Skriving i matematikk

- *En kvalitativ studie av loggskriving i matematikk med fokus på begrepsforståelse i derivasjon*

Thea-Karoline Nomerstad

Masteroppgave ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Utdanningsvitenskapelig fakultet.

UNIVERSITETET I OSLO

Våren 2016

Skriving i matematikk

- En kvalitativ studie av loggskriving i matematikk med fokus på begrepsforståelse i derivasjon

2016

Skriving i matematikk

Thea-Karoline Nomerstad

http://www.duo.uio.no/

Trykk: Reprosentralen, Universitetet i Oslo

Sammendrag

Begrepsforståelse handler om å se den matematiske kunnskapen som et helhetlig bilde og å bygge opp kunnskapen i hierarkiske kunnskapsskjemaer. Begrepsforståelse utvikles av aktiviteter som legger til rette for refleksjon og utforsking. I norsk skole består mye av fokuset i matematikkundervisningen av oppgaveregning og gjennomgang av temaer. Denne studien ønsker å se på bruken av skriving, i form av faglogg, i matematikkundervisningen, for å undersøke elevers begrepsforståelse. Med dette er det blitt en todelt problemstilling, som lyder; *'Hvordan er loggskrivingsferdigheter og bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling i fagloggene til elever i en 1T-klasse?'* og *'Hva forteller fagloggene til elever i en 1T matematikklasse om begrepsutvikling i derivasjon gjennom loggskriving?'*.

Dokumentmaterialet for studien er til sammen 65 faglogger, samlet inn over tre loggføring-søkter. Elevene fikk ca. 10 minutter til å skrive om det de ønsket fra timen. Dette skulle være en faglogg, med et matematisk fokus. Studien er todelt; en dokumentanalyse og en casestudie. Dokumentanalysen bruker Clarke, Waywood, og Stephens (1993) sine tre nivåer for loggskriving; fortellende, oppsummerende og dialogisk, som teoretisk inspirasjon til kategoriseringen av elevenes loggskrivingsferdigheter. Elevenes bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling fremkommer også i denne analysedelen. Videre benyttes Sfard (1991) sine tre utviklingsnivåer for begrepsforståelse som teoretisk grunnlag for casestudien. Her analyseres elevenes utvikling i begrepsforståelse som kommer til syne gjennom loggene.

Denne studien har vist at halvparten av loggene har vært godt oppsummerende logger, og elevene har vanskeligere for å skrive godt oppsummerende logger når tema blir mer svevende for dem. Det ble ikke observert noen dialogiske logger, hvilket ikke er så rart da det kun ble utført tre loggføringsøkter i denne studien. Det viser seg at det er sterk korrelasjon mellom loggskrivingsnivå og bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling, kanskje var dette fordi det krever bedre begrepsforståelse å implementere dette i teksten på en god måte. Til slutt bekrefter denne studien at faglogger kan fortelle mye om elevenes begrepsforståelse, men det krever at elevenes loggskrivingsferdigheter er gode. Fortellende logger forteller lite eller ingenting om elevenes begrepsforståelse, mens oppsummerende logger viser hvordan eleven ser på den matematiske ideen og kan avsløre eventuelle misoppfatninger.

Forord

Endelig er målet nådd. Etter fem fine år ved Universitetet i Oslo, avslutter jeg med denne masteroppgaven min utdanning som realfagslektor med fordypning i matematikkdidaktikk. Årene har gått fort, og jeg er nå klar for å praktisere min lærdom. Temaet for min masteroppgave, skriving i matematikk, vakte min interesse da jeg var i praksis. Gjennom arbeidet med denne studien har jeg blitt inspirert til å benytte skriving som et verktøy i matematikk, noe jeg vil inkludere i min kommende matematikkundervisning.

Jeg ønsker først og fremst å rette en stor takk til min veileder, førsteamanuensis Guri Nortvedt. Takk for at du alltid har vært tilgjengelig da jeg har trengt det, og takk for at du har vært en så god støtte gjennom dette siste halvåret. Du har gitt meg utallig mange gode råd og hjulpet meg å holde motivasjonen oppe. Jeg vil også rette en takk til lærer og elever som har hjulpet meg å gjøre denne studien mulig, ved å gi et rikt dokumentmateriale. Til slutt ønsker jeg å takke min fantastiske svigerinne, Ann-Therese Dalbakk, som har lest korrektur og gitt gode tilbakemeldinger i innspurten av denne masteroppgaven.

Avslutningsvis må jeg takke studiegjengen som gjennom alle studieårene har vært hjelpsomme, vi blir gode lærere med en sånn god delingskultur!

Oslo, 25. mai 2016

Thea-Karoline Nomerstad

Innholdsfortegnelse

Figurer

Tabeller

Tekstutdrag

1 Introduksjon

Grunnopplæringen i Norge, som omfatter grunnskole og videregående skole, har mange positive sider. Det gjelder stor trivsel, relativt lite mobbing, gode relasjoner med lærer og gode materielle ressurser (Kjærnsli & Olsen, 2013; Wendelborg, 2015). I følge stortingsmelding 30 (2003-2004), Kultur for læring, scorer Norge noe under snittet når det kommer til arbeid med de grunnleggende ferdighetene, noe også andre nasjonale og internasjonale studier viser. I stortingsmeldingen står det tydelig at grunnleggende ferdigheter må komme inn i alle fag, noe som igjen er utgangspunktet for at de fem grunnleggende ferdighetene ble innført i alle fag med Kunnskapsløftet i 2006. I 2013 ble læreplanene revidert som følge av et ønske om klarere fremdrift for grunnleggende ferdigheter (Kunnskapsdepartementet, 2013). Dette viser hvordan fokuset på grunnleggende ferdigheter blir satt i sentrum som en viktig del av læringen, også i matematikk.

Skriving i matematikk kan for noen virke påtrengt eller unaturlig. For eksempel påpeker Kenney, Shoffner, og Norris (2014) at lærerstudenter mener at det er vanskelig å få elevene til å forstå hensikten med skriving i matematikk. For at skriving skal inngå i matematikk som en naturlig del, vil det være viktig å kunne peke på hva skriving er og kan være i matematikk. Tradisjonelt er skriving i matematikk sett på som prestasjonsskriving (Lorentzen & Kringstad, 2014). Læreplanen underbygger dette ved å legge fokuset på tekniske ferdigheter som for eksempel å lage skisser eller tabeller, formalisme og kommunikasjon (Utdanningsdirektoratet, 2013). Samtidig beskrives skriving som et redskap for å utvikle egne tanker, egen læring og evnen til å systematisere enkle situasjoner til en helhet og se mer generelle sammenhenger. Tankeskriving, som er en friere form for skriving, vil kunne styrke de sistnevnte momentene i større grad enn hva prestasjonsskriving kan. Prestasjonsskriving settes ofte i sammenheng med oppgaveregning, prøver eller andre skriftlige aktiviteter som skal rettes.

1.1 Hvorfor er skriving i matematikk viktig?

Skriving i matematikk stiller høyere krav til presisjon og nøyaktighet enn hva muntlig aktivitet og tankevirksomhet gjør (Sterrett, 1990). Elevene får dermed et metaperspektiv på egen læring (Sterrett, 1990). Dette gir blant annet mulighet for egenvurdering, som er en av de fire prinsippene for god underveisvurdering (Utdanningsdirektoratet, 2014). Skriving i matematikk legger på denne måten også til rette for at elevene forstår hva de kan. Ofte tenker man at man forstår noe når man gjenkjenner noe (Sterrett, 1990). For eksempel kan man se uttrykket $f(x) = 3x^2$ som skal deriveres $f'(x) = 6x$. Kanskje tenker man at dette kan jeg, det er jo bare 'å ta ned' 2-tallet, $f'(x) = 2 \times 3x$, men hva skjer om du skal forklare hva dette betyr? Hva forteller grafen $f'(x) = 6x$? Ved å forsøke å skrive ut forklaringen vil hull i kunnskapen og misoppfatninger komme til syne. Eleven kan oppdage de eventuelle mis-oppfatningene selv, da skriving gir umiddelbar forsterking og feedback. Slik kan skriving gjøre elevene til en mer aktiv lærende, ved å bruke flere mekanismer samtidig. Skriving krever arbeid med hånd, øyne og tankeprosesser samtidig. I tillegg settes krav til ulike typer presentering, som illustrasjoner og symboler (Morgan, 2002). Morgan (2002) forteller også at skriving er sammenbindende, da skriving legger til rette for å knytte sammen forkunnskaper og ny kunnskap.

Pugalee (1997) forteller at skriving i matematikk ble anerkjent som en viktig del av læreplaner allerede på 1980-tallet. Han henviser til NCTM (National Council of Theachers of Mathematics) som forteller at skriving i matematikk kan gi motivasjon og gir elevene evnen til å se verdien i å kunne matematikk, få troen på sine egne matematiske ferdigheter, bli matematiske problemløsere, samt å kommunisere og argumentere matematisk. Skriving i matematikk kan altså være positivt i forhold til alt fra motivasjon og holdninger til forståelse. Denne oppgaven ønsker å sette fokus på forståelsen gjennom skriving.

Hittil er mange av elevenes fordeler ved skriving i matematikk blitt drøftet. Pugalee (1997) peker også på lærernes utbytte av elevenes loggskriving. Han skriver at lærerne får et bredere innsyn i elevenes forståelse. I tillegg skapes en dialog mellom elev og lærer som legger til rette for individuelle tilbakemeldinger.

1.2 Problemstilling

Mål for denne studien er å ta for seg skriving som grunnleggende ferdighet, med fokus på loggskriving, 'skriving for læring', i matematikk. Motivasjon for oppgaven er å finne ut om loggskriving kan være positivt for utvikling av begrepsforståelse under arbeid med derivasjon i en matematikk 1T-klasse. For å kunne undersøke dette vil det være naturlig å se på måten elevene skriver logg på. Derfor vil studien ha en todelt problemstilling:

> *Hvilke ferdigheter i loggskriving, og bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling kommer frem i fagloggene til elever i en 1T-matematikkklasse?*

Hva forteller fagloggene til elever i en 1T-matematikklasse om begrepsutvikling i derivasjon gjennom loggskriving?

Problemstillingene peker direkte på hva fagloggene forteller. Studien ønsker ikke å undersøke hvordan elevenes oppfatning av sin egen begrepsutvikling er, men heller hva datamaterialet forteller om elevenes begrepsutvikling.

I en undersøkelse for 1. årsstudenter ved et universitet i Iran viser resultatene at begrepsforståelsen innenfor derivasjon er svært lav (Hashemi, Abu, Kashefi, & Rahimi, 2014). På et spørsmål som omhandlet absolutt maksimum og minimum, kunne ingen studenter besvare på en måte som koblet grafene og det regnetekniske sammen. Bare 4 studenter hadde en god matematisk definisjon, 7 en riktig definisjon, 7 gav kun definisjon for maksimum og minimum, mens hele 42 studenter ikke besvarte spørsmålet. Det å koble grafiske representasjoner og algebra viste seg å være meget utfordrende for disse studentene. I fagloggene som er dokumentmaterialet til studien vil dette bli drøftet. Skriving av faglogg handler om å beskrive hva man kan, hva man har lært eller hva man syns er vanskelig, med et rent faglig fokus.

Det brukes flere ulike definisjoner i denne oppgaven. Nedenfor er to av de mest sentrale definisjonene presentert.

Hiemstra (2001) sin definisjon av faglogg (Theory log) blir benyttet som grunnlag i denne oppgaven;

> *'… students who choose to keep a theory log are asked to make notes regarding what they perceive to be theoretical concepts, salient points, truths, bridges to known theory, ideas to be tested, and gaps in the knowledge. They are encouraged to ask various kinds of epistemological, experiential, communicative, or political questions about what they read.'*
>
> (Hiemstra, 2001, s. 5)

Denne definisjonen av faglogg viser at elevene skal bli bevisstgjort på at man skal ha et faglig fokus hvor man skriver det man ser som viktig, forsøke å finne sammenhenger, teste ut ideer og beskrive det som er vanskelig.

Studien ønsker å undersøke faglogg sett opp mot begrepsforståelse. Ved å se på Kilpatrick, Swafford, og Findell (2001) sin definisjon av begrepsforståelse, finnes flere av de samme aspektene. Definisjonen lyder; '*Conceptual understanding refers to an integrated and functional grasp on mathematical ideas'* (2001, s. 118). Kilpatrick et al. (2001) presiserer at begrepsforståelse er en dypere forståelse enn kunnskap om fakta og metoder. Det handler om å skape et nettverk av kunnskap, som kan koble forkunnskaper sammen med ny kunnskap. Begrepsforståelsen gir elevene flere 'knagger' å henge kunnskapen på, slik at det lettere kan hentes opp igjen når man kommer til ulike regneoppgaver.

1.3 Konteksten rundt prosjektet

Studien er utført med en 1. klasse ved en videregående skole som ligger sentralt i en større norsk by. Klassen går studiespesialisering med realfaglig retning, og består av 8 jenter og 15 gutter. Skolen har fokus på å utvikle seg med tanke på å bruke skriving mer aktivt, og har blant annet vært med i skrivesenterets prosjekt 'skriving i alle fag'. Dette prosjektet er knyttet til strategisk plan ved den videregående skolen. 'Skriving i alle fag' bygger på kommunens skriveplan for videregående skole, som er utviklet fra Utdanningsdirektoratets 'Rammeverk for grunnleggende ferdigheter'. Prosjektet ble initiert av ledelsen ved skolen, men drevet av en prosjektgruppe bestående av en tverrfaglig gruppe lærere.

Denne elevgruppen er fra tidligere vant med bruk av logg i undervisning, men i form av egenvurderingslogg eller undervisnings-/lærervurderingslogg. Faglogg er dermed ukjent for elevene. Fagloggen har et matematisk fokus og utfordrer eleven til kritisk refleksjon og tenking rundt terminologi, formler og definisjoner (Hiemstra, 2001).

Mye av tidligere forskning rundt skriving i matematikk handler i stor grad om å kunne kommunisere matematikk. Pugalee (2001) peker på at refleksjon og kommunikasjon er to sammenvevde prosesser. Han viser til NCTM som sier at skriving i matematikk hjelper eleven i konsolideringen av sine tanker, ved å 'tvinges' til å reflektere rundt sitt eget arbeid og klargjøre sine tanker i forhold til det. Ved skriving opprettholdes utviklingen av tre aspekter; resonnering, kommunikasjon og å se sammenhenger (Pugalee, 2001). I så måte peker Pugalee på hvordan kommunikasjon og begrepsforståelse henger sammen, og dermed har tidligere forskning mange gode elementer som kan være med å besvare denne oppgavens problemstilling.

Læreplanmålene som er relevante for denne studien er;

- *berekne nullpunkt, ekstremalpunkt, skjeringspunkt og gjennomsnittleg vekstfart, finne tilnærma verdiar for momentan vekstfart og gje nokre praktiske tolkingar av desse aspekta*
- *gjere greie for definisjonen av den deriverte, bruke definisjonen til å utleie ein derivasjonsregel for polynomfunksjonar og bruke denne regelen til å drøfte funksjonar*
- *lage, tolke og gjere greie for funksjonar som beskriv praktiske problemstillingar, analysere empiriske funksjonar og finne uttrykk for tilnærma lineære samanhengar, med og utan bruk av digitale verktøy*

(Utdanningsdirektoratet, 2013)

Fra disse læreplanmålene vil sentrale begreper bli gjort rede for i teorikapittelet. I denne studien ble viktigheten av matematisk fokus og presisjon i språket vegtlagt ovenfor elevene før de utførte loggene.

1.4 Oppgavens oppbygning

Oppgaven er delt inn i kapitler; introduksjon, teori, metode, resultater og analyse og til slutt oppsummering og avslutning. Innledningsvis vil motivasjon for oppgaven, tema og problemstilling bli fremstilt.

Teorikapittelet vil gjøre rede for noen sentrale begreper og temaer. *Begrepsforståelse* er et sentralt tema i denne oppgaven og vil bli gjort rede for, spesielt innen derivasjon. Det vil også bli belyst ulike tegn på utvikling av begrepsforståelse. *Skriving i matematikk* vil bli beskrevet, her vil det fremkomme ulike teoretikeres definisjoner, syn, forslag til tiltak og hvordan dette brukes i den norske skolen. Videre vil fokuset bli spisset inn mot faglogg spesielt.

Metodekapittelet vil ta for seg hvordan datainnsamlingen er utført for å kunne ivareta anonymitet og for at validitet og reliabilitet skal bli sterkest mulig. Dette kapittelet ønsker også å beskrive hvordan analysen av datamaterialet er utført, ved å beskrive dokumentanalyse og casestudie, som blir anvendt. Avslutningsvis i metodekapittelet vil fokuset dras mot kategorisering av elevloggene.

I kapittelet om resultater og analyse vil resultater etter analysen av datamaterialet bli fremlagt på en oversiktlig og presis måte. To av delkapitlene vil være; dokumentanalyse og casestudie. I dokumentanalysen vil jeg først legge frem resultater sammen med eksemplifiseringer i form av tekstutdrag, og deretter en drøfting av resultatene. Videre kommer analysen av casestudien, med resultater og drøfting parallelt.

Til slutt vil hovedfunnene i oppgaven bli fremstilt, og forslag til bruk av faglogg i matematikk vil bli lagt frem.

2 Teori

Studien handler om loggskriving i matematikk, med vekt på utvikling av begrepsforståelse i derivasjon. For å kunne skape et godt teoretisk grunnlag for denne oppgaven er det spesielt tre teoretiske hovedområder som må drøftes; begrepsforståelse, derivasjon og skriving i matematikk.

Det vil være naturlig at en utgreiing om begrepsforståelse står helt sentralt i dette kapittelet. Begrepsforståelse handler om å få en dypere forståelse innen temaet (Kilpatrick et al., 2001). Det handler om å se matematikken som et puslespill hvor brikkene er et sammensatt bilde, og ikke enkeltbrikker. Bedre begrepsforståelse gir et bredere kunnskapsnettverk.

I studien har elevene skrevet faglogger innenfor temaet derivasjon i matematikk 1T, som er første året på videregående skole. Dette er første gang elevene blir introdusert for derivasjon, og mange av begrepene og til dels måten å tenke på er ukjent for de aller fleste. Store deler av derivasjonskapittelet består av regnetekniske oppgaver som stiller krav til å pugge regler (Grønmo, 2005). Tekstoppgavene i derivasjon krever derimot høy grad av begrepsforståelse for å kunne trekke ut relevant informasjon fra oppgaveteksten. Det vil derfor bli drøftet noen viktige momenter ved derivasjon og noen momenter som ofte kjennetegnes som utfordrende for elevene.

Tidligere er det blitt gjennomført mye forskning på skriving i matematikk. Blant annet har Lim og Pugalee (2004) utført en studie som har vært til stor inspirasjon for studien som presenteres her. I Lim og Pugalee sin studie skrev 10.-klassinger logg de 10 siste minuttene av noen matematikkøkter i uken. Da 10 tilfeldige elever ble trukket ut til intervju var det kun en elev som var negativ til loggskriving. Blant de positive kom det blant annet ytringer som; *'det er god trening og viser om jeg kan gjøre oppgaven og forstå', 'et har hjulpet meg å se hva jeg kan og hva jeg må jobbe mer med'* og *'det hjelper meg å huske matematikken'*. Lim og Pugalee (2004) presiserer at selv om denne studien er utført i en 10. klasse med anvendt matematikk, tror de at resultatene vil være positive også for andre nivåer. Skriving i matematikk kan hjelpe elevene å få et metaperspektiv på egen læring, legger til rette for kritisk refleksjon og kan hjelpe elevene å se meningen med å kunne matematikk (Pugalee, 1997).

Det er mange måter man kan bruke skriving i matematikk på. Det snakkes først og fremst om tankeskriving og prestasjonsskriving, denne oppgaven fokuserer på tankeskriving. Tankeskriving går ut på å skrive hva man tenker, det går ikke an å ‘gjøre feil’. Faglogg-skriving er en form for tankeskriving. Det finnes flere typer logger, og flere av dem vil bli presentert nedenfor. Prestasjonsskriving kan kobles til oppgaveregning, prøver og rene drill-øvelser (Lorentzen & Kringstad, 2014). I så måte utvikles tekniske regneferdigheter i større grad enn begrepsforståelse i denne form for skriving.

2.1 Begrepsforståelse

Rittle-Johnson, Siegler, og Alibali (2001) definerer et begrep slik; '*an abstract or generic idea generalized from particular instances'* (2001, s. 1). Et begrep er en abstrakt idé hvor vi har innhentet informasjon fra tidligere situasjoner. Vinner (2014) beskriver to mekanismer i forbindelse med innlæring av et nytt begrep; å identifisere likheter og å skille ulikheter. Dette kan illustreres gjennom følgende eksempel: når et barn skal lære seg hva en sirkel er, forbinder de ordet med et objekt av et spesifikt utseende, etter å ha hørt ordet sammen med synet av objektet mange ganger. Om objektet ikke har dette utseende eller fasongen, forstår etterhvert barnet at dette ikke er en sirkel. Det er på denne måten et nytt begrep blir innlært. Matematiske begreper kan være spesielt kompliserte å lære, fordi de ofte er bygget opp av et system av formelle regler som må tas hensyn til ved matematisk tenkning (Vinner, 2014).

Begrepsforståelse er et videre konsept enn å kunne et begrep, det handler om å se matematiske sammenhenger og forstå kompleksiteten rundt begrepet. Kilpatrick et al. definerer begrepsforståelse som: '*… an integrated and functional grasp of mathematical ideas'* (2001, s. 118). De presiserer at begrepsforståelse er en dypere forståelse enn kunnskap om fakta og metoder, noe som også Hiebert’s definisjon underbygger: '*Conceptual knowledge is characterized most clearly as knowledge that is rich in relationships. It can be thought of as a connected web of knowledge, a network in which the linking relationships are prominent as the discrete pieces of information. Relationships pervade the induvidual facts and propositions so that all pieces of information are linked to some network'* (Hiebert, 1986, s. 3). Fra disse definisjonene ser vi at begrepsforståelse handler om noe overordnet. I matematikk betyr det å se helheter og sammenhenger mellom hva man kan fra før og det nye man lærer. Elever med god begrepsforståelse er i stand til å forstå i hvilke situasjoner matematikken kan være nyttig (Kilpatrick et al., 2001).

Lunde (2003) forklarer svak begrepsforståelse som en gruppering innenfor lærevansker i matematikk. Elever med lav begrepsforståelse sliter med å sette et problem i sammenheng med matematiske operasjoner, noe som kan lede til misoppfatninger (Lunde, 2003). Fokus på bedret begrepsforståelse burde dermed få større plass. I matematikkundervisningen i norsk skole kan det se ut til at et begrep læres ved fokus på fakta og ferdigheter. Brekke (2002) beskriver dette som kjennetegn ved norsk skole for noen år tilbake, og resultatene fra TIMMS-advanced i 2008 støtter dette. Omtrent 75% av elevene svarte at i halvparten eller mer av undervisningen løser de oppgaver som ligner på eksempler i boka (Grønmo, Onstad, & Pedersen, 2010). Kilpatrick et al. (2001) forteller at fakta og metoder som innlæres ved forståelse har flere positive særtrekk enn en operasjonell tilnærming. I tillegg til at kunnskap som er tilegnet ved forståelse vil kunne rekonstrueres mye enklere om den skulle bli glemt (Kilpatrick et al., 2001). Samtidig beskriver Kilpatrick et al. (2001) viktigheten av samspillet mellom de fem kunnskapsområdene; *conceptual understanding, procedural fluancy, strategic competance, adaptiv resoning* og *productive disposition*.To av disse kunnskapsområdene vil være sentrale for denne oppgaven; conceptual understanding (begrepsforståelse) og procedural fluancy (regnetekniske ferdigheter). Regnetekniske ferdigheter omhandler kunnskapen om metoder og hvordan man skal bruke dem for å nå et mål (Rittle-Johnson et al., 2001). Kilpatrick et al. (2001) påpeker viktigheten av regnetekniske ferdigheter som underbyggende kunnskap for begrepsforståelse. Denne kompetansen vil kunne styrkes ved regneoppgaver, prøver og andre rene drill-øvelser, som blir beskrevet som mye brukt i norsk skole av Brekke (2002) og Grønmo et al. (2010).

Det er blitt gjort et eksperiment på femteklassinger i forholde til viktigheten av begreps-forståelse og regnetekniske ferdigheter. Elevene ble delt i to grupper. Den ene gruppen ble forklart fremgangsmåte før oppgaven, for deretter å få en forklaring med fokus på forståelse. Mens den andre gruppen ble forklart situasjonen eller fenomenet kunne med fokus på forståelse. Det viste seg at elevene med fokus kun på matematisk forståelse var mer kreative og så løsninger bedre enn de resterende elevene (Kilpatrick et al., 2001). Likevel er det viktig å påpeke at i tillegg til begrepsforståelse er regnetekniske ferdigheter viktig for at eleven skal kunne nå en dypere forståelse for matematikken. Ved å trene også denne kompetansen kan elevene lettere oppdage like situasjoner og oppdage sammenhenger (Kilpatrick et al., 2001). Grønmo (2005) hevder at automatisering av regnetekniske ferdigheter kan frigjøre mental kapasitet. Dermed kan fokus rettes mot de mer krevende matematiske utfordringene ved regning i matematikk. I den forstand kan vi forså hvorfor norsk skole legger vekt på oppgaveregning i timene, vi ser korrelasjonen mellom kunnskapsområdene som sterk. Samtidig viste undersøkelsen Kilpatrick et al. (2001) refererer til at fokus på forståelse er veldig viktig, og det må ikke glemmes.

