UiO : Matematisk institutt
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Hvor gode er matching og volatility korreksjonene i Solvency II?

Håkon Nordtorp

Masteroppgave, våren 2018

Denne masteroppgaven er levert inn under masterprogrammet *Modellering og dataanalyse*, studieretning *Statistikk og dataanalyse*, ved Matematisk institutt, Universitetet i Oslo. Oppgaven er normert til 60 studiepoeng.

Forsiden viser et utsnitt av rotsystemet til den eksepsjonelle liegruppen E_8, projisert ned i planet. Liegrupper ble oppfunnet av den norske matematikeren Sophus Lie (1842–1899) for å uttrykke symmetriene til differensiallikninger og spiller i dag en sentral rolle i flere deler av matematikken.

Sammendrag

Solvency II er et forsikringsdirektiv som kontrollerer all forsikringsdrift i EU/EØS. Direktivet innebærer kontrollering av kapitalreserven, SCR, for hver av forsikringsselskapets porteføljer. Dette for å sikre forbrukerens trygghet. Ettersom beregningene av SCR baserer seg på generelle tilpassninger av risiko, ble det fra 30.april 2014 innført to korreksjoner i utregningen, kalt matching og volatility korreksjonene. I denne oppgaven skal det konstrueres en pensjonsportefølje som skal beregnes etter Solvency IIs kapitalkrav av langtlivsrisiko SCR$_{long}$. Porteføljen vil bli simulert med dødeligheter fra Human Mortality Database og predikert med Lee-Carter modellen. For å tilpasse den langsiktige finansielle risikoen vil Wilkie-modellen bli benyttet til simulering av investeringssmuligheter. Disse blir tilpasset tidstrenden av utgifter, og skaper forsikringsselskapets totale forpliktelser. Denne blir benyttet til å beregne kapitalreserven SCR for langtlivsrisiko, og til å teste ut innvirkningen av matching og volatility korreksjonene under ulike forhold.

Forord

Denne masteroppgaven er skrevet som en del av min mastergrad Modellering og Dataanalyse, rettning Finans Forsikring og Risiko ved Universitetet i Oslo (UiO).

Først og fremst vil jeg takke min veileder Erik Bølviken, for inspirerende forelesninger og god veiledning gjennom hele min mastergrad. Han har vist og overført stor interesse for aktuarfaget, som jeg vil ha med meg videre inn i arbeidslivet.

Jeg vil også takke min samarbeidspartner og kamerat Arman Johnsen, for alle timene vi har utfordret og hjulpet hverandre gjennom både bachelor- og mastergrad. I tillegg vil jeg takke min samboer Victoria B.Sellevoll for all hjelp og støtte i min studietid.

Innhold

Kapittel 1

Innledning

Livsforsikring handler om å sikre sitt liv eller sine kjære mot uforutsette livsendringer ved hjelp av økonomisk trygghet. Dette kan enten skje via helse-, dødelighet- eller pensjonsforsikring. Likheten er at det innbetales en premie, frem til et gitt tidspunkt, før en eventuell utbetaling finner sted etter en endring i livssituasjon. En slik endring kan være fra arbeidstaker til pensjonist, fra aktiv til ufør eller andre lignede omstendigheter. Slike kontrakter varer ofte mange tiår, og det oppstår store pengestrømmer langt inn i fremtiden. Ettersom ingen nøyaktig kan spå hva som skjer mange år frem i tid vil det alltid være risikofaktorer tilknyttet slike forsikringskontrakter. I hovedsak er det dødelighetsendringer og usikker investeringsavkastning fra pengestrømmen som vil være med å prege den totale livsforsikringsrisikoen et selskapet må ta høyde for. Denne risikoen er nøye regulert av internasjonale regler beskrevet i Solvency II.

Solvency II er et direktiv utviklet av EIOPA - *European Insurance and Occupational pensions authority* og kontrollerer all forsikringsdrift i EU/EØS. Hovedkomponenten SCR - *solvency capital requirement*, forteller selskapet hvor mye kapital de må ha for å kunne møte sine forpliktelser på en økonomisk trygg måte. Solvency II beskriver et 99.5 %-persentil i utregningen av SCR. Dette betyr at sannsynligheten for at forsikringsselskapet ikke klarer å betale sine forpliktelser fra et år til neste ikke skal være mer enn 0.5%. Beregningene er nøye beskrevet, og variabler til hjelp av utregning er publisert på EIOPA sine hjemmesider. Allikevel fungerer direktivet som en generell tilnærming, som er påvirket av behov for enkelthet og ikke tar hensyn til uforutsette endringer i hvert enkelt selskap. Dette kan blant annet skje i forvaltningen av pengestrømmen, eller ALM *asset liability managment*, hvor forsikringsselskap må stå inne med for store kapitalreserver med hensyn til risikoen i sin portefølje.

Investeringene har en direkte påvirkning på hvor mye kapital selskapet må ha. Beregningene av SCR etter ALM viste seg å være overforsiktige med Solvency IIs opprinnelige metode. Problemet oppstod blant annet etter det som blir kalt *artificial volatility*, som kom av fluktasjoner i investeringene over korte tidsperioder. Dette førte til at forsikringsselskapene måtte stå med høye kapitalkrav ved relativt små nedganger i investeringsavkastningene. Som løsningen på problemet innførte EIOPA to korreksjoner på utformingen av SCR, kalt *matching* og *volatility.* Disse fungerer som et paralellskifte i diskonteringsrenten i utregningen av nåverdi til de forventede fremtidige forpliktelsene, kalt *best estimte* BE. Det er frivillig å benytte seg av korreksjonene, og det vil være opp til hvert lands finansielle tilsyn å godkjenne bruken. Selve utformingen og beskrivelsen er oppgitt på en noe komplisert måte, og bryter med den opprinnelige tilnærmingen til SCR. Ettersom utformingen av kapitalreserve uten korreksjoner er godt innarbeidet i aktuarielle miljø, vil noen naturlige spørsmål være

- Hva innebærer matching og volatility korreksjonene?
- Hvor stor innvirkning vil disse korreksjonen ha på SCR?
- Hvor gode og attraktive vil de være i bruk for et forsikringsselskap?

Å besvare disse spørsmålene utgjør oppgavens formål. Oppgaven er delt inn i tre kapitler som tar for seg ulike teoretiske aspekt, før de numeriske beregningene og metodene blir beskrevet i kapittel 5 *Beregninger og Sammenlikninger*.

I kapittel 2 *Solvency II pensjonsberegninger* benyttes basis livsforsikringsmatematikk for beregning av en pengestrøm fra en pensjonsportefølje. I tillegg blir hovedpoengene rundt Solvency II diskutert, og på hvilken måte pensjonsporteføljen fører med seg kapitalkrav for et forsikringsselskap. I kapittel 3 *Modell for investeringer og dødeligheter* er målet å utvikle pensjonsporteføljen ved å ta i bruk modeller for realistisk utvikling av levetider og avkastningsmuligheter. Dette for å estimere hvor lenge en forsikringsportefølje lever, med hensyn til inn- og utbetalinger, og på hvilken måte og hvor lenge pengene skal investeres. For å gjøre dette på en god måte er dødelighetene hentet fra HMD - *Human Mortality Database* og predikeres med hensyn til Lee-Carter modellen. Investering av pengestrømmen bruker Wilkie-modellen som simulerer ulike finansielle virkemidler. Målet er at en total investeringsportefølje skal samsvare med tidsprofilen til forpliktelsene, altså til hvilken tid forpliktelsene må utbetales. Når dette er gitt benyttes avkastningene med ulik varighet og andel, slik at risikoen i investeringene er tilpasset ulike forpliktelser. Etter å ha presentert grunnleggende forsikringsmatematisk teori, vil kapittel 4 *Volatility og matching korreksjonene* ta for seg spesifikk teori rundt oppgavens hovedfokus. Her blir utformingen og benytelsen av korreksjonene behandlet i detalj, for å kunne videreføre disse til bruk i beregninger av SCR. Metoden som blir brukt til beregning av resultat er beskrevet gjennom *et forenklet forsikringsselskap* i kapittel 5 *Beregninger og sammenlikninger*. Her vises praktiske eksempler gjennom forankring i teorien. På denne måten legges grunnlaget for de numeriske beregningene. Disse metodene blir brukt i *Beregning av volatility korreksjonen* og *Beregning av matching korreksjonen* for å finne SCR for pensjonsporteføljer i ulike land under kontroll av EIOPA. Tilslutt vil beregninger for forskjellige land og porteføljer kunne gi et grunnlag for å svare på hvor attraktiv og hvor stor innvirkningen volatility og matching korreksjonene har.

I denne oppgaven er det anvendt flere hovedkilder. Bølviken [**2**] legger grunnlaget for teorien bak livsforsikringsmatematikken og forpliktelsesstrømmen. EIOPA [**4**] beskriver veiledningen av Solvency II direktivet, med oppdaterte verdier for alle land i EIOPA [**7**]. Notasjon, oppklaringer og matematisk fremstilling av et komplisert Solvency II direktiv er hentet fra Bølviken [**1**].

Kapittel 2

Solvency II pensjonsberegninger

2.1 Beregninger av forpliktelsene

For et forsikringsselskap vil det viktigste være å beregne sine fremtidige forpliktelser så nøyaktig som mulig. Dette gjøres ved at forventede fremtidige inntekter summeres opp mot forventede fremtidige utgifter fra alle kontrakter. Tilsammen gir summen en forpliktelsesstrøm fra selskapets portefølje, hvor inntektene er målt negative og utgiftene positive. Ettersom ingen kunder er like, vil det være stor usikkerhet og risiko i estimeringen av totalresultatet. Det er ikke mulig å estimere store forpliktelsesstrømmer langt inn i fremtiden uten feilmarginer. Derfor vil det være viktig å gjøre dette på en så nøyaktig måte som mulig. I dette kapittelet skal grunnlaget legges for basis livsforsikringsmatematikk bak en pensjonsportefølje og risikoelementer som oppstår i beregningene.

2.1.1 Overlevelsesmodellering

Pensjonsberegninger er en underliggende del av et forsikringsselskaps totale livsforsikring og hvor kontraktene ofte strekker seg over flere tiår. Den forsikrede betaler inn premie fram til et bestemt tidspunkt, før forsikringsselskapet utgir den oppsparte pensjonen frem til den forsikredes død. Forskjellen fra en vanlig sparekonto og pensjonsforsikring er at ved hjelp av dødelighetsrisiko for porteføljen, og en forvaltning av den samlede pengestrømmen, kan forsikringsselskapet balansere bruken slik at en kortere levealder betaler for folk med en lengre levealder. Dette betyr at personer med lang levetid, som gir forsikringsselskapet tap i form av mange pensjonsutbetalinger, vil bli dekket av andre kontrakter i porteføljen som avsluttes ved en tidlig død. Forvaltningen av pengestrømmen både ved inn- og utbetalinger i et stort selskap varierer med tanke på investeringene, renten, inflasjonen, og er svært viktig for å skape en trygg økonomi. I et forsikringsselskap blir det brukt store mengder arbeidskraft for å imøtekomme markedet og for å få mest mulig avkastning ut av sin investeringsstrategi. For å gjøre dette på en god måte er det viktig å beregne tidsprofilen av forpliktelsene, altså når inn og utbetalingene vil finne sted. Dette kommer an på hvor lenge menneskene i porteføljen lever. For å estimere levetiden beregnes en overlevelsessannsynlighet, som forklarer sannynligheten for overlevelse fra et gitt år til et annet.

Sannsynligheten kan bli modellert gjennom to ulike metoder ut fra hvor mye data vi har, en ikke-parametrisk tilpasning og en parametrisk tilpasning. Den første baserer seg på historiske data, hvor vi har en gitt gruppe mennesker fra kontraktsstart l_0 og lager $n_l =$ det totale antall mennesker som lever i år l. Dette kan vises som en synkende populasjon av antall mennesker

$$n_{l_0} \geq n_{l_{0+1}} \geq \cdots \geq n_{l_e}$$

for hvert år l $= l_0, l_{0+1}, ..., l_e$, hvor l_e er året uten mennesker igjen. Ut fra denne datamengden kan vi lage en overlevelsessannsynlighet, p_l fra et år til det neste ved

$$p_l = \frac{n_{l+1}}{n_l} \tag{2.1.1}$$

hvor n_{l+1} er antall mennesker som overlever år l og n_l er antall mennesker som befinner seg i år l. Den ikke-parametriske modellen for overlevelsessannsynlighet er en enkel og god metode, som krever få matematiske antagelser. Ulempen er at ved små datamengder kan det fort oppstå stor feilmargin og unøyaktige resultater. For å forhindre dette kan det brukes en parametrisk modell, for eksempel Gompertz - Makeham modellen. Her har vi tre parametere θ_0, θ_1,θ_2 som gjennom en *maximum likelihood estimation*(MLE) blir estimert fra dødelighetsdata og brukt til modelleringen av overlevelsessannsynlighet. Dette er en mer komplisert metode, men selv ved små datamengder vil den dempe estimeringsfeil og gi mer nøyaktige resultat. Modellen er hentet fra Bølviken [**2**] side 440, og kan fremstilles slik

$$_kp_l = exp\left(-\theta_0 kT - \frac{\theta_1}{\theta_2}(e^{\theta 2kT-1)e^{\theta_2 lT}}\right) \tag{2.1.2}$$

hvor T er tidssteget, vanligvis satt til ett år, opp til år K med k $=0, 1, ..., K$. Den tilpassende dødelighetsdataen for en gitt populasjon er her vist ved $n_{l_0}, n_{l_{0+1}}, ..., n_{l_e}$. Med de to metodene kan det lages en levetidstabell med overlevelsessannsynlighetene som beskriver sannsynligheten for å være i år l til å overleve k år frem i tid for alle alderstrinn. Dette gjøres ved at man summerer overlevelsessannsynligheter for hvert år l opp til død l_e. Tilsammen vil dette skape en stor matrise med overlevelsessannsynligheter fra alle mulige aldre til alle levetider L, og sannsynlighetsfordelingen til L vil gi levetidstabellen

$$_kp_l = Pr(L \geq l + k | L \geq l). \tag{2.1.3}$$

I tillegg til overlevelsessannynligheten er det også et par andre matematiske bereper som må på plass før en total pensjonskontrakt kan beskrives, en av disse er diskontering.

2.1.2 Diskonteringsregimer

For å finne nåverdi til en pengestrøm fra forventet fremtidig verdi brukes diskontering. Dette er en metode for å beregne pengestrømmer med ulike betalingstidspunkter. En typisk pengestrøm er for eksempel forpliktelsene fra en pensjonsportefølje, hvor inn-og utbetalingene skjer på ulike tidspunkt. Diskonteringen d er matematisk vist ved

$$d = \frac{1}{(1+r)^k} \tag{2.1.4}$$

og er beregnet fra en tidsramme, $k = 0, 1, ..., K$ for kontraktene og med fast rente r. Denne vil øke for hvert tidssteg og er et viktig hjelpemiddel for å kunne summere alle inntekter og utgifter i fremtiden til nåverdi.

I tillegg til diskonteringen med fast rente, finnes det andre diskonteringer med tanke på valg av rente. Dette kan blant annet gjøres ved å anvende den risikofrie renten observert i markedet r_k. Ettersom rentenkurven endrer seg i forhold til tid k=$0, 1, ..., K$, vil en dynamisk diskonteringsmodell nå kunne vises som

$$d_k = \frac{1}{(1+r_k)^k}. \tag{2.1.5}$$

Denne modellen speiler markedet og gir en korrekt oppfatning av den reelle situasjonen, som kan være en stor fordel for å gi nøyaktige resultater. Ulempen er at forsikringsmodellene blir med volatile grunnet større svingninger i rentekurven. En av måtene dette kan avverges på er å bruke obligasjoner som diskontering. I slike tilfeller defineres diskonteringen fra statsobligasjoner, som er risikofrie, hvor markedsprisen gir diskonteringsrenten. Dette kan vises som

$$d_k = P_0(0:k) = \frac{1}{(1+\bar{r}_0(k))^k} \tag{2.1.6}$$

hvor $\bar{r}_0(k)$ markedsrenten for obligasjonsinvesteringer oppgitt av en kontrakt over år k =$0, ..., K$. En annen fordel ved bruk av denne diskonteringsmodellen er at den vil svare godt til selskapets investering av obligasjoner.

Den generelle prisstigningen i markedet er behandlet gjennom inflasjon. Forsikringsselskapets forpliktelser L_k vil over tid endre seg ved i sammenheng med prisindeksen Q_k ved $Q_0L_0, Q_1L_1, \ldots$ for alle år $k = 0, 1, 2, \ldots$. En slik diskonteringsmodell kan matematisk defineres ved

$$d_k = \frac{Q_k}{(1+r)^k} \tag{2.1.7}$$

hvor Q_k er prisindeksen for år k. I forhold til inflasjonsfaktoren I_k vil prisindeksen kunne vises som

$$Q_k = (1+I_k)Q_{k-1}. \tag{2.1.8}$$

Det samme forholdet er brukt og forklart i detalj i seksjon 3.2.1 om Wilkie-modellen. De ulike diskonteringene har noe ulik bruk, men er i praksis like, ellers ville det vært muligheter å oppnå risikofrie gevinster i markedet.

2.1.3 Kontraktsverdi

Etter å ha fått på plass diskontering og overlevelsessannsynlighet kan fullstendige kontraktsverdier nå etableres. Det finnes ulike typer pensjonskontrakter, for eksempel kontrakter hvor den forsikrede kan få et engangs beløp ved nådd pensjonsalder, eller utbetalinger i faste- eller varierende størrelser fram til død. Den tradisjonelle måten, som er beskrevet nedenfor, er at utbetalingen s er gitt som et fast beløp betalt på betalt på forskudd, fra gitt pensjonsalder til død, og premien er tilpasset denne størrelsen.

For et forsikringsselskap er kontraktsverdiene i porteføljen det viktigste virkemiddelet for å dempe risiko og stabilisere en sunn økonomi. Verdiene er summen av alle nåværende kontrakter med hensyn til tiden de beveger seg over og kan deles inn i to deler, inn- og utbetalinger. Innbetaling er den forsikredes forpliktelse gjennom inngått kontrakt, betalt som en premie π. Denne blir betalt på forskudd fra kontraktstart l_0 i år 0 til pensjonsalder l_r, altså over $l_r - l_0 - 1$ år. Tilsammen kan denne summen av innbetalinger vises som

$$-\pi \sum_{k=0}^{l_r-l_0-1} d^k {}_kp_{l_0}$$

hvor d^k er diskonteringen av kontrakten i år k og ${}_kp_{l_0}$ er overlevelsessannsynlighet fra år l_0 til år k. Utbetaling er forsikringsselskapets forpliktelse i pensjonskontrakten og er én sum s utbetalt på forskudd av hver tidsperiode k. Utbetalingen skjer fra pensjonsalder l_r til individet dør og kan defineres ved

$$s \sum_{k=l_r-l_0}^{\infty} d^k {}_kp_{l_0}.$$

Tilsammen vil disse to komponentene være med på å gi den totale kontraktsverdien for en pensjonskontrakt med premie π og pensjonsutbetaling s gitt ved

$$E(PV_0) = -\pi \sum_{k=0}^{l_r-l_0-1} d^k {}_kp_{l_0} + s \sum_{k=l_r-l_0}^{\infty} d^k {}_kp_{l_0} \tag{2.1.9}$$

hvor $E(PV_0)$ er forventet nåverdi av kontrakten. Denne verdien vil brukes til å finne premien basert på fremtidige utgifter, det vil si at vi setter alle forventede fremtidige forpliktelser lik null. Dette kalles ekvivalensprinsippet og vises ved: $E(PV_0) = 0$. Gjennom ekvivalensprinsippet kan π løses ut, som da gir den premien som balanserer inntekter mot utgifter slik at alle forpliktelsene går i null. Dette kan vises som

$$\pi = s\frac{\sum_{k=l_r-l_0}^{\infty} d^k {}_kp_{l_0}}{\sum_{k=0}^{l_r-l_0-1} d^k {}_kp_{l_0}} \tag{2.1.10}$$

hvor π nå utformes etter størrelsen på pensjonen s. I prinsippet vil dette kun være en teoretisk utregning av premie, fordi forsikringsselskapet i tillegg til kontraktsforpliktelser har andre utgifter som administrative kostnader, gjeld, profitt til eiere og lignende.

2.2 Risiko ved obligasjonsinvesteringer

Etter selskapet, gjennom sin portefølje, har inngått kontrakter og herfra forpliktelser ovenfor sine kunder, vil det være store verdier som skal forvaltes, i form av inn- og utbetalinger. Dette kalles ALM, og baserer seg på hvordan selskapet bruker sine aktiva til å møte forpliktelsene. Når dette gjøres på en god måte vil kapitalen økes og risikoen for at selskapet kan betale ut sine kontrakter minimeres. For å oppnå dette er det viktig for forvalterne å vite hvor lang tid det tar før forpliktelsene skal utbetales, og ut ifra dette legge opp en investeringsstrategi basert på tidsperspektivet. Med et lavt aldersgjennomsnitt i porteføljen vil det være flere tiår før det skal utbetales pensjon, og investeringene kan settes i noe høyere risiko med potensielt mer avkastning. Hvis derimot aldersgjennomsnittet er høyt må investeringene være sikre, i for eksempel korte obligasjoner, for at kundene skal få tilbakebetalt sine kontrakter ved pensjonsstart. En av de mest brukte investeringsformene når selskapet skal forvalte sine ressurser er obligasjoner. En obligasjon er et finansielt virkemiddel utgitt av selskaper eller stater for å kunne finansiere prosjekter i fremtiden. Dette er en investeringssmetode som er mye brukt i livsforsikring hvor inntektene må samsvare til forventede forpliktelser langt inn i fremtiden. Obligasjonsmarkedet vil til dette være et godt alternativ både fordi de har en lang løpetid, lav volatilitet, og lav risiko for tap av investeringsmidler. Investoren må allikevel være informert om de ulike risikoene på obligasjonsmarkedet, disse vil være viktig for all videre drift av investeringsporteføljen og er derfor av høy interesse for beregninger senere i denne oppgaven.

2.2.1 Obligasjoner

Investorene som kjøper obligasjoner låner penger til selskapet/staten i bytte mot avkastning over en bestemt tidsperiode $k = 0, ..., K$. Perioden kan være alt fra noen måneder til flere tiår, hvor investoren på slutten av tidsperioden får tilbake pengene sine og vil da sitte med renteinntekten som avkastning. Dersom selskapet som utlyser obligasjonen har høy risiko for ikke å kunne tilbakebetale pengene i slutten av perioden, vil obligasjonen ha en potensielt høyere avkasting. I motsatt ende av skalaen vil en sikker obligasjon, for eksempel statsobligasjoner over en kort periode, gi lavere avkastning. Avkastningen y for obligasjonsinvesteringen er gitt på en løsning av formelen

$$BP_0 = \sum_{k=0}^{K} \frac{B_k}{(1+y)^k} \tag{2.2.1}$$

med hensyn til y. Her er obligasjonens nåverdi BP_0, og kupongavkastninger B_k gitt. Formelen vil beskrive avkastningen til obligasjonen, hvis investoren holder den til kontraktslutt.

Det finnes også ulike obligasjoner når det gjelder tilbakebetalingsplanen, det vanligste er at avkastningen gis som et terminbeløp fastsatt av kontrakten ved $B_0, \ldots, B_K$. En annen tilbakebetalingsplan kalles nullkupongobligasjoner, hvor utbytte blir satt til 0 gjennom kontraktsperioden $B_0 = B_1 = \ldots B_{K-1} = 0$, men blir betalt som et engangsbeløp ved forfall $B_K = 1$. En slik obligasjonsavkastning med en fast bestemt rente i kontraktsstart vil ha en mindre risiko enn andre obligasjoner fordi avkastningen ikke baserer seg på usikre variabler. Disse investeringene brukes blant annet til å finne *fundamental spread*(FS), som vil bli forklart senere i oppgaven. En slik obligasjon kan vises som

$$P_0(0:K) = \frac{1}{1+r_0(0:K)} \tag{2.2.2}$$

hvor $r_0(0 : K)$ er renten fastsatt av kontrakten opp til kontraktslutt ved tid K. I tillegg til de ulike formene for tilbakebetaling er utbytte y styrt av ulike risikoer. Disse baserer seg på hvordan markedet oppfører seg, på kort eller lang sikt. Den kanskje mest åpenbare er omhandler risikoen for å ikke få tilbake sine utlåne penger. Ved et lån finnes det alltid risiko for at låntakeren ikke klarer å betale tilbake lånet. Det samme skjer også i obligasjonsinvesteringer, hvor det er en sjanse for at selskapet/staten som utgir obligasjonene ikke har kreditten til å tilbakebetale i slutten av kontraktsperioden. Denne kredittrisikoen blir styrt gjennom avkastningen eller renten på obligasjonen hvor det er en større sjanse for at obligasjonsholderen ikke får tilbake pengene, noe som gir en høyere rente.

2.2.2 Kredittrisiko

Muligheten for i fremtiden å kunne behandle lån og kreditt er evaluert i rangeringsskala av ratingselskapene *Standard & Poor's*, *Fitch* og *Moody's*, som legger grunnlaget for obligasjonsrenten. Rangeringsskalaen for selskapene går fra sterkest, hvor sjansen for tilbakebetaling er svært høy, til en dårligst rangering – hvor kredittrisikoen er svært høy. Standard & Poor's og Fitch baserer seg på de samme benevningene i sine rangeringsskalar, mens Moody's har sin egen tilsvarende skala - vist i tabell 2.1.

Rangeringsskala

	Moody's	Standard & Poor's
Sterkest investeringsgrad	Aaa	AAA
	Aa	AA
	A	A
	Baa	BBB
Svakeste Investeringrangering	Ba	BB
	Ba	BB
	B	B
	Caa	CCC
	Ca	CC
	C	C
	C	D

Tabell 2.1: Rangeringsskalaen for ulike rangeringsbyråer, sett opp mot hverandre.

Kredittrangeringen deles inn i ulike kvaliteter fra Aaa til C hvor kvaliteten i tillegg noteres med (+) og (-) for hver rangering. AAA og Aaa er de beste og mest sikre investeringskategoriene. Obligasjoner med en slik rangering har høy kredittverdighet som også gjenspeiles i risikoen og tilbakebetalingsevnen. Svakere rangering innebærer høyere risiko for tap og mer volatile investeringer. Generelt er obligasjonene delt inn i to ulike kategorier, *investment bond* fra rangering AAA $\rightarrow$ Baa, og *high yield* eller *junk bond* fra Ba $\rightarrow$ C. For eksempel har Norge en meget stabil og god økonomi som sikrer investoren minimalt med risiko for norske statsobligasjoner og dermed har Norge blitt belønnet med topp rangering i alle de tre rangeringsbyråene. Kredittkvalitet på obligasjonene og utsenderen av disse er med på og bestemme kupongrenten på obligasjonen, og dermed avkastningen. Det vil være viktig for en investor og se avkastning mot risiko og fordele sin investeringskapital deretter. Kredittrangeringen blir også brukt for å kunne gi en beregning av kapitalkrav på ulike investeringer av forskjellige kredittkvaliteter.

2.2.3 Renterisiko

Når kvalitetsrangeringen til utgiveren av obligasjonen er satt, vil denne kunne speile markedsrisikoen på obligasjon. Allikevel finnes det fortsatt en usikkerhet med tanke på markedsrenten. Det er først og fremst to scenarioer som vil være med å påvirke renterisikoen, en økning eller senkning i rente. Hvis renten går opp vil prisen på obligasjoner falle, og motsatt. Grunntanken er at når obligasjones nåverdi går ned vil utbytte bli høyere $y \uparrow$. Om markedet er på vei inn i en lavrentekonjunktur vil derimot de nye obligasjonsinvestorene innta markedet med et lovt lavere utbytte $y \downarrow$ på sine investeringer og dermed vil $BP_0 \uparrow$.

For en obligasjon med faste utbetalinger B_k fra tid $k = 1, .., K$ vil det lett kunne vises endring i verdi etter renteskift. Nåverdien til obligasjonen kan vises som

$$\mathrm{BP}_0 = \sum_{k=1}^{K} \frac{B_k}{(1 + r_k)^k} \tag{2.2.3}$$

hvor r_k er gitt markedsrente. For å finne nåverdien BP_0, må også kupongavkastningene B_k være satt av obligasjonskontrakten. Ved et uforutsett positivt skift i rente vil vi ha at

$$\mathrm{BP}_0 > \mathrm{BP}_1 \qquad \text{for} \quad r_0 < r_1. \tag{2.2.4}$$

Som viser at nåverdien til obligasjonen påvirkes motsatt av renteendringer. Dette vil igjen føre til at avkastningen y må beregnes på nytt. Denne vil på samme måte som markedsrenten skifte motsatt av nåverdien og fører til høyere avkastning ved høyere rente. Dette vil være med på å skape en ny mulighet for investorene, som kan reinvester sine obligasjoner for å få sikre avkastning.

2.2.4 Investeringsrisiko

Investeringsrisiko er risikoen en investor sitter med i sin investeringsportefølje, basert på forskjellige obligasjoner med ulik risiko. En investeringskonto for et forsikringsselskap vil fra Bølviken [**2**] side 13 ha formen

$$\mathcal{V}_k = (1 + \mathcal{R}_k)\mathcal{V}_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{2.2.5}$$

hvor $\mathcal{V}_k$ er de investerte aktiva og $\mathcal{R}_k$ er investeringsavkastningene i år k. Avkastningene er notert ved R_{ik} i år k for andelen i investeringsstrategi i, vist ved w_i. De ulike strategiene forklart i kapittel 3.3. Matematisk kan den totale avkastning til investeringsporteføljen vises som

$$\mathcal{R}_k = \sum_{i=1}^{I} w_i R_{ik} \tag{2.2.6}$$

Ressursene selskapet skaper gjennom investeringer $\mathcal{V}_k$ vil gi avkastning og svare til de fremtidige forpliktelsene for hvert år k. Som vist er denne tidsestimert gjennom at forrige års resurser er lagt til årets investeringsavkastning. Risikoen knyttet til å investere er at investeringskontoen til selskapet (2.2.5) er basert på andel w investert i strategi i for det gitte året k. Større andel i høyrisikostrategier vil gi høyere potensiell avkastning, og motsatt.

