Januar 1968.

Statistical Memoirs no. 2 1968
Matematisk institutt . Universietet i Oslo.

Forelesninger i

OPERATORMETODER I SANNSYNLIGHETSREGNING

ved Erling Sverdrup
bearbeidet og utvidet ac cand.mag. Tore Scweder

GENERERENDE FUNKSJONER.

a) Genererende funksjon generelt.

Gitt en reell funksjon f fra den naturlige tall-linje dvs. en sekvens $f(0), f(1), f(2), \dots$. Hvis summen $\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n f(n)$ konvergerer i et område $\langle -s_0, s_0 \rangle$ kalles φ den genererende funksjon for f.

Til en genererende funksjon φ svarer det bare en sekvens f. For φ er pr. definisjon analytisk i en omegn om 0, og kan derfor utvikles entydig i taylor-rekke om 0.

Det er altså en-entydig sammenheng mellom genererende funksjoner og sekvenser som har genererende funksjon.

Hvis f er en elementær sannsynlighetsfunksjon for X - heretter kalt en fordelingsfunksjon eller fordelingen til X - er $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = 1$. Følgelig konvergerer $\varphi(s)$ absolutt i området $[-1, 1]$. φ "genererer" den elementære sannsynlighetsfunksjon idet $f(n) = \varphi^{(n)}(0)/n!$

Hvis $EX = \sum_{n=0}^{\infty} nf(n) < \infty$ da konvergerer også $\sum_{n=0}^{\infty} ns^{n-1} f(n)$ absolutt i $[-1, 1]$, og $\varphi'(s) = \sum_{n=0}^{\infty} ns^{n-1} f(n)$.

Hvis omvendt $\varphi'(s)$ er kontinuerlig og endelig i $[-1, 1]$ eller ekvivalent $\varphi'(1)$ er endelig, da har vi $\varphi'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} nf(n) = EX < \infty$.

Altså har vi $EX = \varphi'(1)$ likegyldig om EX er endelig eller uendelig.

På samme vis får vi $\varphi''(1) = EX(X-1)$ og dermed

$$\operatorname{var} X = EX(X-1)+EX-(EX)^2 = \varphi''(1)+\varphi'(1)-\varphi'(1)^2.$$

Eks.1.

X er poissonfordelt λ.

Fordelingen g til X er gitt ved

$$g(n) = \frac{\lambda}{n!}\,e^{-\lambda}$$

Den tilhørende genererende funksjon er

$$\gamma(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{\lambda^n}{n!}\,e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\,e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$$

$$\gamma'(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)} \qquad \gamma''(s) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}$$

$$EX = \gamma'(1) = \lambda \qquad \operatorname{var} X = \lambda^2+\lambda-\lambda^2 = \lambda.$$

b) Konvolusjon.

Det er først og fremst i forbindelse med konvolusjoner at den genererende funksjon er nyttig.

Gitt to uavhengige stokastiske variable X og Y med fordeling f og g. $Z = X+Y$ har fordeling k gitt ved $k(n) = \sum_{i=0}^{n} g(i)\,f(n-i)$. Z kalles konvolusjonen av X og Y, og k konvolusjonen av g og f.

Generelt sier vi at sekvensen k er konvolusjonen av sekvensene g og f hvis

$$k(n) = \sum_{i=0}^{n} g(i)\,f(n-i), \quad \text{det skrives} \quad k = f * g.$$

Anta at g og f har genererende funksjoner γ og φ henholdsvis. La $\langle -s_o, s_o \rangle$ være et intervall $(s_o > 0)$ hvor både γ og φ konvergerer absolutt.

I området $\langle -s_o, s_o \rangle$ har vi

$$\varkappa(s) = \varphi(s)\ \gamma(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f(i)\ g(j)\ s^{i+j}$$

sett $n = i+j$ og $m = j$

$$\varkappa(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{n} f(n-m)\ g(m) \right] s^n$$

Vi har altså vist setningen:

<u>Hvis f og g har genererende funksjon φ og γ, så har konvolusjonen av f og g : $k = f * g$ genererende funksjon $\varkappa(s) = \varphi(s) \cdot \gamma(s)$</u>.

I tilfellet der f og g er fordelingsfunksjoner, kunne resultatet også vært insett slik

$$\varkappa(s) = Es^Z = Es^{X+Y} = Es^X \cdot Es^Y = \varphi(s) \cdot \gamma(s)$$

idet s^X og s^Y er stokastisk uavhengige. Generelt, hvis $X_1, \ldots, X_n$ er uavhengige med fordelingsfunksjoner $f_1, \ldots, f_n$ så har $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ fordelingsfunksjon $= f_1 * f_2 * \ldots * f_n$ og $\varkappa(s) = \varphi_1(s) \cdot \varphi_2(s) \ldots \varphi_n(s)$.

Hvis $X_1, \ldots, X_n$ er uavhengig identisk fordelt med fordeling f, har $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ fordeling $k = f * f * \ldots * f = f^{n*}$ og $\varkappa(s) = \varphi(s)^n$.

Eksempel 2.

$X_1,\dots,X_n$ er uavhengige og identisk fordelt med fordelingsfunksjon f

$$f(0) = 1-p, f(1) = p, \qquad \varphi(s) = 1-p+p\ s$$

$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ har fordeling k og genererende funksjon

$$\mathcal{K}(s) = (1-p+ps)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} s^i$$

dermed
$$k(i) = \begin{cases} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} & i = 0,1,\dots,n \\ 0 & i > n \end{cases}$$

Herav følger at Z er binomisk fordelt (n,p). Som kjent kan dette også innsees ved kombinatorisk resonnement.

Eksempel 3.

$X_1, X_2,\dots,X_n$ er uavhengige og identisk geometrisk fordelt med parameter p.

$$f(n) = p\ (1-p)^{n-1} \qquad n = 1,2,\dots$$

$$f(0) = 0$$

$$\varphi(s) = ps \sum_{n=1}^{\infty} \left[s(1-p)\right]^{n-1} = \frac{ps}{1-s(1-p)}$$

$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ har genererende funksjon

$$\mathcal{K}(s) = \varphi(s)^n = \frac{(ps)^n}{\left[1-s(1-p)\right]^n} = (sp)^n \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} (1-p)^i\ (-s)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{n-1} p^n (1-p)^i s^{n+i} = \sum_{j=n}^{\infty} \binom{j-1}{n-1} p^n (1-p)^{j-n} s^j$$

altså er den elementære sannsynlighetsfunksjon for Z

$$k(j) = P_r(Z = j) = \binom{j-1}{n-1} p^n (1-p)^{j-n} \qquad j = n, n+1,\dots$$

Dette kan man vise ved kombinatorisk resonnement.

Legg merke til at vi i begge eksemplene har gjort nytte av den en-entydige korrespondanse mellom sekvenser og genererende funksjoner. Vi fant først den genererende funksjon, og dernest den tilhørende fordeling.

Eksempel 4. "Første passering."

$X_1, X_2, \dots$ er uavhengige og identisk fordelt

$\Pr(X_i = 1) = p$, $\Pr(X_i = -1) = 1-p$,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Denne modellen refererer seg til en bernoulli forsøksserie hvor vi setter $X_n = 1$ hvis begivenheten A opptrer i n-te forsøk og $X_n = -1$ hvis $\bar{A}$ opptrer i n-te forsøk.

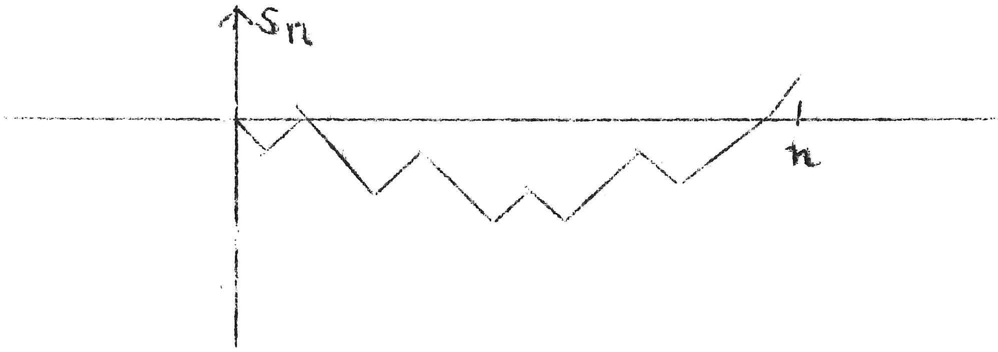
Eksempel på denne situasjonen er en mann som spiller, og må ut med 1 hver gang han taper, mens han får 1 hver gang han vinner.

S_n = differensen mellom antall A og antall $\bar{A}$.
I eksempelet er S_n nettogevinsten. Vår spiller har bestemt seg for å slutte med en gang han får positiv nettogevinst.

Hva er sannsynligheten for at han stopper etter nøyaktig n spill ?

Hva er sannsynligheten $\ell(n)$ for begivenheten

$$\{S_n = 1\} \cap \left\{\bigcap_{r=1}^{n-1} S_r < 1\right\} ?$$



Hva er med andre ord sannsynligheten for at S_n for første gang er positiv $(= 1)$ etter n-te forsøk ?