2.1.1 Utvikling av begrepsforståelse

Utvikling av begrepsforståelse kan deles inn i tre stadier; *internalisering*, *kondensering* og *reifikasjon* (Sfard, 1991). Internalisering beskrives som det første stadiet i innlæring av et nytt begrep, å få kjennskap til prosessen som fører til forståelsen for det nye begrepet (Sfard, 1991). På dette nivået arbeider man med regneoperasjoner i enkel matematikk, og prosessene som utføres blir bedre og bedre innlært (Sfard, 1991). Dette svarer til Piaget (1970) sin forklaring av internalisering, som forteller at et begrep er internalisert når man har dannet et mentalt bilde av begrepet. Det innebærer for eksempel at man kan ha en mental forståelse av begrepet, uten å nødvendigvis utføre en utregning. Videre kommer man til stadiet kondensering, hvor man setter den nye kunnskapen i sammenheng med tidligere tilegnet kunnskap. De enkle prosessene blir automatisert og settes i sammenheng med andre regne-prosesser og evnen til å se på flere prosesser som en helhet, blir utviklet (Sfard, 1991). På dette stadiet kan trening av regnetekniske ferdigheter virke positivt med tanke på å kunne automatisere regneprosesser. Dette stadiet er gjerne tidskrevende (Sfard, 1991). Så lenge man har en oppfatning av at begrepet er en prosess, dvs at man har en operasjonell tilknytning til begrepet, befinner man seg på dette stadiet. Når man kommer til det punktet hvor man klarer å se begrepet som et strukturelt objekt har man kommet til reifikasjonsstadiet (Sfard, 1991). Man klarer å gjøre prosesser om til objekter, dette skjer gjerne fort ved en oppklaring eller aha-opplevelse, hvor de ser nye sammenhenger eller forstår sammenhenger. Tall (2013) påpeker at mangel på evnen til å komprimere matematiske prosesser til objekter ofte er en utfordring for videre læring i matematikk. På dette stadiet er man i stand til å gjenkjenne fenomener i nye situasjoner (Sfard, 1991).

Utvikling av begrepsforståelse er en prosess som strekker seg over en lengre tidsperiode, ved en kontinuerlig påbygging gjennom repetisjon av stadiene. For eksempel kan elevene se stigningstall som en prosess hvor man beregner stigning ut fra to punkter på en graf, man blir kjent med og utfører prosessen til den blir automatisert. Videre ser eleven hvordan det kan anvendes og forstår hva det er. Dette kan karakteriseres som internalisering og kondensering. Til slutt ser eleven stigningstallet som et objekt, og reifikasjonsstadiet er nådd. Ved en operasjonell oppfatning av begrepene fungerer de som begreper hver for seg, sekvensiell kunnskap, fremfor at de bygger på hverandre. På de to første stadiene vil dette være tilfelle. Først på det siste stadiet utvikles en strukturell oppfatning, og kunnskapen settes sammen i et hierarkisk skjema (Sfard, 1991). Herfra sees stigningstall som et objekt, som det kan utføres prosesser på. Dette blir den enkle matematikken som vi på samme måte bygger videre på for å komme frem til hva vekstfart er. En slik tilnærming effektiviserer kognitive prosesser og øker den kognitive kapasiteten (Sfard, 1991). Det blir lettere å huske hva man har lært når man har flere kognitive knagger å henge kunnskapen på, noe Kilpatrick et al. (2001) støtter da han forteller at begrepsforståelse legger til rette for å lettere hente opp igjen gammel kunnskap.

Det handler altså om å se kunnskapen som et sammenhengende kunnskapsnettverk, og ikke som løse tråder. Dette gjør det mulig for elevene å 'gjenkjenne fenomener i nye situasjoner med uvante formuleringer', som Grønmo et al. (2010) forteller at norske elever er dårlige på i forhold til andre land. Grønmo et al. (2010) forteller også at norske elever er mindre kreative i matematikken enn elever i andre land. Ved et videre kunnskapsnettverk kan det bli lettere å være kreativ, det er lettere å se matematikken fra flere vinkler og identifisere flere måter å angripe eller løse matematiske problemer på.

2.2 Derivasjon

Mye kan tyde på at begrepsforståelse i derivasjon er meget krevende for mange elever. Temaet består av mange ukjente begreper og krever uvante måter å tenke på. Grønmo et al. (2010) forteller at norske 3MX-elever presterte dårligere når det gjeldt derivasjon, enn mange andre land i TIMMS-Advanced fra 2008. Med derivasjon som et så viktig tema i matematikk, spesielt innen optimalisering i ulike yrker, burde det virke motiverende for elevene å oppnå forståelse innen dette temaet. For å kunne beskrive og forstå variasjoner i funksjonsverdier må man forstå hva derivasjon er (Grønmo et al., 2010).

For elever som tar 1T vil begrepet derivasjon være ukjent. Fra tidligere har elevene kun erfaring med stigningstall for rette linjer, sekant og tangent, som beslektet med derivasjon. Nilsen (2013) påpeker at undervisningen i ungdomsskolen for det meste har fokus på lineære funksjoner, når det kommer til temaet funksjoner. I tillegg forteller Nilsen (2013) at undervisningen på ungdomsskoletrinnet gir et snevert syn på stigningstall. Med mer fleksible metoder, bedre begrepsforståelse, for å finne stigningstall kunne det vært lettere å forstå derivasjonsbegrepet senere i utdanningen. Evnen til å se koblingene mellom forkunnskaper og nylig lært kunnskap, altså nå reifikasjonssnivået, er essensielt for å klare å utvide kunnskapsnettverket.

2.2.1 Sentrale begreper

I emnet derivasjon er det noen sentrale temaer som må nevnes. Først og fremst *stigningstall*, som forteller hvor mye y endres når x øker 1 for lineære funksjonsjoner (Hole, 2003). Derivasjon handler om å finne vekstfart for ikke-lineære funksjoner. Elevene blir i norsk skole introdusert for gjennomsnittlig- og momentan vekstfart, før veien går videre til å forstå derivasjon. *Gjennomsnittlig vekstfart* er en gjennomsnittlig endring i hastighet over et gitt tidsintervall (Hole, 2003). Under utregningen handler det om å finne stigningstallet til en sekant mellom to gitte punkter på grafen. *Momentan vekstfart* handler om å finne hastigheten i et bestemt tidspunkt (Hole, 2003), dette regnes ut ved å finne stigningstallet til en tangent i dette punktet. Kunnskap om stigningstall og gjennomsnittlig vekstfart blir vektlagt allerede i grunnskolen, men viktigheten av momentan vekstfart fremkommer først på videregående trinn. Hole (2003) presiserer at elever har en minst like god intuitiv forståelse av momentan vekstfart som av gjennomsnittlig vekstfart. Elever forholder seg i større grad til for eksempel hvor fort bilen kjører akkurat nå, enn hva gjennomsnittshastigheten mellom to byer er.

Med disse grunnleggende matematiske ideene, har elevene grunnlaget for å forstå hva derivasjon er. Definisjonen av den deriverte lyder som følger;

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x) = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

(Hole, 2003). Siden man finner grenseverdien til den gjennomsnittlige vekstfarten når $\Delta x \to 0$, ser man at derivasjon handler om å finne momentan vekstfart. *Den deriverte* er altså momentan vekstfart.

Derivasjon handler om å finne vekstfarten i et punkt, men hva hvis vekstfarten er lik 0? Hva kan vi da si om grafen? Ved å besvare disse spørsmålene kommer vi til tre nye begreper; topp-, bunn- og terassepunkt. *Monotoniegenskapene* til en graf beskriver grafens vekst, altså hvor grafen har negativ og positiv vekst. Man finner monotoniegenskapene til en funksjon ved å lese av fortegnsskjema til $f'(x)$. I det punktet hvor $f'(x) = 0$ forteller det oss at stigningstallet til tangenten er lik 0, tangenten ligger da parallelt med x-aksen. Dette kan skje i tre tilfeller; i et *toppunkt* (hvor grafer endrer fra å øke til å minke), i et *bunnpunkt* (hvor grafen endrer fra å minke til å øke) eller i et *terassepunkt* (hvor grafen har enten positiv eller negativ vekst hele veien, men har et kort intervall som er tilnærmet flat).

2.2.2 Elevers forståelse av derivasjon

Noe av det første elevene må forstå før de kan oppnå reifikasjonsstadiet for derivasjon, er vekstfart. Kalvø (2002) forteller at det kan oppstå vanskeligheter allerede ved innlæringen av tangent. Tangent er et begrep elevene i utgangspunktet skal være kjent med fra grunnskolen, likevel er det mange som sliter med begrepsforståelse når det gjelder tangent. Det er da viktig å være bevist på hvordan man går frem rundt dette begrepet for elevene, og kanskje sette fokuset mot definisjonen av derivasjon allerede her. Kalvø (2002) beskriver to måter å introdusere elevene for begrepet på; regneteknisk eller geometrisk. Ved en regneteknisk tilnærming går man ut ifra at elevene har kjennskap til begrepet fra før, og dermed trenger metoder for å beregne stigningen til tangenten og knytte dette til derivasjon. En geometrisk tilnærming vil starte med å se på en sekant, for deretter å forklare tangent som en grense av en sekant. Videre kan dette knyttes til definisjonen av den deriverte. Den førstnevnte metoden er kanskje den som er mest benyttet i norsk skole, selv om den andre metoden kanskje er mer beskrivende i forhold til definisjonen av den deriverte.

Orton (1983) beskriver et forskningsprosjekt som skulle sjekke elevenes forståelse av tangent som en grense. Ved å rotere en sekant om et punkt i en sirkel ville sekanten i grensetilfellet bli en tangent. Nesten halvparten av elevene greide ikke å komme frem til dette, selv etter hint og tips. Orton (1983) påpeker at denne utfordringen må tas på alvor. For å kunne utvikle god begrepsforståelse for derivasjon, må man bygge på forståelsen for tangent for å kunne nå reifikasjonsstadiet for dette begrepet. Som Sfard (1991) presiserer, er det først da man kan bygge et hierarkisk kunnskapsskjema.

Noen elever ser kanskje begrepene tangent og derivasjon i for sterk sammenheng. Asiala, Cottrill, Dubinsky, og Schwingendorf (1997) beskriver at mange elever setter likhetstegn mellom den deriverte til en funksjon og ligningen for tangenten til grafen til denne funksjonen. Ligningen for en tangent vil alltid være av første grad, mens den deriverte av en tredjegrads funksjon vil være av andre grad. Det handler altså om å få en korrekt begrepsforståelse av hva en tangent er, men også sette det i sammenheng med derivasjon på en rett måte.

Ved å se på Kalvø (2002) sin geometriske metode for å forklare tangent, kan dette være en god måte for å visualisere hvordan definisjonen av den deriverte går mot en grenseverdi. Definisjonen av den deriverte kan sees på som veien fra gjennomsnittlig vekstfart til momentan vekstfart.

Når man har nådd reifikasjonsstadiet for stigningstall, sekant og tangent, kan man bygge kunnskapen videre til å forstå hva vekstfart er. Det benyttes mange ulike symboler for å uttrykke vekstfart, for eksempel; $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ eller $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Orton (1983) forteller at i hans undersøkelse klarte under to tredjedeler av elevene å forklare hva $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ betyr. Det bør legges til rette for å kunne utforske, og arbeide seg frem til disse definisjonen selv (Orton, 1983). Slik kan kanskje elevene danne seg begrepsforståelse av definisjonen, fremfor å pugge definisjonene slik at man går seg bort i dette sammensuriet av formler som egentlig forteller akkurat det samme.

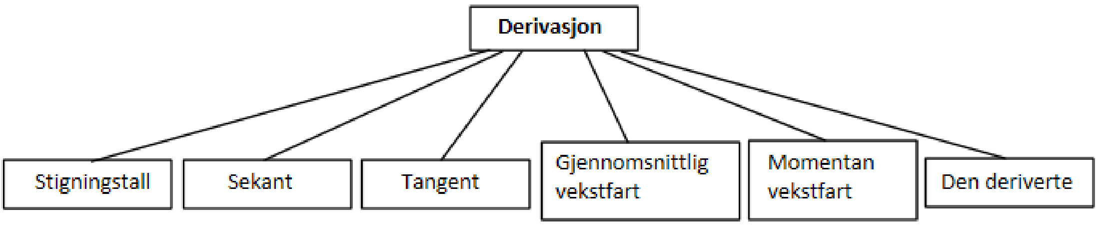
Asiala et al. (1997) beskriver fire trinn for å få god begrepsforståelse for definisjonen av den deriverte. Både grafisk og analytisk tilnærming blir vektlagt. Første trinn innebærer grafisk konstruksjon av en sekant på en graf, for så å se på sekantens helling. Analytisk sett innebærer første trinn beregning av gjennomsnittlig vekstfart ved å regne ut stigningstallet til sekanten. Det er verdt å legge merke til Asiala et al. (1997) oppbygning av begrepsforståelse i derivasjon i forhold til Sfard (1991) sin tanke om oppbygning av et hierarkisk skjema. Tanken om innlæring er lik for disse forskerne. Andre trinn handler om interiorization av første trinn. Det finnes ikke et godt norsk ord for interiorization, men det kan beskrives som å innarbeide et begrep. For å beskrive det med Sfard (1991) sitt vokabular; å nå reifikasjonsstadiet for begrepet sekant, hvor begrepet kan sees på som et objekt og ikke en prosess. Deretter føres de to punktene på sekanten nærmere og nærmere hverandre, mens observasjoner og beregninger blir gjennomført. Avstanden mellom punktene går mot null. På tredje trinn er man kommet til momentan vekstfart, fremgangsmåten fra andre trinn innkapsles og de to punktene møtes i et punkt og danner en tangent. Det fjerde og siste trinnet peker på interiorization av andre trinn for å kunne komme frem til definisjonen av den deriverte i et punkt som en grense, hvor avstanden mellom de to punktene går mot null.

Til slutt, etter man har forstått de ovenstående temaene, må man se på relasjonen mellom $f(x)$ og $f'(x)$. Det faktum at disse to grafene ser helt ulike ut og forteller helt ulike 'historier', ser ut til å være vanskelig for mange elever å fatte. Kanskje kan dette skyldes forenklingene som gjøres i skolen. Kalvø (2002) viser til Amit og Vinner (1990) som forteller at mange forenklinger gjøres i forbindelse med forklaringen mellom funksjonen og dens deriverte. Denne forklaringen kan virke tung og uoversiktlig for mange elever, likevel kan forenklinger gjøre mer skade enn være til hjelp. Mye informasjon kan gå tapt i forenklinger. For begrepsforståelsen er det viktig å ha et grafisk bilde av de ulike matematiske ideene, spesielt innen derivasjon som handler om grafens utseende vil dette være viktig. Mange elever sliter med å se det grafiske bildet i sammenheng med formler og utregning (Kalvø, 2002). Kalvø (2002) refererer til tidligere forskning som påpeker at mange elever sliter med å forklare grafiske sammenhenger, selv om de ofte er flinke til å utføre rutinemessige regneoppgaver innen derivasjon.

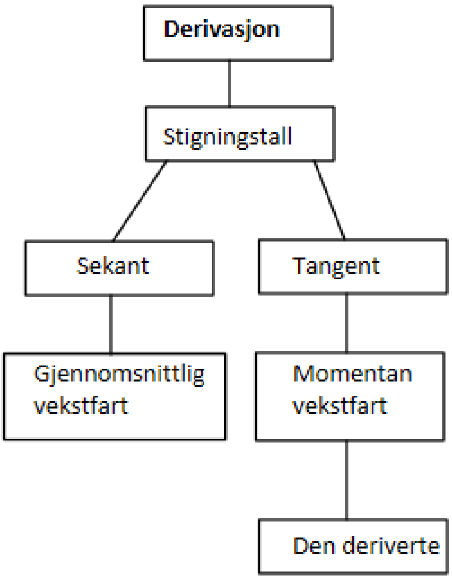
2.3 Skriving i matematikk

Tradisjonelt består skriving i matematikk av å føre oppgaver, avlese og tolke grafer og skrive forklaringer til geometriske funksjoner (Lorentzen & Kringstad, 2014). Skriving og den språkbaserte opplæringen generelt, blir sjelden direkte fremstilt i matematetikk, men er heller noe som kreves for å kunne kommunisere sin matematiske kunnskap. Mange elever sliter med å uttrykke seg skriftlig i matematikk, det kan for noen virke som å lære seg et nytt språk (Lee, 2006). I matematisk språk stilles det andre krav til symbolbruk, vokabular, presisjon i uttrykk, grammatisk struktur og formalitet, enn i vårt hverdagsspråk (Lee, 2006). På grunn av dette kan det matematiske språket danne en barriere for utvikling av matematisk forståelse. For mange elever handler kanskje matematikk om å kunne 'gjøre det bra på prøven' og å kunne kommunisere sine matematiske regneferdigheter, fremfor å kommunisere sin matematiske forståelse. Da matematikken krever et konkret, presist og klart språk (Lee, 2006), vil det være vanskelig og kanskje også skummelt å skrive matematikk. Det kan føre til at elever ønsker å formidle regnetekniske ferdigheter, fordi det er enkelt for elevene. Samtidig er det enkelt for elevene å se vinning ved å gjøre det godt på en prøve. Det kan være vanskelig for elevene å forstå vinningen av å formulere matematikken med ord, og ikke utregning.

Å forstå språket er en viktig del både av innlæring av matematisk kunnskap og evnen til å kommunisere matematikk. Elevene må organisere og strukturere tankene sine, noe som er en kognitiv svært krevende prosess (Lorentzen & Kringstad, 2014). Sfard (1991) påpeker dette da hun snakker om steget fra internalisering og kondensering til reifikasjon, hvor man ser kunnskapen i en helhet og ikke som sekvensiell kunnskap (Figur 1 og Figur 2.)



Figur 1: Sekvensiell oppbygd skjema. Hvert kunnskapsområde sees som adskilte områder.



Figur 2: Hierarkisk oppbygd skjema. Kunnskapsområdene bygger på hverandre, og henger sammen som et kunnskapsnettverk.

Hierarkisk oppbygd kunnskap, som illustrert i Figur 2, øker den kognitive kapasiteten (Sfard, 1991). Begrepsforståelse handler om å se kunnskapen som en helhet (Kilpatrick et al., 2001), hvor brikkene sammenbindes på denne måten. Det er lettere for elevene å hente opp igjen gammel kunnskap (Kilpatrick et al., 2001), og dermed lettere å bygge et videre kunnskaps-nettverk ved et hierarkisk oppbygd kunnskapsskjema. Skriving legger til rette for utforsking og refleksjon, da det i matematikk er nødvendig å bygge på tidligere kunnskap for å kunne forklare matematiske ideer.

Da det matematiske språket krever presisjon og konkretitet, kan skriving i matematikk avsløre misoppfatninger. Misoppfatninger er ikke enkle feil, men feil som kan stå i veien for videre utvikling av begrepsforståelse (Kaplan, Ozturk, & Ocal, 2015). Skrivingen tvinger elevene til å forsøke å se sammenhenger og bygge opp en logisk 'fortelling'. Det er først når eleven kan uttrykke sine matematiske ideer at eleven kan ta eierskap til ideen og bruke denne matematiske kunnskapen i nye situasjoner (Lee, 2006). Kaplan et al. (2015) avslører flere vanlige misoppfatninger hos elever. Blant annet nevnes det at studenter har misoppfatninger som hindrer dem i å kunne utføre regneoperasjoner med definisjonen av den deriverte, at studenter opplever vanskeligheter rundt geometrisk tolkning av den deriverte med tanke på avstander, at studenter har misoppfatninger om at den deriverte av funksjonen er den deriverte i et bestemt punkt og at studenter har misoppfatninger i forhold til den fysiske tolkningen av den deriverte (Kaplan et al., 2015).

Lorentzen og Kringstad (2014) beskriver først og fremst et skille mellom presentasjons-skriving og tankeskriving. Presentasjonsskriving handler om kommunikasjon og evnen til å kunne presentere et gitt tema. I denne formen for skriving skal man være formell i språket; mottakeren er gjerne lærer og produktet er et mål. Tankeskriving er derimot en mer uformell og utforskende måte å skrive på; mottakeren er skriveren selv og målet er selve skrive-prosessen (Lorentzen & Kringstad, 2014). Både Countryman (1992) og Hiemstra (2001) beskriver flere måter elevene kan benytte skriving i matematikk på. Countryman (1992) nevner blant annet *freewriting, learning logs, formal papers* og *test questions*. Freewriting og learning logs er typiske eksempler på måter å bruke tankeskriving på, her er skriveprosessen det viktigeste. Dette i motsetning til formal papers og test questions som fokuserer på resultatet av skrivingen. Hiemstra (2001) nevner flere ulike typer logger, som alle kan plasseres innen tankeskriving. Læringslogg, faglogg, interaktiv leselogg og 'drømmebok'/logg er blant dem han nevner.

2.3.1 Loggskriving

Clarke et al. (1993) beskriver tre nivåer å skrive journaler eller logger på i matematikk; fortellende, oppsummerende og dialogisk. Disse forteller noe om refleksjonsnivået og motivasjonen eleven har ovenfor faget. En elev som skriver en *fortellende logg* beskriver hva som har skjedd i timen, hva som er gjennomgått, men går ikke inn på det matematiske aspektet. Det kan for eksempel være *'- I dag gikk vi gjennom derivasjon. Først snakket læreren og forklarte oss hva derivasjon er og deretter jobbet vi med oppgaver.'* En slik form for loggføring er lite hensiktsmessig for elevene. Det at en elev skriver på denne måten kan enten bety at eleven ikke forstår hva hensikten med skrivingen er, eller at eleven ikke har tilstrekkelig kunnskap til å kunne fokusere på det matematiske ved timen. Førstnevnte handler om at lærer antageligvis ikke har gitt tilstrekkelig informasjon om hensikten med skrivingen på forhånd. Smidt (2011) påpeker viktigheten av at elevene vet hva, hvordan og hvorfor de skriver for å oppnå best utbytte av aktiviteten. Clarke et al. (1993) beskriver fortellende logg som et første stadium når man starter å skrive logger. Etter litt øving og personlig utvikling starter man med *oppsummerende logger*, som er en oppramsing av det matematiske som har blitt gjennomgått eller jobbet med i timen. Da kommer gjerne definisjoner og korte tilhørende forklaringer, et matematisk sammendrag av timen. Dette nivået kan sees i sammenheng med Sfard’s internalisering og kondensering, hvor eleven gjør seg kjent med begrepet og regne-tekniske prosesser. Det siste steget, eller høyeste nivået om man vil, er den dialogiske loggen. Når man har kommet hit begynner man å lete etter sammenhenger og stille kritiske spørsmål til hva som er blitt arbeidet med i timen. Her blir det gjort forsøk på å forklare hvorfor ting stemmer og om det eventuelt kan settes i sammenheng med andre lignende situasjoner og dermed gjelde i et mer generelt tilfelle. For eksempel kan eleven skrive ‘- *Ved å tegne fortegnslinja til* $f'(x)$ *kan vi bestemme hvor* $f(x)$ *stiger eller synker. Vi gjør dette på samme måte som når vi løste ulikheter, ved å finne ut når* $x = 0$, $x > 0$ *eller* $x < 0$*…*’. Det er når man har kommet til dette nivået at loggen gir best utbytte for elevene (Clarke et al., 1993). Dette nivået gir eleven mulighet til å utforske og på denne måten se sammenhenger og inkludere forkunnskaper. Reifikasjonsstadiet er nådd når begrepet kan oppfattes som et objekt, og på dette loggskrivingsnivået kan eleven etter hvert se begrepet som et objekt og utforske videre om det fungerer i andre situasjoner.

Når man skal implementere loggskriving i matematikkundervisningen, er det viktig å gjøre elevene oppmerksomme på *hva, hvordan* og *hvorfor* de skal skrive (Smidt, 2011). Mange lærerstudenter mener at det er vanskelig å få elevene til å se hensikten og gevinsten ved å bruke skriving i matematikk (Kenney et al., 2014). Elevene kan ikke bli satt til å skrive uten å få retningslinjer for hva de får ut av det. Motivasjon er en nøkkel for å få elevene til å ønske å skrive og ønske å få utbytte av aktiviteten. Ved at elevene ser relevans og får tiltro til at skriving fungerer som et godt verktøy i matematikk, kan motivasjonen øke og kanskje dermed også læringsutbytte av aktiviteten.

Som lærer, må man være forsiktig med å gi for strenge retningslinjer når vi snakker om denne formen for loggføring i matematikk. Den beste læringen gjennom loggskriving er når elevene klarer å komme til et stadie hvor de skriver dialogisk, stiller kritiske spørsmål og forsøker å tenke fremover. Da kan friskriving virke positivt. Friskriving er at man får et kort tidsrom til å skrive det det man ønsker innen et gitt tema. Denne form for skriving lar elevenes tanker flyte fritt, danne nye spørsmål, undersøke og utforske temaet (Countryman, 1992).

Loggskriving handler om mer enn retningslinjer og instrukser elevene får på forhånd. Hensikten med loggen kan være svært ulikt avhengig av hvilke perspektiver som skal fokuseres på. Det finnes mange ulike loggtyper som kan hjelpe elever å få viktig informasjon om deres egen arbeidsinnsats og kunnskapsnivå (Hiemstra, 2001). Fokuset i logger kan variere fra et faglig fokus til fokus på arbeidsinnsats til psykologiske faktorer. Det snakkes gjerne om rapporteringslogg, egenvurderingslogg, evalueringslogg og faglogg. Rapporterings-logg, eller prosesslogg, forklarer fremgangsmåte til et prosjekt, forsøk eller lignende. I en egenevalueringslogg skriver eleven om sin egen arbeidsinnsats, hvordan de kan jobbe annerledes for å gjøre det bedre, hva de er gode på eller hva de føler de ikke er så gode på. Eleven blir tvunget til å reflektere rundt sine egne måter å tilegne seg kunnskap på, denne loggen blir først og fremst skrevet til seg selv. De foregående loggtypene har til hensikt å gange elevene, selv om lærer også vil få utbytte ved å se elevenes tankegang og holdninger. Derimot vil en evalueringslogg være ment til lærer, for å få høre hva læreren kan gjøre annerledes. Til slutt er også faglogg nevnt, denne loggtypen har til hensikt å gi eleven et innblikk i sin egen kunnskap.