2.2.5 Durasjonsrisiko

I alle investeringer vil tidspunktet kontaktene inngås og selges være det viktigste for å sikre avkastning. Lengden på kontrakten vil gi indikasjoner på risiko, både ved inn- og utkjøpsdato, samt usikre elementer i tidsrommet av investeringen. En av disse kan være renteendringer. Hvor sensitiv obligasjonen er på renteendringer kalles durasjon. Obligasjonskontrakter med lengre varighet og høyere rente vil ha en høyere risiko, fordi sannsynlighet for endringer av utbytte vil være svært høy. En av de mest brukte målene for durasjon av obligasjoner er fra *Macauleys* durasjon. Denne er definert som en vektet gjennomsnittlig tid til forfall av pengestrømmen for en obligasjonsinvestering, og måler prissensitiviteten mot renteendringer. Matematisk (jf. Osborne [**14**], s. 3) vist ved

$$\mathcal{D} = (\sum_{k=0}^{K} \frac{T_k B_k}{(1+r)^k})/\mathrm{BP}_0 \tag{2.2.7}$$

hvor B_k er gitt som kontraktens kupongavkastning fram til tid K, B_K er siste kontraktbetaling, og BP_0 obligasjonens nåverdi. T_k er avkastningstid, normalt gitt på årlig basis. Obligasjoner med høy $\mathcal{D}$ verdier er mer sensitive til endringer i renten og gir en mer volatil avkastningskurve for investeringen. Denne teknikken blir brukt for å sikre seg mot voltilitet og tilpasse påvirkningen av rentesvingninger for den totale investeringsporteføljen, slik at ikke den totale risikoen blir for stor.

2.2.6 Likviditetsrisiko

Når markedet, spesielt for selskapsobligasjoner, er i en økonomisk lavkonjunktur vil kjøper stå sterkere i markedet enn selger. Dette kan gi vanskeligheter for å få omsatt sin obligasjon om investoren ønsker å få utbytte av sine investeringer i det gitte tidspunktet. Blant annet kan det være på grunn av lav interesse i markedet generelt eller liten tro på videre økonomisk avkastning. Dette kan føre til volatile priser og gi en negativ innvirkning på obligasjonsholderens totale utbytte. Dermed vil forsikringsselskapet kunne ha problemer med å betale ut sine forpliktelser fra investeringsporteføljen. Lang varighet på investeringene vil gi høyere likviditetsrisiko, som nøye må overveies for å kunne betale ut de fremtidige forpliktelsene.

2.2.7 Inflasjonsrisiko

Når en investor ser på mulighetene for å investere i en obligasjon er det viktigste sikkerheten i markedet og avkastningen. Ved økt inflasjon vil avkastningen minske i verdi i forhold til markedet generelt, og obligasjonen blir mindre verdt. Dermed vil innehaveren av obligasjonen tape penger på at inflasjonen øker i sterkere grad enn forventet da renten på kontrakten ble satt. Denne risikoen ved obligasjonsinvesteringer er kanskje den vanskeligste å få øye på. Dette fordi avkastningen reelt er lavere enn utbetalingen. Prisindeksen er som nevnt tidligere i sterk tilknytning til inflasjonen, en enkel modell for inflasjonen kan være $I_k = \xi$, hvor prisindeksen i tidspunkt k er gitt ved $Q_k = (1+\xi)^k$. Ved hjelp av formel 2.1.7 og 2.2.5 (jf. Bølviken [**2**], s.574) vil det være mulig å utarbeide nåverdien til investeringene med inflasjonspåvirkning, vist ved

$$\mathcal{PV}_0 = \sum_{k=0}^{K} \frac{\mathcal{V}_k}{1+r_\xi} \quad \text{hvor} \quad r_\xi = \frac{r-\xi}{1+\xi}. \tag{2.2.8}$$

Her er $\mathcal{PV}_0$ nåverdien til investeringsporteføljen, r_ξ er inflasjonsjustert rente av ξ og r er renten. Når inflasjonsfaktoren tas med i beregningen for den totale nåverdien av investeringer vil den ha en stor innvirkning på resultatet. Et eksempel for en liten forsikringsportefølje over 10 år med de samme investeringsavkastningene gir [1]

$$\underbrace{\mathcal{PV}_0 = 18.7}_{\text{Uten Inflasjon}} \qquad \underbrace{\mathcal{PV}_0 = 21.14}_{\text{Med inflasjonsfaktor } \xi = 3\%} \tag{2.2.9}$$

hvor renten er $r = 4\%$ og ξ satt til enten 0 eller 3%. Tilsammen gir dette en differanse på over 11 % kun ved å legge til en inflasjonsfaktor i renten. Ser vi da i tillegg på den totale pengestrømmen av forpliktelser fra en forsikringsportefølje, vil inflasjonen også her kunne påvirke i stor grad. Dette fordi den i tillegg også påvirker inn- og utbetalingene i pensjonskontraktene.

Summen av alle risikoene innenfor obligasjonsinvesteringen blir tatt med når kjøperen og selgeren inngår en kontrakt. Hvis risikoestimeringen blir gjennomført på en god måte vil den forvaltede pengestrømmen med stor sannsynlighet svare til porteføljens forpliktelser. Varigheten av investeringene og risikoene blir benyttet i samsvar med tidsprofilen av forpliktelsene, som beskrevet i avsnitt 3.3.

2.3 Solvency II koordinering

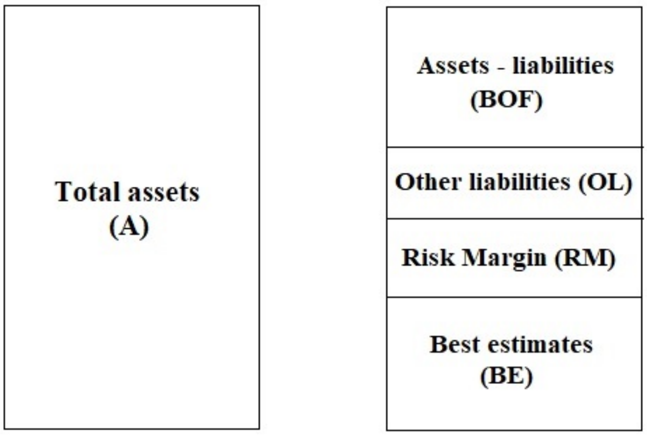
Solvency II er et EU direktiv som er satt opp for å kunne regulere all forsikringsaktivitet innenfor dem europeiske unionen med tilhørende land. Regelverket er utviklet av EIOPA, og iverksatt fra 1.januar 2016 etter 15 års utredning. Hovedmålene er å forbedre forbrukerens sikkerhet og kontrollere det totale kapitalkravet forsikringsselskapene må ha for å opprettholde en trygt finansiell fremtid. Oppsettet baserer seg på å bryte ned ulike typer forsikringsaktivitet gjennom en solvenskapital for ulike moduler. En modul er beskrevet som en av risikofaktorene et forsikringsselskap på ta høye i sin drift, for eksempel langtlivsrisiko eller dødelighetsrisiko som senere vil bli forklart i detlaj. Selskapet behandler alle sine forsikringsmoduler for så å summere disse til det totale kapitalkravet for all drift. For å gjennomføre en slik beregning må det opparbeides en oversikt slik at selskapet kan stå med økonomisk sikkerhet for alle sine fremtidige forpliktelser, en slik fremstilling kan enkelt gjøres gjennom et balanseark.

2.3.1 Oversikt - balanseark

Forsikringsselskap har utgifter gjennom sine forpliktelser i porteføljen, og skal dekke disse utgiftene med sine aktiva som innebærer inntekter fra kontrakter og investeringer.

[1]Programvare for eksempelet ligger i Tillegg A - R-kode for resultat 2.2.9.

For å kunne få et hurtig overblikk over kapitalen som kreves innad i et forsikringsselskap kan det være gunstig å sette opp en oversikt med de viktigste forpliktelsene til et selskap sett i sammenheng med resursene.



Figur 2.1: Balanseark for forsikringsselskap - her vises selskapet verdier (venstre) og forpliktelsene (høyre).

Grafisk kan dette vises som i figur 2.1, hvor den totale andel av verdier skal svare til forpliktelsene selskapet har gjennom sine porteføljer. De ulike delene av figuren er forklart nedenfor.

A − Assets. Forsikringsselskapets ulike aktiva, altså eiendeler/ressurser selskapet eier av verdi er notert som *Assets* - A. All inntjening forsikringsgiver har i sine poliser, i form av premie og andre inntjeninger, er en del av selskapets aktiva. Verdiene kan investeres i ulike markeder som for eksempel obligasjoner, eiendom eller aksjer for å få økonomisk avkastning og øke markedsverdien til selskapet. Det er disse ressursene, inntjeningen og avkastningen som skal dekke alle forventede fremtidige forpliktelser og utgifter selskapet har.

BE - Best estimate. Den viktigste komponentene i et forsikringsselskap er *best estimate* - BE. Den er beskrevet som summen av alle forventede fremtidige forpliktelser til nåværende kontrakter. Dette kan vises matematisk, hvor L_k er selskapets forpliktelser over tidsperiode $k = 1, .., K$, hvor K er siste år for oppskrevne kontrakter. I forpliktelsene i en pensjonsportefølje inngår det en premie betalt inn av forsikringstakeren og utgifter gitt ved pensjon som fordeles i hendhold til aldersfordelingen i porteføljen. Fra forsikringsmatematiske prinsipper måles selskapets inntekter negativt, mens utgiftene i en forpliktelsesvektor måles positivt. Det vil si at en BE$<$ 0, sier at de totale forventede fremtidige forpliktelsene er positive for selskapets økonomi. For eksempel vil selskapet ved en ung aldersfordeling ha store mengder premieinnbetalinger de første årene, og det vil ta lang tid før de totale forpliktelsene potensielt overstiger inntjeningen. Når inntjeningen er målt negativt, vil slike porteføljer ha en totalt lavere BE verdi enn hva eldre porteføljer har, vist ved

$$\text{BE}^{\text{ung}} < \text{BE}^{\text{gammel}}. \tag{2.3.1}$$

Her vil den forventede summen av forpliktelser være positiv fordi det blir betalt ut mer til pensjon enn hva selskapet får inn i premie, i tillegg til at forpliktelsene må utbetales i nær fremtid. Den totale forpliktelsesvektoren utarbeidet med hensyn til ulike faktorer for alle nåværende kontrakter og diskontert med hensyn på den risikofrie renten r_k.

$$\text{BE} = \sum_{k=1}^{K} \frac{L_k}{(1+r_k)^k} \quad for \quad k = 1 \ldots K \tag{2.3.2}$$

Diskonteringsrenten er ulik for hvert enkelt land under Solvency II direktivet, og er publisert og oppdatert på månedlig basis av EIOPA. Ettersom selskapet potensielt kan ha store mengder forpliktelser over alle år k =1, ...K vil dette være en stor risikofaktor, og nåverdien vil kunne ha store utslag i forhold til nyoppdateringer av renten. Denne risikofaktoren vil bli diskutert nærmere i avsnitt 2.4.1. I tillegg til best estimate er det et par andre komponenter som er med å utgjør de totale forpliktelsene et selskap har, vist i figur 2.1. Disse legges det mindre vekt på, men som en kort oppsummering defineres *RM – risk margin* som den ekstra kostnaden som må betales hvis et selskap skal ta over et annet selskaps poliser og forpliktelser knyttet til kontraktene i BE. *OL – other liabilities* er andre forpliktelser selskapet har, som ikke er beskrevet gjennom forsikringskontraktene. Her kan for eksempel skatt, lån og utbetalinger til ansatte og eventuelle aksjonærer inkluderes. Tilsammen utgjør disse komponentene det som i Solvency II kalles TP.

TP – Techncial Provision. Det totale av alle selskapets forpliktelser bli av Solvency II beskrevet som *technical provision* - TP. Denne skal være mindre enn A - aktiva. Det vil si at selskapets forpliktelser til en hver tid, over hele forpliktelsesperioden k=1, ...K, ikke skal overstige det selskapet klarer å behandle av potensielle utgifter. TP er en sum av alle forpliktelsene, vist ved

$$\text{TP} = \text{BE} + \text{RM} + \text{OL}. \tag{2.3.3}$$

Ut fra komponentene over kan vi sette sammen det totale antall forpliktelser mot selskapets aktiva og får da noe som blir kalt BOF.

BOF - Basic own funds. BOF eller *basic own funds* må gjennom alle perioder av selskapets levetid være positiv, ved negativ BOF vil selskapet gå konkurs. Enkelt forklart er BOF selskapets aktiva(A) minus de totale forpliktelsene(TP). Matematisk vist ved

$$\text{BOF} = \text{A} - \text{TP}. \tag{2.3.4}$$

Denne formelen er med på å gi et av Solvency IIs viktigste resultater. Sannsynligheten for en negativ BOF, gitt at ressursene svarer til forpliktelsene pluss en kapitalreserve skal være $0,5\%$ for hver hvert år. Dette vil matematisk vil si at en negativ BOF bare vil forekomme hvert 200 år, og kan vises ved

$$P(BOF < 0 | A = TP + SCR) = 0.005. \tag{2.3.5}$$

Fra denne sannsynlighetsberegningen vil det være mulig å definere en SCR, som da vil gi kapitalkravet forsikringsselskapet må ha i hendhold til sine ressurser og forpliktelser gjennom Solvency II reglementet.

2.3.2 Solvency capital requirement

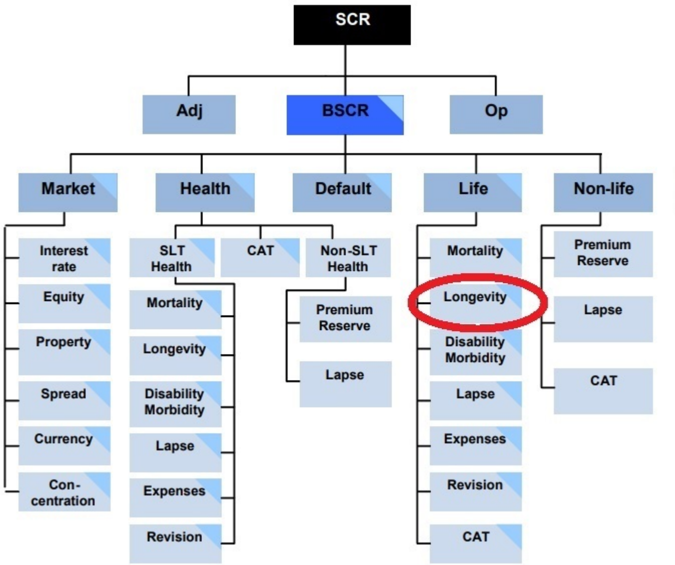
For å kunne møte sine forpliktelser på en trygg måte med tanke på sine kunder er det viktig at forsikringsselskapene har den kapitalen som kreves i forhold til sin portefølje. Denne kapitalen er strengt overvåket av Solvency II reglementet. I utarbeidelsen av beregningene er det tatt hensyn til et 99.5 % - persentil i sikkerhetsmargin, det vil si at først hvert 200. år vil et selskap ha større forpliktelser, TP og SCR, enn ressursene A. Slike beregninger er ulike for hver av forsikringsaktivtetene, og endrer seg i hendhold til selskapets risiko og varighet i de ulike porteføljene. SCR blir estimert fra alle forsikringsmoduler, basert på ulik veiledning fra EIOPA. Når dette er gjort summeres disse opp for å beregne det totalekravet for all drift, BSCR *basic solvency capital requirement*, som beskriver kapitalen for all risiko i selskapet.

Oppbygningen av all forsikringsdrift og summeringen oppover i selskapet blir vist gjennom figuren 2.2. Det første som skjer er at forsikringsselskapet tar for seg en sluttnode i, dette er forsikringsmodul som ikke har noe underliggende informasjon, for eksempel *longevity* notert som SCR_{long}. Generelt kan dette skrives som SCR_i, kapitalkravet for modul i, hvor i er alle kapitalreservene selskapet må estimere. Fra Solvency II dokumentasjon kan alle sluttnodene estimeres, og slås sammen til sin nærmeste overliggende modul. For eksempel vil SCR_{long}, SCR_{mort} og eventuelt andre underliggende summeres til det totale kapitalkravet for livsforsikring SCR_{life}. På samme måte summeres denne opp med andre moduler på samme nivå, for eksempel $\text{SCR}_{\text{marked}}$. Denne prosedyren gjentas til man står igjen med summen av det totale kapitalkravet for all forsikringsdrift i selskapet, BSCR. Senere i denne oppgaven skal kapitalreserven for levetidsrisiko fra en pensjonsportefølje beregnes. Denne sluttmodulen er notert som SCR_{long} og markert med rød sirkel i figur 2.2.

I tillegg til de beskrevende forsikringsmodulene må et forsikringsselskap også ta hensyn til nodene SCR_{op} og *adjustment*. SCR_{op} er risiko i driften av selskapet som kommer av tap som følge av rutinefeil, systemfeil eller menneskelige feil som ikke er tatt med i beregningen gjennom normal drift. Adjustment er korrigering for tap som blir satt inn i TP, som for eksempel baksmell på skatten og andre tapsutbytte til aksjonærer.

2.3.3 Standardformelen

For å få en oversikt over den totale kapitalreserven i lys av en gitt portefølje under Solvency II brukes standardformelen for å slå sammen og summere de ulike modulene av selskapet. For hver av grenene i figuren 2.2 bruker man formelen og en korrelasjonsmatrise til å bygge seg oppover i selskapet, for til slutt å få det totale kapitalkravet.



Figur 2.2: Solvency capital requirement for forsikringsselskap brutt ned i moduler, hvor langtlivsrisiko for livsforsikring er markert i rødt (EIOPA[**5**],s.120).

For to undermoduler i og j vil kapitalkravet for modul y kunne vises som

$$SCR_y = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} \times SCR_i \times SCR_j \right)^{1/2} \tag{2.3.6}$$

hvor ρ_{ij} er korrelasjonen mellom undermodul i og j. Dette oppsettet er generelt for alle kapitalkrav, hvor kun korrelasjonen endres i forhold til forsikringsdriften. Korrelasjonsmatrisen for livsforsikringsmodulen er vist i tabell 2.2[2].

	Mortality	CAT	Longlivity	Disability	Lapse	Expenses	Revision
Mortality	1						
CAT	0.25	1					
Longlivity	-0.25	0.25	1				
Disability	0.25	0.25	0	1			
Lapse	0	0.25	0.25	0	1		
Expenses	0.25	0.25	0.25	0.5	0.5	1	
Revision	0	0	0.25	0	0	0.5	1

Tabell 2.2: Korrelasjonsmatrise av modulene i SCR_{life} (Delegated Acts [**3**], s.127).

For å finne SCR for modul i og j har EIOPA utarbeidet ulike metoder for bergeninger av et 99.5 %-persentil i alle forsikringsmodulene. I livsforsikring, SCR_{life} er det først og fremst levetidsrisiko og dødsrisiko som er med på å bestemme kapitalkravet, og det er utarbeidet tester for å endre dødeligheten slik at kapitalkravet dekker økonomiske endringer i porteføljen under ugunstige forhold. Dette kalles stresstester.

[2]Korrelasjonsmatrise for videre beregninger av BSCR er vist i Tillegg B

2.3.4 Stresstester for økt levetid

En av de største risikoene ved pensjonsforsikring er at mennesker lever lengre. For eksempel (jf. SSB [**16**]) økte forventet levealder ved fødselen med 0,2 år for begge kjønn fra 2012 til 2013. Ser vi da på en pensjonskontrakt med varighet 70 år, vil denne økningen ha en stor betydning.

For å kunne sikre seg mot oppgang av levealder bruker Solvency II såkalte *stresstester*. Slike tester brukes for at selskapene skal ha kapitalreserven som kreves i hendhold til sin portefølje under ugunstige dødelighetsendringer. Stresstester innenfor livsforsikring er endringer i døds- eller overlevelsessannsynlighet for å fremprovosere et verst tenkelig scenario, og hvilken økonomisk påvirkning dette fører med seg. Dette for å sikre seg mot store endringen i levemønsteret og dermed endringer i forhold til forventet pengestrømmer inn og ut. Testen for en pensjonsportefølje blir utført ved å sette et sjokk av nedgang i dødeligheter med $S = -20\%$, det vil si at folk lever lengre. Sjokket er utarbeidet av EIOPA, og skal føre til en kapitalreserve med 99.5 %-persentil. Dødelighetssannsynligheten er en enkel overgang fra overlevelsessannsynlighet vist i formel 2.1.1 og er gitt ved $q_l = 1 - p_l$, for år l = $0, ...l_e$, hvor l_e er død. Den nye stressede dødeligheten kan nå vises som

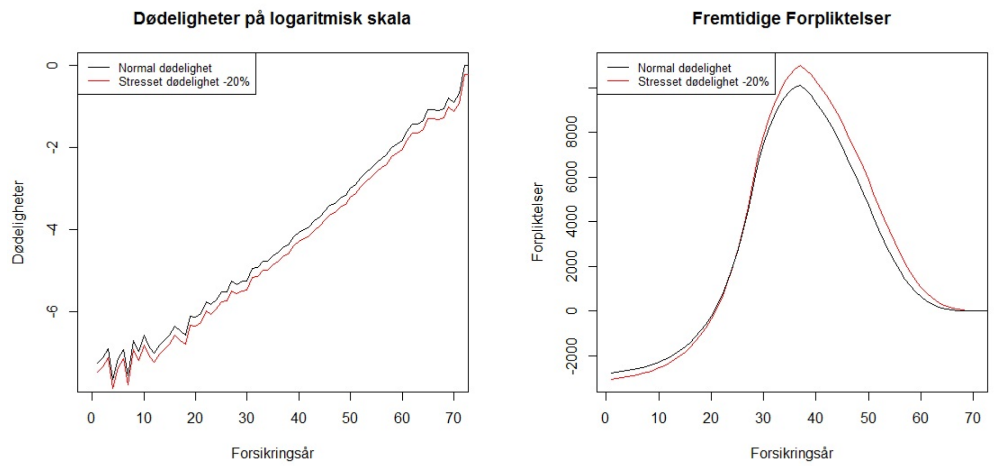
$$q_s = (1 + S)q_l \tag{2.3.7}$$

hvor q_s er stresset dødelighet med hensyn på sjokk S. Fra dette kan det gjøres en ny beregning av BE med endret dødelighet, nå notert som BE$_s$. Dette er best estimate med stresstestet dødelighet, som beskriver den forventede summen av alle fremtidige forpliktelser ved det verst tenkelige dødelighetsscenarioet. Med den originale og stresstestede BE er det mulig å definere solvency capital requirement for langtlivsrisiko ved

$$SCR_{long} = BE_s - BE. \tag{2.3.8}$$

Her BE_s er best estimate med et sjokk i nedgang av levealder, og BE er estimatet for nåværende data. Tilsammen vil disse gi SCR_{long} som vil være med å bestemme kapitalkravet for langtlivsrisiko i pensjonsporteføljen.

Et økt levetidssjokk er vist gjennom figur 2.3, hvor det eksterne sjokket S gir en ny dødelighet q_s. I figuren er den plottet sammen med den originale dødeligheten begge på logaritmisk skala(venstre). En slik økning i levetid fører til et skifte i den totale dødelighetsraten gjennom alle forsikringsår $k = 1, ..., K$. Figur viser et forsikringsselskap med 50000 kunder, hvor det er antatt at alle kundene signerer kontrakt ved år 30, og kontrakten brytes først ved død. Plottet (høyre) viser selskapets fremtidige forpliktelser i en pensjonsportefølje med og uten sjokk i økt levetid. Her vises det at en lavere dødelighet først påvirker forpliktelsene i stor grad 30-40 år ut i kontraktsperioden, dette på grunn av en stor del av forsikringspopulasjonen blir pensjonister 37 år inn i sine kontrakter. Det vil føre til at forsikringsselskapet får lavere inntekter gjennom premieinnbetalingene og den årlige pensjonsutbetalingen vil vare over flere år. Forskjellen på de totale fremtidige forpliktelsene med- og uten økt levetid, som vist i formelen 2.3.8 legge grunnlaget for det totale kapitalkravet for pensjonsporteføljen.



Figur 2.3: Logplot av Stresstest dødelighet -20% (venstre), fremtidige forpliktelser med stresset dødelighet (høyre).

2.3.5 Stresstester for økt dødelighet

For livsforsikringsselskapet med porteføljer innenfor dødsforsikring vil en økt levetid kun gi økt profitt. Dermed brukes en annen type stresstest som kalkulerer en økt dødsrisiko istedenfor en økt levetidsrisiko. Denne blir beregnet ut fra et sjokk i økt dødelighet i alle aldersfordelinger i porteføljen gitt ved $S = 15\%$. Sjokket brukes på samme måte som i levetidsrisikoen, hvor den nye versjonen av dødeligheten kan vises som

$$q_s = (1 + S)q_l \tag{2.3.9}$$

hvor q_s er den stressede versjonen fra de originale dødelighetene q_l, for år $l = 0, .., l_e$. Denne blir igjen brukt til å finne BE_s og nå SCR_{mort}, kapitalreserven for dødelighetsrisiko ved

$$\text{SCR}_{mort} = \text{BE}_s - \text{BE} \tag{2.3.10}$$

hvor nå $S = 15\%$. Etter å ha estimert kapitalreserven for henholdsvis en pensjons- og dødelighetsforsikring, kan disse blir slått sammen til en samlet kapitalmodul for livsforsikring. Dette gjøres via standardformelen på samme måte som beskrevet tidligere med hensyn til en korrelasjonsfaktor for de to modulene. Korrelasjonen mellom døds - og levetidsrisiko er gitt gjennom Solvency II og er satt til $-0,25$ vist i tabell 2.2. Dette fordi lavere dødelighet vil gi en korrelasjon til lengre levetid og motsatt, dermed vil kapitalreserven for disse to endres fordi sjokkene i realiteten ikke kan skje samtidig.

I tillegg til dødelighet og levetidsrisikoen er også SCR_{Cat}, SCR_{disa}, SCR_{laps}, SCR_{expe}, SCR_{rev} med på å bestemme den totale kapitalreserven som må beregnes under livsforsikringsmodulen, SCR_{life}.

2.3.6 Minimum capital requirement

I seksjonene over er det vist hvordan SCR gir grunnlaget for utregning av kapitalen et selskap må ha, med hensyn til sin portefølje innenfor de ulike delene av forsikringen.

Dette er et krav som er satt av EIOPA som skal forsikre kundene om at selskapet kan betale tilbake kontraktene, selv ved større endringer av populasjonens levetid. Den absolutte minimumsgrensen er kalt MCR, *minimum capital requirement* og er det minste kapitalkravet et selskap kan ha. Den er definert på samme måte som SCR i formel 2.3.5, hvor kun persentilen er endret fra 99.5% til 98.5%. Er kapitalkravet estimert under MCR vil selskapet bli suspendert fra drift i to år. Dette gjøres for at forsikringsselskapet skal ha en god økonomisk dekking, og kundene skal føle seg trygge på at kontraktene kan opprettholdes.

$$P(BOF < 0|A = TP + MCR) = 0.15 \tag{2.3.11}$$

I tillegg er det også andre rettningslinjer som må følges med hensyn til type kapitalreserve, dette er blant annet behandlingen av selskapets BOF. Disse middlene skal holdes i sikre nok investeringer slik at de forventede forpliktelsene kan betales ut. Den sikreste investeringsgraden er beskrevet som **Tier 1** og er investeringer med én høy sannsynlighet for tilbakebetaling og liten risiko for tap av kapital. Solvency II spesifiserer at for SCR skal minimum 50 % av investeringsporteføljen skal ha en slik kvalitet, for å kunne sikre fremtidig pengestrøm mot store fluktuasjoner(Delegated Acts [**3**], artikkel 82). Maximum 50 % av den resterende porteføljen skal investeres i **Tier 2**, her finnes det blandede avkastningsmuligheter i forhold til risiko og volatilitet. De mest usikre elementene av investering er samlet i **Tier 3**. På grunn av større risiko kan maksimum 15 % av investeringsporteføljen settes i slike investeringer. På samme måte oppgir EIOPA spesifikasjoner i forhold til minimumsreserven, MCR, kun basert på andre restriksjoner i forhold til sikkerhet for den totale investeringsporteføljen. Her ser vi blant annet at det ikke vil være mulig med investeringer innenfor de mest volatile avkastningsmulighetene, tier 3, og dermed vil en slik fordeling føre til en mindre risiko i den totale investeringsporteføljen. Fordelingen er vist i tabell 2.3.

	SCR	MCR
Tier 1	Min 50 %	Min 80 %
Tier 2	Max 50 %	Max 20 %
Tier 3	Max 15 %	-

Tabell 2.3: Solvency II spesifikasjon av investeringer for SCR og MCR

I livsforsikringsmatematikk ligger det en grunnleggende forståelse for hvordan risikoen beregnes ut ifra hvert selskaps portefølje. En viktig tilhørende beregning, som til nå ikke har blitt diskutert, er markedsrisikoen bak forsikringsdriften. I tilfellet av en pensjonsportefølje omhandler dette forvaltningen av pengestrømmen over alle år. Hvilke investeringer som er gjort, og hvor stor risiko disse innehar i forhold til ulike finansielle virkemiddler. Denne problematikken beskrives av Solvency II i markedsrisikomodulen $\text{SCR}_{\text{marked}}$.

2.4 Solvency II markedsrisiko

Totaloversikten til selskapet deles inn i ulike kategorier. Markedsrisikoen omhandler den delen av selskapet som blir påvirket av finansielle endringer, som renter, valuta og avkastninger av investeringer. For i tillegg å dekke kapitalbehovet for den opplagte driften av selskapet, må også risikoen for endringer i forventet inntekt og utvikling av finansielle investeringer tas med i betraktning. Under denne delen av selskapsoversikten av kapitalkrav finnes renterisiko SCR_{int}, aksjerisiko SCR_{eq}, eiendomsrisiko SCR_{prop}, spreadrisiko SCR_{spre}, konsentrasjon SCR_{con} og valutarisiko SCR_{cur}. Målet med markedsrisikoen er å forsikre selskapet mot feilvurderinger i markedet, og forhindre for store risikoinvesteringer som ikke samsvarer med de fremtidige forpliktelsene. Hver av de ulike kapitalreservene er summert opp på samme måte som beskrevet tidligere via standardformelen og en egen korrelasjonsmatrise oppgitt i Delegated Acts [**3**] i artikkel 164. Notasjon er hentet fra side 31-38 i Bølviken [**1**].