Vi skal generelt finne sannsynlighet for at første passering gjennom x skjer i n - altså sannsynligheten $\ell^{(x)}(n)$ for begivenheten

$$\{S_n = x\} \cap \left\{\bigcap_{r=1}^{n-1} S_r < x\right\} \qquad x > 0$$

For å komme til $x > 1$, må man passere 1. Etter å ha passert 1 første gang, må vi ha nettogevinst på $x-1$ i de resterende forsøk. La oss definere

$$S_n^r = \sum_{i=r+1}^{n} X_i$$

Første passering gjennom x i n hvis og bare hvis

$$\bigcup_{r=1}^{n-1} \Big\{ \left[S_1 < 1 \cap \dots \cap S_{r-1} < 1 \cap S_r = 1\right]$$

$$\cap \left[S_{r+1}^r < x-1 \cap S_{r+2}^r < x-1 \cap \dots \cap S_{n-1}^r < x-1 \cap S_n^r = x-1\right] \Big\}$$

Siden enkeltforsøkene er uavhengige, er de to begivenhetene som er snittet med hverandre uavhengige. Altså har vi

$$\ell^{(x)}(n) = \sum_{r=1}^{n-1} \ell(r)\ell^{(x-1)}(n-r),$$

ved å definere $\ell^{(x)}(0) = 0$, har vi

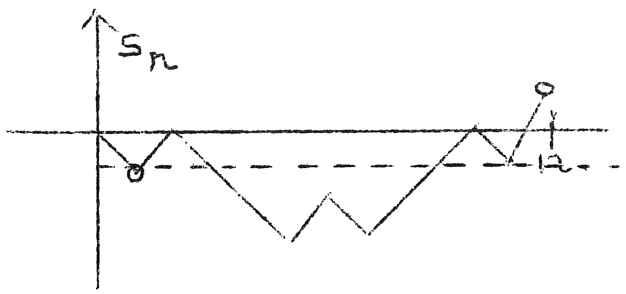
$$\ell^{(x)} = \ell * \ell^{(x-1)} = \ell^{x*}$$

For de genererende funksjonene $\lambda^{(x)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell^{(x)}(n)s^n$ gjelder dermed

$$\lambda^{(x)}(s) = [\lambda(s)]^x \qquad (\lambda(s) = \lambda^{(1)}(s))$$

Nå har vi imidlertid

$$\ell(1) = p, \; \ell(n) = (1-p)\cdot\ell^{(2)}(n-1) \qquad n > 1$$



Dermed $\lambda(s) = ps+(1-p)\, s \sum_{n=2}^{\infty} \ell^{(2)}(n-1)\, s^{n-1}$

$$\lambda(s) = ps+(1-p)\, s\, [\lambda(s)]^2$$

som gir

$$\lambda(s) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)s^2}}{2(1-p)s}.$$

Nå er imidlertid ikke $\lambda_1(s) = \frac{1+\sqrt{1-4p(1-p)s^2}}{2(1-p)s}$ noen genererende funksjon, λ_1 er jo ikke engang definert i 0. Altså har vi den genererende funksjonen til ℓ er

$$\lambda(s) = \frac{1-\sqrt{1-4p(1-p)s^2}}{2(1-p)s}$$ som kan skrives

$$\lambda(s) = \frac{1}{2(1-p)s}\left[1-(1-4p(1-p)s^2)^{\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2s(1-p)}\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\left[4p(1-p)s^2\right]^n (-1)^n\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^{n-1}\frac{\left[4p(1-p)\right]^n}{2(1-p)} s^{2n-1}$$

følgelig $\ell(2n-1) = \binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^{n-1}2^{2n-1}p^n(1-p)^{n-1}$ $n = 1,2,\ldots$

$\ell(2n) = 0$

La oss finne sannsynligheten f for at spilleren før eller siden skal stoppe.

$$f = \sum_{n=0}^{\infty}\ell(n) = \lambda(1) = \frac{1-\sqrt{1-4p(1-p)}}{2(1-p)} =$$

$$\frac{1-|1-2p|}{2(1-p)} = \begin{cases} 1 & \text{for } p \geq \frac{1}{2} \\ \frac{p}{1-p} & \text{for } p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Forventet antall spill før spilleren stopper (= EN) er selvfølgelig $= \infty$ for $p < \frac{1}{2}$. Ved derivasjon finner en

$$\lambda'(1) = \frac{1-|1-2p|}{2(1-p)|1-2p|}$$

$$EN = \begin{cases} \infty & \text{for } p \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2p-1} & \text{for } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

La $X_1, X_2, \ldots$ være uavhengige stokastiske variable. X'ene har alle sannsynlighetsfunksjon f og genererende funksjon φ , N har sannsynlighetsfunksjon g og genererende funksjon γ. Vi skal finne den elementære sannsynlighetsfunksjon k for

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Vi ser at

$$\mathcal{K}(s) = Es^Y = E\left[Es^Y \mid N\right] = E\left[E(s^{\sum_{i=1}^{N} X_i} \mid N)\right]$$

$$= E\left[\varphi(s)^N\right] = \gamma(\varphi(s))$$

Eksempel.

Bedriftsulykker i en næring antaes å følge en Poissonsk punktprosess med ulykkesintensitet λ (gjennomsnitlig antall ulykker pr. tidsenhet). Antall arbeidere X som blir skadet ved en ulykke er geometrisk fordelt ; x=1,2,... $Pr(X = x) = p(1-p)^{x-1}$. Vi er interessert i fordelingen for antall skadede arbeidere Y i et tidsintervall av lengde t. Vi ser at ~~antall~~ ulykker N i tidsintervallet er Poissonfordelt med parameter $\lambda \cdot t$ og altså genererende funksjon $e^{-\lambda t + \lambda t s}$. Antall skadede arbeidere X ved en ulykke har genererende funksjon $\frac{ps}{1-s(1-p)}$. Den genererende funksjon for Y blir da

$$\mathcal{K}(s) = e^{-\lambda t + \lambda t \frac{ps}{1-s(1-p)}}$$

Herav

$$EY = \frac{\lambda t}{p} \qquad \text{var } Y = \lambda t \, \frac{2-p}{p^2}$$

Anta at den genererende funksjonen φ er rasjonal, $\varphi(s) = \frac{U(s)}{V(s)}$ der U og V er polynomer. Eventuelle felles faktorer for U og V antaes forkortet bort. Hvis graden til U er mindre enn graden m til V, og hvis de m røttene $s_1,\dots,s_m$ i V er forskjellige, kan $\frac{U(s)}{V(s)}$ delbrøkoppspaltes

$$\frac{U(s)}{V(s)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{g_j}{s_j - s}$$

For å finne g_i ser vi på $\frac{U(s)}{V(s)}(s_i - s) = \sum_{j=1}^{m} \frac{g_j}{(s-s_j)}(s_i - s)$, setter $s = s_i$ og får

$$g_i = \frac{U(s_i)}{V'(s_i)}$$

Siden $\varphi(s)$ er analytisk nær origo er ingen s_j lik 0.

Anta at s_1 er nullpunktet med minst modul. For $|s| < |s_1|$, har vi

$$\varphi(s) = \sum_{j=1}^{m} \frac{g_j}{s_j - s} = \sum_{j=1}^{m} \frac{g_j}{s_j}\left(1 - \frac{s}{s_j}\right)^{-1} = \sum_{j=1}^{m} \frac{g_j}{s_j} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s}{s_j}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{g_j}{s_j^{n+1}}\right) \cdot s^n$$

Dermed har vi $f(n) = \sum_{j=1}^{m} \frac{g_j}{s_j^{n+1}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{U(s_j)}{V'(s_j)} \cdot \frac{1}{s_j^{n+1}}$

Siden s_1 har minst modul, har vi

$f(n) \approx \frac{U(s_1)}{V'(s_1)} \cdot \frac{1}{s_1^{n+1}}$ asymptotisk. Dette er ofte en god approximasjon.

Hvis U ikke har mindre grad enn V, kan vi skrive

$\frac{U(s)}{V(s)} = P(s) + \frac{U_1(s)}{V(s)}$ der P er polynom, og behandle $\frac{U_1(s)}{V(s)}$ som ovenfor.

Eksempel.

La $f(n)$ = sannsynligheten for at man får et like (jevnt) antall heldige utfall ved n bernoulli forsøk.

$$f(n) = (1-p)\ f(n-1)+p(1-f(n-1)) = p+(1-2p)f(n-1) \qquad n \geq 1$$

Hvis første forsøk er heldig må vi nemlig ha et odde antall i de $n-1$ og omvendt.

Vi har $f(0) = 1$ $f(1) = 1-p$ og følgelig

$$\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot s^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[p+(1-2p)f(n-1)\right] s^n$$

$$= 1 + \frac{ps}{1-s} + s\ (1-2p)\sum_{n=1}^{\infty} f(n-1)\ s^{n-1}$$

$$\varphi(s) = 1 + \frac{ps}{1-s} + s(1-2p)\varphi(s)$$

$$\varphi(s) = \frac{1-s+ps}{\left[1-(1-2p)s\right]\left[1-s\right]} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-s} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-(1-2p)s}$$

For $|s| < 1$, har vi $\varphi(s) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[1+(1-2p)^n\right] s^n$.

Altså $f(n) = \frac{1}{2}(1+(1-2p)^n)$.

Under er det gitt en tabell over nyttige egenskaper ved den genererende funksjon.

Opprinnelig funksjon $n \geq 0$		genererende funksjon
Betegnes med latinske bokstaver		betegnes med tilsvarende greske bokstaver
$f(n)$		$\varphi(s)$
$f(n)+g(n)$		$\varphi(s) + \gamma(s)$
$k \cdot f(n)$	; k reel	$k \cdot \varphi(s)$
$f(n-1)$	; $f(-1) = 0$	$s\,\varphi(s)$
$f(n+1)$		$\frac{1}{s}(\varphi(s) - f(0))$
a^n	; a reel	$\frac{1}{1-as}$
1		$\frac{1}{1-s}$
na^n		$\frac{as}{(1-as)^2}$
n		$\frac{s}{(1-s)^2}$
$a^n f(n)$		$\varphi(as)$
$n \cdot f(n)$		$s\varphi'(s)$
$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$	; λ reel	$e^{-\lambda+\lambda s}$
$\binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$	; $n=0,\ldots,N$	$(1-p+ps)^N$
$\binom{\alpha+n+1}{n} p^{\alpha}(1-p)^n$	; $\alpha > 0$	$\left(\frac{p}{1-(1-p)s}\right)^{\alpha}$

b) <u>Genererende funksjoner i markovkjeder.</u>[*]

Gitt en Markovkjede $\langle X_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ med et endelig antall tilstander $1,2,\ldots,N$, overgangsmatrise P og initial-fordeling $p = [p_1,\ldots,p_N]$.

La $p_i(n) = Pr(X_n = i)$ og $p(n) = [p_1(n),\ldots,p_N(n)]$. Da har vi

$$p(0) = p \quad \text{og} \quad p(n+1) = p(n)\cdot P = p\cdot P^{n+1}$$

De genererende funksjonene $\pi_i(s)$; $i = 1,\ldots,N$ er definert ved

$$\pi_i(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_i(n)\, s^n.$$

Siden $p_i(n)$ alle er sannsynligheter, konvergerer π_i absolutt i området $\langle -1,1\rangle$. Legg merke til at $p_i(n)$ som funksjon av n ikke er noen fordelingsfunksjon.

Den genererende vektorfunksjonen $\pi(s)$ er definert ved

$$\pi(s) = [\pi_1(s),\ldots,\pi_N(s)]$$

I ligningen $p(n+1) = p(n)\cdot P$ multipliseres med s^{n+1} og summeres. Det gir

$$s^{-1}\cdot [\pi(s)-p(0)] = \pi(s)\cdot P$$

Dette gir, ved at $p = p(0)$ og I betegner $N \times N$ enhets-matrisen,

$$\pi(s) - s\pi(s)P = p$$

$$\pi(s)\,(I-sP) = p$$

$$\pi(s) = p\cdot (I-sP)^{-1}$$

[*] Basert på Howard: "DYNAMIC PROGRAMMING AND MARKOV PROCESSES".