Faglogg

Faglogg er en loggtype som skal ha et faglig fokus. Som definisjonen i innledningen tilsier vil elever som utfører faglogg bli bedt om å skrive om teoretiske begreper, hovedpoenger, sannheter, koblinger til forkunnskaper, ideer som skal testes og hva de syns er vanskelig (Hiemstra, 2001). Denne definisjonen har sterk korrelasjon med Lorentzen og Kringstad (2014) sin beskrivelse av læringslogg. De beskriver læringslogg slik; *'Læringslogg er en form for tankeskriving der elevene utforsker kunnskapen sin gjennom å arbeide med begreper, formulere dem med egne ord og sette begrepene i sammenheng'* (Lorentzen & Kringstad, 2014, s. 5). Fagloggen skal ikke være formell, eller et produkt til en annen leser. Den er av skriver til skriver. Samtidig gir det lærer et godt innblikk i eventuelle misoppfatninger eller hull i kunnskapen. Selv om faglogg ikke skal være formell, er en del av læringen å formulere fullstendige setninger. Ved å formulere hele setninger vil man sette i gang flere tanke-prosesser enn ved for eksempel å skrive ufullstendige setninger eller stikkord (Dysthe, Hertzberg, & Hoel, 2000).

Når Clarke et al. (1993) beskriver det høyeste nivået for loggskriving, finner vi at dette nivået også handler om å kunne generalisere, identifisere begreper i nye situasjoner og se sammenhenger med sine forkunnskaper. Begrepsforståelse handler om å danne seg et bredt kunnskapsnettverk, og kunne se strukturen og oppbygningen til matematikken.

2.3.2 Positive trekk ved skriving i matematikk

Hittil er det blitt beskrevet *hva* skriving i matematikk innebærer, men *hvorfor* skal vi bruke skriving i matematikkundervisningen? TIMMS advanced fra 2008 for videregående skole viser at i forhold til andre land bruker norsk skole forholdsvis mye tid av matematikk-undervisningen til å 'regne oppgaver som ligner på eksempler i boka'. Derimot brukes lite tid på å 'diskutere resonnementene våre' (Grønmo et al., 2010). Skriving har ofte blitt brukt for at elevene skal vise hva de kan, fremfor å utforske matematikkfaget og sin egen tankerekke (Dysthe et al., 2000). Ved implementering av tankeskriving i matematikkundervisningen i større grad, kan man legge til rette for å øke andelen av diskusjon og forklaringer i undervisningen, noe som legger til rette for bedre begrepsforståelse og problemløsings-ferdigheter (Cobb, 1997).

Morgan (2002) forklarer skriving i matematikk som connective (sammenbindende). Det innebærer bevisst å bygge generelle tilkoblinger mellom hva du skriver og de tankene og kunnskapen du har fra før. Videre beskriver hun den evnen skriving har til å trekke paralleller og sammenhenger mellom forkunnskaper og det man akkurat har lært, for så å ha fokus fremover i forsøk på å utvide kunnskapsnettverket. For eksempel vil det i dialogiske logger bli forsøkt å sette forkunnskaper i sammenheng med ny kunnskapen, og videre stille seg spørsmål om fenomenene kan gjelde i mer generelle tilfeller (Clarke et al., 1993). Dette sammenfaller med beskrivelsen av hva god begrepsforståelse er, det handler om å se sammen-henger, koblinger til forkunnskaper og forsøk på generaliseringer. Skriving legger til rette for å kunne gå tilbake og finne tidligere tanker og oppdage nye assosiasjoner og ideer som man ikke visste om da man skrev dem. Skriveprosessen og tankeprosessen er ikke-lineære prosesser, på denne måten kan disse prosessene dra hverandre fremover (Dysthe et al., 2000).

Ved å forsøke å forklare sine matematiske ideer skriftlig, vil misoppfatninger og hull i kunnskapen komme til syne for læreren, og kanskje også for eleven. Det er ofte elevene tror at de forstår noe, selv om de kanskje bare gjenkjenner det (Sterrett, 1990). Man ikke kan forklare noe man ikke forstår. Det at eleven selv erfarer hvor vanskelig det kan være å forklare, eller kanskje ikke klarer å forklare, er god læring. Eleven ser hva han/hun forstår på en helt annen måte enn ved å avlegge prøver eller utføre rutineoppgaver. På matematikkprøver kan elevene ofte følge mønstre eller ha pugget, mens ved loggskriving vil forståelse av matematikken kunne få et høyere fokus.

Sterrett (1990) beskriver også at skriftlig arbeid kan være en forfriskende forandring, da arbeidet i matematikk stort sett består av oppgaveregning. Han nevner tre positive trekk ved skriving i matematikk; bedrer elevens skriveevne, hjelper elevene å bli autonome lærende og viser elevens nivå av forståelse eller forvirring. Det matematiske språket stiller strengere krav til presisjon og klarhet, enn hva hverdagsspråket vårt gjør (Lee, 2006). Derfor er det viktig at elevene får øving for å kunne utvikle sine skriveferdigheter. Ved bruk av skriving i matematikk må elevene være mer aktive. Skriving i matematikk er kognitivt krevende, da man blir tvunget til å ta stilling til- og sortere tankene (Lorentzen & Kringstad, 2014). I tillegg til disse gevinstene for elevene, vil læreren kunne se eventuelle misoppfatninger hos elevene.

Morgan (2002) viser til Emig (1983) sine beskrivelser av noen positive aspekter ved skriving for å lære matematikk. Først nevner hun at skriving er *integrerende*. Skriving krever arbeid med hånd, øyne og tankeprosesser samtidig, og setter krav til ulike typer presentering (som illustrasjoner og symboler). Videre beskriver hun skriving i matematikk som en aktivitet som gir umiddelbar forsterkning og feedback. Når elevene begynner å skrive vil de umiddelbart få en følelse av at ‘dette forstår jeg’ eller ‘dette kan jo ikke være riktig’. Da denne umiddelbare følelsen av rett eller galt kan være feil hos elevene, blir underveisvurdering fra lærer fremdeles viktig for god effekt av aktiviteten.

2.4 Bruk av logg som ledd i utvikling av begrepsforståelse i derivasjon

Sterrett (1990) viser til Bloom’s taksonomi i sammenheng med skriving i matematikk. Han beskriver disse seks nivåene av tenkning; kunnskap, forståelse, anvendelse, analyse, synteser og evaluering. Tanken er at hver av nivåene bygger på det foregående nivået, noe som ledet til et naturlig skille mellom *'higher and lower level of thinking'*. Det kan tenkes på som en stige hvor man må gå alle trinnene for å komme til toppen (Forehand, 2010). Bloom’s taksonomi ble utviklet som et generelt rammeverk som tar hensyn til tankeprosessene i arbeidet, ikke innenfor matematikk spesifikt. Hans Freudenthal og Chris Ormell mener rammeverket er lite passende innenfor matematikk (Kilpatrick, 2014). Noe av hva som ble kritisert er at dette rammeverket forsømmer innholdet og tar mer hensyn til prosess. I tillegg vil flere av disse nivåene flyte sammen, slik at man kan 'komme seg unna' med å hoppe over noen trinn på stigen. Det er også blitt fremlagt en revidert versjon av Bloom's taksonomi, som er bedre egnet innenfor matematikk; huske, forstå, anvende, analysere, evaluere og kreativitet (Forehand, 2010, s. 3). Å huske handler om å hente og gjenkjenne relevant informasjon eller kunnskap (Forehand, 2010). På dette nivået handler det i stor grad om fakta og metoder. I matematikk, og kanskje spesielt innen derivasjon, vil denne kunnskapen kunne tilegnes ved pugging. Derivasjonskapittelet i elevenes studiebok består av mange regnetekniske oppgaver som kan løses ved å kunne derivasjonsreglene. Likevel vil dette nivået av tenking ikke være tilstrekkelig for å kunne løse mer komplekse tekstoppgaver. Ved å se dette i sammenheng med utviklingsnivåer innenfor begrepsforståelse, kan det sies at man befinner seg på internaliseringsstadiet og beveger seg noe over i kondenseringsstadiet. Man skaffer seg kjennskap til begrepet og utvikler regnetekniske ferdigheter ved pugg og drill. Å forstå handler om å skape mening fra 'beskjeder/oppgaver' gjennom blant annet eksemplifisering (Forehand, 2010). Det er ikke lenger nok å gjenkjenne mønstre eller hvordan du har løst lignende oppgaver tidligere, det skal være en dypere forståelse når du kommer til dette nivået for tenking. Under dette nivået kan det trekkes paralleller til Clarke et al. (1993) sitt høyeste nivå for skriving i matematikk og dermed også reifikasjon, hvor man kan forklare matematikken. Det er først når elevene klarer å formulere sine matematiske ideer at de kan ta eierskap over dem (Lee, 2006). Å anvende handler om å bruke metoder til gjennomføring eller implementering (Forehand, 2010). Anvendelse kan utføres med ferdigheter tilegnet ved pugging til en viss grad. Ved igjen å se på regnetekniske oppgaver innen derivasjon, kan man gjenkjenne noen metoder ved å se mønstre eller gjenkjenne situasjonen. Dette er noe av utgangspunktet for kritikken mot Bloom's taksonomi som rammeverk i matematikk, at nivåene flyter sammen. Sett på denne måten vil ikke forståelse være en nødvendighet for å kunne anvende matematikken. Likevel vil forståelse kreves for å kunne anvende kunnskapen i nye og ukjente situasjoner. Lee (2006) beskriver at elevenes evne til å formulere sine matematiske ideer, gir dem kunnskapen de trenger for å anvende matematikken i ukjente situasjoner. Dermed synes forståelse å være et utgangspunkt for å kunne anvende sin matematiske kunnskap i ukjente situasjoner. Å analysere handler om operasjonalisering (Forehand, 2010). Det handler om å se hvordan de matematiske trådene henger sammen i et nettverk. Matematikk handler i stor grad om å se alle temaene, eller bitene, som et sammenhengende bilde. I derivasjon er det for eksempel viktig å kunne se at blant annet stigningstall og ulikheter er helt essensielt for å kunne forstå hva $f'(x)$ forteller og hva derivasjon er. Å evaluere handler om å ta avgjørelser basert på teoretisk grunnlag ved å være kritisk og sjekke (Forehand, 2010). I så måte kreves det både forståelse, anvendelse og analyse for å kunne utføre dette tilstrekkelig. Likevel kan man stille seg kritisk til om dette virkelig er nødvendig, da man ofte kan sjekke svar ved rutinemessige metoder. Dermed kan man i noen tilfeller få til dette, selv ved mangel av forståelse. Å være kreativ handler om å koble bitene sammen til en helhet, reorganisere dem til nye mønstre og strukturer gjennom organisering, planlegging og produksjon (Forehand, 2010). Det er mange som ser på matematikk som et fag som ikke krever kreativitet, men noen ganger må man se andre veier og tenke på nye måter for å kunne finne det man er interessert i.

Ved å gjøre elevene bevisst på Bloom's nivåer innenfor matematikk og sette det i sammenheng med loggskriving i matematikk, kan elevene få et inntrykk av hva det betyr å forstå noe i matematikk (Sterrett, 1990). Bloom’s taksonomi kan for elvene virke håndfast og et godt eksempel på konkrete elementer ved utvikling i egen læring. Dette er en av de positive trekkene ved bruk av skriving i matematikk, at elevene skal kunne få et metaperspektiv på egen læring. Clarke et al. (1993) sine tre nivåer for skriving i matematikk kan bli vel generell, og lite håndfast for elevene. Det samme kan gjelde Sfard (1991) sine nivåer for begreps-utvikling. Den dialogiske loggen og reifikasjonsstadiet kan utdypes mer konkret ved bruk av Bloom’s. Nivåene fra forståelse til og med kreativitet innebefattes i dialogisk logg og reifikasjonsstadiet. Ved for eksempel forklare forskjellen på forståelse og anvendelse, kanskje kan elevene se at anvendelse med forståelse er mer effektivt med tanke på videre utvikling av begrepsforståelse i matematikk. Kanskje kan det være en idé å se på Bloom’s nivåer som tilnærmet likestilte, at de alle er sterkt bundet sammen og er gode momenter for elevene å ha fokus på under loggskrivingen. Det må huskes at læring er ikke noe vi som lærer kan gi elevene fult og helt, men noe elevene må opparbeide seg med veiledning fra læreren.

Dette kapittelet har tatt for seg teoretiske tilnærminger til skriving i matematikk med utgangspunkt i loggskriving. Kapittelet har hatt fokus på elevenes forståelse og læring gjennom å skrive logg i matematikk, og betydningen av skriving som en prosess i elevenes helhetlige forståelse av derivasjon. Begrepsforståelse har gjennom hele kapittelet hatt en sentral rolle. I neste kapittel presenteres studiens forskningsdesign og de metodiske valg som er ansett som hensiktsmessig å benytte for å kunne undersøke elevens ferdigheter i loggskriving og elevenes begrepsutvikling i derivasjon gjennom loggskrivingen.

3 Metode

Dette kapittelet tar utgangspunkt i et kvalitativt forskningsdesign, og i det følgende er det ønskelig å begrunne og beskrive den metoden som er valgt. For å besvare problemstillingen har Maxwell (2013) sitt rammeverk blitt benyttet. Rammeverket har fokus på fem hovedområdene; problemstilling, formål, rammer, metode og kvalitet.

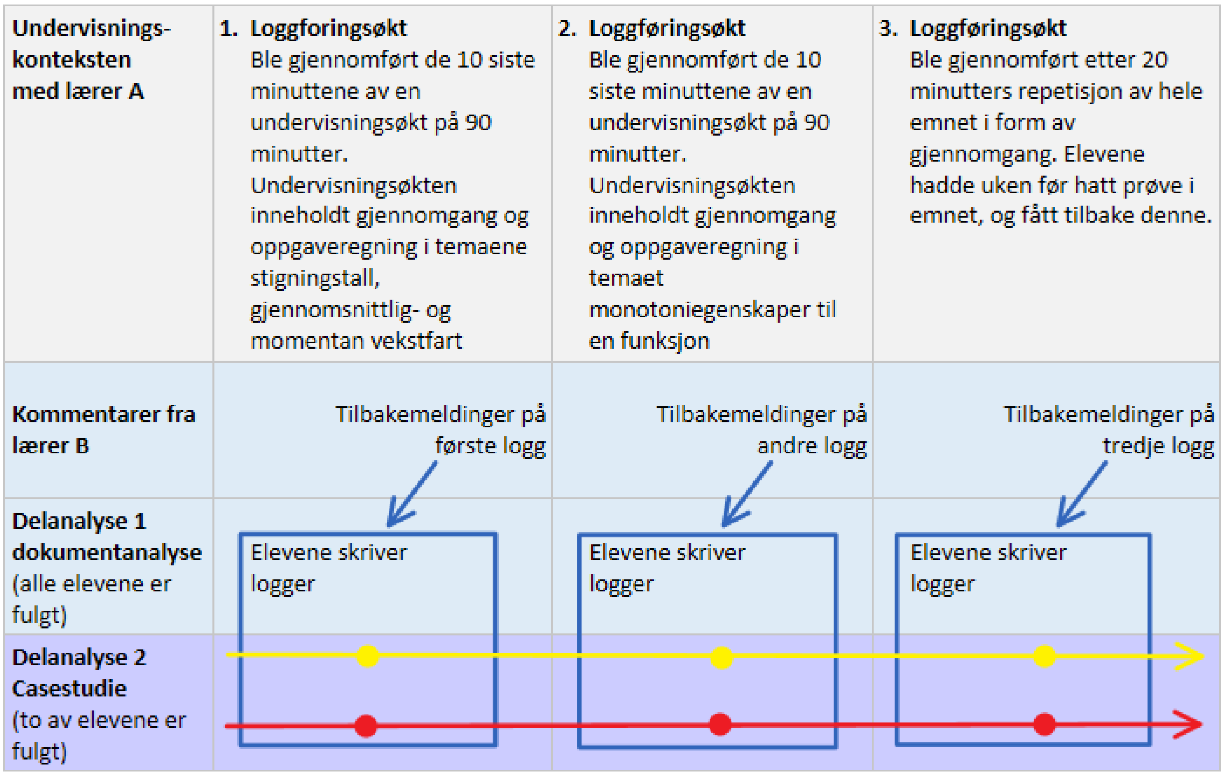
Studien ønsker å undersøke fagloggene til en 1T-klasse, i temaet derivasjon. Det er derfor blitt utført tre loggføringsøkter hvor elevene har fått skrevet det de vil innen derivasjon. Det er jeg som har gitt elevene tilbakemeldinger på fagloggene, og det har derfor blitt viktig for studien å sette et skille mellom mine to roller som lærer B og forsker.

I studien analyseres elevtekstene på to nivåer; et overordnet nivå som inkluderer alle de innsamlede elevtekstene og et inngående nivå der kun tre elevers tekstsett inkluderes. Første delanalyse vil være en form for dokumentanalyse, andre delanalyse er en casestudie. Hele studien er i en beskrivende og analyserende form.

Det vil bli gjort rede for dokumentanalysen og implikasjoner for studiens utvalg, før gjennomførelsen av studien vil diskuteres med beskrivelse av planlegging og analyse. Avslutningsvis rettes fokus mot forskningsetiske forhold.

3.1 Forskningsdesign

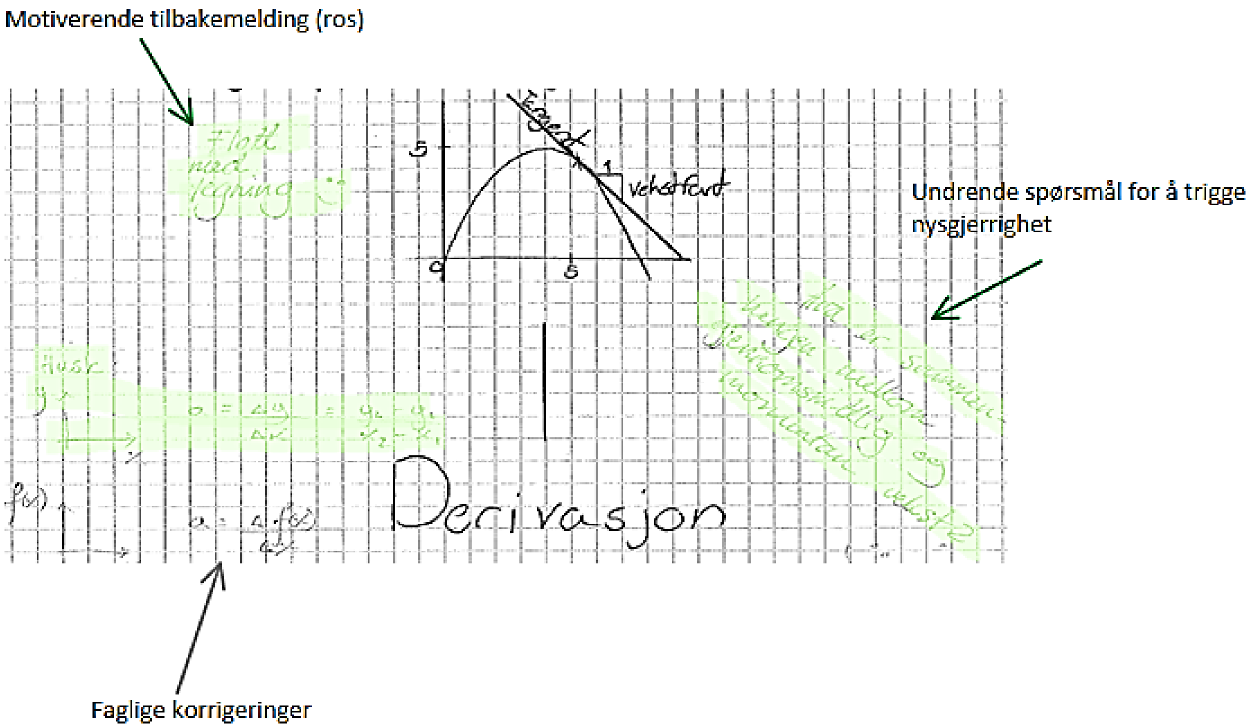
Studien ønsker å analysere elevlogger for å undersøke om faglogger kan fortelle noe om elevers skriveferdigheter og begrepsforståelse. Det ble gjennomført tre loggføringsøkter, hvor elevene brukte om lag 10 minutter i slutten av en undervisningsøkt på å skrive om temaet. Det var en naturlig undervisningskontekst rundt loggføringsøktene, altså elevenes undervisning og arbeidsmetoder ble ikke endret med tanke på loggføringen. Elevenes undervisning forgikk på vanlig måte med deres egen lærer (lærer A). Tidsperspektivet ble derfor over ca. en måned, med litt over en uke mellom de to første loggføringsøktene og vel to uker mellom andre og tredje loggføringsøkt. Før første loggføringsøkt hadde jeg ti minutter hvor jeg snakket om hva faglogg er og hvordan man kan skrive. Det ble viktig å ikke legge for strenge retningslinjer for hvordan elevene skulle skrive, siden ønsket var at elevene skulle bestemme selv og utforske loggskriving. Etter hver loggføringsøkt fungerte jeg som lærer (lærer B) under tilbakemeldingsfasene, slik Figur 3 illustrerer. Ønsket var å gi elevene tips og hint til hvordan de kan få bedre utbytte av loggskrivingen, og samtidig gi elevene troen på at loggskriving i matematikk kan være et godt læringsverktøy. Figur 3 illustrerer forskningsdesignet med undervisningskonteksten, dokumentanalysen og casestudien.



Figur 3: Forskningsdesignet inkluderer undervisningskonteksten med lærer A sin rolle, samt lærer B sin rolle i første og andre delanalyse.

Figur 3 viser at elevene på denne måten fikk grundige tilbakemeldinger om hvilke endringer som kan være lurt å tenke på til neste loggføringsøkt. Tilbakemeldingene gikk både på skrivetekniske og faglige ferdigheter.

I denne studien har jeg hatt to roller. Først som lærer B under tilbakemeldingsfasene, for deretter å tre inn i forskerrollen med et mer objektivt forhold til tekstene under analysen. Dette gjenspeiler seg i noen av mine tilbakemeldinger i loggene, hvor jeg viser oppriktighet i forhold til ønsket om at elevene skal få til. Tilbakemeldingene har et muntlig preg, og jeg forsøker å motivere elevene til å se skriving som et verktøy i matematikk. Siden det ikke finnes en fasit på hvordan en faglogg skal skrives, ble det viktig at tilbakemeldingene forsøker å peke på positive aspekter, gi faglige korrigeringer og stille undrende spørsmål som kan trigge utvikling av begrepsforståelsen (Figur 4).



Figur 4: viser eksempel på mine kommentarer underveis i tekstene. Dette er fra logg 1.

Første loggføringsøkt ble gjennomført etter en undervisningsøkt som fokuserte på stigningstall, gjennomsnittlig- og momentan vekstfart. Selve undervisningsøkten bestod av felles gjennomgang, samarbeidsoppgaver og individuelt arbeid. Loggskrivingen forgikk i de ti siste minuttene av undervisningsøkten (se Figur 3).

Etter 8 dager ble neste loggføringsøkt gjennomført. Den andre loggføringsøkten ble gjennomført på like premisser, men fokuset for denne undervisningsøkten var å undersøke monotoniegenskapene til en funksjon (se Figur 3).

Siste loggføringsøkt ble gjennomført etter 21 dager. Grunnen til at siste loggføringsøkt ble gjennomført så lang tid etter den andre er fordi jeg ønsket å ha den siste loggføringsøkten etter elevene hadde hatt prøve i derivasjon. Loggføringsøkten ble gjennomført etter 20 minutters repetisjon av hele emnet (se Figur 3). Elevene hadde ikke hatt muligheten til å samarbeide eller individuelt arbeid. Siden undervisningskonteksten rundt siste loggføringsøkt var noe annerledes, kan dette ha påvirket elevenes logger. I ettertid ser jeg at dette kan ha vært noe uheldig, siden elevene i de to første loggføringsøktene hadde mer konkrete tema å skrive om. Den siste økten, som var repetisjon over hele emnet, ble mer overordnet og svevende. Dette kan også være med å skille denne loggen mer fra de to foregående loggene, fordi det kanskje krevde høyere begrepsforståelse. Elevene sto fritt til å skrive om temaer innen hele emnet i alle de tre loggføringsøktene, men ble kanskje mer tvunget til det i den siste. Dette kan ha uheldig påvirkning på resultatene, siden jeg ønsket å se etter en utvikling. Når det er sagt kan det gå tapt nyttig informasjon ved en for mekanisk gjennomføring, det vil si hvis situasjonene blir for like (Thagaard, 2013).

Denne studien har en todelt problemstilling, noe som gjenspeiles i analysene. Dokumentmaterialet vil bli analysert på to nivåer; en dokumentanalyse og en casestudie. Kvalitativ tilnærming kjennetegnes ved at analysene går dypere og er mer intensive, noe som ofte fører til mindre utvalg (Thagaard, 2013). Det er viktig at forskeren har tid og ressurser til å bearbeide dokumentmaterialet. Derfor har analysen i denne studien valgt en delanalyse med rundt 20 elever først. Dokumentanalysen undersøker første delen av problemstillingen. Videre er tre elevers tekstsett valgt til andre delanalyse, dette tilsvarer 9 elevtekster. Casestudien undersøker andre delen av problemstillingen. Dokumentanalysen tar hensyn til eksemplifisering, grafisk fremstilling og loggskrivingsnivåer. Dette for å skaffe oversikt over dokumentmaterialet, og se de sentrale trekkene som kan observeres uten å ta hensyn til hele konteksten rundt hver elevtekst. Maxwell (2013) beskriver dette som strukturert tilnærming, hvor de sentrale likhetene kan identifiseres. I dokumentanalysen vil det også trekkes frem tekstutdrag for å presisere noen av de sentrale trekkene, en noe mer ustrukturert tilnærming.

Når det gjelder analysen i forhold til begrepsutvikling er det valgt en casestudie-tilnærming. En casestudie tar i større grad hensyn til konteksten (Maxwell, 2013), og tillater en grundigere analyse. Dette resulterer i at utvalget må reduseres. Det vil være tre elevers tekstsett som analyseres på dette nivået. Casestudie kan karakteriseres som en ustrukturert tilnærming.

Forforståelse kan omhandle språk og begreper, tro og ideer eller personlige opplevelser (Nilssen, 2012). For å redusere min forutinntatthet (reasercher bias) som forsker, fikk jeg ingen informasjon om elevenes nivå- eller kjønnsfordeling før analysen av elevtekstene. Under analysen i casestudiet ville man kanskje lettere kategorisert begrepsforståelse til et høyere nivå om man for eksempel visste at eleven var enn 6-er-kandidat, enn om det var en 2-er-kandidat.