2.4.1 Renterisiko

En gjennomgående risiko i Solvency II direktivet er endringer i rente r_k for år k = $1, ..., K$. Spesielt i beregningene av best estiamte hvor den risikofrie renten blir brukt i diskontering. Her vil små utforutsette endringer kunne gi potensielt store økonomiske utslag. For å forsikre seg mot disse endringene vil et forsikringsselskap måtte stå med kapitalkrav med hensyn til renteendringer. For et selskap vil både investeringene gitt ved $B_1, ..., B_K$ og forpliktelsene $L_1, ..., L_K$ bli påvirket av positive eller negative endringer, og EIOPA har dermed satt opp ulike stresstester med tanke på dette. Disse er på samme måte som dødelighetsendringene utregnet med tanke på ufordelaktige antagelser og de to rentesjokkene s_k^+(positivt) og s_k^- (negativt) oppgitt i Delegated Acts [**3**], artikkel 166-167 . Sjokkene påvirker renteendringene over alle tidsperioder $k = 1, ..., K$ ved

$$r_k^+ = r_k(1 + s_k^+) \qquad og \qquad r_k^- = r_k(1 - s_k^-) \tag{2.4.1}$$

som vil være med å påvirke selskapets aktiva A. r_k er oppgitt av EIOPA for ulike land på månedlig basis, mens sjokkene er en generell tilnærming. Den originale og de to stressende antagelsene er gitt ved

$$A = \sum_{k=1}^{K} \frac{L_k - B_k}{(1 + r_k)^k}, \quad A^+ = \sum_{k=1}^{K} \frac{L_k - B_k}{(1 + r_k^+)^k}, \quad A^- = \sum_{k=1}^{K} \frac{L_k - B_k}{(1 + r_k^-)^k} \tag{2.4.2}$$

for positivt og negativt sjokk i renten, A^+ og A^-. Til sammen vil disse verdiene være med på å gi kapitalreserven for renterisiko gitt ved

$$\text{SCR}_{int} = \max(A^+ - A, A^- - A). \tag{2.4.3}$$

Igjen utarbeidet av EIOPA for estimering av 99.5% persentilen til kapitalreserven for endringer i den risikofrie renten.

2.4.2 Aksjerisiko

I aksjeinvesteringer vil det alltid være ulike risikoer avhengig av ulike typer aksjer. Solvency II deler dette opp i to typer, enten i type 1, EEA(European Economic Area) og OECD(Organization for Economic Cooperation and Development), som er de fleste vestlige land med USA. Eller i type 2 aksjer fra resten av verden. Kort sagt gir dette en kapitalreserve ut ifra verdien av investeringene multipliser med et sjokk, s_1 for type 1 og s_2 for type 2, og A_i ut ifra hvilken type aksje som er investert i.

$$\mathrm{SCR}_{eq} = A_i \times s_i \quad \text{for} \quad i = 1, 2 \tag{2.4.4}$$

Sjokkene s_1 og s_2 er gitt i artikkel 170 i Delegated Acts [**3**], og beskrevet ut ifra hvilke og forholdet av aksjer som det er investert i. For eksempel vil en ren investeringsstrategi av type 1 aksjer gi et sjokk 22%.

2.4.3 Eiendomsrisiko

Eiendomsrisikoen beskrevet av Solvency II direktivet er beskrevet under den samme strukturen som aksjerisiko, kun med et annet sjokk. For investeringer i eiendom er dette gitt ved $s = 25\%$. Dette sier at den totale investeringsporteføljen av ressurser i eiendomsmarkedet A, skal sjokkes med en nedgang i markedet, og gir kapitalreserven for eiendomsrisiko lik

$$\mathrm{SCR}_{prop} = s \times A \quad \text{hvor} \quad s = 0.25 \tag{2.4.5}$$

2.4.4 Spreadrisiko

Spreadrisiko har en noe ulik beregning enn de foregående, mye på grunn av at dette ikke er en typisk sluttnode. Det betyr at kapitalreserven for spreadrisiko $\mathrm{SCR}_{\text{spre}}$ er delt inn i tre underliggende moduler, obligasjoner $\mathrm{SCR}_{\text{bond}}$, sekurisajon $\mathrm{SCR}_{\text{sec}}$ og kredittderivater $\mathrm{SCR}_{\text{crder}}$. Til sammen blir de underliggende kapitalreservene summert opp som

$$\mathrm{SCR}_{\text{spre}} = \mathrm{SCR}_{\text{bond}} + \mathrm{SCR}_{\text{sec}} + \mathrm{SCR}_{\text{crder}} \tag{2.4.6}$$

hvor det først må gjøres beregninger på hver og en av disse. Kapitalkravet for obligasjoner blir utformet av kredittkvaliteten til utgiveren, enten av stats-eller selskapsobligasjoner oppgitt i tabell 2.1. Samt durasjonen til hver av investeringene. Totalt gir dette sjokket $s(d_j, \omega_j)$ for durasjon d_j og kredittkvalitet ω_j. For hver av de ulike investeringene er sjokket vist i Artikkel 176 i Delegated Acts [**3**], og totalt gis dette som summen av alle obligasjonsinvesteringene.

$$\mathrm{SCR}_{bond} = \sum_{j=1}^{J} s(d_j, \omega_j) \times A_j \tag{2.4.7}$$

Hvor A_j er obligasjonsinvestering $j = 1, ..., J$ med tilhørende sjokk. Sekurisasjon har samme struktur i utregningen og beskriver ulike typer av gjeldsprodukter. Her blir på samme måte markedsverdien A redusert med et sjokk basert på hvor sikker utlåneren av gjeldsproduktene er. Den siste delen av spreadrisiko er kredittderivater, Credit Default Swaps (CDS). Som er reforsikret gjeldsrisiko som blir betalt via premier for å forsikre seg mot at låntaker kan betale gjelden sin. Tilslutt blir disse tre delene summert opp til den totale kapitalreserven for spreadrisiko.

2.4.5 Valutarisiko

I den moderne økonomien er det få hindringer i å investere sine ressurser i ulike land med ulik valuta. Solvency II behandler denne risikoen på samme måte som tidligere, ved å beregnet sjokk i den lokale valutaen j, for $j = 1, ..., J$ ulike investerte valutaer. Kapitalreserven basert på ressursene og forpliktelsene i portofolioen i valuta j, er gitt ved

$$\mathrm{SCR}_j^{\mathrm{cur}} = |A_j - L_j| \times s, \quad \text{hvor} \quad s = 0.25. \tag{2.4.8}$$

Dette viser én 25% nedgang i de totale investeringene og forpliktelsene forsikringsselskapet har i hver valuta j. Tilsammen kan et stort internasjonalt selskap ha flere titalls ulike valutaer i sin portefølje, for å utarbeide den totale valutarisikoen summeres disse enkelt opp til det totale kapitalkravet gitt ved

$$\mathrm{SCR}_{\mathrm{cur}} = \sum_{j=1}^{J} \mathrm{SCR}_j^{\mathrm{cur}} \tag{2.4.9}$$

for alle ulike valuta j $= 1, ..., J$.

Kapittel 3

Modell for investeringer og dødelighet

Tradisjonelle dødelighetsmodeller, som introdusert i kapittel 2, baserer sine estimater på empirisk dødelighetsdata. Disse fungerer fint i innføring og basisutregninger i livsforsikring, men skal vi få et nøyaktig resultat som speiler virkeligheten på en realistisk måte, må disse justeres. Levetiden i den vestlige verden har vært i økende trend over en lengre periode, og som en konsekvens for et forsikringsselskap vil dette være en stor risikofaktor som må tas med i beregningene. Derfor vil Lee-Carter modellen for prediksjon av dødeligheter bli introdusert. Dette er en dødelighetsmodell som basere seg fremtidig utvikling av dødelighet, istedenfor kun historiske observasjoner. På samme måte må investeringsmulighetene utvikles. I en pensjonsportefølje finnes det inn-og utbetalinger over mange tiår, for å forvalte disse vil Wilkie-modellen bli benyttet. Dette er en modell som vil påvirke den finansielle situasjonen og simulere avkastningsmulighetene for en investeringsstrategi. Både modellen for investeringer og dødelighet vil ha store konsekvenser for det endelige resultatet, og sammen vil de gi en mer realistisk fremstilling av en pensjonsportefølje.

3.1 Dødelighet i Norge

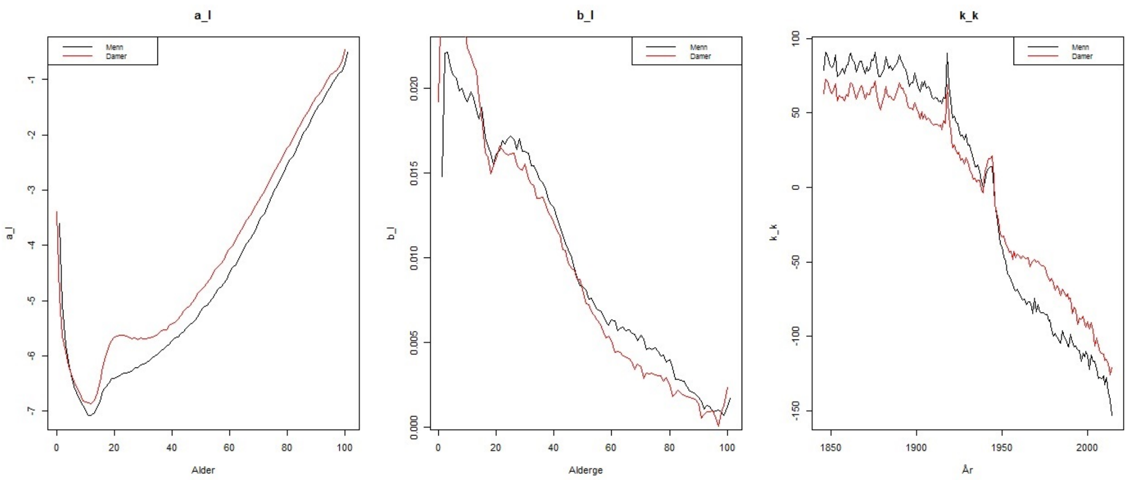
I Norge har det opp gjennom historien vært mange ulike momenter som har vært med på å prege levestandarden og dødeligheten i landet. Fra et forsikringsstandpunkt vil alle disse ulike faktorene være av stor interesse, både med hensyn til levetiden for populasjonen og eventuelle risikoer for at denne skal endre seg gjennom en gitt tidsperiode. I livsforsikring opereres det med kontrakter over lang tid, uten at man er sikker på at levetiden ved slutten av kontrakten er det samme som ved oppstart. Tall fra SSB [**16**] viser at i de siste 30 årene at levetiden for norske menn har økt med rundt åtte år. Ved en feilestimering av videre økningen i levetid, kan det for et forsikringsselskap ha store økonomiske konsekvenser - enten i positiv eller negativ forstand. Det finnes flere etablerte modeller som predikerer dødeligheten og levetiden i fremtiden. En av disse modellene er Lee Carter modellen, som er en dynamisk dødelighetsmodell.

3.1.1 Dynamisk dødelighetsmodell

Ronald Lee og Lawrence Carter brukte historiske dødelighetsdata fra 1933-1987 til å lage en modell med hovedmål å beregne fremtidig dødeligheter for en befolkning. Fra Spedicato [**15**] er Lee-Carter modellen matematisk definert ved

$$ln(q_{l,k}) = a_l + b_l k_k + \epsilon_{l,k}. \tag{3.1.1}$$

Hvor a_l er gjennomsnittdødeligheten for alle aldre over ulike år l, basert på historiske data. b_l er forskjellen i dødelighet over en gitt tidsperiode k=$1, ..., K$, med tidstrend k_k. Feilleddet i modellen antas normalfordelt med forventing og varians gitt ved $\epsilon \sim \mathcal{N}(0,\, \sigma^2)$. For å finne en løsning til formel 3.1.1 har modellen antagelser om at $\sum b_l = 1$ og at $\sum k_k = 0$, og dermed kan det vises at a_l er den logaritmiske funksjonen av gjennomsnittlig dødelighet basert på historiske data, gitt ved $ln(q_{l,k}) = a_l$. Etter å ha funnet a_l gjennom empirisk data kan det brukes ulike estimeringsmetoder for å løse b_l og k_k. Disse løses ut til siste år med data år k, i dette tilfellet 2014. Verdiene for paramterene er vist i figur 3.1[1].



Figur 3.1: De historiske verdiene for de ulike parameterne i Lee-Carter modellen for menn og damer i Norge fra år 1886 - 2014

Ved å anta at gjennomsnittlig dødeligheten a_l og endringen i dødelighetsrate b_l er funnet er det mulig å estimere en fremtidig tidstrend $\hat{k}_{k+h}$, for h antall år med prediksjon. Utformingen av denne forlengelsen er det flere som er uenige om, og det finnes i hovedsak tre ulike metoder, Lee-Carter-, Lee-Miller- og Booth-Maindonald-Smith-justering. Uavhengig av justering eller ikke, baserer Lee-Carter seg på å estimere $\hat{k}_{k+h}$ gjennom ARIMA modellering for å predikere dødeligheten.

Autoregressiv integrated moving avarage - ARIMA er en generalisering av ARMA modeller hvor det er lagt til et led for å forhindre store endringer i mønstrene til prosessene. Det betyr at nivåene ikke skal fluktuere for langt fra likevektsnivå for en normal dødelighetsprediksjon av for eksempel tidsserien $\hat{k}$. ARMA og ARIMA modeller brukes

[1]Programvaren for figurer og beregninger av Lee-Carter prediksjon er vist i Tillegg A - Programvare, R-Kode for Lee-Carter prediksjon.

for å predikere ulike statistiske tidsserier, og finne fremtidsverdiene til disse seriene. ARMA modellen er delt inn i to deler. **AR** *Autoregressiv*, er en prediksjon i tidssteg k, som baserer seg på gjennomsnittet av tidligere tidssteg i p perioder bakover i tid. **MA** *Moving avarage* - fanger opp feilleddene som endrer seg gjennom tidsrekken predikert av AR-modellen og vil behandle korttidsfluktuasjoner fra år til år. Fra Bølviken [**2**] side 491 beskrives modellene som

$$AR(p): X_k = a_1 X_{k-1} + a_2 X_{k-2} + \ldots + a_p X_{k-p} + \sigma\epsilon_k \qquad \textit{AR-modell} \tag{3.1.2}$$
$$MA(q): X_k = \sigma(\epsilon_k + b_1\epsilon_{k-1} + \ldots + b_q\epsilon_{k-q}) \qquad \textit{MA-modell} \tag{3.1.3}$$
$$ARMA(p,q): X_k = AR(p) + MA(q) \qquad \textit{AR og MA gir ARMA} \tag{3.1.4}$$
$$ARIMA(p,d,q): X_k = ARMA(p,q) + \delta. \tag{3.1.5}$$

Her vises oppbygningen av en ARMA og ARIMA modell hvor det er antatt at $\epsilon \sim N(0,1)$. ARIMA er en forlengelse av ARMA modellen hvor det legges til driftledd. For å estimere fremtidige verdier av $\hat{k}_{k+h}$ bruker Lee-Carter modellen en ARIMA(0,1,0), som baserer seg på tilfeldig gang med driftledd. Det betyr at neste verdi i rekken er det forrige steget pluss en drift δ. Prediksjonen av k-verdiene kan gjennom ARIMA modellen vises som

$$\hat{k}_{k+h} = \hat{k_k} + h\hat{\delta} + \epsilon_k \tag{3.1.6}$$

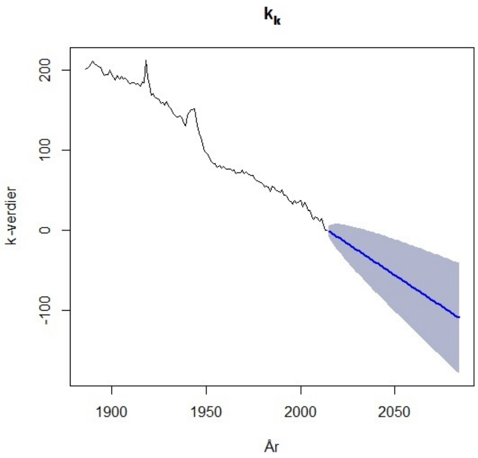
hvor gjennomsnittlig $\hat{\delta}$ endring i tidsrekken og ϵ_k er feilleddet. Antall år som predikeres er gitt ved $h = 1, 2, ...$ fra år med empirisk data k. I Lee-Carter modellen er driftleddet $\hat{\delta}$ ukjent og må finnes gjennom en estimering vist ved

$$\hat{\delta} = \frac{1}{k-1}\sum_{k=1}^{k} k_k - k_{k-1} = \frac{k_k - k_1}{k-1}. \tag{3.1.7}$$

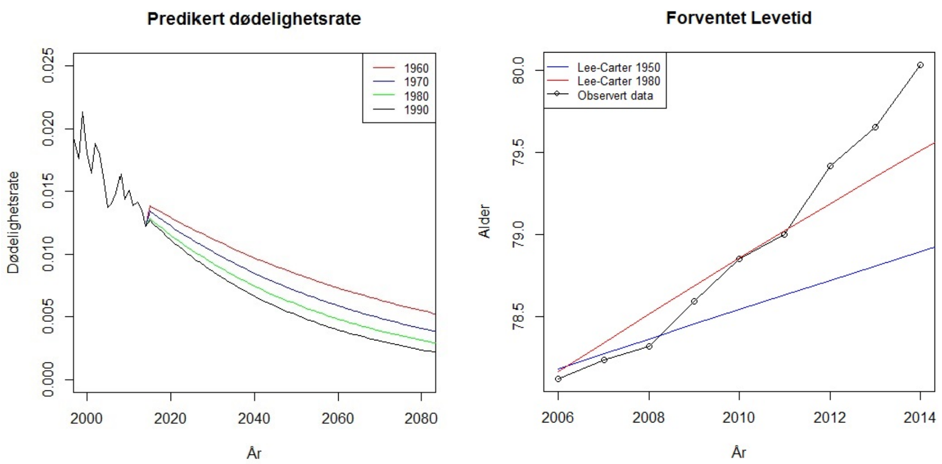
Her er k_k siste året med kjent data, og k_1 første året hvor dataen er hentet fra. Driftleddet brukes til å finne alle fremtidige verdier til tidsrekken $\hat{k}_{k+h}$. Disse er sammen med alle historiske verdiene for den norske befolkningen vis i figur 3.2. Her vises det at k_k- verdier fra 1886 til 2014 med synkende trend gjennom hele tidsperioden. Før en predisjon av $\hat{k}_{k+h}$, fra år 2015 med h =1, 2..., 70, som gir en videre nedgående trend 70 år frem i tid.

Etter å ha predikert tidsrekken $\hat{k}_{k+h}$, og funnet estimater for $\hat{a_l}$ og $\hat{b_l}$ er det mulig å kunne gi et anslag på dødeligheter frem i tid. Dataen som er brukt til å produsere de ulike prediksjonene for dødelighetsraten er hentet for norske menn i pensjonsalder 67 år, fra årstall $k_1 = \{1960, 1970, 1980, 1990\}$ til k = 2014. Det vil si at Lee-Carter modellen bruker disse ulike tidsperiodene for å estimere nye tidsserier $\hat{k}_{k+h}$, for så å finne dødelighetsraten. Det største problemet er å finne en datamengde som samsvarer overens med dagens standard. For eksempel ved bruk av utdaterte tidstrender vil fremtidig prediksjon overestimere dødeligheten, ettersom levestandarden var lavere bare noen få tiår tilbake i tid.

På 60-og 70-tallet var røyking en stor del av hverdagen til norske menn, i tillegg til at den medisinske utviklingen og livskvalitet generelt stod tilbake for det vi har i dag. Dette førte til at dødelighetene var betydelig , og at dødelighetstrenden herfra har



Figur 3.2: Prediksjon av $\hat{k}_k$ -verdier for hele den norske befolkningen, basert på data fra 1886 til 2014. 70 år frem i tid.



Figur 3.3: Predikert dødelighetsrate for norske menn på 67 år(*venstre*), og forventet levetid for norske menn fra år 2005(*høyre*), med ulik historisk dødelighetsdata.

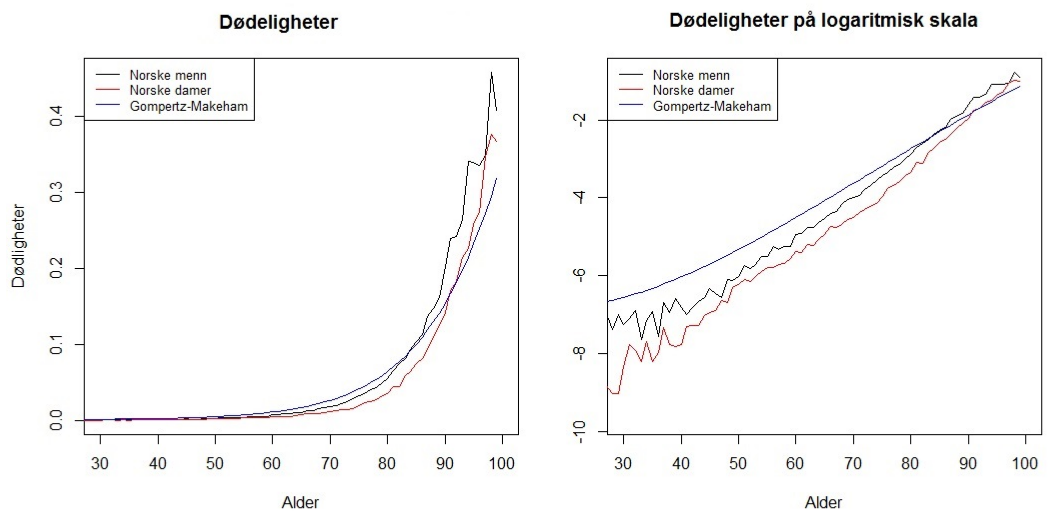
en sterk nedgående trend. Vil en slik datamengde kunne gi gode resultater langt inn i fremtiden, eller er gammel dødelighetsdata utdatert? For å svare på dette skal vi gå tilbake til 2005 for å se på ulike Lee-Carter prediksjoner, og sammenlikne med observerte data de neste 10 årene.

Fra figur 3.3 kan det vises at jo lenger tilbake i tid Lee-Carter modellen henter data fra, desto mer vil modellen overestimere dødelighetene (venstre). Dette kommer av at levetiden var lavere og dødelighetsraten var større for hvert tiår tilbake i tid. Det vises at daten fra 1990 gir en mindre dødelighet enn resten, som kommer av at levetiden de siste 10-20 årene har steget betraktelig. Ettersom denne dødelighetsprediksjonen baserer seg på få år, vil små endringer i dødeligheten gi store forskjeller i fremtidige verdier. At en slik økning vil forekomme over lang tid inn i fremtiden vil være mindre sannynlig, og det vil derfor i videre beregninger antas at 1990 dataen har for liten informasjon til fremtidig prediksjon.

I figuren (høyre) vises det forventet levealder for norske menn med samme typer antagelser. Her er det hentet data fra 1950 og 1980 til år 2005, for så å predikere det neste tiåret opp mot faktiske observerte levetider. Det som vises er at Lee-Carter modellen klarer å predikere de observerte endringene i levetid bedre ved en kortere historikk som er mer lik nåværende levestandard. De fremtidige levetidene som baserer seg på tall fra 1950 - 2005, har en betydelig overestimering av dødeligheten i forhold til de faktiske tallene og vil være et dårlig grunnlag for fremtidig prediksjon. Denne overestimering kommer av prediksjon i en periode med høyere dødelighet enn hva vi har i dag, og dermed vil dataen nærmere vår tid speile den fremtidige usikkerheten på en mer realistisk måte. I videre beregninger av levetidsendringer vil perioden 1980-2014 bli brukt, ettersom denne samsvarer godt med prediksjon av økende levetider med stor nok datamengde.

3.1.2 Sammenlikne dødelighetene

Ulike dødeligheter og forskjellen på estimeringen av disse er en stor del av risikoarbeidet for et forsikringsselskap. Lee-Carter modellen predikerer forventet dødeligheten til et bestemt år, fra en allerede gitt dødelighet. Tidligere ble Gompertz-Makeham modellen introdusert. Denne modellerer en parametrisk dødelighet for alle aldre. I figuren 3.4 under er det satt opp en sammenlikning av de reelle dødelighetene for norske menn og kvinner fra år 2014, mot en Gomertz-Makeham estimering. Denne modellen er satt opp som en illustrasjon av potensielle feilestimater av dødeligheter, og er modellert med parametere (Bølviken [**2**], s.466) $\theta_0 = 0.00078$, $\theta_1 = 0.00003$ og θ_2= 0.09327, fra formel 2.1.2. Disse parameterne er basert på amerikanse menn, men vil allikvel gi en god indikasjon dødelighet i en vestlig verden. De reelle dataene er hentet fra *Human Mortality Database* (HMD) som er en database av internasjonale dødeligheter [**10**]. I Norge finnes det en oversikt over alle dødeligheter i alle aldre for menn og kvinner fra år 1886 til 2014.



Figur 3.4: Dødelighetsplot for norske menn og damer sett opp mot Gompertz-Makeham estimering, på vanlig skala(venstre) og på logaritmisk skala(høyre).

Figur 3.4 viser dødelighetene til en forsikringsportefølje, hvor det er antatt at kontrakten skrives opp i 30 år og varer til kontraktslutt ved død. Selv om de forskjellige dødelighetene (venstre) ser like ut frem til pensjonsalder, 67 år kommer det godt til syne gjennom figuren av den logaritmiske skalaen (høyre) at forskjellene er tilstedeværende. Kvinner har en klar lavere dødelighet gjennom alle aldre, og kun helt i slutten av livet, når det er flere kvinner enn menn i live, vil dødelighetene nærme seg hverandre. Dette kommer av at kvinner har en lengre forventet levealder enn menn, og selv om forskjellene de siste årene har blitt mindre vil dette fortsatt være en faktor som skal tas med i beregninger. I Gompertz-Makeham illustreres det gjennom figuren at modellen overestimerer dødeligheten i ung alder, mens den underestimerer dødeligheten i sen alder med tanke på til de reelle dataene. Beregninger av ekvivalenspremie kommer direkte fra formel 2.1.10. Det vil oppstå differanser i estimater av ulike levetidstabeller, basert på hver sine dødeligheter. Denne forskjellen er vist ved

$$\hat{\pi} = 0.0588 \qquad \text{og} \qquad \hat{\pi}_{\text{GMH}} = 0.0518 \qquad\qquad \text{målt i MNOK/år,} \tag{3.1.8}$$

for $\hat{\pi}$ premie estimert etter observerte dødeligheter i år 2014 og $\hat{\pi}_{\text{GMH}}$ estimert etter Gompertz-Makeham modellen. Det vil si at ved bruk av Gompertz-Makeham vil en ekvivalenspremie for selskapet under samme antagelser gi 700 NOK mindre i årlig premie per kontrakt. Grunnen til at ekvivalenspremien blir estimert lavere er fordi modellen overestimerer dødeligheten frem til pensjonsalder, og at det derfor er færre individer å betale ut pensjon til. For et selskap med tusenvis av kontrakter vil denne feilestimeringen av dødeligheter og en forskjell på premieinnbetalinger på 12% ha konsekvenser for det økonomiske resultatet. Selv om Gompertz-Makeham modellen vil være med å kunne gi en god forståelse for dødeligheter og innføring i livsforsikring, vil den kunne gi feilestimater. Derfor vil selv en dødelighetsmodell med gode tilpassede parameterverdier brukes med stor påpasslighet i estimeringen av reelle resultat.

3.1.3 Seleksjonsrisiko

I tillegg til valg av ulike dødelighetsmodeller er det flere faktorer som påvirker den totale estimeringsrisikoen. Variasjonene i dødeligheter for menn og kvinner (vist i figur 3.4), samt bosted, utdanning, inntekt og familiebakgrunn vil ha en påvirkning på dødeligheten. Alle med ulik innvirkning. Det kan også tenkes at i Norge vil én normal forsikringspopulasjon ha en lengre levealder enn landsgjennomsnittet, både med tanke på finansiell trygghet og en generelt bedre levestandard. Dette er informasjon som forsikringsselskapene må ta med i sine risikovurderinger for ikke å basere sine dødelighetsestimater på feil populasjon som vil kunne føre til økonomiske tap. For å forminske sin seleksjonsrisiko vil selskapet måtte ta høyde for all informasjon i sin portefølje, og estimere dødelighetene deretter.

3.1.4 Hvor lenge lever vi?

Etter å ha etablert dødelighetsmodellen, dataperiode, og fått kontroll på eventuelle risikofaktorer, vil det være mulig å predikere utviklingen av levetid i pensjonsporteføljjen. Nå med hjelp av Lee-Carter modellen, som er en god modell for å kunne predikere dødelighet gjennom tidsrekker frem i tid. Ved bruk av historiske data fra 1980-2014 vil prediksjon av tidsrekken kunne treffe godt overens med vår faktiske levetid i økende trend. I tabellen under er det en oversikt over Lee-Carter prediksjonene for levetid av norske menn i en 70-års periode frem i tid. Det som vises er at levetiden mest sannsynlig, basert på en allerede økende trend, vil øke i fremtiden. For et forsikringsselskap er dette en viktig faktor som må tas hensyn til når pensjonskontrakter skal skrives opp. Økende levetid vil føre til at selskapene må tilpasse premieinnbetaling, forpliktelsesfordeling og investeringsstrategier med hensyn til den stigende levetiden, både på lang og kort sikt. Den økende trenden i levealder vises i tabell 3.1.

År	2015	2025	2035	2045	2055	2065	2075	2085
Forventet Levetid	80.3	82.09	83.6	84.9	86.1	87.0	87.9	88.6

Tabell 3.1: Forventet levetider for norske menn basert på data fra 1980-2014, på 70 års prediksjon.

Her vises det at i typiske forsikringskontrakter skrevet opp i nåtid med lang varighet vil måtte medberegne relativt store levetidsendringer fra kontraktsstart til slutt. Denne utviklingen vil senere i oppgaven benyttes i beregningene til *et forenklet forsikringsselskap* i avsnitt 5.1.

3.2 Langsiktig finansiell risiko

I tillegg til fremtidig dødelighetsrisiko modellert fra Lee-Carter, vil forsikringsselskapene være interessert i den langsiktige finansielle risikoen for sine ressurser. Dette for å kunne balansere sine investeringer med hensyn til de forventede fremtidige forpliktelsene. En av de mest innarbeidede modellene for slike beregninger er Wilkie- modellen, som baserer seg på arbeidet til David Wilkie rundt Storbritannias finansielle utvikling gjennom det 20. århundre. Dataen som ble brukt til å utvikle modellen oppsummerer den økonomiske risikoen i forrige århundre og med dette som grunnlag legger den prediksjoner på finansielle variabler inn i fremtiden. Fremstillingen av Wilkie-modellen er hentet fra Bølviken [**2**] side 494-498.

