksjer. Aksjer er volatile, men over lang tid vil det gi større avkastning enn obligasjoner, bank og eiendom. Ettersom direktivet har lagt en øvre grense for risikofylte investeringer, så vil ikke porteføljen bestå av en majoritet av

aksjer. Ettersom aksjer gir best avkastning og investeringrisikoen blir mindre på lang sikt så skal scenario med en ung portefølje benytte seg av maksimum antall aksjer, nemlig 15%.

$$\omega_{aksjer} = 0.15 \quad \omega_{bank} = 0.3 \quad \omega_{obligasjoner} = 0.35 \quad \omega_{eiendom} = 0.2 \quad (5.3.1)$$

Den unge porteføljen vil ha toppunkt på 40 år, noe som etterlater 27 år med premie-



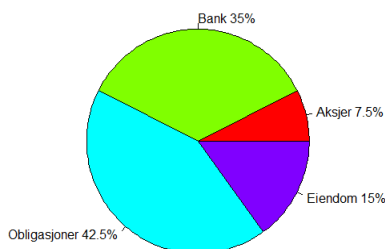
innbetalinger i gjennomsnitt.

5.3.2 Scenario 2: Middels portefølje

Resultatene vil vise en stor forskjell i pengestrøm mellom den unge og gamle aldersfordelingen ettersom den gamle vil inneholde overvekt av pensjonsutbetalinger i forhold til premieinnbetalinger. Ved sammenligning vil de to scenarioene gi en sterk kontrast mellom hverandre. Derfor kan det være en god ide å sammenligne disse resultatene med en aldersfordeling midt i mellom. Dette gir et bedre sammenligningsgrunnlag. En middelaldrende aldersfordeling vil ha $\mu=15$, som gir et toppunkt på 45 år. Fordelingen av investeringsalternativene vil også møtes på midten.

$$\omega_{aksjer} = 0.075 \quad \omega_{bank} = 0.35 \quad \omega_{obligasjoner} = 0.425 \quad \omega_{eiendom} = 0.15 \quad (5.3.2)$$

Formålet med denne porteføljen er å finne ut om stigningen i utgifter mellom den

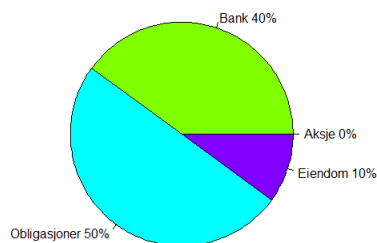


unge og gamle porteføljen vil være tilnærmet lineær. Hvis dette scenarioet har et BE og en SCR som befinner seg imellom de andre scenarioene vil det gi et godt bilde på viktigheten alder har å si for det endelige resultatet.

5.3.3 Scenario 3: Gammel portefølje

Hvis selskapet har en gammel portefølje vil det være risikofyllt å ha volatile investeringer. Forpliktelsene må betales innen nær fremtid, og derfor vil aksjer nedprioriteres i dette scenarioet. Dette gjør at andelen kategori 1 investeringer vil øke.

$$\omega_{aksjer} = 0.0 \quad \omega_{bank} = 0.4 \quad \omega_{obligasjoner} = 0.5 \quad \omega_{eiendom} = 0.1 \quad (5.3.3)$$



Denne porteføljen vil ha et toppunkt på 50 år, noe som etterlater 17 år med premieinnbetalinger før pensjonen kan innkasseres. I seksjon 3.5 estimerte Lee-Carter modellen at gjennomsnittlige levealder i 2060 vil være 84 år for norske menn, noe som gir like mange år med innbetalinger som utbetalinger. Etttersom ingen nye kunder blitt tatt med i beregningen vil dette garantert være den porteføljen som resulterer i flest utgifter for selskapet.

Kapittel 6

Sammenligninger av stresstester

Pengestrømmen innad i selskapet preges av dødelighetene til forsikringstakerne. Dette er lett å se fra figur 6.1, hvor selskapets forpliktelser plottes opp mot et dødelighet- og et langtlivsjokk. Et negativt dødelighetsjokk på -20% vil føre til større inntekter i form av premie de første årene i pengestrømmen, men samtidig vil det forekomme større pensjonsutbetalinger, og om ca 30 år vil de langtlivsjokkede forpliktelsene overstige de normale forpliktelsene. Til sammenligning ser vi at de dødelighetsjokkede forpliktelsene bringer inn færre penger i form av premie, men har også mindre pensjonsutgifter. Det vil bli evaluert tre ulike tilnærminger til utregningen av kapitalreserven SCR:

- Standard kapitalreserver med statiske dødeligheter
- Justert kapitalreserve med Lee-Carter dødeligheter, uten sjokk.
- Kombinasjon av sjokk og Lee-Carter justerte dødeligheter.

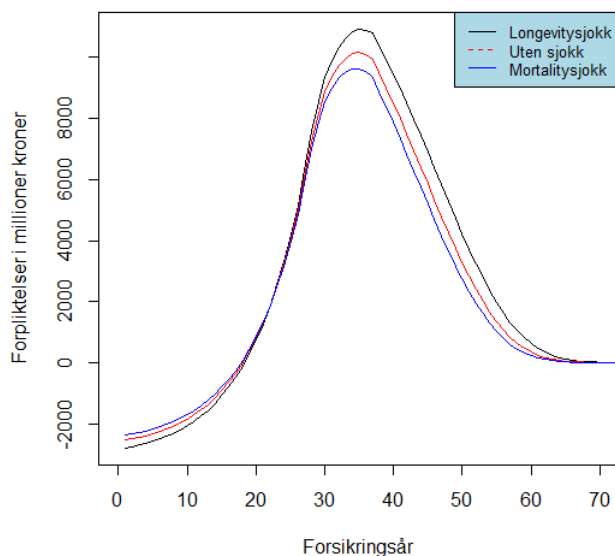
Disse tre tilnærmingene vil bli estimert som en 50/50 hedge, hvor andelen pensjon- og dødsfallkontrakter står for 50% hver. Etter inspisering av de forskjellige SCR-tilnærmingene, vil det testes ut forskjellige kontraktsammensetninger med varierende andel pensjon- og dødsfallkontrakter.

6.1 Standard utregning av kapitalreserve

Denne utregningen er gjort med statiske dødeligheter fra 2014, og ingen fremtidige endringer er tatt med i beregningen. Disse fremtidige endringene skal fanges opp sjokkene satt av EIOPA på henholdsvis 15- og -20%. Sjokkene skal dekke risikoen ved en økning eller reduksjon i dødelighetene. Først presenteres nåverdien til kontraktene med sjokkede dødeligheter i forskjellige porteføljer. Nåverdien til kontraktene trekkes fra de sjokkede verdiene for å kalkulere den nødvendige kapitalreserven.

$$SCR = BE^S - BE \quad , \quad S = -20\%, 15\% \quad (6.1.1)$$

Ved likt antall kontrakter vil det være stor forskjell på kapitalreserven som kreves mellom de to forskjellige kontraktstypene. Det er klart fra tabell 6.2 at en dødsforsikring medfører mye mindre risiko for selskapet enn en pensjonsforsikring. Et



Figur 6.1: Forpliktelsene til en ung portefølje plottet mot langtliv- og dødelighetsjokkede forpliktelsler.

Kontrakttype	Alder	BE	$BE^{-20\%}$	$BE^{15\%}$
Pensjon	Ung	4895.9	6870.0	3787.0
	Medium	10998.1	13128.9	9706.0
	Gammel	15987.6	18513.9	14527.1
Dødsfall	Ung	392.2	299.2	462.1
	Medium	716.4	559.5	832.5
	Gammel	1291.0	1023.9	1488.4

Tabell 6.1: Best estimate kalkuleringer med 50/50 pensjons- og dødsfallkontrakter med statistiske dødeligheter. Hver av kontraktene beregnes med 50 000 kontraktakere hver.

Kontrakttype	Alder	SCR_{Long}	SCR_{Mort}
Pensjon	Ung	1974.1	-1108.9
	Medium	2130.9	-1292.1
	Gammel	2526.3	-1460.5
Dødsfall	Ung	-93.0	69.8
	Medium	-156.9	116.2
	Gammel	-267.1	197.4

Tabell 6.2: Kalkulert solvenskapital til langtliv- og dødelighetmodulen med statistiske dødeligheter.

viktig punkt å presisere er fortegnen til de forskjellige konstruksjonene av risikokapital. SCR_{Long} og SCR_{Mort} ved pensjon- og dødsfallkontrakter vil aldri ha samme fortegn ettersom de profitterer på ulike endringer i dødelighet. En negativ endring i dødelighet gir profitt hos livsforsikringsselskapene ettersom forsikringstakerne lever lenger og utbetalinger ved dødsfall er redusert. For en ung portefølje resulterer dette i en $SCR_{Long} = -93.0$ millioner, som tilsier at det ikke kreves kapital for å dekke risikoen ved denne kontrakttypen under et negativt sjokk. Under det samme sjokket vil pensjonkontraktene medbringe en risikokapital på $SCR_{Long} = 1974.1$ millioner. Dette forteller oss at en nedgang i dødelighet vil være svært kostbart for

selskapet ettersom det medfører en større andel pensjonsutbetalinger. Det positive sjokket SCR_{Mort} beskriver risikoen ved økt dødelighet, og ved dette tilfellet medbringer ikke pensjonkontrakter risiko, men dødskontraktene vil produsere en risikokapital på $SCR_{Mort} = 69.8$ millioner.

$$SCR_{Life} = (69.8^2 + 2 \times (-0.25 \times 69.8 \times 1974.1) + 1974.1^2)^{1/2} = 1957.8 \quad (6.1.2)$$

Den tradisjonelle metoden med sjokkerte dødeligheter fra 2014 vil gi en svært stor SCR_{Long} som dominerer andelen solvenskapital. For en ung portefølje vil SCR_{Mort} kun stå for 3.4% av total solvenskapital, og en 50/50 hedge gir en risikoreduksjon på 0.8%. Dette samsvarer godt med korrelasjonen angitt av Eiopa på -0.25 ettersom risikoreduksjonen er 23% av andelen til SCR_{Mort} . Senere i oppgaven skal det vise seg at korrelasjonen ikke stemmer like godt ved andre tilfeller enn 50/50 portefølje-hedger.