3.2 Utvalg

I kvalitativ forskning er det viktig å ta hensyn til hvilke egenskaper og kvalifikasjoner som kan gi best resultatutbytte, dette kalles *strategisk utvalg* (Thagaard, 2013). I denne studien ble det hensiktsmessig å velge informanter som har valgt matematikk, som var kjent med loggskriving og fokus på skriving i alle fag. Dermed er informantgruppen en matematikk 1T-klasse, med studiespesialiserende retning. Skolen har hatt et spesielt fokus på skriving, og har vært med på prosjektet 'Skriving i alle fag', et prosjekt knyttet til strategisk plan ved den videregående skolen. Prosjektet ble initiert av ledelsen ved skolen, men drevet av en prosjektgruppe bestående av en tverrfaglig gruppe lærere. 'Skriving i alle fag' bygger på kommunens skriveplan for videregående skole, som er utviklet fra Utdanningsdirektoratets (2013) 'Rammeverk for grunnleggende ferdigheter' (Utdanningsetaten, u.å.).

I første delanalyse er utvalget noe redusert under logg 3. Størrelsen på utvalget er 23 elever ved de to første loggførinsøktene, og 21 elever den siste. Da resultatene fra studien ikke kan generaliseres faller representativitetsprinsippet fra den kvantitative forskningen vekk.

I andre delanalyse er utvalget betraktelig mindre. Casestudie er mer inngående og tar hensyn til konteksten rundt selve loggføingsøkten, og er dermed mer tidskrevende. Det er her valgt tre elevers tekstsett, med i alt 9 elevtekster. Den ene eleven har skrevet på et fortellende nivå hele veien, mens de to andre elevene stort sett ligger på et godt oppsummerende nivå. Dette er et strategisk utvalg. De godt oppsummerende loggene vil kunne fortelle mer om elevens begrepsutvikling, enn de fortellende. De fortellende loggene er inkludert for å illustrere dette poenget. Under utvelgelsen av elevlogger var kjønn og ferdighetsnivå ukjent, det ble derfor tilfeldig valgt to jenter og en gutt. Pseudonymene avslører elevens kjønn.

3.3 Dokumentanalysen

I noen tilfeller vil dokumentmaterialet nærmest være gitt av problemstillingen (Hansen, Tanggaard, & Brinkmann, 2012). I denne studien er målet å finne ut hva elevenes tekster kan fortelle om begrepsforståelse i derivasjon. Dermed er det naturlig at metodevalget i første delanalyse falt på dokumentanalyse, hvor elevtekstene er dokumentmateriale.

I studien brukes Hansen et al. (2012) sin avgrensede definisjon av dokument; *'… språk som er nedskrevet og fastholdt på et gitt tidspunkt'* (s. 154). Dette er tilfellet for elevtekstene som ligger til grunn for denne studien. Elevtekstene kan beskrives som primærdokumenter, det vil si at de ikke er ment for offentligheten og de inneholder personlige tanker. Derfor er det elevenes velvilje som tillater å bruke dem i denne oppgaven. Primærdokumenter blir gjerne bearbeidet nært inntil hendelsen (Hansen et al., 2012), i dette tilfellet nært inntil skriveøktene.

Som nevnt innledningsvis vil denne studien analysere elevtekstene i to nivåer, disse ville kanskje Maxwell (2013) beskrevet som strukturert og ustrukturert tilnærming. Ved en strukturert tilnærming vil man i større grad ha mulighet til å sammenligne, se ulikheter og generalisere. I dokumentanalyse er det vanlig å presentere resultatene ved en delanalyse først for dernest å presentere ytterligere resultater mer inngående ved for eksempel eksemplifiseringer (Hansen et al., 2012). Den ene delen av dokumentanalysen har en strukturert tilnærming, hvor det fremkommer noen statistikker og visuelle fremstillinger. Under analysen ble det valgt en slik tilnærming først for å se eventuelle fellestrekk eller ulikheter på tvers av individer og situasjoner. I analysen vil også resultater i form av eksemplifiseringer bli presentert ved en mindre strukturert tilnærming, noe som tillater fokus på et spesifikt tema (Maxwell, 2013). En mindre strukturert tilnærming gir i større grad rom for å ta hensyn til kompleksiteten i situasjonen og indre validitet, fremfor generalisering og sammenligning ved strengt strukturert tilnærming (Maxwell, 2013).

I dokumentanalyse vil det ofte være behov for å samle inn dokumenter over en viss tidsperiode og dermed belyse visse fenomener over en tid. Dette gir rom for å presentere resultatinndelinger ved periodene (Hansen et al., 2012); logg 1, logg 2 og logg 3.

3.3.1 Logg som diskurs

Denne studien benytter en matematikkdidaktisk diskurs under analysen. Med *matematikk-didaktisk diskurs* menes det her at elevtekstene blir analysert med fokus på matematikk-didaktiske aspekter. Disse aspektene fremkommer av teorikapittelet som beskriver begrepsforståelse, derivasjon og skriving i matematikk.

I denne studien er det i tillegg benyttet en dialogisk diskurs, som tillater flere stemmer. Siden elevene fikk tilbakemeldinger på sine logger og elevene besvarte disse tilbakemeldingene i sin neste logg, har både lærer B og elevene hatt en stemme under gjennomføringen av studien.

Ved diskursanalyse er konstruksjonen av kategorier og meningssammenhenger over tid gjenstand for analysen (Hansen et al., 2012). En diskurs er et språklig filter som former virkeligheten vår, begreper og logiske resonnementer gir mening til erfaringene våre (Johannessen, Christoffersen, & Tufte, 2010). I denne studien vil det språklige filteret styres av teorikapittelet, en matematikkdidaktisk diskurs. Denne formen for analyse kalles en analytisk-deduktiv undersøkelsesmetode der teorien inspirerer til temaer, men dokumentmaterialet gir mulighet til tilpasning og revisjon av begreper og tematikker (Hansen et al., 2012).

I de aller fleste dokumentanalyser ser man gjerne en blanding av diskursanalyse og innholdsanalyse. Innholdsanalyse, som også kalles hypotetisk-deduktiv undersøkelsesmetode, tar gjerne utgangspunkt i en hypotese (Hansen et al., 2012). I utgangspunktet ligger det ingen konkret hypotese til grunn for analysen i denne oppgaven. Likevel må det vises åpenhet om at forfatter har hatt sine antagelser om hva som kunne bli funnet, dermed kan det ansees som at innholdsanalyse også er benyttet. Diskursanalyse og innholdsanalyse er ofte noe overlappende undersøkelsesmetoder (Hansen et al., 2012).

Analysen vil være fenomenologisk preget i første delanalyse. Johannessen et al. (2010) beskriver noen hovedsteg i fenomenologisk analyse som sammenfaller med denne delens fremdrift. Først vil forskeren skaffe seg et helhetsinntrykk over dokumentmaterialet ved å se etter hovedtrekkene og identifisere sentrale temaer. Deretter dannes koder og kategorier, som vil bli drøftet lenger ned i kapittelet. For så å trekke ut de delene av dokumentmaterialet som er kodet, dette kalles kondensering. (Johannessen et al., 2010).

3.3.2 Dokumentmaterialets kvalitet

Under vurdering av dokumentets kvalitet er det gjerne fire aspekter man burde gjøre rede for; autentisitet, troverdighet, representativitet og mening (Hansen et al., 2012). Da målet med studien er å finne ut hva elevtekstene forteller om begrepsforståelse i derivasjon, blir det viktig å vite at det ikke er mulighet for forfalskninger eller uklarheter rundt hvorvidt skriveren er i målgruppen. Elevene i denne studien har fått tildelt hvert sitt kandidatnummer, og skriveren kan dermed identifiseres entydig selv om de er anonyme, noe Hansen et al. (2012) beskriver at sikrer autentisitet.

Troverdighet må vurderes med to vinklinger, enkeltdokumentenes og dokumentsettets troverdighet. I denne studien må enkeltdokumentenes troverdighet sies å være svært sterk. Loggføringsøktene ble gjennomført under observasjon, og samlet inn rett etter skriving. Dette gav ingen muligheter for at elevene fikk andre til å skrive, fikk hjelp til å skrive eller svekke troverdigheten på andre vis. Når det er sagt kommer spørsmålet om elevenes ærlighet i loggene. Har elevene skrevet det de tror kan hjelpe dem best i faget, eller har de skrevet det de tror at jeg ønsket å se av dem? En av grunnene til hvorfor det ikke ble stilt minimalt med retningslinjer for loggen, var at elevene skulle skrive fritt. Det ble tydelig påpekt at det finnes ingen fasit for hvordan en faglogg skal se ut, eller hva som er rett og galt å skrive. Det er likevel ikke mulig å svare med sikkerhet på dette spørsmålet, elevenes intensjoner blir vanskelig å forsikre seg om.

Når det gjelder dokumentsettet vil dette også ha sterk troverdighet, da utvalget er en tilfeldig valgt klasse. Skjevhetene i kjønn er lite betydelig og det er sprik i ferdighetsnivå.

Videre kommer spørsmålet om representativitet. Kan dokumentmaterialet representere et typisk fenomen? Utvalget for denne studien er relativt lite, og elevene er ikke tilfeldig utvalgt. Det er 23 elever som er valgt fra en skole som har hatt et spesielt fokus på skriving i alle fag. Dette gir ikke et godt grunnlag for å kunne generalisere over store populasjoner. Likevel kan det gi inntrykk av typiske fenomener innad i denne gruppen. Når det er sagt kan fenomener likevel generaliseres. Generalisering brukes både innen kvalitativ og kvantitativ forskning. I kvalitativ forskning beskrives dette som teoretisk generalisering, hvor generalisering kan gjøres fordi de teoretiske argumentene er sterke og ikke fordi casen er representativ i seg selv (Mitchell, 2006). I denne studien brukes teoretisk generalisering i stor grad, da utvalget ikke er bredt nok til å kunne kalles representativt for en større populasjon. Det trekkes teoretiske generaliseringer ut ifra studiens teoretiske grunnlag. Selv om flere caser stadfester samme fenomen, betyr det ikke at det kan generaliseres til større populasjoner, bare at den teoretiske generaliseringen kan styrkes.

Til slutt må det reflekteres rundt hvorvidt dokumentmaterialets innhold fremstår uklart. For å styrke dokumentmaterialets kvalitet er det sentralt at meningen med tekstene kommer tydelig frem. Uklarheter kan skje i form av for eksempel språkbruk eller utydelig skrift. Denne studien ønsker å finne mening i elevers produksjon av tekster, og vi snakker dermed om hermeneutikk. Hermeneutikk handler om tolking og forståelse av datamaterialet, hvor tolkingen er et forsøk på å finne den underliggende meningen der det er uklart (Nilssen, 2012). Dokumentmaterialet i denne studien har vært klart på språk og skrift. Likevel er den hermeneutiske komponenten tilstede og utfordrer tanken om at fortolkningen av dokumentmaterialet er den absolutte sannheten.

Dokumentmaterialets kvalitet vil dermed være god, med sterk autentisitet, troverdighet og representativitet. I dokumentanalyse må alltid den hermeneutiske komponent tas i betraktning, likevel fremstår meningen med dokumentmaterialet klart i denne studien.

3.4 Casestudiet

Yin (2007) beskriver casestudie slik; *'…en empirisk undersøkelse som studerer et aktuelt fenomen i dets virkelige kontekst fordi grensene mellom fenomenet og konteksten er uklare'* (s. 31). Som tidligere nevnt har denne studien en todelt problemstilling, med to delanalyser. Andre delanalyse ønsker å gå dypere inn i teksten, og dette vil da foregå som en casestudie. Casestudiet inkluderer loggene til tre elever. Utvalget vil bli betydelig mindre i en casestudie enn i dokumentanalyse, siden denne typen analyse er tidskrevende og analyserer mye informasjon om de utvalgte casene (Thagaard, 2013). Utvalget tar hensyn til studiens mål, eksisterende teori og forskning rundt dette målet (Maxwell, 2013).

Det finnes flere tilnærminger for å knytte analysen til teori, denne oppgaven benytter en deduktiv tilnærming, det vil si at utvalget er et resultat av ønsket om å videreutvikle den teorien som studien tar utgangspunkt i (Thagaard, 2013).

Fordelen med å velge casestudie er at det er fokus på forhold som sammenbinder påstander innen konteksten til et helt bilde (Maxwell, 2013). I motsetning til for eksempel dokument-analysen som fokuserer på likheter som kan samles til koder eller kategoriseringer uavhengig av konteksten.

Casestudiets validitet er avhengig av god intern generalisering, og utvalgskriterier er spesielt viktig for intern generalisering (Mitchell, 2006). Utvalgskriteriene for de tre elevenes tekstsett ble som nevnt utviklet av blant annet eksisterende teori rundt målet med studien og av resultater fra dokumentanalysen. Ønsket var å kunne se de tre utviklingsnivåene for begreps-forståelse og god matematisk faglogg, derfor ble det valgt to elever som skrev godt oppsummerende faglogg på minst en av sine faglogger. Det ble også valgt en elev som skrev på et fortellende nivå, for å vise hvordan godt oppsummerende logger kan gi annen informasjon. En av de største utfordringene i forhold til intern generalisering er forståelsen for variasjonen i fenomenet som undersøkes innenfor casen (Maxwell, 2013). Fenomenet som undersøkes er begrepsutvikling, noe som varierer på ulike nivåer. For eksempel kan man ha nådd reifikasjonsstadiet på to ulike faglige nivåer.

Siden det er en utvikling som skal undersøkes er det naturlig å benytte analysemetoden tidsserieanalyse, definert som; *'… fortolkningen av et fenomens utvikling over en tidsperiode'*

(Johannessen et al., 2010, s. 211). Tidsperioden er den tiden elevene hadde om emnet derivasjon.

3.5 Utvikling av analyseverktøy

Analyseprosessen består først og fremst av å skape mening i dokumentmaterialet (Nilssen, 2012). I dokumentanalyse ønsker man å angi klart definerte variabler ved en operasjonalisering (Hansen et al., 2012). Elevtekstene utgjør en ufordøyd og kompleks virkelighet. Koding er starten på en meningsskapende prosess, videre kan temaer og kategorier identifiseres (Nilssen, 2012). Kodene kan være formålstjenlige indikatorer, som eksemplifisering eller holdninger. For å kunne finne ut om en utvikling har funnet sted, er det behov for observerbare indikatorer (Hansen et al., 2012).

Nedenfor drøftes to kodingsapparater, et om loggskrivingsnivåer og et om begrepsutvikling. Det er valgt fire nivåer i disse kodingsapparatene. Grunnen for dette er at det er ønskelig å kunne se en utvikling hos elevene, og ved valg av fire nivåer vil man bli tvunget til å ta stilling til om eleven er over eller under middels.

3.5.1 Utvikling av kodingsapparatene

Tabellene under viser kodene for grad av oppnåelse innen skriving og begrepsforståelse. Kodene er utviklet fra innholdet i teorikapittelet. Det er her brukt *åpen koding*, hvor målet er å identifisere og klassifisere de største mønstrene i materialet (Nilssen, 2012).

Kodingsapparatet for loggskrivingsnivåene

Tabell 1: Beskriver fire utviklingsnivåer for loggskriving med utgangspunkt i Clarke et al. (1993) sine tre utviklingsnivåer i loggskriving; fortellende (F), oppsummerende og dialogisk (D).

Teoretisk forankring	**Nivå 1 (F)**	**Nivå 2 (O-)**	**Nivå 3 (O+)**	**Nivå 4 (D)**
Clark et al.	Beskriver hva som har skjedd i timen, hva som er gjennomgått. Viser lite eller ingen matematisk fokus. (Fortellende logg, F)	Oppsummerer det matematiske ved timen. Noen definisjoner med korte tilhørende forklaringer. (Svakt oppsummerende logg, O-)	Oppsummerer det matematiske ved timen. Definisjoner med gode forklaringer, ser noen sammenhenger. (Godt oppsummerende logg, O+)	God beskrivelse av definisjoner og tilhørende gode forklaringer. Ser sammenhenger og frsøker å generalisere ved å se om det kan fungere i andre tilfeller. (Dialogisk logg, D)

Tabell 1 viser utviklingsnivåene i loggskriving med inspirasjon fra Clarke et al. (1993) sine tre nivåer; *fortellende, oppsummerende og dialogisk logg*. Det oppsummerende nivået er delt inn i to nivåer; svakt oppsummerende (O-) og godt oppsummerende (O+). Dokumentanalysen vil kategorisere loggene i fire utviklingsnivåer for loggskriving. Her er kodingene ment å kunne brukes på et relativt stort dokumentmateriale, da kodene for det meste er enkle å identifisere. Derfor vil hele dokumentmaterialet som ligger til grunn for studien bli kodet i henhold til dette kodingsapparatet.

Førte del av problemestillingen for denne studien ønsker i tillegg å undersøke elevenes bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling i sine faglogger. Dermed har dette blitt to kategorier i dokumentanalysen.

Eksemplifisering er første kategori. En logg blir beskrevet som å inneholde eksemplifisering om det finner eksempler for å forklare matematiske fenomener. Eksempelet kan være algebraiske eller grafiske. Ved grafiske eksempler kreves det eksplisitte tallverdier knyttet til eksempelet for å havne under denne kategorien.

Andre kode er *grafisk fremstilling*. Grafisk fremstilling er forklaring av fenomener ved hjelp av figurer. Figurens hensikt skal være å forklare et fenomen. Fortegnslinjer er klassifisert innen grafisk fremstilling.

Kodingsapparatet for begrepsutviklingsnivåene

Tabell 2: Beskriver fire utviklingsnivåer i begrepsforståelse med utgangspunkt i Sfard (1991) sine tre utviklingsnivåer i begrepsforståelse.

Teoretisk forankring	Nivå 1	Nivå 2	Nivå 3	Nivå 4
Sfard	Viser noe faktakunnskap om emnet. (Internalisering)	Viser faktakunnskap om emnet og forsøker å sette det i sammenheng med forkunnskaper.(Kondensering)	Viser fatakunnskap om emnet og setter det i sammenheng med forkunnskaper. Forsøker å koble prosesser til å bli objekter. (Kondensering)	Viser fatakunnskap om emnet og setter det i sammenheng med forkunnskaper. Kobler prosesser til å bli objekter. Gjenkjenner fenomener i nye situasjoner. (Reifikasjon)

Tabell 2 viser fire nivåer for begrepsutvikling. Disse nivåene er utarbeidet med inspirasjon fra Sfard (1991) sine tre utviklingsnivåer når det gjelder begrepsforståelse; *internalisering, kondensering og reifikasjon*. Kondensering er et nivå som man gjerne er på i lengre tids-perioder, og det er stort sprik i nivået i overgangen mellom internalisering – kondensering og kondensering – reifikasjon. Derfor vil nivå 2 og 3 tilsvare to nivåer i nivået kondensering. Disse kodene er mer komplekse og krever en dypere analyse for å identifiseres. Derfor velges kun tre av elevenes tekstsett ut til å bli kodet i henhold til dette kodingsapparatet.

3.6 Forskningsetiske hensyn

NESH (2006) forklarer forskningsetikk som; *'…et mangfoldig sett av verdier, normer og institusjonelle ordninger som bidrar til å konstituere og regulere vitenskapelig virksomhet'* (s. 5). Det vil videre i dette delkapittelet ble drøftet noen av de forskningsetiske hensynene som er spesielt viktig for denne studien.

3.6.1 Informert samtykke

Informert samtykke er en viktig retningslinje for kvalitativ forskning. Det innbærer at elevene skal gi samtykke før forksningen, og eleven skal informeres godt (Thagaard, 2013). Informasjonen skal handle om hva de er med på, hva som skjer med deres arbeider og ikke minst at de kan trekke seg når de vil uten konsekvenser. Det er viktig at informasjonen om prosjektet og konsekvensene for barnet er alderstilpasset, slik at elevene vet hva de gir samtykke til (NESH, 2006). Fordi barn og unge kan ha en tendens til å underkaste seg autoriteter, som for eksempel læreren sin eller forskeren, uten å forstå sitt eget valg om deltagelse og eventuelle konsekvenser.

I denne studien ble elevene muntlig informert før de skrev under samtykkerbrevet. Elevene fikk også med seg skriftlig informasjon om studien hjem (se vedlegg 1). Elevene i denne studien er alle over 15 år, og det er dermed ikke nødvendig med samtykke fra foreldre (Nilssen, 2012).

3.6.2 Konfiensialitet

Videre er *konfidensialitet* viktig. Konfidensialitet sikrer at dokumenmaterialet blir behandlet med konfidensialitet og med respekt (Thagaard, 2013). Dette er viktig overfor barn og unge, selv om det kan oppstå situasjoner hvor det fremkommer sensitiv informasjon hvor forskeren er meldepliktig (NESH, 2006). Som for ekspmpel ved mistanke om barnets velferd.

Konfidensialiteten sikrer anonymitet på globalt nivå. I denne studien har elevene fått egne kandidatnummer for å sikre elevenes ananymitet. Dette beskrives av (Thagaard, 2013) som indirekte personopplysninger, da klassens lærer sitter med kodingsnøkkelen. Likevel vil det alltid være vanskelig, og kanskje umulig, å sikre anonymitet på lokalt nivå (Nilssen, 2012). Ved gjennomlesing av denne masteroppgaven kan lærer kjenne igjen noen elever gjennom tekstutdrag, og elevene vil kjenne igjen sine egne logger og kanskje til og med kjenne igjen andre elevers logger. Anonymiteten utad er likevel sikret.

3.6.3 Spesielle hensyn til barn og unge

Når man arbeider med barn er det flere hensyn som må tas. Det er viktig at forskeren har tilstrekkelig kunnskap om aldersgruppen og kan tilrettelegge metode og innholdet av forskningen til elevene (NESH, 2006). I tillegg til ønsket om å besvare problemstillingen, har denne studien også ønsket å kunne gi elevene et læringsutbytte. Studien ble utført i elevenes undervisningstid, og elevene har dermed krav på læringsfokus i undervisningen. Det ble viktig at det ikke kun var jeg, men også elever som følte utbytte av gjennomføringen. Jeg fikk som tidligere nevnt dermed to roller under denne studien, som lærer og som forsker.

I tillegg til læringsutbytte vil elevene også få ‘betalt’ ved at jeg kommer og forteller dem om forskningen og resultatene jeg har funnet. På denne måten vil elevene for det første få innsikt i betydningen av deres eget arbeid og jeg kan vise min takknemlighet til i forhold deres deltagelse.

3.7 Studiens kvalitet

Studiens kvalitet er avhengig av reliabilitet og validitet. Her vil viktige momenter drøftes for å styrke studiens kvalitet.

3.7.1 Reliabilitet (pålitelighet)

Reliabilitet, eller pålitelighet, handler om i hvor stor grad en annen forsker ville kommet frem til samme resultat ved lik metodebruk (Thagaard, 2013). Det snakkes gjerne om intern og ekstern reliabilitet, hvor ekstern reliabilitet ofte er vanskelig i kvalitativ forskning. Repliserbarhet vil være urealistisk i denne studien, da min rolle under forskningen har hatt betydning for resultatet. Ved å benytte en dialogisk diskurs under gjennomføringen av studien, har både min stemme og deltagernes stemme påvirket resultatet. Det vil derfor være vanskelig for en annen forsker å kunne replisere dette. Johannessen et al. (2010) beskriver en test-retest-reliabilitet som lite hensiktsmessig, da forskeren bruker seg selv som instrument i studien. Derimot er det desto viktigere å fokusere på indre reliabilitet. Dette handler om å beskrive forskningsprosessen og analysemetoder så grundig som mulig (Thagaard, 2013). I begynnelsen av dette kapittelet er studiens forskningsdesign beskrevet svært grundig, med både undervisningskontekst og mine roller under denne studien. Tilbakemeldingene i elevenes faglogger er beskrevet i kapittelet om forskningsdesignet. Det settes et klart skille mellom min rolle som lærer B i gjennomføringen og min rolle som forsker under analysen. Dermed kan forskningsprosessen følges trinn for trinn, noe som styrker studiens reliabilitet. Teoretisk gjennomsiktighet blir også vektlagt for å styrke reliabilitet, det innebærer at teorien representerer grunnlaget for tolkninger på en god måte.

I denne studien settes det et klart skille mellom primærdata og forskerens fortolkninger. Elevenes faglogger er usensurert og er utført i en naturlig undervisningskontekst. Under presentasjon av resultater vil det klart fremkomme hva som er hentet fra elevtekstene direkte, og mine fortolkninger av elevtekstene. Thagaard (2013) påpeker at ved å holde konkrete datamateriale atskilt fra fortolkninger på denne måten, styrkes reliabiliteten.

3.7.2 Validitet (troverdighet)

Validitet går ut på behandlingen av datamaterialet, tolkningen av dataene. *'Måler vi det vi tror vi måler?'*(Johannessen et al., 2010, s. 230). I kvalitative studier kan vi ikke måle resultatene i den forstand. Dermed handler det om hvordan det reflekteres rundt formålet med studien og hvordan det representerer virkeligheten. Elevenes faglogger er primærdokumenter og tidligere er det blitt gjort rede for dokumentmaterialets kvalitet. Dokumentmaterialet er autentisk, og representer dermed virkeligheten. Gyldighet til om studien handler om den virkeligheten vi har studert er derfor sterk.

Ekstern validitet handler om overførbarhet (Thagaard, 2013). Som tidligere drøftet i sammenheng med dokumentmaterialets representativitet, er utvalget relativt lite og resultatene er dermed ikke statistisk generaliserbare. Derimot kan teoretisk generalisering argumenteres for. Teoretiske argumenter benyttes for å generalisere fenomener som blir observert i elevtekstene.