3.2.1 Wilkie-modellen

Hovedvariablene i modellen blir simulert for å fange opp årlig fluktuasjon for valgte finansielle virkemidler. Dette er blant annet inflasjonsutvikling og aksjeavkastning, som nå kan bli estimert med avkastning og volatilitet over en gitt tidsperiode. Oppbygningen av modellen kan deles inn i to deler, de finansielle variablene og de stasjonære byggeklossene. Prisindeksen Q_k som angir endringene i priser for ulike varer over tid k er en av de finansielle variablene og blir drevet av inflasjonsavkastningen I_k. Inflasjonen er på samme måte som aksjeavkastning y_k, langtidsrente $\bar{r}_k$ og renteratio F_k de stasjonære byggeklosser.

Wilkie bruker ulike X_k-prosesser som han jobbet frem i sitt arbeide for å estimere de stasjonære byggeklossene. Disse beskriver fluktuasjonen av inflasjon, kapital, eiendomsutbytte og renter over tid k. Alle prosessene i modellen er drevet av ulike feilledd $\epsilon_k^i, \epsilon_k^y, \epsilon_k^r, \epsilon_k^f, \epsilon_k^{py}, \epsilon_k^f, \epsilon_k^{py}$ som er $\sim \mathcal{N}(0,1)$ og antatt uavhengig for samme tid k. X_k-prosessene baserer seg på ARIMA modeller og kan vises som

$$
\begin{aligned}
&X_k^i = a^i X_{k-1}^i + \sigma^i \epsilon_k^i && \text{Inflasjon} && (3.2.1)\\
&X_k^y = a^y X_{k-1}^y + \sigma^y \epsilon_k^y && \text{Aksjeavkastning} && (3.2.2)\\
&X_k^{d|y} = \sigma^d(\epsilon_k^d + b_1^d \epsilon_{k-1}^d) + \theta^{d|y} \epsilon_{k-1}^y && \text{Inflasjonsutbytte} && (3.2.3)\\
&X_k^{d|i} = a^{d|i} X_{k-1}^{d|i} + (b_0^{d|i} X_k^i + b_1^{d|i} X_{k-1}^i) && \text{Inflasjonsutbytte} && (3.2.4)\\
&X_k^{r|y} = a^{r|y} X_{k-1}^{r|y} + \sigma^r \epsilon_k^r + \theta^{r|y} \epsilon_k^y && \text{Langrente} && (3.2.5)\\
&X_k^{r|i} = a^{r|i} X_{k-1}^{r|i} + (1 - a^{r|i}) X_k^i && \text{Langrente} && (3.2.6)\\
&X_k^f = a^f X_{k-1}^f + \sigma^f \epsilon_k^f && \text{Renteratio} && (3.2.7)\\
&X_k^{p|y} = a^{py} X_{k-1}^{py} + \sigma^{py} \epsilon_k^{py} && \text{Eiendom} && (3.2.8)\\
&X_k^{p|i} = \xi^{pi} + \theta_{pi} I_{k-1} + (1 - \sigma_{pi}) X_{k-1}^{pi} + \sigma^{pi} \epsilon_k^{py} && \text{Eiendom.} && (3.2.9)
\end{aligned}
$$

Alle de ulike X_k-prosessene har forskjellige virkeområder, i forhold til hvilken finansiell variablen som skal simuleres. Disse prosessene benyttes nå videre til å utforme de stasjonære byggeklossene. Her blir enten en eller flere av X_k-prosessene benyttes i hver byggekloss. Dette kan vises som

$$
\begin{aligned}
&I_k = (1 + \xi^i) \exp(X_k^i) - 1 && \text{Inflasjon - transformasjon} && (3.2.10)\\
&y_k = \xi^y \exp(X_k^y + \theta^{y|i} X_k^i) && \text{Aksje - transformasjon} && (3.2.11)\\
&I_k^d = (1 + \xi^d) \exp(X_k^{d|y} + X_k^{d|i})) - 1 && \text{Inflasjonsutbytte-transformasjon} && (3.2.12)\\
&I_k^p = I_{k-1}^p \exp(X_k^{p|i}) && \text{Eiendoms-transformasjon} && (3.2.13)\\
&y_k^p = \xi_{p|y} \exp(X_k^{p|y}) && \text{Eiendomsavkastning-transformasjon} && (3.2.14)\\
&\bar{r}_k(K) = \xi^r \exp(X_k^{r|y}) + \xi^i + X_k^{r|i} && \text{Langrente} && (3.2.15)\\
&F_k = \xi^f exp(X_k^f) && \text{Renteforhold} && (3.2.16)\\
&r_k = F_k \bar{r}_k(K) && \text{Kortrente.} && (3.2.17)
\end{aligned}
$$

I beregningene senere i oppgaven skal aksjeavkstning R_k^s, obligasjonsavkastning (langrente) $\bar{r}_k$, bankrente (kortrente) r_k og eiendomsavkastning S_k^p benyttes i ulike investeringsporteføljer. Bankrenten og obligasjonsavkastningene er selv stasjonære byggeklosser, og blir kun beregnet med sine respektive X_k-prosesser. Langtidsrenten i Wilkie-modellen beskriver avkastningen til langtidsobligasjoner som utløper i år $k+K$ og blir tilnærmet lik den stasjonære langtidsrente ($\bar{r}_k$). For å utarbeide korttidsrenten brukes en forholdsvariabel F_k, sammen med langrenten $\bar{r}_k(K)$.

Aksjeavkastningen og eiendomsutbytte har en noe mer komplisert oppbyggning og baserer seg på en infalsjonsfaktor og en stasjonær byggekloss. Ettersom disse avkastningsmulighetene har flere variable vil de være mer volatilie i bruk. Oppbyggningen av eiendomsutbytte S_k^p, aksjeavkastning R_k^s og prisindeks Q_k danner de finansielle variablene, oppbygd av de stasjonære byggklossene. Dette kan vises ved

$$Q_k = (1 + I_k)Q_{k-1} \qquad \text{Prisindeks} \tag{3.2.18}$$

$$R_k^s = (1 + I_k^d)\frac{y_{k-1}}{y_k} - 1 \qquad \text{Aksjeavkastning} \tag{3.2.19}$$

$$S_k^p = \frac{I_k^p}{y_k^p} \qquad \text{Eiendomsutbytte.} \tag{3.2.20}$$

Parameterverdiene til Wilkie-modellen er estimert fra perioden 1923 - 1994 og vist i tabell 3.2. Verdiene gir grunnlaget for å kunne predikere de ulike avkastnings- og inflasjonsmulighetene. Detaljene rundt parameterverdiene og mulige tilpasninger til nåværende økonomisk situasjon er beskrevet i avsnitt 3.2.3 og 3.2.4.

	Inflasjon (I_k)		
$\hat{\xi}^i = 0.048$	$\hat{a}^i = 0.58$	$\hat{\sigma}^i = 0.040$	
	Aksjer (y_k)		
$\hat{\xi}^y = 0.041$	$\hat{a}^y = 0.55$	$\hat{\sigma}^y = 0.16$	$\hat{\theta}^{y\|i} = 1.79$
	Inflasjonsutbytte (I_k^d)		
$\hat{\xi}^d = 0.065$	$\hat{b}_1^d = 0.57$	$\hat{\sigma}^d = 0.067$	$\hat{\theta}^{d\|y} = -0.027$
$\hat{a}^{d\|i} = 0.087$	$\hat{b}_0^{d\|i} = 0.50$	$\hat{b}^{d\|i} = -0.36$	
	Langrente ($\bar{r}_k(K)$)		
$\hat{\xi}^r = 0.0305$	$\hat{a}^{r\|y} = 0.90$	$\hat{\theta}^{r\|y} = 0.052$	$\hat{\sigma}^r = 0.19$
$\hat{a}^{r\|i} = 0.955$			
	Eiendom (S_k)		
$\hat{\xi}^{p\|i} = 0.006$	$\hat{\sigma}^{p\|y} = 0.066$	$\hat{\theta}^{p\|i} = 0.112$	
$\hat{\xi}^{p\|y} = 0.074$	$\hat{a}^{p\|y} = 0.91$	$\hat{\sigma}^{p\|y} = 0.12$	

Tabell 3.2: Estimerte parametere hentet fra Wilkiemodellen.

3.2.2 Kritikk

Wilkie-modellen baserer seg på data gjennom et økonomisk volatilt århundre. I løpet av de årene Wilkie utarbeidet sin modell har det vært flere hendelser i verdensøkonomien som har skapt store svingninger i den finansielle situasjonen. Inflasjonen som driver prisindeksen har forventning og standardavvik (jf. Bølviken [**2**], s.498) gitt ved : $E[I_k] = 4.9\%$ $sd[I_k] = 5.1\%$. Med et så høyt standardavvik vil det være en sannsynlighet på rundt 17% for at inflasjonen blir negativ fra et år til et annet. Sammenlikner vi dette med historikken de siste tiårene og Norges Banks inflasjonsmål på 2.0 -2.5 % kan modellen virke urealistisk. Fra vårt økonomiske synspunkt i en moderne og stabil økonomi virker det nesten umulig at vi vil oppleve en negativ inflasjon. Nettopp med dette argumentet i bakhånd kommer kritikken mot Wilkie-modellen og troverdigheten til de estimerte verdiene. Hvordan kan en så volatil økonomisk periode estimere det neste århundre uten store feilmarginer? Wilkie avfeier kritikerne og mener at de finansielle virkemidlene gjennom det neste århundre er umulig å spå, og at man aldri vil vite når og hvordan ulike kriser vil ramme økonomien. Kanskje vil det neste århundre bli om mulig enda mer volatilt enn det forrige? Allikevel skal Wilkie-modellen brukes med nøye vurderte antagelser. Det er viktig å hukse på at disse dataene er hentet fra Storbritannias historiske økonomi, og det kan dermed være hensiktsmessig å justere parameterene etter tidsperiode og område.

3.2.3 Tilpasning av parameterverdier

En del av kritikken rettet mot Wilkie-modellen har gode grunnlag i matematiske og økonomiske teorier som definerer våre finansielle mål for fremtiden. I Norge har vi for eksempel et inflasjonsmål som Norges Bank justerer sin pengepolitikk etter, og som påvirker den resterende delen av landets økonomi. Dette er et langsiktig mål som er med på å sikre en stabil finansiell situasjon i årene som kommer. Ser vi på denne realiteten opp mot Wilkie-modellen vil det kunne vises at et slikt mål om finansiell stabilitet ikke er tatt med i prediksjonsberegningene. Her finnes en større volatilitet og usikkerhet estimert fra historiske finansielle hendelser. Basert på dette vil parameterverdiene i modellen bli tilpasset for å få avkastningsmuligheter i et mer presist samsvar med den oppdaterte finansielle situasjonen i Norge og ellers i Europa. De tilpassende verdiene er oppdatert etter Johnsen [**11**] side 54 og vist i tabellen 3.3.

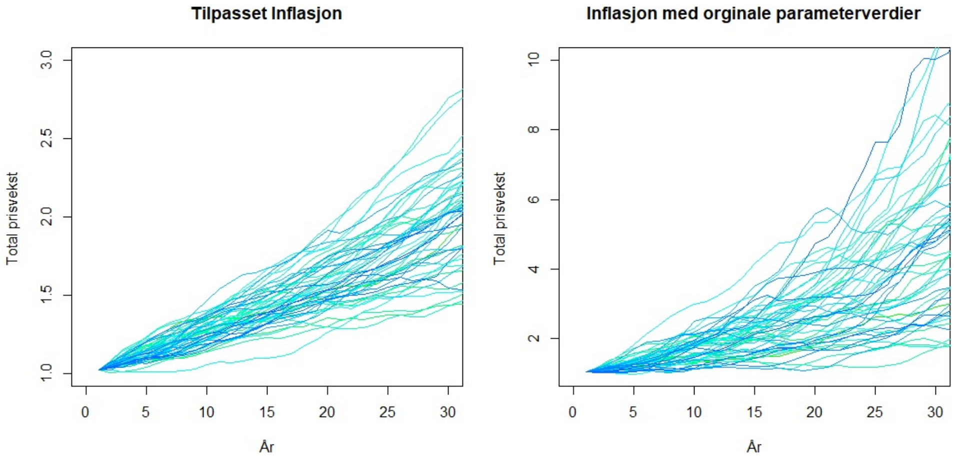
	Orginal	Tilpasset
$\hat{\xi}^i$	0.048	0.024
$\hat{\sigma}^i$	0.040	0.0115
$\hat{\xi}^d$	0.065	0.045
$\hat{\sigma}^d$	0.067	0.036
ξ^r	0.0305	0.015

Tabell 3.3: Tilpassende parameterverdier for nåværende økonomiske forhold

Dette fører til en endret inflasjon og ringvirkninger i avkastningsmuligheter for henholdsvis aksjer og eiendom. Verdiene blir drevet av inflasjonsendringene og vil dermed tilpasse seg den reelle finansielle situasjonen på en mer realistisk måte. Endringen gjort for inflasjonsvariabelen er vist i figur 3.5. Her viser figuren (venstre) de tilpassede paramterverdiene og total prisvekst over 30 år, simulert 50 ganger. Variasjonen og usikkerheten inflasjonen fører med seg er nedjustert og vil i høyere grad stemme overens med Norges Banks inflasjonsmål enn hva originalmodellen (høyre) gjør. Her er det store sprik i de simulerte verdiene, usikkerheten og volatiliteten er stor, og det vil være vanskelig å gjøre stabile numeriske beregninger for fremtiden.

3.2.4 Solvency II kalibrering

I tillegg til inflasjonen som kan bli fastsatt via et pengepolitisk ståsted, vil de resterende økonomiske virkemidlene måtte kalibrers opp mot Solvency II. Dette for å samsvare



Figur 3.5: Inflasjon med tilpassede parameterverdier (venstre) og inflasjon med originale verdier (høyre) - simulert 50 ganger

med målet om et 99.5 % sikkerhetspersentil av SCR. De økonomiske virkemidlene produsert av Wilkie-modellen er originalt tilpasset et økonomisk volatilt århundre, og det vil derfor være hensiktsmessig å justere disse. Kalibreringen skal skje mot markedsrisikomodulen i Solvency II for beregninger av kapitalkrav. Kalibreringen er gjort etter EIOPAs eget 99.5 %-persentil innenfor henholdsvis *aksjer* ($\mathrm{SCR}_{\mathrm{eq}}$) ,*eiendom* ($\mathrm{SCR}_{\mathrm{prop}}$) og *obligasjoner* ($\mathrm{SCR}_{\mathrm{bond}}$) , som alle er undermoduler av *markedsrisiko* ($\mathrm{SCR}_{\mathrm{marked}}$) forklart i avsnitt 2.4.

	Orginal	95% persentil	**99.5% persentil**	99.9% persentil
Aksjer - $\hat{\sigma}^y$	0.16 (90.4%)	0.128	**0.079**	0.06
Bank - $\hat{\sigma}^f$	0.18 (92.2%)	0.147	**0.037**	0.01
Obligasjoner - $\hat{\sigma}^r$	0.19 (99,5%)	0.32	**0.19**	0.13
Eiendom - $\hat{\sigma}^{p\|y}$	0.12 (98.7%)	0.162	**0.108**	0.089

Tabell 3.4: Wilkie-modellens finansielle virkemidler kalibrert opp mot Solvency IIs markedsrisiko

Alle risikomodulene er simulert 100 000 ganger, hvor målingene for persentilen vises i antall forsøk innenfor det sjokkede intervallet av avkastninger. Hver av investeringsmulighetene er simulert med sin originale verdi opp mot et gitt sjokk fra Solvency II. Antall forsøk med større risiko enn tillatt er summert opp mot det totale antallet. Deretter er verdien til den respektive volatilitetsparameteren fra Wilkie-modellen endret slik at 99.5% av forsøkene er innenfor Solvency IIs risikojustering av avkastninger.

Wilkie-modellen produserer langrente $\overline{r}_k(K)$, som beskriver obligasjoner over K perioder som ikke utløper. For at denne obligasjonsporteføljen skal svare til Solvency II må det hentes ut et sjokk $s(d_j, \omega_j)$ fra Solvency II dokumentasjon, etter antagelse av durasjon d_j og kredittkvalitet ω_j for obligasjon $j = 1, ..., J$. I dette tilfellet er obligasjonsporteføljen satt med 10 års løpetid, og en gjennomsnittlig kredittkvalitet på ω= 1, altså med en AA rangering. På samme måte må sjokket s for bankrenten settes i forhold til antagelser om hvor stor risiko avkastningen innehar og over hvor lang løpetid. Her benyttes kortrenten produsert av Wilkie-modellen r_k som nå er antatt som en sikker investering med kredittkvalitet ω=1, over et år. Sjokkene for både langrente $\overline{r}_k$

og kortrente r_k er kalkulert etter veiledning fra tabell i Delegated Acts, artikkel 176 [**3**].

For de resterende risikomodulene brukes allerede oppgitte sjokk, som på samme måte skal svare til et 99.5 % sikkerhetspersentil for hver av avkastningsmetodene. Solvency II bruker en risikofaktor for ulike økonomiske områder når sjokket for aksjerisiko fastsettes, i dette tilfellet er det antatt at alle investeringer foregår innenfor OCED-området. Dette gir et fast marked sjokk på s = 22 %. For den originale parameterverdien vises det at det er aksjerisikoen fra Wilkie-modellen som har størst differanse i volatilitet i forhold til den kalibrerte Solvency II modellen. Fra en persentil på 90 % må volatiliteten σ^y i de simulerte aksjeporteføljene justeres ned innenfor det gitte geografiske området. Den siste risikomodulen, eiendom, fremstår som den enkleste med kun et fastsatt konstantsjokk for beregning på s = 25 %.

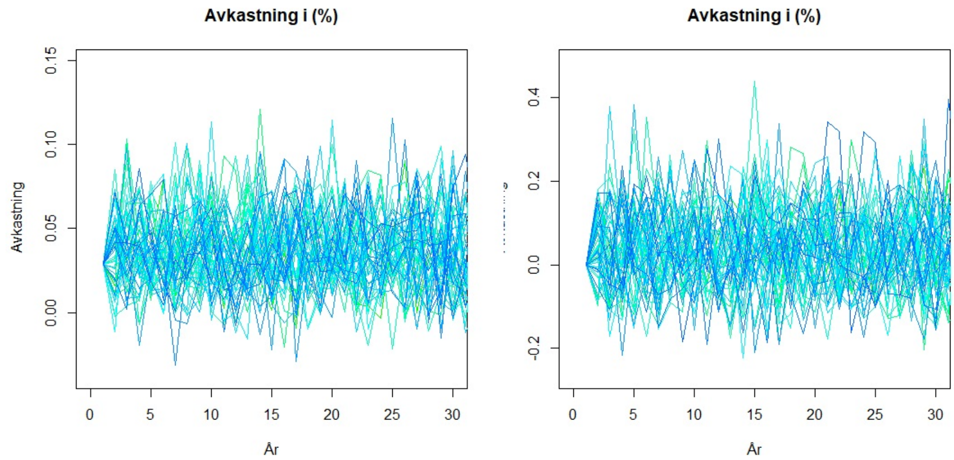
Tilsammen vil disse skiftene i parameterverdiene gi differanse i avkastning vist i tabell 3.5. Her vises det at kalibreringen mot Solvency II vil gi en ny mindre effekt for hver enkelt avkastningsmulighet. Samtidig vil disse verdiene kunne speile et reelt økonomiske marked på en bedre måte enn hva de originale Wilkie-parameterne gjør. De kalibrerte verdiene inngår nå under 99.5%-persentilen i markedsrisikomodulen i Solvency II, og vil senere bli brukt til estimeringer av *best estimate* og *solvency capital requirement* i avsnitt 5.1.

	Orginalavkastning	Tilpasset Solvency II
Aksjer	8.73 %	4.95 %
Bank	8.19 %	4.05 %
Obligasjoner	6.98 %	3.24 %
Eiendom	5.72 %	3.01 %

Tabell 3.5: Wilkie-modellens originalavkastninger og avkastningene kalibrert mot Solvency II.

3.3 Asset liability managment

Asset liability management er som nevnt i kapitel 2.2 hvordan forsikringsselskapet investerer pengestrømmen for å forminske den finansielle risikoen. Investeringsstrategien foregår med ulike avkastninger med forskjellige sikkerhetsrangeringer. Metodene som blir brukt for å møte forpliktelsene fra inntektene er gjerne sammensatte og risikoen spres over flere markeder. For et livsforsikringsselskap vil ALM være en kompleks del av selskapets arbeid, og små feil vil kunne gi store tap i det endelige resultatet. Utfordringen vil være at gjennom lange pensjonskontrakter vil faste premier fra et ulikt antall kontrakter betjenes som investeringskapital. Avkastningen for hver enkel kontrakt skal samsvare til lengden av kontrakten og levetiden til enkeltindivider. Livsforsikrings-perioden strekker seg ofte over flere tiår, og ettersom det er vanskelig å spå den finansielle fremtiden vil risikoen for feilmarginer være stor, både når det gjelder inntekter og utgifter. Derfor vil en viktig del av arbeidet som omhandler ALM være å predikere de ulike risikoene i markedet, følge endringene opp til nåtid og avbalansere de fremtidige investeringene med hensyn til disse. Dette kan gjøres på flere ulike måter og andelen innenfor hver investering vil ha påvirkning på risiko og potensiell avkastning. To ulike scenarioer er vist i figur 3.6. Her er det en portefølje med høy risiko hvor hovedandelen av investeringene er basert på aksjer, og en lavrisikoportefølje hvor hovedandelen av er plassert i obligasjoner, simulert 50 ganger. For lavrisikoporteføljen vil potensiell avkastning være lavere, men sjansen for et positvt resultat vil være høyere.



Figur 3.6: Lavinvesteringsstrategi (venstre) mot en høyrisikostrategi (høyre) i avkastning per år

Fordelingen av investeringsporteføljen vil gi ulike muligheter med tanke på avkastning og vil gi store utslag på den totale økonomiske situasjonen på lang og kort sikt. Allikevel fører dette også med seg flere utfordringer. En av disse kommer i økonomiske perioder hvor renten forblir lav gjennom en lengre tidsperiode, noe som vil svekke avkastningsmulighetene i forhold til det som er forventet. Spesielt vil investeringer med kort utløpstid gi problemer ved at avkastningene ikke svarer til utbetaling av forpliktelsene og setter selskapet i en vanskelig økonomisk situasjon. En teknikk som ofte brukes for å unngå påvirkning av renteskifte er *immunisering*. Dette forhindrer selskapet i å svekke sin tilbakebetalingsevne ved renteendringer, og minimerer dermed renterisikoen. Ideen er å samsvare durasjonen fra selskapets ressurser til forpliktelsene fremover i tid. Dette kan vises matematisk ved å sette $\mathcal{D}_l = \mathcal{D}_v$. Hvor $\mathcal{D}_l$ er durasjonen for forpliktelsene L_k og $\mathcal{D}_v$ er durasjonen for investeringsstrømmen V_k. Disse kommer av forpliktelsene $L_0, ..., L_K$, og pengestrømmen av investeringer $V_0, ..., V_K$. Nåverdien med henysn på renten r_k er

$$PV_l = \sum_{k=0}^{K} \frac{L_k}{(1 + r_k)^k} \quad \text{og} \quad PV_v = \sum_{k=0}^{K} \frac{V_k}{(1 + r_k)^k} \tag{3.3.1}$$

for for år k =0, ..., K. En av de viktigste komponentene er $\gamma(r) = \tau_v(r)^2 - \tau_l(r)^2$, som beskriver forskjellen i variansen til forpliktelses- og investeringsstrømmen med rente r. Renten r er et skifte, positivt eller negativ, fra nivået ved år 0 skrevet, som r_0. Fra resultatet i Bølviken [**2**] side 592 med rente r rundt r_0 har vi at

$$\frac{PV_v(r)}{PV_l(r)} \geq \frac{PV_v(r_0)}{PV_l(r_0)} \quad \text{for} \quad \gamma(r_0) \geq 0. \tag{3.3.2}$$

Som viser at forholdet mellom forpliktelsene og investeringene med den nye rentesatsen, er større enn ved rente r_0. Det betyr at selskapet står med et mer positvt resultat etter renteendring. $\gamma(r_0)$ er forskjellen i varianse ved kontraktsstart i år 0 mellom investerings- og forpliktelsesstrømmen. Her ser vi at variansen i investeringene er strørre enn variansen i forpliktelsene, og dermed vil resultatet av den orginale rentesatsen føre til et dårligere økonomisk resultat enn renteendring r. Dette er en klassisk immuniseringsstrategi, som baserer seg på lik durasjon av de to pengestrømmene.

Problemer med immunisering oppstår når det ikke finnes lange nok obligasjoner som samsvarer med selskapets forpliktelser. Dette er et kjent problem innenfor livsforsikring, hvor forpliktelsesvektoren varer mange tiår inn i fremtiden. Løsningen på dette blir å bruke investeringsstraegier, en nøye overveid blanding av avkasntingsmuligheter. Dette kan for eksempel være obligasjoner, aksjer, bankavkastning og eiendom, som tilsammen benyttes og reinvesteres for å samsvare med de fremtidige forpliktelsene. Hvordan slike strategier benyttes i beregningene for et forsikringsselskap er beskrevet i avsnitt 5.1.

Kapittel 4

Volatility og matching korreksjonene

4.1 Motivering

Volatility og matching korreksjonene er to ulike justeringer av diskonteringsrenten som forhindrer store svingninger i selskapets aktiva. Disse er variable og endrer seg fra år til år med hensyn til investeringsavkastning og fluktasjon. Justeringene er en parallellforskyvning av diskonteringsrenten som kan benyttes slik at selskapets BE blir mindre, og dermed mindre påvirket av fluktuasjoner i investeringene på kort sikt. Som diskutert tidligere bruker forsikringsselskap langtidsobligasjoner og andre investeringer for å møte sine fremtidige forpliktelser, etter nøye overveide ALM-strategier. Problemet oppstår når disse investeringene fluktuerer betydelig og verdien endres over korte tidsperioder. Dette kan skje i alle risikomoduler som benytter seg av investeringer, men vil speiselt være relevant i livsforsikring(SCR_{life}) og markedsrisiko ($\text{SCR}_{\text{marked}}$). I prinsippet vil ikke fluktuasjonene påvirke investeringer med lang løpetid, men vil kunne endre den finansielle situasjon betydelig fra et år til neste. I slike tilfeller vil den opprinnelige investeringen selv med sterk investeringsgrad kunne føre til en redusering av de fremtidige avkastningene i forhold til risikoen. Et slikt problem kalles kunstig volatilitet, *artificial volatility*, og EIOPAs løsning er *matching og volatility korreksjonene* som ble introdusert 30. april. 2014. Begge korreksjonene benytter seg av samme type justering for BE, hvor et estimert ledd blir lagt til diskoteringsrenten i utregning av nåverdien til forpliktelsene og beskrevet i EIOPA [4] side 49 - 83. Bruken og oppbyggningen er derimot forskjellig. For å kunne legge et godt grunnlag for effekten og forskjellen vil korreksjonene først ses på i detalj uavhengig av hverandre. Vi starter med volatility korreksjonen.

4.2 Volatility korreksjonen

Volatility korreksjonen endrer BE ved å produsere en volatility-verdi VA, og skifter ut den risikofrie renten r_k i diskonteringen med

$$r_k^{va} = r_k + \mathrm{VA} \tag{4.2.1}$$

hvor VA er volatility-verdien og r_k^{va} er risikofri rente med volatility korreksjon. Dette fører til, gitt forpliktelsesstrøm $L_1, ..., L_K$, at best estimate vist i formel 2.3.2 endres til

$$\mathrm{BE}^{va} = \sum_{k=1}^{K} \frac{L_k}{(1 + r_k^{va})^k} \tag{4.2.2}$$

nå med volatility korreksjon. Her er diskonteringsrenten skiftet fra den risikofrie renten r_k til r_k^{va} med volatility korreksjon. Et positivt skift i renteendringen $r_k^{va} > r_k$ fører til at $BE^{va} < BE$, og dermed blir de totatale forpliktelsene(TP) mindre. Kalkulasjonen av volatility-konstanten VA er utarbeidet av EIOPA, og det blir lagt ut månedlige oppdateringer av vekter og den totale utregningen av r_k^{va} for hvert land, samt valuta. I utregningen av den risikofrie renten brukes enten swap-markedet eller obligasjoner med terminbeløp $B_1 = B_2 = ... = B_{K-1} = 0$ og $B_K = 1$, såkalte nullkupongobligasjoner. Disse blir benyttet til å forme risikofrie rente med og uten volatility korreksjon.

Last liquid point. For ulike land finnes det forskjellig informasjon om fremtidige obligasjonspriser, og lengden av informasjonen som er tilgjengelig vil være begrenset av denne tidsperioden. Last liquid point(LLP) er den siste tiden hvor det finnes informasjon om obligasjonsprisene, her notert som tid n. For Norge er denne perioden begrenset av $n = 10$, mens i større økonomier som Storbritannia finnes det informasjon helt opp til $n = 50$. Ettersom livsforsikringsberegninger har langtvarende løpetider må denne tidsperioden utvides for å fullføre estimatene i slutten av kontraktene. Spesielt for små økonomier vil forsikringsselskapene trenge å simulere flere verdier av diskonteringsrenten og tilhørende volatility korreksjon enn opp til kjente LLP. Solvency IIs løsning er å ekstrapolere den risikofrie renten, altså å anslå verdiene i tidsperioden $k = n + 1, ...$

Smith-Wilsons metode. Smith-Wilson ekstrapolerer den risikofrie renten ved hjelp av obligasjonspriser $P_1, ..., P_n, ..., P_k$ for $n < k$. Dette gjøres ved hjelp av konstantene $c_1, ..., c_n$, som er oppgitt av EIOPA på månedlig basis. Prisen på en slik obligasjon P_k blir med volatility-korreksjon vist ved P_k^{va}. Fra denne vil det være mulig å utarbeide den nye diskonteringsrenten opp til valg år K med volatility korreksjon. Ved bruk av vektene $c_1^{va}..., c_n^{va}$[1] vil det nå kunne konstrueres obligasjonspriser $P_1^{va}, ..., P_k^{va}$, dette gjøres med Smith-Wilsons metode. En omskriving av formel 2.2.2 gir den risikofrie renten med volatility korreksjon lik

$$r_k^{va} = (P_k^{va})^{-\frac{1}{k}} - 1 \tag{4.2.3}$$

[1]Forskjellen på disse er vist i Tillegg B tabell B.3.

med hensyn til obligasjonspris P_k^{va} for tid k. Prisfunksjonen for P_k er i hovedsak en funksjon med to hovedvariable. Ultimate Forward Rate(UFR)og α. α er konvergeringshastigheten etter LLP, og UFR er konvergeringsmålet etter ekstrapolering. Denne fremstillingen av Smith-Wilson modellen er hentet fra Bølviken [**1**] side 14-15 og gir obligasjonspris lik

$$P_k^{va} = e^{-UFR\times k} \times (1 + c_1^{va} w_{k1} + c_2^{va} w_{k2} + ... + c_n^{va} w_{kn}) \tag{4.2.4}$$

hvor $c_1^{va}, ..., c_n^{va}$ er koeffisienter oppgitt månedlig av EIOPA med VA. Wilson-vektene $w_{k1}, ..., w_{kn}$ er gitt ved:

$$w_{ki} = e^{-UFR} \times (\alpha \times \min(k,i) - \frac{1}{2}(e^{-\alpha|i-k|} - e^{-\alpha|i+k|})) \tag{4.2.5}$$

for $k = 1, 2, ...$ og $i = 1, 2, .., n$ og danner tilsammen nullkupongsobligasjonen med volatility korreksjon[2].

