UiO : Matematisk institutt
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

En gruppeteoretisk analyse av vri- og flyttespill

Alexander Lorenzo

Masteroppgave, våren 2017

Denne masteroppgaven er levert inn som en del av programspesialiseringen *Matematikk* under *Lektorprogrammet* ved Universitetet i Oslo. Oppgaven er normert til 30 studiepoeng.

Forsiden viser et utsnitt av rotsystemet til den eksepsjonelle liegruppen E_8, projisert ned i planet. Liegrupper ble oppfunnet av den norske matematikeren Sophus Lie (1842–1899) for å uttrykke symmetriene til differensiallikninger og spiller i dag en sentral rolle i flere deler av matematikken.

Til min mor.

Innhold

Del I

Innledning.

Målet mitt ved denne artikkelen er å analysere forholdet mellom vri- og flyttespill og symmetrigruppen på en enkelt måte, der jeg ikke forutsetter store bakgrunnskunnskaper fra leseren.

I Del II av artikkelen vil vi finne viktige begreper og teoremer som er nyttige for å forstå Del III av artikkelen, nemlig vri- og flyttespill. Vi skal se sammenhengen mellom gruppeteori og mange populære spill, spesielt når man vil løse spillene.

Del IV vil derfor dreie seg om strategier man kan bruke for å løse spillene, med stor fokus på kommutatorer og konjugatorer, og med en kort forklaring på hvilke situasjoner er umulige å møte i de ulike spill.

Hele artikkelen har blitt skrevet og redigert i samarbeid med Arne B. Sletsjøe.

Del II

Gruppeteori: Definisjoner og teoremer.

I denne delen av artikkelen vil vi se noen kjente definisjoner og teoremer fra gruppeteori. Det anbefales at leseren ser bevisene for teoremene i boken *Groups and Symmetry*, skrevet av M.A. Armstrong og publisert av Springer i 2010.

En del beviser vil bli presentert i artikkelen, slik at leseren får en bredere perspektiv på gruppeteori. Dersom leseren føler seg komfortabel i denne viktige delen av matematikken, er det helt mulig å starte på neste kapitel *Vri og flytte spill: Definisjoner og eksempler.*

Grupper.

Definisjon 1. En **sammensetning** på en mengde G er en avbildning $\circ : G \times G \to G$. Denne sammensetningen $\circ\,(g, h)$, der $g, h \in G$, blir skrevet i denne artikkelen som $g \circ h$ selv om det er populær denne notasjonen: gh.

For eksempel en sammensetning på mengden av heltall, $\mathbb{Z}$, er addisjonen: $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gitt ved $+\,(a, b) = a + b \in \mathbb{Z}$.

Definisjon 2. En **gruppe** er et par $(G, \circ)$ som består av en mengde G og en binær operasjon $\circ : G \times G \to G$ slik at:

1. Sammensetningen er **assosiativ**:

$$(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3) \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G.$$

2. Det eksisterer et **identitetselement** $e \in G$ som er slik at:

$$e \circ g = g \circ e = g \quad \forall g \in G.$$

3. For ethvert element $g \in G$ det eksisterer en **invers** $g' \in G$ som er slik at:

$$g \circ g' = g' \circ g = e \quad \forall g \in G.$$

Definisjon 3. En gruppe er **abelsk** dersom:

$$g \circ h = h \circ g \quad \forall g, h \in G.$$

Eksempel 1. $(\mathbb{Z}, +)$ er en gruppe siden addisjonen er assosiativ. Mengden har en identitetselement: $0 \in \mathbb{Z}$:

$$0 + n = n + 0 = n.$$

Vi har et element $(-n) \in \mathbb{Z}$ som er slik at:

$$n + (-n) = (-n) + n = 0 = e.$$

Så $(-n)$ er inversen til n under addisjon. Siden addisjonen er kommutativ, så er gruppen $(\mathbb{Z}, +)$ er abelsk.

På den andre siden har vi at $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ikke er en gruppe siden selv om multiplikasjonen er assosiativ, og mengden har en identitetselement $1 \in \mathbb{Z}$, så finnes det ingen invers for elementet $0 \in \mathbb{Z}$.

Ofte refererer man til en gruppe $(G, \circ)$ ved å bare nevne mengden G dersom sammensetningen er entydig, men denne artikkelen vil unngå denne tvetydig notasjonen ved å la $(G, \circ) = \underline{G}$.

Definisjon 4. Orden til en gruppe $(G, \circ)$ er antall elementer som mengden til gruppen består av, $|\underline{G}| = |G|$. dvs. kardinaltallet til mengden G.

Man kan også bruke en sammensetningstabell for å visualisere en gruppe $(G, \circ)$ med ordning $|G| = n + 1$

$\circ$	e	g_1	$\cdots$	g_j	$g \circ g_j$	$\cdots$	g_n
e	e	g_1	$\cdots$	g_j	$g \circ g_j$	$\cdots$	g_n
g_1	g_1	$g_1 \circ g_1 = g_1^2$	$\cdots$	$g_1 \circ g_j$	$g_1 \circ (g \circ g_j)$	$\cdots$	$g_1 \circ g_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
g_i	g_i	$g_i \circ g_1$	$\cdots$	$g_i \circ g_j$	$\boxed{g_i \circ (g \circ g_j) = h}$	$\cdots$	$g_i \circ g_n$
$g_i \circ g$	$g_i \circ g$	$(g_i \circ g) \circ g_1$	$\cdots$	$\boxed{(g_i \circ g) \circ g_j = h}$	$g_i \circ (g^2 \circ g_j)$	$\cdots$	$(g_i \circ g) \circ g_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
g_n	g_n	$g_n \circ g_1$	$\cdots$	$g_n \circ g_i$	$g_n \circ (g \circ g_j)$	$\cdots$	$g_n \circ g_n = g_n^2$

Tabell 1: Sammenseting av elementer i en gruppe.

der $g\,, g_i\,, g_j\,, g_i \circ g_j \in G\; \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Teorem 1. Identitetselement e er unik i enhver gruppe $\underline{G}$.

Bevis. La $\underline{G}$ være en gruppe og anta at e' er et identitetselement i tillegg til e. Da har vi at $e' = e \circ e' = e$. □

Teorem 2. Til et hvert element g i en gruppe $\underline{G}$ finnes det en unik invers g'.

Bevis. La $\underline{G}$ være en gruppe og anta at for elementet g finnes det en invers g^* i tillegg til g'. Da har vi at:

$$e = g \circ g' = g \circ g^* \Rightarrow g' = g' \circ (g \circ g^*) = (g' \circ g) \circ g^* = g^*.$$

□

Korollar 1. I en gruppe $(G, \circ)$, har vi at $(g \circ h)' = h' \circ g'$ for alle $g, h \in G$.

Bevis. La $(G, \circ)$ være en gruppe, og $g, h \in G$. Da har vi at $(g \circ h) \circ (g \circ h)' = e$ ut fra definisjonen til den inversen, mens $(g \circ h) \circ (h' \circ g) = g \circ (h \circ h') \circ g' = g \circ (e) \circ g' = g \circ g' = e$.

Ut fra teoremet 2, har vi at inversen til elementet $g \circ h \in G$ er unik. Det impliserer at $(g \circ h)' = (h' \circ g')$. □

Teorem 3. La G være en gruppe. Avbildningen $\varphi : G \to G$ gitt ved $\varphi(x) = g \circ x$ er bijektiv.

Bevis. Det holder å vise at φ er inverterbar, det vil si at det finnes en inversfunksjon for $\varphi(x)$. La $x \in G$ og $\vartheta(x) = g' \circ x$:

Da har vi at $\vartheta(\varphi(x)) = g' \circ (g \circ x) = (g' \circ g) \circ x = e \circ x = x$.

Tilsvarende har vi at $\varphi(\vartheta(x)) = g \circ (g' \circ x) = (g \circ g') \circ x = e \circ x = x$. □

Vi vil fort oppdage at i tabellen 1, alle rader har alle elementer i G uten repetisjoner: $g_i \circ g_j \neq g_i \circ g_k$, $\forall i, j, k$, og alle kolonner vil også ha dem uten repetisjoner: $g_i \circ g_j \neq g_k \circ g_j$, $\forall i, j, k$. Dette skyldes av at avbildingen $\varphi(x) = g \circ x$ er bijektiv, og naturligvis at avbildningen $\varphi'(x) = x \circ g$ også er bijektiv.

Undergrupper.

Definisjon 5. En **undergruppe av** en gruppe $(G, \circ)$ er en undermengde $H \subseteq G$ som er slik at $(H, \circ)$ er en gruppe, dette skriver vi som $\underline{H} \subseteq \underline{G}$.

Teorem 4. La $(G, \circ)$ være en gruppe, og H⊆G . Da er $(H, \circ)$ en undergruppe av $(G, \circ)$ hvis og bare hvis :

1. $g \circ h \in H$ for alle $g, h \in H$.
2. $e \in H$.
3. Det finnes en **invers** $g' \in H$ for ethvert element $g \in H$.

Bevis. Anta at $(G, \circ)$ er en gruppe, at $H \subseteq G$ og at $(H, \circ)$ er en undergruppe av $(G, \circ)$. Da må de ha et felles identitetselement e, siden denne er unik. Siden H er en gruppe, så må kravene 1 og 3 til teoremet 4 være oppfylte.

Anta nå at $(G, \circ)$ er en gruppe, at $H \subseteq G$ og at antagelsene 1, 2 og 3 gjelder. Da er sammensetningen i H assosiativ siden den også er det for hele G. Identitetselementet finnes og det finnes en invers for alle elementene i H. Da er $(H, \circ)$ en gruppe, og en undergruppe av $(G, \circ)$. □

Legg merke til at hvis $(G, \circ)$ er en gruppe, så er den en undergruppe av seg selv, da kaller vi $(G, \circ)$ for en **uekte** undergruppe av $(G, \circ)$, mens resten av undergruppene blir kalt **ekte undergrupper**.

Til alle grupper kan vi alltid finne en undergruppe som bare består av et elementet, $(\{e\}, \circ)$, denne undergruppen kalles for **den trivielle undergruppen**. Hvis $(G, \circ)$ er en gruppe som er slik at $(G, \circ)$ og $(\{e\}, \circ)$ er de eneste undergrupper, blir den kalt en **simpel** gruppe.

Eksempel 2. Et eksempel på en undergruppe er $(2\mathbb{Z}, +)$ som undergruppe av $(\mathbb{Z}, +)$, $2\mathbb{Z} = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$. Der ser vi at identitetselementet $0 \in 2\mathbb{Z}$, for alle elementer $2n \in 2\mathbb{Z}$ eksister en additive invers, $-2n \in 2\mathbb{Z}$, og $2n + 2m = 2(n + m) \in 2\mathbb{Z}$, der $n, m \in \mathbb{Z}$.

Vi ser også at $(\mathbb{Z}, +)$ er ikke en simpel gruppe, siden $(2\mathbb{Z}, +)$ er en ekte undergruppe.

Noe å merke seg er at for en gruppe $(G, \circ)$, så er gruppen generert av $g \in G$, $\langle g \rangle$, er en undergruppe av $(G, \circ)$.

Definisjon 6. Gitt to grupper $(G, \circ)$, $(H, \bullet)$, **det direkte produktet** $\underline{G} \times \underline{H}$ **er definert som følger:**

1. Mengden består av det kartesiske produktet $G \times H$. Dvs. en ordnet par (g, h), hvor $g \in G$, $h \in H$.

2. Binære operasjonen $\cdot$ i $\underline{G} \times \underline{H}$ er definert komponentvis som:

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \circ g_2, h_1 \circ h_2)$$

Teorem 5. Det direkte produktet $\underline{G} \times \underline{H}$ er en gruppe:

Bevis. Gruppen er lukket siden både G og H er grupper, og dermed også lukket under sammensetningen.

1. Sammensetningen er **assosiativ** siden. operasjonene i $\underline{G}$ og $\underline{H}$er assosiative.

2. Det eksisterer et **identitetselement** $e = (e_G, e_H) \in G$ som er slik at: $e \circ g = g \circ e = g \quad \forall g \in \underline{G} \times \underline{H}$.

3. For ethvert element $g = (g_1, h_1) \in G$ eksisterer det en **invers** $g' = (g_1', h_1')$ som er slik at:

   (a) $g \circ g' = g' \circ g = e \quad \forall g \in G.$

$\square$

Noen viktige egenskaper i det direkte produktet av endelige grupper, $\underline{G} \times \underline{H}$ er :

1. $|\underline{G} \times \underline{H}| = |\underline{G}| \cdot |\underline{H}|$

2. $|(g, h)| = |(g)| \cdot |(h)|$

Gitt et direkte produkt $\underline{G} \times \underline{H}$, da vi kan definere **projeksjonen** $\mathrm{Proj}_G\,(g, h) = g$ og $\mathrm{Proj}_H\,(g, h) = h$, $g \in G$ og $h \in H$.

Sykliske undergrupper.

I en gruppe $(G, \circ)$ kan vi sammensette et element med seg selv så mange ganger vi vil. Dermed kan vi definere $g \circ g \equiv g^2$, $g \circ g \circ g \equiv g^3$, $\bigcirc_{i=1}^{n} g \equiv g^n$, $e \equiv g^0$.

Siden $g \circ g' = e = g^0$, så kan vi definere $g' \equiv g^{-1}$ og $\left(g^{-1}\right)^n \equiv g^{-n}$. Vi kan se at regneregler for potenser vil kunne anvendes på sammensetningen av det samme elementet på seg selv og med sin invers vilkårlige ganger.

$g^n \circ \left(g'\right)^n = g^n \circ g^{-n} = g^{(n-n)} = g^0 = e$

Legg merke til at g kommuterer med seg selv og med g' ut fra definisjonen til en inverselement i en gruppe, så det er fullt mulig å bruke regneregler for potenser.

Vi kan dermed definere $\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Da sier vi at g **genererer** $\langle g \rangle$. For eksempel i gruppen $(\mathbb{Z}, +)$ har vi at $1 \in \mathbb{Z}$ genererer hele $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$, mens $2 \in \mathbb{Z}$ genererer $2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \langle 2 \rangle$ som er bedre kjent som partallene.

$(\langle g \rangle\,, \circ) = (\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}\,, \circ)$ er en abelsk gruppe med identitets element $g^0 = e$ og inverser $g^{\cdot n} \circ g^n = e$.

Definisjon 7. La $(G, \circ)$ være en gruppe, og $g \in G$. Da er $\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ **den sykliske undergruppe av** $(G, \circ)$ generert av g.

Vi kan også definerer orden til $\langle g \rangle$ på følgende måte:

Definisjon 8. Orden til et element g i en gruppe $(G, \circ)$, er antall elementer i $\langle g \rangle$, dvs. $|\langle g \rangle|$

Definisjon 9. La $(G, \circ)$ være en gruppe på orden n og la $g_i \in G$ for et utvalg $i \in \{1, \dots n\}$. Den undergruppen til $(G, \circ)$ med færrest elementer, som inneholder alle g_i kaller vi for **undergruppen generert av** g_i, vi skriver denne undergruppen som $\langle g_i \rangle$. Dersom $\langle g_i \rangle = G$ sier vi at g_i er **generatorene** til $(G, \circ)$.

Teorem 6. La $(G, \circ)$ være en gruppe på orden n og la $H = \langle g_i \rangle$ for et utvalg $i \in \{1, \dots n\}$. Da er består H av nøyaktig de elementene av G som er en endelig sammensetning av heltalls potenser av g_i, der det kan oppstå repetisjoner av g_i i flere steder i produktet.

Bevis. La K være mengden av alle endelige sammensetninger av heltalls potenser av g_i. Da er $K \subseteq H$.

$(K, \circ)$ er faktisk en gruppe:

Lukket: Sammensetninger av sammensetninger er nye sammensetninger, og de er fremdeles endelige.

Assosiativitet: Sammensetninger er assosiative.

Identitetselementet: $e = g_i^0 \in K$

Inverselement til en sammensetning av heltalls potenser av g_i er den samme sammensetningen, bare i motsatt rekkefølge og med motsatt fortegn på eksponentene.

Siden $(H, \circ)$ er den gruppen med færrest elementer som inneholder g_i, og $(K, \circ)$ er en gruppe som inneholder g_i i tillegg til at $K \subseteq H$, så kan vi konkludere $K = H$. $\square$

Symmetrigruppen på n elementer.

Den symmetriske gruppen, $(S_n, \circ)$, gruppen av alle bijektive avbildninger fra en mengde M_n med n elementer på seg selv, dvs. gruppen som har som mengde alle permutasjonene eller ombyttingene av n elementer og med binær operasjon sammensetningen av permutasjoner.

$$S_n = \{\varphi \mid \varphi \text{ er bijektiv og } \varphi : M_n \to M_n\}, |M_n| = n \in \mathbb{N}.$$

$(S_n, \circ)$ har som binær operasjon sammensetningen av avbildninger. Elementene i $S_n$blir kalt permutasjoner, siden de permuterer eller endrer plasseringen til komponentene i M_n. Vi kan representere en permutasjon ved å illustrere hvor vil elementene bli sendt til etter permutasjonen, ved hjelp av en matriserepresentasjon

$$\varphi : M_n \to M_n \;\; \varphi \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}, \varphi(m) \in M_n$$

Der φ er permutasjonen som sender elementet i til $\varphi(i)$, for alle $i \in \{1, \dots n\}$.