I en omegn om origo vil $I-sP$ være ikke-singulær, og den inverse vil dermed eksistere.

Eksempel 1.

En mann spiller med en mynt og en terning. Hvis han i n-te spill skal knipse mynten, er han i tilstand 1, hvis han skal slå terning er han i tilstand 2. Spillereglene går ut på at fra tilstand 1 kommer han til tilstand 2 hvis mynten viser krone, fra 2 til 1 hvis terningen viser ett øye.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} q & 1-q \end{bmatrix}$$

$$I-sP = \begin{bmatrix} 1-\frac{s}{2} & -\frac{s}{2} \\ -\frac{s}{6} & 1-\frac{5}{6}s \end{bmatrix}$$

$$(I-sP)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{6-5s}{(3-s)(1-s)} & \frac{3s}{(3-s)(1-s)} \\ \frac{s}{(3-s)(1-s)} & \frac{6-3s}{(3-s)(1-s)} \end{bmatrix}$$

Ved delbrøk oppspalting får vi

$$(I-sP)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-s} + \frac{9}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{s}{3}} & \frac{3}{2}\,\frac{1}{1-s} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{1-\frac{s}{3}} \\ \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-s} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{s}{3}} & \frac{3}{2}\,\frac{1}{1-s} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{s}{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-s}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} + \frac{1}{1-\frac{s}{3}}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}{}' \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \right\} s^n$$

Følgelig

$$\Pi(s) = p(I-sP)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{q}{2} & -\frac{1}{4} - \frac{q}{2} \end{bmatrix}\right\} s^n$$

og $\quad p(n) = \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{1}{4}+\frac{q}{2}\right) \quad \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{1}{4}+\frac{q}{2}\right)\right]$

Vi ser at når $n \to \infty$, har vi for alle q:

$p(n) \to \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ som er stasjonærfordelingen for prosessen. Vi skriver $\lim p(n) = \tilde{p}$.

<u>Eksempel 2</u>.

En drosjesjåfør opererer i et distrikt med 3 byer A, B og C. Han får bare turer mellom og innen byene.

Hvis han på tidspunkt n er i A, er $X_n = 1$, i B $X_n = 2$ og i C $X_n = 3$.

Overgangsmatrisen $\quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$I - sP = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4-2s & -s & -s \\ -2s & 4 & -2s \\ -s & -s & 4-2s \end{bmatrix}$$

$$(I-sP)^{-1} = \frac{1}{s^3-s^2-16s+16}\begin{bmatrix} -2s^2-8s+16 & -s^2+4s & 2s^2+4s \\ -2s^2+8s & 3s^2-16s+16 & -2s^2+8s \\ 2s^2+4s & -s^2+4s & -2s^2-8s+16 \end{bmatrix}$$

Siden $s^3-s^2-16s+16 = (1-s)(4-s)(4+s)$ gir delbrøk-oppspalting:

$$(I-sP)^{-1} = \frac{1}{1-s}\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} + \frac{1}{1-(\frac{s}{4})}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{1+\frac{s}{4}}\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

La initialfordelingen være $p = [p_1 \ p_2 \ p_3]$, $p_1+p_2+p_3 = 1$.
Da har vi ved rekkeutvikling

$$p_1(n) = \frac{2}{5} + (\tfrac{1}{4})^n \ \tfrac{1}{2}(p_1-p_3) + (-\tfrac{1}{4})^n \ \tfrac{1}{10}(p_1-4p_2+p_3)$$

$$p_2(n) = \frac{1}{5} + (-\tfrac{1}{4})^n \ \tfrac{1}{5}(-p_1+4p_2-p_3)$$

$$p_3(n) = \frac{2}{5} + (\tfrac{1}{4})^n \ \tfrac{1}{2}(-p_1+p_3) + (-\tfrac{1}{4})^n \ \tfrac{1}{10}(p_1-4p_2+p_3)$$

Vi ser at

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \left[\tfrac{2}{5}, \ \tfrac{1}{5}, \ \tfrac{2}{5}\right] \quad \text{uavhengig av} \quad p_1, p_2, p_3.$$

Eksempel 3.

En mann gjør Bernoulli forsøk, hvis A inntreffer i n-te forsøk er $Y_n = 1$ og hvis $\bar{A}$, **så er $Y_n = 0$. Vi** skal definere $X_1, X_2, \ldots$. Hvis $Y_n = 0$ er $X_n = 0$. Hvis $Y_{n-k} = 0$, $Y_{n-k+1} = 1$, $Y_{n-k+2} = 1$, $Y_n = 1$ - da er $X_n = k$, hvis $k \leq N$, og $X_n = N$ hvis $k > N$. Hvis, med andre ord, det n-te forsøk var $\bar{A}$ mens de neste k var en sekvens A-er, er $X_n = k$ for $k < N$ og $X_n = N$ for $k \geq N$.

Sannsynligheten for **A er** $Pr(Y_i = 1) = p$

$$\text{Overgangsmatrisen} = P = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & p & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & p & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & p \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & p \end{bmatrix}$$

Vi skal undersøke $p(n)$.

$$I - sP = \begin{bmatrix} 1-s(1-p) & -sp & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \\ -s(1-p) & 1 & -sp & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ -s(1-p) & 0 & 0 & 0 \cdots 1 & -sp & 0 \\ -s(1-p) & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 1 & -sp \\ -s(1-p) & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 1-sp \end{bmatrix}$$

Anta $Q = (I-sP)^{-1}$. Ved å løse ligningssystemene

$$[1-s(1-p)]\, q_{00} - spq_{10} = 1$$

$$-s(1-p)q_{00} + q_{r0} - spq_{r+10} = 0 \qquad r = 1, \ldots, N-1$$

$$-s(1-p)q_{00} + (1-sp)q_{N0} = 0$$

og

$$\left[1-s(1-p)\right] q_{0k}-spq_{1k} = 0$$

$$-s(1-p)q_{0k}+q_{rk}-spq_{r+1k} = 0 \quad , \quad r = 1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,N-1$$

$$-s(1-p)q_{0k}+q_{kk}-spq_{k+1k} = 1$$

$$-s(1-p)q_{0k}+(rsp)q_{Nk} = 0$$

for $k = 1,2,\ldots,N-1$

$$\left[1-s(1-p)\right] q_{0N}-spq_{1N} = 0$$

$$-s(1-p)q_{0N}+q_{rN}-spq_{r+1N} = 0 \quad , \quad r = 1,\ldots,N-1$$

$$-s(1-p)q_{0N}+(1-sp)q_{NN} = 1$$

bakfra, finner en

$$q_{00} = \frac{1-sp}{1-s} , \quad q_{rk} = (sp)^{k-r} + \frac{s(1-p)}{1-s}(sp)^k \quad ; \ r=0,1,\ldots,k$$

$$q_{r0} = \frac{s(1-p)}{1-s} , \ q_{rk} = \frac{s(1-p)}{1-s}(sp)^k \quad ; \ r=k+1,\ldots,N$$

for $k = 1,2,\ldots,N-1$.

$$q_{rN} = \frac{1}{1-sp}(sp)^{N-r} + \frac{s(1-p)}{(1-sp)(1-s)}(sp)^N$$

$$= \frac{(sp)^N}{1-s} + \frac{1}{1-sp}\left((sp)^{N-r}-(sp)^N\right) \quad ; \ r=0,1,\ldots,N.$$

$$(I-sP)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1-sp}{1-s} & sp+\frac{s(1-p)}{1-s}sp & (sp)^2+\frac{s(1-p)}{1-s}(sp)^2 \dots \frac{(sp)^N}{1-s} & \\ \frac{s(1-p)}{1-s} & 1+\frac{s(1-p)}{1-s}sp & sp+\frac{s(1-p)}{1-s}(sp)^2 & \dots \frac{(sp)^N}{1-s}+\frac{1}{1-sp}((sp)^{N-1}-(sp)^N) \\ . & \frac{s(1-p)}{1-s}sp & 1+\frac{s(1-p)}{1-s}(sp)^2 & \dots \frac{(sp)^N}{1-s}+\frac{1}{1-sp}((sp)^{N-2}-(sp)^N) \\ . & . & \frac{s(1-p)}{1-s}(sp)^2 & \dots \frac{(sp)^N}{1-s}+\frac{1}{1-sp}((sp)^{N-3}-(sp)^N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{s(1-p)}{1-s} & \frac{s(1-p)}{1-s}sp & \frac{s(1-p)}{1-s}(sp)^2 & \dots \frac{(sp)^N}{1-s}+\frac{1}{1-sp}(1-(sp)^N) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s(1-p)}{1-s} & \frac{s(1-p)}{1-s}sp & \frac{s(1-p)}{1-s}(sp)^2 & \dots \frac{s(1-p)}{1-s}(sp)^{N-1} & \frac{(sp)^N}{1-s} \\ \frac{s(1-p)}{1-s} & \frac{s(1-p)}{1-s}sp & \frac{s(1-p)}{1-s}(sp)^2 & \dots \frac{s(1-p)}{1-s}(sp)^{N-1} & \frac{(sp)^N}{1-s} \\ \frac{s(1-p)}{1-s} & \frac{s(1-p)}{1-s}sp & \frac{s(1-p)}{1-s}(sp)^2 & \dots \frac{s(1-p)}{1-s}(sp)^{N-1} & \frac{(sp)^N}{1-s} \\ \vdots & \vdots & & & \\ \frac{s(1-p)}{1-s} & \frac{s(1-p)}{1-s}sp & \frac{s(1-p)}{1-s}(sp)^2 & \dots \frac{s(1-p)}{1-s}(sp)^{N-1} & \frac{(sp)^N}{1-s} \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 1 & sp & (sp)^2 & (sp)^3 & \dots & (sp)^{N-1} & 0 \\ 0 & 1 & sp & (sp)^2 & \dots & (sp)^{N-2} & \frac{(sp)^{N-1}-(sp)^N}{1-sp} \\ 0 & 0 & 1 & sp & \dots & (sp)^{N-3} & \frac{(sp)^{N-2}-(sp)^N}{1-sp} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & (sp)^{N-4} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (sp)^{N-5} & \cdot \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{sp-(sp)^N}{1-sp} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1-(sp)^N}{1-sp} \end{bmatrix}$$

Nå er

$$\frac{s(1-p)}{1-s} \cdot (sp)^k = (1-p)\, p^k \sum_{n=k+1}^{\infty} s^n$$

$$\frac{(sp)^N}{1-s} = p^N \sum_{n=N}^{\infty} s^n$$

$$\frac{(sp)^{N-r}-(sp)^N}{1-sp} = \sum_{n=N-r}^{\infty} (sp)^n - \sum_{n=N}^{\infty} (sp)^n = \sum_{n=N-r}^{N-1} p^n s^n$$