Ultimate Forward Rate (UFR). Raten i prosent som viser grenseverdien til fremtidige verdier av den risikofrie renten (r_k når $k \to \infty$) kalles *ultimate forward rate*, eller UFR. Den er basert på en funksjon av langtidsforventet inflasjon og realrente. Realrente r^{real} er gitt ved

$$r^{\text{real}} = \frac{r_n - I}{1 + I} \tag{4.2.6}$$

hvor r_n er den nominelle renten og I er inflasjonsraten. I eurosonen er UFR for 2018 satt til 4.05% og kommer av et forventet inflasjonsmål på 2% og et forventet gjennomsnitt av realrente på 2.05%. Det er kun noen valutaverdier som endrer seg fra eurosonen, men den norske kronen (NOK) holder som regel samme verdi og vil i 2018 også være på 4.05%. Unntakene er Sveits, Liechtenstein og Japan som alle tre har en UFR på 3.2%. Forskjellene i et utvalg av land under EIOPA direktivet er vist i tabell 4.1. Denne fremstillingen, samt et bredere spekter av EIOPA-land kan finnes i oppdaterte regneark hentet fra EIOPA [**7**] *Term Structures*.

Område	Valuta	LLP	Konvergens (K_i)	α	UFR (%)
Norge	Norske Krone	10	50	0.093	4.05
Eurosonen	Euro	20	40	0.126	4.05
Storbritania	Britiske Pund	50	40	0.130	4.05
Sveits	Sveitserfranc	25	35	0.127	3.2

Tabell 4.1: LLP, konvergestid, konvergenshastighet α og UFR for noen utvalgte valutaer.

I tabell 4.1 vises forskjellen på noen av de viktigste elementene i beregningen av volatility korreksjonen. Effekten de ulike elementene og hvilken innvikrning de har på den totale korreksjonen vil bli diskutert i kapittel 5.2.3.

[2]Programvare for Smith-Wilsons metode er vist i Tillegg A - R-kode for Smith-Wilson.

Konvergens. α-verdien sier noe om hvor fort det konvergeres. En høy verdi gir en vekt mer rettet mot UFR, men små verdier av α gir mer tilbøyelighet mot markedsdata. Det vil si at for en høyere α-verdi vil den den totale VA ligge nærmere UFR. α har en nedre grense på 0.05, dette for å forsikre at VA ikke er mer enn 0.001 fra UFR etter et gitt antall år K_i, for hvert land i. Konvergenstiden K_i med hastighet α for ulike valutaer er gitt ved

$$K_i = \max(60 - LLP_i, 40) \qquad \text{for ulike vaulta i.} \tag{4.2.7}$$

Verdien på α kan bli funnet for hvert land ved å løse ut 4.2.8, med ulike verdier for konvergenstid K_i.

$$\frac{1}{K_i} log(P^{va}_{K_i}) - UFR = 0.0001. \tag{4.2.8}$$

Volatility korreksjonen er oppgitt månedlig av EIOPA for alle land og dermed vil det fra formel 4.2.1 kunne konstrueres en oppdatert diskonteringsrenten r_k^{va} for tid $k = 1, .., K$, hvor K er valgt tidsperiode for det respektive landet. En mer detaljert beskrivelse på utregning av verdien til VA er vist i avsnitt 4.2.1.

Merknader. Forskjellen på utregningen av den risikofrie renten med og uten volatility korreksjon, er oppgitt i tabeller fra EIOPA sine hjemmesider med koeffisientene $c_1, ..., c_n$ for r_k og $c_1^{va}, ..., c_n^{va}$ for r_k^{va}. Ettersom VA konvergerer etter LLP vil differansen på de to rentene og konvergere når tiden går. For tid $k = 1, 2, ...$ vil vi se at

$$|r_k^{va} - r_k| \to 0 \quad \text{når} \quad k \to \infty \tag{4.2.9}$$

Dette vil igjen si at en forskjell på differansen for den totale utregningen av BE vil være større ved begynnelsen av beregningsperioden, enn mot slutten. Dette er vist ved

$$|\mathrm{BE}_1 - \mathrm{BE}_1^{va}| \quad > \quad |\mathrm{BE}_K - \mathrm{BE}_K^{va}| \tag{4.2.10}$$

for tid $k = 1, ..., K$. Hvor beregningene foregår over tid $k = 1$ første år ved oppskrevne kontrakter, til år $k = K$ siste år før utgang av alle forpliktelser.

BE er summen av alle fremtidige forpliktelser av nåværende kontrakter, diskontert med hensyn på r_k, og BE^{va} diskontert med r_k^{va}. Summen av forskjellen over alle kontraktsår er gitt ved,

$$|\sum_{k=1}^{K} BE_k - \sum_{k=1}^{K} BE_k^{va}| \tag{4.2.11}$$

og vil være med å definere den totale nedskrivningen av SCR gjennom volatiltiy korreksjonen.

4.2.1 VA detaljert

Ved hjelp av Smith-Wilson ekstrapolerer Solvency II den risikofrie renten med (r_k^{va}) og uten (r_k) volatility korreksjon fra vektene c_k og c_k^{va}. De månedlige oppdatere koeffisientene er funnet etter kalkulasjon av selve VA -verdien for hvert land og valuta.

Fremgangsmåten er utarbeidet gjennom artikkel 49-51 i Delegated Acts [**3**]. Her innføres en **representativ** portefølje, bestående av aksjer, obligasjoner, eiendom, lån og andre verdipapirer. Denne som skal tilpasset BE til valuta og landet. En slik portefølje er bygd opp av n investeringer fordelt på $w_1, ..., w_n$ vekter, summert opp til 100 %. Slike porteføljer er beskrevet av EIOPA og oppdatert på månedlig basis for hvert land med avkastning $y_1, ..., y_n$ og durasjon $d_1, ..., d_n$ for hver investering. Dette er vist i EIOPA [**7**] i regnearket *VA_portofolios*.

Beregning. Oppdeling mellom land og valuta er med på å forme potensielt to ulike verdier av VA som påvirker den totale korreksjonen. Tar vi først estimeringen via valuta, må det finnes en det differanse ut ifra hvilke investeringer som er gjort, enten i statsobligasjoner, SP^{gov} eller selskapsobligasjoner, SP^{corp}. EIOPA oppgir estimeringen av SP gjennom den representative porteføljen som et eksempel fra Excel ark *VA calculation example for one euro area country*, EIOPA [**7**] og forklaring i EIOPA [**4**] side 77-79. For å finne verdien til disse brukes forskjellen på gjennomsnittavkastning $\bar{y}$ for den representative porteføljen avhengig av investering og gjennomsnittlig risikofri rente $\bar{r}$.

$$SP = \max(\bar{y} - \bar{r}, 0) \tag{4.2.12}$$

hvor gjennomsnittavkastningene $\bar{y}$ og $\bar{r}$ hentet fra Bølviken [**1**] side 48 og gitt som en løsning av

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{(1+y_j)^{d_j}} = \frac{1}{(1+\bar{y})^{\bar{d}}} \qquad \text{og} \qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{(1+r_j)^{d_j}} = \frac{1}{(1+\bar{r}_k)^{\bar{d}}} \tag{4.2.13}$$

med gjennomsnittdurasjonen $\bar{d} = w_1 d_1 + ... + w_n d_n$, hvor både vektene $w_1, ..., w_n$ og durasjon $d_1, ..., d_n$ er oppgitt av EIOPA[**7**] i $VA\_portofolios$ for hver valuta (og land) i den representative porteføljen bestående av n investeringer. Videre er det mulig å utarbeide det som i Solvency II kalles *fundamental spread*, forkortet FS. Beregningene av FS er en stor del av matching korreksjonen og vil bli detaljert beskrevet i avsnitt 4.3.1, også her for statsobligasjoner FS^{gov} og selskapsobligasjoner FS^{gov}. I de oppdaterte utgivelsene fra EIOPA finnes det vekter w^{gov} og w^{corp}, oppgitt ulikt for alle valutaer og land under EIOPA direktivet. For Norge er disse vektene gitt i tabell 4.2.

Valuta (NOK)		Land (NORGE)	
w_{gov}	w_{corp}	w_{gov}	w_{corp}
0.12	0.595	0.118	0.543

Tabell 4.2: Vekter for Norge for VA estimering gjennom valuta eller land (EIOPA [**7**]).

Med dette på plass er det mulig å utarbeide en total avkastning for den representative porteføljen med risikokorreksjon for den gjeldene valutaen og formulert av Bølviken [**1**] side 49 som

$$\mathrm{CuS} = w^{gov} \times \{\max(\mathrm{SP}^{gov}, 0) - \mathrm{FS}^{gov}\} + w^{corp} \times \{\max(\mathrm{SP}^{corp}, 0) - \mathrm{FS}^{corp}\} \tag{4.2.14}$$

Hvor SP er estimert for stats(gov) og selskaps(corp)-investeringer, som gir en CuS *currency spread* for hver valuta. På samme måte kan en CoS *country spread* utarbeides for hvert land, nå med SP for landet SP^{gov} og SP^{corp}, og nasjonale vekter w^{gov} og w^{corp}, som vist i tabell 4.2. Denne vil kun benyttes om avkastningen for den nasjonale portofolioen CoS > 0.01. Tilsammen gir dette den totale VA korreksjonen basert på den representative porteføljen lik

$$VA = \begin{cases} c \times \text{CuS} & \text{hvis CoS} \leq 0.01 \\ c \times \{\text{CuS} + 2 \times \max(CoS - 2 \times \text{CuS}, 0)\} & \text{hvis CoS} > 0.01 \end{cases}$$

hvor c = 0.65. I stabile økonomier vil som regel CoS $\leq$ 0.01, og dermed vil land med den samme valutaen også ha lik VA korreksjon. Et unntak skjedde blant annet i Hellas, 2012 i forbindelse med finanskrisen, hvor CoS > 0.01, og VA korreksjonen skiftet kurs fra resten av eurosonen (jf. Van. den As. [**18**]).

Tilslutt brukes de estimerte VA -verdiene til å utforme volatilitets korrigert risikofri rente $r_1^{va}, ..., r_n^{va}$ opp til LLP for hvert land, for så og bli ekstrapolert $k > n$ år frem i tid.

4.3 Matching korreksjonen

Matching korreksjonen bruker en konstant (MA) som parallellforskyver den risikofrie renten for så å endre BE på samme måte som volatility korreksjonen. For å kunne benytte seg av matching korreksjonen må selskapet få sin portefølje av investeringer godkjent under matchingkriterier som er beskrevet i avsnitt 1.5.1 EIOPA [**6**] side 10-11. Porteføljen som blir benyttet kalles **assigned portofolio**, og den består av investeringer knyttet opp mot forpliktelsene. Denne porteføljen må behandles uavhengig i forhold til resten av selskapet, og godkjennes av det finansielle tilsynet for hvert respektive land (detaljert forklaring i avsnitt 4.3.2).

Som tidligere gir EIOPA fra sine hjemmesider oppdaterte tabeller med vekter for å kunne utarbeide korreksjon med hensyn til selskapets investeringer. Med en valgt, godkjent investeringsstrategi og portefølje vil den risikofrie renten i diskonteringen brukes i en ny utformingen av BE. På samme måte som volatility oppererer matching også med en paralellforskyvning av den risikofrie renten r_k. Denne endringen er vist ved

$$r_k^{ma} = r_k + MA \tag{4.3.1}$$

hvor MA er matching-konstanten og r_k^{ma} er risikofri rente med matching korreksjon. MA defineres matematisk som

$$\text{MA} = \overline{r}^{port} - \overline{r} - FS. \tag{4.3.2}$$

Her er $\overline{r}^{port}$ den gjennomsnittlige renten som blir brukt til diskonteringen av verdien til den godkjente porteføljen av resurser A, kalt *assigned portofolio*. Det vil si at $\overline{r}^{port}$ er gitt av løsningen til

$$\text{A} = \sum_{k=1}^{K} \frac{L_k}{(1 + \overline{r}^{port})^k}. \tag{4.3.3}$$

Hvor A er markedsverdien til den godkjente porteføljen av investeringer $B_1, ..., B_K$ og $L_1, ..., L_K$ er de estimerte forpliktelsene for år $1, ..., K$. På samme måte kan $\overline{r}$ løses etter at BE og de årlige estimerte forpliktelsene er på plass. BE blir som diskutert tidligere diskontert med hensyn til renten r_k, og er nåverdien til alle forpliktelsene. $\overline{r}$ kommer av denne beregningen og kan løses ved

$$BE = \sum_{k=1}^{K} \frac{L_k}{(1+\overline{r})^k} \tag{4.3.4}$$

med forpliktelser L_k over år $k = 1, ..., K$.

Fundamental spread. For å finne MA blir *fundamental spread* FS trukket fra en differanse mellom de to rentene $\overline{r}$ og $\overline{r}^{port}$. Utformingen av FS baserer seg på mislighold og nedgraderingsrisiko for verdipapirene i den representativ porteføljen beskrevet i avsnitt 4.2.1. Verdien finnes gjennom et vektet gjennomsnitt av fordelingen.

$$FS = \frac{\mathrm{A}^{corp}}{\mathrm{A}} \times \mathrm{FS}^{corp} + \frac{\mathrm{A}^{gov}}{\mathrm{A}} \times \mathrm{FS}^{gov} \tag{4.3.5}$$

Hvor A er verdien av porteføljen og $\mathrm{A} = \mathrm{A}^{gov} + \mathrm{A}^{corp}$, gir fordelingen av statlige og ikke-statlige obligasjoner. FS^{gov} og FS^{corp} blir utformet med tanke på hvilke obligasjon som blir brukt. Bølviken[**1**] side 51 definer forskjellen på disse ved

$$\mathrm{FS}^{gov} = c^{gov} \times \overline{\mathrm{LTAS}^{gov}} \quad \text{for} \quad \text{statsobligasjoner} \tag{4.3.6}$$

$$\mathrm{FS}^{corp} = \max(c^{corp} \times \overline{\mathrm{LTAS}^{corp}}, \overline{\mathrm{PD}} + \overline{\mathrm{CoD}}) \quad \text{for} \quad \text{selskapsobligsjoner} \tag{4.3.7}$$

hvor

$$c^{gov} = \begin{cases} 0.30 & \text{for EEA-stater} \\ 0.35 & \text{for ikke-EEA stater} \end{cases} \qquad \text{og} \quad c^{corp} = 0.35. \tag{4.3.8}$$

I tillegg avhenger FS^{gov} og FS^{corp} av flere underliggende variabler, for statsobligasjoner $\overline{\mathrm{LTAS}^{gov}}$ og for selskapsobligasjoner $\overline{\mathrm{LTAS}^{corp}}$, $\overline{\mathrm{PD}}$ og $\overline{\mathrm{CoD}}$.

Long term avarage spread. Gjennomsnitts differansen over 30 år mellom obligasjonsrenten for gitt investering i statlig eller ikke-statlig, og den risikofrie renten kallles LTAS, eller *long term avarage spread*. Differansen mellom en slik obligasjon basert på nullkupongs -statsobligasjoner og den risikofrie renten vil matematisk kunne vises som

$$\overline{r}_0(0:K) - r_k. \tag{4.3.9}$$

Hvor $\overline{r}_0(0:K)$ er renten fastsatt av nullkupong-statsobligasjon satt opp i kontraktsslutt K, og r_k er den risikofrie renten i år k for landet med utgivelsen av statsobligasjonen. LTAS kalkulasjon skal baseres på historiske data over de siste 30 år. Problemet i flere land er mangel på data , og det vil ikke før i 2029 være nok historikk, ettersom målingene ble startet 1.januar 1999. Til denne problemstillingen har Solvency II i EIOPA[**4**] side 67-68 utarbeidet en formel for å kunne gjennomføre en LTAS kalkulasjon uten de nødvendige historiske data.

$$\frac{LTAS_{31.12.16}(7800 - ntd) + \sum^{ntd} SpreadFrom_{1.1.17}}{7800} \tag{4.3.10}$$

Med hensikt å simulere LTAS data over et 30 år perspektiv som tilsvarer ca. 7800 handelsdager. ntd er nye handelsdager fra 1.1.16 og $\sum^{ntd} SpreadFrom_{1.1.17}$ er summen av målt spread for disse dagane. $LTAS_{31.12.16}$ angir den målte LTAS for denne dagen. Tilsammen gir dette verdier for $LTAS^{gov}(d_j)$, hvor d_j angir durasjonen for investering j.

Etter beregning av $LTAS^{gov}(d_j)$ for alle land og durasjon d_j blir disse oppdatert på månedlig basis og hentes ut fra EIOPA sin hjemmeside [**7**], gitt i regnearket *PD_CoD*. $LTAS^{corp}$ baserer seg på durasjonen for selskapsinvestering j, og på kredittkvaliteten for denne investeringen ω_j. Disse er på samme måte oppgitt på månedlig basis i EIOPA [**7**], en mer detaljert forklaring blir behandlet i avsnitt 4.3.1.

Forskjellen i FS stats - og selskapsobligasjoner ligger først og fremst i hvor sikker investeringen er. Statsobligasjoner har lav rente og risiko fordi dette regnes som en sikker investering, hvor investoren garantert vil få tilbake sine verdier. I investeringer med selskapsobligasjoner finnes det større risiko. Derfor er det flere momenter som må tas med i beregningene, to av disse er PD og CoD.

Probability of default (PD). Sannsynligheten for at obligasjonsinvesteringen i den representative porteføljen skal misligholdes og miste sin verdi kalles av Solvency II *probablity of default*. Enkelt betyr dette at utsenderen ikke klarer å tilbakebetale sine forpliktelser, i videre beregninger vil dette noteres som $\overline{\text{PD}}$ og benyttes som i formel 4.3.15 .

Cost of Downgrade (CoD). Kostnaden en obligasjon får ved nedgradering av kvalitetsrangering, for eksempel fra en AAA til en AA kalles *Cost of Dowgrade*, notert ved $\overline{\text{CoD}}$. Denne blir kalkulert med tanke på med sannsynligheten for nedgradering av rangering innenfor obligasjonens tidsrammer og hvor mye dette da vil koste kjøperen i forhold til investeringsnivået. Her beregnet som kostnad for nedrangering i den representative porteføljen. Detaljene for utregningen av PD og CoD er beskrevet i avsnitt 4.3.1.

Solvency II	$\omega = 0$	$\omega = 1$	$\omega = 2$	$\omega = 3$	$\omega = 4$	$\omega = 5$	$\omega = 6$
Standard&Poor's	AAA	AA	A	BBB	BB	bBB	CCC

Tabell 4.3: Kredittrangering Standard&Poor's sett opp mot Solvency II.

Rangeringen for de seks ulike kvalitetene (ω) er vist i tabell 4.3, og i hvilken grad Solvency II tilknytter seg disse. Her er AAA eller $\omega = 0$ de sikreste obligasjonene, det vil si investeringene med minst risiko og høyest sannsynlighet for tilbakebetaling. Dette kan for eksempel være en statsobligasjon med lav løpetid og stabil økonomi, den mest vanlige er amerikanske statsobligasjoner. På den andre siden av skalaen har vi *junk bonds* fra BB eller $\omega = 4$ og lavere. Disse har potensielt høyere avkastning, men også høyere risiko for tapt investeringskapital. En mer detaljert innføring i kredittrisiko er tidligere beskrevet i avsnitt 2.2.2. Både PD og CoD baserer seg på investeringer i den såkalte representative porteføljen, som er den samme porteføljen av investeringer som brukt i beregningen av VA-korreksjonen og forklart i avsnitt 4.2.1.

4.3.1 Fundamental spread detaljert

I utregningen av $\overline{\text{LTAS}}^{gov}$, $\overline{\text{LTAS}}^{corp}$, $\overline{\text{PD}}$ og $\overline{\text{CoD}}$ benytter Solvency II seg av risikovurderinger med hensyn til hvor sikker investeringen er, varigheten og kvaliteten. Kredittkvaliteten blir som nevnt tidligere oppgitt i seks ulike rangeringer av ω, mens varigheten d kommer fra *Macauleys Duration* introdusert i kapittel 2.2.5. Ut ifra hvilke obligasjoner som blir brukt, enten statlig eller ikke-statlig vil kalkulasjonen av LTAS være ulik. I en investeringsportefølje med J ulike statlige obligasjoner med varighet $d_1, ..., d_J$ og med markedsverdi $A_1^{gov}, ..., A_J^{gov}$ beskrives LTAS fra Bølviken [**1**] side 51-52 som

$$\overline{\text{LTAS}}^{gov} = \sum_{j=1}^{J} \frac{\text{A}_j^{gov}}{\text{A}^{gov}} \times \text{LTAS}^{gov}(d_j). \tag{4.3.11}$$

Her er $\text{LTAS}^{gov}(d_j)$ gitt av EIOPA månedlig for alle land, og for hvert ulikt tilfelle må denne tabellen brukes for videre utregning. Summen av markedsverdien bestående av J obligasjoner gir den totale A^{gov} av selskapets portefølje

$$A^{gov} = A_1^{gov} + ... + A_J^{gov} \tag{4.3.12}$$

for alle investeringer i statsobligasjoner. I tillegg til durasjon, må også kredittkvaliteten ω for hver obligasjon j beregnes når porteføljen inneholder ikke-statlige obligasjoner. Dette kan på samme måte vises ved

$$\overline{\text{LTAS}}^{corp} = \sum_{j=1}^{J} \frac{\text{A}_j^{corp}}{\text{A}^{corp}} \times \text{LTAS}^{corp}(d_j, \omega_j) \tag{4.3.13}$$

hvor (d_j, ω_j) viser investeringenes durasjon d og kvalitet ω for investering j. For den resterende delen av FS-kalkulasjonen, gjelder samme fremgangsmåte. Her benyttes forholdet for hver investering j mot den totale verdien til portføljen, sammen med rangering og durasjon. For PD og CoD vises dette matematisk som

$$\overline{\text{PD}} = \sum_{j=1}^{J} \frac{\text{A}_j^{corp}}{\text{A}^{corp}} \times \text{PD}(d_j, \omega_j) \tag{4.3.14}$$

$$\overline{\text{CoD}} = \sum_{j=1}^{J} \frac{\text{A}_j^{corp}}{\text{A}^{corp}} \times \text{CoD}(d_j, \omega_j). \tag{4.3.15}$$

hvor $\text{PD}(d_j, \omega_j)$ og $\text{CoD}(d_j, \omega_j)$ som nevnt er oppdatert og gitt i EIOPA [**7**].

4.3.2 Matching kriterier

For å få godkjent matching korreksjon gjennom en *assigned* portefølje, må forpliktelser og investeringene godkjennes under det Solvency II beskriver som matching kriteriene. Det er i alt ni kriterier som er beskrevet i artikkel 1.5.1 EIOPA[**6**] og som er definert matematisk i Bølviken[**1**] side 49-50. Hovedpoenget er at den risikojusterte pengestrømmen for resurser svarer til pengestrømmen av forpliktelsene, og at forskjellen på disse ikke blir for stor. Nøyaktig hvor stor ulikhet som godkjennes er opp til et finansielt tilsyn i hvert land, i Norge Finanstilsynet. Dette er kupongutbetalinger $B_1, ..., B_K$ som er tilpasset pengestrømmen av forpliktelsene $L_1, ..., L_K$, for tid $k = 1, ..., K$. Markedsverdiene til disse investeringer er for selskapsobligasjoner, A_j^{corp} for investering $j = 1, ..., J$ og statsobligasjoner A^{gov} er gitt ved

$$A_j^{corp} = \sum_{k=1}^{K} \frac{B_{jk}^{corp}}{(1 + r_k)^k} \qquad A^{gov} = \sum_{k=1}^{K} \frac{B_k^{gov}}{(1 + r_k)^k} \tag{4.3.16}$$

hvor B_{jk}^{corp} og B_k^{gov} for $k = 1, ..., K$ er obligasjonens kupongbetaling for henholdsvis selskaps og statsobligasjoner. Tilsammen gir dette en total kupongbetaling oppdelt i statlig- og selskapsobligasjoner lik

$$B_k = B_k^{gov} + B_{1k}^{corp} + ... + B_{Jk}^{corp} \tag{4.3.17}$$

Statlige obligasjoner regnes som sikre investeringer uten den store risikoen, mens derimot investeringer i ikke-statlig sektor vil ha en risiko for mislighold og nedgradering kvalitetsrangering. Dette må medberegnes i den totale investeringsporteføljen. Hver selskapsinvestering j er gitt en kredittkvalitet ω_j, som gir $PD(k, \omega_j)$ for varighet $k = 1, ..., K$. I tillegg brukes også *recovery rate* RR, forventet konkurs av utsender av verdipapiret, som en inputvariabel. Dermed går det an å definere en risikojustert pengestrøm fra *assigned portofolio* basert på kupongutbetalingene som er tilpasset forpliktelsene.

$$B_k^{rc} = B_k^{gov} + a_{1k} \times B_{1k}^{corp} + ... + a_{Jk} \times B_{Jk}^{corp} \tag{4.3.18}$$

hvor

$$a_{jk} = \{1 - PD(k, \omega_j)\} + RR \times \{PD(k, \omega_j) - PD(k - 1, w_j)\} \tag{4.3.19}$$

for investering $j = 1, ..., J$ over tid $k = 1, ..., K$.

Fra dette kan det utarbeides kriterier for differansen i forpliktelser og den risikojusterte pengestrømmen.

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{\max(L_k - B_k^{rc}, 0)}{(1 + r_k)^k} < \eta \times BE \tag{4.3.20}$$

Hvor BE er best esitmate fra 2.3.2 for forpliktelse $L_1, ..., L_K$, og størrelsen på η er bestemt av et finansielt tilsyn i det respektive landet. I tillegg må et selskap underrette seg at:

- *Assigned Portofolio* av forpliktelser- og investeringer er behandlet uavhengig fra resten av selskapet.
- Investeringene består av obligasjoner eller andre finansielle virkemidler som blir holdt til forfall.
- Under ugunstige antagelser vil en dødelighetsrisiko under et forsikringsselskap ikke endre best estimate med mer enn 5 %.

$$|BE_s^{mort} - BE^{mort}| < 5\% \quad \text{med} \quad q_s = (1 + S)q \tag{4.3.21}$$

hvor $s = 0.15$ for stresset dødelighet q_s. Dette angår alle forpliktelser som blir påvirket av dødelighetsrisiko, hvor stresstestene er utarbeidet på samme måte som i avsnitt 2.3.5. Her med dødelighetsendring S= +15%.

Kapittel 5

Beregninger og sammenlikninger

For å kunne utføre numeriske beregninger på volatility og matching korreksjonene vil det først utformes *et forenklet forsikringsselskap* beskrevet i avsnitt 5.1. Her blir de matematiske modellene og antagelser bak et forsikringsselskap beskrevet. Hvor populasjonen, aldersfordelingen, forpliktelsene og investeringene er simulert med hensyn på beskrevne modeller og statistiske metoder. Det vil bli brukt forpliktelser som samsvarer med forskjellige aldersporteføljer og ulike investeringsstrategier(ALM) som tilpasser seg disse tidstrendene. Dødelighetsdataen som blir benyttet i beregningene er hentet direkte fra HMD og predikert med hensyn på Lee-Carter modellen.

5.1 Et forenklet forsikringsselskap

For å kunne illustrere så reelle resultater som mulig er det laget et forenklet forsikringsselskap hvor flere ulike scenarioer av interresse er testet ut. Beregningene baserer seg på ulike demografiske populasjoner, dødelighetsmodeller, investeringsmodeller med mer. Til slutt summeres resultatene opp og gir *best estimate* og *solvency capital requirement* for selskapet gjennom ulike scenarioer. Under følger forklaringer og antagelser for de ulike delene av et fiktivt forenklet forsikringsselskap.

For å gjennomføre beregningene på en mer effektiv og komprimert måte ligger det noen antagelser i bunn. Alle pensjonskontraktene blir signert i samme år ved alder $l_0 = 30$, over forsikringsår k $= 0, ..., K$. Ingen av kontraktene avbrytes før død, l_e, samtidig som det ikke blir inngått nye kontrakter i perioden av beregeningene. Prediksjon av dødeligheter blir basert på avsnitt 3.1.1 og beregningene av de økonomiske virkemiddlene blir behandlet som beskrevet i avsnitt 3.2.1. Det er først og fremst tre hensyn som må på plass før de endelige resultatene kan kalkuleres, demografi, investeringer og forpliktelser. Vi starter med demografi.

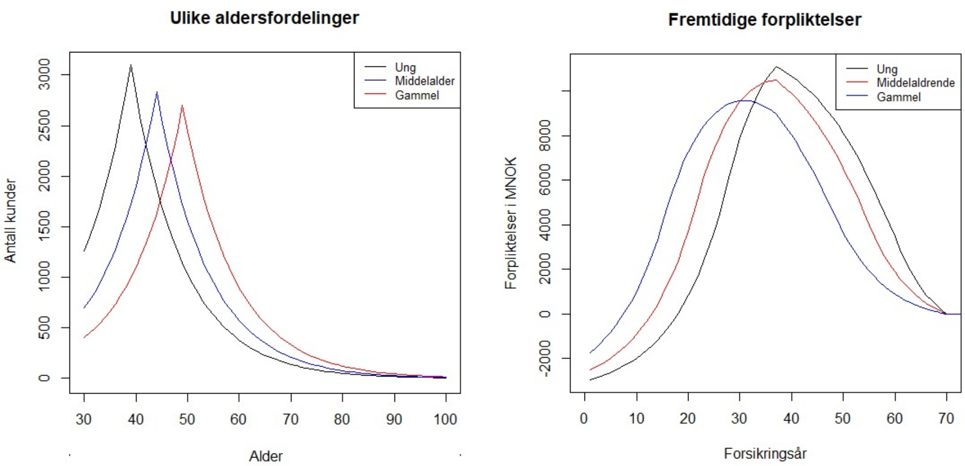
5.1.1 Demografi

Steg én for å kunne danne et grunnlag for et forsikringsselskap vil være å få på plass populasjonsstørrelsen, dødelighetene og utviklingen av levetider. Dette er størrelser som vil ha stor betydning for det endelige resultatet, både med tanke på inntekter, utgifter og investeringer.