Så komposisjonen til to elementer i S_n blir:

$$\vartheta \circ \varphi =$$
$$\begin{pmatrix} \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \\ \vartheta(\varphi(1)) & \vartheta(\varphi(2)) & \dots & \vartheta(\varphi(n)) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix},$$

$$\vartheta \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \vartheta(\varphi(1)) & \vartheta(\varphi(2)) & \dots & \vartheta(\varphi(n)) \end{pmatrix}.$$

Som dere ser leser sammensetningen vi fra høyre til venstre, vi oppdager fort at den symmetriske gruppen ikke er abelsk for $n \geq 3$.

De fleste av tilfellene har vi at $1 \;\; 2 \;\; \dots \;\; n$ ligger i den rekkefølgen på toppen av matriserepresentasjonen, så vi er nødt til å finne ut hvor elementet $\varphi(m)$ ligger før vi kan finne ut verdien til $\vartheta \circ \varphi(m) = \vartheta(\varphi(m))$.

$\vartheta \circ \varphi(m) = \vartheta(\varphi(m))$ betyr at elementet m blir til $\varphi(m)$ samtidig som $\varphi(m)$ blir til $\vartheta(\varphi(m))$, og derfor m blir sendt til $\vartheta(\varphi(m))$, dvs: $m \to \vartheta(\varphi(m))$

Teorem 7. $(S_n, \circ)$ er en gruppe.

Eksempel 3. La $(S_5, \circ)$ være den symmetriske gruppen på 5 elementer, og $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ og $\vartheta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ være elementer i S_n.

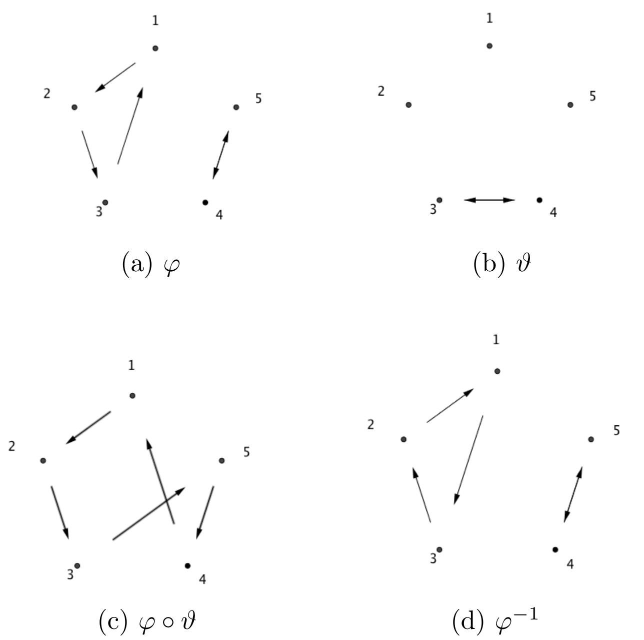
$$\varphi \circ \vartheta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

og $\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ siden

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = e.$$



(a) φ (b) ϑ (c) $\varphi \circ \vartheta$ (d) φ^{-1}

Figur 1

Teorem 8. Orden til $\underline{S_n}$ er $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1$.

Bevis. $|S_n|$er antall måter vi kan permutere n elementer på:

Vi starter med permutere det første elementet, $1 \to \varphi(1)$. Vi har n mulige verdier for $\varphi(1)$.

Etter å ha valgt en verdi for $\varphi(1)$, må vi også permutere det andre elementet $2 \to \varphi(2)$. Vi har $(n-1)$ mulige verdier for $\varphi(2)$.

Dette vil det skje videre fram til vi permuterer elementet n, men da denne har bare en mulig plass igjen, siden de andre valgene ble gitt bort. Dermed har vi $n \cdot (n-1) \cdot \cdot 2 \cdot 1$ mulige permutasjoner. □

Notasjonen i den symmetriske gruppen $(S_n, \circ)$ kan virke veldig tungvindt dersom vi representerer hvert $\varphi \in S_n$ som:

$\varphi \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \ldots & \varphi(n) \end{pmatrix}$.

Derfor innfører vi begrepet *sykel*.

Definisjon 10. La $(S_n, \circ)$ være en symmetrisk gruppe som virker på n elementer. Vi kan ta et element i og permutere den så mange ganger vi vil med permutasjonen φ fram til $\varphi^k(i) = i$, der $k \leq n$.

Dersom for alle $f \notin \left\{\varphi(i), \varphi^2(i), \ldots, \varphi^k(i)\right\}$har vi at $\varphi(f) = f$ sier vi at φ er en **sykel**. Legg merke til at identitetspermutasjonen e er en sykel.

Dersom φ er en sykel, kan vi representere φ som $(i, \varphi(i), \varphi^2(i), \ldots, \varphi^{n-1}(i))$, som betyr at elementet i blir sendt til $\varphi(i)$, $\varphi(i)$ til $\varphi^2(i)$, osv fram til $\varphi^{n-1}(i)$ blir sendt til $\varphi^n(i) = i$. Denne representasjonen kaller vi **syklisk notasjon**.

Merknad 1. *Legg merke til at dette likner på sykliske undergrupper generert av ett element $g \in G$, $\langle g \rangle = \{e, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$.*

$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ kan representeres som $(2, 5, 4)$. En mye mer kompakt form.

Legg merke til at $(2, 5, 4) = (4, 2, 5) = (5, 4, 2)$ og at $(2, 5, 4)^{-1} = (2, 4, 5)$.

Merknad 2. *Generelt har vi at $(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (x_k, x_1, , x_2, \ldots, x_{k-1})$ og $(x_1, x_2, \ldots, x_k)^{-1} = (x_1, x_k, x_{k-1}, \ldots, x_2)$, for alle $k \leq n$.*

Teorem 9. Enhver permutasjon φ kan bli representert ved sammensetning av disjunkte sykeler.

Bevis. Generelt har vi at $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$, vi kan lager disjunkte sykelene:

$\sigma_1 = \left(1, \varphi(1), \varphi^2(1), \dots, \varphi^{k-1}(1)\right)$.

$\sigma_i = (i, \varphi(i), \varphi^2(i), \dots, \varphi^{m-1}(i))$ der $i \notin \left\{\varphi(1), \varphi^2(1), \dots, \varphi^k(1)\right\}$.

$\sigma_j = \left(j, \varphi(j), \varphi^2(j), \dots, \varphi^{l-1}(j)\right)$ der $i \notin \left\{\varphi(1), \dots, \varphi^k(1), i, \varphi(i), \dots, \varphi^{m-1}(i)\right\}$.

Vi forsetter slik fram til vi har listet alle elementer inngår i én av sykelene, la σ_z være denne siste sykelen. Da er disse sykelene disjunkte og

$$\varphi = \sigma_1 \circ \sigma_i \circ \circ \sigma_j \dots \circ \sigma_z.$$

□

Eksempel 4. Dermed kan vi skrive:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= (1,3,2) \circ (4,5)$$

Vi velger å ikke skrive ned sykeler som består av kun ett element. Dermed har vi at

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1,6) \circ (2,5,4) \circ (3) = (1,6) \circ (2,5,4) \ .$$

Definisjon 11. En **transposisjon** er en sykel med orden 2. Dvs. en permutasjon av 2 elementer.

Dersom τ er en transposisjon så er $\tau^{-1} = \tau$. $(x_1, x_2) \circ (x_1, x_2) = e$.

For eksempel $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (3,4)$ er en transposisjon.

Vi kan skrive $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ som $(1,2,3) \circ (4,5) = (1,3) \circ (1,2) \circ (4,5)$. Dette er en sammensetning av 3 transposisjoner.

Generelt har vi at $(x_1, x_2, \dots x_{k-1}, x_k) = (x_1, x_k) \circ (x_1, x_{k-1}) \circ (x_1, x_{k-2}) \circ \dots \circ (x_1, x_4) \circ (x_1, x_3) \circ (x_1, x_2)$. Derfor har vi:

Teorem 10. Gitt en sykel $\sigma \in S_n$, der $(S_n, \circ)$ er den symmetriske gruppen på n elementer, kan vi skrive φ som sammensetning av en endelig antall transposisjoner.

Måten vi skriver en permutasjon i form av transposisjoner er ikke entydig, for eksempel :

$$(x_1, x_2, \dots x_{k-1}, x_n) = (x_k, x_1, x_2, \dots x_{k-1})$$

$$= (x_k, x_1) \circ (x_k, x_{k-2}) \circ (x_k, x_{k-3}) \circ \dots \circ (x_k, x_3) \circ (x_k, x_2) \circ (x_k, x_1) \,.$$

Definisjon 12. Vi sier at en permutasjon er **jevn** dersom den kan skrives med en **jevnt** antall transposisjoner, ellers sier vi at den er **odde.** Denne egenskapen kaller vi **pariteten** til en permutasjon.

Teorem 11. Pariteten til antall transposisjoner er det samme for alle sykeler, og dermed for alle permutasjoner.

Bevis. La $(S_n, \circ)$ være symmetrigruppen på n elementer.

La $k \leq n$.

La $\sigma = (x_1, x_2, \dots x_{k-1}, x_k) \in S_k \subseteq S_n$ være en sykel og $\tau = (a, b) \in S_n$ være en transposisjon av elementene a, b der $a \neq b$.

Anta først at $a, b \notin \{x_1, x_2, \dots x_{k-1}, x_k\}$ Da vil $\tau \circ \sigma = \tau \circ (x_1, x_2, \dots x_{k-1}, x_k)$ ikke lenger være en sykel, men heller være en mer generelt permutasjon:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{k-2} & x_k & a & b \\ x_2 & x_3 & \dots & x_k & x_1 & b & a \end{pmatrix} \subseteq S_{k+2} \subseteq S_n$$

Anta nå at $a = x_i \in \{x_1, x_2, \dots x_{k-1}, x_k\}$, men $b \notin \{x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n\}$ Da vil:

$$\tau \circ \sigma = (x_i, b) \circ (x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_i, \dots, x_k) = (x_1, x_2, \dots x_{i-1}, b, x_i, \dots, x_k) \,.$$

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{i-1} & b & x_i & x_{i+1} & \dots & x_k \\ x_2 & x_3 & \dots & b & x_i & x_{i+1} & x_{i+2} & \dots & x_1 \end{pmatrix} \subseteq S_{k+1} \subseteq S_n.$$

Dette er en sykel med orden $k + 1$.

Anta nå at $a = x_i \in \{x_1, x_2, \dots x_{k-1}, x_k\}$,$b = x_j \in \{x_1, x_2, \dots x_{k-1}, x_k\}$. Da vil:

$$\begin{aligned}\tau \circ \sigma &= (x_i, x_j) \circ (x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_i, x_{i+1} \dots, \dots x_{j-1}, x_j, x_{j+1} \dots, , x_k) \\ &= (x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_j, x_{j+1} \dots, , x_k) \circ (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1})\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{i-1} & x_j & x_{j+1} & \dots & x_k & x_i & x_{i+1} & \dots x_{j-1} \\ x_2 & x_3 & \dots & x_j & x_{j+1} & x_{j+2} & \dots & x_1 & x_{i+1} & x_{i+2} & \dots x_{j-1} \end{pmatrix}$$

$$\subseteq S_k \subseteq S_n.$$

Dette er ikke en sykel. □

Vi kan konkludere at dersom vi har en sykel σ og sammensetter den med én transposisjon vil vi ikke få den samme sykelen.

En mer interessant observasjon er når vi sammensetter en sykel med to transposisjoner, altså $\tau_1 \circ \tau \circ \sigma$. Vi vil få igjen det samme sykelen kun dersom $\tau_1 = \tau_1^{-1} = \tau_1$.

$(S_k, \circ)$ er en undergruppe av $(S_n, \circ)$, når $k \leq n$. Derfor hvis $\tau_1 \circ \tau \circ \sigma = \sigma$ vil vi få at $(\tau_1 \circ \tau) \circ \sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma \circ \sigma^{-1}$. Dette impliserer at $\tau_1 \circ \tau = e$.

Med andre ord kan en sykel av k elementer representeres med minst$(k-1)$ transposisjoner, men vi kan også representere den med $(k - 1 + 2m)$ transposisjoner, siden vi kan *legge til* parvis to like transposisjoner.

Definisjon 13. Fortegnet til en permutasjon σ er $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$ hvis σ er jevn og $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$ hvis σ er odde.

Vi kan se at denne funksjonen gir mening i forhold til hva vi så i eksempel II. $\operatorname{sign}(\tau) = -1$. $\operatorname{sign}(\tau_1 \circ \tau) = 1$. Hvis σ er par, $\operatorname{sign}(\tau \circ \sigma) = -1$, hvis σ er odde, $\operatorname{sign}(\tau \circ \sigma) = 1$, se gjerne hvert tilfelle i eksempelet.

Mer generelt har vi at $\operatorname{sign}(\varphi \circ \vartheta) = \operatorname{sign}(\varphi) \cdot \operatorname{sign}(\vartheta)$, siden både φ og ϑ kan skrives som enten en oddetall eller partall transposisjoner.

Teorem 12. Pariteten til en sykel er det motsatte som antall elementer den virker på.

Bevis. La σ være en sykel av lengde n, denne sykelen kan skrives som en sammensetning av transposisjoner

$$\sigma = (1, 2, \ldots n) = (1, n) \circ (1, n-1) \circ \ldots \circ (1, 2)$$

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}((1, n) \circ (1, n-1) \circ \ldots \circ (1, 2))$$

$$\operatorname{sign}((1, n)) \cdot \operatorname{sign}((1, n-1)) \cdot \ldots \cdot \operatorname{sign}((1, 2))$$

$$\underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot \ldots \cdot (-1)}_{n-1} = (-1)^{n-1} = -(-1)^{n}.$$

□

Korollar 2. Dersom $\rho = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_n$ er en permutasjon som virker på k elementer vil $\operatorname{sign}(\rho) = \operatorname{sign}(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_n) = (-1)^{n+k}$, der σ_i er disjunkte sykeler.

Bevis. Anta nå at $\rho' = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_n$ er en permutasjon som endrer posisjonen til k elementer, der σ_i er disjunkte sykeler .

Hvis jeg har n disjunkte sykeler på orden m_i så er
$\operatorname{sign}(\rho) = \operatorname{sign}(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_m) =$
$(-(-1)^{m_1}) \cdot (-(-1)^{m_2}) \cdot \ldots \cdot (-(-1)^{m_n})$
$= (-1)^{n} (-1)^{m_1+m_2+\ldots+m_k} = (-1)^{n+k}$.

Dersom $\rho = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_n$ er en permutasjon som virker på k elementer, der σ_i er disjunkte sykeler vil vi få det samme resultatet, siden per fiksert element vi legger til i forhold til forrige, må vi også legge én triviell sykel. □

Teorem 13. Vi kan generere gruppen av partall permutasjoner av n elementer, A_n, som et produkt av 3-sykeler, gitt at $n \geq 3$.

Bevis. Alle elementer i A_n er produkt av et partall antall transposisjoner per definisjon. Dersom jeg har en mengde M_n og kan kun permutere 3 elementer om gangen, $\{x_i, x_j, x_k\}$, vil vi finne ut at siden $(x_i, x_j, x_k) = (x_i, x_j) \circ (x_i, x_k)$, vi gjør alltid et partall antall transposisjoner, men er disse er ikke alle partall permutasjonene. Vi mangler de som består av to disjunkte transposisjoner for å bevise at teoremet gjelder for $n \geq 4$.

Hvis vi har minst 4 elementer i M_n, for eksempel $\left\{x_i, x_j . x_i^*, x_j^*\right\}$
$\left(x_i, x_j, x_j^*\right) \circ \left(x_i, x_j, x_i^*\right) = \left(x_i, x_i^*\right) \circ \left(x_j, x_j^*\right)$

Så ved å bruke 3-sykeler kan vi generere kun en jevn antall transposisjoner som kan være disjunkte eller ikke-disjunkte, og sammensetninger av disse. $\square$

Gruppevirkning.

Definisjon 14. La $(G, \circ)$ være en gruppe og M en mengde. Da sier vi at G **virker** på M, dersom det finnes en avbildning $\nu : G \times M \to M$, $\nu(g, m) = g \diamond m$ slik at:

1. $e \diamond m = m \in M$, for alle $m \in M$.
2. $(g \circ h) \diamond m = g \diamond (h \diamond m)$, for alle $g, h \in G$, og alle $m \in M$.

Kravet nr. 2 betyr at vi kan enten først sammensette elementene g og h og så virke $g \circ h$ på elementet m, eller først virke h på m for så å virke g på $h \diamond m$.

Gruppen $(S_n, \circ)$ er består av alle mulige permutasjoner, der disse permutasjonene virker på en gitt mengde, M_n. Så konseptet av gruppevirkning er ikke helt nytt i denne artikkelen.

Når vi referer til virkning av $\sigma \in S_n$ på elementet $m \in M_n$ skriver vi $\sigma \diamond m$ som $\sigma(m)$, som vi har tidligere gjort.

Vi kan se på noen eksempler av gruppevirkning:

Naturligvis er en gruppe en mengde, så vi kan si at en gruppe $\underline{G}$ virker på mengden G, med avbildningen: $\nu(g, h) = g \diamond h = g \circ h$ for alle $g, h \in G$.

I tillegg har vi **den trivielle virkning**: som går ut på at gitt en gruppe $\underline{G}$ og en mengde M, kan vi ha virkningen $\nu(g, m) = g \diamond m = m$ for alle $g \in G$, $m \in M$.