6.2 Lee-Carter justert kapitalreserve

Tankegangen bak denne tilnærmingen er å utelukke fastsatte sjokk, og erstatte de med fremtidige antagelser om levealder. Antagelsene er gjort ved benyttelse av Lee-Carter modellen. Utregningen av SCR_{Long} foregår på lik måte som tidligere ved å trekke standard BE fra en sjokket BE slik at: $SCR_{Long} = BE^{Lee-Carter} - BE$. Grunnen til denne tilnærmingen er at vi er ute etter risikoen ved langt liv, og det er allmenn kjent at en dynamisk modell vil predikere økt fremtidig levealder under norske forhold. Ved utregningen av SCR_{Mort} er det behov for å finne risikoen ved økt dødelighet, og derfor må ligningen omformuleres til: $SCR_{Mort} = BE - BE^{Lee-Carter}$. Denne omformuleringen er nødvendig ettersom verdien av dødsfallkontrakter ikke øker ved bedre levevilkår. Derfor er vi heller ute etter det verst tenkelige scenarioet, som vil være dagens dødeligheter hvis dødelighetene synker lineært fremover. Argu-

Kontrakttype	Alder	BE	$BE_{Lee-Carter}$
Pensjon	Ung	4895.9	17109.2
	Medium	10998.1	26823.0
	Gammel	15987.6	34616.0
Dødsfall	Ung	392.2	291.3
	Medium	716.4	569.3
	Gammel	1291.0	1040.0

Tabell 6.3: Best estimate kalkulert med både statiske og dynamiske dødeligheter.

mentet for å erstatte Lee Carter estimering med sjokkene til EIOPA holder ikke mål. Forskjellene i estimert levealder og nåverdien til kontraktene er veldig stor, som gir en urimelig kapitalreserve. Dagens dødeligheter og dødelighetene Lee-Carter modelleringen produserer fremover i tid blir etterhvert svært forskjellige. Dette skyldes at pensjonskontrakter strekker seg over 70 år, og på denne tiden vil dødeligheter reduseres kraftig. Risikokapitalen som kreves ved dødskontrakter er absolutt rimelig, og dette skyldes at kontraktene kun strekker seg over 25 år. Verdien av pensjonkontraktene er så forskjellige at solvenskapitalen blir katastrofalt høy. Forskjellen mellom pensjonkontraktene hos den statiske og dynamiske modellen overstiger sjokket på

Kontrakttype	Alder	SCR
Pensjon	Ung	12213.3
	Medium	15824.9
	Gammel	18628.4
Dødsfall	Ung	100.9
	Medium	147.1
	Gammel	251.0

Tabell 6.4: Kalkulert solvenskapital hvor hver av de dynamiske nåverdiene fungerer som sjokket nåverdi.

−20% i så stor grad at ideen med å bytte ut sjokket med dynamiske dødeligheter kan forkastes.

6.3 Lee-Carter kombinert med Sjokk

Forslaget rundt et rent bytte mellom sjokkede og dynamiske dødeligheter ble forkastet i forrige del-seksjon, og derfor foreslås heller en mer realistisk fremgangsmåte. Isteden for å kun erstatte sjokket med en Lee-Carter estimering, vil nå hele basisen i standardformelen benytte dynamiske dødeligheter.

$$SCR^{Lee-Carter} = BE_{LC}^S - BE_{LC} \quad \text{hvor} \quad S = 15\%, -20\% \quad (6.3.1)$$

Kapitalreserven vil nå bli kalkulert med dødeligheter kalkulert av Lee-Carter modellen som basis, som vil gi adskillig høyere levealder. Derfra vil sjokkene bli lagt til de allerede endrede dødelighetene slik at $q^S = q_k \times S$ nå blir skrevet som $q_{Lee-Carter}^S = q_k^{LC} \times S$. Nøyaktigheten bak en slik tilnærming er avhengig av kvaliteten til Lee-Carter estimeringen. De dynamiske dødelighetene er kalkulert med hensyn på at dødelighetene vil endre seg i fremtiden ved å følge den pågående trenden de siste årene. I tillegg til denne prediksjonen vil sjokkene fungere som en positiv/negativ margin på 15/−20%, slik at sannsynligheten for å treffe den reelle fremtidige dødeligheten er mye større enn å kun legge til et fastsatt sjokk til statiske dødeligheter.

Først presenteres BE for både levetid- og dødelighetsjokkede kontrakter med forskjellige porteføljer. Etter kalkulering av BE og sjokkene BE_{Mort}^S og BE_{Long}^S , settes

Kontrakttype	Alder	BE_{LC}	$BE_{LC}^{-20\%}$	$BE_{LC}^{15\%}$
Pensjon	Ung	17109.2	18052.2	16285.7
	Medium	26823.0	27934.9	25890.3
	Gammel	34616.0	35856.8	33557.4
Døds	Ung	291.3	217.3	346.7
	Medium	569.3	440.6	664.8
	Gammel	1040.0	819.6	1206.1

Tabell 6.5: Kalkulert nåverdi til pensjon- og dødskontrakter med dynamiske dødeligheter.

disse sammen til den ønskede kapitalreserven ved ligning 6.3.1. Ved den unge porteføljen står SCR_{Mort} kun for 5.5% av den totale solvenskapitalen som skapes av SCR_{Mort} og SCR_{Long} .

$$SCR_{Life}^{LC} = (55.4^2 + 2 \times (-0.25 \times 55.4 \times 943.0) + 943.0^2)^{1/2} = 930.7 \quad (6.3.2)$$

Kontrakttype	Alder	SCR_{Long}^{LC}	SCR_{Mort}^{LC}
Pensjon	Ung	943.0	-823.5
	Medium	1111.9	-932.7
	Gammel	1240.8	-1058.6
Døds	Ung	-74.1	55.4
	Medium	-128.7	95.5
	Gammel	-220.4	166.1

Tabell 6.6: Kalkulert solvenskapital med dynamiske dødeligheter.

Ligning 6.3.2 viser korrelasjonseffekten mellom langtliv- og dødelighetmodulen, og den resulterer i en nedgang i risikokapital fra 943.0 til 930.7 millioner, som tilsier en forskjell på 13 millioner kroner. Dette betyr at ved å hedge 50/50 pensjon- og livskontrakter vil risikokapitalen reduseres med 1.3%. Dette er nesten det dobbelte av reduksjonen som ble gjort i modellen med statiske dødeligheter, som skyldes av at SCR_{Long} er adskillig lavere.

6.4 Dynamiske vs statiske dødeligheter

Ulike dødeligheter vil resultere i ulike pengestrømmer. Innbetalingene til selskapet i form av premier vil ha svært forskjellig størrelse. Eksempelvis pensjonpremien til en ung portefølje med statiske dødeligheter produserer en årlig ekvivalenspremie på 43 627 kroner, og med dynamiske dødeligheter produseres en årlig ekvivalenspremie på 72 540 kroner. Dette er en enorm forskjell, og vil gi store utslag i pengestømmen til selskapet. Tabell 6.7 viser sammenligningen mellom risikokapitalene produsert med statiske- og dynamiske dødeligheter. Det er helt klart at kalkuleringen av SCR med

Alder	SCR_{Long}	SCR_{Long}^{LC}	SCR_{Mort}	SCR_{Mort}^{LC}
Ung	1974.1	943.0	69.8	55.4
Medium	2130.9	1111.9	116.2	95.5
Gammel	2526.3	1240.8	197.4	166.1

Tabell 6.7: Solvenskapitalen til langtliv- og dødelighetmodulen kalkulert med både statiske og dynamiske dødeligheter.

statiske dødeligheter produserer en større nødvendig risikokapital enn kalkuleringen med dynamiske dødeligheter. Dette betyr at sjokkene gir større utslag hos statiske dødeligheter, men hva er grunnen til dette? Sjokkene på henholdsvis 15% og -20% legges til dødelighetene i de ulike modellene. Den statiske modellen baserer seg på dødeligheter fra svært nylige målinger. Disse dødelighetene er høye sammenlignet med prediksjonene gjort med Lee-Carter modelleringen. Se for deg et scenario hvor statiske dødeligheter oppgir at sannsynligheten for at individ skal dø i sitt 80-ende år er 10%. Dynamiske dødeligheter setter sannsynligheten på dette til 6%. Hvis sjokkene tilføres disse dødelighetene vil sannsynlighetene gi to utfall: 10% \rightarrow [8, 11.5] og 6% \rightarrow [4.5, 6.9]. Disse to intervallene vil ha en størrelse på henholdsvis 3.5- og 2.4%. Det er dermed tydelig at dynamiske dødeligheter vil ha et mindre handlingsrom med 2.4%, og vil dermed skape mindre forskjeller mellom BE og BE^S , som igjen resulterer i

en mindre SCR. Scenarioet som Lee-Carter modellen produserer er svært troverdig, for all fornuft og tilgjengelig data tilsier at dødelighetene i Norge vil synke i årene fremover. Denne nedgangen vil også høyst sannsynlig overstige de -20% som longevity sjokket skal beskytte mot. Derfor vil kombinasjonen av en god prediksjonmodell og et sikkerhetsnett i form av et sjokk være essensielt i utregningen av mer realistiske solvenskapitalkrav.