Fölgelig

$$(I-sP)^{-1} = \begin{bmatrix} 1-p & (1-p)p & (1-p)p^2 & \dots & (1-p)p^{N-1} & p^N \\ 1-p & (1-p)p & (1-p)p^2 & \dots & (1-p)p^{N-1} & p^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdot \sum_{n=N}^{\infty} s^n$$

$$
+\begin{bmatrix}
1+(1-p)\sum\limits_{n=1}^{N-1}s^n, & ps+(1-p)p\sum\limits_{n=2}^{N-1}s^n, & p^2s^2+(1-p)p^2\sum\limits_{n=3}^{N-1}s^n, & \ldots, & p^{N-2}s^{N-2}+(1-p)p^{N-2}\cdot s^{N-1}, & p^{N-1}s^{N-1}, & 0 \\
(1-p)\sum\limits_{1}^{N-1}s^n, & 1+(1-p)p\sum\limits_{2}^{N-1}s^n, & p\cdot s+(1-p)p^2\sum^{N-1}s^n, & \ldots, & p^{N-3}s^{N-3}+(1-p)p^{N-2}s^{N-1}, & p^{N-2}s^{N-2}, & p^{N-1}s^{N-1} \\
(1-p)\sum\limits_{1}^{N-1}s^n, & (1-p)p\sum\limits_{2}^{N-1}s^n, & 1+(1-p)p^2\sum\limits_{3}^{N-1}s^n, & \ldots, & p^{N-4}s^{N-4}+(1-p)p^{N-2}s^{N-1}, & p^{N-3}s^{N-3}, & \sum\limits_{N-2}^{N-1}p^ns^n \\
 & & & & & & \\
(1-p)\sum\limits_{1}^{N-1}s^n, & (1-p)p\sum\limits_{2}^{N-1}s^n, & (1-p)p^2\sum\limits_{3}^{N-1}s^n, & \ldots, & (1-p)p^{N-2}s^{N-1}, & 1, & \sum\limits_{1}^{N-1}p^ns^n \\
(1-p)\sum\limits_{1}^{N-1}s^n, & (1-p)p\sum\limits_{2}^{N-1}s^n, & (1-p)p^2\sum\limits_{3}^{N-1}s^n, & \ldots, & (1-p)p^{N-2}s^{N-1}, & 0, & \sum\limits_{0}^{N-1}p^ns^n
\end{bmatrix}
$$

La oss tolke resultatet.

Hvis $X_o = k$ dvs. $p_k = 1$, $p_i = 0$ $i \neq k$, har vi

$$\pi(s) = p(I-sP)^{-1} = \left[1-p, p(1-p), p^2(1-p), \ldots, p^{N-1}(1-p)\ p^N\right] \cdot \sum_{n=N}^{\infty} s^n$$

$$+\left[(1-p)\sum_{1}^{N-1} s^n, (1-p)p\sum_{2}^{N-1} s^n, \ldots, (1-p)p^{k-1}\sum_{k}^{N-1}, 1+(1-p)p^k\sum_{k+1}^{N-1} s^n,\right.$$

$$\left. sp+(1-p)p^{k+1}\sum_{k+2}^{N-1} s^n, \ldots, (sp)^{N-k-1}, \sum_{k}^{N-1} p^n s^n\right]$$

Dermed kan vi skrive opp

Når $n \geq N$ er $p_i(n) = (1-p)p^i$ $i \neq N, p_N(n) = p^N$

Når $n < N$ får vi

$$P_i(n) = \begin{cases} 0 & , i < k \quad n \leq i \\ (1-p)\cdot p^i & , i < k \quad n > i \\ p^n & , i \geq k \quad n+k = i \\ 0 & , i \geq k \quad n+k \neq i \quad \text{og} \quad n \leq i \\ p^n & , i = N \quad n \geq N-k \\ 0 & , i = N \quad n < N-k \end{cases}$$

Ta for eksempel $k = 3$

$n \backslash i$	0	1	2	3	4	5		N-1	N
0	0	0	0	1	0	0	$\cdots$	0	0
1	$1-p$	0	0	0	p	0	$\cdots$	0	0
2	$1-p$	$p(1-p)$	0	0	0	p^2	$\cdots$	0	0
3	$1-p$	$p(1-p)$	$p^2(1-p)$	0	0	0	$\cdots$	0	0
4	$1-p$	$p(1-p)$	$p^2(1-p)$	$p^3(1-p)$	0	0	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
5	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
6									
$\vdots$									
N-4	$1-p$	$p(1-p)$	$p^2(1-p)$	$p^3(1-p)$				p^{N-4}	0
N-3	$1-p$	$p(1-p)$						0	p^{N-3}
N-2	$1-p$	$p(1-p)$						0	p^{N-2}
N	$(1-p)$	$p(1-p)$						$p(1-p)^{N-1}$	p^N

Vi har $\pi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\cdot s^n = p(I-sP)^{-1}$. På den annen side er $p(n) = p\cdot P^n$. Dermed får vi $p\cdot\sum_{n=0}^{\infty} P^n\cdot s^n = p\,(I-sP)^{-1}$ for alle initialfordelinger p, - og følgelig

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n s^n = (I-sP)^{-1}.$$

Hvis $H(n)$ betegner den matrisen som er koeffisient foran s^n i rekken til $(I-sP)^{-1}$, har vi altså $H(n) = P^n$.

I eksemplene har vi utnyttet dette til å finne $p\cdot P^n = p(n)$.

I de tre eksemplene fant vi at $(I-sP)^{-1}$ og tilsvarende $P^n = H(n)$ kunne spaltes opp på en interessant måte.

Vi fant at P^n kunne skrives som summen av en stasjonær del S som var uavhengig av n, og en del T(n) som gikk geometrisk mot 0.

S besto av stasjonærfordelingen $\tilde{p}$: $S = \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \vdots \\ \tilde{p} \end{bmatrix}$, og var følgelig en stokastisk matrise (en kvadratisk matrise $P \geq 0$ der $\sum_{j=0}^{N} p_{ij} = 1$ for $i = 0,\ldots,N$). Generelt har vi følgende om $(I-sP)^{-1}$.

(i) $|I-sP| = U(s)$ er et polynom av grad $\leq N$.

Matrisen $[I-sP]_{ij}$ som fremkommer ved å stryke j-te linje og i-te kolonne, har determinant $|I-sP|_{ij} = V_{ij}(s)$ som er et polynom av grad $\leq N-1$.

Som kjent kan $(I-sP)^{-1}$ skrives

$$(I-sP)^{-1} = \left\{\frac{|I-sP|_{ij}}{|1-sp|}\right\} = \left\{\frac{V_{ij}(s)}{U(s)}\right\}.$$

$(I-sP)^{-1}$ er altså en rasjonal matrisefunksjon, som følgelig kan delbrøkoppspaltes.

(ii) Vi ser at 1 er egenverdi for P. Det kan vises at alle egenverdiene for P har modul mindre eller lik 1.

Dermed har vi

$$|P-\lambda I| = a\cdot(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_N-\lambda)$$

der $|\lambda_i| \leq 1$, og at minst en av faktorene er $(1-\lambda)$.

Men dette er ekvivalent med at $|I-sP| = b\cdot(s_1-s)\ldots(s_N-s)$ der $|s_i| \geq 1$ og at minst en av faktorene er $(1-s)$.

(iii) Når P er overgangsmatrisen for en Markovkjede med bare én rekurrent klasse, kan det vises at P kun har en egenverdi med modul 1, og det er $\lambda = 1$.

Det viktigste tilfelle for oss er når P bare har én rekurrent klasse. Da kan vi skrive

$$[I-sP]^{-1} = S\cdot\sum_{n=0}^{\infty} s^n + \sum_{n=0}^{\infty} T(n)s^n,$$ der S er den stasjonære del uavhengig av n, og $T(n)$ er en del som går geometrisk mot 0.

c) <u>Genererende funksjoner i fødsels- og dødsprosesser.</u>
(Køteori.)

I det følgende skal vi gå gjennom noen eksempler på bruk av genererende funksjoner i fødsels- og dødsprosesser. I betegnelser og teori skal vi bygge på Karlin.

Gitt en stokastisk prosess $\{X(t)\}$, med de naturlige tall samt ∞ som tilstandsrom. $P_n(t) = Pr(X(t) = n)$ $n = 0,1,2,\ldots$. Til sekvensen $P_0(t), P_1(t), \ldots$, svarer den genererende funksjon $\Pi(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P_n(t)$. For fast t er altså $\Pi(s,t)$ den genererende funksjon for fordelingen (den ufullstendige) til $X(t)$.

Vi har $0 \leq P_n(t) \leq 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \leq 1$, og $\Pi(s,t)$ konvergerer dermed absolutt i området $[-1,1]$. Vi har

$$\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s} = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot s^{n-1} P_n(t)$$

og hvis $\sum_{n=0}^{\infty} s^n P_n'(t)$ konvergerer absolutt i et åpent intervall har vi $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P_n'(t)$.

Eksempel 1. Yule prosessen. (Se Karlin.)

Vi har en populasjon individer. Hvert individ har intensitet β for å spaltes til to individer, uavhengig av de andre individene. $X(0) = N$ er antall individer på tidspunkt 0, $X(t)$ er antall individer på tidspunkt t.

$X(t)$ er en ren fødselsprosess med $\lambda_n = n\beta, X(0) = N$.
Ved sannsynlighetsteoretisk resonnement finner en

$$P_n'(t) = \beta\left[(n-1)P_{n-1}(t) - n\cdot P_n(t)\right] \qquad n = N+1,\ldots$$

$$P_N'(t) = -N\beta P_N(t).$$

Herav

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n P_n'(t) = -N\beta P_N(t)s^N + \beta\left[\sum_{n=N+1}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(t)s^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} ns^n P_n(t)\right]$$

Nå er imidlertid

$$\beta\sum_{n=N+1}(n-1)s^n P_{n-1}(t) = \beta s^2 \sum_{n=N}^{\infty} ns^{n-1}P_n(t) = \beta s^2 \sum_{n=0}^{\infty} ns^{n-1}P_n(t) =$$

$$\beta s^2 \frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s}$$

Siden $P_i(t) = 0$ for $i = 1,2,\ldots,N-1$, er

$$N\beta P_N(t)s^N + \beta\sum_{n=N+1}^{\infty} ns^n P_n(t) = \beta s \sum_{n=N}^{\infty} ns^{n-1}P_n(t) = \beta s \frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s}$$

Altså har vi $\sum_{n=0}^{\infty} s^n P_n'(t) = \beta s(s-1)\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s}$, og denne summen konvergerer absolutt i $\langle -1,1\rangle$. Den genererende funksjonen $\Pi(s,t)$ for $\langle P_n(t)\rangle$ er altså bestemt ved den partielle differensialligning

$$\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} + \beta s(1-s)\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s} = 0$$

med randkravet $\Pi(s,0) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P_n(0) = s^N.$

$v = \Pi(s,t)$ er integralflaten vi er ute etter.