Definisjon 15. La $\nu : G \times M \to M$ være en gruppevirkning av gruppen $(G, \circ)$ på mengden M. **Banen** til et element $m \in M$ er gitt ved:

$$\mathcal{O}_m = G \diamond m = \{g \diamond m \mid g \in G\} .$$

Dersom $\mathcal{O}_m$ består kun av et element, m, kaller vi denne en **triviell bane**, ellers en **ikke-triviell bane**. Dersom $H \subseteq G$ kaller vi $m \in H \diamond M$ et element i m **påvirket** av H, der

$$H \diamond M = \{h \diamond m \mid h \in H,\ m \neq g \diamond m\}$$

Definisjon 16. En **partisjon**$\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ av en mengde M er slik at:

1. $M_i \neq \emptyset$, for alle $M_i \subseteq M$
2. $M = \bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i$
3. $M_i \neq M_j \Rightarrow M_i \cap M_i = \emptyset$

Teorem 14. La $(G, \circ)$ være en gruppe som virker på mengden M. Da har vi at $\{G \diamond m \mid m \in M\}$ er en partisjon av M. Dvs. for alle $m, n \in M$:

1. $G \diamond m \neq \emptyset$, $G \diamond m \subseteq M$
2. $M = \bigcup\limits_{g \in G} G \diamond m$
3. $G \diamond m \neq G \diamond n \Rightarrow G \diamond m \cap G \diamond n = \emptyset$

Bevis. $G \diamond m$ er ikke tom siden $e \circ m = m \in G \diamond m$.

$\bigcup\limits_{g \in G} G \diamond m = \bigcup\limits_{g \in G} \{g \diamond m \mid g \in G\} \supseteq \bigcup\limits_{g \in G} \{e \diamond m \mid e \in G\} = M$. $G \diamond m \subseteq M$, så $\bigcup\limits_{g \in G} G \diamond m \subseteq M$. Dermed $\bigcup\limits_{g \in G} G \diamond m = M$.

Det gjenstår å vise at $G \diamond m \neq G \diamond n \Rightarrow G \diamond m \cap G \diamond n = \emptyset$. Som er det samme som $G \diamond m \cap G \diamond n = k \Rightarrow G \diamond m = G \diamond n$. Så anta at $k \in G \diamond m = \{g \diamond m \mid g \in G\}$ og $k \in G \diamond n = \{g \diamond n \mid g \in G\}$. Da har vi at

$k = g_1 \diamond m = g_2 \diamond n$. Der $g_1, g_2 \in G$.

Dermed $g_1 \diamond m = g_2 \diamond n \Rightarrow g_1^{-1} \diamond (g_1 \diamond m) = g_1^{-1} \diamond (g_2 \diamond n) \Rightarrow m = g_1^{-1} \diamond (g_2 \diamond n)$. Men da har vi at :

$$\begin{aligned} G \diamond m = \{g \diamond m \mid g \in G\} &= \left\{g \diamond \left(\left(g_1^{-1} \circ g_2\right) \diamond n\right) \mid g \in G\right\} \\ &= \left\{\left(g \circ g_1^{-1} \circ g_2\right) \diamond n \mid g \in G\right\} = G \diamond n. \end{aligned}$$

siden $g \circ g_1^{-1} \circ g_2 \in G$. $\square$

Ut fra forrige teorem kan vi også konkludere at:

Den trivielle virkningen gir en partisjon av M på $|M|$ elementer.

Eksempel 5. Vi kan se på $(2\mathbb{Z}, +)$ og hvordan den virker på mengden $\mathbb{R}$ ved avbildningen $\nu\,(m) = 2n + m$.

Vi kan finne banen til $2 \in \mathbb{R}$:

$$2\mathbb{Z} + 2 = \{..., -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\} = 2\mathbb{Z}.$$

Mens banen til $\pi \in \mathbb{R}$ er:

$$2\mathbb{Z} + \pi = \{..., -4 + \pi, -2 + \pi, \pi, 2 + \pi, 4 + \pi, 6 + \pi, \ldots\} \neq 2\mathbb{Z}.$$

Så denne banen tilsvarer en translasjon av elementene til $\mathbb{Z}$ i den reelle aksen.

Del III

Vri- og flyttespill: Definisjoner og eksempler.

I denne delen av artikkelen vil jeg presentere leseren hva et vri- og flyttespill er, fra en matematisk perspektiv og skaffe oversikt over ulike spill, deres symmetrigrupper og løsninger. Spesielt vil jeg beskrive løsningen av Rubiks kube igjennom analyser av symmetrigruppen som virker på den.

Noe av inspirasjonen for denne delen av artikkelen er hentet fra [Badelow (1982)] og illustrasjonene ble lagt ved hjelp programvarene av [Geogebra] med hvit bakgrunn og [Virtual Magic Polyhedra] med svart bakgrunn.

Først og fremst vil jeg gjøre leseren oppmerksom på at fra nå av, leser en operasjon $x \circ y \circ z$ d fra venstre til høyre, dvs.:

$$(x \circ y \circ z) \diamond K = x \diamond (y \diamond (x \diamond K)).$$

Vi bruker denne litt tungvint notasjonen siden det er mer standar i litteraturen om vri- og flyttespill, selv om vi å leste fra høyre til venstre i tidligere i den forrige delen av artikkelen.

Definisjon 17. Et **vri- og flyttespill**, forkortet **vofs**, består av følgende:

1. En endelig mengde B av n **brikker**, med en partisjon i k undermengder B_i. Dvs. $\bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i = B$, $\bigcap\limits_{i \neq j} B_i = \emptyset$.

2. En endelig mengde P av n **plasser** med en partisjon $\bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i = P$ og $\bigcap\limits_{i \neq j} P_i = \emptyset$ og $|B_i| = |P_i| = a_i$.

3. En mengde $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$ av **plasseringer** gitt ved en bijektiv avbildning $\sigma : B \to P$ slik at $\sigma_i : B_i \to P_i$. Der σ_i står for **plasseringer** brikkene B_i.

4. En utvalg $\sigma_i = e_i$ som vi kaller **grunnplasseringen til brikkene** B_i, om alle brikkene er grunnplassert skriver vi $\sigma = e$.

5. En familie av **dekorasjonsfunksjoner** $D_i = \{F_i : B_i \to \mathbb{Z}_{r_i}\}$, hvor $(\mathbb{Z}_i, +_{r_i})$ er den sykliske gruppen, modul r_i. La $D = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_k$ være mengden av alle dekorasjoner.

   Vi lar $f_i(b_i) = k$, der $k \in \mathbb{Z}_{r_i}$ betegne **dekorasjonen** til brikken b_i.

6. En gruppe $(G, \circ)$ av **tillatte operasjoner**, slik at G virker på $S \times D$.

Det er viktig å få med seg at selv om to brikker deler samme bane og har den samme dekorasjonen, de er fremdeles ulike brikker. For eksempel sentrumbrikker i en av sidene til en $4 \times 4 \times 4$ Rubiks kube.

Definisjon 18. En **konfigurasjon** er et element i $S \times D$, og blir skrevet som $[\sigma_i, F_i] = [\sigma_i, F_i]_{i=1}^{k} \in S \times D$, der σ_i og F_i står for **plasseringer** og **dekorasjonene** til brikkene B_i henholdvis. Mengden av konfigurasjonene kaller vi konfigurasjonsmedgen $K = S \times D$.

Definisjon 19. Startkonfigurasjonen[1] til et vofs er konfigurasjonen $I_K = [e, 0]$, hvor e er grunnplasseringen og 0 betyr dekorasjonen der alle $F_i = 0$. En **mulig konfigurasjon** er en konfigurasjon som man nå ved å virke en tillatt operasjon på startkonfigurasjonen $I_K = [e, 0]$.

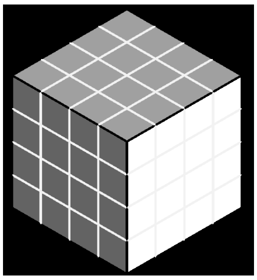
Siden grunnplasseringen er noe man bestemmer for spillet, så er startkonfigurasjonen også noe man bestemmer for spillet. Strengt tatt kan hver konfigurasjon bli definert som startkonfigurasjon.

Når noen av brikkene er identiske kan det hende at flere konfigurasjoner gir det samme utseende for spillet. Vi kaller dem **identiske konfigurasjoner**. Identiske konfigurasjoner danner en partisjon av konfigurasjonene.

Spesielt noen av disse identiske konfigurasjonene kan være i samme partisjonsklasse som startkonfigurasjonen, alle dem kaller vi en **standard startkonfigurasjon**, og utseende deres er som regel gitt av skaperen til spillet.

For eksempel en $4 \times 4 \times 4$ Rubiks kube har mange konfigurasjoner som gjør at kuben ser ut som i den standard startkonfigurasjon gitt av skaperen til spillet, siden sentrumbrikkene er identiske på hver av sidene.

[1] Start konfigurasjonen er det som man ofte tenker på som en løsning, men vi velger å kalle en løsning selve operasjonen av å løse.



Figur 2: **Standard startkonfigurasjon til en** $4 \times 4 \times 4$ Rubiks kube.

I enkelte spill kan de hende at man er nødt å lage noen fiktive brikker og plasser for å balansere likningen $|B_i| = |P_i| = a_i$. Disse fiktive brikker er identiske med hverandre.

Dekorasjonsfunksjonene er et verktøy som hjelper oss å behandle vofs på en effektiv måte, men etter behov kan man se splitte dekorasjonen i form av nye brikker med tilhengende nye plasser. På denne måten kan vi inkludere flest mulig spill i definisjonen vår. Eksemplene i denne artikkelen vil ikke kreve fiktive elementer.

Definisjon 20. En **løsning** av et vofs, gitt en konfigurasjon $K = [\sigma_i, F_i]$, er et element $L(\sigma_i, F_i) \in G$ slik at $L(\sigma_i, F_i) \diamond [\sigma_i, F_i] = [e_i, 0_i]$. Noen av operasjonene som man kan bruke for å konstruere en løsning av vofset kaller man for **algoritmer**.

Det er forståelig at mennesker trives mest med å bruke noen få algoritmer flere ganger i ulike sammenhenger, framfor å lære seg milliarder operasjoner for å løse enhver konfigurasjon. En av målene i denne artikkelen er nemlig å vise hvordan man kan konstruere alle løsninger ved noen fåtall operasjoner

Definisjon 21. Mengden av grunnoperasjoner $\{t_1, t_2, \ldots, t_s\}$ er et utvalgt tillate operasjoner som man velger for hver vofs. Disse er gitt av selve mekanismen til vofset, og dermed spesifiseres til hver av dem. Grunnoperasjonene genererer hele G:

$$\langle t_1, t_2, \ldots, t_s \rangle = G$$

Observer at hvis man har en vri- og flyttespill, og bruker en annet gruppe $(G^{\star}, \circ)$ av tillate operasjoner, vil man oppfatte dette som et annet spill. Dette kaller vi en **variasjon**.

La $g = (\sigma_i, F_i) \in G$, være en operasjon endrer plasseringen til brikkene $\{b_1, b_2, \dots b_n\} = B_i$ med permutasjonen σ_i, for alle $i \leq k$. Husk at k er antall partisjoner.

Vi kan skrive $\sigma_i = \text{Proj}_{\sigma_i}(g)$, siden dette kan omfattes som en projeksjon over S_i.

Definisjon 22. Vi definerer **pariteten til en tillatt operasjon** $g \in G$ **i et vofs** til å være det samme som pariteten til symmetrigruppen gitt av bijeksjonen $\sigma : B \to P$ som er slik at $\sigma_i : B_i \to P_i$. Dvs:

$$\text{sign}(g) = \text{sign}(\text{Proj}_{\sigma}(g)) = \text{sign}(\sigma).$$

Vi definerer også **pariteten til brikkene** B_i til være pariteten til operasjonen $g \in G$ som setter brikkene i deres grunnplassering.

Teorem 15. Hvis $g \in G$ virker på et vofs, slik at totalt n brikker blir permuterte fordelt på hver av de k partisjonene som finnes på vofset, har vi at:

$$\text{sign}(g) = (-1)^{k+n}.$$

Bevis. Anta at g permuterer r_i brikker på hver undermengde B_i, ved permutasjonen $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_k$, der σ_i er disjunkte. La summen av r_i være lik n.

$$\text{sign}(g) = \text{sign}(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_k) = \text{sign}(\sigma_1) \cdot \text{sign}(\sigma_2) \cdot \dots \cdot \text{sign}(\sigma_k)$$
$$= (-1)^{k+n}$$ ☐

Så gitt et vofs, med gruppen av tillate operasjoner $(G, \circ)$, kan vi lage variasjoner av vofset med mengden av tillate operasjoner $\langle g_i \rangle$, der $g_i \in G$ er et nytt utvalgt operasjoner. Ved å studere slike variasjoner og teoremet ovenfor vil man kunne for eksempel vise om det oppstår noen paritets problemer i en vofs. Se seksjonen *Løsning av et generelt vri- og flyttespill* på side 38.

Vi kan se på noen eksempler av vri- og flyttespill, og grunnoperasjonene deres:

15-spillet:

15-spillet er et vofs som består av et (flat rektangulær) brett med 16 brikker fordelt slik at de danner et kvadrat. Man trekker ut én av brikkene slik at man kan flytte de andre 15 brikkene én og én ved å permutere dem med den tomme plassen, dersom de står rett under, over, til høyre eller til venstre for den tomme plassen.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

(a) Start konfigurasjon

*	o	*	*
v	16	h	*
*	u	*	*
*	*	*	*

(b) Tilfeldig konfigurasjon

Figur 3: 15-spillet

Vi lar:

- $O = (o, 16)$ flytter brikken ovenfor den tomme plassen til den tomme plassen.
- $U = (u, 16)$ flytter brikken under den tomme plassen til den tomme plassen.
- $H = (h, 16)$ flytter brikken til høyre for den tomme plassen til den tomme plassen.
- $V = (v, 16)$ flytter brikken til venstre for den tomme plassen til den tomme plassen.

1. Plassene hvor brikkene er kan nummereres med tallene fra 1 til 16, så vi får mengden $P_{16} = \{1, 2, \ldots, 16\}$. Den tomme plassen kaller vi for 16, det er vel opp til oss om vi vil ta denne brikken ut og inn hver gang vi gjør en tillatt bevegelse, eller bare beholde den ute av brettet. Vi behøver ikke noen partisjoner siden brikkene kan fritt plasseres på vilkårlige plasser.

2. Gruppen av tillate operasjoner $G \subseteq S_{16}$, siden vi ikke har noen dekorasjoner på brikkene, dvs. $D = 0$.

3. La operasjonene $\{O, U, H, V\}$ være transposisjoner av type $(16, n)$ der 16 er **den tomme plassen**, 16, er og $n \in P_{16}$ og plassen n ligger ved siden av den tomme plassen. Grunnoperasjonene er sammensetningene av operasjonene $\{O, U, H, V\}$ slik at til etter å ha virket dem tallet 16 blir fiksert.

Vi er nødt til å fiksere det tomme plassen, slik at vi kan danne en gruppe, for ellers får vi en grupoide[2]. Observer at i så fall vil det ikke være mulig å sammensette vilkårlig mange potenser av operasjonene.

Operasjonene O, U, H, V genererer alle tillate operasjonene: $\langle O, U, H, V\rangle = G$. Dette er karakteristisk for alle spillene vi presenterer.

Som sagt kan man lage variasjoner av spillet, for eksempel:

Variasjon 1: De tillate grunnoperasjonene er $\langle O, U\rangle$ slik at 16 er fiksert. Dvs. det er kun lov å flytte brikkene opp og nede.

Variasjon 2: De tillate operasjonene er S_{16}. Dvs. det er lov å ta ut alle brikkene fra brettet og plassere dem på alle mulige måter.

En tilfeldig konfigurasjon i 15-spillet vil sannsynligvis ikke la seg løse ved å bruke de tillate operasjonene i variasjon 1 av spillet, men den vil alltid la seg løse av variasjon 2:

Observer at:

$$(a, 16) \circ (b, 16) = (a, b, 16) = (a, b) \circ (a, 16)$$

[2]Dvs., ikke alle sammensetninger er definert for alle par av elementer.

Dermed $(a, b) = (a, 16) \circ (b, 16) \circ (a, 16)$. Så det å transponere to brikker a, b krever et odd antall transposisjoner med den tromme plassen. Dette fører til at man vise at konfigurasjonen nedenfor ikke har en løsning i 15-spillet, men den har en opplagt løsning i variasjon 2 av 15-spillet.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	16

Figur 4: Spesielt konfigurasjon, umulig 15-spillet

Det er umulig å løse 15-spillet gitt i konfigurasjonen ovenfor ved å bruke operasjonene O, U, H, V. Som vi har allerede kommentert $(a, b) = (a, 16) \circ (b, 16) \circ (a, 16)$ er en odd permutasjon, gitt at $a, b \neq 16$. Med fokus på hva som skjer med brikken 16, den er nødt til å være utenfor sin start posisjon, siden den blir transponert en odd antall ganger og den trenger en jevn antall transposisjoner for å kunne bli riktig plassert.