Aldersfordelingene skiller også stort i SCR. Tabell 6.7 viser en klar sammenheng mellom alder på porteføljen og nødvendig solvenskapital. Forskjellen skyldes av det samme som med statiske og dynamiske dødeligheter, hvor høyere dødelighet gir større utslag ved sjokkene. Stigende alder bidrar til større risiko ettersom det forekommer fler utbetalinger i nær fremtid. Dette legger et større press på selskapet for å opparbeide nødvendig risikokapitalreserve. Er det riktig å sjokke en gammel portefølje på samme måte som en ung portefølje? Den gamle porteføljen vil ikke oppleve den samme utviklingen i dødelighet, og derfor vil konstante sjokk på -20 og 15% være overflødig. Lee-Carter modellen predikerer gradvis lavere dødeligheter, noe som betyr at en ung portefølje vil ha en lavere dødelighetkurve enn en gammel portefølje. Sjokket vil dermed utgjøre en mindre forskjell ved unge enn gamle.

6.5 Intern stressmodell

Korrelasjonfaktoren på -0.25 i standardmodellen kan virke upresis og noe tilfeldig laget. Den tar ikke høyde for forskjellige aldersfordelinger, og porteføljestørrelser. En portefølje bestående av 50/50 pensjons og dødskontrakter vil bli skjevt fordelt ettersom pensjonkontraktene er av mye større verdi, og kontraktene er spredt utover et større tidsperspektiv. For å unngå korrelasjonen i standardmodellen vil jeg benytte en ny standardformel som hedger de forskjellige kontraktene sammen ved et maksimumsprinsipp.

$$SCR_{Intern} = \max(BE_{-20\%}^{Pensjon} + BE_{-20\%}^{Død}, BE_{15\%}^{Pensjon} + BE_{15\%}^{Død}) - (BE^{Pensjon} + BE^{Død}) \quad (6.5.1)$$

Ligning 6.5.1 fokuserer på det verst tenkelig scenarioet for forsikringsselskapet ved en endring i dødelighet. Dermed unngås tilfellet hvor begge sjokkene tas i betraktning ved utregning av kapitalreserven. Den interne modellen gir helt klart en lavere kapi-

Alder	SCR_{Life}	SCR_{Intern}	Reduksjon	SCR_{Life}^{LC}	SCR_{Intern}^{LC}	Reduksjon
Ung	1957.8	1881.1	3.8%	930.7	869.0	6.6%
Medium	2104.9	1973.9	6.2%	1091.9	983.2	10.0%
Gammel	2484.3	2259.2	9.1%	1210.0	1020.4	15.7%

Tabell 6.8: Forskjellen i hedgingeffekt mellom Solvency II og den interne modellen.

talreserve enn modellen satt av Solvency II. Grunnen til dette er at solvency-modellen ikke belønner porteføljer med god spredning. Det er ikke mulig at dødeligheten både stiger og synker samtidig, og derfor velger solvensdirektivet å gange inn en negativ korrelasjon på -0.25 inn i utregningen av SCR ved standardformelen (2.2.10). Hvorfor kunne man ikke istedet bruke det verst tenkelige scenarioet av en utvikling i

dødeligheten? Den interne modellen bruker det sjokket som produserer størst BE for selskapet istedet for å legge sammen resultatet av begge sjokkene. Denne metoden virker mer fornuftig, og absolutt mer gunstig for selskapene. Denne metoden utelukker korrelasjonsleddet, og både SCR_{Mort} og SCR_{Long} kan kalkuleres samtidig. Tabell 6.8 viser at reduksjonen stiger med alder, og at Lee-Carter estimeringen nesten tilbyr en dobbelt så stor reduksjon ved bruk av den interne stressmodellen.

6.6 Hedgesammensetninger

Selskaper vil normalt sett ikke ha en nøyaktig 50/50 hedge mellom pensjon- og dødsfallkontrakter. Derfor er det relevant å kalkulere forskjellige porteføljesammensetninger for å se om det gir store utslag ved utregning av solvenskapital.

6.6.1 Pensjon/Liv 75/25

Først vil jeg se nærmere på en 75/25 hedge, hvor sammensetningen består av 75% pensjonkontrakter og 25% dødskontrakter. Basert på størrelsen av risikoen ved pensjonkontrakter vil denne sammensetningen sannsynligvis produsere en SCR_{Life} tett opptil SCR_{Long} . Økningen i pensjonkontrakter har et klart utslag på størrelsene til

Kontrakt	Alder	BE	$BE^{-20\%}$	$BE^{15\%}$	BE_{LC}	$BE_{LC}^{-20\%}$	$BE_{LC}^{15\%}$
Pensjon	Ung	14718.5	17391.7	12989.3	35071.3	36596.8	34088.5
	Medium	21436.6	24727.6	19519.6	45812.5	47535.0	44553.9
	Gammel	27669.8	31403.9	25450.4	55499.0	57531.6	54100.3
Døds	Ung	156.4	108.2	191.9	104.0	65.4	132.7
	Medium	321.0	241.8	379.6	245.9	180.9	294.8
	Gammel	610.3	475.9	709.5	483.9	372.3	566.8

Tabell 6.9: Nåverdier til kontraktene. Pensjonskontraktene har en populasjon på 75 000, og dødskontraktene har en populasjon på 25 000.

BE, som nå er mye større enn tidligere. Dette skyldes at pensjonskontrakter har større verdi. I motsetning er BE til dødskontraktene redusert ettersom antall kontrakter også er redusert. Ved dette tilfellet er det et klart flertall pensjonkontrakter

Kontrakt	Alder	SCR_{Long}	SCR_{Mort}	SCR_{Life}	SCR_{Long}^{LC}	SCR_{Mort}^{LC}	SCR_{Life}^{LC}
Pensjon	Ung	2673.2	-1729.2	2664.5	1525.5	-982.8	1518.6
Døds		-48.2	35.5		-38.6	28.6	
Pensjon	Mid	3291.0	-1917.0	3276.8	1722.5	-1258.6	1710.9
Døds		-79.2	58.6		-65	48.9	
Pensjon	Gam	3734.1	-2219.4	3710.5	2032.6	-1398.7	2013.5
Døds		-134.4	99.3		-111.6	82.9	

Tabell 6.10: Solvenskapitalen til langtliv- og dødelighetmodulen slås sammen til SCR_{Life} for både statiske og dynamiske dødeligheter.

i porteføljen, og dermed bør den totale risikoen tilknyttes tett opp til risikoen hos pensjonkontraktene. Kalkuleringen i tabell 6.10 støtter denne teorien, og SCR_{Life} er

kun nedjustert 0.33-0.43% fra langtlevrisikoen SCR_{Long} . Dette støttes også av modellen med dynamiske dødeligheter som i dette tilfellet kun nedjusterer solvenskapitalen med 0.45-0.63%. Solvency II sin metode for utregning av solvenskapital er god ved slike porteføljeforhold, ettersom det ikke er en vesentlig fordeling av risiko i porteføljen. Fokuset ligger hovedsaklig ved pensjonkontraktene, med rettmessig grunn. Fra tabell

Alder	SCR_{Life}	SCR_{Intern}	Reduksjon	SCR_{Life}^{LC}	SCR_{Intern}^{LC}	Reduksjon
Ung	2664.5	2625.0	1.5%	1518.6	1486.9	2.1%
Medium	3276.8	3211.8	2.0%	1710.9	1657.5	3.1%
Gammel	3710.5	3599.7	3.0%	2013.5	1921.0	4.6%

Tabell 6.11: Oversikt over reduksjonen som tilbys ved å benytte den interne modellen.