Populasjonsstørrelsen, antall mennesker i forsikringsporteføljen, blir utformet av en *aldersfordeling*. Fordelingen sier hvor mange personer som befinner seg i hvert alderstrinn. Fra valgt modell er fordelingen bestemt av to konstanter μ og γ, og er vist ved

$$\mathrm{N}_j = p_i \times \frac{\mathrm{N}^{\mathrm{pop}}}{\sum p_i} \quad hvor \quad p_i = e^{(-\gamma|i-\mu|)}. \tag{5.1.1}$$

hvor N_j er aldersfordeling j[1]. Størrelsen på forsikringsspopulasjonen er angitt ved N^{pop} = 50 000. Parameteren μ viser til hvor toppunketet i aldersfordelingen ligger, altså i hvilket alderstrinn det befinner seg flest folk. γ beskriver tettheten rundt dette punktet. Ved høyere verdi av γ vil flere personer i porteføljen være rundt toppunktet, og populasjonen vil ha en mer ujevn fordeling. Lave verdier av γ gir en populasjon med større spredning og er dermed mindre sensitiv for endringer i hver enkelt alder. Verdien på parameterene angir hvilken aldersfordeling forsikringsselskapet skal basere sine estimater på.



Figur 5.1: Tre ulike aldersfordelinger (venstre), gir forskjellige fremtidige forpliktelser for et forsikringsselskap (høyre)

I figur 5.1(venstre) fremstilles en ung, middelaldrende og gammel forsikringsportefølje. Spredningen på fordelingene er antatt lik og gitt ved parameteren $\gamma = 0.15$. Derimot er toppunktet i hver aldersgruppe ulikt. For den unge er $\mu = 10$ opp til år K = 70. Denne fordelingen viser at forsikringspopulasjonen har flest personer ti år inn i sin forsikrede periode, og med en antagelse om at kontraktene er signert opp ved alder 30, gir dette at de fleste kundene er 40 år. $K = 70$ beskriver at fordelingen skal modelleres 70 alderstrinn, det vil si at den predikerer populasjonen opp til 100 år. For den middelaldrende og gamle-aldersfordelingen er $\mu = 15$ og $\mu = 20$. Det vil si at de fleste personene har mindre tid igjen som arbeidstakere og snart går over til pensjonsinstilværelse med

[1]Programvaren for aldersfordelingen er vist i Tillegg A - R-kode for aldersfordeling, her vist ved γ=0.10 og μ=15.

utbetalinger gjennom sine kontrakter. For slike porteføljer vil forsikringsselskapet ha lite inntekter i forhold til utbetalinger og må forvalte sine investeringer deretter. De fleste inntektene må settes i sikre obligasjoner slik at sannynligheten for utbetaling innen kort tid er stor. Dette er vist gjennom de fremtidige forpliktelsene til selskapet i figur 5.1(høyre). For en ung aldersfordeling vil det være motsatt. Her er forpliktelser lengre inn i fremtiden og selskapet vil ha større frihet til å benytte seg av ulike investeringsstrategier.

Dødeligheter. Etter å ha fått på plass fordelingen av alle aldre i forsikringsporteføljen, vil det neste steget være å utarbeide en *dødelighetsrate*. Nøyaktige prediksjoner er viktig fordi dødelighetene er dynamiske langt inn i fremtiden, og små endringer vil ha betydelige konsekvenser. Dødelighetene blir beregnet etter historise data for norske menn i alder 30-100 år. Dataen er hentet fra HMD [**10**], som sitter med informasjon over alle dødeligheter i Norge fra 1886-2014. For å utarbeide en så nøyaktig måling som mulig, brukes dødelighetsdata fra år 2014. De estimerte levetidene blir satt i system gjennom en levetidstablell ${}_kp_l$. Denne viser en overlevelsessannynlighet fra alle år l til et gitt år k, med en antagelse om at levetiden vil holde seg stabil over den neste forsikringsperioden. Ved å kun bruke konstant dødelighetsrate fra HMD vil premieestimeringen kunne vises som

$$\pi_{\text{HMD}} = 0.0436 \quad \text{i} \quad \text{MNOK}. \tag{5.1.2}$$

Beregningen kommer direkte av formel 2.1.10, hvor π_{HMD} er ekvivalenspremie etter dødeligheter hentet fra HMD for norske menn. Problemet med en slik antagelse vil være at pensjonskontraktene varer langt inn i fremtiden, og HMD kun baserer sine dødeligheter på observete data.

Løsningen finnes gjennom *Lee-Carter* prediksjon av fremtidig dødelighetsendringer, som beskrevet i kapittel 3.1.1. Her benyttes en prediksjon av fremtidig dødelighetsrate, basert på informasjon om norske dødeligheter fra 1980-2014. Premieestimeringen baserer seg på på pensjonsutbetalingen s og levetidstabellen ${}_kp_l$. Når levetiden endrer seg med tanke på Lee-Carter modellen vil ny ekvivalsenspremie kunne vises som

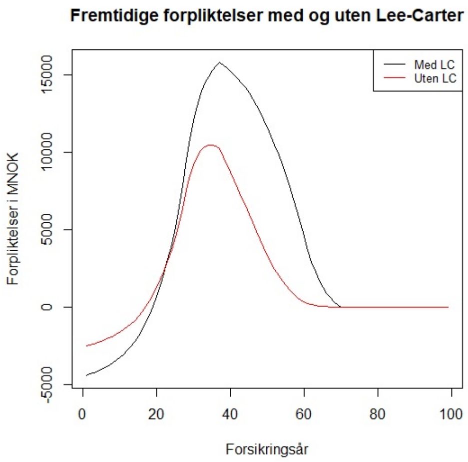
$$\pi_{LC} = s\frac{\sum_{k=l_r-l_0}^{\infty} d^k {}_kp_{l_0}^{\text{LC}}}{\sum_{k=0}^{l_r-l_0-1} d^k {}_kp_{l_0}^{\text{LC}}} \tag{5.1.3}$$

hvor ${}_kp_{l_0}^{\text{LC}}$ er levetidstabell med Lee-Carter prediksjon av levetid. Pensjonen er gitt ved s = 0.25 MNOK og π_{LC} tilpasset deretter. Med denne estimeringen vil det vises at

$$\pi_{LC} = 0.0719 \quad \text{i} \quad \text{MNOK}. \tag{5.1.4}$$

Hvor π_{LC} betegner ekvivalenspremie med Lee-Carter prediksjon av dødelighet i levetidstabellen[2]. Forskjellen fra den tidligere premien vil være nesten +40% per år. Dette kan virke som en noe stor økning, før vi ser på de tilsvarende endrede utbetalingene. For en gjennomsnittlig norsk mann i 2015 vil han være pensjonist i omkring 13 år. Med fremtidig økning basert på Lee-Carter fra tabell 3.1 vil pensjonnistilværelsen 70 år inn i fremtiden vare over 20 år. Dette gir økte forpliktelser for selskapet, derav stor økning i premie. Denne økningen i forpliktelsene er vist i figuren 5.2.

[2] Programvare for levetidstabell med Lee-Carter er vist i Tillegg A, R-kode for levetidstabell.



Figur 5.2: Differansen i fremtidige forpliktelser med og uten Lee-Carter prediksjon av dødelighet.

Her vil Lee-Carter prediksjonen gi en større inntekt på starten av perioden fordi flere av kundene lever frem til pensjonsalder, og premien er høyere. I det flere og flere går av med pensjon, etter cirka 25 år inn i forsikringsperioden vil selskapet få betydelig større utgifter. Denne faktoren forsterkes fordi gjennomsnittsalderen stiger i takt med porteføljen, og med lavere dødelighet stiger antallet pensjonsutbetalinger.

I beregningene skal de tre ulike aldersfordelingene benyttes i samsvar med HMD-dødelighet, og predikeres med hensyn på Lee-Carter modellen. Dette skaper grunnlaget for selskapets totale forpliktelser over alle år $k = 1, ..., 70$.

5.1.2 Forpliktelser

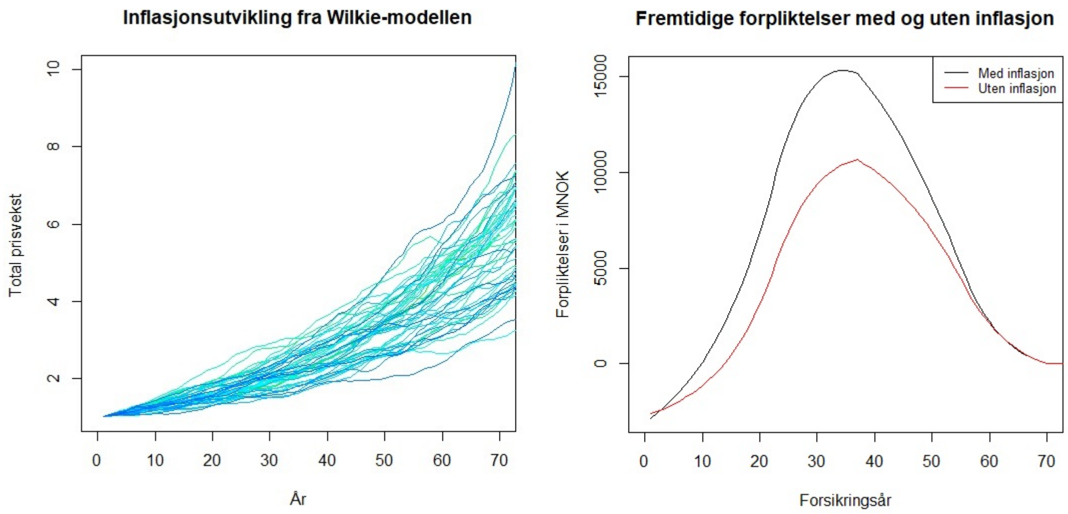
Etter at dødeligheten er tilpasset en prediksjon inn i fremtiden vil også premiene og pensjonsutbetalingene tilpasses med hensyn til markedets prisvekst. π_{LC} er ekvivalens-premie i år k= 0 med tanke på at levetiden øker inn i fremtiden. Samtidig som levetiden øker, øker også prisnivået i takt med tiden $k = 1, ..., K$. Dette kan vises for premie og pensjonsbetaling ved

$$\pi_k^I = \pi_{\text{LC}} \times Q_k \qquad \text{og} \qquad s_k^I = s \times Q_k \tag{5.1.5}$$

hvor inflasjonjustert premie π_k^I er basert på prisvekst Q_k og ekvivalenspremie fra Lee-Carter π_{LC}. Pensjonen baseres på kontraktsatt utbetaling s og er prisjustert på samme måte med Q_k, over år k $= 0, ..., K$. Inflasjonsutviklingen er vist i figur 5.3(venstre) simulert 50 ganger. Denne blir beregnet fra Wilkie-modellen som $Q_k = (1 + I_k)Q_{k-1}$ og forklart i avsnitt 3.2.1.

Når inn og utbetalingene er inflasjonsjusterte utgjør de en viktig forskjell i selskapets fremtidige forpliktelser, vist i figur 5.3(høyre). Forpliktelser skifter ved at selskapets økonomiske resultat blir forsterket med inflasjonen for det gitte året.

Selskapets inntekter og utgifter er satt i system gjennom en vektor av forpliktelser, hvor inntekter måles negativt og utgifter måles positivt. Her er premiene og pensjonsutbetalingene prisjustert etter hvert år k=$1, .., K$, og levetidstabellen basert på



Figur 5.3: Inflasjonsvariablen hentet fra Wilkie-modellen (venstre), og selskapets endring av forpliktelser etter at inflasjon er lagt til (høyre)

Lee-Carter modellen. Dette gir forpliktelser L_k for hvert år, med hensyn til aldersfordelingen i pensjonsporteføljen[3]. Forpliktelsene er gitt ved summen av N_{jk} over og under pensjonsalder l_r. Dette er en fordeling av aldersfordelingen N_j og levetidstabellen med Lee-Carter prediksjon ${}_kp_{l_0}^{\mathrm{LC}}$. Altså en oversikt over hvor lenge personene i porteføljen lever. Forpliktelsene kan vises som

$$L_k = -\pi_k^I \sum_{j:j+k<l_r} N_{jk} + s_k^I \sum_{j:j+k\geq l_r} N_{jk} \quad \text{hvor} \qquad N_{jk} = {}_kp_{l_0}^{\mathrm{LC}} N_j. \tag{5.1.6}$$

Den første delen av forpliktelsesvektoren er en sum av alle innbetaling før pensjonsalder. Dette vises ved innbetaling av ekvivalenspremie $-\pi_k^I$ for alle aldre j, betalt over k år, så lenge $k + j < l_r$. På samme måte summeres pensjonsutbetalingene for alle aldre j over k år, så lenge $j + k \geq l_r$ og forsikrinstaker er i live.

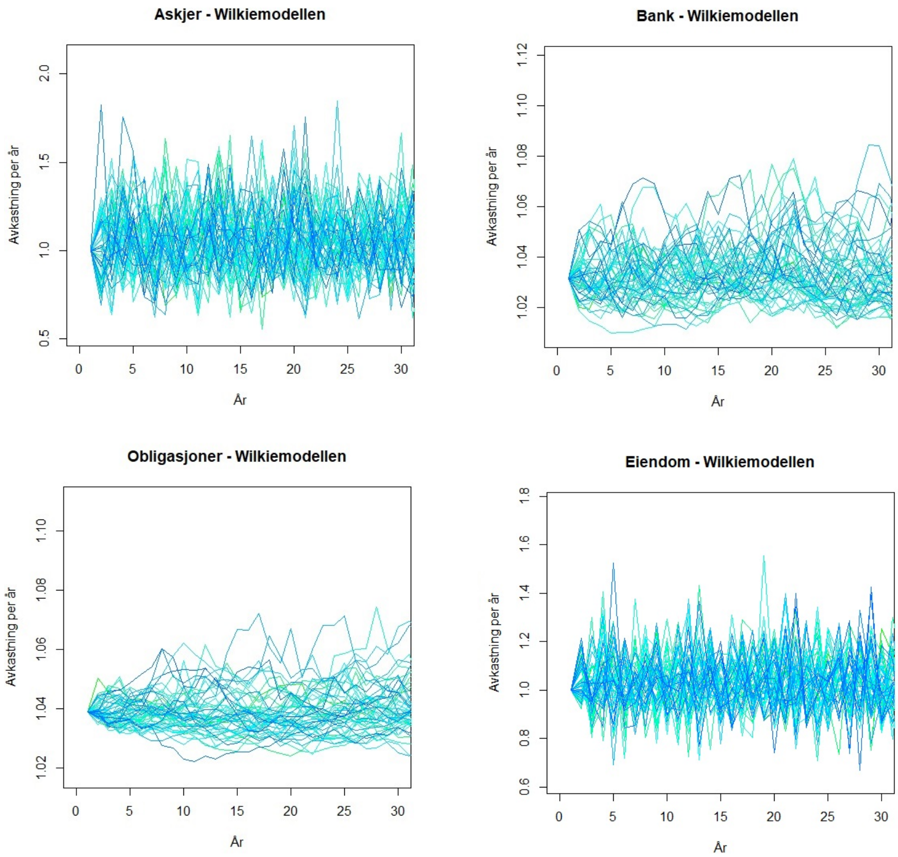
5.1.3 Investeringer

Det neste steget blir å investere premiene med henyn til tidsperspektivet av forpliktelsene. Dette gjøres ved at de finansielle virkemiddlene produsert av Wilkie-modellen blir brukt som investeringsmuligheter av selskapets inntekter[4]. Fra figur 5.4 vises avkastningsmulighetene, og den tilhørende risikoen for hver av de ulike investeringene. For aksjer og eiendom er det stor volatilitet fra år til år, men potensielt stor avkastning. Disse investeringsformene har stor risiko på kort sikt, og kan sette utbetalingen av forpliktelser i fare ved en nærligende økonomisk frist. På den andre siden utarbeider Wilkie-modellen bankavkastning og obligajsonsavkastning som sikre investeringer med

[3]Programvaren er vist i Tillegg A - R-kode for forpliktelsene.

[4]Programvaren for Wilkie-modellen er vist i Tillegg A - R-kode for Wilkie-modellen, hvor m er antall simuleringer over K år.

mindre volatilitet. Selv om disse investeringene i gjennomsnitt gir en mindre avkastning vil de føre til høy sannynlighet for utbetaling av kontrakter over en kort løpetid.



Figur 5.4: Ulike investeringsmuligheter og respektive avkastninger (50 simuleringer) utarbeidet fra Wilkie-modellen.

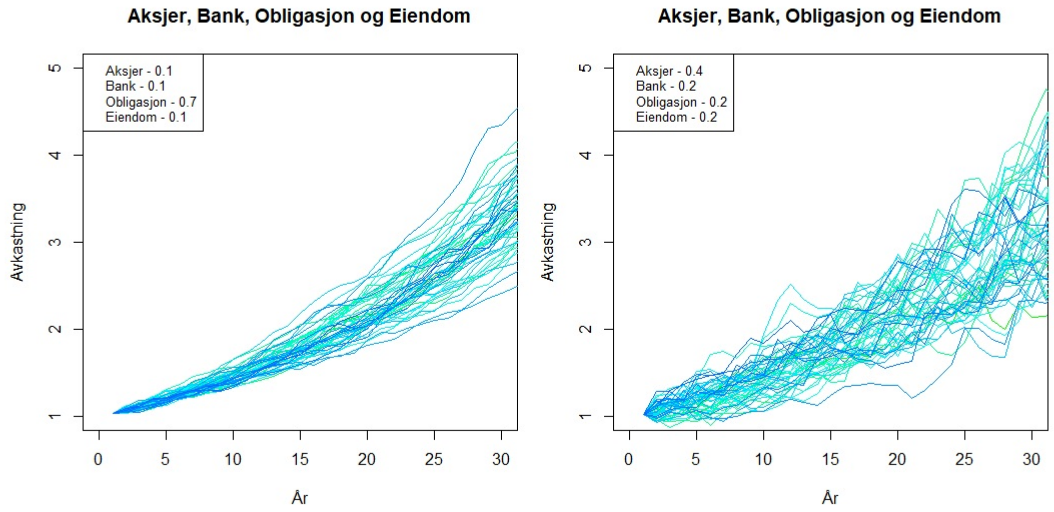
For å tilpasse de ulike tidstrendene benyttes ulike fordelinger av investeringer. Her er det forskjellige strategier med hensyn til andelen av kapital som skal investeres innefor hver avkastningsmulighet. De ulike investeringsvektene er gitt ved

$$\begin{gathered} w_1 = \text{Aksjer} \quad w_2 = \text{Bank} \quad w_3 = \text{Obligasjoner} \quad w_4 = \text{Eiendom} \\ \text{Hvor} \quad w_i \in [0,1] \quad \text{for} \quad \text{i} \in (1,2,3,4). \end{gathered} \tag{5.1.7}$$

Her er verdien til w_i oppgitt i prosent for de ulike investeringsstrategiene og $\sum w_i = 1$, fordelt med hensyn til risiko og avkastning. Inntektene blir investert gjennom de ulike metodene for så å danne nye forpliktelsesvektorer med de respektive vektene målt i prosent. Avkastningen for investeringene i år k vil matematisk kunne vises som

$$\mathcal{R}_k = \sum_{i=1}^{4} w_i R_{ik} \tag{5.1.8}$$

hvor R_{ik} er avkastning for investering i i år k, og w_i er den investerte andelen. Investeringsporteføljen følger deretter sammme utvikling som vist i formel 2.2.5, hvor to ulike strategier er plottet i figur 5.5. Investeringene vil foregå så lenge selskapet har tilgjengelig kapital altså ved $L_k < 0$, når inntekter er målt negativt.



Figur 5.5: Avkastninger for ulike investeringsporteføljer simulert 50 ganger, lavrisiko(venstre) og høyere risiko (høyre)

I figur 5.5 er det vist to investeringsstrategier med ulik volatilitet og potensiell avkastning. Den første strategien er vist som en lavrisiko-portefølje(venstre) er gitt ved $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.7$ og $w_4 = 0.1$, som en fordeling av forholdsvis aksjer, bankavkasnining, obligasjoner og eiendom. Fra figuren kan det vises at en slik investeringsportefølje med hovedandelen basert i obligasjoner vil ha en jevnere avksatningskurve uten store årlige tap. På den andre siden vil en portefølje med $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.2$, $w_3 = 0.2$ og $w_4 = 0.2$ som inneholder flere usikre investeringselementer kunne gi en mer volatil utvikling av ressurser, vist i figur 5.5(høyre). En slik strategi er i dette tilefellet definert som en høyrisiko-portefølje, og som vil gi større variasjon på de totale predikerte avkastningene. For et forsikringsselskap gjelder det å finne den investeringsporteføljen som samsvarer best med de respektive forpliktelsene og at den blir godkjent under hvert lands finansielle tilsyn, samt under Solvency II kriteriene.

For de ulike aldersporteføljene vist i figur 5.1, gjelder det nå å tilpasse investeringene til gitt tidsprofil av forpliktelsene. Det forenklede forsikringsselskapet vil benytte seg av ulike investeringsstrategier tilpasset sin respektive forpliktelsesstrøm. Disse strategiene er vist i tabell 5.1. Den gamle porteføljen hvor hoveddelen av kundene snart går av med pensjon er risikojustert slik at utbetalingene med kort løpetid vil bli innfridd. På den andre siden vil forvaltningen av en ung og en middelaldrende aldersfordelinger kunne risikere mer ved å sette en større andel i aksjer- og eiendomsinvesteringer. Dette vil skape en større potensiell avkastning over mange år, med stor volatilitet fra år til år[5].

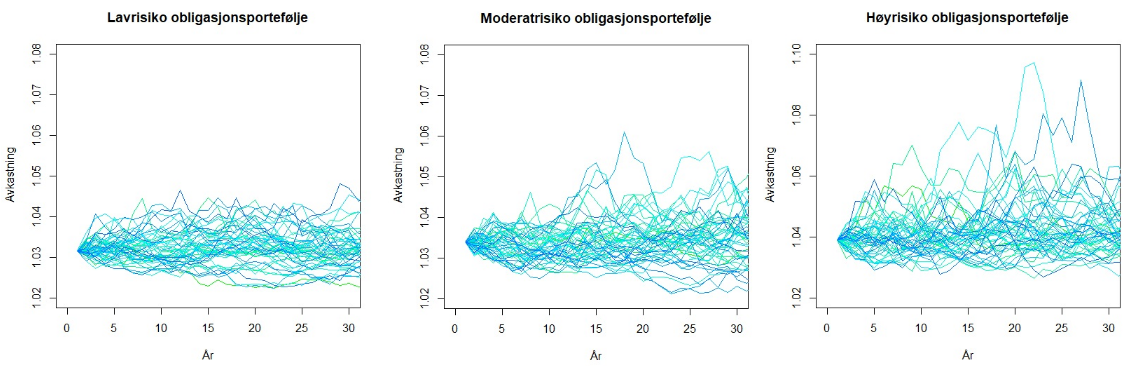
Obligasjonsportefølje. I tillegg til investeringsporteføljer med ulike forhold av de finansielle virkemiddlene skal det også benyttes investeringer kun med obligajsoner.

[5]Programvaren for ALM, med forskjellige investeringer er vist i Tillegg A-Programvare for ALM, her vist for en middelaldrende portefølje.

Aldersportefølje	w_1 - Aksje	w_2 - Bank	w_3 - Obligasjon	w_4 - Eiendom
Ung	0.15	0.3	0.35	0.2
Gammel	0.0	0.4	0.5	0.1
Middelaldrende	0.05	0.3	0.5	0.15

Tabell 5.1: Investeringsvekter basert på forpliktelsestrenden til det forenklede selskapet

Disse er med på å danne ulike obligasjonsporteføljer, på samme måte som tidligere, med ulik potensiell avkastning og volatilitet.



Figur 5.6: Ulike obligasjonsporteføljer simulert 50 ganger, fra lavrisiko(venstre) til høyrisiko(høyre)

Figur 5.6 viser tre forskjellige obligasjonsporteføljer med ulik investeringsgrad i forhold til risiko. Obligasjonsporteføljene er utarbeidet gjennom en tilpassning av Wilkie-modellen, hvor større grad av volatilitet for hvert år gir høyere risiko for de totale investeringene. Utformingen av modellen er den samme som forklart i avsnitt 3.2.1. De justerte verdiene i Wilkie-modellen for hver av obligasjonsporteføljene er vist i tabell 5.2.

	Orginal	Lavrisiko	Moderatrisiko	Høyrisiko
$\hat{\xi}^r$	0.0305	0.007	0.010	0.015
$\hat{\sigma}^r$	0.019	0.017	0.018	0.019

Tabell 5.2: Tilpassede parametere til Wilkie-modellen for ulike obligasjonsporteføljer.

Lavrisiko porteføljen er en sammling av sikre obligasjoner både med tanke på gjennomsnittlig avkastning, volatilitet og blir behandlet som en sikker investering. En slik investering har lavt standaravik (volatilitet) $\sigma = 0.61\%$, og deretter lav gjennomsnittavkastning $\mu = 3.48\%$. Endringene er utført for å reflektere ulike obligasjonsporteføljer innenfor sikre klassifiseringer av risiko. For de resterende porteføljene er gjennomsnittavkastningen og volatiliteten vist i tabell 5.3. Differansen er vist som andel investert i statsobligasjoner, og resten i selskapsobligasjoner summert opp til 100 %.

Moderat-og høyrisikoporteføljene har en potensielt høyere avkastning og deretter volatilitet. Dette kommer av en høyere andel investering i selskapsobligasjoner, med høyere risiko for avkastning. Ettersom det kun er benyttet obligasjonser som finansielt virkemiddel, vil hver av de ulike porteføljene klassifiseres som relativt sikre og kunne benyttes til samkjøring med forpliktelser med lang løpetid. Slike investeringsporteføljer med

Portefølje	Gj.snitt avkastning μ	Volatilitet σ	Statsobligasjoner
Lavrisiko	3.48 %	0.61 %	70 %
Moderatrisiko	3.60 %	0.66 %	60 %
Høyrisiko	4.05 %	0.85 %	50 %

Tabell 5.3: Gjennomsnittavkastning og volatilitet for de ulike obligasjonsporteføljene i prosent

100 % obligasjoner blir av det forneklede forsikringsselskapet benyttet i utformingen av matching korreksjonen, introdusert i kapittel 4.

5.1.4 Resultater

Summen av resultatene for de ulike scenarioene beskrevet ovenfor vil gi det totale resultatet av **best estimate** som forklart i formel 2.3.2, og defineres som summen av alle forventede forpliktelser av nåværende kontrakter. Gjennom de forskjellige scenarioene vil det produseres ulike BE, og det vil være mulig å optimalisere BE-resultater med hensyn på investeringsmetode, risiko, populasjon og aldersfordeling. Med et sjokk s i den predikerte dødeligheten vil det være mulig å beregne nye BE-verdier, nå notert som BE_s. Herfra vil **SCR** kunne utarbeides fra Solvency IIs bestemmelser.

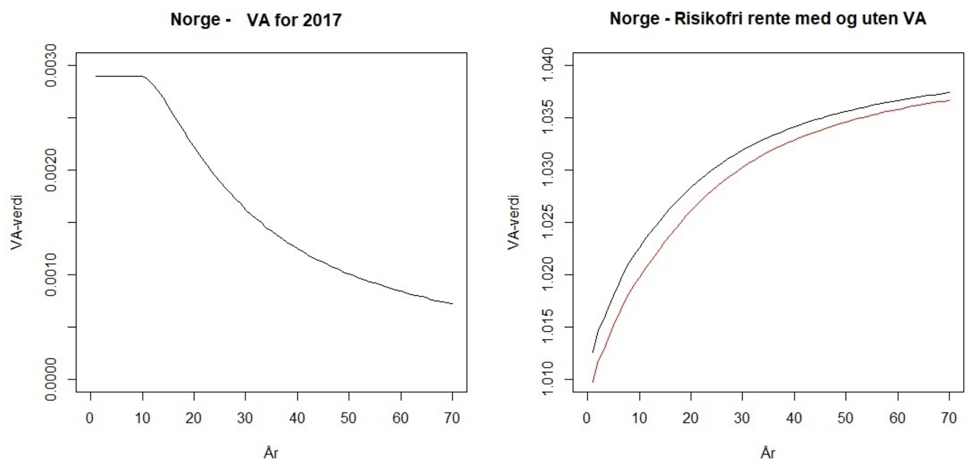
I rapporteringen til Solvency II vil det viktigste være å beregne kapitalreserven for hvert av selskapets arbeidsområder. Hver del av selskapet blir brutt ned i moduler, hvor beregningene i dette tilfellet vil skje gjennom en pensjonsportefølje underliggende SCR_{long}, kapitalreserven for levetidsrisiko. Dette er en sluttnode, uten underliggende bestemmelser. Fra denne risikomodulen skal det gjennomføres nummeriske beregninger med gitte antagelser nå med volatility og matching korreksjonene. Vi starter med volatility korreksjonen.

5.2 Beregninger av volatility korreksjonen

For volatility korreksjonen er verdiene til VA og den risikofrie renten r_k beskrevet i 4.2.1 og hentet direkte fra EIOPA sine hjemmesider. Verdiene er oppdatert på månedlig basis og publisert for alle land under Solvency II direktivet. Nederst på hjemmesiden finnes det informasjon for ønsket tidsperiode, gitt i regnearket *Term Structures* fra EIOPA [7]. Denne informasjonen brukes først og fremst som grunnlaget for beregninger av best estimate basert på forsikrinselskapets forventede fremtidige forpliktelser.

5.2.1 Best estimate

Norge. I figur 5.8(venstre) vises VA-verdien for Norge januar 2017 som etter LLP (Last Liquid Point) = 10 begynner å konvergere. Det betyr forholdsvis store konstante korreksjons-verdier 10 år frem i tid. Fra k = $10, ..., 70$ konvergerer volatility korreksjonen og dermed vil den gi mindre påvirkning på resultatet lengre inn i fremtiden. I figur 5.8(høyre) vises den risikofrie renten med simulerte fremtidige verdier basert på



Figur 5.7: VA verdi for Norge (venstre) og diskonteringsrenten med og uten volatility korreksjon for Norge (høyre) hentet fra EIOPA(JAN - 2017)

Smith-Wilson modellen. Når VA legges til gir dette den totale risikofrie renten med volatility korreksjon r_k^{va}. Fordi VA konvergerer vil forskjellen på r_k^{va} og r_k forminskes når tiden går k $\to \infty$.