I fölge appendix side 37 skal vi först se på

$$\frac{dv}{0} = \frac{dt}{1} = \frac{ds}{\beta s(1-s)}$$

Herav $\frac{dv}{dt} = 0$, $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\beta}\frac{1}{s(1-s)}$ som impliserer

$v = c_1$ og $st = \ln\frac{s}{1-s} + c_2'$ eller $c_2 = \frac{1-s}{s}e^{st}$

Den generelle løsning er gitt ved

$c_1 = \psi(c_2)$. $v = \psi(\frac{1-s}{s}e^{\beta t})$.

Randbetingelsen $\Pi(s,0) = s^N$ gir

$s^N = \psi(\frac{1-s}{s})$; sett $u = \frac{1-s}{s}$, $s = \frac{1}{u+1}$,

$\psi(u) = (u+1)^{-N}$.

Dermed får vi

$$v = \Pi(s,t) = (\frac{1-s}{s}e^{\beta t}+1)^{-N} = s^N\left[\frac{e^{-\beta t}}{1-s(1-e^{-\beta t})}\right]^N$$

med $p = e^{-\beta t}$ får vi

$$\Pi(s,t) = s^N \cdot p^N \left[1-s(1-p)\right]^{-N} = s^N p^N \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{-N}{\nu}(-s)^{\nu}\cdot(1-p)^{\nu}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{N+\nu-1}{\nu}p^N(1-p)^{\nu}s^{N+\nu}$$

$$= \sum_{n=N}^{\infty} \binom{n-1}{n-N} p^N (1-p)^{n-N} s^n$$

Altså har vi $P_n(t) = \binom{n-1}{n-N} \cdot p^N (1-p)^{n-N} \qquad n = N, \ldots$

Dette er den negative binomialfordeling.

Legg merke til at vi kunne fått resultatet over også på følgende måte. Yuleprosessen refererer seg til en populasjon av individer som med intensitet β spaltes i to nye individer $X(t)$ er antall individer, og $X(0) = N$ er populasjonens størelse initialt. Nummerer de N startindividene fra 1 til N. La $Y_i(t)$ være antall individer som er avkom etter startindivid nr. i. Da har vi at $Y_i(t)$ er uavhengig identisk fordelt, og $X(t) = \sum_{i=1}^{N} Y_i(t)$.

Nå er $Y_i(t)$ en ren fødselsprosess med parameter $\lambda_n = n\beta$ og $Y_i(0) = 1$.

Den genererende funksjon $\psi(s,t)$ for $Y_i(t)$ blir - analogt med $\pi(s,t)$ - lik $\dfrac{se^{-\beta t}}{1-s(1-e^{-\beta t})}$ og følgelig har vi

$$\pi(s,t) = \psi(s,t)^N = \left[\frac{se^{-\beta t}}{1-s(1-e^{-\beta t})}\right]^N .$$

Eksempel 2.

Situasjonen er at vi har en ubegrenset parkeringsplass. Bilene ankommer med konstant intensitet λ, og hver bil på plassen har intensitet μ for å forlate parkeringsplassen. La $X(t)$ = antall biler på plassen på tidspunkt t. $X(t)$ er en fødsels- og dødsprosess med parameterene

$\lambda_n = \lambda, \mu_n = n \cdot \mu.$ Anta $X(0) = N.$

$P_n(t)$ må da tilfredsstille

$$P_n'(t) = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu) P_n(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) \; ; \; n = 1,2,\ldots$$

$$P_o'(t) = -\lambda P_n(t) + \mu P_1(t)$$

Multiplikasjon med s^n og summasjon gir

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n P_n'(t) = \lambda s \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} P_{n-1}(t) - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} s^n P_n(t) - \mu s \sum_{n=1}^{\infty} n s^{n-1} P_n(t)$$

$$+ \mu \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) s^n P_{n+1}(t)$$

La $\pi(s,t)$ være den genererende funksjon for $P_n(t)$.

Vi finner

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \mu(s-1) \frac{\partial \pi}{\partial s} = \lambda(s-1)\pi(s,t)$$

som løses ved å se på

$$\frac{dt}{1} = \frac{ds}{\mu(s-1)} = \frac{d\pi}{\lambda(s-1)\cdot\pi}$$

$$\mu \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{s-1} \quad \text{gir} \quad e^{\mu t} = (s-1)\cdot c_1' \, , \; c_1 = (s-1)e^{-\mu t};$$

$$\frac{ds}{d\pi} = \frac{\mu}{\lambda \pi} \quad \text{gir} \quad e^{\frac{\lambda}{\mu}s} = c_2' \pi \quad , \; c_2 = \pi e^{-\frac{\lambda}{\mu}s}.$$

$c_2 = \psi(c_1)$ gir ved randkravet $\pi(s,0) = s^N$

$s^N e^{-\frac{\lambda}{\mu}s} = \psi(s-1)$ det vil si

$$\psi(u) = (u+1)^N e^{-\frac{\lambda}{\mu}(u+1)}$$

Dermed $\Pi(s,t) = \psi\left((s-1)e^{-\mu t}\right) \cdot e^{\frac{\lambda}{\mu}s}$

$$= \left[(s-1)e^{-\mu t}+1\right]^N \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left[(s-1)e^{-\mu t}+1\right]} e^{\frac{\lambda}{\mu}s}$$

$$\underline{\Pi(s,t) = \left[1+(s-1)e^{-\mu t}\right]^N \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-s)(1-e^{-\mu t})}}$$

Sett nå $\rho_t = \frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})$. Da får vi

$$\Pi(s,t) = \left[1-e^{-\mu t}+se^{-\mu t}\right]^N \cdot e^{(s-1)\rho_t}$$

$$= \psi_1(s,t) \cdot \psi_2(s,t)$$

Der ψ_1 er genererende funksjon for $Y(t)$ som er binomisk fordelt $(N, e^{-\mu t})$ og ψ_2 er genererende funksjon for $Z(t)$ som er poissonfordelt med parameter ρ_t. Når $Y(t)$ og $Z(t)$ er uavhengige har vi

$$X(t) = Y(t)+Z(t).$$

Dermed kan vi skrive direkte opp

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} e^{-\mu t i}(1-e^{-\mu t})^{N-i} \frac{\rho_t^{\,n-i}}{(n-i)!} e^{-\rho_t} \quad \text{for } n > N,$$

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} e^{-\mu t i}(1-e^{-\mu t})^{N-i} \frac{\rho_t^{\,n-i}}{(n-i)!} e^{-\rho_t} \quad \text{for } n \leq N.$$

Altså $P_n(t) = e^{-\rho_t} \sum_{i=0}^{\min(n,N)} \frac{1}{(n-i)!} \binom{n}{i} e^{-\mu t i} (1-e^{-\mu t})^{N-i} \rho_t^{\,n-i}$

Følgende ting følger også umiddelbart.

$$\Pr(X(t) < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = \Pi(1,t) = 1.$$

Hvis $N = 0$ får vi $P_n(t) = \frac{\rho_t^n}{n!} e^{-\rho_t}$

Vi ser at $p_n = \lim_{t \to \infty} P_n(t) = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$ og

grensefordelingen er altså uavhengig av N. Dette sees også av at $\Pi(s,t) \to e^{(s-1)\frac{\lambda}{\mu}}$ når $t \to \infty$.

Legg merke til at

$$EX(t) = EY(t)+EZ(t) = Ne^{-\mu t}+\rho_t.$$

Eksempel 3. Køprosess. (Se Karlin side 196.)

Vi har én kø med én ekspeditør. $X(t)$ = køens lengde på tidspunkt t. λ er ankomst intensiteten, μ er betjeningintensiteten, dvs. μdt er sannsynligheten for at en kunde som betjenes skal bli ferdigekspedert i løpet av dt.

$X(t)$ er fødsels- og dødsprosess med

$$\lambda_n = \lambda, \mu_n = \mu, \ n \geq 1; \mu_0 = 0, \lambda_0 = \lambda.$$

$$X(0) = N$$

Vi finner

$$(1) \quad \begin{aligned} P_n'(t) &= \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda+\mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) \qquad n = 1, \dots \\ P_0'(t) &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \end{aligned}$$

Først skal vi se på grensefordelingen $p(n)$ for prosessen. Vi har

$$\begin{aligned} \lambda p(n-1) - (\lambda+\mu)p(n) + \mu p(n+1) &= 0 \qquad n = 1, \dots \\ -\lambda p(0) + \mu p(1) &= 0 \end{aligned}$$

som innsees ved direkte resonnement.

La $\pi(s)$ være den genererende funksjon for $p(n)$. Vi får

$$\lambda s\,\pi(s)-\lambda\pi(s)-\mu\pi(s)+\mu p(0)+\frac{\mu}{s}\pi(s)-\frac{\mu}{s}p(0)=0$$

$$\pi(s)=p(0)\frac{\mu(1-s)}{\lambda s^2-(\lambda+\mu)s+\mu}=p(0)\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}s}$$

$\pi(s)$ er analytisk i området $\langle -\frac{\mu}{\lambda},\frac{\mu}{\lambda}\rangle$. Hvis og bare hvis $\mu>\lambda$ er $\pi(s)$ genererende funksjon for en fordeling.

For $\mu>\lambda$ får vi $\pi(s)=\dfrac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}s}$ fordi $\pi(1)=1$, og

Dermed $p(n)=(1-\frac{\lambda}{\mu})(\frac{\lambda}{\mu})^n$.

Dette resultatet får en også med mer direkte metoder.

La oss nå se på $P_n(t)$.

Ved multiplikasjon av s^n i (1) og summasjon får vi imidlertid ikke noen homogen differensialligning i $\pi(s,t)$.

Vi innfører $P_{-1}(t), P_{-2}(t),\ldots,$ og lar ligningen

$$(2)\qquad P_n'(t)=\lambda P_{n-1}(t)-(\lambda+\mu)P_n(t)+\mu P_{n+1}(t)$$

gjelde for $n=\ldots -2,-1,0,1,\ldots$. Ved å definere $\lambda P_{-1}(t)=\mu P_0(t)$ ser vi at systemet 2 impliserer 1.

Definer $Q(s,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s^nP_n(t)$.