6.11 ser vi at SCR_{Intern}^{LC} gir en reduksjon på mellom 2.1-4.6 % i forhold til SCR_{Life}^{LC} . Dette gir en total reduksjon fra SCR_{Long}^{LC} på mellom 2.6-5.5%. Dette er en 5 ganger større reduksjon enn det Solvency II tilbyr. Selv om den interne modellen tilbyr en større reduksjon er det ingen grunn til å sette spørsmålstegn ved reduksjonen som tilbys av Solvency II ettersom denne hedgen har en klar majoritet med pensjonkontrakter. Risikokapitalen som kreves fra dødelighetsmodulen ligger mellom 1.3-3.4% av den totale risikokapitalen, og dette støttes ved reduseringene mellom 0.33-0.62%. Neste eksempel er en 25/75 fordeling, og her skal vi se at solvency II metoden ikke gir like gode og rettfærdige resultater.

6.6.2 Pensjon/Liv 25/75

Antagelsen før kalkulering er at den store andelen dødsfallkontrakter vil redusere risikokapitalen mer enn porteføljesammensetningen på 75/25. Med majoritet av dødsforsikringskontrakter bør et selskap bli belønnet med en kraftig redusering i nødvendig risikokapital. Denne porteføljesammensetningen gir et mye større utslag modellen seg

Kontrakt	Alder	BE	$BE^{-20\%}$	$BE^{15\%}$	BE_{LC}	$BE_{LC}^{-20\%}$	$BE_{LC}^{15\%}$
Pensjon	Ung	-18089.1	-17109.8	-18729.3	-3897.0	-3450.1	-4237.9
	Medium	-6505.2	-5334.4	-7261.7	7028.2	7605.3	6619.5
	Gammel	3203.5	4556.7	2328.1	12770.6	13499.3	12243.4
Døds	Ung	625.6	487.3	730.0	475.6	365.3	558.2
	Medium	1109.2	876.4	1284.1	890.6	697.7	1034.9
	Gammel	1969.6	1569.3	2268.1	1596.5	1263.7	1846.0

Tabell 6.12: Nåverdien til pensjon- og dødskontrakter for statiske og dynamiske dødeligheter. Pensjonskontraktene har en populasjon på 25 000, og dødskontraktene har en populasjon på 75 000.

imellom. SCR_{Life} nedjusterer risikoen med 2.1-3.1%, mens den dynamiske modellen SCR_{Life}^{LC} nedjusterer risikoen med 2.7-3.0%. I en portefølje bestående av 1/4 pensjonkontrakter belønner altså Solvency II direktivet selskaper med en risiko-lettelse på under 3.0%. Selv om risikoen til 3/4 av kontraktene kun produserer en risikokapital på 82.6 millioner for en ung portefølje, vil Solvency II be om en garanti tilsvarende 433.7 millioner. Dette skildrer hvor dårlig selskaper blir belønnet for å ha en god spredning av kontrakter i porteføljen. Ettersom en økning og nedgang i dødelighet ikke kan forekomme samtidig burde en spredt portefølje gi en større reduksjon i SCR enn det

Kontrakt	Alder	SCR^{Long}	SCR^{Mort}	SCR^{Life}	SCR_{LC}^{Long}	SCR_{LC}^{Mort}	SCR_{LC}^{Life}
Pensjon Dødsfall	Ung	979.3 -138.3	-640.3 104.4	958.5	446.9 -110.3	-340.9 82.6	433.7
Pensjon Dødsfall	Mid	1170.8 -232.8	-756.5 174.9	1139.7	577.1 -192.9	-408.7 144.3	538.1
Pensjon Dødsfall	Gam	1353.2 -400.3	-875.4 298.5	1310.8	728.7 -332.8	-527.2 249.5	708.8

Tabell 6.13: Solvenskapitalen til langtliv- og dødelighetmodulen slås sammen til SCR^{Life} for både statiske og dynamiske dødeligheter.

Solvency II tilfører. Den interne modellen tilbyr en mye bedre hedging-effekt. Tabell

Alder	SCR_{Life}	SCR_{Intern}	Reduksjon	SCR_{Life}^{LC}	SCR_{Intern}^{LC}	Reduksjon
Ung	958.5	841.0	12.3%	433.7	336.6	22.4%
Medium	1139.7	938.0	17.7%	538.1	384.2	28.6%
Gammel	1310.8	952.9	27.3%	708.8	395.9	44.1%

Tabell 6.14: Oversikt over reduksjonen som tilbys ved å benytte den interne modellen.

6.14 viser at den interne modellen reduserer SCR_{Life}^{LC} ytterligere 22.4-44.1%. Dette betyr at reduksjonen fra SCR_{Long}^{LC} til SCR_{Intern}^{LC} er på hele 24.7-45.7%, som er 15 ganger så stor som den som tilbys fra standardformelen. Dette er svært gunstige tall for forsikringsselskapet, og reduksjonen fremstår noe ekstrem ettersom dødskontraktene bidrar med 15.0-25.5% av den totale risikokapitalen. Det ville vært mer rettferdig med en reduksjon midt imellom det SCR_{Life}^{LC} og SCR_{Intern}^{LC} tilbyr. Gjennomsnittlig reduksjon mellom disse modellene vil være på 13.7-24.4%, noe som fremstår mer rettferdig. For videre undersøkelser hadde det derfor vært interessant å teste ut en kombinasjon mellom både den tradisjonelle og interne modellen ved utregning av SCR.

6.6.3 Hedge-sammenligning

Hedge	Alder	SCR_{Long}^{LC}	SCR_{Mort}^{LC}	SCR_{Life}^{LC}	Reduksjon	SCR(Pensjon/Død)
50/50	Ung	943.0	55.4	930.7	1.1%	95.5%/5.5%
	Medium	1111.9	95.5	1091.9	1.8%	92.1%/7.9%
	Gammel	1240.8	166.1	1210.0	2.5%	88.2%/11.8%
75/25	Ung	1525.5	28.6	1518.6	0.5%	98.2%/1.8%
	Medium	1722.5	48.9	1710.9	0.7%	97.2%/2.8%
	Gammel	2032.6	82.9	2013.5	0.9%	96.1%/3.9%
25/75	Ung	446.9	82.6	433.7	3.0%	84.4%/15.6%
	Medium	577.1	144.3	558.8	3.2%	80.0%/20.0%
	Gammel	728.7	249.5	708.8	2.8%	84.5%/25.5%

Tabell 6.15: Oversikt over hedgingeffekten til de ulike porteføljene med dynamiske dødeligheter.

Tabellene 6.16 og 6.15 viser at reduksjonen av risikokapital er størst med Lee-Carter modellen (nesten dobbelt så stor). Likevel er belønningen ved risikominimering

Hedge	Alder	SCR_{Long}	SCR_{Mort}	SCR_{Life}	Reduksjon	SCR(Pensjon/Død)
50/50	Ung	1974.1	69.8	1957.8	0.8%	96.6%/3.4%
	Medium	2130.9	116.2	2104.9	1.2%	94.8%/5.2%
	Gammel	2526.3	197.4	2484.3	1.7%	92.8%/7.2%
75/25	Ung	2673.2	35.5	2664.5	0.3%	98.7%/1.3%
	Medium	3291.0	58.6	3276.8	0.4%	98.3%/1.7%
	Gammel	3734.1	99.3	3710.5	0.6%	97.4%/2.6%
25/75	Ung	979.3	104.4	958.5	2.1%	90.4%/9.6%
	Medium	1170.8	174.9	1139.7	2.6%	87.0%/13.0%
	Gammel	1353.2	298.5	1310.8	3.1%	81.9%/18.1%

Tabell 6.16: Oversikt over hedgingeffektken til de ulike porteføljene med statiske dødeligheter.

er svært liten. Lee-Carter modellen gir en reduksjon på 3% ved en 25/75 hedge selv om SCR_{Mort}^{LC} består av 16% av total andel risikokapital. Forholdet mellom risikominimering og prosentandelen med SCR_{Mort}^{LC} fremstår lite rettferdig ved dette scenarioet. Pensjonkontrakter har størst verdi, og vil også medføre størst risiko, men i en 25/75 hedge bør risikokapitalen likevel reduseres betraktelig. Ettersom majoriteten av kontraktene er dødsfallkontrakter som igjen utgjør 16% av den totale risikokapitalen, så burde reduksjonen være langt større enn kun 3%. En økning i dødeligheter kan ikke forekomme samtidig som en reduksjon i dødeligheter, og derfor bør SCR_{Mort}^{LC} og SCR_{Long}^{LC} motvirke hverandre i større grad. Dette betyr at standardformelen ikke gir god nok belønning til selskap som velger å øke andelen dødsfallkontrakter. Risiko-

Hedge	Alder	SCR_{Life}	SCR_{Intern}	SCR_{Life}^{LC}	SCR_{Intern}^{LC}
50/50	Ung	0.8%	4.7%	1.1%	7.8%
	Medium	1.2%	7.7%	1.8%	11.6%
	Gammel	1.7%	10.6%	2.5%	17.8%
75/25	Ung	0.3%	1.9%	0.5%	2.5%
	Medium	0.4%	2.4%	0.7%	3.8%
	Gammel	0.6%	3.6%	0.9%	5.5%
25/75	Ung	2.1%	14.1%	3.0%	24.7%
	Medium	2.6%	19.9%	3.2%	33.4%
	Gammel	3.1%	29.6%	2.8%	45.7%

Tabell 6.17: Oversikt over reduksjonen i risikokapital fra SCR_{long} og SCR_{long}^{LC} til de ulike modellene.

minimeringen vil i denne oppgaven alltid starte ved risikoen hos pensjonkontraktene ettersom denne modulen alltid vil ha størst verdi. Tabell 6.17 viser en klar oversikt over reduksjonen fra SCR_{Long}^{LC} til SCR_{Life}^{LC} og SCR_{Intern}^{LC} . Tidligere ble det begrunnet at standardformelen belønnet en stor spredning i kontraktporteføljen i liten grad. Tabell 6.17 viser at den interne modellen reduserer SCR_{Long}^{LC} over 5 ganger så mye som standardformelen ved alle hedge-scenarioene.