Relasjonen mellom forskeren og informantene er viktig å reflektere rundt, både for å styrke reliabiliteten og validiteten i studien. I denne studien har mine to atskilte roller gjort det mulig å beholde objektivitet under analysen av elevtekstene. Som forsker må man reflektere over hvordan man posisjonerer seg i forhold til deltagerne i studien (Thagaard, 2013). Derfor ble det så viktig å sette et skille, hvor jeg ønsket å være lærer B og gi elevene nytteverdi av aktiviteten samtidig som forskerrollen forsøker å behandle elevtekstene objektivt. Informasjon om kjønn og karakterer ønsket jeg ikke å få før etter analysen av tekstene var gjennomført. Slik ville ikke min eventuelle forutinntatthet (researcher bias) om for eksempel at sterke elever viser større grad av begrepsutvikling eller at kjønn har betydning, påvirke resultatene.

I dette kapittelet er det presentert sentrale trekk ved metoder og datakilder som er anvendt, og det er vist hvordan det analytiske arbeidet er gjennomført i forhold til koder og kategorier. Studiens pålitelighet og troverdighet er også gjort rede for. I det påfølgende kapittelet vil det presenteres resultater og analyser av studiens funn.

4 Resultater og analyse

I dette kapittelet vil studiens resultater bli lagt frem. Først vil undervisningskonteksten rundt de ulike loggsituasjonene, samt klassen bli beskrevet. Deretter kommer resultatene fra 1. delanalyse, dokumentanalysen. Det vil først fremlegges tekstutdrag fra dokumentanalysen, som illustrerer ulike viktige poenger. Deretter presenteres overordnede resultater, i form av kategoriseringer og figurer. Disse resultatene fremstilles i stor grad uten hensyn til konteksten, med liten grad av drøfting. Clarke et al. (1993) sine tre utviklingsnivåer for loggskriving; fortellende, oppsummerende og dialogisk, danner utgangspunkt for denne delanalysen. Delkapittelet avsluttes med en drøfting av resultatene som er presentert i delkapittelet.

Presentasjonen av resultatene fra casestudiet innehar stor grad av drøfting underveis. Kategoriseringene vil ikke være like klare, siden kontekst og samspillet mellom begrepsforståelse og loggskrivingen inkluderes. Det vil bli tatt utgangspunkt i tre elevers loggsett; først et fortellende loggsett, deretter kommer to tilnærmet godt oppsummerende loggsett. Fokuset for denne delanalysen er å se på utvikling av begrepsforståelse med utgangspunkt i Sfard (1991) sine tre utviklingsnivåer; internalisering, kondensering og reifikasjon.

4.1 Beskrivelse av klassen og undervisningskonteksten rundt loggsituasjonene

Utvalget for studien er en klasse på videregående skole, på 1. trinn. Elevene er mellom 16-17 år og har valgt teoretisk matematikk (1T). Det er 8 jenter og 15 gutter i klassen. Klassen ligger på et middels kompetansenivå og nesten hele karakterskalaen er representer.

Det ble gjennomført tre loggføringsøkter. Første loggføringsøkt ble gjennomført etter en undervisningsøkt som fokuserte på stigningstall, gjennomsnittlig- og momentan vekstfart. Loggskrivingen forgikk i de ti siste minuttene av undervisningsøkten. Den andre loggføringsøkten ble gjennomført på like premisser, men fokuset for denne undervisningsøkten var å undersøke monotoniegenskapene til en funksjon. Siste loggføringsøkten ble gjennomført etter 20 minutters repetisjon av hele emnet (se Figur 3). Denne undervisningsøkten foregikk etter elevene hadde hatt prøven i emnet. Elevene hadde ikke hatt muligheten til å arbeide med oppgaver på forhånd, noe som viste seg å gjøre det vanskelig for elevene skrive loggene. Det virket som at det ble for lite konkret, noe som kan stille større krav til begrepsforståelsen.

4.2 Dokumentanalysen

Dokumentanalysens inspirasjon til kategorier er Clarke et al. (1993) sine utviklingsnivåer for loggskriving; fortellende, oppsummerende og dialogisk. Her vil nivåene illustreres med noen tekstutdrag, før en oversikt over klassens samlede resultater legges frem.

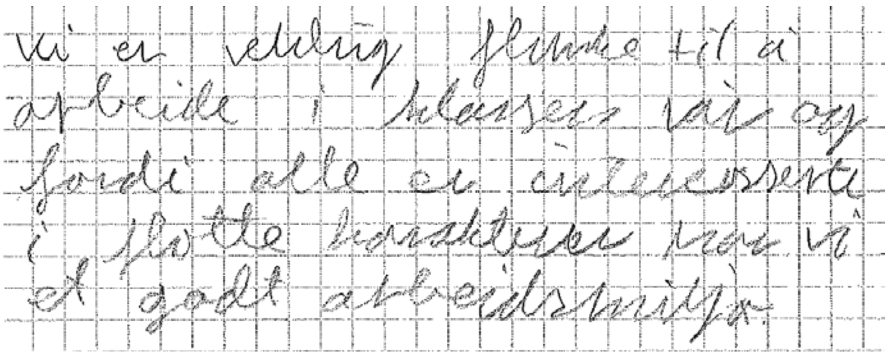
Avslutningsvis i dette delkapittelet vil resultatene av dokumentanalysen drøftes.

4.2.1 Eksemplifisering av Clarke et al. (1993) sine utviklingsnivåer for skriving

For å gi en bedre beskrivelse av de ulike utviklingsnivåene av loggskriving, vil noen tekstutdrag legges fram for å eksemplifisere de ulike utviklingsnivåene.

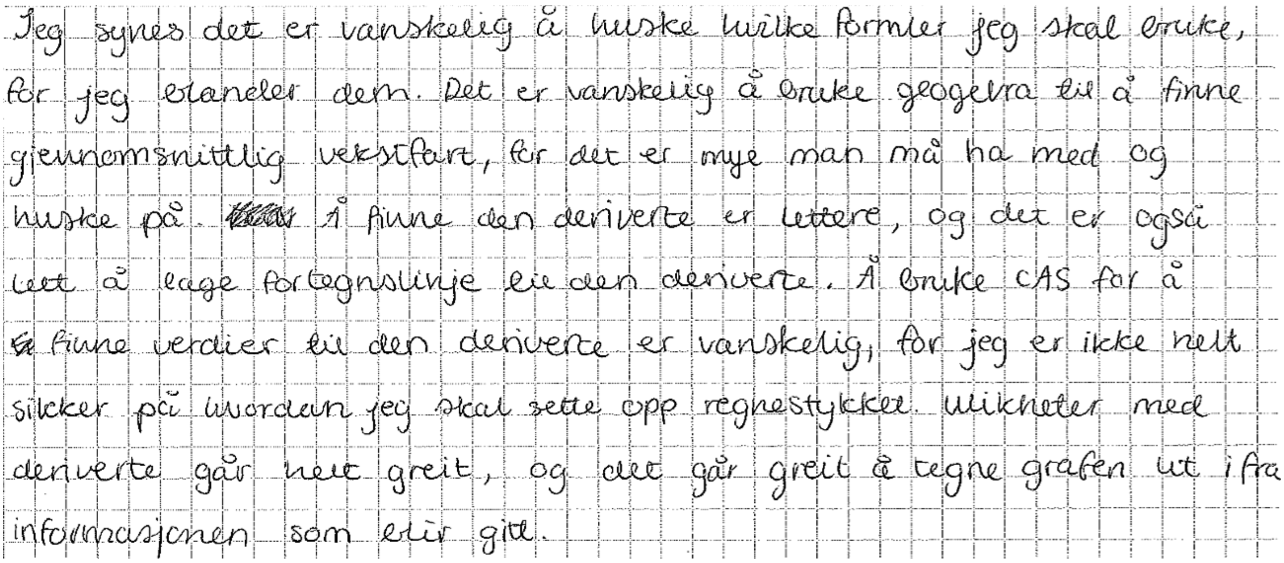
Fortellende logg

Fortellende logger (F) har fokus på hendelsesforløp og generelle poenger. Det matematiske fokus er lite eller ikke tilstede (Clarke et al., 1993).


Vi er veldig flinke til å
arbeide i klassen vår og
fordi alle er interessert
i flotte karakterer har vi
et godt arbeidsmiljø.

Tekstutdrag 1: elev 20, logg 1

Tekstutdrag 1 viser et avsnitt fra en fortellende logg (F), hvor det matematiske fokuset er fraværende. Dette avsnittet viser tydelig tegn på fortellende logg, da fokuset er på klassen, arbeidsinnsats og motivasjon, fremfor matematikken. Det er veldig lett å kategorisere dette tekstutdraget, siden det ikke er noe tegn til matematisk fokus. Likevel er det ikke alltid like lett å av gjøre hvilket nivå loggen faller innunder. Ikke alle fortellende logger vil være helt uten matematisk fokus (Tekstutdrag 2).



Jeg synes det er vanskelig å huske hvilke formler jeg skal bruke,
for jeg blander dem. Det er vanskelig å bruke geogebra til å finne
gjennomsnittlig vekstfart, for det er mye man må ha med og
huske på. Å finne den deriverte er lettere, og det er også
lett å lage fortegnslinje til den deriverte. Å bruke CAS for å
finne verdier til den deriverte er vanskelig, for jeg er ikke helt
sikker på hvordan jeg skal sette opp regnestykket. Ulikheter med
deriverte går helt greit, og det går greit å tegne grafen ut ifra
informasjonen som blir gitt.

Tekstutdrag 2: elev 1, logg 3

Tekstutdrag 2 inneholder matematisk fokus, likevel er den fremdeles fortellende. Det matematiske som fremkommer er generelt, overordnet og beskriver hva eleven kan og ikke kan, fremfor å beskrive det matematiske. Eleven forteller hva som er vanskelig og hva han/hun får til, fremfor å forsøke å forklare de matematiske aspektene som oppfattes som lette eller vanskelige. Det blir nevnt noen matematiske begreper, men ikke forklart slik en oppsummerende tekst ville gjort. Tekstutdrag 3 viser en godt oppsummerende logg som beskriver det som er vanskelig, og ikke bare at det er vanskelig. Når man klarer å skrive på denne måten har man kommet på et oppsummerende nivå for loggskrivingen.

Oppsummerende logg

Oppsummerende tekster har større matematisk fokus, og forsøker å forklare de matematiske ideene (Clarke et al., 1993). Dette utviklingsnivået innen logg er et nivå hvor man befinner seg lenge, og mange elever befinner seg på dette nivået. Derfor har denne studien valgt å dele dette nivået inn i to nivået; svakt oppsummerende (O-) og godt oppsummerende (O+). Forskjellen mellom disse to nivåene er at de godt oppsummerende loggene (O+) forsøker å se etter sammenhenger.

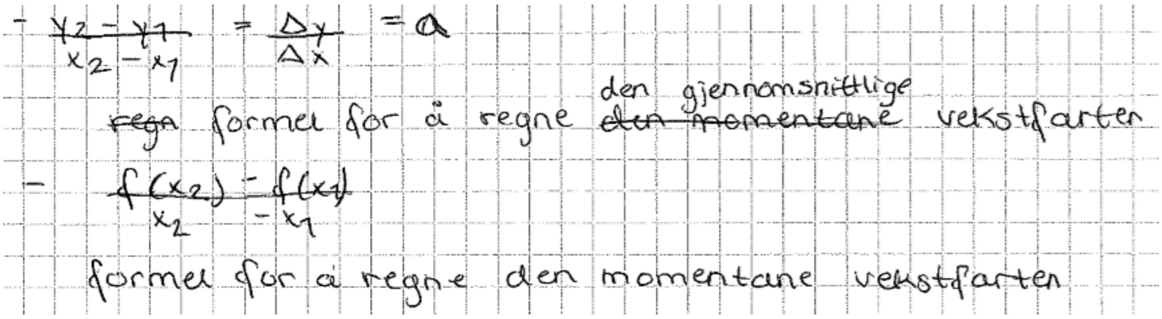
Tekstutdrag 3 viser en svakt oppsummerende logg (O-), som ikke ser sammenhengene mellom ulike matematiske fenomener. De matematiske fenomenene blir presentert enkeltvis, noe som kan tyde på et sekvensielt oppbygd kunnskapsskjema.

- $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$

~~rega~~ formel for å regne ~~den momentane~~ den gjennomsnittlige vekstfarten

- $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

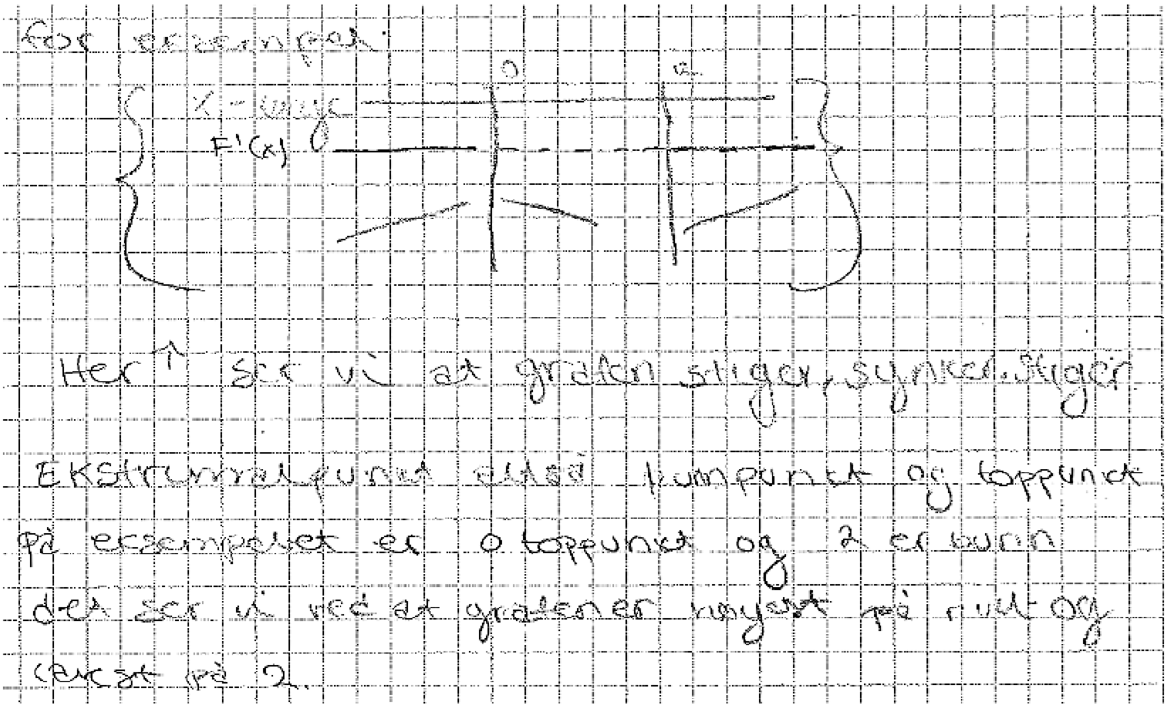
formel for å regne den momentane vekstfarten



Tekstutdrag 3: elev 23, logg 2

Denne eleven beskriver gjennomsnittlig og momentan vekstfart, men likevel er det ingenting som indikerer at eleven ser sammenhengen mellom disse to fenomenene. Det blir presentert to separate formler, som beskriver det samme; stigningstallet for en rett linje. Innholdet i Tekstutdrag 3 kan tyde på at eleven har pugget seg frem til formlene, og ikke fult forstår hva de forteller. Derfor klassifiseres dette som en svakt oppsummerende logg (O-). En godt oppsummerende logg ville her forsøkt å se sammenhengen mellom gjennomsnittlig og momentan vekstfart. Forskjellen er kun at den rette linjen er en sekant for gjennomsnittlig vekstfart og en tangent for momentan vekstfart. Når det er sagt, vitner dette tekstutdraget også om en begrepsforståelse på internaliseringsnivået, da eleven kun har noe faktakunnskap om den matematiske ideen. Hvis eleven forsto sammenhengen mellom de to formlene han/hun nevner, ville vedkommende ikke skrevet at $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x\_1}$ er formelen for å regne ut den momentane vekstfarten. $f(x_1)$ og $f(x_2)$ er to punkter på grafen, og den rette linjen man finner stigningstallet til er dermed en sekant og ikke en tangent.

En godt oppsummerende logg forsøker å se sammenhenger og koble sammen de ulike matematiske fenomenene de har arbeidet seg gjennom. Tekstutdrag 4 er et eksempel som viser dette.


For eksempel:

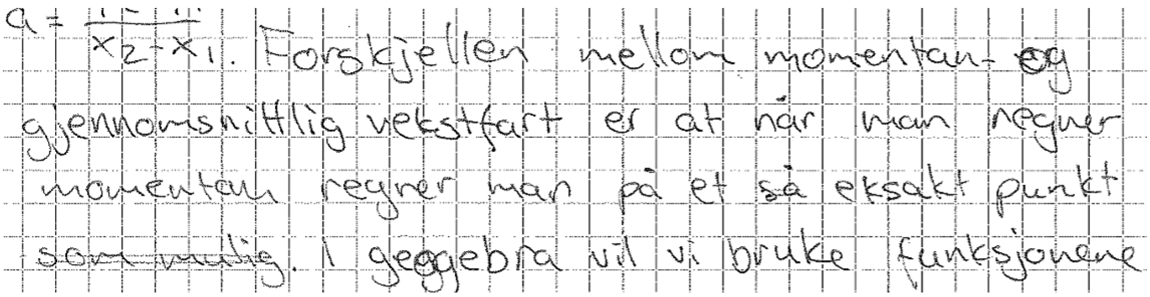
x-verdi 0 2
F'(x) 0

Her ↑ ser vi at grafen stiger, synker, stiger. Ekstremalpunkt eller bunnpunkt og toppunkt på eksempelet er 0 toppunkt og 2 er bunn det ser vi ved at grafen er høyest på null og lavest på 2.

Tekstutdrag 4: elev 5, logg 2

Dette er et avsnitt fra en godt oppsummerende logg (O+). Loggen viser et fortegnsskjema som er utarbeidet ved algebraisk utregning og ser dette i sammenheng med grafens utseende. Eleven viser Tekstutdrag 4 at det er en sammenheng mellom fortegnsskjemaet, nullpunktene og hva topp- og bunnpunkt er. En svakt oppsummerende logg ville kanskje tegnet opp en fortegnslinje og fortalt at det er et toppunkt i $x = 0$ og $x = 2$, uten å beskrive hvor grafen stiger, synker, er høyest eller lavest.

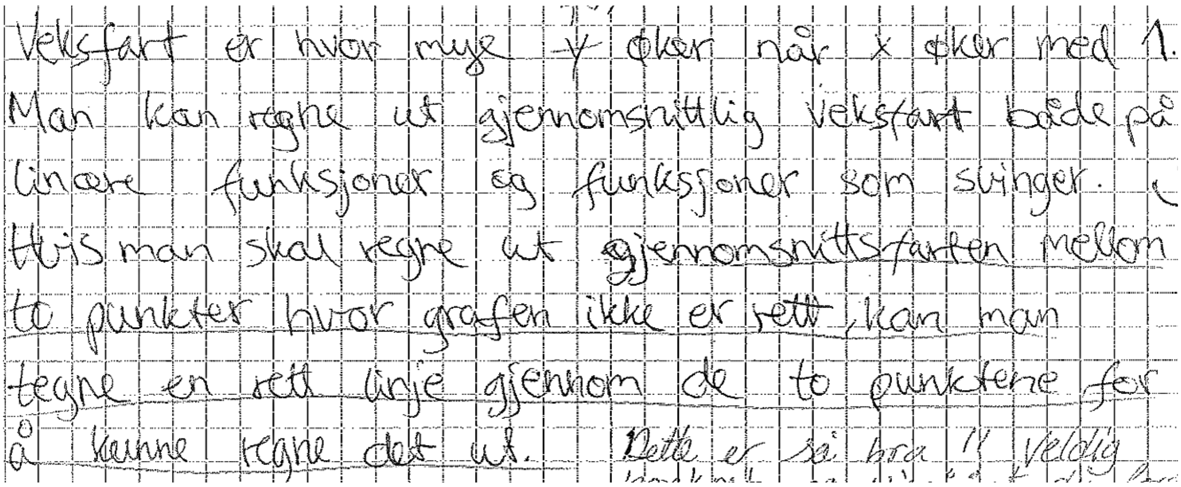
I de oppsummerende loggene er det ikke unødvendig fokus på hva som skjedde eller hva som fantes av forståelse, kun en forklaring av det matematiske fenomenet som viser hva eleven kan. En forklaring som i Tekstutdrag 3 og Tekstutdrag 4 kan fortelle mye om elevens forståelse, men også elevens eventuelle misoppfatninger.


a = $\frac{\ldots}{x_2 - x_1}$. Forskjellen mellom momentant og gjennomsnittlig vekstfart er at når man regner momentan regner man på et så eksakt punkt som mulig. I geogebra vil vi bruke funksjonene

Tekstutdrag 5: elev 3, logg 1

Tekstutdrag 5 viser en godt oppsummerende logg (O+), hvor det fremkommer en tydelig misoppfatning. Eleven viser at den ikke har forstått at man finner momentan vekstfart i et eksakt punkt. (Under mine tilbakemeldinger streket jeg over ‘som mulig’) I dette tekst-utdraget er det tydelig at eleven ikke forstår hva momentan vekstfart er, siden han/hun skriver *‘… på et så eksakt punkt som mulig’*. Jeg var tilstede i denne undervisningsøkten og har derfor en mistanke om hvor denne misoppfatningen kommer fra. Under gjennomgangen av gjennomsnittlig og momentan vekstfart ble det snakket om fartskontroll, og hvordan det ble målt gjennomsnittlig vekstfart på et veldig kort intervall. Denne misoppfatningen ble observert i flere logger.

Fra logger på dette nivået vil det også være mulig å finne tegn på at man ikke har nådd reifikasjonsstadiet i begrepsforståelse. Dette innebærer at eleven ikke har etablert den matematiske ideen som et objekt, men at det fremdeles blir sett på som en regneoperasjon (Sfard, 1991). Tekstutdrag 6 illustrer dette.


Vekstfart er hvor mye y øker når x øker med 1.
Man kan regne ut gjennomsnittlig vekstfart både på
lineære funksjoner og funksjoner som svinger.
Hvis man skal regne ut gjennomsnittsfarten mellom
to punkter hvor grafen ikke er rett, kan man
tegne en rett linje gjennom de to punktene for
å kunne regne det ut. Dette er så bra!! Veldig

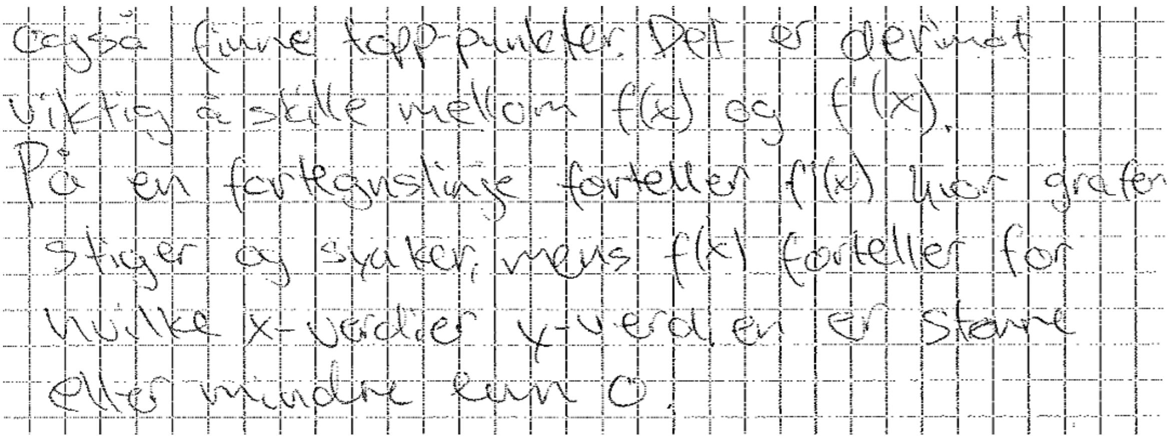
Tekstutdrag 6: elev 8, logg 1

Dette er en godt oppsummerende logg (O+), hvor man ser mangel på begrepsforståelse. *‘Man kan regne ut gjennomsnittlig vekstfart både for lineære funksjoner og funksjoner som svinger’*. Eleven snakker om å finne gjennomsnittlig vekstfart for en rett linje, noe som ikke gir mening da gjennomsnittlig vekstfart representeres ved en rett linje. Fra dette synes det at eleven har fått med seg at det er noe spesielt med gjennomsnittlig vekstfart i forhold til ikke-lineære funksjoner. Når eleven skriver at man kan regne ut gjennomsnittlig vekstfart for en lineær funksjon, kan vi som lesere se at eleven ikke har forstått den matematiske ideen gjennomsnittlig vekstfart. Ved oppnåelse av reifikasjonsstadiet vil gjennomsnittlig vekstfart være et objekt representert ved en rett linje.

Dialogisk

Den dialogiske loggen er matematisk, sammenbindende og nysgjerrig. Den har et matematisk fokus som forsøker å se sammenhenger mellom forkunnskaper og ny kunnskap. Samtidig ser disse loggene fremover og viser nysgjerrighet i form av forsøk på generaliseringer av den matematiske ideen.

Til nå har det blitt lagt frem flere eksempler av fortellende og oppsummerende logger. Det ble i denne studien ikke observert noen dialogiske logger, men noen var i nærheten. Tekstutdrag 7 et eksempel på en god matematisk faglogg som ikke er dialogisk, og en begrunnelse for hvorfor den ikke er det.


Også å finne topp-punkter. Det er derimot viktig å skille mellom f(x) og f'(x).
På en fortegnslinje forteller f'(x) hvor grafen stiger og synker, mens f(x) forteller for hvilke x-verdier y-verdien er større eller mindre enn 0.

Tekstutdrag 7: elev 3, logg 3

Tekstutdrag 7 viser en godt oppsummerende logg (O+). Dette avsnittet fra en av elevtekstene viser at elever forstår forskjellen på $f(x)$ og $f'(x)$. Det er ikke mange elever som har klart å sette ord på skillet mellom disse to grafene, og hva de forteller. Eleven ser dermed $f(x)$ og $f'(x)$ i sammenheng. Selv om denne fagloggen viser god begrepsforståelse, er det ikke noe sted i loggen forsøk på å koble inn andre temaer, se kunnskapen i andre sammenhenger eller koble inn forkunnskaper eksplisitt. For eksempel ville en dialogisk logg kanskje forklart ved bruk av et eksempel, den ville da kunne forklart hva nullpunktene betyr for de to grafene og kanskje fortelle forskjellen på stigningen til tangenetene til de to grafene i ulike punkter osv.