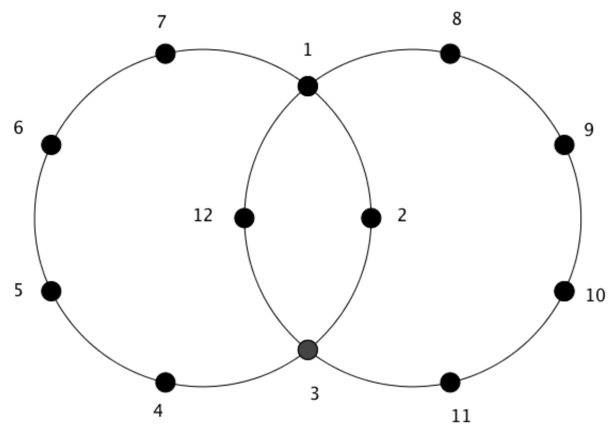
Ungarske ringer:

n, m**- ungarske ringer** er et vofs som består av to ringer med m og n brikker på hver av dem med diverse farger[3]. Noen av fargene kan være like.

Vi antar at $n, m \geq 3$.

Brikkene kan roteres med eller mot klokken på hver ring. Det er alltid to brikker som er frie til å rotere på den ene eller på den andre ringen, mens de resterende $m + n - 4$ er nødt til å forholde seg til deres opprinnelig ringen.

Dette spillet er veldig fint for å forstå hvordan kommutatorer fungerer. Mer om kommutatorer vil bli forklart senere. Når man først har god forståelse på spillet eller på kommutatorer vil man fort legge merke til at det impliserer at algoritmen $xyx'y'$ vil permutere 6 brikker samtidig, der x er en operasjon som roterer brikkene i en av ringene, og y i den andre.



Figur 5: Nummerering av plassene til $7, 7$- ungarske ring.

[3]Som regel er $m = n$, men la oss ikke begrense oss selv her, for å kunne utforske flere variasjoner av spillet.

1. Vi ser ut fra figuren at alle plassene kan nummereres med tallene fra 1 til $m + n - 2$, der m og n er antall brikker på høyre og venstre ring henholdvis. Så mengden B_{n+m-2} av brikker, og P_{n+m-2} av plasser. Siden brikkene kan plasseres på alle plasser, så behøver vi ikke noen partisjoner.

2. De tillate operasjoner $G \subseteq S_{m+n-2}$ er rotasjoner av brikkene på hver ring, og deres invers er rotasjoner i samme antall grader i motsatt retning på de respektive ringene. G har heller ikke her noen dekorasjoner.

3. Vi kan kalle den rotasjonen på $360°/m$ med klokken på brikkene til høyre ringen for h og rotasjonen på $360°/n$ med klokken på brikkene til venstre ringen for v.

   Vi observerer at $h^{m-1} = h'$ og $v^{n-1} = h'$. Vi ser at h og v genererer alle tillate operasjoner, $\langle h, v \rangle = G$, så de er grunnoperasjonene vi bruker.

4. $\operatorname{sign}(h) = 1$ hvis og bare hvis m er odd, tilsvarende for v. Så hvis både m og n er odd, vil man ikke kunne permutere kun 2 brikker i dette spillet.

Vi skal bruke dette spillet som eksempel for hva en kommutator gjør på eksempel 6 på side 58.

Rubiks kube: Kulturelt innflytelse, teoremer og algoritmer.

En av de mest kjente vri og flytte- spill er Rubik's kube som ble lansert i markedet i 1980. Den fikk fort en viktig plass i populærkultur verden rundt, sannsynligvis på grunn av dens eleganse og kompleksitet. En klassisk klisjé på film går ut på at barn eller ungdom som virker smart, har en Rubik's kube på rommet sitt. Se gjerne filmene: *Brick*, *Armageddon*, *Dude, Where's my car?*, *Wall-E*, *Låt den rätte komma inn*, *The pursuit of Happiness* og *Snowden*.

Rubiks kube ble skapt i 1974 av den ungarske arkitekturprofessoren Ernö Rubik. Han klarte å løse kuben litt over en måned etter å ha designet spillet. Han trodde en kort stund at det var umulig å løse dette. at pga. det store antall kombinasjoner spillet har: $43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$, kombinasjoner. Dvs. mulige konfigurasjoner.

Den kan lages ved å ta $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ sorte kubiske brikker og deretter danne en større kube med disse brikkene. Denne nye store kuben kan fargelegges på hver side med ulike ikke-sorte farger. Slik kan de opprinnelige 3 sorte brikkene bli til 1 fullstendig sort kube som ligger i kjernen, med 6 brikker som har én ikke- sort farget side (som vi kaller for sentrum til hver side), 12 brikker med to ikke-sort fargede sider (som vi kaller for kanter), og de resterende 8 brikkene har 3 ikke-sorte fargede sider som vi kaller for hjørner.

Denne type konstruksjonen lar seg gjerne gjøre dersom vi bruker magneter til å holde de små kubene sammen, men det er ganske standard å produsere Rubiks kuber av plast-brikker som klarer å holde seg sammen ved hjelp av små springer som holder fast brikken i kjernen med sentrum brikkene, med friheten for å rotere den $4 \cdot 90° = 360°$ om sentrum til hver ikke-sorte side. Sentrumbrikkene holder kantbrikkene som igjen holder hjørnebrikkene.

Det er også standard å ha følgende fargekode: hvit på motsatt side av gul, rød på motsatt side av oransje, og blå på motsatt side av grønn. I et av hjørnene møtes fargene rød, hvit og blå med klokken.

Det vil hovedsakelig refereres til denne type kube, men vil også nevne andre varianter av Rubiks kube av typene:

1. $n \cdot n \cdot n$ kuber, som kan forårsake et *paritetsproblem.*

2. Det samme konseptet anvendt på andre platonske legemer.

For en standard Rubiks kube har vi :

1. Dette spillet består av 12 kantbrikker, 8 hjørnebrikker og 6 sentrumbrikker. På kuben har vi dermed 26 brikker som kan nummereres og danne partisjonen av brikker:

$$B = \{x_1, x_2, \ldots, x_{12}, y_1, y_2, \ldots, y_{12}, z_1, z_2 \ldots z_6\}.$$

   Der x_i, $y_i$og s_i er elementer i tre partisjonmengder av brikkene av type kanter X, hjørner Y og sentrum Z henholdvis. Tilsvarende partisjon for plassene P.

2. Gruppen av tillate operasjoner er $G \subseteq S_X \times S_Y \times S_Z \times D_X \times D_Y \times D_Z$. Der S_X er permutasjonen av de 12 kantene, altså mengden til symmetrigrupen $(S_{12}, \circ)$, tilsvarende S_Y er S_8 og S_Z er S_{12}.

   I spillet har hver kant to ulike dekorasjoner, for eks. enten røde eller gule, så $D_X = \mathbb{Z}_2^{12}$. Hjørnene har tre ulike dekorasjoner, så $D_Y = \mathbb{Z}_3^8$.

   Sentrumbrikkene har ingen dekorasjoner i en standard Rubiks kube, så $D_Z = 0$. I tillegg har hver av disse brikkene kun én fiksert posisjon under grunnpermutasjonene vi skal definere straks for spillet, så $S_Z = e_Z$. Med andre ord:

$$G \subseteq S_8 \times S_{12} \times \mathbb{Z}_2^{12} \times \mathbb{Z}_3^8.$$

3. Grunnoperasjonene er $\{O, U, H, V, F, B\}$, Der O virker på brikkene på øver siden av kuben, ved å flytte alle brikkene 90° med klokken om sentrumbrikken til den siden, H virker på brikkene på høyre side av kuben, ved å flytte alle brikkene 90° med klokken om sentrumbrikken til den siden, osv. Bokstavene står for *Over, Under, Høyre, Venstre, Foran, Bak.*

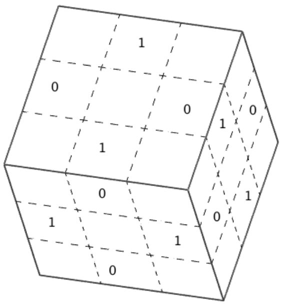
4. Hver av disse operasjonene roterer samtidig 4 kanter og 4 hjørner, så pariteten til en av disse rotasjoner over mengden av brikkene B er alltid jevn.

   På den andre siden når hver grunnoperasjon tilsvarer en sykel av lengde 4 på kantene, så $\operatorname{sign}(H_X) = -1$ og tilsvarende for hjørnene, $\operatorname{sign}(H_Y) = -1$. Der H_X, H_Y er projeksjonen av H over S_X og S_Y henholdvis, i dette tilfellet en sykel av 4 kanter og en sykel av 4 hjørner.

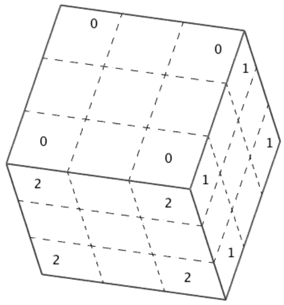
   Dvs. det er ikke en tillatt operasjon det å permutere kun 2 brikker, og i tillegg betyr dette at en permutasjon av to kanter er nødt til å også permutere hjørner, og omvendt, siden $1 = \operatorname{sign}(H) = \operatorname{sign}(H_X) \cdot \operatorname{sign}(H_Y)$.

5. Dekorasjonen til brikkene vil hjelpe oss å bevise at det ikke er mulig å *vri* én kant eller ett hjørne i kuben. Mer om dette blir nøyere forklart i Teorem 16.

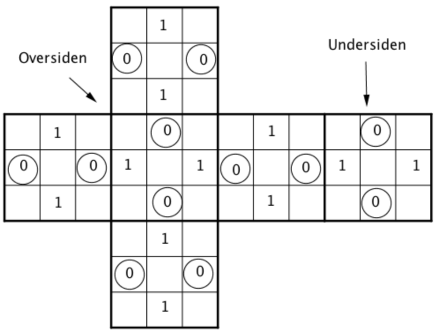
Vi kan definere følgende dekorasjon:



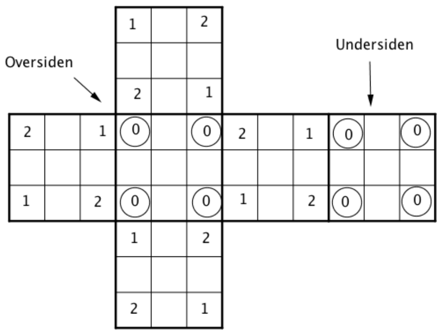
(a) f



(b) h



(c) f



(d) h

Figur 6: Markering av brikkene.

Der f, h betegner, dekorasjonene til hjørnene og kantene henholdvis, for både startkonfigurasjonen av brikkene, I_K, og for plassene.

Tallet under sirkelen markerer hvilke dekorasjon brikken har. Vi kan tenke oss at selv om vi flytter brikkene på kuben så mye vi vil, sirklene ligger alltid på det samme stedet. Ved å se hvilke tall ligger under hver sirkel kan vi se hvilken dekorasjon brikken som befinner seg i.

Vi skal se i neste seksjon hvorfor vi valgte å markere hjørnene i den orden, $\{0, 1, 2\}$, plassert i hvert hjørne, skrevet i den orden med klokken.

Konfigurasjonsmengden i spillet er derfor:

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} \sigma, & \rho; & f, & h \end{bmatrix} \mid \sigma \in S_{12}, \rho \in S_8 \right.$$
$$\left. f : \{x_1, x_2, \ldots, x_{12}\} \to \mathbb{Z}_2, \text{ og } h : \{y_1, y_2, \ldots, y_8\} \to \mathbb{Z}_3 \right\}$$

Mens mengden av de tillate konfigurasjonene er:

$$K = \{r \in o_r \diamond I_K \mid o_r \in \langle O, U, H, V, F, B \rangle\}.$$

Teorem 16. En konfigurasjon til Rubiks kuben,

$$\begin{bmatrix} \sigma, & \rho; & \begin{bmatrix} f_1(x_1), & \ldots, & f_{12}(x_{12}) \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} h_1(y_1), & \ldots, & h_8(y_8) \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

er tillatt hvis og bare hvis følgende krav er oppfylte:

1. $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\rho)$
2. $f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_8(x_8) \equiv 0$, (Mod 2)
3. $h(y_1) + h_2(y_2) + \ldots + h_{12}(y_{12}) \equiv 0$ (Mod 3)

Bevis. Vi skal først vise at kravene holder når konfigurasjonen r er tillatt:

1. Permutasjonene av kantene under én tillat grunnoperasjon $t_i \in \{O, U, H, V, F, B\}$ er alltid odd: $\operatorname{sign}(t_i) = (-1)^{4-1} = -1$, siden hver tillatt grunnoperasjon av kantene (dvs. plastbrikkene på kantene) består av én sykel på 4 elementer. Se gjerne teorem 2 for å skjønne hvordan jeg *regner ut* pariteten til en operasjon.

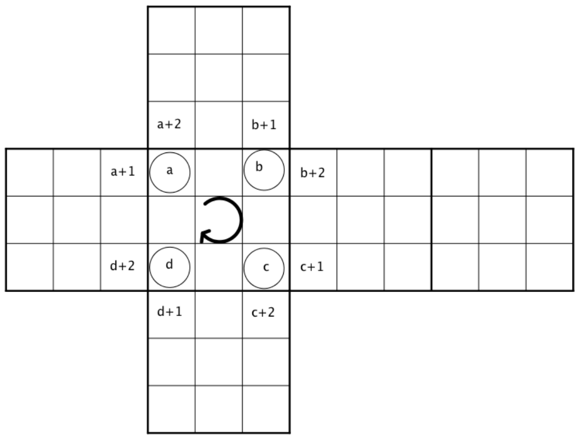
   Når vi utfører den samme tillatte permutasjonen t_i på hjørnene (dvs. plastbrikkene på kantene), ser vi at denne permutasjonen av hjørner også er odde av samme grunn.

   Dvs. pariteten til hjørner er alltid det samme som pariteten til kantene under hver operasjon t_i, naturligvis var også pariteten det samme når kuben var i startkonfigurasjon.

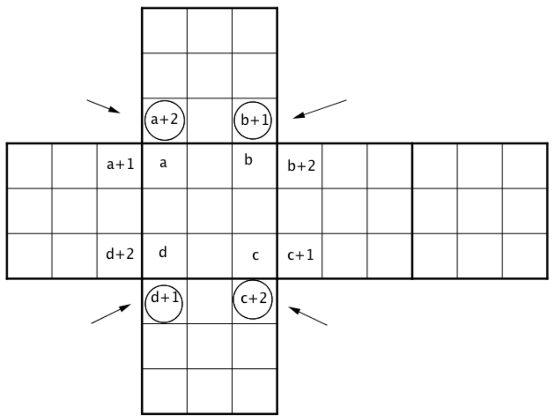
2. I startkonfigurasjon gjelder likningen for dekorasjonen av kantene, se på bilde 6. Når vi gjør en grunnoperasjon t_i ser vi at nøyaktig 4 av h_i endrer verdi, siden hver enkelt vridning flytter 4 kantbrikker og hver av dem endrer dekorasjon.

3. I startkonfigurasjonen gjelder likningen for dekorasjonen av hjørnene. Vi kan bruke modulær aritmetikk for å få ut tilsvarende forhold som i punkt 2 av beviset. Når vi utfører en grunnoperasjon til en av sidene til kuben, uavhengig av hvilken konfigurasjon den befinner seg i, vil det gjelde at summen av dekorasjonen er konstant for de 4 hjørnebrikkene som permuteres i denne bevegelsen:

   Legg merke til at når vi ser på dekorasjon til et hjørne y_i for eks med $h_i(y_i) = a_i \in \mathbb{Z}_3$, dersom vi vrir hjørnet 120° mot klokken vil vi få dekorasjonen $a_i + 1$ og mot klokken vil dekorasjonen endres til $a_i + 2$, så vi har alltid tallene $\{a_i, a_i + 1, a_i + 2\}$ rett etter hverandre som markering til hvert klistremerke. Så derfor markerer vi klistremerkene som i figuren under. Det forklarer også hvorfor vi valgte å markere hjørnene i figur 6 på den måten, $\{0, 1, 2\}$ alltid med klokken, og tilsvarende argumenter kan vi bruke for kantene.



(a) Situasjon 1.



(b) Situasjon 2.

Figur 7

Vi kan tenke oss at vi har to mulige situasjoner som man kan si i figuren ovenfor: den ene hvor vi roterer øvre eller nedre siden av kuben og den andre hvor vi roterer noen av de andre mulige sidene. Vi leser av dekorasjonen ved å se hva som står under sykelene under hver rotasjon av sidene, dvs. under hver tillatt grunn-operasjon $t_i \in \{O, U, H, V, F, B\}$.

Vi ser først på situasjonen 1, med dekorasjonen:

$$[f_A(b_A), f_B(b_B), f_C(b_C), f_D(b_D)] = [a, b, c, d],$$

og summen av dekorasjoner $a + b + c + d$ modul 3, der A, B, C, D er brikker som flyttes under permutasjonen, og $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3$ er de dekorasjonene hjørnebrikkene har.