(2) gir
$$\frac{\partial Q}{\partial t}=\left(\lambda s-(\lambda+\mu)+\frac{\mu}{s}\right)\cdot Q$$

$$Q(s,t)=\psi(s)\cdot e^{\left(\lambda s-(\lambda+\mu)+\frac{\mu}{s}\right)t}$$

Vår oppgave er nå å spalte opp Q:

$$Q(s,t) = \Pi(s,t) + \sum_{n=-\infty}^{-1} s^n P_n(t) .$$

Siden $\Pi(s,0) = s^N$, har vi $Q(s,0) = s^N + \sum_{n=-\infty}^{-1} s^n P_n(0) =$ $s^N + \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^{-n}$ hvor vi har innfört $a_n = P_{-n}(o)$.

Altså $$\psi(s) = s^N + \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^{-n} .$$

For å finne rekken til $Q(s,t)$ må vi nå rekkeutvikle $e^{(\lambda s + \frac{1}{s}\mu)t}$, og til det skal vi bruke besselfunksjonen $J_n(z)$.

$$e^{\frac{1}{2}z(\tau - \frac{1}{\tau})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, \tau^n$$

For y reell og $z = iy$, får vi

$$e^{\frac{1}{2}iy(\tau - \frac{1}{\tau})} = e^{\frac{1}{2}y(i\tau + \frac{1}{i\tau})} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(iy)\, \tau^n$$

Erstatt $i\tau$ med τ : $e^{\frac{1}{2}y(\tau + \frac{1}{\tau})} = \sum_{-\infty}^{\infty} i^{-n} J_n(iy) \tau^n$

Funksjonen $I_n(y) = i^{-n} J_n(iy)$ kalles Besselfunksjonen med rent imaginært argument.

Altså $$e^{\frac{1}{2}y(\tau + \frac{1}{\tau})} = \sum_{-\infty}^{\infty} I_n(y)\, \tau^n$$

Sett nå $y = 2\sqrt{\lambda\mu}\, t$, $\tau = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\, s$. Dermed

$$e^{(\lambda s + \frac{\mu}{s})\cdot t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(2\sqrt{\lambda\mu}\, t) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{n}{2}} s^n$$

Og

$$Q(s,t) = \psi(s) \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \cdot e^{(\lambda s + \frac{\mu}{s})t}$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)t} (s^N + \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^{-n}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k(2\sqrt{\lambda\mu} \cdot t)(\tfrac{\lambda}{\mu})^{\frac{k}{2}} s^k$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)t} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big\{ I_{n-N}(2\sqrt{\lambda\mu} \cdot t)(\tfrac{\lambda}{\mu})^{\frac{n-N}{2}} +$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} I_{n+r}(2\sqrt{\lambda\mu} \cdot t)(\tfrac{\lambda}{\mu})^{\frac{n+r}{2}} \cdot a_r \Big\} s^n$$

Ved å skrive $I_n = I_n(2t\sqrt{\lambda\mu})$, $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$ og $a_r \cdot \rho^{\frac{r}{2}} = b_r$ får vi

$$P_n(t) = e^{-(\lambda+\mu)t} \Big\{ I_{n-N}\rho^{\frac{n-N}{2}} + \sum_{r=1}^{\infty} I_{n+r}\rho^{\frac{n}{2}} b_r \cdot \Big\}$$

Vi gjør nå bruk av ligningen

$$\lambda P_{-1}(t) = \mu P_o(t)$$

som ved innsetting gir

$$I_{-N-1}\rho^{\frac{1}{2}-\frac{N}{2}} + \rho^{\frac{1}{2}} \sum_{r=1}^{\infty} b_r I_{r-1} = I_{-N}\rho^{-\frac{N}{2}} + \sum_{r=1}^{\infty} I_r \cdot b_r$$

Nå er $I_{-r} = I_r$:

$$-\rho^{\frac{1}{2}} b_1 I_0 + \sum_{r=1}^{N-1} (b_r - \rho^{\frac{1}{2}} b_{r+1}) I_r + (\rho^{-\frac{N}{2}} + b_N - \rho^{\frac{1}{2}} b_{N+1}) I_N$$

$$+ (-\rho^{\frac{1-N}{2}} + b_{N+1} - \rho^{\frac{1}{2}} b_{N+2}) I_{N+1} + \sum_{r=N+2}^{\infty} (b_r - \rho^{\frac{1}{2}} b_{r+1}) I_r = 0.$$

Dette er en identitet i t, og dermed identitet i de varierende I_r.

Vi får ligningene

$$b_1 = 0, \quad b_r = \rho^{\frac{1}{2}} b_{r+1} \qquad r = 2,\dots,N-1,N+2,\dots$$

$$\rho^{-\frac{N}{2}} + b_N - \rho^{\frac{1}{2}} b_{N+1} = 0 \ , \qquad -\rho^{\frac{1-N}{2}} + b_{N+1} - \rho^{\frac{1}{2}} b_{N+2} = 0$$

som gir

$$b_1 = b_2 = \dots = b_N = 0 \ , \ b_{N+1} = \rho^{-\frac{1+N}{2}} \ , \ b_{N+2} = \rho^{-\frac{1}{2}(N+2)}(1-\rho)$$

$$b_{N+2+m} = \rho^{-\frac{N+m+2}{2}}(1-\rho) \qquad m = 1,2,\dots$$

Sluttresultatet blir

$$P_n(t) = e^{-(\lambda+\mu)t} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{n-N}{2}} \Big[I_{n-N}(2t\sqrt{\lambda\mu}) + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}} I_{n+N+1}(2t\sqrt{\lambda\mu})$$

$$+ \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\frac{r+2}{2}} I_{n+N+r+2}(2t\sqrt{\lambda\mu}) \Big].$$

Eksempel 4.

Et ekspedisjons-sted har så stor kapasitet at alle kundene blir ekspedert med en gang de kommer dit. Ekspedisjonstidene er uavhengige og eksponensielt fordelt med parameter μ. Kundene ankommer i busser. Ventetiden mellom bussankomstene er uavhengige og eksponensielt fordelt med parameter λ. Sannsynligheten for at en buss bringer m kunder er f_m.

La $X(t)$ = antall kunder som blir ekspedert på tidspunkt t. $X(0) = 0$. Vi skal finne et uttrykk for $P_n(t)$.

Av forutsetningene finner vi

$$P_n'(t) = -(\lambda+n\mu)P_n(t)+\lambda\sum_{\nu=0}^{n} f_{n-\nu}P_\nu(t)+(n+1)\mu P_{n+1}(t)$$

La $\Pi(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P_n(t)$, $\phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n f_n$. Dermed

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t} = -\lambda\Pi-\mu s\frac{\partial\Pi}{\partial s}+\lambda\phi\cdot\Pi+\mu\frac{\partial\Pi}{\partial s}$$

Altså
$$\frac{\partial\Pi}{\partial t}+\mu(s-1)\frac{\partial\Pi}{\partial s} = \lambda(\phi-1)\Pi$$

Vi må se på $\frac{\partial t}{1} = \frac{\partial s}{\mu(s-1)} = \frac{\partial\Pi}{\Pi\lambda(\phi-1)}$

$$\mu\cdot\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{1}{s-1} \quad \text{gir} \quad c_1 = (s-1)e^{-\mu t}$$

$$\frac{\partial\Pi}{\Pi} = \frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\phi-1}{s-1}\partial s \quad \text{gir} \quad \Pi = c_2 e^{\frac{\lambda}{\mu}\int_0^s \frac{\phi(\tau)-1}{\tau-1}d\tau}$$

Vi får $\Pi = \psi((s-1)e^{-\mu t})e^{\frac{\lambda}{\mu}\int_0^s \frac{\phi(\tau)-1}{\tau-1}d\tau}$ der ψ er vilkårlig funksjon. Randkravet $\Pi(s,0) = 1$ gir når

$$H(s) = \int_0^s \frac{\phi(\tau)-1}{\tau-1}\,d\tau ,$$

$$\Pi(s,t) = e^{\frac{\lambda}{\mu}\left[H(s)-H(1-(s-1)e^{-\mu t})\right]}.$$

Vi har altså funnet den genererende funksjon for $P_n(t)$. Det er så langt vi kan komme når ikke $\langle f_n\rangle$ eller ϕ er spesifisert.

Appendix. Lösning av partielle differentialligninger.

Vi skal se på lösningen av den partielle differentialligning

$$(1) \qquad P_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + .. + P_{n-1} \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}} = P_n \quad .$$

$P_i = P_i(x_1,..,x_n)$; $i = 1,..,n$ er funksjoner av $x_1,..,x_n$, og $x_n = U(x_1,..,x_{n-1})$ er den ukjente funksjonen. Vi vil tenke oss at U er gitt implisitt ved $f(x_1,..,x_n) = 0$ og vi er interessert i å finne f. Ved partiell derivasjon av identiteten

$$f(x_1,..,x_{n-1}, U(x_1,..,x_{n-1})) = 0$$

får en

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \quad ; \; i = 1,2,..,n-1 \; .$$

Kombineres dette med (1) finner en

$$(3) \qquad P_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + .. + P_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Vi skal altså finne $f(x_1,..,x_n)$ av denne ligningen. Vi skal vise at dette problem kan löses ved å löse det simultane system av ordinære differntialligninger

$$(4) \qquad \frac{dx_i}{dx_1} = \frac{P_i}{P_1} \quad ; \; i = 2,..,n,$$

som gjerne skrives på symmetrisk form

$$(5) \qquad \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_i}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n}$$

(Minst en av funksjonene P_i må være forskjellig fra 0. I (4) har vi forutsatt at det er P_1) .

I(4)oppfatter vi x_i som funksjoner av x_1, $x_i = x_i(x_1)$; $i = 2,..,n$.

Lösningen av (4) kan som kjent vanligvis skrives på formen $x_i = g_i(x_1, c_1,...,c_{n-1})$; $i = 2,..,n$ hvor $c_1,..,c_{n-1}$ er vilkårlige konstanter. Når alle g_i er funnet kan man tenke seg de n-1 ligningene $x_i = g_i$ löst med hensyn på $c_1,..,c_{n-1}$, slik at man får

$$c_i = f_i(x_1,..,x_n) \quad ; \quad i = 1,2,..,n-1 \quad . \tag{6}$$

Vi skal anta at den generelle lösning av (4) kan skrives på formen (6) hvor jakobideterminanten for $f_1,...,f_{n-1}$ med hensyn på $x_1,..,x_{n-1}$ er forskjellig fra 0. (Det vil si at $f_1,..,f_{n-1}$ er funksjonelt uavhengige.)