6.7 Reell risiko

Solvency II bruker standardformelen til å binde sammen risikoen fra de ulike modulene. Spørsmålet er hvor godt dette fungerer. For å etablere et sammenligningsgrunnlag skal modellen først simuleres med varierende Wilkie-verdier for å konstruere SCR_{Market} , og deretter med varierende Lee-Carter prediksjoner for å konstruere SCR_{Life} . Disse to modulene korreleres deretter med standardformelen, og resulterer i $BSCR_{SII}$. Denne kapitalen skal sammenlignes med et scenario hvor standardformelen ikke blir brukt i det hele tatt. Her vil Lee-Carter modellen og Wilkie-modellen varieres i samme simulering og de tilhørende sjokkene vil slås sammen for å kalkulere $BSCR_{Reell}$.

Markedrisikoen regner ikke ut risikokapital på samme måte som livsrisikoen. I dette eksemplet vil modulen forenkles, og alle investeringene vil regnes som samme modul. Istedet for å regne ut risikokapital for hver enkelt modul for investeringene, er heller sjokkene slått sammen til et felles sjokk. Konstruksjonen av de ulike sjokkene s_i blir gjennomgått i kapittel 8.1. Det felles sjokket konstrueres ved: $\hat{S} = \sum w_i \times s_i$, hvor w_i beskriver vektene til de ulike investeringene med hvert sitt tilhørende sjokk s_i . Denne fremgangsmåten danner et sjokk på $\hat{S} = 9.28\%$, som vil brukes på alle alderporteføljene.

$$SCR_{Market} = BE \times \sum w_i s_i \quad (6.7.1)$$

Ettersom vi i dette eksempelet summerer alle investeringene til en og samme modul vil SCR_{Market} være et resultat av den totale nåverdien til selskapet ganget med det samlede sjokket til investeringene. Det ville ikke vært forsvarlig å skrive BE i ligning 6.7.1 hvis hver investering modul ble kalkulert separat. I dette tilfellet ville BE blitt inndelt i mindre nåverdier avhengig av mengden kapital som produseres i de ulike investeringsmulighetene.

$$SCR_{Life} = SCR_{Long} = BE_{LC}^S - BE_{LC} \quad \text{hvor} \quad S = -20\% \quad (6.7.2)$$

SCR_{Life} vil i dette tilfelle forenkles ved å kun avhenge av modulen SCR_{Long} og sjokket på -20%. I denne simuleringen vil kun Lee-Carter verdiene variere og alt annet settes til statiske verdier. Dermed vil SCR_{Life} isolert beskrive risikoen rundt usikkerheten ved reduserte dødeligheter blant kontrakttakere.

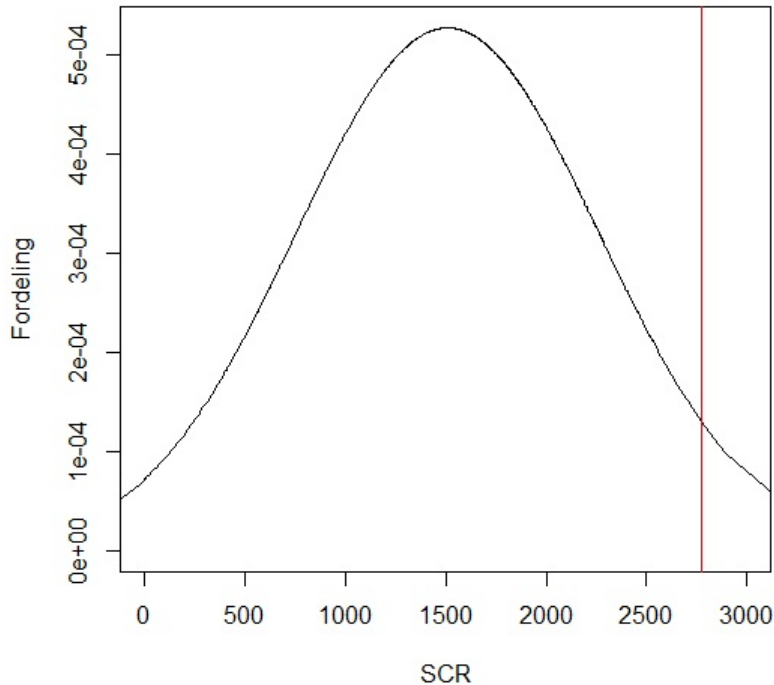
$$BSCR_{SII} = (SCR_{Life}^2 + SCR_{Market}^2 + 2(0.25 \times SCR_{Market} \times SCR_{Life}))^{1/2} \quad (6.7.3)$$

Ligning 6.7.3 resulterer i en BSCR som følger Solvency II direktivet, og for å etablere et sammenligningsgrunnlag vil vi produsere en $BSCR_{Reell}$ som ikke benytter standardformelen. Ettersom standardformelen ikke vil bli tatt i bruk er det hensiktsmessig å simulere alle risikoene under samme simulering. Dette betyr at avkastningene fra Wilkie-modellen og Lee-Carter estimeringene vil variere samtidig. En 99.5% av denne simuleringen vil gi en risiko som dekker 1-av-200 prinsippet som Solvency II tilstreber, men uten å benytte korrelasjonen mellom de forskjellige modulene.

$$BSCR_{Reell} = BE_{99.5}^{\hat{S}} \cdot \hat{S} \quad (6.7.4)$$

Den reelle utregningen av solvenskapital vil være større enn både SCR_{Life} og SCR_{Market} ettersom ligningen inneholder to varierende ledd. Med to varierende ledd vil 99.5-percentilen falle på scenarioet hvor både dødelighet og investeringer medbringer størst

risiko. Gjennomsnittet vil ikke variere fra tidligere, men volatiliteten vil være høyere enn både SCR_{Life} og SCR_{Market} . Spørsmålet er om den reelle solvenskapitalen gir et annet resultat enn når standardformelen blir tatt i bruk for å slå modulene sammen. Tankegangen bak simuleringene er at investeringer og fremtidige dødeligheter skal



Figur 6.2: Den røde vertikale linjen markerer 99.5-percentilen til den reelle solvenskapitalen til en ung aldersfordeling.

varierte stort innenfor de rammene Wilkie- og Lee Carter modellene har satt. Dette betyr at de fremtidige dødelighetene baseres på all empirisk data tilgjengelig, og ikke LC80 som tidligere er brukt i oppgaven. Samtidig skal Wilkie-modellen kun kjøres en gang per simulering, som vil gi svært forskjellige scenario for hver gjennomkjøring. Det at rammene til modellene er bredere enn tidligere gir muligheten for både svært gode og svært dårlige år, selv om gjennomsnittet av alle simuleringene vil gi tilnærmet likt svar som tidligere. Større variasjon i datasettet som produseres vil gi en høyere 99.5-percentil ettersom forskjellen fra topp og bunnpunkt i dataen er stort. 99.5-percentilen skildrer dette toppunktet godt, og vil brukes som verst tenkelig scenario som kun skal forekomme ved ett av 200 tilfeller. Tabell 6.18 viser at

Alder	SCR_{Life}	SCR_{Market}	$BSCR_{SII}$	$BSCR_{Reell}$
Ung	803.3	2610.5	2916.9	2751.4
Medium	884.3	3602.1	3917.9	3676.9
Gammel	1210.3	4660.2	5093.9	4571.3

Tabell 6.18: Sammenligning av SCR mellom Solvency II metoden og den reelle risikoen.

standardformelen skaper en høyere $BSCR_{SII}$ enn den som skapes av reelle verdier. Dette betyr at den separate utregningen av risiko i de ulike modulene for så å slå dem sammen med standardformelen vil være ca 5.7% høyere enn den reelle risikoen for en

ung portefølje. Disse prosentene utgjør 165.5 millioner kroner. En lavere korrelasjon vil gi en lavere BSCR, og helt uten korrelasjonleddet ville standardformelen gitt en BSCR på 2731.3, noe som er relativt nære $BSCR_{Reell}$. For en gammel portefølje vil standardformelen produsere en kapital som er 10.3% høyere enn den reelle modellen.

Kapittel 7

Konkluderende diskusjon

I denne oppgaven har jeg gjennomgått de grunnleggende prinsippene bak livsforsikring i Solvency II, og hvordan direktivet behandler risikoen knyttet til dødeligheter. Ekstrapolering av fremtidige dødeligheter er et svært sensitivt tema knyttet til fremtidige forpliktelser for et livsforsikringsselskap. Det ble derfor testet ut forskjellige dødelighetsmodelleringer hvor evalueringen endte i at Lee-Carter modellen gir et godt anslag over norsk dødelighetsdata, samtidig som den er lett å behandle. Den gradvise økningen i levestandard over lengre tid gir gode rom for Lee-Carter modellering, i motsetning til land som Russland som har en svært volatil levealder de siste 30 årene.