Hvis vi roterer kuben 90°, dvs. en operasjon $t_i \in \{O, U\}$, vil vi få følgende endringer i konfigurasjoner $t_i \diamond [a, b, c, d] = [d, a, b, c]$. Så summen blir fremdeles:

$$d +_3 a +_3 b +_3 c = a +_3 b +_3 c +_3 d$$

Dersom vi har situasjonen 2, dvs. at vi roterer en side som ikke er *over* eller *under* kuben vil vi få at startkonfigurasjonen er, for eksempel:

$$[f_A(b_A), f_B(b_B), f_C(b_C), f_D(b_D)] = [a + 2, b + 1, c + 2, d + 1].$$

Som i situasjon 2 i bildet. Her er summen av dekorasjonene $f_i(b_i)$modul 3 er lik :

$f_A(b_A) +_3 f_B(b_B) +_3 f_C(b_C) +_3 f_D(b_D)$

$$= (a + 2) +_3 (b + 1) +_3 (c + 2) +_3 (d + 1) = a + b + c + d$$

Når vi roterer kuben 90°, vil vi få konfigurasjonen:

$$t_i \diamond [a + 2, b + 1, c + 2, d + 1] = [d + 2, a + 1, b + 2, c + 1].$$

Vi får at summen til dekorasjoner til den nye konfigurasjonen være $d + 2 + a + 1 + b + 2 + c + 1 = a + b + c + d$ modul 3 igjen.

Konklusjon: siden vi starter med summen dekorasjonen til alle hjørner lik 0, og hver gang vi gjør en tillatt grunn-operasjon, summen av dekorasjonene til de 4 hjørnene som permuteres er konstant modul 3, må summen av alle dekorasjonene til de 8 hjørnene være kontant lik 0.

Nå skal vi bevise at kravene er nødvendige. Vi antar at kravene gjelder for konfigurasjonen $[(\sigma, \rho), (f, h)]$, og ønsker å vise at ved å utføre tillate operasjonen $t \in T_n$ kan man komme frem til startkonfigurasjonen, I_K.

Vi kan bruke en induksjonsbevis. Anta at vi har bevist at når $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\rho) = 1$ konfigurasjonen $[(\sigma, \rho), (f, h)]$ er tillatt, dvs. det eksisterer tillatte operasjonen $t \in T_n$ som danner konfigurasjonen ut fra I_K.

Da har vi at dersom $\operatorname{sign}(\sigma^*) = \operatorname{sign}(\rho^*) = -1$ for konfigurasjonen $[r] = [(\sigma^*, \rho^*), (f^*, h^*)]$, så kan vi virke på denne konfigurasjonen den tillate operasjonen U, dvs. flytte den øvre siden av kuben 90° med klokken, og får en ny konfigurasjonen $U \diamond [r] = [r^*] = [(\sigma_U \sigma^*, \rho_U \rho^*), (f^*, h^*)]$. Observer at $\operatorname{sign}(\sigma_U \sigma^*) = \operatorname{sign}(\rho_U \rho^*) = 1$, siden både $\sigma_U$og ρ_U er enkle sykeler som permuterer 4 sykeler. Så det eksisterer en tillat operasjon $t^* \in T_n$ som danner konfigurasjonen $[r^*]$. Da har vi at $U \diamond [r] = [r^*] = t^* \diamond I_K$. så om vi virker igjen $U^{-1} = U'$, får vi at $U' \diamond (U \diamond [r]) = U' \diamond [r^*] = U' \diamond (t^* \diamond I_K)$. Så $[r] = (U' \circ t^*) \diamond I_K$, dermed $U' \circ t^*$ er en tillatt operasjon, $[r]$ er en tillat konfigurasjon.

Tilsvarende resultat hadde vi fått om vi hadde startet denne delen av beviset med $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\rho) = -1$.

Vi innfører notasjonen $(x_1, x_2, x_3)_\sigma$ til å være sykelen som sender den ene brikken til plassen hvor neste brikken er, dvs. $x_1 \to x_2$, $x_2 \to x_3$, $x_3 \to x_1$. Vi legger symbolet σ for å gjøre leseren ekstra oppmerksom på at vi mener en sykel, og ikke en ordnet liste av brikker.

Vi vet at det eksisterer rekker av tillate grunnoperasjoner, også kalt som **algoritmer** som permuterer kun 3 kantbrikker[4], for eks $(x_1, x_2, x_3)_\sigma$ uten å flytte de resterende brikkene i kuben, spesielt $\{x_4, x_5, \ldots, x_8\}$, som resultat av en kommutator [5]. Om vi ønsker å heller flytte noen av brikkene $x_i \in \{x_4, x_5, \ldots, x_8\}$, kan vi gjøre tillate permutasjoner som setter brikken x_i på plassen x_3 uten å endre posisjonen til $\{x_1, x_2\}$. Så, med andre ord det finnes algoritmer som sender kan danner permutasjonen $(x_1, x_2, x_i)_\sigma$ der $x_i \in \{x_3, x_4, \ldots, x_8\}$.

[4] Algoritmene for Rubiks kuben blir presentert på side 44

[5] Les gjerne seksjonen om kommutator på side 37

Ved hjelp av å sammensette sykeler av 3 brikker, kan vi generere gruppen av partall permutasjoner av brikkene, i følge teorem 13. Siden identitetselement er element gruppen av partall permutasjoner, så kan vi sette alle brikkene på riktig plass ved å bruke en følge tillate konjugatorer og kommutatorer, eventuelt ved å gjøre en en tillatt grunnoperasjon av type, for eks. U for å sørge at $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$. Med andre ord, det eksisterer en tillatt operasjon t_k som setter alle kantbrikkene på riktig plass, evt. uten å ha riktig dekorasjon. Det samme argumentet gjelder for eksistensen den tillate operasjonen t_h av hjørnebrikkene som setter dem på riktig plass. Så $(t_h \circ t_k) \diamond [(\sigma, \rho), (f, h)] = [(e, e), (f^*, h^*)]$.

Når vi først er i tilstanden $[(e, e), (f^*, h^*)]$, kan vi observere at siden vi antok at kravene 2. og 3. også gjelder, det finnes et partall antall kanter som må dekoreres til 0, og antall kanter som har dekorasjonen 1 er det samme som antall kanter som har dekorasjonen 2. Vi viser senere at det finnes algoritmer som kun endrer dekorasjonen til 2 kanter, eller som kun øker dekorasjonen til en hjørne med 1 samtidig som den synker dekorasjonsverdien til et annet hjørne med 1. Dermed kan vi løse en Rubiks kube dersom den er gitt i den konfigurasjonen der kravene nedenfor gjelder.

□

Korollar 3. Antall tillate konfigurasjoner en Rubiks kube kan ha er:

$$\frac{1}{12} \cdot 12! \cdot 8! \cdot 3^8 \cdot 2^{12} \, |K| = |T_{Rubik}| = \frac{|G^*|}{12} = \frac{1}{12} \cdot 12! \cdot 8! \cdot 3^8 \cdot 2^{12}$$
$$= 2^{27} \cdot 3^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$$

Bevis. Vi har 12! måter å plassere hjørnene i kuben, og 8! måter å plassere kantene, uten å ta hensyn på dekorasjonen. Hver av de 8 hjørnene kan dekoreres på 3 forskjellige måter og hver av de 12 kantene kan dekoreres på 2 måter, så totalt har vi $|G^*| = \frac{1}{12} \cdot 12! \cdot 8! \cdot 3^8 \cdot 2^{12}$.

Men i følge teorem 16 når vi plasserer 11 hjørner, så er dekorasjonen til det siste hjørnet allerede bestemt slik at kuben er løsbart, tilsvarende for kantene. I tillegg til dette etter å ha plassert hjørnene bestemmer vi pariteten til kantene, siden de skal være like. Dermed har vi et faktor på $3 \cdot 2 \cdot 2$ situasjoner som ikke kan tas med når vi ser på gruppen av tillate permutasjoner. □

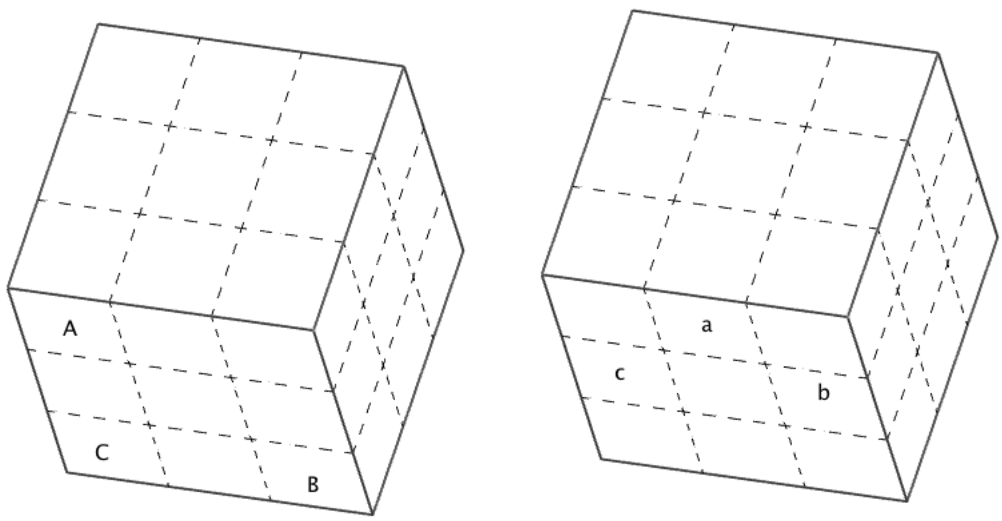
Nyttige algoritmer som inngår i beviset og som hjelper å løse kuben:

Først og fremst vil jeg påpeke at algoritmene leses fra venstre til høyre, dvs. vi virker først på spillet den operasjonen som ligger yters til venstre og så innover.

Ellers vil jeg introdusere begrepene kommutator og konjugator, som vi skal se mer formell i seksjonen **Kommutatorer** på side 51. Foreløpig holder det å vite at en kommutator er en operasjon av type $x \circ y \circ x' \circ y'$, som har egenskapen til å holde fiksert mange av brikkene som blir virket på av operasjonen. En **konjugator** er en operasjon av type $x \circ y \circ x'$.

Dersom vi ønsker å permutere tre hjørner A, B, C, med sykelen $(A, B, C)_\sigma$, kan vi for eksempel sette hjørnene i samme posisjon som i figuren nedenfor ved å gjøre en del tillate bevegelser $t \in T_{Rubik}$.

Analog gjør vi for kantene a, b, c om vi ønsker sykelen $(a, b, c)_\sigma$,

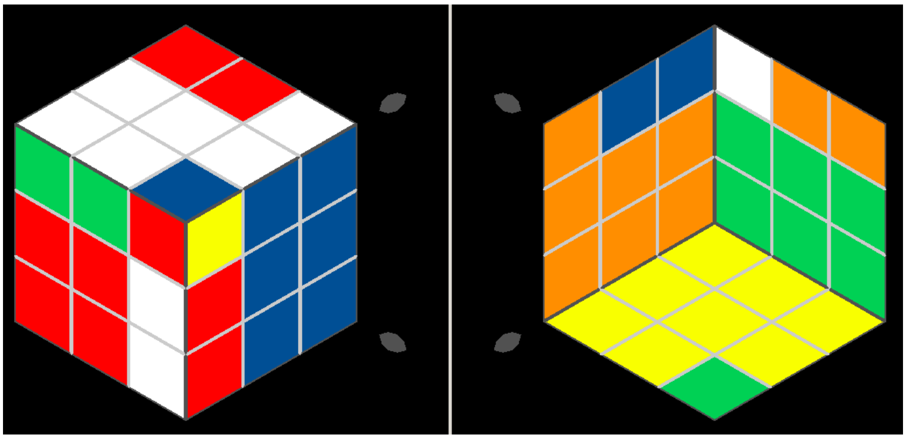


(a) Brikkene A, B, C (b) Brikkene a, b, c

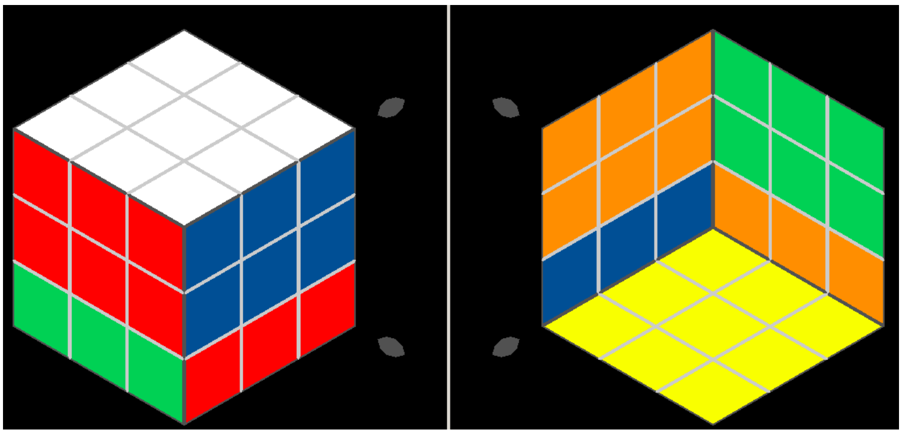
Figur 8

Når vi først har brikkene som det står i figuren, kan vi bruke kommutatorer for å utføre sykelen $(A, B, C)_\sigma$, dvs, alle brikker forblir på samme plass, unntatt a som sendes til b, b til c og c til a.

Kommutatoren for hjørnene kan for eksempel være gitt ved $x = (H \circ O \circ H')$ og $y = U'$



(a) $x \diamond I_K = (H \circ O \circ H') \diamond I_K$



(b) $(U') \diamond I_K$

Figur 9: I_K under ulike virkninger.

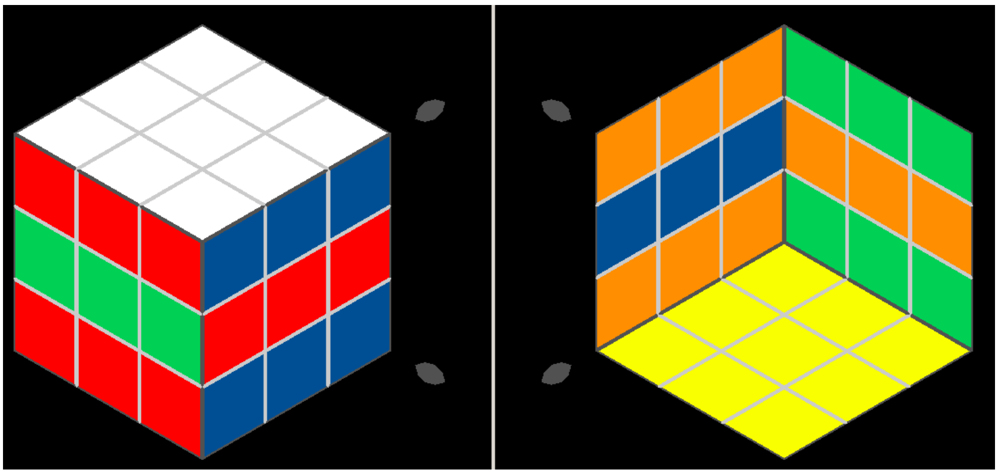
Brikkene A, B, C kan for eksempel være brikkene *Hvit-rød-grønn*, *Gul-rød-blå* og *Gul-grønn-rød* henholdsvis i startkonfigurasjon.

Vi ser at den eneste brikken som er felles i operasjonen x og y er brikken B. Observer at med en gang vi utfører x, så vil brikken A komme til plassen til brikken B. Når vi utfører y, erstatter vi brikken A med C, slik at når vi gjør y', brikken C går tilbake til plassen A, vi avslutter med å gjøre y' for å få igjen brikken A på plassen til B. Dette er som vi forventet ut fra seksjonen **Kommutatorer** på side 51 i denne artikkelen.

Vi ser også omtrent med en gang hvilken kommutator lønner seg for å permutere kantene a, b, c på formen (A, B, C). Det er ganske tydelig vi kan bruke det samme $x = (H \circ O \circ H')$, men i sted for rotere den nedre siden U', vi roterer den *nest nedre siden*, som blir representert ved M'_U på 90° mot klokken i forhold til undersiden, så vi lar $y = M'_U$ i stedet. [6]

En annet mer formell algoritme som gjør den samme permutasjonen av kantene, basert kun på grunnoperasjonene vi hadde definert i utganspunktet er:

$$(V' \circ O') \circ (F' \circ U \circ F \circ U') \circ (U \circ V') = (V' \circ O' \circ F' \circ U \circ F \circ V')$$



Figur 10: $M'_U \diamond I_K$

[6]Når vi innfører nye grunnoperasjoner bør vi omfatte dette om en variasjon av vri- og flyttespill, i dette tilfellet hvor vi får lov å permutere sentrumbrikkene så vi får at $S_Z = S_6$ i sted for e_Z. Når man lager algoritmer er disse detaljene mindre interessante, men vi tar med oss en *formell* algoritme som ikke bruker M_U, men som heller ikke kan fiksere hjørnene: så det anbefales å bruke denne *formelle* algoritmen for å permutere og dekorere kantene, før man bruker algoritmen på hjørnene.

Konklusjon: vi kan utføre kommutatoren:$K_{kanter} = (H \circ O \circ H') \circ M'_U \circ (H' \circ O' \circ H) \circ M_U$ for å permutere kantbrikkene a, b, c i dersom de er plassert som i figuren, evt. bruker vi en konjugator $t \circ K_{kanter} \circ t'$, om brikkene a, b, c ikke sto som i bilde for å begynne med.

Vi kan også utføre kommutatoren: $K_{hjørner} = (H \circ O \circ H') \circ U' \circ (H \circ O \circ H')' \circ (U')' = H \circ O \circ H' \circ U' \circ H' \circ O' \circ H \circ U$ og permutere hjørnebrikkene A, B, C dersom de er plassert som i figuren, evt. bruker vi konjugatoren $t \circ K_{hjørner} \circ t'$.