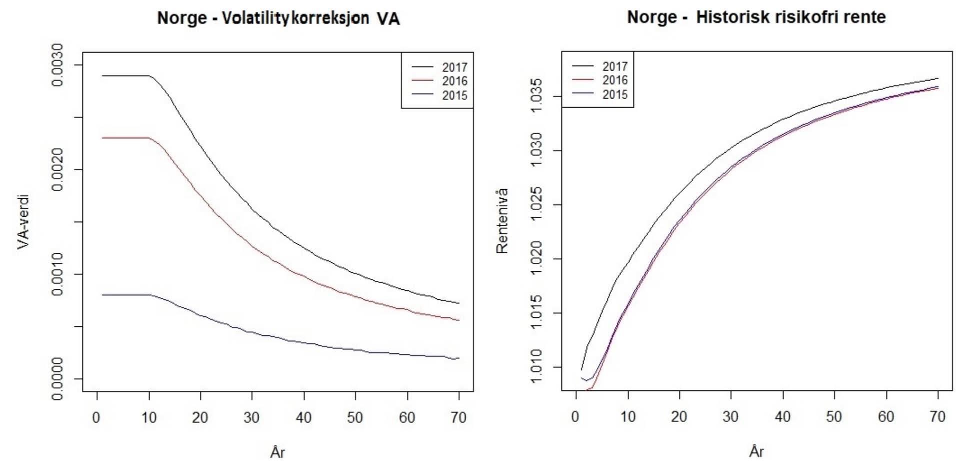
For et forsikringsselskap vil disse verdiene sammmen med forpliktelsene og investeringene kunne føre til en total beregning av BE, med og uten Volatility korreksjon. ALM av investeringene er tilpasset tidstrendene av forpliktelsene som vist i kapittel 3.3, og herfra vil det utarbeides numeriske beregninger som tilslutt summeres opp i solvenskapitalkravet for levetidsrisiko SCR_{long}. Det skal nå beregnes flere ulike best estimate, BE, med forskjellige datagrunnlag. For det totale kapitalkravet trenges både BE_s, best estimate med dødelighetsendringer q_s og BE^{va} best estimate med volatility korreksjon. I tillegg skal også en kombinasjon av disse kalkuleres gitt ved BE$_s^{va}$, som er best estimate med volatility korreksjon og stresstestet dødelighet. Disse beregningene skal analyseres basert på ulike aldersporteføljer, som tilslutt vil gi forskjellige kapitalkrav basert på hver enkelt antagelse.

Aldersportefølje	ALM	Best estimate	Best estimate med VA
Ung	Høyrisiko	18.78	17.45
Middelaldrende	Balansert	26.65	25.46
Gammel	Lavrisiko	34.25	32.56

Tabell 5.4: Best estimate for Norge Januar 2017 med og uten VA-korreksjon, med tilhørende ALM til aldersporteføljen målt i mrd. NOK

Den totale forskjellen med norske dødelighetsdata med ulike porteføljer og investeringsstrategiene tilpasset disse er vist i tabell 5.4. De ulike porteføljene av investeringer som skal tilpasses tidstrendene av forpliktelsene for de ulike aldersporteføljene er gitt i tabell 5.1. En slik beregning er utarbeidet gjennom risikokorreksjon og avkastningmuligheter med hensyn til lengden på forventede forpliktelser. I den gamle porteføljen er det en klart større BE enn de andre. Oppfriskning fra basis livsforsikringsmatematikk sier at en større positivt beregning gir mer negativt økonomisk resultat. Som vil si at for yngre aldersporteføljer vil selskapet ha lavere forventet fremtidige forpliktelser.

EIOPA har utarbeidet VA-verdier for hvert land basert på oppdaterte nullkupongsobligasjoner. Historiske verdier viser at forskjellene er store selv innad i Norge, med forholdsvis liten differanse i obligasjonsprisene. Dette vil igjen være med på å produsere ulike best estimate, BE og best estimate med volatility korreksjon, BE^{va} for ulike år.



Figur 5.8: VA-konstanten for Norge, hentet fra EIOPA(2015), EIOPA(2016) og EIOPA(2017).

I figur 5.8 vises en differanse i rente- og volatility verdier i tidsperioden 2015-2017 for Norge. I denne tidsperioden er det en stigende trend både i risikofri rente og volatility korreksjon. Denne vil gi påvirkninger på nåværende BE med og uten korreksjon. Ved et høyere rentenivå $r_k \uparrow$ vil summen av alle fremtidige forpliktelser for nåværende kontrakter under samme antagelser skifte nedover, BE $\downarrow$ som vist i tabell 5.5. For volatility korreksjonen vil et skifte mot høyere nivå $VA \uparrow$ føre til en større differanse i orginal og korrigert best estimate. Fra tabellen ser vi at denne differansen øker ved relativt små korrigeringer fra år til år innad i Norge, med ellers likt datagrunnlag.

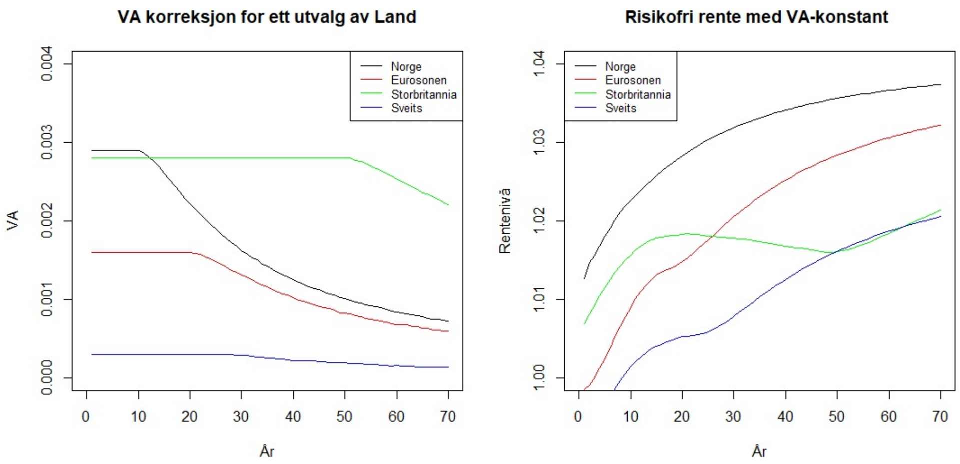
År	Aldersporteføljе	ALM	BE	BE^{va}	Differanse
2017	Middelaldrende	Balansert	26.65	25.46	**1.19**
2016	Middelaldrende	Balansert	28.27	27.22	**1.05**
2015	Middelaldrende	Balansert	28.15	27.77	**0.38**

Tabell 5.5: Best estimate for Norge Januar 2017 med og uten VA-korreksjon, med tilhørende ALM til aldersporteføljen , målt i mrd. NOK.

Endringene i den risikofrie renten, vist i figur 5.8(høyre) kommer av at de norske statsobligasjonene som i følge Norges Bank **[13]** i 2015 og 2016 hadde samme nivå på 10 års løpetid med 1.45% avkastning, men som i 2017 økte til 1.69%. For volatility korreksjonen kommer endringen av ulik ekstrapolering for VA gjennom Smith-Wilson modellen og koeffesientene $c_1^{va}, ..., c_n^{va}$ oppgitt av EIOPA**[7]**.

Sammenlikning av ulike EIOPA-land. Det er ulike størrelser som er med å bestemme den totale påvirkningen VA-korreksjonen har på det økonomiske resultatet.

Forskjellen ligger i LLP (Last Liquid Point), konvergensverdien α, UFR(Ultimate Forward Rate) og den risikofrie renten r_k. Dette med antagelser om at datagrunnlaget til forpliktelsene ellers er like.



Figur 5.9: Norge sammenliknet med et utvalg EIOPA land, VA(venstre) og den r_k^{va} (høyre), begge med data fra 2017

Hvert land har en tilhørende LLP lengde vist som år n, fra figur 5.9 vises dette som tidsperioden hvor det finnes finansiell informasjon og VA-verdien er konstant. I prinsippet vil en lengre informasjonsperiode og deretter større konstant tidsperiode av volatilitykorreksjon føre til en totalt større justert diskonteringsverdi for BE. I tillegg vil også konveringshastigheten α gi utslag på forksjellen mellom de respektive økonomiske resultatene med hensyn til tiden k, denne verdien sier hvor fort VA-korreksjonen konvergerer etter endt LLP, og vekten som legges på UFR. Forskjellen kan blant annet vises mellom Norge ($\alpha = 0.093$) og Eurosonen ($\alpha = 0.126$), hvor den norske VA-korreksjonen bruker lenger tid til UFR etter LLP, enn hva Eurosonen bruker. Generelt har land med kortere LLP en lavere konvergerinshastighet som vist i tabell 4.1. Antagelsen stemmer godt overens med figuren, hvor de aller fleste land har den samme UFR i 2018 på 4.05%, og det er først og fremst konvergensveien og startverdi som gir differanse i den totale korreksjonen. Fra figuren skiller Sveits seg ut, med et annet konvergeringspunkt enn resten, her UFR = 3.2%, og som vil gi videre påvirkning på beregningen av BE og SCR.

Land	Portefølje	ALM	BE	BE^{va}	%
Norge	Middelaldrende	Balansert	26.65	25.46	4.4%
Eurosonen	Middelaldrende	Balansert	37.59	36.09	3.9%
Storbritannia	Middelaldrende	Balansert	88.20	75.93	13.9%
Sveits	Middelaldrende	Balansert	80.61	79.74	1.1%

Tabell 5.6: Best estimate for Norge sammenliknet med andre land under EIOPA sitt reglement for 2017 målt i mrd. NOK.

Sammenlikningen av de ulike landene inenfor Solvency II er vist i tabell 5.6. Storbritannias utregninger bruker en LLP = 50, noe som gir en konstant volatility korreksjon over 50 år. Ettersom VA i tillegg har høy verdi, vil dette gi en stor differanse mellom BE og BE^{va}. På den andre siden finnes Sveits med en lav VA-verdi og annen UFR, som deretter gir små forskjeller i den volatility korrigerte BE^{va}. Disse to landene med forholdsvis lav r_k, og selv med store eller små VA-verdier, vil den totalte summen av fremtidige forpliktelser få en høyere verdi enn resten. Norge og Eurosonen har forholdsvis like volatility korreksjoner med norske verdier noe høyere som vist i prosentutregningen. Den risikofrie renten er høyere i Norge, og vil dermed gi en lavere BE enn i Eurosonen.

For å kunne utarbeide det totale kapitalkravet for levetidsrisiko må dødeligheten q stresstestes. Dette for at forsikringsporteføljen skal kunne bevare en trygg økonomisk situasjon, selv under ufordelaktige antagelser, her for en pensjonsportefølje. Den nye dødeligheten er utarbeidet på samme måte som beskrevet i kapittel 2.3.4, hvor

$$q_s = (1 - S)q \quad \text{og} \quad \text{S} = 0.2 \tag{5.2.1}$$

som følger etter EIOPA sine rettningslinjer. Tilsammen vil BE_s (stresstestet dødelighet) og BE_s^{va} (stresstestet dødelighet med VA-korreksjon) basere seg på de samme numeriske antagelsene, som vist i tabell 5.7. I neste avsnitt brukes disse for å kunne løse ut selskapets kaptialnode og resultatet i SCR_{long}.

Land	Aldersportefølje	ALM	BE_s	BE_s^{va}
Norge	Middelaldrende	Balansert	28.00	26.70
Eurosonen	Middelaldrende	Balansert	39.42	37.86
Storbritannia	Middelaldrende	Balansert	92.84	79.80
Sveits	Middelaldrende	Balansert	84.72	83.77

Tabell 5.7: Best estimate for Norge sammenliknet med andre land under EIOPA sine data fra 2017 målt i mrd. NOK.

En slik endring i dødelighetn etter EIOPAs rettningslinjer gir påfallende differanse fra den orgniale beregnede BE-verdien. Her gir en stressetestet dødelighet større BE, altså en høyere nåverdi av totale forventede fremtidige forpliktelser for nåværende kontrakter. Dette stemmer overens med at lengre levetid gir selskapet et mer negativt økonomisk resultat.

5.2.2 Solvency capital requirement

Oppsummeringen av de numeriske beregningene vil i dette tilfellet avsluttes i SCR_{long}, solvenskapitalkravet for levetidsrisiko som beskrevet i kapittel 2.3.4. På samme måte som original stresstesting vil kapitalkravet med volatilitykorreksjon nå med dødelighet q_s kunne vises som

$$\text{SCR}_{long}^{va} = \text{BE}_s^{va} - \text{BE}^{va}. \tag{5.2.2}$$

Hvor BE_s^{va} er best estimate med stressede dødeligheter og volatilitykorreksjon, og BE^{va} er kun beregnet gjennom korreksjonen. Forskjellene innad i Norge gir en innføring i hvordan endringen i kapitalreserve vil utformes av aldersfordelingen selskapet sitter med i sin portefølje.

Portefølje	BE_s	$-BE$	$= SCR_{long}$
Ung	19.64	18.80	0.84
Gammel	35.77	34.25	1.52

Tabell 5.8: SCR utregningen for ulike aldersporteføljer for Norge(2017) målt i mrd. NOK.

I tabell 5.8 vises forskjellen i SCR for en gammel og en ung aldersfordeling, uten volatility korreksjon. Her gir en eldre portefølje høyere SCR enn en yngre portefølje. Dette kommer av at selskapet har relativt mindre inntekter(premier) i forhold til utbetalinger, som er ekvivalent med større kapital for å sikre økonomisk drift av forsikringsaktivitetene. I videre utregning vil det kun bli brukt en middelaldrende portefølje, på denne måten for å enklere fremstille påvirkningen av volatility korreksjonen mellom ulike EIOPA - land. Beregningene er basert på samme antagelser som beskrevet i kapittel 5.1 og vist i tabell 5.9.

Land	SCR_{long}	SCR^{va}_{long}	Endring i kapitalreserve	Prosent
Norge	1.34	1.24	**0.10**	7.4 %
Eurosonen	1.84	1.76	**0.08**	4.1 %
Storbritannia	4.63	3.87	**0.76**	16.4 %
Sveits	4.11	4.03	**0.08**	1.9 %

Tabell 5.9: SCR verdier med og uten Volatility korreksjon for diverse land under EIOPA-reglementet (2017) målt i mrd. NOK.

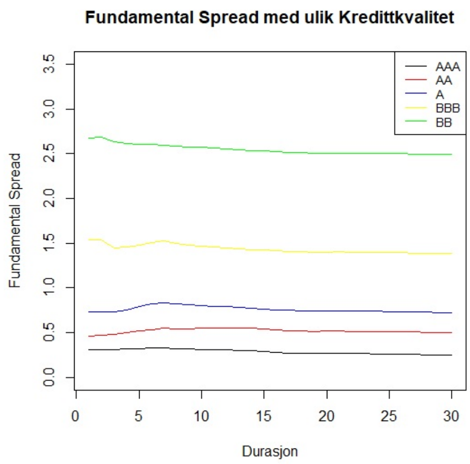
Storbritannia og Sveits oppererer med lave r_k^{va} som gir betydelig høyere BE og deretter SCR_{long} og SCR^{va}_{long}. Allikevel er det en forskjell i endring i bruk av volatility korreksjon. En lang, høy konstant VA vil gi store utslag, over 16% nedgang av SCR med bruk av korreksjon. For Sveits vil forskjellen på SCR med og uten volatility være langt mindre. Dette kommer av lav korreksjonsverdi over hele forpliktelsesperioden.

5.2.3 Evaluering av volatility korreksjon

Den orginale estimeringen av BE, BE_s og videre til SCR baserer seg i stor grad på den risikofrie renten r_k. I diskonteringen vil denne renten gi store forskjeller på utregningen over hele forsikringsperioden $k = 1, ..., K$. Det vil si at innenfor ulike land må selskapene innrette seg etter forskjellige kapitalreserver, ut ifra henholdsvis like forsikringsporteføljer. Det samme gjelder volatility-korreksjonen i diskonteringen, hvor hver land produserer sin egen VA-korreksjon og dermed ulik endring i den totale kapitalreserven. Variablene som er med på å forme VA-korreksjonen har hver sin tilknyttning til endring i SCR, og totalt vil disse påvirke ulikt. Ved lang LLP, vil UFR ha mindre påvirkning, ettersom den utarbeidede VA ikke vil konvergere før etter mange år og motsatt. Høyere UFR vil gi større endring i den totale korreksjonen, ettersom høyt konvergesmål vil gi større gjennomsnitt over en lang tidsperiode. Store prosentvise endringer i solvenskapitalen skjer etter følge av høye gjennomsnittsverdier av VA-korreksjonen over hele forpliktelsesperioden. Dette vil for hvert respektive land gi fordelaktig beregning av SCR, og endring på opp mot 17 %. Med en lavere gjennomsnittlig VA-korrkesjon vil kapitalendringene ligge mellom 4 - og 8 % i Norge og eurosonen. Dette er også betydelige utslag for den økonomiske situasjonen til et forsikringsselskap. For Sveits som har den laveste volatility korreksjonen vil endringene på den totale SCR ikke bli like stor som de andre. Forskjellen på 1.9% kommer av lave VA-verdier over hele forsikringsperioden og en UFR på 3.2%. Nedskrivningen i kapital vil dermed ikke være like attraktiv som innenfor de andre landene.

5.3 Beregninger av matching korreksjonen

Matching korreksjonen er basert på de samme antagelsene som volatility korreksjonen med hensyn til endringen av diskonteringsrenten, men utarbeidelsen og gjennomføringen er forskjellig. Her finnes det mindre informasjon fra EIOPA av vekter til kalkulasjonen. Disse må istendenfor utarbeides med tanke på selskapets forpliktelsesvektor L_k, best estimate BE, og verdien til *assigned* portefølje A. Endringene i den totale utarbeidelsen ligger i avkastningen og risikoen med hensyn til de ulike investeringene. Kredittrisikoen av hver investering blir medberegnet gjennom fundamental spread, FS basert på den representative porteføljen, og er oppgitt av EIOPA for hvert land med tanke på den totale risikofaktoren.



Figur 5.10: Fundamental Spread FS for investeringer med ulik kredittkvalitet (S&P) målt i prosent for Norge(2017) oppgitt av EIOPA.

En slik utforming er gjort fra et gjennomsnitt av ulike investeringer og tilhørige kredittkvaliteter. Disse er vist for hver kvalitet i figur 5.10 for norske data.

Tilpassning. Forskjellen på de ulike kredittkvalitetene er gitt for hver investering, hvor den totale utregningen av FS er beregnet fra et vektet gjennomsnitt av selskapsinvesteringer for hvert land. Utformingen av de ulike porteføljene i forhold til kredittkvalitet er gitt utifra hvor sikker den totale porteføljen er i markedet og avkastning denne risikoen gir. I investeringsdelen som foregår innenfor selskapsobligasjoner må både durasjonen d_j og kredittkvaliteten ω_j for hver investering $j = 1, ..., J$ tas med i betraktning. I avsnitt 5.1.3 brukes tre ulike obligasjonsporteføljer med ulike sikkerhetsgrad, disse tar for seg forskjellig forhold av investeringer vist i tabell 5.10. De tre er *lavrisko*, *moderatrisiko* og *høyrisiko*, hvor forskjellen ligger i investeringsfordelingen mellom kredittkvaliteter. Med fastsatt fordelingen er det mulig å hente ut verdiene fra EIOPA sine hjemmesider, som tilslutt vil gi FS^{corp}.

Portefølje	ω_0 (AAA)	ω_1 (AA)	ω_2 (A)	ω_3 (BBB)
Lavrisiko	0.3	0.6	0.1	0
Moderatrisiko	0.2	0.4	0.3	0.1
Høyrisiko	0.1	0.4	0.4	0.1

Tabell 5.10: Fordelingen av kredittkvaliteten i ulike porteføljer av selskapsobligasjoner

For statsobligasjonser er de ulike komponentene beskrevet med tanke på i hvilke områder investeringene er gjort, i EEA stater eller ikke, som i følge av EIOPA sine retningslinjer gir ulike FS^{gov} gitt ved

$$\text{FS}^{gov}_{EEA} = -0.0012 \qquad \text{FS}^{gov}_{non-EEA} = -0.0015. \tag{5.3.1}$$

Tilsammen vil forholdet av stats- og selskapsobligasjoner være med å gi den totale FS-verdien, basert på et vektet gjennomsnitt vist i formel 4.3.5. Her er beregningen av FS basert på norske tall, med $\overline{LTAS}^{gov} = -0.0043$ hentet fra EIOPA med durasjon ≥ 10 år. EEA - European Economic Area vil ha en ulik avtale i forhold til investeringer over landegrenser, og dermed vil det måtte legges inn en større risikomargin for investeringer i land utenfor dette området. En *assigned* portefølje av obligasjoner tilpasset de resterende matchingkriteriene sammen med den orginale investeringsporteføljen mot forpliktelsene vil gi en konstant diskonteringsrente, denne gitt ved en internrente $\overline{r}^{port}$. På samme måte, med hensyn til forpliktelsesstrømmen L_k og selskapets BE, vil det være mulig å utarbeide $\overline{r}$, som i avsnitt 4.3.

Obligasjonsportefølje	$\overline{r}^{port}$	-$\overline{r}$	FS	**MA**	η
Lavrisiko	4.5 %	3.7 %	0.06 %	**0.74** %	0.41
Moderatrisiko	4.1 %	3.7 %	0.17 %	**0.23** %	0.23
Høyrisiko	3.2 %	3.7 %	0.28 %	**-0.78**	0.35

Tabell 5.11: MA vektene, $\overline{r}^{port}$, $\overline{r}$ og FS i forhold til ulike obligasjonsporteføljer.

I tabell 5.11 vises forskjellen på matching korreksjonen med ulike obligasjonsporteføljer beskrevet i tabell 5.2. De bestemte investeringene må være godkjent av hvert lands respektive finanstilsyn. Med norske data kan en slik bestemmelse etter beregningene i tabellen angis ved $\eta \leqslant 0.23$, som fastlegger differansen mellom forpliktelsesstrømmen og den risikojusterte pengestrømmen $B_1, ..., B_K$ av en *assigned* portefølje. Med en slik antagelse vil den totale endringen med matching korreksjonen kunne vises som

$$r_k^{ma} = r_k + 0.23\% \tag{5.3.2}$$

hvor obligasjonssporteføljen *moderatrisiko* er behandlet som en godkjent portefølje under norske forhold. De to andre porteføljene er i dette tilfellet angitt med for stor differanse fra forpliktelsesporteføljen.

For ulike land vil det være oppgitt forskjellige verdier for alle de underliggende variablene, som er utarbeidet av EIOPA og deretter formet med tanke på godkjente porteføljer. For et utvalg av EIOPA-land med like antagelser i utformingen av investering og forpliktelsesportefølje vil MA-korreksjonen kunne vises som i tabell 5.12.

Land	Portefølje	$\overline{r}^{port}$	-$\overline{r}$	FS	**MA**
Norge	Moderatrisiko	4.1 %	3.7 %	0.17 %	**0.23** %
Eurosonen	Moderatrisiko	3.6 %	3.2 %	0.28 %	**0.12** %
Storbritannia	Moderatrisiko	2.3 %	1.9 %	0.27 %	**0.13**%
Sveits	Moderatrisiko	2.5 %	2.0 %	0.06 %	**0.44**%

Tabell 5.12: MA vektene, $\overline{r}^{port}$, $\overline{r}$ og FS sammenliknet under et utvalg av EIOPA-land. Her med lik η begrensning.

Finansielt tilsyn. Innenfor hvert land opperer det finansielle tilsyn, som styrer regelverket av ulike økonomiske virkemiddler. I dette tilefellet vil bestemmelsen av bergrensingsfaktoren η være av stor interesse. Dette er som beskrevet tildligere differansen på den risikojusterte pengestrømmen fra en godkjent *assigned* portefølje og forpliktelsesstrømmen $L_1, ..., L_K$. I tabell 5.12 vises en tilpassning av mathcing-korreksjonen basert på norske η-verdier, som tilsynelatende påvirker andre land med enten for store eller for små korrigeringer av MA. For Storbritannia virker korreksjonen som liten, i forhold til allerede gitt volatility korreksjon. Den vil i dette tilfellet gi en mindre effekt, og være svært lite attraktiv i bruk for forsikringsselskap i Storbritannia. Lave verdier av η gi ufordelaktig MA-korreksjon mot volatility korreksjonen. Dette fordi VA-korreksjonen på gjennomsnitt, med lang LLP, ligger som et høyt paralellskift til diskonteringsrenten. For å kunne fremstille MA som en attraktiv korreksjon i forhold til VA er det for Storbritannia foreslått en høyere η-verdi, som i dette tilfellet skaper en større effekt av korreksjonen. Derimot for Sveits vil en slik η bestemmelse basert på norske data, gi store korreksjonsverdier i forhold til volatility. I et slik tilfellet vil mest sannynelig det finansielle tilsynet i Sveits se at matching korreksjonen gir for store differanser i SCR, og det vil måtte kalkuleres en mer restrektiv bestemmelse. Et forslag for tilpassning av η-verdier ut ifra hvert lands finansielle grunnlag vil er vist i tabell 5.13.

Land	η	**MA**
Norge	0.23	**0.23** %
Eurosonen	0.23	**0.12** %
Storbritannia	0.34	**0.33**%
Sveits	0.06	**0.04**%

Tabell 5.13: MA verdier med forslag til tilpasset maksverdi av η for et utvalg av EIOPA-Land.

Etter forslag av η bestemmelser, vil hvert land kunne utforme ny *assigned* portefølje med investeringer, som skaper nye MA-verdier. For Norge og Eurosonen vil disse være uendret med $\eta = 0.23$. Storbritanna får økt differanse i investerings og forpliktelsesportefølje, mens Sveits styres av en mer restriktiv bestemmelse. Tilsammen gir dette ulike korreksjonsverdier av MA, for hvert land, som nå vil påvirke diskonteringen konstant over hele forpliktelsesperioden $k = 1, ..., K$.

5.3.1 Best estimate

I bergning av selve MA-korreksjonen og etter antagelse av η vil det være mulig å sette opp best estimate for langtlivsrisiko med hvert lands respektive korreksjon. En slik utforming vil skje under samme antagelser som beskrevet i avsnitt 5.1, hvor BE 2.3.2 endres til

$$BE^{ma} = \sum_{k=1}^{K} \frac{L_k}{(1+r_k^{ma})^k} \tag{5.3.3}$$

for forsikringsår k $= 1, ..., K$. Den orginale og korrigerte BE er vist i tabell 5.14.

Land	Portefølje	BE	BE^{ma}	%
Norge	Moderatrisiko	26.65	22.81	14.4 %
Eurosonen	Moderatrisiko	37.59	34.55	8.1 %
Storbritannia	Moderatrisiko	88.20	70.22	20.3 %
Sveits	Moderatrisiko	80.61	78.29	2.8 %

Tabell 5.14: Best estimate endring med og uten MA-korreksjon, med tilhørende investeringsportefølje målt i mrd. NOK.

Her vises det forholdsvis store endringer i BE med og uten MA-korreksjon. Den korrigerte BE verdien endrer seg i takt med paralellskiftet i diskonteringsrenten, og utifra dette vil Storbritannia med MA = 0.33% som antatt ha den største endringen. Den store diffeansen kommer av lav r_k over alle år k=1, ..., K, og deretter stor korrigering på r_k. Utslaget kommer etter et konstant høyere skift over alle forsikringsår, og vil dermed bli betydelig lavere i for eksemepel Sveits med MA = 0.04%, med ellers samme forsikringsmatematiske antagelser.

5.3.2 Solvency capital requirement

Tilslutt vil best estimate for langtlivsrisiko gi den totale kapitalreserven for forsikringsmodulen *Longevity*. Dette skjer ved at den orginale BE med matching korreksjon BE^{ma} blir trukket fra den samme korrigerte best estimate, denne gangen med stresset dødelighet q_s, som gir BE$_s^{ma}$.

$$\mathrm{SCR}_{long}^{ma} = \mathrm{BE}_s^{ma} - \mathrm{BE}^{ma} \tag{5.3.4}$$

For å kunne utarbeide det totale kapitalkravet må informasjonen om de to ulike best estimates med stresset dødelighet beregnes, hvor forskjellen på disse ligger i selve matching korrkesjonen, vist i tabell 5.15.

Etter de grunnleggende numeriske beregningene vil forskjellen med og uten MA-korreksjonen for hvert land kunne vises opp mot den orginale utregningen av kapitalreserven. Det endelige resultatet er vist i tabell 5.16.

5.3.3 Evaluering av matching korreksjonen

Utformingen av selve MA vist gjennom tabell 5.12 kommer av $\overline{r}^{port}$, som er gjennomsnittlig markedsrenten i *assigned* porteføljen for hvert land og $\overline{r}$ blir beregnet ut

Land	Portefølje	BE_s	BE_s^{ma}
Norge	Moderatrisiko	28.00	23.99
Eurosonen	Moderatrisiko	39.42	36.26
Storbritannia	Moderatrisiko	92.84	74.05
Sveits	Moderatrisiko	84.72	82.30

Tabell 5.15: Best estimate med stresset dødelighet med og uten MA- korreksjonen for Norge Januar 2017 målt i mrd. NOK.

Land	Portefølje	SCR_{long}	SCR_{long}^{ma}	Endring i SCR	%
Norge	Moderatrisiko	1.34	1.17	0.17	12.6 %
Eurosonen	Moderatrisiko	1.83	1.70	0.13	7.1 %
Storbritannia	Moderatrisiko	4.63	3.82	0.81	17.5 %
Sveits	Moderatrisiko	4.11	4.01	0.10	2.4 %

Tabell 5.16: Best estimate med stresset dødelighet med og uten MA- korreksjonen for Norge Januar 2017 målt i mrd. NOK.

ifra nedlagte antagelser av forpliktelser og investeringer. Differansen mellom disse og fundamental spread fra *refereance* porteføljen er med å skape et paralellskifte i diskonteringsrenten med tilsynelatende store endringer. Her vises det en korrigering av SCR på over 17 % for Storbritannia med forklarte antagelser angående η som beskrevet tidligere. For eurosonen vil nedgangen i SCR_{long} være cirka 7% , og over 12 % i Norge. Resultatene kommer etter overveiing av restriksjoner for forsikringsselskap i hvert land. Dette er forholdsvis store endringer, som vil kunne ha stor påvirkningskraft for det totale økonomiske resultatet. For Sveits, skaper en liten η-verdi relativt små endringer i SCR. Med en endring på kun 2.4 % vil et selskap under samme aktuarielle antagelser måtte sitte med en større andel av sine ressurser i kapitalreserve enn under de resterende lands restriksjoner.