Oppgaven begrunner de store forskjellene som oppstår mellom bruk av statiske og dynamiske dødelighetsmålinger. De numeriske studiene i kapittel 6 viser til en klar reduksjon i risikokapital ved bruk av dynamiske modeller. Lee-Carter estimerte dødeligheter resulterer i en halvering av risikokapital ved pensjonskontrakter, og sirka en 20% reduksjon ved dødsfallkontrakter. Dette skyldes det reduserte handlingsrommet ved sjokkerte dødeligheter som ble beskrevet i kapittel 6.4. Lengre kontraktperioder vil være mer utsatt for fremtidige endringer, og de numeriske studiene bekrefter hvor viktig det er med presise modeller til å estimere dynamiske dødeligheter ved pensjonskontrakter.

Ved første øyekast vil hedgepotensialet mellom langtliv og dødelighet satt av Solvency II virke rettferdig. Ved en 50/50 hedge vil risikominimeringen tilsvare 25% av andelen til SCR_{Mort} , som rettferdiggjør korrelasjonsleddet -0.25 . Det fremstår derimot klart at korrelasjonen satt av standardformelen ikke resulterer i en rettferdig hedge for forsikringsselskapet ved alle kontrakts sammensetninger. Ved en portefølje bestående av 25% pensjonskontrakter og 75% dødsfallkontrakter vil risikominimeringen kun være 18% av andelen til SCR_{Mort} . Selv om dødsfallkontraktene tar større plass i selskapets portefølje vil risikominimeringen være mindre enn ved en 50/50 hedge. De numeriske studiene gjennomført i denne oppgaven viser at den interne modellen derimot evaluerer hedgepotensialet i ulike kontrakts sammensetninger bedre, og gir en stigende risikoreduksjon ved høyere andel dødsfallkontrakter.

Argumentet for at korrelasjonen i standardformelen er upresis støttes ved kalkulasjonen av de reelle verdiene i kapittel 6.7. Her produserer fremgangsmåten med en reell risiko på (99.5% percentil) en 6-10% mindre risikokapital enn den som produseres ved standardformelen. Denne kalkuleringen følger prinsippet om at kun 1-av-200 tilfeller skal resultere i en $BOF < 0$, men unngår korrelasjonene gitt av Solvency II.

Solvency II direktivet er ikke perfekt, men det fungerer. Rammeverket og de juridiske begrunnelsene direktivet tilbyr er et imponerende stykke arbeid. Det er derimot et par matematiske tilnærminger som fremstår litt upresise, og kunne trenge en finjustering. Standardformelen er konstruert for å binde sammen all risikoen i markedet ved hjelp av gitte sjokk og korrelasjoner. Denne løsningen er visuelt elegant, men sjokkene og korrelasjonene satt av EIOPA tar ikke hensyn til ulike aldersfordelinger og kontraktssammensetninger, noe som gir lite rom for risikominimering. Alle selskap behandles under nøyaktig de samme forutsetningene. Dette åpner opp for å ta i bruk interne modeller, hvor selskapet belønnes for gode spredninger i porteføljen. En anbefaling til Finanstilsynet basert på denne oppgaven vil derfor være en ny måte å angripe samspillet mellom langtliv- og dødelighetsrisiko på. Istedet for å kalkulere risikomodulene hver for seg vil den interne modellen unngå korrelasjonen og slå risikoene sammen ved å kalkulere maksimal risiko ved endringer i dødelighet.

Den interne modellen, og simuleringen med reell risiko tar for seg alternativ til korrelasjonen satt av Solvency II, men sjokkene har forblitt urørte.

7.1 Alternativ stressmodell

Et forslag til modifisering vil være å tildele forskjellige langtliv- og dødelighetsjokk til ulike aldersgrupper. Derfor foreslår jeg en egen vri på stresstestene publisert av EIOPA. Sjokkene på -20% og 15% ser ut til å være unøyaktige, og for generelle. I renterisiko-modulen har EIOPA publisert sjokk for alle fremtidige år, og en slik oppdeling av sjokkene kunne vært en godt idé å gjøre i langtliv- og dødelighetsmodulen også. Ved langtlivmodulen hadde det vært en god idé å sjokke unge kontrakttakere med et mer negativt sjokk enn de gamle, ettersom det er de unge som får utbytte av fremtidig utvikling innen medisin og pleie. Videre kan størrelsen på sjokket reduseres ved høyere alder på de forsikrede. De som er inne i sine siste år av kontrakten vil ikke medføre like stor risiko ettersom de ikke står ovenfor like mange år med potensielle endringer i dødelighet. De nye sjokkene kan dermed tildeles forskjellige aldersgrupper hvor sjokket følger forsikringstaker ut kontrakten ved kalkulering av BE. Dødelighet-

Alder	S_{Long}	S_{Mort}
20-29	-20%	8%
30-39	-18%	9%
40-49	-16%	10%
50-59	-14%	11%
60-69	-12%	12%
70-79	-10%	13%
80-89	-8%	14%
90-99	-6%	15%

Tabell 7.1: Forslag til nye dødelighetssjokk. Sjokket tildeles kontrakttakeren sin alder ved utregning av BE. Sjokket følger personen gjennom hele utregningen, slik at en 20-åring vil ha et sjokk på -20% hele veien.

sjokket behøver en annen tilnærming ettersom antagelsen ved langtlivsjokket var at

fremtiden bringer forbedrede levekår for unge forsikringstakere. Dermed vil det være unødvendig å tildele like stort dødelighetsjokk til de unge som til de gamle.

Sjokkene i tabell 7.1 er kun et eksempel, og ingen matematisk estimering. Hovedpoenget ligger ved at langtlevsjokket burde inneholde en gradvis redusering mot stigende aldersgruppe, og dødelighetsjokket burde inneholde en gradvis økning mot stigende aldersgruppe.

7.2 Forslag til påfyllende studier

- Oppgaven antar at Lee-Carter prediksjonen av dødelighetsdata benytter seg av ARIMA(0,1,0). Lee og Carter definerte denne den best tilpassede modellen til deres dødelighetsdata. Det er viktig å merke seg at denne dataen var basert på amerikanske dødeligheter og ikke norske. Et forslag til videre studier vil derfor være å teste ulike ARIMA-variasjoner for norske data.
- I kapittel 3 ble det introdusert ulike multi-faktor modeller for å modellere stokastiske dødeligheter. Selv om de ulike modellene utpreget seg ved forskjellige aldersgrupper, ble det konkludert at Lee-Carter modellen fungerte best som helhet. Det kan derfor være interessant å teste ut modellering inndelt i aldersgrupper. Et eksempel på dette kan være Lee-Carter modellering frem til fylte 60 år, og Renshaw-Haberman etter det. En slik modellering vil være mer kompleks, mens samtidig også mer presis.
- Ideelt sett burde kalkuleringene utføres med dødeligheter basert på en forsikret populasjon. Et slikt utvalg har statistisk sett høyere levealder enn den uforsikrede populasjonen. Et videreført studie kunne derfor sammenligne forsikrede og uforsikrede utvalg med forskjellige porteføljesammensetninger.
- Parameterne i Gompertz-Makeham modellen benytter empirisk data fra amerikanske menn. For å danne et bedre sammenligningsgrunnlag med dataen hentet fra HMD hadde det derfor vært interessant å estimere parameterene basert på norsk data.

Kapittel 8

Appendix

8.1 Matematiske formuleringer

8.1.1 Singulær-verdi-dekomposisjon av Lee-Carter modellen

Basert på datasett 1980-2014: Parameteren α finnes ved å kalkulere gjennomsnittlige dødeligheter basert på antall tidssteg som blir tatt med i beregningen:

$$\alpha_l = \frac{1}{34} \sum_t \ln(q_{l,t}), t = 30, \dots, 100$$

For å estimere verdiene β_l og κ_t tar vi i bruk singulær-verdi-komposisjon på matrisen Z : $Z = \ln(q_{l,t}) - \alpha_l$

$$Z = \begin{bmatrix} \ln(q_{30,1980}) - a_0 & \ln(q_{30,1981}) - a_0 & \ln(q_{30,1982}) - a_0 & \dots & \ln(q_{30,2014}) - a_0 \\ \ln(q_{31,1980}) - a_1 & \ln(q_{31,1981}) - a_1 & \ln(q_{31,1982}) - a_1 & \dots & \ln(q_{31,2014}) - a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \ln(q_{100,1980}) - a_{70} & \ln(q_{100,1981}) - a_{70} & \ln(q_{100,1982}) - a_{70} & \dots & \ln(q_{100,2014}) - a_{70} \end{bmatrix}$$

Singulær-verdi-komposisjon på matrisen resulterer i parvise kombinasjoner av λ , P , og Q vektorer:

$$SVD(Z) = \lambda_1 P_{l,1} Q_{t,1} + \lambda_2 P_{l,2} Q_{t,2} + \dots + \lambda_t P_{l,t} Q_{t,n} \quad (8.1.1)$$

Her er $n = rank(Z)$, og $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ de singulære verdiene i stigende rekkefølge med $P_{l,i}$ og $Q_{t,i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) som tilhørende vektorer. Det første leddet av komposisjonen gir oss estimatene vi er ute etter: $\beta_l = P_{l,1}$ og $\kappa_t = \lambda_1 Q_{t,1}$.