Disse to algoritmene viser seg å være gode nok til å plassere riktig brikkene i kuben.

I hvert fall disse kommutatorene genererer:

$$\{((\sigma, \rho), (f, h)) \in G \mid \text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\rho) = 1\}.$$

Naturligvis hvis vi oppdager at $\text{sign}(\sigma) \cdot \text{sign}(\rho) = -1$ i kuben, så holder det å rotere en av sidene $90°$ og så løse kuben videre ved å bruke disse kommutatorene.

For å dekorere riktig brikkene har vi flere muligheter. Den ene er denne:

1. Sørg for at alle brikkene ligger på riktig plass, dvs. $K = [(e, e), (f, h)]$.

2. Bestem et par brikker som skal dekoreres riktig, for eks $x_1, x_2 \in X$, som er hjørner. gjør en operasjon m_{x_2}som setter brikken x_2 én kant unna x_1, slik at de ligger på samme siden av kuben, vi sier oversiden.

3. Virk på kuben en operasjon m_{dekor} som er slik at m_{dekor} endrer dekorasjonen $f(x_1)$ til $f(x_1) + n$, uten å endre posisjonen eller dekorasjonen til oversiden.

4. Roter oversiden, slik at brikken x_2 blir i posisjonen til x_1.

5. Virk på kuben operasjonen m'_{dekor}. Da vil den endre på oversiden av kuben kun dekorasjonen $f(x_2)$ til $f(x_2) - n$, og samtidig sette på riktig plass og riktig dekor de resterende brikkene som ikke er på oversiden av kuben.

6. Roter tilbake oversiden av kuben, slik at brikken x_2, slik at brikken x_1 går på plassen der x_2 ligger.

7. Virk på kuben operasjonen m'_{x_2}, som vil sette alle brikkene på riktig posisjon.

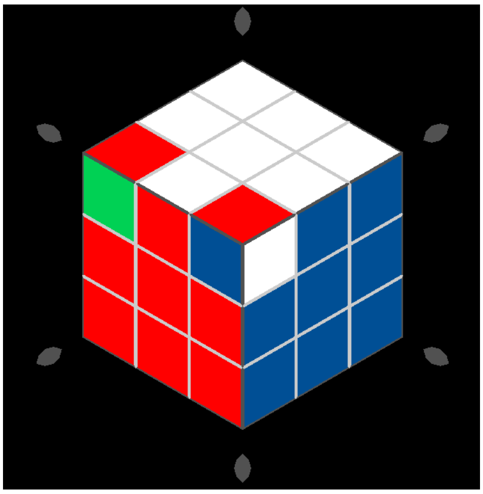
Vi ser at dette har endret dekorasjonen til to brikker, det samme kan man gjøre for kantene. Det å finne algoritmen m_{dekor} er litt mer utfordrende for kanter enn for hjørner, siden vi må sørge for å holde hjørnene på plass og dekorasjon mens den ene kanten endrer dekorasjon, men denne algoritmen eksisterer allikevel, bare at den krever mange *trekk*[7].

Observer at denne listen av operasjoner, spesielt stegene $2.-7.$ er ikke mer enn en detaljer beskrivelse av operasjonen $m_{x_2} \circ (m_{dekor} \circ R \circ m'_{dekor} \circ R') \circ m'_{x_2} = z \circ (x \circ y \circ x' \circ y') \circ z'$. Nemlig, en konjugator til en kommutator.

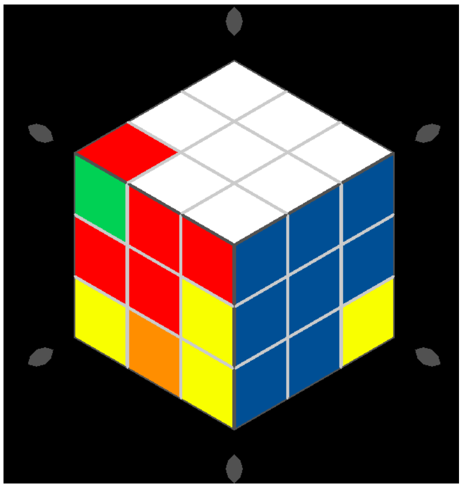
En annet metode for å orientere brikker er det å sette brikkene på plass allerede orientert, for å gjøre dette er man ofte nødt til å gjøre lengre algoritmer enn K_{kanter} og $K_{hjørner}$ tidligere presentert, men det kan være veldig nyttig for å spare tid eller antall trekk.

Se bilde nedenfor som viser et eksempel av dekorasjon av hjørner med operasjonen $m_{dekor} = (H' \circ U' \circ H \circ U \circ H' \circ U' \circ H)$.

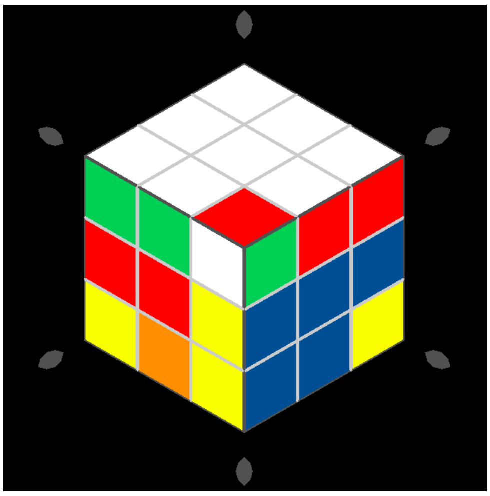
[7]En trekk er en rotasjon av kantene. Det å virke to ganger en rotasjon på 45° regnes som et trekk, så det å definere hva et trekk er varierer fra litteratur til litteratur.



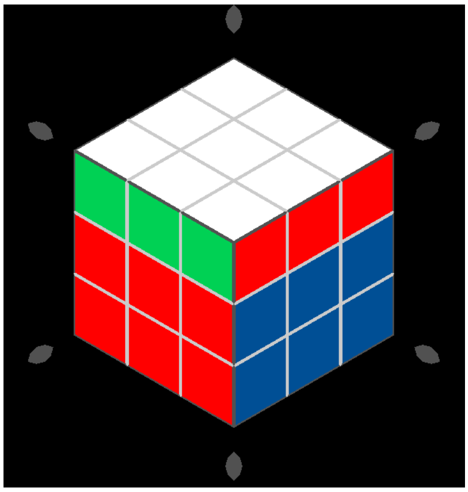
(a) $K = [(e, e), (f, h)]$



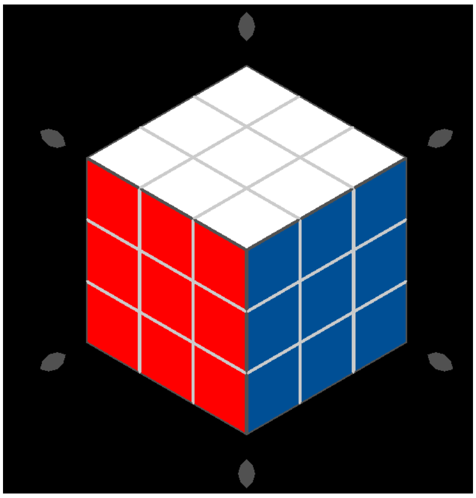
(b) $m_{dekor} \circ K$



(c) $(O \circ m_{dekor}) \diamond K$



(d) $(m'_{dekor} \circ O \circ m_{dekor}) \diamond K$



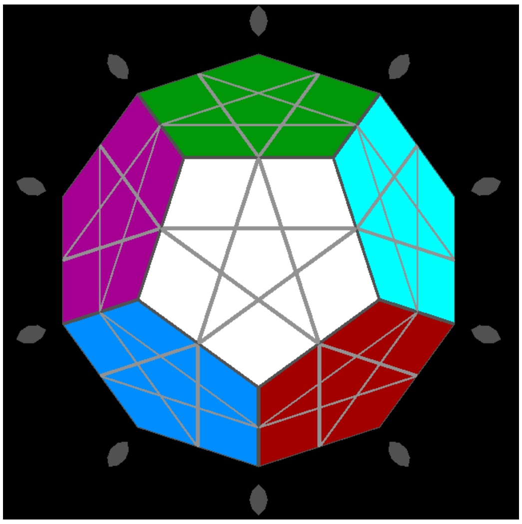
(e) $(O' \circ m'_{dekor} \circ O \circ m_{dekor}) \diamond K$

Figur 11

Derfor er det mange som løser Rubiks kuben på følgende måte:

1. Sette hvite kantene på riktig plass og dekorasjon.
2. Sette hvite hjørner på plass og dekorasjon
3. Bruke kommutatorer for å sette de ikke gule kantene på plass og dekorasjon.
4. Sette de gule kanter og hjørner på plass.
5. Dekorere kantene og hjørnene.

Om man er godt kjent med Rubiks kube, kan man slå sammen stegene 2. og 3. og så gjøre steg 5. før man gjør steg 2. Denne sistnevte metoden heter *Fridrich Rubiks kube metode*. Som man kan anvende for andre type vri og flyte spill av type 3-dimensjonale regulære vri- og flyttespill som har rotasjonsaksene i sentrum av sidene. For eksempel $n \times n \times n$ vofs som deler mekanismen til Rubiks kube, men med utseende som heksaeder og dodekaeder; der n er antall brikker på hver kant av legemet.



Figur 12: Megaminx: $3 \times 3 \times 3$ dodekaeder.

Del IV

Strategier for løsninger til vofs.

I denne seksjonen skal vi se hvordan vi kan løse et vilkårlig vri- og flyttespill. Først og fremst definerer vi hva kommutator og konjugator er, for så å kunne bruke dem for å lage våre egne algoritmer som kan løse et vofs. Vi bruker også et konkret eksempel som illustrerer den generelle strategien, og hvilke spesielle situasjoner kan oppstå dersom vi prøver å forenkle spillene ved å bruke undergruppen til symmetrigruppen som hører til spillet.

Noe av inspirasjonen bakk det praktiske delen av denne seksjonen er hentet fra [Menrigh (2006)] og [Menrigh (2006)].

Kommutator og konjugator.

Kommutator:

La $(T_n, \circ)$ være gruppen alle mulige sammensetninger av tillate permutasjoner som virker på mengden B_n av n brikker på et vofs. $(T_n, \circ) \subseteq (S_n, \circ)$ siden S_n kan tolkes som alle mulige permutasjoner av de n brikkene.

La $x, y \in T_n$ være slik at x og y virker på ulike mengder $C, D \subseteq B_n$, der snittet $C \cap D$ er $\{a\}$.

Vi kaller sammensetning $x \circ y \circ x' \circ y'$, for en **kommutator**. Fra latin **commutare** som betyr å bytte. Minner om at vi leser fra venstre til høyre.

Dersom x,y virker på disjunkte menger, kaller vi dem for **disjunkte operasjoner**. En kommutator av disjunkte operasjoner fikserer alle elementer.

Vi bruker syklisk notasjon:

$x = (a, x(a), \ldots, x^{m-1}(a)) \circ r$ og $y = \big(a, y(a), \ldots, y^{k-1}(a)\big) \circ s$.

Eksempler på kommutatorer kan man lese på side 58.

Her er noen av de mest vanlige tilfeller man møter under løsningen av et vofs.

Type I

Vi antar at $(a, x(a), \ldots, x^m(a)), \big(a, y(a), \ldots, y^k(a)\big), r, s \in S_n$ disjunkte sykeler med untak av elementet a. Dette impliserer at de kommuterer, med unntak av $(a, x(a), \ldots, x^m(a)), \big(a, y(a), \ldots, y^k(a)\big)$.

Dermed har vi at :

$x \circ y \circ x' \circ y'$
$= [(a, x(a), \ldots, x^{m-1}(a)) \circ r] \circ \big[\big(a, y(a), \ldots, y^{k-1}(a)\big) \circ s\big]$
$= (a, x(a), \ldots, x^{m-1}(a)) \circ r \circ \big(a, y(a), \ldots, y^{k-1}(a)\big) \circ s$
$\circ r' \circ (a, x(a), \ldots, x^{m-1}(a))' \circ s' \circ \big(a, y(a), \ldots, y^{k-1}(a)\big)'$
$= (a, x(a), \ldots, x^{m-1}(a)) \circ \big(a, y(a), \ldots, y^{k-1}(a)\big)$
$\circ (a, x^{m-1}(a), \ldots, x(a)) \circ \big(a, y^{k-1}(a), \ldots, y(a)\big) \circ [r \circ r'] \circ [s \circ s']$
$= \big(a, x(a), \ldots, x^{m-1}(a), y(a), \ldots, y^{k-1}(a)\big)$
$\circ \big(a, x^{m-1}(a), \ldots, x(a), y^{k-1}(a), \ldots, y(a)\big) \circ e \circ e$
$= \big(a, y^{k-1}(a), x^{m-1}(a)\big)$

Legg merke til at $x \circ x^{m-1}(a) = a$ og derfor $x \circ x^{m-1} = e$ dermed $x^{m-1} = x^{-1}$. Så i praksis har vi at:

$$x \circ y \circ x' \circ y' = (a, y^{-1}(a), x^{-1}(a)).$$

Dersom vi ønsker å gjøre permutasjonen $\bigcirc_{i=1}^{l} (x^{-1}(a), a, y^{-1}(a))$ gjør vi tillate permutasjoner x, y på følgende måte: $x \circ y \circ x' \circ y'$. Selv om dette ser ikke så trivielt ut, i praksis er det ganske intuitiv å bruke denne algoritmen, siden vi sender vi starter med å ønske å flytte $x^{-1}(a)$ til a og det første steget er nemlig x.

Observasjon:

$$x' \circ y' \circ x \circ y = (x \circ y \circ x' \circ y')' = (a, x^{-1}(a), y^{-1}(a)).$$

For de andre type situasjonene som kan oppstå er fremgangsmåten til beviser ganske likt som på Type I, så vi tar med oss bare de viktigste delene.

Type II

En spesielt situasjon som kan oppstå er at en brikke $b \in \{x(a), \dots, x^{m-1}(a)\}$ når $b \in C \cap D$. dvs. at to av felles brikkene deler samme bane $\mathcal{O}_a = \{a, x(a), \dots, x^{m-1}(a)\}$, men ikke ligger en permutasjon unna hverandre. I det tilfellet vil vi fremdeles kunne skrive x som $(a, x(a), \dots, x^{m-1}(a))$, men vi skriver ikke to ganger den samme sykelen.

Anta at $b = x^{\bar{n}}(a) = y^{\tilde{n}}(a)$. $\bar{n} \leq m-2$, $\tilde{n} \leq k-2$.

Legg merke til at $x^{\bar{n}-1}(a) = x^{-1}(b)$ og $y^{\tilde{n}-1}(a) = y^{-1}(b)$.

$x \circ y \circ x' \circ y'$

$= (a, x(a), \dots, x^{\bar{n}-1}(a), b, x^{\bar{n}+1}(a), \dots, x^{m-1}(a))$

$\circ \left(a, y(a), \dots, y^{\tilde{n}-1}(a), b, y^{\tilde{n}+1}(a) \dots, y^{k}(a)\right)$

$\circ (a, x^{m}(a), \dots, x^{\bar{n}+1}(a), b, x^{\bar{n}-1}(a), \dots, x(a))$

$\circ \left(a, y^{k}(a), \dots, y^{\tilde{n}+1}(a), b_i, y^{\tilde{n}-1}(a) \dots, y(a)\right) \circ r \circ r' \circ s \circ s'$

$= \left(a, y^{k-1}(a), x^{m-1}(a)\right) \circ \left(b, y^{\tilde{n}-1}(a), x^{\bar{n}-1}(a)\right)$

$= (a, y^{-1}(a), x^{-1}(a)) \circ (b, y^{-1}(b), x^{-1}(b))$

Så vi fikk det vi forventet, omtrent det samme resultatet som med Type I.

Type III

Dersom vi lar nå $b \in \{x(a), y(a)\}$ når $b \in C \cap D$ vil vi mer kaotiske eller overraskende resultater når vi kommuterer. La $b = x(a)$

$x \circ y \circ x' \circ y'$

$= (a, b, x^2(a), \dots, x^{m-1}(a))$

$\circ \left(a, y(a), \dots, y^{\tilde{n}-1}(a), b, y^{\tilde{n}+1}(a) \dots, y^{k-1}(a)\right)$

$\circ (a, x^{m-1}(a), \dots, x^2(a), b)$

$\circ \left(a, y^{k-1}(a), \dots, y^{\tilde{n}+1}(a), b, y^{\tilde{n}-1}(a) \dots, y(a)\right) \circ r \circ r' \circ s \circ s'$

$= \left(a, b, y^{\tilde{n}-1}(a), y^{k-1}(a), x^{m-1}(a)\right)$

$= (a, b, y^{-1}(b), y^{-1}(a), x^{-1}(a))$

Så vi får permutere 5 om gangen!

Type IV

Tilsvarende resultat får vi når vi lar $b = y(a)$ i stedet.

$x \circ y \circ x' \circ y'$

$= \left(a, y^{k-1}(a), x^{m-1}(a), x^{\bar{n}-1}(a), b\right)$

$= (a, y^{-1}(a), x^{-1}(a), x^{-1}(b), b)$

Observasjon:

Denne typen er symmetrisk med forrige type, pga. vi kunne ha satt $x \circ y \circ x' \circ y' = (y' \circ x' \circ y \circ x)'$. Så vi ha erstattet x med y i forrige resultat og invertert rekkefølgen. Denne resultatet kan vi bruke for å gjøre det enklere å finne ut konjugerte i motsatt rekkefølge.