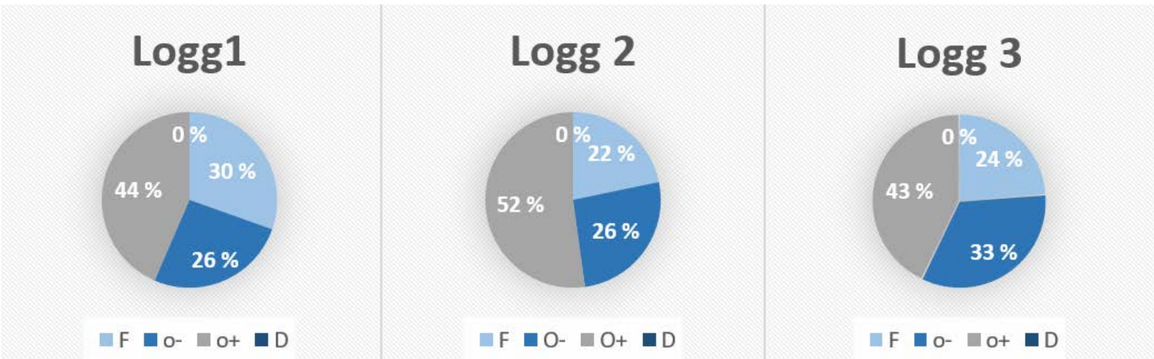
Eleven viser ingen nysgjerrighet ved forsøk på generaliseringer eller å se fremover, noe en dialogisk logg ville gjort forsøk på. Et eksempel kunne vært om eleven så for seg andre grafer, kanskje ikke-kontinuerlige, for så å diskutere hvordan de to grafene ville oppført seg. Det kunne vært så enkelt som å forsøke å forutsi hvordan de to grafene endres ved å se på en hvilken som helst graf, uten å beregne. Siden det ikke finnes slike forsøk i denne loggen, kan ikke denne fagloggen klassifiseres som dialogisk.

4.2.2 Klassens skriveprosess fra logg 1 til logg 3

Resultatene av kategoriseringen (se Figur 5) av loggenes utviklingsnivå viser at på alle de tre loggene er det flest elever som skriver godt oppsummerende logger (O+). I første logg havner 10 av 23 elever under denne kategorien, mens 7 av 23 elever skriver fortellende logger (F). De resterende 6 elevene skriver svakt oppsummerende logger, og det er dermed ingen logger som blir klassifisert til å være dialogiske logger (D). Sistnevnte gjenspeiles under alle loggføringsøktene, ingen logger ble klassifisert som dialogisk i denne studien.

Logg 2 viser færre fortellende logger og flere godt oppsummerende logger. Antall elever som skrev svakt oppsummerende logger er likt som i logg 1, 6 av 23 elever (se Figur 5).

Figur 5 viser at fra logg 2 til logg 3 var det flere fortellende logger og færre godt oppsummerende logger. Ved gjennomføringen av tredje logg var to elever fraværende. Disse to elevene hadde begge godt oppsummerende logger på logg 1 og logg 2, noe som påvirker resultatene. I tillegg må det presiseres at undervisningskontekst var annerledes i denne loggen. Med mindre konkret tema å snakke om i loggene, ble det stilt større krav til begreps-forståelsen.

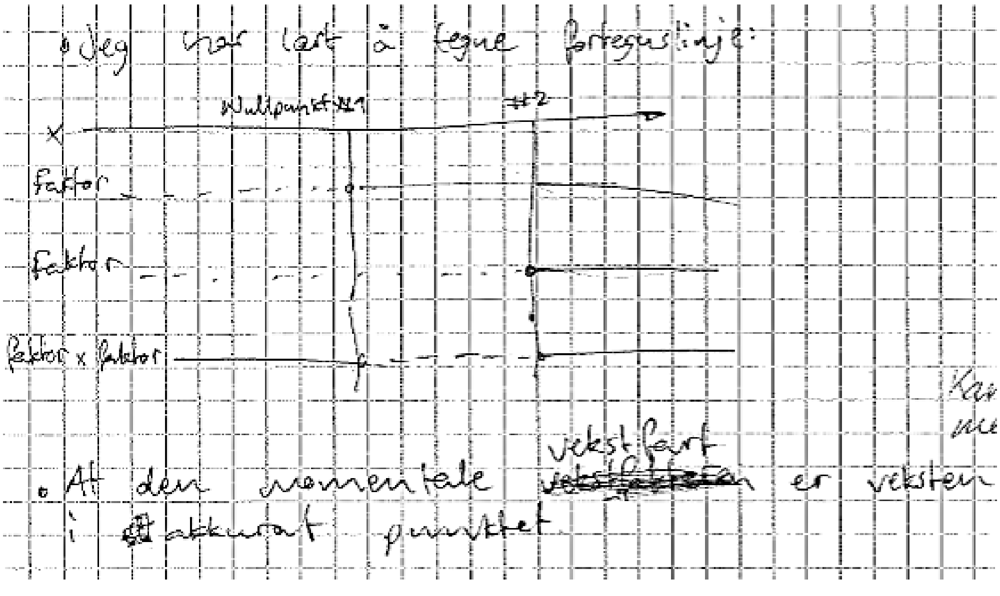


Figur 5: Klassens fordeling av utviklingsnivåene i loggskriving for logg 1,2 og 3. Under gjennomføringen av logg 1 og 2 var det to elever mer tilstede enn ved siste loggføringsøkt. Disse elevene er inkludert her. Ved å fjerne dem, ville prosentandelen for godt oppsummerende logger (O+) blitt noe høyere.

4.2.3 Bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling i loggene

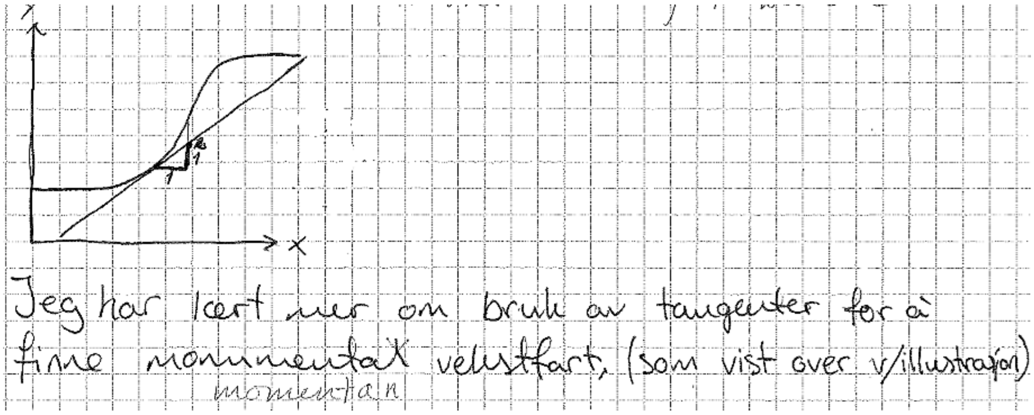
Ofte kan eksemplifisering eller grafisk fremstilling være gode verktøy for å forklare matematiske fenomener. Spesielt i emnet derivasjon er den grafiske forståelsen viktig. I et forskningsprosjekt fra Vest-Asia, viste resultatene at det å bruke grafiske fremstillinger som et redskap i forklaringen er vanskelig for elever (Hashemi et al., 2014). Dette var elever som gikk første året på universitet. Disse elevene besvarte ofte oppgavene enten med tekst eller med grafiske fremstillinger, og det viste seg svært utfordrende å bruke disse til å forsterke hverandre (Hashemi et al., 2014). Dette er interessant og derfor har denne studien ønsket å bruke eksemplifisering og grafisk fremstilling som to kategoriseringer for loggene. Eksemplifiseringene kan være algebraiske eller grafiske. Grafisk fremstilling er forklaringer av fenomener ved hjelp av figurer.

I den første loggen var det få elever som benyttet disse verktøyene i sin logg. Kun to elever brukte eksemplifisering og tre elever grafisk fremstilling (se Figur 6). Dette til tross for at det i forkant ble gjennomgått hva faglogg er, med eksempler på hvordan de kunne utforme loggene. Den ene eleven som benyttet eksemplifisering benyttet konkrete tallverdier for et punkt, for å forklare momentan vekstfart. Den andre eleven har derivert et uttrykk. Denne elevene har også benyttet grafisk fremstilling i form av et fortegnsskjema. Fortegnsskjemaet er ikke forklart, eller integrert særlig godt i teksten (se Tekstutdrag 8).



Tekstutdrag 8: elev 4, logg 1

To elever har tegnet grafer for å forklare gjennomsnittlig- og momentan vekstfart (se Tekstutdrag 9). Disse var god støtte til teksten, ved at teksten ‘brukte’ figuren i de skriftlige forklaringene.

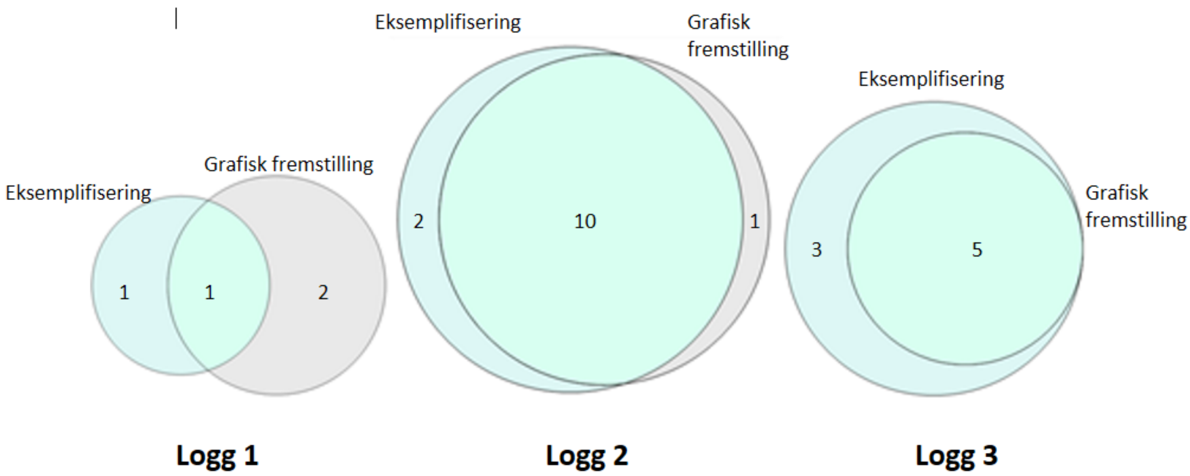


Tekstutdrag 9: elev 13, logg 1

Tekstutdrag 9 viser en logg hvor teksten henviser til figuren. I dette tekstutdraget fremkommer ikke mye skriftlig forklaring. Figuren i Tekstutdrag 9 viser en graf hvor tangent og stigningstall blir presentert. Teksten her er fortellende, likevel gir det er inntrykk av hva figuren viser. Figuren gjør at *'…bruk av tangenter for å finne momentan vekstfart'* kommer frem, og det gjør dette til et oppsummerende tekstutdrag. Figuren gir tekstutdraget et matematisk fokus, og inkluderes i teksten. 19 elever brukte hverken eksemplifisering eller grafisk fremstilling i sine logger.

Antallet elever som benyttet disse verktøyene i den andre loggen var betydelig høyere, over halvparten av elevene brukte enten eksemplifisering eller grafisk fremstilling. Som vist i Figur 6, brukte hele 10 av disse 13 elevene både eksemplifisering og grafisk fremstilling i samme logg. Den grafiske fremstillingen av de matematiske fenomenene kom gjerne gjennom eksemplifiseringen. I denne loggen var bruk av fortegnsskjema sammen med grafer mye brukt. De to elevene som brukte bare eksemplifisering brukte funksjonsuttrykk som de jobbet videre med, og forklarte. Den ene eleven som brukte grafisk fremstilling, brukte et fortegnsskjema uten tallverdier i sin forklaringen. 10 elever brukte hverken eksemplifisering eller grafisk fremstilling.

Til sammen var det 8 elever som benyttet eksemplifisering i sine logger i siste loggføringsøkt. De tre elevene som kun benyttet eksemplifisering, gjorde det for å vise derivasjon av uttrykk. Fem elever benyttet grafisk fremstilling i sine logger gjennom eksemplifisering (se Figur 6).



Figur 6: Viser et venn-diagram per gjennomført loggsett. Forholdene mellom arealene i figuren er korrekte. Blå ring viser antall elever som har brukt eksemplifisering, grå ring viser antall elever som har brukt grafisk fremstilling i sine logger. Grønt område viser overlapping mellom eksemplifisering og grafisk fremstilling. I venn-diagrammet for logg 1 og logg 2 er de to elevene som ikke var tilstede ved logg 3, inkludert.

Resultatene som nå er blitt beskrevet illustreres i Figur 6. Figuren viser hvor mange elever som faller innunder de to kategoriene hver for seg, og hvor stor overlapp det er mellom de to kategoriene. Det er stor overlapping mellom disse kategoriene på alle de tre loggene.

4.2.4 Drøfting av dokumentanalysen

I resultatene over fremkommer informasjon om fordelingen av klassens loggskrivingsnivåer og bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling. I dette delkapittelet vil disse områdene bli videre drøftet. Resultatene vil bli satt i sammenheng med teori og det vil bli drøftet hvorvidt undervisningskonteksten rundt loggføringsøktene kan ha hatt innvirkning på resultatene.

Til slutt i dette delkapittelet blir det drøftet om det er noen sammenheng mellom loggskrivingsnivåene og bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling. Dette blir drøftet med teori og tallfakta fra resultatene.

Fordeling av nivåer i klassens logger

Det kan være flere grunner til at det er variasjon i loggskrivingsnivåene i logg 1, logg 2 og logg 3. Det er spesielt to mulige årsaker som må trekkes frem når det gjelder at det var færre godt oppsummerende logger i logg 3. For det første var undervisningskonteksten rundt logg-skrivingen annerledes i den siste loggføringsøkten. Elevene hadde på forhånd hatt kortere tid til å sette seg inn i temaet. De hadde ikke arbeidet med oppgaver, slik at utfordringer eller mestringsfølelse var kanskje ikke like friskt i minnet. I tillegg var det ikke et like konkret tema å skrive om, som det var i første og andre loggføringsøkt. Smidt (2011) presiserer viktigheten av at elevene har retningslinjer å gå etter under loggskrivingen. Elevene må vite hva de skal skrive om. Kanskje ble temaet for den tredje loggføringsøkten svevende, og kanskje gjorde dette det vanskelig for elevene å vite hvor de skulle starte. Den andre grunnen til at det var færre godt oppsummerende logger i siste loggen kan være at det var to elever mindre i denne loggføringsøkten. Disse to elevene skrev begge to godt oppsummerende logger, noe som økte prosentandelen godt oppsummerende logger i de to første loggførings-øktene.

For å illustrere forskjellen mellom elevenes vanskeligheter med overgangen fra logg 2 til logg 3, ser vi på et eksempel. Dette er 2. og 3. loggen til samme elev.

Monotoniegenskapen er (tror jeg) en forklaring på når en graf, f.eks $f(x)$ stiger, og når den synker. For å finne ut dette kan jeg vise med et eksempel hva man gjør.

Hvis man skal ~~for~~ vise monotoniegenskapene til grafen $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x$ er man nødt til å derivere, for å så putte nullpunktene og likningen inn i et fortegnskjema.

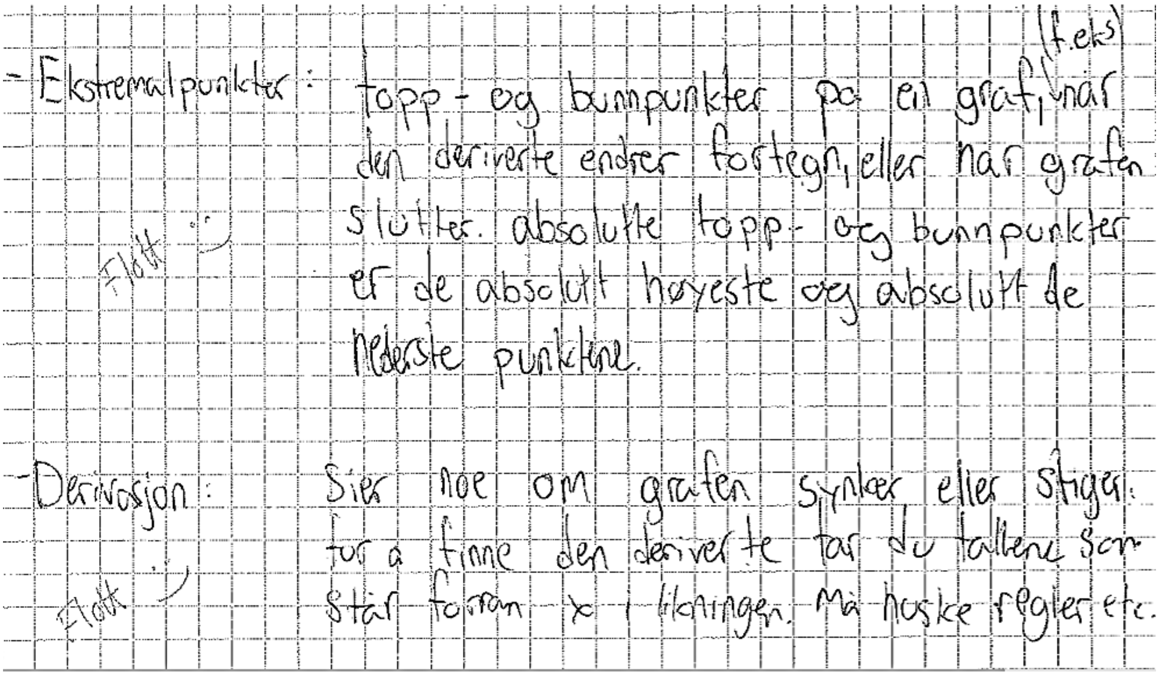
Deretter kan man med fortegnsskjemaet, se når grafen til $f(x)$ stiger, og når den minker. Dette sier man f.eks på denne måten;

$f(x)$ stiger når $x = \langle \leftarrow, -2\rangle \cup \langle 3, \rightarrow\rangle$

$f(x)$ minker når $x = \langle -2, 3\rangle$

Tekstutdrag 10: elev 19, logg 2

Tekstutdrag 10 er en godt oppsummerende logg. Eleven beskriver godt fremgangsmåte for å finne monotoniegenskapene til en graf og han/hun beskriver også godt at monotoniegenskapene forteller noe om grafens utseende. Tekstutdraget trekkes det frem konkrete eksempler fra oppgaver som er jobbet med tidligere i denne undervisningsøkten. Det kan for eleven være lettere å skrive om noe som akkurat har hendt, når man nylig har opplevd dette som vanskelig eller lett.



- Ekstremalpunkter: topp- og bunnpunkter på en graf, (f.eks) når den deriverte endrer fortegn, eller når grafen slutter. absolutte topp- og bunnpunkter er de absolutt høyeste og absolutt de nederste punktene.

Flott :)

- Derivasjon: Sier noe om grafen synker eller stiger. for å finne den deriverte tar du tallene som står forran x i likningen. Må huske regler etc.

Flott :)

Tekstutdrag 11: elev 19, logg 3

Tekstutdrag 11 vider at eleven ramser opp ulike begreper han/hun har brukt. Beskrivelsene av ekstremalpunkter og derivasjon er korrekte. Likevel klarer ikke eleven å vise samme grad av forståelse som i logg 2. Eleven knytter ikke kunnskapen til konkrete eksemplet, slik som i foregående logg. Når det er sagt, er dette en av elevene som har løst logg 3 veldig godt. Fordi dette er en elev som skrev gode faglogger i både logg 2 og logg 3 var dette et godt eksempel på hvordan det kan være vanskelig for eleven å være like detaljert og konkret i språket.

De to første loggføringsøktene er derfor mest sammenlignbare når det gjelder utvikling av loggskrivingsnivå. I disse ser vi at utviklingen for denne klassen, viste at det var flere elever som skrev godt oppsummerende logger i logg 2 enn i logg 1. Tilbakemeldingene elevene fikk på sine faglogger inneholdt konkrete tips til hvordan de kunne tenke, motivasjon i form av ros og beskrivelse av hvorfor det de gjorde var bra. I flere av tilbakemeldingene, spesielt hvor det er oppdaget misoppfatninger, beskrives også hva som er så bra med at elevene klarer å skrive slik. Det å motivere elevene og forsøke å gi dem følelsen av at skriving er nyttig, er viktig for at elevene skal kunne bruke skriving som et verktøy i matematikk (Kenney et al., 2014; Smidt, 2011; Sterrett, 1990). Videre kommer noen eksempler på hvordan logg 1 og logg 2 er sammenlignbare og på hvordan mine kommentarer har fremstått underveis i studien.

Det var vanskelig å huske hvordan man skulle regne ut den gjennomsnittlige vekstfarten, og det var litt vanskelig med momentan også fordi det var ikke helt nøyaktige tall. På de fleste av oppgavene måtte man forklare betydningen av svaret, og det var veldig vanskelig å formulere det med ord. Jeg har fra før lært å konstruere tangenter på sirkler, og det kan knyttes opp til momentan vekstfart. Jeg har også lært fra før å finne y-verdien til en lineær funksjon (finne hvor mye grafen øker/minker når man øker x-verdien med 1), og det er mye av det man gjør i momentan vekstfart.

Tekstutdrag 12: elev 1, logg 1

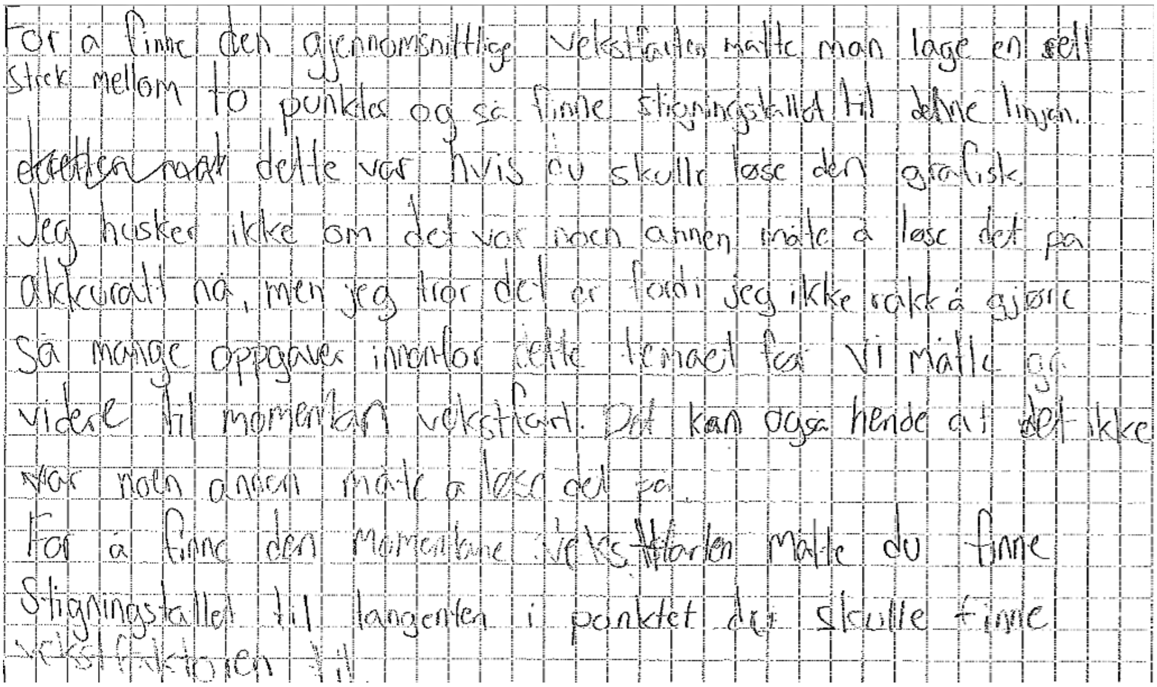
Denne eleven skriver i en fortellende stil i sin første logg. Likevel fremkommer det klart hva som har vært temaet for denne timen. Han/hun snakker om gjennomsnittlig- og momentan vekstfart, og forsøker å koble dette mot noe han/hun kan fra før. Dette er nok antageligvis fordi før denne første loggføringsøkten hadde jeg et lite foredrag om hva en faglogg er og tips til hva elevene kunne fokusere på. I denne elevens andre logg viste eleven god utvikling.