Vi ser nå at alle f_i ; $i = 1,...,n-1$ er lösning av (3). Vi har nemlig ved derivasjon av (6) med hensyn på x_1, idet $x_j = x_j(x_1)$; $j = 2,...,n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dx_1} = 0 \quad . \tag{7}$$

Dermed får vi ved å benytte (4)

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \cdot \frac{P_j}{P_1} = 0 \quad ; \quad i = 1,..,n-1 \quad ,$$

som også kan skrives

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \cdot P_j = 0 \quad ; \quad i = 1,..,n-1 \quad . \tag{8}$$

Hvis F er en deriverbar funksjon, så ser en ved innsetting at $f = F(f_1,..,f_{n-1})$ er lösning av (3). Vi skal nå vise at dette er den generelle lösning.

La altså f være en vilkårlig lösning av (3). Betrakt nå de n ligningene (3) og (8) med $P_1,..,P_n$ som "ukjente" for fast $(x_1,..,x_n)$. Såfremt ikke alle P_i skal være 0, må determinanten for dette ligningssystemet være 0. Dette må gjelde for alle $(x_1,..,x_n)$, og fölgelig må vi ha

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0$$

La oss nå anta at $y_i = f_i(x_1,\ldots,x_n)$ $i=1,\ldots,n-1$ kan löses med hensyn på $x_1,\ldots,x_{n-1}$. La lösningen være

$x_i = \varphi_i(y_1,\ldots,y_{n-1},x_n)$. Dette innsettes i f og vi får bestemt F ved

$$f(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}, x_n) = F(y_1,\ldots,y_{n-1},x_n).$$

Herav får vi

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial x_n} .$$

Av $f_i(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1},x_n) = y_i$ som identitet i x_n får vi

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n} + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} = 0 \text{ ; } i = 1,\ldots,n-1.$$

Hvis vi multipliserer j-te kolonne i Δ med $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n}$ og adderer denne kolonnen til n-te kolonne, får vi bragt Δ på formen

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}} & 0 \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0$$

Dermed $\Delta = \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot \delta$ hvor δ er jacobideterminanten for $f_1, \ldots, f_{n-1}$ med hensyn på $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Vi antok $\delta \neq 0$, og siden $\Delta = 0$ må $\frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$, men det betyr at F er uavhengig av x_n. Fölgelig kan en vilkårlig f som er lösning av (3) skrives på formen $f = F(f_1, \ldots, f_{n-1})$. Det var hva vi skulle vise.

(Dette fölger også direkte av et generelt resultat om jacobideterminanter ved å utnytte at $\Delta = 0$)

Konklusjon : For å löse den partielle differntialligning (1), löser man först det simultane ligningssystem (4) og skriver lösningen på formen (6). Da er U gitt ved

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, U) = 0,$$

hvor $$f = F(f_1, \ldots, f_{n-1}) ,$$

og F er en vilkårlig deriverbar funksjon.

d) Laplacetransformasjoner i markovprosesser.[*]

Gitt en markovprosess $X(t)$ med endelig tilstandsrom $1,2,\ldots,N$, og infinitessimal- eller intensitets-matrise $A = \{A_{ij}\}$ dvs. $A_{ij}dt$ $(i \neq j)$ er sannsynlighet for å gå fra i til j i løpet av dt,

$A_{ii} = -\sum_{j \neq i} A_{ij}$. $p = [p_1,\ldots,p_N]$ er initialfordelingen, og $P_i(t) = Pr(X(t) = i)$. Vi skal skrive $P_{ij}(t) = Pr(X(t)=j \mid X(0)=i)$, $P(t) = [P_1(t),\ldots,P_N(t)]$ og $\mathbb{P}(t) = \{P_{ij}(t)\}$. Vi har

$$P(t) = p \cdot \mathbb{P}(t)\ , \text{ og } \mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t) \cdot A.$$

For å løse ligningen over skal vi innføre Laplacetransformasjon. Gitt en reell funksjon f definert på $[0,\infty\rangle$. Hvis integralet

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt \quad \text{konvergerer for}$$

$s > s_o$, skal vi definere den Laplacetransformerte φ til f slik

$$\varphi(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

Laplacetransformasjon er en - entydig avbildning. Se for eksempel R.V. Churchill : Operational Mathematics.

Hvis f er en deriverbar funksjon slik at både f og f' har Laplacetransformerte, skal vi vise at

$$\int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt = s \cdot \varphi(s) - f(o)$$

Vi skal også forutsette at $\lim_{t \to \infty} f(t)e^{-st}$ eksisterer for noen s.

$$\int_0^A f'(t)e^{-st}dt = \Big[f(t)e^{-st}\Big]_0^A + s\int_0^A f(t)e^{-st}dt$$

$$\to \lim_{t \to \infty} f(t)e^{-st} - f(0) + s.\varphi(s) \quad \text{når } A \to \infty \ .$$

Siden vi forutsatte at $\lim_{t \to \infty} f(t)e^{-st} = L$ eksisterte,

[*]) Basert på Howard : DYNAMIC PROGRAMMING AND MARKOV PROCESSES".

må den være 0, for anta $|L| > 0$, da eksisterer en t_o slik at $|f(t)e^{-st}| > \frac{|L|}{2}$ for $t > t_o$, men da kan $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ ikke eksistere, hvilket strider mot forutsetningene.

Altså $\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = s\varphi(s)-f(0)$.

Følgende tabell over funksjoner $f(t)$ og deres Laplacetransformerte $\varphi(s)$ er lett å verifisere.

Funksjon betegnet med latinske bokstaver	Laplace transformert betegnet med tilsvarende greske bokstaver
$f(t)$	$\varphi(s)$
$k_1f_1(t)+k_2f_2(t)$	$k_1\varphi_1(s)+k_2\varphi_2(s)$
$f'(t)$ (hvis f er deriverbar)	$s\cdot\varphi(s)-f(0)$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
1	$\frac{1}{s}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-at}f(t)$	$\varphi(s+a)$

La nå til funksjonen $P_i(t)$ höre den Laplace - transformerte $\pi_i(s)$ og til vektorfunksjonen $P(t)$ höre Laplacevektoren $\Pi(s)$.

Av fundamentalligningen $P'(t) = P(t)\cdot A$ følger

$$s\cdot\Pi(s)-p = \Pi(s)\cdot A$$

$$\Pi(s)(sI-A) = p$$

$$\Pi(s) = p(sI-A)^{-1}$$

Eksempel 1.

I en fabrikk er det en stor maskin. Denne maskinen kan gå helt i stykker, så den ikke kan kjøres i det hele tatt, eller den kan gå delvis i stykker, så den kan kjøres på halv fart. Når den går helt i stykker, kommer det med en gang en reparatør som leter etter feilen. Med intensitet 3λ finner han en feil som bringer maskinen opp i halv fart, og med intensitet 3λ finner han en feil som bringer den opp i full fart.

Fra halv fart kan den med intensitet 3λ bringes opp i full fart, og med intensitet λ oppstår en ny feil som setter maskinen ut av drift.

Fra full drift kommer den med intensitet λ ned i halv fart og med intensitet 2λ ut av drift.

La $X(t) = 1$ hvis helt i stand

$X(t) = 2$ hvis halv fart

$X(t) = 3$ hvis maskinen er ute av drift på tidspunkt t.

Vi forutsetter at $X(t)$ er en Markovprosess med intensitetsmatrise

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \lambda$$

Vi skal undersøke $P(t)$, ved å se på $\Pi(s)$.
Ved å velge hensiktsmessig tidsenhet, kan vi få $\lambda = 1$.

$$sI-A = \begin{bmatrix} s+3 & -1 & -2 \\ -3 & s+4 & -1 \\ -3 & -3 & s+6 \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{s(s+6)(s+7)}\begin{bmatrix} s^2+10s+21 & s+12 & 2s+9 \\ 3s+21 & s^2+9s+12 & s+9 \\ 3s+21 & 3s+12 & s^2+7s+9 \end{bmatrix}$$

Ved delbrøkoppspalting element for element, får vi

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{s}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{7} & \frac{3}{14} \end{bmatrix} + \frac{1}{s+6}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{s+7}\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & -\frac{9}{7} & \frac{9}{7} \end{bmatrix}$$

La $H(t)$ være den invers-transformerte av $(sI-A)^{-1}$, $(sI-A)^{-1}$ er m.a.o. Laplace-transformasjonen av $H(t)$.

Av tabellen ser vi at $H(t)$ kan skrives direkte opp:

$$H(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{7} & \frac{3}{14} \end{bmatrix} + e^{-6t}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + e^{-7t}\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & -\frac{9}{7} & \frac{9}{7} \end{bmatrix}$$

Når $p = [p_1, p_2, p_3]$, $\sum p_i = 1$ er initialfordelingen, har vi altså resultatet

$$P(t) = \Big[\tfrac{1}{2} + e^{-6t}(\tfrac{1}{2}p_1 - \tfrac{1}{2}(p_2+p_3)),\ \tfrac{2}{7} + e^{-6t}(-p_1+p_2+p_3) +$$

$$e^{-7t}(\tfrac{5}{7}p_1 - \tfrac{2}{7}p_2 - \tfrac{9}{7}p_3),\ \tfrac{3}{14} + \tfrac{1}{2}e^{-6t}(p_1-p_2-p_3) +$$

$$\tfrac{1}{7}e^{-7t}(-5p_1+2p_2+9p_3)\Big].$$

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \tilde{p} = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{7}, \frac{3}{14}\right].$$

I eksemplet kunne $H(t)$ spaltes opp i en stasjonær del S og en transient del $T(t)$ som gikk eksponentielt mot 0.

At dette generelt er riktig, kan en innse ved å vise punktene under.

(i) $|sI-A|$ er et polynom $U(s)$.

(ii) Når prosessen har én rekurent klasse, er $s = 0$ et enkelt nullpunkt for $U(s)$. Alle nullpunktene i $U(s)$ er ikke-positive.

(iii) $(sI-A)^{-1} = \left\{\frac{V_{ij}(s)}{U(s)}\right\}$, og kan delbrøkoppspaltes:

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{s} S + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{s+s_i} T_i \quad \text{der} \quad s_i > 0.$$

(Det er forutsatt at alle s_i er forskjellige. $V_{ij}(s)$ er definert som på side 24.)

Hvis man bare er interessert i $\tilde{p} = \lim_{t \to \infty} P(t)$, behøver man ikke å bruke apparatet over.

Vi har nemlig

$$\tilde{p}_i = \sum_{i \neq j} \tilde{p}_j \cdot A_{ij} \cdot dt + \left(1 - \sum_{j \neq i} dt A_{ij}\right) \tilde{p}_i = \tilde{p}_i + \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \tilde{p}_j \cdot dt$$

Altså $\tilde{p} \cdot A = 0.$

Hvis prosessen har én rekurent klasse, har A rang $N-1$, og $\tilde{p}$ er bestemt entydig ved kravet

$$\sum_{i=1}^{N} \tilde{p}_i = 1.$$

e) Potensering av matriser.