Type V

Men det blir enklere når $b = x(a) = y(a)$ (eventuelt $a = x(b) = y(b)$, men pga. symmetrien er det unødvendig å ta det med seg som egen type)

$$= (a, b, x^2(a), \dots, x^{m-1}(a))$$
$$\circ \left(a, b, y^2(a) \dots, y^{k-1}(a)\right)$$
$$\circ (a, x^{m-1}(a), \dots, x^2(a), b)$$
$$\circ \left(a, y^{k-1}(a) \dots, y^2(a), b\right) \circ r \circ r' \circ s \circ s'$$
$$= (a, b) \circ \left(x^{m-1}(a), y^{k-1}(a)\right)$$
$$= (a, b) \circ (x^{-1}(a), y^{-1}(a))$$

Disse er ikke alle tilfeller man kan møte, men er nok de mest vanlige man møter. For eksempel noen kommutatorer kan danne sykeler på 7, men disse lengder er unødvendige vanskelige når vi kommer til løsningen av vofs.

Husk at hensikten er å danne operasjoner som permuterer færrest mulig brikker. I de mest ekstreme tilfeller [8], vil man eventuelt kunne lage kommutatorer av type $X \circ Y \circ X' \circ Y'$, der X eller Y er kommutatorer, for å redusere antall brikker som permuteres til sammen. Det viktigste når man benytter seg av slike kommutator av kommutatorer er å vite hva er felles brikkene a_i for mengdene som blir virket av kommutatorene, og hvilke er brikkene $X^{-1}(a_i)$, $Y^{-1}(a_i)$, siden de er de brikkene som kommer til å bli permuterte i jevne sykeler.[9]

Ofte, når man utfører en kommutator kan man møte en komposisjon av ulike typer men det mulig å sortere hver situasjon fra hverandre ved å være litt nøye.

[8] For eksempel en Starminx II, et vofs i form av dodekaeder hvor det å rotere en av sidene tilsvarer å endre plasseringen til 115 av 245 brikker.

[9] Man kan se at denne påstanden stemmer siden man kan bevise alle mulige tilfelle på samme vis som vi beviste Typene I- V, nesten elementer blir fikserte, med unntak elementene a_i som blir påvirket av operasjonene $x$og y, og elementene $x^{-1}(a_i), y^{-1}(a_i)$.

En observasjon er at inversen til $x \circ y \circ x' \circ y'$ er $y' \circ x' \circ y \circ y$, og brukes dersom vi vil invertere permutasjonen av brikkene, for eks, i sted for å rotere posisjonen deres med klokke, så roteres de mot klokken. Selv om denne observasjonen kan virke triviell, det er nyttig for forståelsen av konstruksjonen av egne algoritmer.

Teorem 17. Alle kommutatorene er jevne permutasjoner.

Bevis. Vi har sett at i alle typene så er de jevne permutasjonene. For å se det mer direkte kan ma også observere at siden de er på formen $x \circ y \circ x' \circ y'$, og $\operatorname{sign}(x) = sign\,(-x)$ har vi at:

$$\operatorname{sign}(x \circ y \circ x' \circ y') = \operatorname{sign}(x)^2 \cdot \operatorname{sign}(y)^2 = 1$$

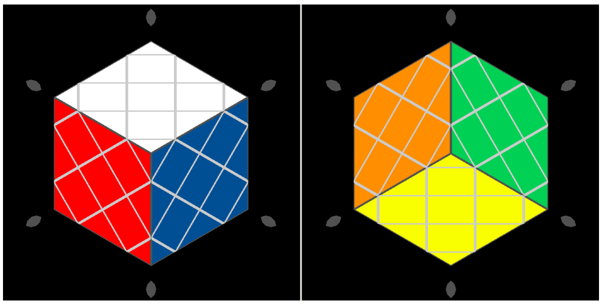
$\square$

Bruken av kommutatorer for å løse tilfeldige vofs.

Vi kan prøve å bruke disse resultatene for å løse et vri- og flyttespill som heter **master skewb**.

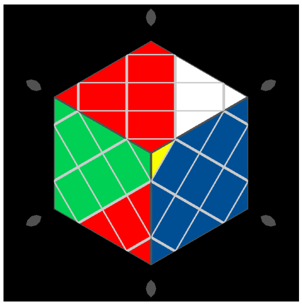
Vi virker på kuben permutasjonene x og y som vi ser på figuren nedenfor.

x permuterer mengden C av brikker mens y permuterer mengden D. I unionen av dem har vi den ene diagonale hvite stripen som består av 3 blå **bladbrikker** a_1, a_2, a_3 inkludert senatrumbrikken, og 2 hjørnebrikker b_1, b_2.

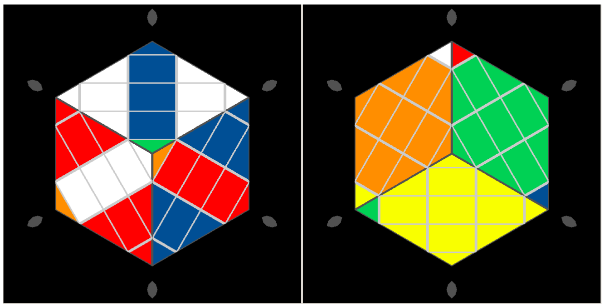


(a) Start konfigurasjon I_K til en **master skewb**.

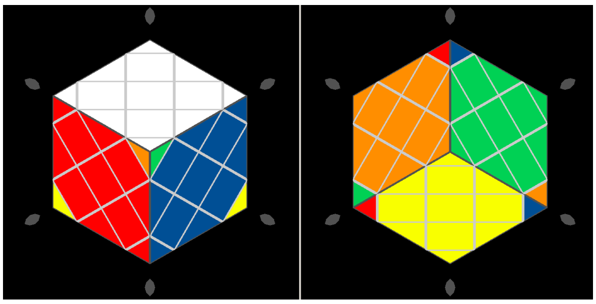
(b) $x \diamond I_K$



(c) $y \diamond I_K$



(d) $x \circ y \circ x' \circ y'$



(e) $(x \circ y \circ x' \circ y')^3 \diamond I_K$

Figur 13: Hvordan ulike permutasjoner virker på startkonfigurasjon.

Siden bladbrikkene i sekvensen ikke går i samme baner, så får vi en enkelt permutasjon av dem på orden 3 på hver av banene. Men hjørner deler konsekutiv samme bane, så de inntreffer Type V.

I samlingen av figurer 13 ser vi at om vi virker $x \circ y \circ x' \circ y'$ på startkonfigurasjonen vil de fleste brikkene, 37 av 50, forblir i den samme konfigurasjon som i starten, og av fra de resterende 13 brikkene, 9 av dem utfører en permutasjon av type $\bigcirc_{i=1}^{3} \left(x^{-1}\left(a_i\right), a_i, y^{-1}\left(a_i\right)\right)$. Det er ikke tilfeldig at jeg kalte bladbrikkene for a_1, a_2, a_3.

De 4 siste følger ikke samme mønster, så det å utføre $(x \circ y \circ x' \circ y')$ ikke vil hjelpe oss å holde brikkene under fullstendig kontroll.

Når vi utfører $(x \circ y \circ x' \circ y')^3$ har disse 4 brikkene en hel tydelig mønster, de transponeres parvis, et jevn beholder dekorasjonen mens det andre paret får en ny dekorasjon. Dette kunne vi ha forutsatt som en konsekvens av at hjørnebrikker inntreffer Type V og derfor permuterer alltid 4 hjørner parvis. Mer om dekorasjon kommer senere i artikkelen.

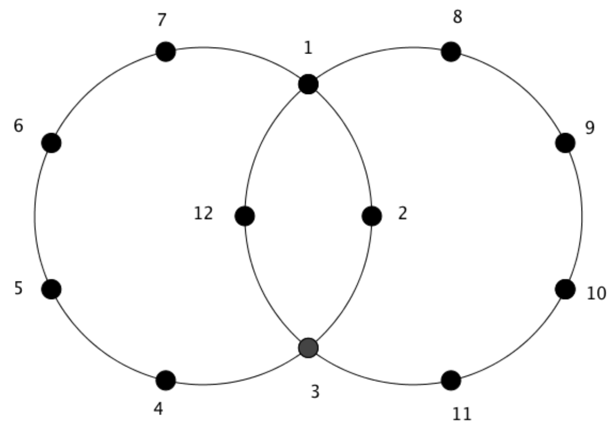
Vi kan konkludere at vi kan skissere løsningen av dette type vofs til følgende algoritmen:

1. Gjør at på hver side, alle motstående blader har samme farge.
2. Bruk algoritmen $x \circ y \circ x' \circ y'$ på brikker som deler en felles diagonal frem til alle sider har kun ett farge (forhåndsdefinert ut fra fargekoden til vofset), med unntak av hjørner som kan ha tilfeldige farger.
3. Bruk algoritmen $(x \circ y \circ x' \circ y')^3$ for å flytte hjørnebrikkene 4 og 4 til deres opprinnelig posisjon.
4. Bruk algoritmen $(x \circ y \circ x' \circ y')^3 \circ (x' \circ y' \circ x \circ y)^3$ for å dekorere hjørnebrikkene parvis.

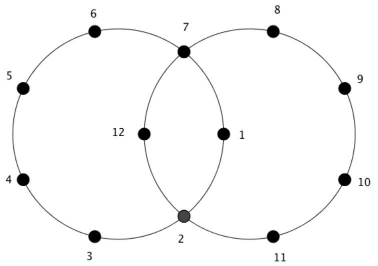
Det kan eksistere kortere algoritmer enn det å bruke sammensetningen $(x \circ y \circ x' \circ y')^3 \circ (x' \circ y' \circ x \circ y)^3$ for å dekorere 2 brikker. Det finnes mange algoritmer for de ulike typene $vofs$ som kan redusere antall *trekk*, men disse algoritmene jeg presenterer i denne artikkelen gjelder for hvert enkelt vofs, i motsetning til mange *korte algoritmer* som gjelder for vofs som deler den samme strukturen.

Eksempel 6. Et eksempel på et vofs som kan oppfatte mange tilfeller er Ungarske Ringer, som vi har presentert tidligere. Vi ser på ulike variasjoner av spillet, ved å endre antall brikker men beholde de samme grunnoperasjonene.

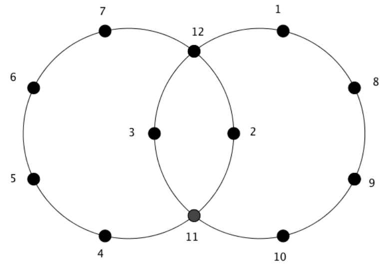
La oss ha spillet på startkonfigurasjon og virke syklene v og så h på mengden av brikkene $[1, 2, \ldots, 12]$, der.
$v = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$
$h = (3, 12, 1, 8, 9, 10, 11)$



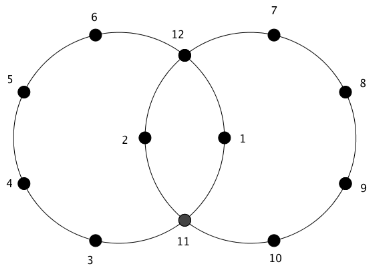
Figur 14: Startkonfigurasjon.



(a) $v \diamond I_K$



(b) $h \diamond I_K$



(c) $(v \circ h) \diamond I_K = h \diamond (v \diamond I_K)$

Figur 15: $7, 7$- ungarske ringer

Vi ser at $\{1, 3\}$ er mengden av elementer som blir påvirket av begge permutasjonene.

$v \circ h = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \circ (3, 12, 1, 8, 9, 10, 11)$

$= (1, 2, 12) \circ (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$

Legg merke til at $h \circ v \neq v \circ h$.

$h \circ v = (3, 12, 1, 8, 9, 10, 11) \circ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

$= (2, 3, 12) \circ (1, 8, 9, 10, 11, 4, 5, 6, 7)$.

Observer også at som forventet nøyaktig 6 elementer endrer plass ved å bruke kommutatoren:

$v \circ h \circ v' \circ h' = h \circ v \circ (h \circ v)'$

$= (1, 2, 12) \circ (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11) \circ (2, 12, 3) \circ (1, 7, 6, 5, 4, 11, 10, 9, 8)$

$= (1, 12, 7) \circ (2, 3, 11)$

Legg merke til at v og h virker på elementene 1 og 3 som deler samme bane, men som vi har sett i type II, dette gjør ikke noe.

På den andre siden har vi at kommutatoren nedenfor permuterer 4 elementer:

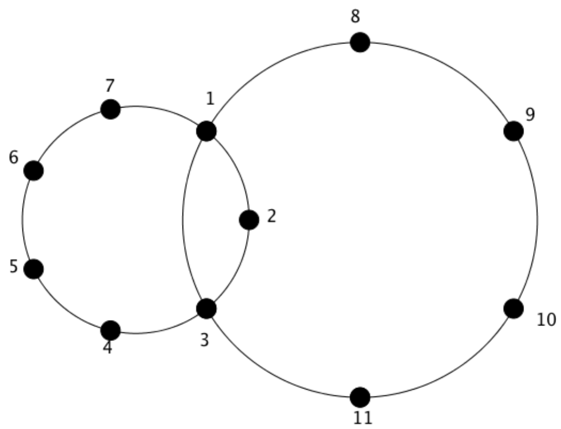
$v^2 \circ h^2 \circ v^{-2} \circ h^{-2} = (1, 3) \circ (6, 9)$

Dette er slik pga $v^2(1) = 3 = h^{-2}(1)$ så sykelene for h^2 og v^2 ikke er disjunkte. $(1, 3)$

Dersom vi gjør en variant, en $7, 6$- ungarsk ring vil vi møte type III og IV med de samme grunnoperasjonene:.

$v = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

$h = (3, 1, 8, 9, 10, 11)$



Figur 16: $7, 6$-ungarske ringer

Mengden $\{1, 3\}$ blir påvirket av begge baner, men nå er $h(3) = 1$, så om vi gjør kommutatoren $v \circ h \circ v' \circ h'$vil vi få en permutasjon på orden 5:

$v \circ h \circ v' \circ h' = (3, h^{-1}(3), v^{-1}(3), v^{-1}(1), 1) = (3, 11, 2, 7, 1)$

$h \circ v \circ h' \circ v' = (3, 1, v^{-1}(1), v^{-1}(3), h^{-1}(3)) = (3, 1, 11, 2, 7)$

Det var lett å finne dem ved å bruke resultatene fra type IV og III henholdvis.

Konjugator:

Et annet verktøy som brukes for løsningen av vofs er konjugatorer.

La $x, y \in T_n$ være slik at x og y virker på ulike mengder $C, D \subseteq B_n$, der snittet $C \cap D$ er $\{a_i\}$.

Vi kaller sammensetning $x \circ y \circ x'$, som en **konjugator**. Vi skal se på hvordan konjugator virker på en mengde av brikker.

Dersom x, y virker på disjunkte mengder vil $x \circ y \circ x' = y$.

La nå $(a, x(a), \ldots, x^{m-1}(a)), \left(a, y(a), \ldots, y^{k-1}(a)\right), r, s \in S_n$ virke på disjunkte mengder, unntatt elementet a.

Da har vi at:

$x \circ y \circ x'$

$= (a, x(a), \ldots, x^{m-1}(a)) \circ r \circ \left(a, y(a), \ldots, y^{k-1}(a)\right) \circ s$

$\circ \left((a, x(a), \ldots, x^{m-1}(a)) \circ r\right)'$

$= \left(x^{m-1}(a), y(a), \ldots, y^{k-1}(a)\right) \circ s$

$= (x^{-1}(a), y(a), \ldots, y^{-1}(a)) \circ s$

Dette er omtrent helt likt permutasjonen y , men én av elementene a ble byttet med elementet $x^{-1}(a)$. Med andre ord, dersom vi ønsker å gjøre en permutasjon y med unntak av ett element a, kan man bruke en annet sykel som også inkluderer det sistnevnte elementet og som sender elementet $x^{-1}(a)$ til a, og bruke dette under konjugasjonen $x \circ y \circ x'$.

Den beskrevet konjugatoren er kun en av typene, akkurat som med kommutatorer kan man se nøyere på hver tilfelle, men de kan virke mer forvirrende enn illustrerende, spesielt for hensikten vår: å lage en løsning for et vofs.

Man kan sette flere konjugatorer samtidig, slik at vi evt. kan endre alle elementene som operasjonen y skal virke, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ på med helt nye elementer $\left\{x_1^{-1}(a_1), x_2^{-1}(a_2), \ldots, x_n^{-1}(a_n)\right\}$, gitt at operasjonene x_i eksiterer og er disjunkte med hverandre og med y, unntatt parvis:

$$\left(a_i, x_i(a_i), \ldots, x_i^{-1}(a_i)\right), (a_i, y(a_i), \ldots, y^{-1}(a_i)) \ \forall i.$$

Denne egenskapen kan man bruke flere ganger, dvs. lage konjugator av konjugatorer for å erstatte enda flere elementer virket av sykelen y mens man beholder det samme strukturen som i sykelen, eventuelt kan man endre alle.

Legg merke til at disse sammensetninger vil ikke være noe annet en en ny konjugator.

$w \circ (x \circ y \circ x^{-1}) \circ w^{-1} = (w \circ x) \circ y \circ (w \circ x)^{-1}$.