Jeg har lært forskjellen på ekstremalpunkt og ekstremalverdi. Ekstremalpunkt er eventuelle toppunkt og bunnpunkt, og ekstremalverdi er når man regner ut f(x) hvor man bytter ut x med et ekstremalpunkt. Jeg har også lært om monotoniegenskaper hvor man skal drøfte en funksjon. Annet enn dette har jeg ikke lært noe nytt, men repitert det vi gikk igjennom forrige time

Tekstutdrag 13: elev 1, logg 2

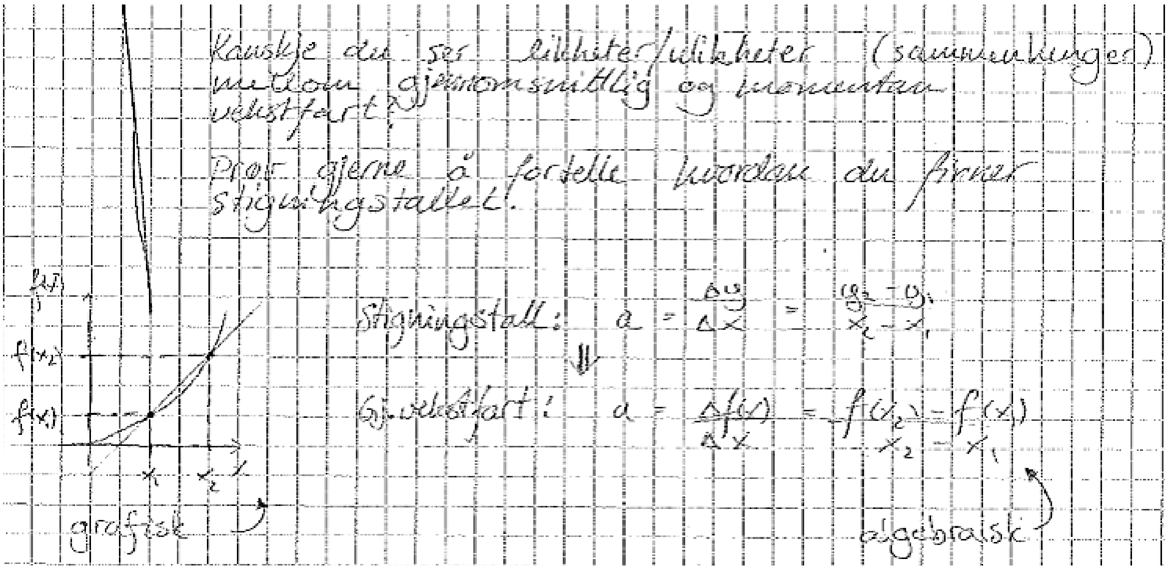
Igjen ser vi i Tekstutdrag 13 at eleven har et konkret tema som blir beskrevet, monotoniegenskapene til en funksjon. Her skriver eleven ikke i en fortellende form, slik som i den foregående loggen. Han/hun beskriver mer konkret og forklarer forskjeller. Dermed kan vi fra disse to tekstutdragene se en utvikling fra en fortellende logg til en godt oppsummerende logg, med lik undervisningskontekst. Det at undervisningskonteksten er lik, fremkommer ved at det tydelig er konkrete temaer i begge loggene.

I neste eksempel vises et tekstutdrag fra samme elev som vist i Tekstutdrag 10 og Tekstutdrag 11 tidligere, elev 19. Tekstutdraget etterfølges av eksemplifisering av lærer B sine tilbakemeldinger.


For å finne den gjennomsnittlige vekstfarten måtte man lage en rett strek mellom to punkter og så finne stigningstallet til denne linjen. ~~deretter~~ dette var hvis du skulle løse den grafisk. Jeg husker ikke om det var noen annen måte å løse det på akkurat nå, men jeg tror det er fordi jeg ikke rakk å gjøre så mange oppgaver innenfor dette temaet før vi måtte gå videre til momentan vekstfart. Det kan også hende at det ikke var noen annen måte å løse det på.
For å finne den momentane vekstfarten måtte du finne stigningstallet til tangenten i punktet du skulle finne vekstfaktoren til.

Tekstutdrag 14: elev 19, logg 1

Her ser vi at eleven har en mer fortellende stil, enn hva han/hun hadde i logg 2 og logg 3. Det kan virke som denne eleven har tatt tilbakemeldingene på loggen til etterretning. For å vise hvordan kommentarene kunne se ut følger Tekstutdrag 15, dette er tilbakemeldinger til Tekstutdrag 14.


Kanskje du ser likheter/ulikheter (sammenhenger) mellom gjennomsnittlig og momentan vekstfart?
Prøv gjerne å fortelle hvordan du finner stigningstallet!

Stigningstall: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

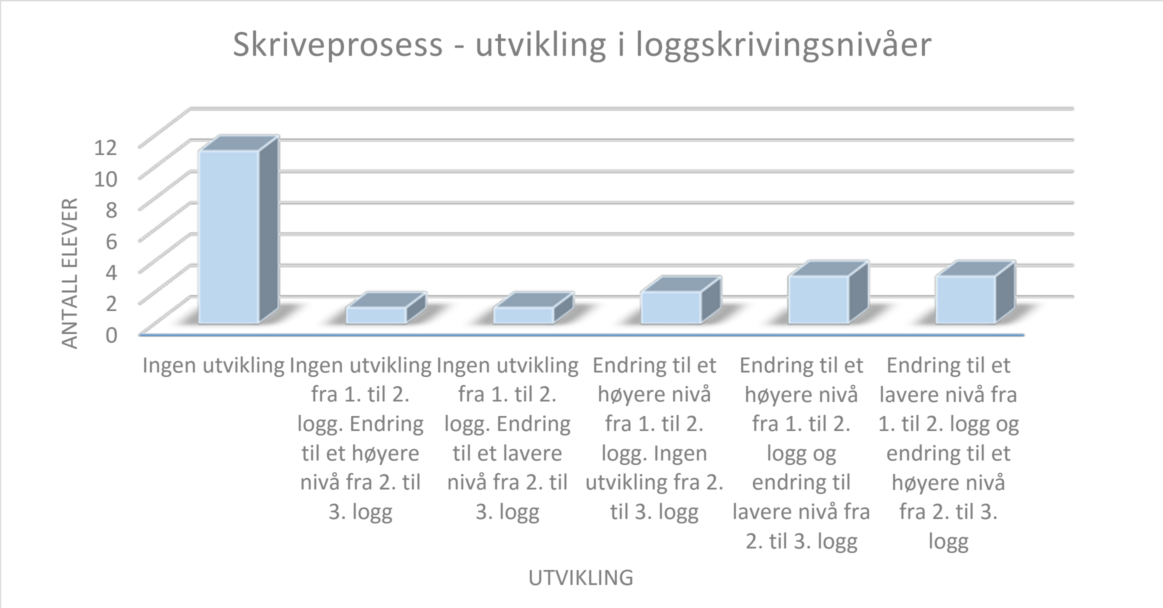
$\Downarrow$

Gj. vekstfart: $a = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Tekstutdrag 15: lærer B

Her ønsker tilbakemeldingen først å trigge eleven til å tenke på sammenhenger, for å forsøke å koble forkunnskapene til nylig innlært kunnskap. I tillegg kommer faglige kommentarer på elementer eleven viser undring rundt. I mange av tilbakemeldingene i de ulike loggene har det eksplisitt fremkommet tips om bruk av eksempler eller muligheten til å kunne stille spørsmål til seg selv, eller til lærer B.

Fra første til andre logg er det flere elever som skriver på et høyere loggskrivingsnivå. Likevel har ingen elever greid å formulere en dialogisk logg i løpet av disse tre loggføringsøktene. Ved flere anledninger har loggskrivingsnivåene og nivåene for utvikling av begrepsforståelse blitt knyttet sterkt sammen i teorikapittelet, det er flere likhetstrekk. Den oppsummerende loggen og kondensering kan ha flere likhetstrekk, blant annet at det er på dette nivået man befinner seg lengst. En fortellende logg kan være tegn på manglende matematisk innsikt (Clarke et al., 1993), derfor kan internalisering og fortellende logg knyttes sammen (se Tekstutdrag 1 og Tekstutdrag 2). En oppsummerende logg fokuserer på det matematiske, men kanskje i form av metoder og hva den matematiske ideen representerer, akkurat som kondenseringsstadiet i begrepsutvikling. Sfard (1991) beskriver reifikasjonsstadiet som det stadiet der man ser matematikken som et objekt, og videre kan utforske den matematiske ideen fremover. I loggskriving er det dette man gjør når man kommer til et nivå hvor man mestrer skrive en dialogisk faglogg. Med dette betyr ikke det at man ikke kan nå reifikasjons-stadiet uten å skrive en dialogisk logg, men omvendt. Man kan ikke skrive en dialogisk logg uten å ha nådd reifikasjonsstadiet. Det tar tid å utvikle sine ferdigheter i loggskriving. Med tre loggføringsøkter er det kanskje ikke så rart at ingen mestret å skrive dialogisk. Når man ser på elevenes individuelle utvikling, holdet over halvparten av elevene seg på det samme loggskrivingsnivået i alle tre loggene (se Figur 7).



Figur 7: Loddrett akse forteller om elevene har skrevet på et høyere eller lavere loggskrivingsnivå fra første til andre logg og fra andre til tredje logg. Vannrett akse forteller antall elever som faller under de ulike kombinasjonene.

Fra Figur 7 ser vi at de fleste kombinasjonene av utvikling er representert. Antageligvis skyldes dette at denne studien er utført over et relativt kort tidsrom.

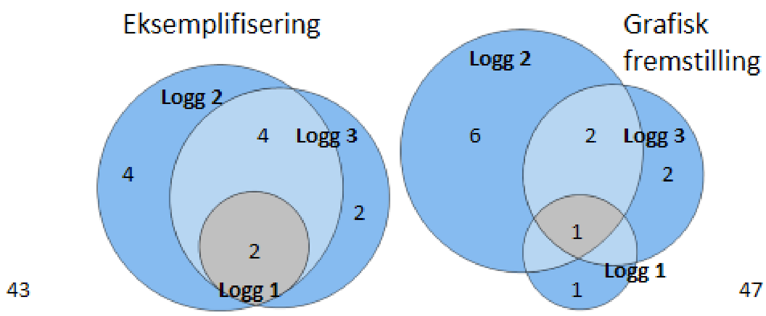
Bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling

Flere forskere presiserer viktigheten av grafisk forståelse i emnet derivasjon (Asiala et al., 1997; Kalvø, 2002; Orton, 1983). Derfor er det interessant å se på elevenes bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling i deres faglogger. Utviklingen fra første til andre logg viser at betydelig flere elever benytter eksemplifisering og grafisk fremstilling i andre logg. Utviklingen i siste logg viser derimot at færre elever benytter seg av eksemplifisering og grafisk fremstilling, noe som kan grunnes det samme som i utvikling av loggskrivingsnivåer på samme tidspunkt. Siste loggføringsøkt stilte større krav til begrepsforståelse, og det kan være dette som gjenspeiles ved lav hyppighet i bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling i den siste loggen. Spesielt i derivasjon kan bruk av grafisk fremstilling vise god begrepsforståelse.

Kategoriseringene eksemplifisering og grafisk fremstilling er svært overlappende i alle de tre loggføringssituasjonene. Fra resultatene i forrige delkapittel kom det frem at det var mange av elevene som brukte grafisk fremstilling i eksemplene sine. Få elever klarte å bruke grafiske fremstillinger som en god støtte til sin skriftlige forklaring. De fleste gav en grafisk fremstilling, uten å bruke den som et verktøy i forklaringen. Dette er noe av det Asiala et al. (1997), Orton (1983) og Hashemi et al. (2014) påpeker at elever ofte sliter med.

Et annet aspekt som er interessant å se på innen disse to kategoriene er i hvor stor grad de loggene som faller innunder disse kategoriene, vil gjøre det ved alle de gjennomførte loggene. Det viser seg at det er 2 elever som benytter eksemplifisering i alle tre loggene sine, og 4 elever som gjør det i logg 2 og logg 3. Til venstre i Figur 8 vises et venn-diagram som forteller hvor mange elever som benyttet eksemplifisering i de ulike loggene. Det grå feltet viser hvor mange elever som benyttet eksemplifisering i alle sine logger og det lyseblå feltet viser hvor mange som gjorde det i to logger. De mørkere blå feltene forteller hvor mange elever som benyttet eksemplifisering i kun en logg. Figuren viser at 43 av de totalt 63 loggene ikke benytter eksemplifisering.

Til høyre i figuren ser vi et likt venn-diagram for bruken av grafisk fremstilling. Det grå feltet viser hvor mange elever som har benyttet seg av grafisk fremstilling i alle loggene sine. Lyseblått felt viser antall elever som har brukt grafisk fremstilling i to logger, mens der mørkere feltet forteller antall elever som har benyttet grafisk fremstilling i kun en logg. Det er totalt 47 av 63 logger som har benyttet seg av grafisk fremstilling.



Figur 8: Til venstre: viser bruken av eksemplifisering i hver logg. Kun to elever har brukt eksemplifisering i alle tre loggene. Det er 43 logger, av 63, som ikke har benyttet eksemplifisering. Til høyre: viser bruken av grafisk fremstilling. Det er kun 1 elev som har brukt grafisk fremstilling i alle tre loggene. Det er 47 av 63 logger som ikke har benyttet grafisk fremstilling. Begge disse venn-diagrammene har ekskludert de to elevene som ikke var tilstede ved gjennomføringen av logg 3.

Fra resultatdelen for bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling, vet vi at i logg 2 var det betydelig flere elever som benyttet eksemplifisering og grafisk fremstilling enn i de to andre loggføringsøktene. Dette fremkommer også fra Figur 8, da sirkelen for logg 2 er større enn de andre. Tilbakemeldingene elevene fikk på loggene tipset ofte om å bruke eksempler i sine forklaringer, kanskje er dette en grunn til at antallet i logg 2 er så høyt i forhold til logg 1. Igjen må det sies at undervisningskonteksten rundt logg tre var annerledes, noe som kan ha ført til mindre bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling.

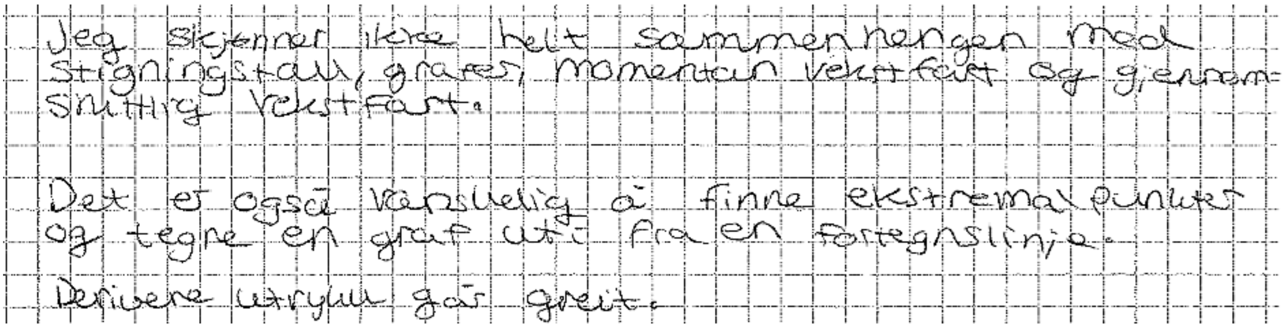
Sammenhengen mellom elevenes loggskrivingsnivå og deres bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling

Det virker som det kan være en sammenheng mellom loggskrivingsnivåene til loggene og bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling. Det er ingen av totalt 17 fortellende logger (F) som har benyttet eksemplifisering eller grafisk fremstilling. Det er også bare 3 av de totalt 17 svakt oppsummerende loggene (O-) som har falt under en av disse kategoriene. Det vil si at de resterende 22 loggene som inneholder eksemplifisering eller grafisk fremstilling er fordelt på de 31 godt oppsummerende loggene (O+). Altså i de fortellende loggene er bruken av eksemplifisering eller grafisk framstilling lik 0%, i de svakt oppsummerende er det lik 18% og i de godt oppsummerende loggene er det lik 71% (se Tabell 3).

Tabell 3: Viser hvor mange prosent av elevene innenfor de ulike loggskrivingsnivåene som har benyttet eksemplifisering eller grafisk fremstilling. Her er alle loggene fra alle loggføringsøktene med i beregningen.

Loggskrivings-nivå	Fortellende (F)	Svakt oppsummerende (O-)	Godt oppsummerende (O+)
Bruk av eksemplifisering eller grafisk fremstilling i %	0	18	71

Av denne tabellen går det tydelig frem at eksemplifisering og grafisk fremstilling blir brukt hyppigere i logger som er godt oppsummerende, enn logger på lavere loggskrivingsnivå. Et godt oppsummerende loggskrivingsnivå krever at eleven har matematisk innsikt i emnet og klarer å formulere de matematiske ideene. Clarke et al. (1993) skriver at en av grunnene til at elevene ligger på fortellende nivå, kan være at de ikke har tilstrekkelig forståelse til å fokusere på det matematiske. Tekstutdrag 16 virker som en fortellende logg som viser dette.


Jeg skjønner ikke helt sammenhengen med stigningstall, grafer, momentan vekstfart og gjennomsnittlig vekstfart.

Det er også vanskelig å finne ekstremalpunkter og tegne en graf ut i fra en fortegnslinje.

Derivere uttrykk går greit.

Tekstutdrag 16: elev 2, logg 3

Her forteller eleven hva han/hun ikke forstår, derfor er dette en fortellende logg. En oppsummerende logg ville forsøkt å forklare det som er vanskelig. I dette tilfellet kan det se ut til at elevens begrepsforståelse er på et for lavt nivå til å kunne fokusere på de matematiske ideene. De momentene denne eleven forklarer som vanskelig, er vanlig å syns er vanskelig når man er på internaliseringsstadiet. Eleven sliter med å se sammenhenger mellom de matematiske temaene. Den avsluttende kommentaren i tekstutdraget forteller at eleven får til regnetekniske oppgaver, som Kilpatrick et al. (2001) forklarer som ferdigheter som kan tilegnes ved pugging og drill.

Denne eleven beskriver at han/hun ikke ser sammenhengen mellom *'… stigningstall, grafer, momentan vekstfart og gjennomsnittlig vekstfart'*. Dermed vil det for denne eleven bli svært vanskelig å fremstille noe av dette grafisk. Flere forskere beskriver at begrepsforståelse i derivasjon bygger på en grafisk oversikt over begreper som sekant, tangent, stigningstall og lignende (Asiala et al., 1997; Kalvø, 2002). Disse resultatene støtter tolkningene av Tabell 3; at godt oppsummerende logger krever høyere grad av matematisk forståelse enn fortellende logger og vi vet viktigheten av grafisk forståelse i derivasjon.

4.3 Casestudien

I dette delkapittelet vil casestudien bli presentert. Underveis vil analysen og drøfting av elevtekstene fremlegges parallelt. Utvalget for casestudien er loggene til tre elever med pseudonymene; Malin, Anders og Sara. Malin har skrevet tre fortellende logger (F), Anders har skrevet to godt oppsummerende (O+) og en svakt oppsummerende logg (O-) og Sara har skrevet tre godt oppsummerende logger (O+).

Det må presiseres at begrepsforståelse sees på for hvert enkelt begrep som blir lagt frem. Hvis det i loggene er skrevet om tangent, stigningstall og momentan vekstfart, vil begrepsforståelse for de tre ulike begrepene kunne ligge på tre ulike nivåer. Sfard (1991) beskriver utvikling av begrepsforståelse som en trappefunksjon, hvor hvert trappetrinn handler om et begrep. For eksempel vil det være viktig å nå reifikasjonsstadiet for tangent, før man lærer seg begrepet momentan vekstfart. Sfard (1991) forklarer dette ved at man ser kunnskapen i en helhet og ikke som sekvensiell kunnskap (Figur 1 og Figur 2). Derfor kan ikke loggene klassifiseres innen de ulike nivåene for begrepsutvikling, men de ulike begrepene som blir forklart i loggene kan klassifiseres. Det er gjort et unntak for første elev, da disse loggene kun gav indikasjoner for ett nivå.

I analysen er relevante tekstutdrag inkludert, alle de 9 loggene er lagt ved som vedlegg 2-4. De tre elevenes loggsett vil drøftes med fokus på utvikling av begrepsforståelse.

4.3.1 Malin

Malin sine tre logger var fortellende, det betyr lite eller ingen grad av matematisk fokus. Det fremkommer ingen eksempler eller figurer i noen av disse logger.

Malin har gjennom alle tre loggene en fortellende stil, noe som gjør det vanskelig å få innsyn i hennes begrepsforståelse. I den første loggen finnes uttalelser som; *'jeg har lært hvordan jeg finner momentanveksten i et punkt', 'jeg lærte spesielt noen fler Geo-funksjoner på pc-en'* eller *'alt i alt syns jeg det vi har lært var relativt lett'*. Det er ingen av disse uttalelsene som gir et inntrykk av hva hun faktisk forstår. Fra denne loggen sitter jeg igjen med at Malin har fått med seg temaene for timen og at hun selv tror at hun forstår det. Malin viser noe faktakunnskap ved å nevne noen matematiske begreper underveis, men som leser kan man ikke si noe om elevens forståelse av disse begrepene. Hun gjør ingen forsøk på å forklare de matematiske begrepene. Dermed viser denne loggen en begrepsforståelse på nivå 1, internalisering. Likevel kan det være at Malins begrepsforståelse er bedre enn dette, men at dette ikke vises i en fortellende logg som den hun har skrevet.

Den andre loggen inneholder uttalelser som likner dem i første logg. Likevel er det her en setning som kanskje kan fortelle noe mer; *'jeg har også lært å bruke faktoriseringsmetoden i stedet for ABC-formelen'*. Ved å skrive faktoriseringsmetoden og ABC-formelen opp mot hverandre på denne måten tenker jeg at hun kanskje gir uttrykk for en misoppfatning her. Faktoriseringsmetoden var noe de lærte som alternativ til testmetoden. Det kan være at Malin tror testmetoden er det samme som ABC-formelen. Jeg kan ikke trekke noen slutninger om misoppfatninger eller årsak til misoppfatninger når Malin skriver så kort rundt dette. Det er også umulig å si noe om elevens kunnskapsnivå basert på dette. Om eleven hadde vist ved et eksempel eller forklart et tilfelle hvor han/hun viste bytte av metodebruk, så hadde det vært mulig å fastslå hvor elevens faktiske kunnskapsnivå lå. I denne loggen viser eleven noe faktakunnskap ved å nevne matematiske begreper, men det fremkommer ingen videre indikasjon på hvilket nivå eleven ligger på i forhold til begrepsforståelse. Den andre loggen klassifiseres dermed også under nivå 1 av begrepsforståelse.

Den siste loggen var noe annerledes enn de to foregående. Ikke nødvendigvis fordi det var matematiske forklaringer, men Malin virket mer ydmyk over at dette temaet kunne være vanskelig til tider. I de foregående loggene har hun skrevet alt hun lærte, og presisert at det har vært lett med derivasjon (se sitat fra logg 1 lenger opp). Dette er også noe hun beskriver om visse deler av temaet i tredje loggen: *'…derivasjonskapitlene var ganske enkelt, men jeg slet dessverre med mange slurvefeil'* eller *'Det å derivere er enkelt, men…'*. I denne loggen skrev Malin blant annet: *'Jeg syns at å oppfatte teksten og så sette det inn i et regnestykke kan bli vanskelig'* eller *'Det å finne ut hva man skal gjøre enten det er ligningssett eller grafisk osv…kan bli vanskelig'*. Kanskje kan dette tolkes som en fremgang, da eleven klarer å peke på hva som er vanskelig. Selv om det ikke blir gjort forsøk på å forklare det som er vanskelig, noe som kunne gitt svar på hvor det stopper opp eller hvor misoppfatningen er. Igjen har denne eleven levert en logg på nivå 1 av begrepsforståelse.

Konklusjonen for denne loggen er at det kan virke som en utvikling på et personlig plan, hvor eleven viser større grad av ydmykhet ovenfor derivasjon. Selv om alle disse loggene ble kategorisert under nivå 1 av begrepsforståelse, kan det ikke med sikkerhet sies hvor elevens begrepsforståelse ligger.

Elevene ble introdusert for de ovennevnte temaene, for første gang i disse timene. Det kan være en tidskrevende prosess å utvikle begrepsforståelse i matematikk, derfor er det ikke rart om enkelte elever opplever det vanskelig å vise begrepsutvikling i sine logger. Som tidligere nevnt i denne oppgaven kan utviklingsnivået i begrepsforståelse ligge høyere enn hva loggen forteller. Malin forklarer ingen av de matematiske begrepene hun forteller om. Dermed gir ikke disse loggene informasjon om hennes begrepsforståelse i særlig grad.

4.3.2 Anders

Anders har skrevet to godt oppsummerende logger (O+) og en svakt oppsummerende logg (O-). Han bruker eksemplifisering i første logg.

Logg 1

I den første loggen er det hovedsakelig to begreper som er drøftet; gjennomsnittlig vekstfart og momentan vekstfart.

I løpet av loggen beskriver han gjennomsnittlig vekstfart som:

- *'Å regne gjennomsnittlig stigning over en lengre avstand'*
- *'Finner sekanten mellom to punkter på en graf og regner ut stigningen av denne'*
- '$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$'

På måten Anders beskriver gjennomsnittlig vekstfart, får jeg et inntrykk av at dette er noe han forstår godt. Ved å beskrive sekanten og påpeke at den går gjennom to punkter, tyder det på at Anders ser for seg et bilde av gjennomsnittlig vekstfart. Piaget (1970) beskriver dette som en indikasjon på at internaliseringen er nådd. Når Anders videre beskriver formelen for utregning og viser generell høy grad av faktakunnskaper ved bruk av begreper og formelen, tyder dette på at også kondenseringsstadiet (Sfard, 1991) er nådd. Faktakunnskapene fra denne undervisningsøkten blir satt i sammenheng med forkunnskaper ved å bruke begreper som for eksempel tangent og sekant på korrekt vis. Anders gir små tilleggsopplysninger underveis som viser at han vet hva dette er fra før, som for eksempel at sekanten går gjennom to punkter. Dette forteller at han har nådd nivå 4, reifikasjon, for begrepene tangent og sekant. I tillegg til at Anders bruker begrepene tangent og sekant som objekter i sin beskrivelse av gjennomsnittlig vekstfart, har han også klart å benytte disse begrepene i nye situasjoner. Dette er alle indikasjoner på at han har oppnådd reifikasjonsstadeiet ifølge Sfard (1991). Siden Anders forklarer godt forkunnskaper i forbindelse med gjennomsnittlig vekstfart og i tillegg klarer å forklare begrepet på ulike måter, kan man forstå at han forsøker å se gjennomsnittlig vekstfart som et objekt og ikke en prosess. Med dette kan man se at Anders er på nivå 3, kondensering, for dette begrepet i denne loggen.