Gitt en $N \times N$ matrise P. Vi er interessert i å finne P^n. Før er det vist at P^n er koeffisienten foran s^n i rekken til $(I-sP)^{-1}$.

P^n kan også finnes ved å betrakte egenverdiene og egenvektorene for P.

La $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ være egenverdiene for P dvs. røttene i $|P-\lambda I|$. La $c_1 \cdots c_N$ være høyre-egenvektorene for P definert ved

$$P \cdot c_j = \lambda_j c_j \quad \text{eller} \quad (P-\lambda_j I) \cdot c_j = 0$$

$$\text{og} \quad c_j \neq 0.$$

Setning.

Hvis alle egenverdiene λ_j er forskjellige, er $c_1, \ldots, c_N$ lineært uavhengige.

Bevis.

Anta at $c_1, \ldots, c_N$ er lineært avhengige, $\lambda_N \neq 0$
$c_N = \sum_{i=1}^{r} t_i \cdot c_i$ der $c_1, \ldots, c_r$ er lineært uavhengige.
Da har vi

$$P \cdot c_N = \sum_{i=1}^{r} t_i P c_i = \sum_{i=1}^{r} t_i \lambda_i c_i$$

men

$$P c_N = \lambda_N c_N$$

Altså

$$c_N = \sum_{i=1}^{r} t_i \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda_N} c_i = \sum_{i=1}^{r} t_i \cdot c_i$$

siden $c_1, \ldots, c_r$ er lineært uavhengige, må $t_i = t_i \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda_N}$,
siden $c_N \neq 0$ må minst en $t_i \neq 0$ for eksempel t_j
og $\lambda_N = \lambda_j$ som strider mot forutsetningene.

Matrisen $c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_N \end{bmatrix}$ er ifølge setningen ikke-singulær når egenverdiene er forskjellige. Det skal vi anta inntil videre.

Pr. definisjon har vi

$$P \cdot C = C \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_N \end{bmatrix} = C \cdot \Lambda$$

$$P = C\Lambda C^{-1}$$

Dermed, $P^2 = C\Lambda C^{-1} \cdot C\Lambda C^{-1} = C\Lambda^2 C^{-1}$ og

$$P^n = C\Lambda^n C^{-1}.$$

Siden Λ er diagonalmatrise er den lett å potensere

$$\Lambda^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_N^n \end{bmatrix}$$

Problemet er nå å finne egenverdiene og egenvektorene. En metode er å løse N-tegradsligningen

$$|P - \lambda I| = 0,$$

og etterpå finne egenvektorene. Hvis P er overgangsmatrise i en markovkjede, har vi $\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1 \quad i = 1,\dots,N,$ og $\lambda = 1$ er følgelig egenvektor.

En annen og ofte regnemessig enklere metode, er følgende

(i) Bestem $c_v = \begin{bmatrix} c_{1v} \\ c_{2v} \\ \vdots \\ c_{Nv} \end{bmatrix}$ og λ_v av systemet

$$\sum_{j=1}^{n} (P_{ij} - \delta_{ij}\lambda_v) \cdot c_{jv} = 0 \qquad i = 1,2,\dots,N$$

ved bare å ta hensyn til de λ_v som gir $c_v \neq 0$.

Vi har benyttet $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j. \end{cases}$

(ii) Når $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ er bestemt, bestemmes elementene $\bar{c}_{vi}$ i $c^{-1} = \{\bar{c}_{vi}\}$ av systemet

$$\sum_{i=1}^{N} \left[P_{ij} - \delta_{ij}\lambda_v\right] \bar{c}_{vi} = 0$$

idet en normerer $\bar{c}_v$ slik at

$$\bar{c}_v \cdot c_v = \sum_{j=1}^{N} \bar{c}_{vj} \cdot c_{jv} = 1.$$

(iii) Elementene $P_{ij}^{(m)}$ i P^m er bestemt ved

$$P_{ij}^{(m)} = \sum_{v=1}^{N} c_{iv} \cdot \bar{c}_{vj} \cdot \lambda_v^m$$

Av det siste uttrykket ser en at hvis $\lambda_v = 0$, behøver en ikke regne ut c_v og $\bar{c}_v$.

Eksempel.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ligningssystemet under (i) blir (vi sløyfer fotskrift v)

$$-\lambda c_1 + c_4 = 0 \ , \ -\lambda c_2 + c_4 = 0 \ , \ \tfrac{1}{2}c_1 + \tfrac{1}{2}c_2 - \lambda c_3 = 0 \ , \ c_3 - \lambda c_4 = 0 \ .$$

Vi antar $\lambda \neq 0$, da har vi $c_1 = c_2$. La oss sette $c_1 = 1 = c_2$ dermed $c_4 = \lambda$ $c_3 = \lambda^{-1}$. Den siste ligningen gir $\lambda^{-1} - \lambda^2 = 0$ eller $\lambda^3 = 1$ som har lösningen

$$\lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = e^{\frac{2\pi}{3}i} \ , \ \lambda_3 = e^{\frac{4\pi}{3}i} = \lambda_2^{-1} \ .$$

	$\lambda_1 = 1$	λ_2	λ_3
c_{1v}	1	1	1
c_{2v}	1	1	1
c_{3v}	1	λ_3	λ_2
c_{4v}	1	λ_2	λ_3

systemet (ii)

$$-\lambda\bar{c}_1 + \tfrac{1}{2}\bar{c}_3 = 0 \qquad -\lambda\bar{c}_2 + \tfrac{1}{2}\bar{c}_3 = 0 \qquad -\lambda\bar{c}_3 + \bar{c}_4 = 0 \qquad \bar{c}_1 + \bar{c}_2 - \lambda\bar{c}_4 = 0$$

som gir

	$\bar{c}_{v1}$	$\bar{c}_{v2}$	$\bar{c}_{v3}$	$\bar{c}_{v4}$
$\lambda_1 = 1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
λ_2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}\lambda_2$	$\frac{1}{3}\lambda_3$
λ_3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}\lambda_3$	$\frac{1}{3}\lambda_2$

Dermed

$$P_{11}^{(m)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\lambda_2^m + \frac{1}{6}\lambda_3^m = \frac{1}{6}\left[1 + 2\cos(\frac{2\pi}{3}m)\right]$$

$$P_{12}^{(m)} = \frac{1}{6}(1 + \lambda_2^m + \lambda_3^m) = \frac{1}{6}\left[1 + 2\cos(\frac{2\pi}{3}m)\right]$$

$$P_{13}^{(m)} = \frac{1}{3}(1 + \lambda_2 \cdot \lambda_2^m + \lambda_3 \cdot \lambda_3^m) = \frac{1}{3}\left[1 + 2\cos(\frac{2\pi}{3}(m+1))\right]$$

$$\vdots$$

Vi skal også se på det tilfelle at ikke alle egenverdiene er like. Det viktigste tilfelle er når P kan skrives på blokkform

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & O & O & \cdots & O \\ O & P_2 & O & \cdots & O \\ O & O & P_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ O & O & & P_n & O \\ U & V & \cdots & Y & T \end{bmatrix}$$ der $P_1, \ldots, P_n$

er kvadratiske. Når P er en overgangsmatrise, er $P_1, \ldots, P_n$ overgangsmatriser for de n rekurente klassene.

Vi skal anta $n = 2$. Det som står nedenfor kan uten videre generaliseres.

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ U & V & T \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} P_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & P_2^2 & 0 \\ U_2 & V_2 & T^2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad P^n = \begin{bmatrix} P_1^n & 0 & 0 \\ 0 & P_2^n & 0 \\ U_n & V_n & T^n \end{bmatrix}$$

Her er U_n bestemt ved

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ U & T \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_1^n & 0 \\ U_n & T^n \end{bmatrix}$$ og likeledes er

V_n bestemt.

Hvis egenverdiene for P_1 er forskjellige kan en finne P_1^n ved egenverdimetoden. Likeledes for P_2 og T.

Hvis i tillegg egenverdiene i

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ U & T \end{bmatrix}$$ som er egenverdiene i P_1 pluss egenverdiene

i T er forskjellige, kan vi bruke egenverdimetoden for å finne U_n.

Når P er overgangsmatrise, er som oftest disse betingelsene oppfylt. 1 er nemlig egenverdi i P_1 og P_2, men ikke i T, resten av egenverdiene er vanligvis forskjellige.

Eksempel 2

Vi har

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}$$

og skal undersöke P^m .

P er på formen $\begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ U & V & T \end{bmatrix}$. Vi skal

i eksemplet bare ta for oss

$\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ U & T \end{bmatrix}$, og finne elementene i U_m

En ser direkte av formen på $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

at den har egenverdiene 1 og -1 med

tilhörende höyre egenvektorer $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

og venstre egenvektorer $\begin{bmatrix} 1 , 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -1 , 1 \end{bmatrix}$.

Likeledes for $T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}$ som har

egenverdiene $\frac{1}{4}$ og $-\frac{1}{4}$

höyre egenvektorer $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

og venstre egenvektorer $[1\ ,\ 2]$ og $[1\ ,\ -2]$.

$\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ U & T \end{bmatrix}$ har altså egenverdiene $1, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$.

Hvis vi lar $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$ betegne höyre egenvektorer

tilhörende λ, har vi for

$\lambda = 1$ at $c_1 = c_2 = 1$ og c_3, c_4 er

bestemt av

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} c_1 \\ -\frac{1}{4} c_1 \end{bmatrix} .$$

Dermed $c_3 = \frac{2}{5}$, $c_4 = \frac{3}{10}$.

Likeledes for $\lambda = -1$.

For $\lambda = \frac{1}{4}$ er det klart at $P_1 - I\lambda$ er ikkesingulær, og fölgelig må $c_1 = c_2 = 0$.

Slik får en de höyre egenvektorene

λ	1	-1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
c	1	-1	0	0
	1	1	0	0
	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$	1	1
	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

På samme vis får en de venstre egenvektorene $\bar{c}$ som etter normering blir .

λ	$\bar{c}$			
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{2}$	-1

Hvis $P^m = \left[P^{(m)}_{i,j}\right]$ er $U_m = \begin{bmatrix} P^{(m)}_{6,1} & P^{(m)}_{6,2} \\ P^{(m)}_{7,1} & P^{(m)}_{7,2} \end{bmatrix}$,

der hvert av elementene nå kan regnes ut .

Vi finner for eksempel

$$P^{(m)}_{7,2} = \frac{3}{20} + \frac{7}{60}(-1)^m - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^m - \frac{1}{15}\left(\frac{-1}{4}\right)^m = \begin{cases} \frac{4}{15} - \frac{4}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^m & \text{for m partal} \\ \frac{1}{30} - \frac{2}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^m & \text{for m odde.} \end{cases}$$