Naturligvis når man prøver å løse $vofs$ er det ganske fornuftig å kunne bruke konjugatorer i tillegg til kommutatorer, siden konjugatorene også fikserer mange elementer. Dessverre vil mengden som blir permutert av kommutatoren $x \circ y \circ x^{-1}$ bestå av like mange elementer som y .

Siden konjugatorer $x \circ y \circ x^{-1}$ beholder strukturen til operasjonen y, kan man bruke dem spesielt under løsningen av konfigurasjoner som krever odde permutasjoner, ved å la y være odd og prøve å fiksere flest mulige brikker. Denne egenskapen er sentral under løsningen av de såkalte paritetsproblemer presentert i neste seksjon.

For løsningen av et vofs vil dette implisere for enkelte konfigurasjoner kan det lønne seg å bruke konjugatorer i sted for kommutatorer, men siden grunnoperasjoner pleier å permutere altfor mange brikker, vil vi heller bruke konjugatorer av kommutatorer som regel.

Korollar 4. .En konjugator av kommutatorer er en kommutator av konjugatorer:

$$z \circ (x \circ y \circ x' \circ y') \circ z' = (z \circ x \circ z') \circ (z \circ y \circ z') \circ (z \circ x \circ z')' \circ (z \circ y \circ z')' .$$

Korollar 5. Selv om ikke alle konjugatorer er jevne, for eks. $(1,2) \circ (2,3) \circ (2,1) = (1,3)$ som er odd, er alle konjugatorer av kommutatorer jevne, som en konsekvens av at kommutatorer er jevne.

$G_{Kommutator} = \langle t_i \circ t_j \circ t_i' \circ t_j' \mid t_j, t_j \in G \rangle$, også kalt kommutator-undergruppen til gruppen $(G, \circ)$, er en normal undergruppe. Den er normal siden for alle elementer i $t_i \circ t_j \circ t_i' \circ t_j' \in G_{Kommutator}$ og alle $g \in G$ har vi at pga. korollar4 på denne siden:

$g \left(t_i \circ t_j \circ t_i' \circ t_j' \right) g' \in G_{Kommutator}$

Løsning av et generelt vri- og flyttespill, med $4 \times 4 \times 4$ Rubiks kube som eksempel:

Gitt et vri- og flyttespill i startkonfigurasjon. Vi forestiller oss her en ikke-trivielt spill hvor det går annet å lage minst to operasjoner som virker på ulike mengde brikker.

Det første man bør gjøre er å studere mekanismen for kuben. Man velger et par ikke-disjunkte simple operasjoner x, y til å være grunnoperasjoner, og dermed danne en variasjon av spillet. Det kan lønne seg å studere disse enkle variasjonene av spillet slik at man kan danne effektive algoritmer som ikke krever lange sekvenser av ulike grunnoperasjoner. Spesielt bør man studere hva som skjer med brikkene når man gjør operasjonen $(x \circ y \circ x' \circ y')^n$ virker på dem.

Som vi har sett kommutatoren $(x \circ y \circ x' \circ y')$ er i stand til å flytte noen brikker, mens *flertallet*[10] forblir i samme posisjon og dekorasjon. Det kan lønne seg å repetere operasjonen $x \circ y \circ x' \circ y'$ flere ganger, slik at dersom noen av brikkene permuteres på sykeler av orden 3 og andre av orden 2 eller 5, man kan fremdeles holde flest mulig av brikkene i samme posisjon og dekorasjon. Det kan være lurt å notere resultatene man får av hver virkning av kommutatoren på brikkene.

Etter at man er kjent med noen *enkle* algoritmer som evt. krever flere repetisjoner, kan man prøve å danne mer kompliserte algoritmer som er mer spesifikke på hvilke brikker de permuterer eller dekorerer. Dette kan man gjøre på følgende måte:

1. Lag kommutator av mindre enkle operasjoner x, y som har som eneste felles brikke én brikke a_1, om dette ikke er mulig, det færrest antallet av felles brikker som lar seg gjøre. Disse kommutatorene vil kunne endre posisjonen til brikkene med jevne permutasjoner. Det er viktig å lære seg disse kommutatorene.

2. Bruk kommutatorene tidligere nevnt til å være i stand til å permutere andre brikker på banen til a_i, uavhengig av hvor de står.

[10] Dette er ikke nødvendigvis sant, det finnes mange avanserte vofs der ute, men poenget er fremdeles det samme

3. Lag kommutatorer eller operasjoner som er i stand til å endre dekorasjonen av få brikker dersom det er nødvendig for spillet.

Ofte velger man kommutatorer som er slik at y er en grunnoperasjon eller så enkelt som mulig. For eksempel i Rubiks kube velger man y til å være det å rotere en av sidene $45°$ eller $90°$.

Man kan eventuelt sette lage en kommutator av kommutatorer eller av konjugatorer for å redusere antall brikker som permuteres. [11]

Hvordan vet man at man har laget nok algoritmer for å løse et vofs? For å kunne svare på det spørsmålet spiller det en sentral rolle pariteten til brikkene i spillet. Hvis en konfigurasjon kan bevises å ikke være mulig, så trenger man naturligvis ikke å bekymre seg om å lage løsninger for denne konfigurasjonen.

I tillegg til dette, må vi huske at pga. noen brikker kan ha en odd paritet i forhold til startkonfigurasjon, vil det ikke holde å bruke kun kommutatorer for å omplassere dem. Dette er fordi kommutatorer er alltid jevne operasjoner. Man vil være nødt til å finne alternativer for bruken av kommutatorer. Disse alternativene er ofte det å gjøre en operasjon som setter alle brikkene i vofset i en jevn posisjon før man bruker de gitte kommutatorer for å løse spillet. Denne operasjonen vil alltid eksistere, men det er nødvendigvis lett å finne frem.

Det å lage kommutatorer for å endre dekorasjoner kan virke utfordrende i noen vofs, siden det ikke er opplagt hvordan man skal finne en operasjon x som kun endrer dekorasjonen til én brikke. Dermed kan det lønne seg å bruke alternativer av type:

- Lag operasjoner som er i stand til å sette brikkene riktig orientert, ved hjelp av kommutatorene til punkt 2. og konjugatorer.

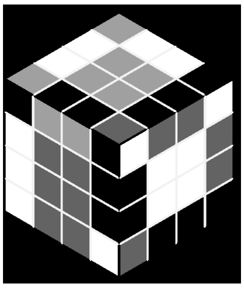
- Dersom det å bruke en kommutator endrer verdien til dekorasjonen til noen av brikkene, lag sammensetninger av slike konjugatorer. Slik at etter sammensetningen brikkene er på riktig plass, men med en ny dekorasjon.

[11] For eksempel har vi brukt en kommutator av konjugator i algoritmene på seksjonen **Nyttige algoritmer som inngår i beviset og som hjelper å løse kuben** på side 44.

Man kan også bruke de samme algoritmene igjen, dersom to spill deler den samme strukturen, eller om gruppen i det ene spillet er en undergruppe av det andre spillet.

Eksempel 7. Sagt det på en annet måte, om man kjenner mange nok algoritmer for å kunne løse en $4 \times 4 \times 4$ Rubiks kube, vil man være i stand til å løse en $3 \times 3 \times 3$ Rubiks kube. Den omvendte implikasjonen stemmer dessverre ikke helt:

Dersom man kun kjenner algoritmer som kan løse en $3 \times 3 \times 3$ Rubiks kube vil man være i stand til å løse noen få talls konfigurasjoner[12] av $4 \times 4 \times 4$ Rubiks kube, for eks. konfigurasjonen i bildet nedenfor:



Figur 17: Enkel konfigurasjon for den som kan løse en $3 \times 3 \times 3$ Rubiks kube.

Det er snakk om kun konfigurasjonen hvor følgende krav er oppfylte:

- På hver side, alle sentrumbrikkene har samme farge-dekorasjon.
- På hver kant, alle kantbrikkene har samme farge-dekorasjon.
- Brikkene sett som en $3 \times 3 \times 3$ Rubiks kube, fyller kravene $1, 2, 3$ i teoremet 16 på side 38.

Dvs., personen som kjenner kun algoritmer for å løse en $3 \times 3 \times 3$ Rubiks kube, bør lage nye algoritmer for å kunne fylle på kravene nevnt ovenfor, og da vil dermed kunne løse en $4 \times 4 \times 4$ Rubiks kube.

[12] Nøyaktig $43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$, men en $4 \times 4 \times 4$ Rubiks kube har $7\,401\,196\,841\,564, 901\,869\,874\,093\,974\,498\,574\,336\,000\,000\,000$

Overraskende nok, dersom man kan kjenner algoritmer for en $4 \times 4 \times 4$ Rubiks kube, så vil man kunne være i stand til å løse alle $n \times n \times n$ Rubiks kuber.

Årsaken til dette er at alle kuber vil bli løst dersom man gjør følgende steg:

1. Sette sentrumbrikkene på riktig side i følge standard startkonfigurasjon, husk at ulike konfigurasjoner regnes som standard startkonfigurasjoner dersom noen av brikkene er identiske i dekorasjonen.

2. Sette sammen kantbrikkene slik at alle kantene har én felles fargedekorasjon.

3. Forsøke å løse kuben som en $3 \times 3 \times 3$ Rubiks kube: Dersom det oppstår noen fremmed situasjoner, det kan brukes algoritmer for en $4 \times 4 \times 4$ Rubiks kube som kan løse dem.

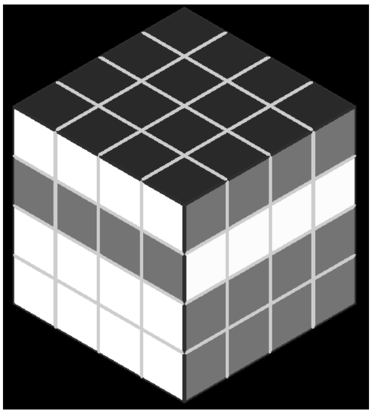
Legg merke til at situasjonene nevnt i punkt 3, oppstår ettersom hver rotasjon av siden på $45°$ på en $4 \times 4 \times 4$ Rubiks kube utgjør en 4-sykel på hjørnebrikkene, en 4-sykel på sentrumbrikkene og to 4-sykeler på kantbrikkene. Dvs. hver enkelt rotasjon på sidene endrer pariteten til hjørnebrikkene og sentrumbrikkene, slik at de har alltid samme verdi, mens kantbrikkene alltid forblir jevne.

Dette er naturligvis ikke vanlig for en $3 \times 3 \times 3$ Rubiks kube, der hjørnebrikker og kantbrikker har samme paritet. Legg også merke til at når jeg snakker om en $3 \times 3 \times 3$ Rubiks kubes kantbrikke så mener jeg at to $4 \times 4 \times 4$ Rubiks kubes kantbrikker slått sammen, tilsvarende er en sentrumbrikker på den ene det samme som fire sentrumbrikker slått sammen for den andre.

Her må vi være litt forsiktige, for med tanke på at, siden sentrumbrikkene på hver side i startkonfigurasjon er identiske, vil man ikke være i stant til å oppdage det dersom to sentrumbrikker er transponert.

Ved å observere at kun to hjørnebrikker er transponerte, kan vi konkludere at to sentrumbrikker også er transponerte. Dette er en mulig situasjon, og det kan dermed være lurt å lage algoritmer som kan løse dette.Disse algoritmene er nødt til å være odde. Som et generelt triks, roter en av sidene til kuben og løs kuben igjen kun ved hjelp av kommutatorer.

I tillegg til dette, har vi muligheten til å kunne rotere en skivene i midten $45°$ slik i bildet nedenfor:

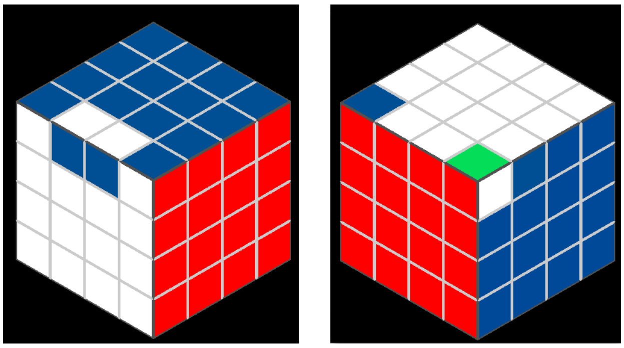


Figur 18: **Skive-rotasjon:** Nest øverst skiven rotert $45°$ grader med klokken.

Denne operasjonen vil utføre en 4-sykel på kantbrikkene og to 4-sykeler på sentrumbrikkene. Hver enkelt rotasjon på $45°$ på sentrum skivene endrer pariteten til kantbrikkene, men ikke til sentrumbrikkene.

En spesielt konsekvens for bruken av slike **skive-rotasjoner** som grunnoperasjoner er at det vil være mulig å ha spillet helt løst unntatt 4 kantbrikker som er permuterte i en 4-sykel, eller kun 2 kantbrikker som er transponerte.

Vi finner følgende nye situasjoner som virker uløselige i en $4 \times 4 \times 4$ Rubiks kube hvis man kun bruker kjente algoritmer for $3 \times 3 \times 3$ Rubiks kube:



(a) Kun 2 kantbrikker ble transponert

(b) Kun 2 hjørner ble transponert.

Figur 19: Paritets problemer

Vi kan generere alle jevne permutasjoner av kant- og hjørnebrikker som vi vil når vi bruker alle grunnoperasjonene til $4 \times 4 \times 4$ Rubiks kube. Disse er eksempler på hva man kaller et paritets problem, ettersom man vanligvis permuterer brikkene i 3-sykler. Tilsvarende paritets problemer finner vi i alle $n \times n \times n$ Rubiks kuber, der n er jevn, inkludert $n = 2$.

Definisjon 23. Vi kaller det et **paritetsproblem** i et vofs med gruppen G når vi tilsynelatende er nødt til utføre en odd antall transposisjoner av brikker for å løse et spill der alle operasjoner er jevne, forårsaket av at noen av brikkene er identiske.

Denne situasjonen oppstår i det type av spill hvor noen hvor noen av brikkene som deler bane er identiske, og hvor det er mulig å utføre en odd permutasjon av brikker på noen av disse banene. Dersom det oppstår en slik situasjon, kan vi transponere et jevn antall av disse identiske brikker, før vi forsetter å løse spillet ved hjelp av kommutatorer og de andre operasjonene som ble forklart i denne seksjonen.

Dessverre er det ikke alltid det å bruke kommutatorer er den beste strategien, datamaskiner er i stand til å løse en Rubiks kube på maksimal 20 trekk, uten å bruke kommutatorer. For å løse kuben ved hjelp av dem vil man trenge under 100 trekk.[13]

[13] Der hver trekk er enten en rotasjon på 45° eller på 90° av hver side eller middelskive.

Del V

Konklusjoner.

Det er to fornuftige spørsmål vi kan tenke oss når vi møter et vofs for første gang.

1. Er denne konfigurasjonen jeg ser mulig å løse ved å bruke de operasjonene som er tillatte i spillet?

2. Hvordan løser jeg denne konfigurasjonen?

Vi har sett mange nok eksempler til å få en forståelse av hvilke situasjoner er de mest utfordrende, nemlig, når vi møter et paritetsproblem. Vi har vist at vi kan alltid lage jevne sykeler av brikker ved hjelp av kommutatorer, og evt. bruke disse sykeler til å dekorere brikkene. Vi har også sett hvordan vi kan identifisere hvilke brikker har forårsaket paritetsproblemet, og dermed vil vi kunne løse spillet til en standard startkonfigurasjon.

Vi har også studert nøy hvordan kommutatorene og konjugatorer fungerer. Spesielt sammensetningen av disse. Vi brukte dem for å konstruere algoritmer, og illustrerte disse algoritmer med ulike eksempler for å utvide forståelse av dem i en praktisk sammenheng.

Vi har argumentert dette ved hjelp av studiet av produkter av det direkte produktet av undergrupper til symmetrigruppen S_n.

Vi har også sett på en del nyttige strategier som kan hjelpe å løse et gitt vofs, og sett på relasjonen mellom ulike spill som har felles struktur.

Referanser

[Lauritzen (2003)] Lauritzen, N. (2003). *Concrete Abstract Algebra.* Cambridge: Cambrige University Press.

[Armstrong (2010)] Armstrong, M.A. (2010). *Groups and Symmetry.* New York: Springer-Verlag

[Franleigh (2003)] Franleigh, J.B (2003). *A First Course In Abstract Algebra* (7. utg.). Cambridge: Cambrige University Press.

[Badelow (1982)] Badelow Ch. (1982). *Inside Rubik's Cube and Beyond.* Birkhäuser Boston

[Virtual Magic Polyhedra] Smet, P. *Virtual Magic Polyhedra* [Programvare]. Hentet fra http://users.skynet.be/moz071262 /Applets/Magic%20Polyhedra/ (Lastet ned 25. april 2017)

[Geogebra] Hohenwarter, M. *Geogebra* [Programvare].Hentet fra https://www.geogebra.org (Lastet ned 25. april 2017)

[Menrigh (2006)] Menrigh, B. (2006). *Understanding basic commutators and how they work.* Hentet fra https://www.youtube.com/watch?v=Vw6dSkYk7G4 (25. april 2017)

[Menrigh (2006)] Menrigh, B. (2006). *Parity Concepts Continued: 4x4x4 and a Few Other Puzzles.* Hentet fra https://www.youtube.com/watch?v=wmOyuROOANI (25. april 2017)