Feilmarginer. Den godkjente porteføljen vil kunne gi store konsekvenser på den totale korreksjonen. Små endringer her vil kunne gi store utslag på den totale økonomiske situasjonen fordi MA-korrkesjonen er et direkte paralellskift over hele perioden $k = 1, ..., K$, uansett størrelse på forpliktelsene. Relativt små endringer i η vil ha store konsekvenser, og må etter dette styres med nøyaktighet fra hvert lands finansielle tilsyn.

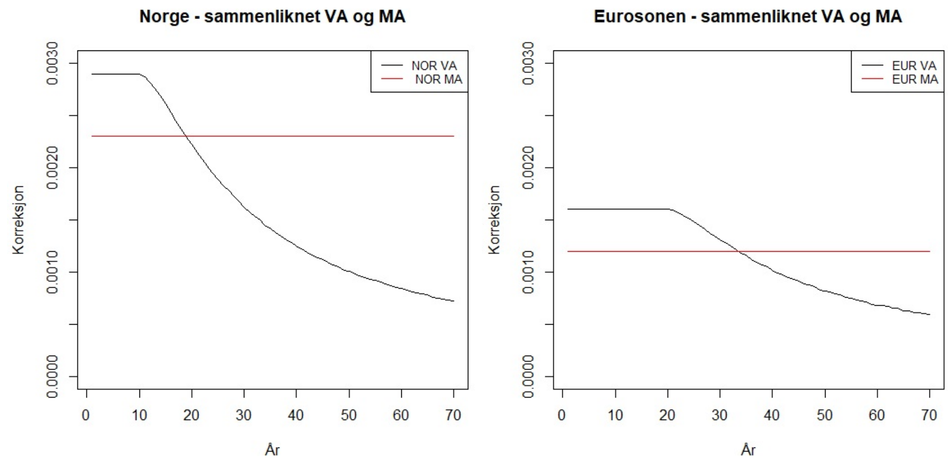
5.4 Sammenlikning

Begge korreksjonene fungerer som et skifte i diskonteringsrenten, hvor forskjellen er at VA har en startverdi og konvergerer etter LLP, mens MA fungerer som et konstant paralellskifte over hele perioden. Dette fører til at en høy MA-verdi har større påvirkning på den endelige kapitalreserven, fordi også forpliktelser langt inn i fremtiden vil påvirkes av høye korrigeringer. Forskjellen i diskonteringsendringen er vist i figur 5.11 og 5.12. For Norge og Eurosonen har MA og VA et brytningspunkt. Dette kommer av en startverdi for MA under VA, og konvergens av VA etter LLP. Ved kort LLP vil brytningspunktet skje tidlig, ettersom voltility korreksjonen raskt vil konvergere mot UFR.

Land	VA	MA	Endring
Norge	7.4	12.6	5.2
Eurosonen	4.1	7.1	3.0
Storbritannia	16.4	17.5	1.1
Sveits	1.9	2.4	0.5

Tabell 5.17: Sammenlikning av volatility og matching korreksjonene målt i prosent.

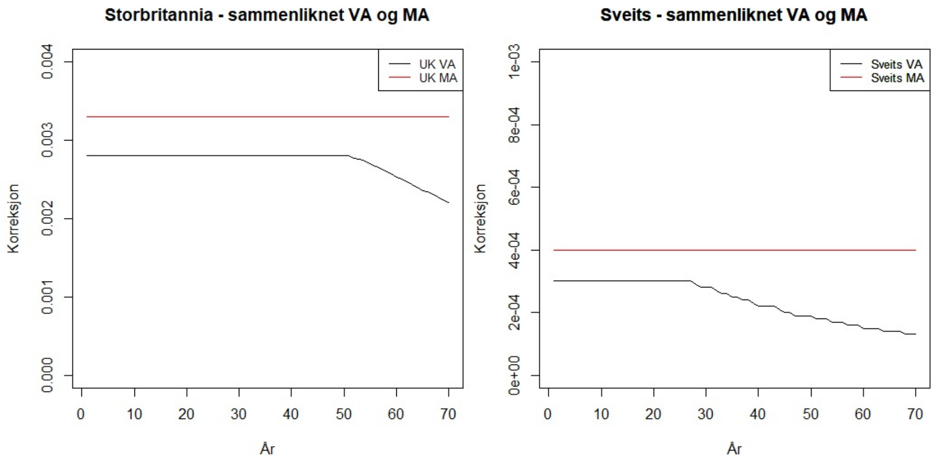
I tabell 5.17 vises sammenlikningen av den totale endringen i SCR for begge korreksjonene. Her vises det at Norge og eurosonen har en påfallende større endring i valg av korreksjon enn hva de to andre landene har. Dette kommer av en høyere gjennomsnittlig differanse over alle forsikringsår, som da vil gi stor prosentvis forskjell i sluttresultatene. For Norge med hele 5.2% i forskjell på valg av korreksjon, vil dette kunne tyde på en lite restriktiv bestemmelse av MA korreksjon, og vil potensielt ved godkjenning gi store forskjeller i SCR. Denne differansen kommer av høy konvergeringshastighet α etter kort LLP, og stor forskjell fra startverdi til UFR. Dermed vil MA korreksjonen allerede etter cirka 20 år bryte VA, og forskjellen oppstår ved stor differanse de neste 50 årene. Det samme gjelder for eurosonen, kun i noe mindre skala, med forsatt påvirkning av store forpliktelser langt inn i perioden.



Figur 5.11: VA og MA sammenliknet for Norge og Eurosonen, VA-korreksjonen konvergerer og MA er et konstant paralellskift

For Storbritannia og Sveits vil den bestemte MA-verdien ligge i overkant av VA over hele tidsperioden, og dermed føre til en endring i kapitalreserven over alle år. Allikevel har disse landene den minste endringen på SCR_{long}^{va} og SCR_{long}^{ma}. Dette fordi gjennomsnittsverdien til korreksjonen ikke er så langt unna hverandre. For Storbritannia kommer dette av lang LLP, og deretter høy konstant VA parallelt med MA. Differansen mellom disse er liten over mesteparten av forsikringsperioden, og dermed ser vi en forskjell på bare 1.1 % ved valg av korreksjon. For Sveits vil begge korreksjonene ha lave verdier, og forksjellen på disse viser kun 0.5 %. Dette kommer av generelt lav VA verdi, som ikke vil endre seg mye etter LLP på grunn av nærhet til konvergeringsmålet UFR. Startverdien til MA legger seg i nærheten og dermed vil valget av korreksjon ikke ha stor betydning i dette tilfellet.

Etter angitte betingelser av η vil Storbritannia og Sveits ha relativt liten differanse mellom VA og MA, og en godkjenning av matching være mer sannynlig enn i Norge og eurosonen. En innføring av MA i Norge, vil gi store differanser i forhold til bruk av volatility korreksjonen, og mest sannynelig vil η-verdien være mindre enn hva som tidligere er antatt.



Figur 5.12: VA og MA sammenliknet for Storbritannia og Sveits, VA-korreksjonen konvergerer og MA er et konstant paralellskift

Et reelt eksempel. Solvency IIs kapitalreserver skal forsikre selskapet mot det verst tenkelige scenarioet i forhold til en forsikringsportefølje. Dette er verdier simulert gjennom oppgitte modeller av Solvency II, basert på et 99.5 %-persentil. Det vil si at i 99.5% av de simulerte tilfellene vil hver av forsikringsmodulene estimere en SCR mindre enn persentilverdien. For langtlivsrisiko baserer denne seg på et konstantsjokk i dødelighet på S = 20%.

Et spørsmål som kan stilles er hvor god denne estimeringen faktisk er? Og om nedskrivning av SCR ved hjelp av matching eller volatility korreksjonene vil bryte med risikopersentilen. Ut ifra en reell risikoestimering uten Solvency IIs standardformel vil (jf. Johnsen[**11**], s.79-81) en nedgang i BSCR_{reell} ligge på cirka 6 %. Dette er utregning av BSCR ved bruk av beskrevne Solvency II modeller fra langtlivsrisiko SCR_{long} og markedsrisiko SCR_{marked}. Den reelle beregningen basert på en pensjonsportefølje for norske data og investeringsrisiko etter Wilkie-modellen.

Sammenlikner vi den reell risikojustering mot volatility korreksjonen i Norge går vi fra en 6 % nedjustering i SCR til 7.4%. Dette sier at volatility korreksjonen har en større prosentvis endring fra opprinnnelige verdier av SCR, og vil ligge i underkant av den reelle risikoestimeringen. Allikevel er ikke differansene store, og VA vil ligge nærmere den reelle situasjonen enn hva den opprinnelige utregning gjør. Den reelle utformingen av SCR gir en fint illustrajon av generell risikoppfattning, men det vil fortsatt være behov for tilpassning. Denne tilpassningen blir tatt med i beregningen i VA og MA hvor hvert selskap får tilrettelagt utregningen med tanke på sine porteføljer. Dermed vil ikke risikoen bli for stor, selv ved større endringer av SCR.

Kapittel 6

Konklusjon

Som beskrevet i denne oppgaven er volatility og matching korreksjoner som påvirker beregninger av forsikringsselskapenes fremtidige forventede forpliktelser. Dette innebærer et paralellskifte i diskonteringsrenten i beregningen av best estimate. Volatility korreksjonen er gjennom EIOPA dokumentasjonen oppgitt for hver valuta og hvert land. Selv med en noe komplisert fremstilling vil denne korreksjonen være med på å i stor grad kunne påvirke SCR til ulike forsikringsselskap med hensyn til sine forpliktelser og porteføljer. Volatility korreksjonen innebærer bestemmelse av UFR, kovergeringshastighet α, etter gitt LLP. Sammen vil disse gi korreksjonen for hele forsikringsperioden, i nedgående trend, hvor korreksjonsverdien i år 1 er større enn i sluttår K. Volatility virker tilsynelatende anvedelig med stor innvirkning på SCR_{long}, hvor en større prosentandel av kapitalen med hensyn til hvert land vil kunne frigjøres. Selskap vil selv kunne driftes innenfor Solvency IIs regelverk med betydelig mindre kapital, innenfor den gitte forsikringsgrenen.

For matching korreksjonen må et finaniselt tilsyn inn og godkjenne selskapets porteføljer, og spesielt forskjellen mellom den risikojusterte pengestrømmen $B_1, .., B_K$ og forpliktelsene $L_1, ..., L_K$, som sammen former η-verdi. Matching korreksjonen innebærer bestemmelsen av η for hvert land, og denne verdien vil representere effekten korreksjonen gir i utregningen av SCR. Antagleser for hvert land kan føre til ulike restriksjoner og dermed skape store differanser i bruken av MA. Bestemmelsen av η for hvert land være med å avgjøre hvor stor innvirkning korreksjonen vil ha. Med konkurransedyktige betingeler vil matching-korreksjonen være svært attraktiv, og vil kunne påvirke SCR i enda større grad enn hva volatility-korreksjonen gjør.

Begge korreksjonene vil ved godkjenning kunne frigjøre store finansielle midler. Endringer i SCR kommer av selve korreksjonverdien over hele forsikringsperioden, i hvilket område. Endringen i SCR vil kunne sammenliknes med en risikojustert estimering av SCR uten Solvceny II dokumentasjon. Selv om differansene ikke nødvendigvis er store viser denne sammenlikningen en lavere nedskrivning av SCR enn ved bruk av matching og volatility korreksjonene. Allikevel vil det finansielle tilsynet og nøye dokumenterte utregninger av korreksjonene gi gode samsvar med risiko med hensyn til hvert selskaps portefølje. Dermed vil lavere SCR, etter matching og volatility korreksjonene, sikre forbrukernes økonomiske trygghet, og korreksjonene opptrer som gode og attraktive.

6.1 Videre arbeid

Solvency II er et forsikringsdirektiv med store mengder paragrafer og regler. Denne oppgaven tar for seg langtlivsrisko SCR_{long}, som kun er en liten del av de totale beregningene i et forsikringsselskap. Det vil være muligheter for å utvide arbeidsområdene og analysere verdier for et mer komplett selskap, med drift i ulike porteføljer. Det første vil være å fylle opp livsforsikringsrisiko med for eksempel en dødsforsikringsportefølje. Dermed oppstår naturlige spørsmål om hvor gode Solvency IIs korrelasjoner er i sammenslåingen av forsikringsmoduler? I tillegg vil det være naturlig å analysere investeringsrisikoen dirkete fra livsforsikringsporteføljen. Hvor mye vil investeringene fra denne porteføljen påvirke kapitalreserven innenfor markedsrisko SCR_{marked}?

Bibliografi

[1] Bølviken Erik. (2018). *An introduction to Solvency II modelling*. Manus under utarbeiding. Universitetet i Oslo.

[2] Bølviken Erik. (2014). *Computation and Modelling in Insurance and Finance*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.

[3] European Commision Delegated Acts. (2014).*Commission Delegated Regulation*. Tilgjengelig på http://ec.europa.eu/internalmarket/insurance/docs/solvency/solvency2/delegated.pdf. Hentet 20.01.2018.

[4] European Insurance and Occupational Pension Authority (EIOPA).(2018). *Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures*. Tilgjengelig på https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/Technical%20Documentation%20%2831%20Jan%202018%29.pdf. Hentet 10.02.2018.

[5] European Insurance and Occupational Pension Authority (EIOPA).(2014). *Technical Spesification for the Preparatory Phase (Part I)* Tilgjengelig på https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/A_-_Technical_Specification_for_the_Preparatory_Phase__Part_I_.pdf. Hentet 12.april.2018.

[6] European Insurance and Occupational Pension Authority (EIOPA).(2014). *Technical Spesification for the Preparatory Phase (Part II)*. Tilgjengelig på https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/A_-_Technical_Specification_for_the_Preparatory_Phase__Part_II_.pdf. Hentet 9.10.2017.

[7] European Insurance and Occupational Pension Authority (EIOPA). (2017).*Oppdaterte excelark for hver måned og alle land unver EIOPA direktivet*. Tilgjengelig på https://eiopa.europa.eu/regulation-supervision/insurance/risk-free-interest-rate-term-structures. Hentet 05.11.2017.

[8] Finanstilsynet. (2010). *A Technical Note on the Smith-Wilson Method*. Tilgjengelig på http://janroman.dhis.org/finance/Smith20Wilson/A_Technical_Note_on_the_Smith-Wilson_Method_100701.pdf. Hentet 3.12.2017.

[9] Forbrukerrådet - Finansportalen. *Hva er risikoklasser og spareprofiler?*. Tilgjengelig på https://www.finansportalen.no/pensjon/artikkel-om-risiko/. Hentet 20.01.2018

[10] Human Mortality Database(HMD) University of California, Berkeley (USA) og Max Planck Institute for Demographic Research (Tyskland). Tilgjengelig på *www.mortality.org*. Norsk data(1886-2015). Hentet 10.01 2018.

[11] Johnsen Arman. (2018). *Dødelighet og Langtlivsrisiko i Solvency II.* Masteroppgave under utarbeiding. Universitetet i Oslo.

[12] McHugh and Schiffel.(2014). *Omnibus II agreement on long-term guarantee package and transitional measures.* Tilgjengelig på https://www.munichre.com/site/corporate/get/documents_E486799993/mr/assetpool.shared/Documents/5_Touch/_Publications/302-08521_en.pdf. Hentet 18.12.2017.

[13] Norges Bank. (2018). *Satsobligasjoner på månedsgjennomsnitt.* Tilgjengelig på https://www.norgesbank.no/statistikk/rentestatistikk/. Hentet 14.02.2018

[14] Osborne, M. (2011). *A Note on Macaulay's Formula for Duration.* Brighton: University of Sussex.

[15] Spedicato, Giorgio A. (2017). *Mortality projection with demography and lifecontingencies packages.* Tilgjengelig på https://cran.r-project.org/web/packages/lifecontingencies/vignettes/mortality_projection.pdf Catholic University of Milan. Hentet 14.10.17.

[16] Statistisk Sentralbyråd - SSB. (2014). *INDIKATORER FOR BÆREKRAFTIG UTVIKLING, 2014 -Forventet Levealder ved Fødsel*Tilgjengelig på https://www.ssb.no/natur-og-miljo/barekraft/forventet-levealder-ved-fodselen. Hentet 16.12.2017.

[17] Steffen Pang, Roel Damen. (2015).*The Matching Adjustment versus the Volatility Adjustment.* Hentet 02.03.2018.

[18] Van den As Duco. *Solvency IIs Volatility Adjustments in Volatile times.* University of Amsterdam (2015). Tilgjengelig på http://scriptiesonline.uba.uva.nl/document/633718. Hentet 23.03.2017.

Tillegg A

Programvare

R-Kode for resultat 2.2.9

```
#Inflasjonsrisiko - enkelt eksempel
inflasjon=function(r = 0.04){
xi = 0.00 #xi = 0.03
V = c(2.4,2.37,2.34,2.30,2.25,2.20,2.15,2.08,2.01, 1.93) # pengestrom
re = (r-xi)/(1+xi)
k=length(V)
PV = sum((V[0:k])/(1+re)**(0:9))

list(PV = PV)
}
inflasjon()
```

R-Kode for Smith-Wilson

```
smith_wilson = function(K=70)
{
UFR = 0.042 ; alpha = 0.097241 #Hentet fra EIOPA

#koeffesienter Norge med VA
c = c(14.611150, -13.842808, 5.470997, 2.335199, -3.867423,
             2.543462, 0.224902, -1.198326, -1.833758, 2.035370)

I = length(c); k = seq(1,70,1)
W=matrix(0,K,I)
for (k in 1:K){
  for (i in 1:I) W[k,i]= exp(-UFR*i)*(alpha*min(k,i)
  - 0.5*(exp(-alpha*abs(i-k))- exp(-alpha*(i+k))))}

Pk = exp(-UFR*k)*(1+(W%*%c))
rk_va = (Pk)^(-(1/k)) -1
list(rk_va = rk_va)
}
smith_wilson()
```

R-Kode for Lee-Carter prediksjon

```
library(demography)
library(forecast)
leecarter = function()
{
Norge<-hmd.mx(country="NOR", username="", password="", label="NORWAY")
Q <- lifetable(Norge, series = "male", year =2014, ages = 29:109)
mort <- Q$mx[-1] #Dodlighetsrate for alle aldre fra (2014)
value = c(rep(1,50))
q = c(mort,value)
NorgeLcaM<-lca(Norge,series="male",max.age=100, years = 1930:2014, adjust="dt",
interpolate=TRUE)
plot(NorgeLcaM$ax, main="a_l", xlab="Alder",ylab="a_l",type="l")
```

```
plot(NorgeLcaM$bx, main="b_l", xlab="Alderge",ylab="b_l",type="l")
plot(NorgeLcaM$kt, main="k_t", xlab="Ar",ylab="k_t",type="l")

fM<-forecast(NorgeLcaM,h=70)
lifeexp_C = life.expectancy(fM)

fM_A<-forecast(NorgeLcaM_A,h=70)
fM_B<-forecast(NorgeLcaM_B,h=70)
lifeexp = life.expectancy(fM_A)
lifeexp_1 = life.expectancy(fM_B)
plot(flife.expectancy(Norge, series="male", years=2006:2014,
interpolate=TRUE),type="o", xlab = "Ar", ylab = "Alder")
lines(lifeexp_1, col="blue")
lines(lifeexp, col="red")
title("Forventet Levetid")
legend("topleft", c("Lee-Carter 1940", "Lee-Carter 1990",
"Observert data"), cex = 0.8, col = c("blue","red", "black"), pch=c(26,26,1), lty=1)
list(Q=Q)
}
leecarter()
```

R-Kode for levetidstabell

```
Norwaydata = function()
{
NorgeLcaM<-lca(Norge,series="male",max.age=100, years = 1980:2014, adjust="dt",
interpolate=TRUE) #none, dt - leecarter, dxt-BMS, e0 - lee miller.
fM<-forecast(NorgeLcaM,h=70)
Q<-cbind(fM$rate$male[30:100,])
list(Q = Q)
}
Norwaydata()


lifetab=function(S=0, K =70, l_0 = 30, l_e = 100)
{
rates = (1-S)* Norwaydata()$Q
Q = 1- rates
d <- row(Q) - col(Q)
A = split(Q, d)
B = A[71:140]
lapply(B, function (x) x[1])
lengths(B)
q2 = mapply(function(y) lapply(B, function(x) x[y]), 1: lengths(B)[1])
Q2 = q2[is.na(q2)] <- as.numeric(0.00000)
v = matrix(0,K,l_e) ; w = matrix(0,l_0,l_e)
kpQ = rbind(cbind(q2, v), w)
kp = matrix(as.numeric(kpQ),l_e, l_e)

list(kp = kp)
}
lifetab()
```

R-Kode for aldersfordeling

```
afordeling = function(K=70,size=50000, gamma =0.10, mu =15)
{
p=exp(-gamma*abs(1:(K+1)-mu))
N=p*(size/sum(p))
list(N=N)
}
afordeling()
```

R-Kode for ekvivalenspremie

```
prem=function(l_0=30,l_r=67,l_e=99,s_1=0.25,r=0.03)
{
d=1/(1+r)
kp = lifetab()$kp
a1=sum(d**(0:(l_r-l_0-1))*kp[1,1:(l_r-l_0)])
a2=sum(d**((l_r-l_0):l_e)*kp[1,(l_r-l_0+1):(l_e+1)])
```

```
pi=(s_1*a2/a1)

list(pi = pi)
}
prem()
```

R-Kode for Wilkie-modellen

```
wilkie=function(m=10000,K=200)
{

xi_i=0.024          #opprinnelig 0.048
sigma_i=0.0115       #opprinnelig 0.040
a_i=0.58
xi_y=0.041
sigma_y=0.079       #Opprinnelig 0.16
a_y=0.55
theta_yi=1.79
xi_d=0.035         #Oppringlig 0.065
sigma_d=0.036      #Opprinnelig 0.067
b_1d=0.57
theta_dy=-0.027
a_di=0.87
b_0di=0.50
b_1di=-0.36
xi_r=0.015              #opprinnelig 0.0305
sigma_r=0.19        #opprinelig 0.19
a_ry=0.90
theta_ry=0.052
a_ri=0.955
xi_f=0.80
sigma_f=0.037       #Opprinnelig 0.18
a_f=0.74

xi_py = 0.074
a_py = 0.91             #Opprinnelig 0.91
sigma_py = 0.106        #Opprinnelig 0.12
xi_pi = 0.0006
theta_pi = 0.112
sigma_pi = 0.066       #Opprinnelig 0.066

# Drivere
X_i=matrix(0,K+1,m)
X_y=X_i
X_dy=X_i
X_di=X_i
X_f=X_i
X_ry=X_i
X_ri=X_i
X_py = X_i
X_pi = X_i
e_y=matrix(rnorm((K+1)*m),K+1,m)
e_d=matrix(rnorm((K+1)*m),K+1,m)
for (k in 1:K) {
  X_i[k+1,]=a_i*X_i[k,]+sigma_i*rnorm(m)
  X_y[k+1,]=a_y*X_y[k,]+sigma_y*e_y[k+1,]
  X_dy[k+1,]=sigma_d*(e_d[k+1,]+b_1d*e_d[k,])+theta_dy*e_y[k,]
  X_di[k+1,]=a_di*X_di[k,]+b_0di*X_i[k+1,]+b_1di*X_i[k,]
  X_f[k+1,]=a_f*X_f[k,]+sigma_f*rnorm(m)
  X_ry[k+1,]=a_ry*X_ry[k,]+sigma_r*rnorm(m)+theta_ry*e_y[k,]
  X_ri[k+1,]=a_ri*X_ri[k,]+(1-a_ri)*X_i[k+1,]

}
#  Inflasjon, renter -lang/kort
I=(1+xi_i)*exp(X_i)-1

y=xi_y*exp(X_y+theta_yi*X_i)

I_d=(1+xi_d)*exp(X_dy+X_di)-1
F=xi_f*exp(X_f)
rK=xi_r*exp(X_ry)+xi_i+X_ri
r_r=F*rK
```

```
#Eiendom

for (k in 1:K){
  X_py[k+1,]=a_py*X_py[k,]+sigma_py*rnorm(m)
  X_pi[k+1,]=xi_pi+theta_pi*I[k,] +(1-sigma_pi)*X_pi[k,] + sigma_pi*rnorm(m)
}

y_p = xi_py*exp(X_py)

I_p = I

for (k in 1:K){
    I_p[k+1] = I_p[k]*exp(X_pi)
}

S_p = ((1+I_p[1:K+1,])*y_p[1:K,]/y_p[1:K+1,])-1
if(m>1)
          {S_p=rbind(rep(0,m),S_p)}
else
          {S_p=c(0,S_p)}

# Aksjer
R_s=(1+I_d[1:K+1,])*y[1:K,]/y[1:K+1,]-1
R_e=(1+I_d[1:K+1,])*(1+y[1:K+1,])*y[1:K,]/y[1:K+1,]-1
if(m>1)
    {R_s=rbind(rep(0,m),R_s)
     R_e=rbind(rep(0,m),R_e)}
else
     {R_s=c(0,R_s)
      R_e=c(0,R_e)}

rk = 1 + rK
r = 1 + r_r
Ik = cumprod(1+I)
R_S = R_s[-1]
Sp = 1 + S_p
R1 = 1 + R_s
list(rk=rk, r = r, Ik = Ik, Sp = Sp, R1=R1)
}
wilkie()
```

R-Kode for forpliktelsene

```
liability=function(l_0 = 30,l_r = 67,l_e=99,s_1=0.25, K= 70)
{
pi = prem()$pi
Ik = wilkie()$Ik
N = afordeling()$N

kp = lifetab()$KPQ
kps = lifetab()$KPQ_s
l_e2=l_e+l_e

S = c(rep(s_1,l_e2))
zeta = c(rep(-pi, l_r-l_0),S)

L=rep(0,l_e)
for (k in 1:l_e)L[k]=sum(N[1:(K+1)]*kp[1:(K+1),k+1]*(zeta[1:(K+1)+k]*Ik[1:K]))

list(L= L)
}
liability()
```

R-Kode for ALM

```
ALM = function(K = 70, l_e = 100, l_0 = 30, w1 = 0.05, w2 = 0.3, w3 = 0.5, w4 = 0.15)
{
L = liability()$L

R = wilkie()$R1
```

```
R1 = R[2:150]      #Aksjer
r = wilkie()$r     #Bank
rk = wilkie()$rk #Obligasjon
Sp = wilkie()$Sp #Eiendom

L_w1 = w1*L[1:K]; Eq = c(L_w1[1]*(R1[1]), rep(0,69))
L_w2 = w2*L[1:K]; Bond = c(L_w2[1]*(r[1]), rep(0,69))
L_w3 = w3*L[1:K]; Cash = c(L_w3[1]*(rk[1]), rep(0,69))
L_w4 = w4*L[1:K]; Property = c(L_w4[1]*(Sp[1]), rep(0,69))

for (k in 2:K) {
        if(Eq[k-1] <0) {Eq[k] = ((Eq[k-1]+ L_w1[k])*R1[k])}
                  else {Eq[k] = (Eq[k-1]+ L_w1[k])}}
for (k in 2:K) {
        if(Bond[k-1] <0) {Bond[k] = ((Bond[k-1]+ L_w2[k])*r[k])}
                  else {Bond[k] = (Bond[k-1]+ L_w2[k])}}
for (k in 2:K) {
        if(Cash[k-1] <0) {Cash[k] = ((Cash[k-1]+ L_w3[k])*rk[k])}
                 else {Cash[k] = (Cash[k-1]+ L_w3[k])}}
for (k in 2:K) {
        if(Property[k-1] <0) {Property[k] = ((Property[k-1]+ L_w4[k])*Sp[k])}
                 else {Property[k] = (Property[k-1]+ L_w4[k])}}

L_K = Eq + Bond + Cash + Property

list(L_K = L_K)
}
ALM()
```

R-Kode for best estimate

```
BE_func = function(K = 70)
{
L_K = ALM()$L_K
rf <-  readWorksheetFromFile("RFR_excel.xlsx",sheet=1) #Risikofri rente
va <- readWorksheetFromFile("VA_excel.xlsx",sheet=1)   #Volatility korreksjon

rf_NOR = rf[,1]; rf_EUR = rf[,2];  rf_GBP = rf[,4]; rf_SVEI = rf[,3]
va_NOR = va[,1]; va_EUR = va[,2];  va_GBP = va[,4]; va_SVEI = va[,3]
ma_NOR = 0.0023; ma_EUR = 0.0012;  ma_GBP = 0.0033; ma_SVEI = 0.0004

rf_VA_NOR = (1+rf_NORGE[,1]) + va_NOR[,1]
rf_MA_NOR = (1+rf_NORGE[,1]) + ma_NOR
BE = c(rep(0,69))
for (k in 1:70)BE = sum(L_K[k]/(rf_NOR[k])**k)
list(BE=BE)
}
BE_func()

BE_loop = function(M = 100000){

Mat= replicate(M, BE_func())
BE = mean(as.numeric(Mat[1,(1:M)]))

list(Mat = Mat, BE=BE)
}
BE_loop()
```

Tillegg B

Tabeller

	Rente	Aksjer	Eiendom	Spread	Valuta	Consentration
Rente	1					
Aksjer	0.5	1				
Eiendom	0.5	0.75	1			
Spread	0.5	0.75	0.50	1		
Valuta	0.25	0.25	0.25	0.25	1	
Consentration	0	0	0	0	0	1

Tabell B.1: Korrelasjonsmatrise av modulene i SCR_{marked}

	Marked	Health	Default	Life	Non-life
Marked	1				
Health	0.25	1			
Default	0.25	0.25	1		
Life	0.25	0.25	0.25	1	
Non-life	0.25	0	0.5	0	1

Tabell B.2: Korrelasjonsmatrise av modulene i $BSCR$

År	Verdi uten VA	Verdi med VA
1	14.6111	16.6097
2	-13.8428	-15.4989
3	5.4709	6.1375
4	2.3351	2.5424
5	-3.8674	-4.2551
6	2.5434	2.7819
7	0.2249	0.2938
8	-1.1983	-15.56
9	-1.8337	-1.0848
10	2.0353	1.4438

Tabell B.3: Norske c_n og c_n^{va} vekter for Smith-Wilson, hentet fra EIOPA[**7**], jan.17. $VA\_portofolios$.