8.1.2 Utregning av investeringssjokk

Veiledning for utregning av disse sjokkene er gitt i artikkel 176 i EIOPA[7].

Aksjer

$$SCR_{equity} = \sum s \times A \quad \text{hvor} \quad s = 0.22 \quad (8.1.2)$$

Aksjesjokket er satt med basis at vi tar i bruk type 1 aksjer fra OEC markedet. Dette gir et sjokk på 22%.

Bank/Obligasjoner

Ved utregning av avkastning ved bank og obligasjoner finnes sjokkene ved å benytte EIOPAS sjokktabell i artikkel 176.

$$SCR_{bond} = \sum \bar{s}_i \times A_i \quad \text{hvor} \quad \bar{s}_i = b_i \times \bar{d}_i \quad (8.1.3)$$

Sjokket til den lange- og korte renta er funnet ved å kombinere durasjonen til bondet og kredittkvalitet. Den korte renta r_k er satt med løpetid på 1 år, og kredittkvalitet $\omega = 1$ (AA). Den lange renta r_k er har en løpetid på 10 år med kredittkvalitet $\omega = 1$ (AA). Dette gir en b-verdi på 1.1%. Denne b-verdien ganges med durasjoner på 1 og 8, som er funnet med en enkel Macaulay durasjons kalkulator. Dette resulterer i sjokk på 0.011 og 0.088.

Kredittkvalitet	AAA	AA	A	BBB	BB	bBB	bbB	Ingen rating
b-verdi	0.9%	1.1%	1.4%	2.5%	4.5%	7.5%	7.5%	3.0%

Tabell 8.1: Tabellen viser kredittkvaliteter og tilhørende b-verdier.

Eiendom

Property stresses med et fast sjokk satt til S=0.25

$$SCR_{property} = s \times A \quad \text{hvor} \quad s = 0.25 \quad (8.1.4)$$

8.1.3 R-kode

Data

```
norgedata=function()
{
  norge<-hmd.mx(country="NOR", username="armanjohnsen@gmail.com",
  password="pepsimax", label="Norway")
}
norgedata()
```

Levetidstabell Standard

```
lifetab=function(l_0=30,l_e=100,K=25)
{
  ll=l_0:(l_e+l_e)

  data1<-lifetable(norge,"male", years=2014, ages=29:109)
  data1$mx
  enere = (c(rep(1,50)))
  q = (c(data1$mx[-1],enere))

  ll=l_0:(l_e+l_e)

  kp=matrix(0,l_e+1,l_e+1)
  kp[,1]=1

  for (l in 1:(l_e-1)){
    for (k in 2:(l_e+1-1)) kp[l,k]=kp[l,k-1]*(1-q[l+k-2])}

  kq=rep(0,K+1)
  for (k in 2:(K+1)) kq[k]=kp[1,k-1]*q[k-1]

  list(l_0=l_0,l_e=l_e, kp=kp, kq=kq, q=q)
}
lifetab()
```

Levetidstabell Lee-Carter

```
lifetab=function(l_0=30,l_e=100,K=25)
{
  ll=l_0:(l_e+l_e)
  LCAnorgeM4<-lca(norge, series="male", years=1980:2014, max.age=100, adjust=c("dt"), interpolate = TRUE)
  fM<-forecast(LCAnorgeM4,h=70)
  ratesM<-cbind((fM$rate$male[30:100,])) #[30:100]
  q_s=ratesM
  i=1-q_s
  d<-row(i) - col(i)

  a = split(i,d)
  a2=a[71:140] #[71,140]
  lapply(a2, function(x) x[1])
  lengths(a2)
  g2<-mapply(function(y) lapply(a2, function(x) x[y]), 1:lengths(a2)[1])
  Q2=g2[is.na(g2)] <- 0
  g2
  v=matrix(0,70,30)
  u=cbind(g2,v) # (0,70,30)
  w=matrix(0,30,100) # (0,30,100)
  kpk=rbind(u,w)
  KPK=matrix(as.numeric(kpk),100,100)

  list(l_0=l_0,l_e=l_e, KPK=KPK, q_s=q_s)
}
lifetab()
```

Premieutregning

```
prem=function(l_0=30,l_r=67,l_e=99,s=0.25,r=0.03, K=25, s2=2)
{
  #pensjon
  kq=lifetab()$kq
  kp=lifetab()$kp
  q=lifetab()$q

  d=1/(1+r)
  a1=sum(d**(0:(l_r-l_0-1))*kp[1,1:(l_r-l_0)])
  a2=sum(d**((l_r-l_0):l_e)*kp[1,(l_r-l_0+1):(l_e+1)])
  pi=(s*a2/a1)

  #mortality LC
  A12=sum(d**(0:(K-1))*kp[1,1:K])
  A22=sum(d**(1:K)*kq[2:(K+1)])
  pi2=(s2*(A22/A12))
}
```

```
list(s=s, pi=pi, pi2=pi2)
}
prem()
```

Aldersfordeling

```
alder=function(gam=0.10,mu=10,K=70,K2=25, size=50000)
{
  p=exp(-gam*abs(1:(K+1)-mu))
  N=p*(size/sum(p))

  gam2=.10 ; mu2=15 ;
  p2=exp(-gam2*abs(1:(K+1)-mu2))
  N2=p2*(size/sum(p2))

  gam3=.10 ; mu3=20 ;
  p3=exp(-gam3*abs(1:(K+1)-mu3))
  N3=p3*(size/sum(p3))

  list(N=N,N2=N2,N3=N3)
}
alder()
```

Wilkie-modellen

```
wilkie=function(m=1000,K=200)
{
  # "m" simulations of the Wilkie model as outlined in Section 13.5
  # are generated up to time "K". The initial values are for all
  # variables their medians.
  #
  # Output variables are (K+1)xm-matrices with one sequence
  # per column so that simulation i is defined by the ith column
  # of all the following objects:
  # "I": Rate of inflation
  # "R_s": Return to equity without dividen
  # "R_e": Return to equity with dividend
  # "F": The interest rate ratio.
  # "rK": Long rate of interest
  # "r": Short rate of interest

  # Parameters assigned as in Table 13.3
  xi_i=0.025
  sigma_i=0.0115
  a_i=0.58
  xi_y=0.041
  sigma_y=0.079
  a_y=0.55
  theta_yi=1.79
  xi_d=0.045
  sigma_d=0.036
  b_ld=0.57
  theta_dy=-0.027
  a_di=0.87
  b_0di=0.50
  b_ldi=-0.36
  xi_r=0.015
  sigma_r=0.19
  a_ry=0.90
  theta_ry=0.052
  a_ri=0.955
  xi_f=0.80
  sigma_f=0.037
  a_f=0.74
  xi_py=0.074
  a_py=0.91
  sigma_py=0.108
  x_pi=0.0006
  tetta_pi=0.112
  sigma_pi=0.066

  # Generating the linear drivers
  X_i=matrix(0,K+1,m)
  X_y=X_i
  X_dy=X_i
  X_di=X_i
  X_f=X_i
  X_ry=X_i
  X_ri=X_i
  X_py=X_i
  X_pi=X_i
  e_y=matrix(rnorm((K+1)*m),K+1,m)
  e_d=matrix(rnorm((K+1)*m),K+1,m)
  for(k in 1:K) {
    X_i[k+1,]=a_i*X_i[k,]+sigma_i*rnorm(m)
```

```

X_y[k+1,]=a_y*X_y[k,]+sigma_y*e_y[k+1,]
X_dy[k+1,]=sigma_d*(e_d[k+1,]+b_ld*e_d[k,])+theta_dy*e_y[k,]
X_di[k+1,]=a_di*X_di[k,]+b_0di*X_i[k+1,]+b_1di*X_i[k,]
X_f[k+1,]=a_f*X_f[k,]+sigma_f*rnorm(m)
X_ry[k+1,]=a_ry*X_ry[k,]+sigma_r*rnorm(m)+theta_ry*e_y[k,]
X_ri[k+1,]=a_ri*X_ri[k,]+(1-a_ri)*X_i[k+1,]
X_py[k+1,]=a_py*X_py[k,]+sigma_py*rnorm(m)
# Inflation, yield, dividend inflation,
I=(1+xi_i)*exp(X_i)-1
Ik1=1+rowMeans(I)
Ik1=1+I[,1]
Ik=cumprod(1+I[,1])
y=xi_y*exp(X_y+theta_yi*X_i)

I_d=(1+xi_d)*exp(X_dy+X_di)-1
F=xi_f*exp(X_f)
rK=xi_r*exp(X_ry)+xi_i+X_ri
rk=1+rowMeans(rK)
rk=1+rK[,1]
r=F*rK
R=1+rowMeans(r)
R=1+r[,1]

#Property
I_p=I
for (k in 1:K) {
X_pi[k+1]=x_pi + tetta_pi*I[k]+(1-sigma_pi)*X_pi[k]+sigma_pi*rnorm(m)
y_p=xi_py*exp(X_py)
for (k in 1:K) {
I_p[k+1]= I_p[k]*exp(X_pi)}
S_p=((1+I_p[1:K+1,])*y_p[1:K,])/y_p[1:K+1,]-1
if (m>1)
{S_p=rbind(rep(0,m),S_p)}
else
{S_p=c(0,S_p)}

# Equity returns
R_s=(1+I_d[1:K+1,])*y[1:K,]/y[1:K+1,]-1
R_e=(1+I_d[1:K+1,])*(1+y[1:K+1,])*y[1:K,]/y[1:K+1,]-1
if (m>1)
{R_s=rbind(rep(0,m),R_s)
R_e=rbind(rep(0,m),R_e)}
else
{R_s=c(0,R_s)
R_e=c(0,R_e)}
P=1+rowMeans(R_s)
P=1+R_s[,1]
SP=1+S_p[,1]
SP=1+rowMeans(S_p)

list(rk=rk,SP=SP,R=R,P=P,Ik=Ik)
}
wilkie()

```

Forpliktelser

```

liability=function(q,l_0=30,l_r=67,l_e=99,s=.25,pi,N,K=70,K2=25, s2=2)
{
KPK=lifetab()$KPK
pi=prem()$pi
N=alder()$N
Ik=wilkie()$Ik

l_e2=1_e+1_e
S=c(rep(s,l_e2))
zeta=c(rep(-pi,37),S)
L=rep(0,l_e) #skal med!!
for (k in 1:l_e)L[k]=sum(N[1:(K+1)]*KPK[1:(K+1),k+1]*zeta[1:(K+1)+k]*Ik[1:K])

#mortality
L_1=rep(0,K2+1)
for (k in 1:(K2-1))
L_1[k]=L_1[k]-pi22*sum(Nd[1:(K2-k)]*KPK[1:(K2-k),k+1])
for (k in 1:(K2))
L_1[k]=L_1[k]+s22*sum(Nd[1:(K2-k+1)]*KPK[1:(K2-k+1),k]*q_s[k:K2])

list(L=L, L_1=L_1)
}
liability()

```

ALM

```

alm=function(w1=0.15,w2=0.3,w3=0.35,w4=0.2)
{
rf=riskfree()$rf

```

```

pi=prem()$pi
rk=wilkie()$rk
R=wilkie()$R
R1=R[1:70]
r1=1+rf[1:70]
E=-50000
L=liability()$L
P=wilkie()$P
SP=wilkie()$SP
Ik=wilkie()$Ik
r=rk[1:70]

w11=0.15 ; w22 = 0.3 ; w33=0.35 ; w44=0.2
L_1=c(E+L[1], L[2:length(L)])*w1
L_2=c(E+L[1], L[2:length(L)])*w2
L_3=c(E+L[1], L[2:length(L)])*w3
L_4=c(E+L[1], L[2:length(L)])*w4

L1=c(L_1[1], rep(0,69))
for (k in 2:70){
  if (L1[k-1] < 0) {L1[k] = (L1[k-1]+L_1[k])*P[k]} else {L1[k] = (L1[k-1]+L_1[k])}
}
AKSJE=L1

L2=c(L_2[1], rep(0,69))
for (k in 2:70){
  if (L2[k-1] < 0) {L2[k] = (L2[k-1]+L_2[k])*R1[k]} else {L2[k] = (L2[k-1]+L_2[k])}
}
CASH=L2

L3=c(L_3[1], rep(0,69))
for (k in 2:70){
  if (L3[k-1] < 0) {L3[k] = (L3[k-1]+L_3[k])*r[k]} else {L3[k] = (L3[k-1]+L_3[k])}
}
BOND=L3

L4=c(L_4[1], rep(0,69))
for (k in 2:70){
  if (L4[k-1] < 0) {L4[k] = (L4[k-1]+L_4[k])*SP[k]} else {L4[k] = (L4[k-1]+L_4[k])}
}
PROP=L4

Porto=L1+L2+L3+L4
#####

Porto11= rep(0,69)
for (k in (1:70)) Porto11=sum(Porto[k]/((1+rf[k])**k))
list(Porto=Porto, Porto11=Porto11)
}
alm()

```

Simulering

```

nyfunc=function(k=10000)
{
  l = replicate(k,BE())
  l1=sort(unlist(l))
  lo = quantile(l1, c(.995))
  BEpensjonsd=sd(as.numeric(l[(1:k)]))
  BEpensjon=mean(as.numeric(l[(1:k)]))
  y <- dnorm(l1, BEpensjon, BEpensjonsd)
  plot(l1, y, type="l", xlab="SCR", ylab="Fordeling")
  abline(v=lo, col="red")
  list(lo=lo, BEpensjon=BEpensjon)
}
nyfunc()

```

Bibliografi

- [1] Bølviken, E.: *Computation and Modelling in Insurance and Finance*. Cambridge University Press, Vol 1,(2014).
- [2] Wilkie, A. D.: *More on a Stochastic Asset Model for Actuarial Use*. British Actuarial Journal, vol. 1, No 5, 777-964 (1995)
- [3] Currie, I.D., Durban, M., Eilers, P.H.C.: *Smoothing and forecasting mortality rates*. Computational Statistics and Data Analysis, vol. 50, No 1, 61-76 (2006).
- [4] Renshaw, A.E. Haberman, S.: *A cohort-based extension to the Lee–Carter model for mortality reduction factors*. Insurance: Mathematics and Economics,vol. 38, No 3, 556-570 (2006).
- [5] Dowd, K., Cairns, A.J.G., Blake, D., Coughlan, G. D., Epstein, D., Khalaf-Allah, M.: *Evaluating the Goodness of Fit of Stochastic Mortality Models*. Insurance: Mathematics and Economics ,vol. 47, No 3, 255-265 (2010).
- [6] Lee R.D, Carter L.R.: *Modeling and Forecasting U. S. Mortality*. Journal of the American Statistical Association, vol. 87, No 419 ,659–671 (1992).
- [7] Official Journal of the European Union. *Commission Delegated Regulation (EU) 2015/35*. Tilgjengelig på: http://eur-lex.europa.eu/legal-content/En/TXT/PDF/?uri=OJ:JOL_2015_012_R_0001. Hentet den: 14.09.2017.
- [8] European Insurance and Occupational Pensions Authority. *The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation*. Tilgjengelig på: https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/EIOPA-14-322_Underlying_Assumptions.pdf Hentet den: 19.09.2017.
- [9] European Insurance and Occupational Pensions Authority. *Risk-free interest rate term structures, Calculation of the UFR for 2018*. Tilgjengelig på: <https://eiopa.europa.eu/regulation-supervision/insurance/solvency-ii-technical-information/risk-free-interest-rate-term-structures>. Hentet: 09.01.2018.
- [10] Statistisk sentralbyrå. *Røykevaner, 2014*. Tilgjengelig på: <https://www.ssb.no/helse/statistikker/royk/aar/2015-02-03>. Hentet den: 13.11.2017.
- [11] Statistisk sentralbyrå. *Krigsdødsfallene under 2. verdenskrig*. Tilgjengelig på: <https://www.ssb.no/befolkning/artikler-og-publikasjoner/krigsdødsfallene-under-2-verdenskrig>. Hentet den: 09.02.2018.

- [12] Statistisk sentralbyrå. *Spanskesyken rammet sosialt skjevt*. Tilgjengelig på: <https://www.ssb.no/helse/artikler-og-publikasjoner/spanskesyken-rammet-sosialt-skjevt>. Hentet den: 10.02.2018.
- [13] Kreftregisteret. *Kreftstatistikk*. Tilgjengelig på: <https://www.kreftregisteret.no/Registrene/Kreftstatistikk/>. Hentet den: 15.03.2018.
- [14] Norwegian Institute of Public Health. *Vaccination coverage (NHC)*. Tilgjengelig på: <http://www.norgeshelsa.no/norgeshelsa/>. Hentet den: 15.03.2018.
- [15] Norges Bank. *INFLASJON*. Tilgjengelig på: <https://www.norges-bank.no/Statistikk/Inflasjon/> Hentet den: 29.03.2018.
- [16] Human Mortality Database *Max Planck Institute for Demographic Research*. Tilgjengelig på: <https://www.mortality.org>. Hentet den: 04.10.2017.
- [17] KPMG. *Technical Practices Survey 2015*. Tilgjengelig på: http://kpmg.co.uk/creategraphics/2015/09_2015/TPS2015/files/assets/basic-html/page88.html Hentet den: 20.02.2018.
- [18] The Comprehensive R Archive Network *Forecasting Mortality, Fertility, Migration and Population Data*. Tilgjengelig på: <https://cran.r-project.org/web/packages/demography/demography.pdf> Hentet den: 12.09.2017.
- [19] The World Bank. *Life expectancy at birth, total (years)*. Tilgjengelig på: <http://data.worldbank.org/indicator/SP.DYN.LE00.IN> Hentet den: 23.03.2018.