Når det gjelder momentan vekstfart, beskriver Anders det slik:

- *'Forskjellen mellom momentan- og gjennomsnittlig vekstfarter at når man regner momentan regner man på et så eksakt punkt som mulig'*

- *‘I geogebra vil vi bruke funksjonene tangent og så stigning av tangenten for å finne vekstfarten til det bestemte punktet’*

Her viser han faktakunnskaper og forsøker å sette dette i sammenheng med forkunnskaper som tangent. Dette indikerer at han når opp til nivå 2, kondensering. Anders benytter seg fremdeles av begrepet tangent som et objekt, og presiserer samtidig at man finner vekstfarten til et bestemt punkt. Reifikasjonsstadiet er nådd for begrepet tangent. Dette er bra sammen-liknet med at mange elever sliter med begrepsforståelse av tangent (Kalvø, 2002). Likevel er det tegn på en misoppfatning i første setning; *‘…et så eksakt punkt som mulig’*. Dette vitner om at Anders ikke enda har nådd reifikasjonsstadiet for momentan vekstfart. De to setningene er motsigende, da den ene sier så eksakt punkt som mulig, og den andre sier i et bestemt punkt. Tidlig i denne loggen sier eleven; *‘Vi kan ta en biltur som eksempel’*. For meg virker det derfor som Anders ønsker å forklare gjennomsnittlig vekstfart og momentan vekstfart i forhold til en biltur, dette kan også være grunnen til at eleven bruker ordet avstand i den første setningen over. Da jeg var tilstede i undervisningen fikk jeg med meg at læreren brukte dette eksempelet og forklarte fenomenet bak fartskontroll. Til tross for at læreren skilte mellom disse, gjenspeilte det seg i flere logger at elevene trodde en fartskontroll og momentan vekstfart var synonymer. God begrepsforståelse fører til at eleven forstår i hvilke situasjoner matematikken kan være nyttig (Kilpatrick et al., 2001). Her kan det være et tegn på at Anders sin begrepsforståelse svikter, da han forsøker å forklare momentan vekstfart i forhold til bilturen. Jeg tror derfor at denne uttalelsen vitner om at Anders ble noe forvirret av eksempelet med fartskontroll, noe som gjør at han ikke når opp til nivå 3 av begrepsforståelse for momentan vekstfart.

Logg 2

I denne loggen er det et hovedbegrep som blir drøftet; monotoniegenskaper. Dette er en svakt oppsummerende logg (O-).

Anders beskriver hvordan man drøfter monotoniegenskape til en funksjon slik:

- *‘Det man bør starte med er å derivere uttrykket for å deretter ved hjelp av en fortegnslinje finner ut hvordan grafen ser ut. For å finne nullpunktene kan man enten bruke produktregelen hvis man får faktorisert uttrykket, eller så kan man bruke abc-*

formelen. Etter man har fylt inn fortegnslinjen finner man topp- og bunnpunkt ved å sette inn x-verdien i det opprinnelige uttrykket'

Han ser ut til å forstå hvordan man går frem for å drøfte monotoniegenskapene til en funksjon og viser gode faktakunnskaper underveis. Anders bruker begreper som fortegnslinje og null-punkter på korrekt vis. Det virker som han ser på disse begrepene som strukturerte objekter, ikke operasjonelt som prosesser. Dette er noe av det Sfard (1991) beskriver som kjennetegn for elever som har nådd reifikasjonsstadiet. Setningen om at fortegnslinjen til $f'(x)$ beskriver hvordan grafen ser ut, forteller at Anders forstår fortegnsskjema. Når han har nådd reifikasjonsstadiet for disse begrepene, blir veien videre lettere. Anders kan se kunnskapen som en helhet, hvor de matematiske ideene bygger på hverandre, fremfor å lagre kunnskapen sekvensielt (Sfard, 1991).

I det midterste sitatet er det noe som ikke stemmer. Det kan være at Anders ønsker å beskrive faktoriseringsmetoden, som et alternativ for å bruke testmetoden. Flere elever ser ut til å sette et likhetstegn mellom abc-formelen og testmetoden. Det kan tyde på at han har et operasjonelt forhold til denne prosessen, som omhandler faktorisering og å finne nullpunkter. Fokuset på forståelse av hva som gjøres, er svakt. Ved god begrepsforståelse av abc-formelen og faktorisering, ville Anders sett disse i sammenheng. For eksempel kunne han forklart at abc-formelen fungerer i alle tilfeller, men at det noen ganger er mer hensiktsmessig å benytte andre metoder. Dette ville vist en forståelse for hva som ble forklart. Det er vanskelig å si om dette er riktig tolkning av denne setningen, men det er en rimelig tolkning.

Til slutt bruker Anders igjen fortegnslinje korrekt, og forklarer hvordan han arbeider i fortegnsskjemaet ved å *'… sette inn x-verdien i det opprinnelige uttrykket'*. Når det gjelder begrepene topp- og bunnpunkt, blir ikke disse begrepene forklart og det er dermed umulig å danne seg et bilde av elevens begrepsforståelse av det. I likhet med loggene fra første elev må det klassifiseres som begrepsforståelse på nivå 1, internalisering.

Med bakgrunn i at eleven viser faktakunnskaper og kobler inn forkunnskaper, ligger begrepsforståelsen av monotoniegenskapene på kondenseringsstadiet; nivå 2 og grenser over til nivå 3.

Logg 3

Den siste loggen tar for se to begreper; derivasjon og ulikheten mellom $f(x)$ og $f'(x)$. Dette er en godt oppsummerende logg (O+).

I sin beskrivelse av derivasjon, skriver Anders:

- *'Derivasjon kan jeg bruke til å finne når ting er størst og minst'*
- *'Jeg har i løpet av dette kapittelet forstått hvordan derivasjon er momentan vekstfart og ved å derivere et uttrykk for så å sette inn en x-verdi kan jeg finne ut stigningsfarten til funksjonsuttrykket ved denne x-verdien'*

Han viser gode faktakunnskaper, setter derivasjon i sammenheng med momentan vekstfart og forsøker å koble denne prosessen til et objekt. Dette forteller at Andres ligger hvert fall på nivå 3 av begrepsforståelse. Det kan tyde på at han har et operasjonelt forhold til derivasjon, fordi han beskriver derivasjon som noe han bruker. I denne loggen kan man ikke se tegn på at Anders gjenkjenner dette begrepet i nye situasjoner. Kanskje kunne han fått frem det om loggen var dialogisk.

I loggene til Anders tyder det på at han har utviklet sin begrepsforståelse for momentan vekstfart. I logg 1 var det noe usikkerhet rundt begrepet, og begrepsforståelsen ble klassifisert til nivå 2. I denne loggen brukes momentan vekstfart som et strukturert objekt i den videre forklaringen av derivasjon, noe Sfard (1991) beskriver at kjennetegner utvikling av begrepsforståelse. I tillegg viser eleven at han gjenkjenner den matematiske ideen i nye situasjoner, noe som tilsier at eleven har nådd nivå 4 (Sfard, 1991). Det var kun 3 av 21 elever som beskrev koblingen mellom momentan vekstfart og derivasjon i sine logger. Flere forskere påpeker viktigheten av begrepsforståelse av tangent og veksfart, for å kunne nå reifikasjonsstadiet for derivasjon (Asiala et al., 1997; Kalvø, 2002; Orton, 1983). Asiala et al. (1997) presiserer rekkefølgen av innlæringen som viktig. I loggene til Anders ser man denne utviklingen, spesielt av begrepet momentan vekstfart, men også for veien mot forståelse av derivasjon.

Til slutt i denne loggen beskriver Anders relasjonen mellom $f(x)$ og $f'(x)$ slik:

- *'Det er derimot viktig å skille mellom $f(x)$ og $f'(x)$. På en fortegnslinje forteller $f'(x)$ hvor grafen stiger og synker, mens $f(x)$ forteller for hvilke x-verdier x-verdien er større eller mindre enn 0'*

Kalvø (2002) beskriver at elever ofte har problemer med å forstå relasjonen mellom grafen og den deriverte av grafen. Anders viser at han ser et klart skille på hva disse to grafene forteller. Ved denne beskrivelsen viser Anders at han har et mentalt bilde av hva de forteller og hvordan de to grafene 'samarbeider'. Han har allerede vist at han ligger på nivå 3 i utvikling av begrepsforståelse for derivasjon. Med denne siste setningen om relasjonen mellom grafene og hva den deriverte av grafen forteller, viser Anders at han ikke bare har et operasjonelt forhold til derivasjon. Han ser derivasjon som et objekt som han klarer å forklare. Dette fører begrepsforståelsen for derivasjon opp til nivå 4, reifikasjon.

Anders har underveis i loggene vist begrepsforståelse på reifikasjonsstadiet på flere av de elementene Kalvø (2002) og Asiala et al. (1997) beskriver som essensielle for å forstå derivasjon. Han har vist at han behersker stigningstall, sekant, tangent, gjennomsnittlig vekstfart, momentan vekstfart og sett linken mellom flere av disse. Gjennom disse tre loggene har vi fått et innblikk i Anders sin begrepsforståelse.

4.3.3 Sara

Sara sitt tekstsett består av tre godt oppsummerende logger. I første logg benyttes kun eksemplifisering, mens i de to neste loggene brukes eksemplifisering og grafisk fremstilling.

Logg 1

I Saras første logg beskriver hun særlig tre begreper; intervall, stigningstall og momentan vekstfart.

For å beskrive hva et intervall er bruker Sara et eksempel:

- *'Eks: [1,3]. Fra og med 1 til og med 3. Dette gjelder altså alle x-verdier mellom 1 og 3, som er uendelig mange'*

Her beskriver hun hva et intervall er, og kanskje er dette en forklaring hun har fått i løpet av denne timen. Sfard (1991) beskriver at når man når reifikasjonsstadiet, kan dette ofte skje fort. Det kan oppleves som en aha-opplevelse for eleven. Sara skriver; *'Jeg har også lært hva intervall er. Jeg viste dette fra før, men ikke godt nok til å gi en god forklaring…'*, før hun gir eksempelet. Det kan tyde på at dette er en matematisk idé som hun plutselig forsto, og at Sara her har nådd reifikasjonsstadiet. Begrepet intervall fremstår som et matematisk strukturert objekt for henne.

Denne uttalelsen viser også noe av det som er positivt med friskriving. Friskriving tillater elevenes tanker flyte fritt (Countryman, 1992), eleven skriver det som faller henne inn. På denne måten legger også skriving til rette for utforsking og refleksjon, i forsøket på å koble dette med hovedtemaet derivasjon.

Det andre begrepet Sara nevner er stigningstall, slik beskriver hun dette:

- *'Du kan finne stigningstallet til en lineær linje ved å ta* $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$*'*

Med denne beskrivelsen får ikke leseren stort grunnlag til å avgjøre elevens begrepsforståelse for dette begrepet. Alt Sara gjør er å gi formelen og fortelle hva det er, altså innehar hun fakta- og metodekunnskap. Dette resulterer i utviklingsnivå 2 av begrepsforståelse. Likevel er det ikke primært stigningstall hun her ønsker å forklare. I denne sammenhengen bruker Sara stigningstall for å forklare momentan vekstfart. Hun fremstår dermed som å ha nådd nivå 3 av begrepsforståelse, og kanskje opp mot reifikasjonsstadiet, da hun knytter stigningstall inn i en ny sammenheng.

Videre forsøker Sara å beskrive momentan vekstfart, hun beskriver det slik:

- *'Momentan vekstfart = stigningstallet til tangenten'*
- *'Man skriver inn et funksjonsuttrykk i geogebra, lager et punkt det du vil vite momentanfarten og velger tangent i verktøykassen'*
- *'Momentan vekstfart bruker man:* $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$*'*

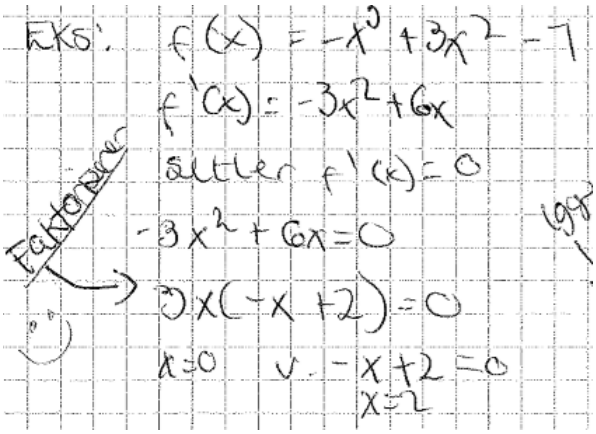
Saras første uttalelse er svært overbevisende. Som slutningen angående begrepsforståelsen av stigningstall tidligere tilsa, virker det som Sara har et klart bilde av stigningstall og forstår hva det innebærer. Her bruker hun i tillegg begrepet tangent i sin beskrivelse av momentan vekstfart. Sara beskriver ikke dette begrepet her, men det er korrekt brukt. Begrepet tangent er noe mange elever ofte sliter med å få grepet på (Asiala et al., 1997; Kalvø, 2002; Orton, 1983), derfor kan det være at man burde vært litt kritisk til forståelsen bak denne uttalelsen. I det siste sitatet, ser vi at formelen for momentan vekstfart ikke stemmer. $f(x_2) - f(x_1)$ beskriver to verdier på grafen $f(x)$. Når man beregner stigningstallet til en tangent, vil kun en $f(x)$-verdi ligge på grafen. Den andre y-verdien vil ligge et sted utenfor grafen, på tangenten. Her kan man derfor se tegn på at Sara ikke har nådd reifikasjonsstadiet, men det kan være for begrepene $f(x_1)$ og $f(x_2)$. Matematisk språk stiller andre krav til symbolbruk, vokabular, presisjon i uttrykk, grammatisk struktur og formalitet, enn i vårt hverdagsspråk (Lee, 2006). Det kan være at Sara strever med dette her. Ulike notasjoner kan skape forvirring (Orton, 1983), og det kan dermed dannes en språklig barriere for matematisk forståelse. Orton (1983) påpeker elevenes utforsking og undring rundt disse formlene burde vektlegges for at eleven skal kunne forstå hva som er variasjon i notasjon og hva som representerer ulike aspekter.

Dermed ser det ut til at begrepsforståelsen til Sara for momentan vekstfart antageligvis ligger på nivå 3, hvor hun kan anvende kunnskapen og forsøker å omdanne momentan vekstfart til et matematisk objekt.

Logg 2

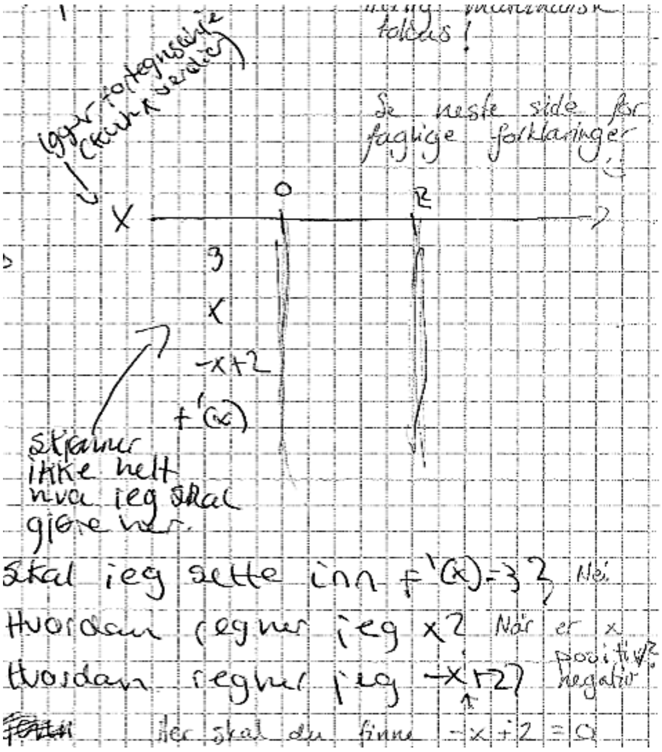
I den andre loggen beskriver Sara monotoniegenskapene til $f(x)$. Forklaringen lyder slik:

- *'Drøfte monotoniegenskapen til $f(x)$ = tegn fortegnslinje for $f'(x)$. (bestem hvor grafen synker og stiger)'*

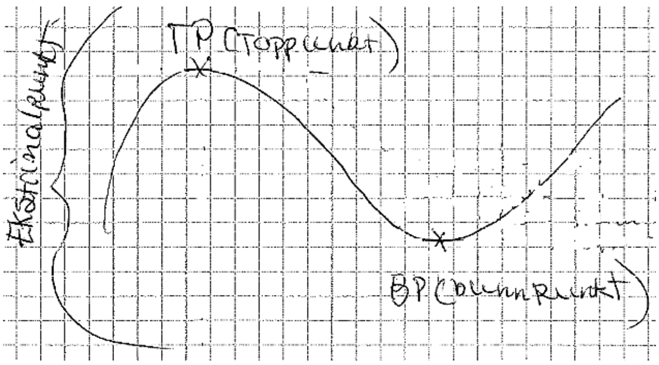


Tekstutdrag 17: eksemplifisering

I tillegg til at Sara forsøker å forklare monotoniegenskapene til en funksjon, stiller hun også konkrete spørsmål om det hun lurer på (Tekstutdrag 18). Slike spørsmål gir elever en utfordring da de må formulere det som er vanskelig. Det kan gi dem selv et bedre innsyn i sin egen læring. Pugalee (1997) beskriver at loggskriving i seg selv gir både eleven og læreren innblikk i elevens læring. Loggskriving gir læreren et bredere innsyn i elevers forståelse, og spørsmål som dette gir læreren mulighet til å se hva eleven syns er vanskelig, uten tolkning.



Tekstutdrag 18: grafisk fremstilling i et eksempel



Tekstutdrag 19: grafisk fremstilling

Tekstutdrag 18, Tekstutdrag 19 og den innledende setningen om monotoniegenskaper kan vi få noe informasjon om Saras begrepsforståelse. I beskrivelsen av hva monotoniegenskaper er, beskriver hun en fremgangsmåte. Hun beskriver også kort at man ser hvor grafen stiger og synker. I Tekstutdrag 17 viser Sara et eksempel på en utregning. Den kunnskapen hun viser er fakta- og metodebasert. Denne typen kunnskap utvikles gjerne ved pugg eller drilloppgaver (Kilpatrick et al., 2001). Videre forsøker Sara å utarbeide fortegnsskjema, og her viser hun at hun ikke forstår. Sara stiller flere valide spørsmål, her bruker hun skriving som et verktøy i læringen.

- *'Skal jeg sette inn* $f'(x) = 3$*?'*
- *'Hvordan regner jeg* x*?'*
- *'Hvordan regner jeg* $-x + 2$*?'*

Sara knytter disse spørsmålene direkte opp mot fortegnsskjemaet, og formulerer det han/hun syns er vanskelig. Dysthe et al. (2000) påpeker gevinsten ved å formulere hele setninger. Hun beskriver at eleven setter i gang flere tankeprosesser enn ved for eksempel å skrive ufullstendige setninger eller stikkord. Det å formulere det man syns er vanskelig er mer utfordrende enn å formulere noe du kan. For å kunne skrive på denne måten, må eleven strukturere tankene sine. Dette er en kognitivt svært krevende prosess (Lorentzen & Kringstad, 2014).

Når det er sagt, viser denne loggen faktakunnskaper. Sara viser ved utregning at hun mestrer de regnetekniske ferdighetene. Avslutningsvis i denne loggen kommer en figur (Tekstutdrag 19). Det blir ikke gitt noen forklaring eller tekst rundt denne fremstillingen. Utenom å visualisere hvor topp- og bunnpunkt er, samt fortelle at dette er ekstremalpunkter. Dette er noe elever ofte sliter med, å klare å bruke figurer som et verktøy i sine forklaringer (Hashemi et al., 2014).

I denne loggen forsøker Sara å sette sammen det hun har lært. Hun bruker eksempler og grafiske fremstillinger, og forsøker å se koblingene mellom dem. Sara viser samtidig ikke full forståelse for det hun snakker om. Begrepsforståelsen ligger på nivå 2 for begrepet monotoni-egenskapene til en funksjon, lest fra denne loggen. Igjen, må det påpekes at Saras begrepsforståelse kan være høyere, selv om dette ikke fremkommer av loggen.

Logg 3

Saras tredje logg inneholder også eksemplifisering og grafisk fremstilling. I denne loggen forklarer hun derivasjon, sammenhengen mellom $f(x)$ og $f'(x)$, og til slutt begynner hun på en utregning.

Sara beskriver derivasjon enkelt og greit:

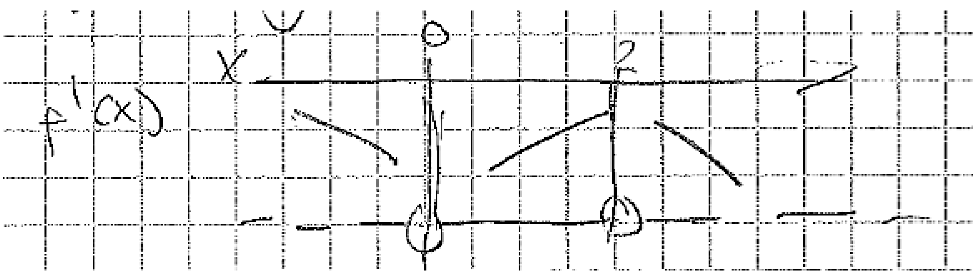
-‘ $f'(x)$ *= momentan vekstfart’*

Her kan det tyde på at hun har sett en viktig kobling. Det var bare tre elever som beskrev denne sammenhengen i sine logger. Sara viser med dette utsagnet faktakunnskaper, setter det i sammenheng med forkunnskaper og forsøker å utvikle denne matematiske ideen til noe mer enn en prosess. Det vil si at hun ligger på nivå 3 i begrepsforståelse av derivasjon. Muligheten for at dette er noe Sara har pugget er der i aller høyeste grad. Hun forklarer ikke sammenhengen, og heller ikke hva $f'(x)$ er. Likevel når jeg ser dette sitatet sammen med forklaringen av sammenhengen mellom $f(x)$ og $f'(x)$, kan det tyde på at begrepsforståelse for derivasjon er på kondenseringsstadiet, nivå 3. Saras forklaring av sammenhengen mellom $f(x)$ og $f'(x)$ blir drøftet senere.

I sitatet over bruker eleven begrepet momentan vekstfart som et objekt, og det kan tolkes slik at eleven her har nådd reifikasjonsstadiet. I første logg lå denne eleven på nivå 3. Det har altså skjedd en utvikling i elevens begrepsutvikling av momentan vekstfart.

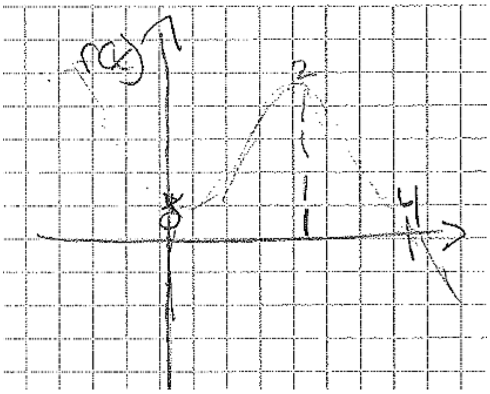
Sammenhengen mellom $f(x)$ og $f'(x)$ forklarer denne eleven slik:

- ‘$f'(x)$*, fortegnslinje, for å finne ut hvor grafen stiger og hvor den synker’*



Tekstutdrag 20: grafisk fremstilling i et eksempel

- ‘$f(x)$*, fortegnslinje sier noe om hvor grafen er positiv, og hvor den er negativ’*



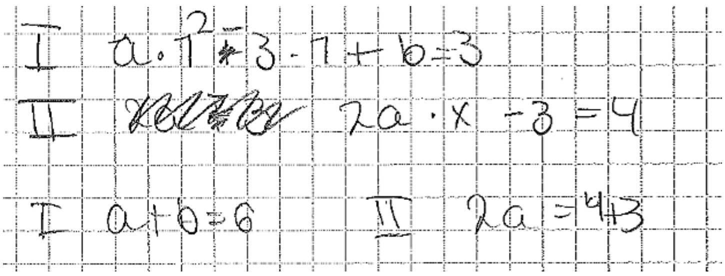
Tekstutdrag 21: grafisk fremstilling i et eksempel

-‘$f(x) = x > 0$ $når$ $x \in \ \langle \leftarrow, 4 \rangle$ ’

Sara skiller mellom $f(x)$ og $f'(x)$. Hun bruker eksemplene for å vise hva hun mener. På dette punktet viser Sara god utvikling fra logg 2, hvor hun inkluderte en figur som ikke var like beskrivende eller like godt integrert i teksten. Dette er noe mange elever sliter med, fordi det krever begrepsforståelse å se sammenhengen mellom grafisk og analytisk tilnærming (Asiala et al., 1997).

Avslutningsvis i denne loggen forsøker Sara å vise utregning for en av oppgavene på derivasjonsprøven de hadde hatt. Denne oppgaven ble gjennomgått i repetisjonen tidligere i denne undervisningsøkten. Oppgaven var:

Gitt en funksjon $ax^2 = 3x + b$, finn a og b når $f(1) = 3$ og $f'(x) = 4$.



Tekstutdrag 22: eksemplifisering

I denne oppgaven kreves høy grad av begrepsforståelse, eleven må forstå hva det betyr at $f(1) = 3$ og $f'(x) = 4$. Sara har i sin utregning klart å satt opp to ligninger som bruker denne informasjonen korrekt. Hvis hun hadde beskrevet hva og hvorfor hun gjorde det hun gjorde, ville man kunne sagt med sikkerhet at Sara har svært god begrepsforståelse av derivasjon. Da kunne man sagt at eleven klarer å gjenkjenne derivasjon i nye situasjoner og har nådd nivå 4, reifikasjon. Dette blir likevel usikkert hva som er pugget metodebruk og hva som er god begrepsforståelse. Derfor kan ikke denne siste delen brukes for å avgjøre elevens begrepsforståelse i derivasjon, men Sara viser regnetekniske ferdigheter i begge sine to siste logger.

4.3.4 Drøfting av casestudien

Av loggene til Malin, Anders og Sara ser vi at det er noen typer logger som gir bedre utbytte for lærer enn andre. Malin sine logger, som var fortellende logger, forteller lite eller ingenting om hennes begrepsforståelse i derivasjon. Når Malin forteller hva som er lett og hva som er vanskelig, ser hverken hun eller læreren konkret hva hun sliter med. Innblikket blir i hva Malins oppfatning av sin egen begrepsforståelse er. I denne studien var ønsket å undersøke hva faglogger forteller om elevenes begrepsforståelse, og ikke om elevens egen oppfatning.

Anders sine logger forteller mye om hans begrepsforståelse. Ved å se loggene i sammenheng med undervisningskonteksten kan man forstå hvor noen av misoppfatningene kommer fra. I tillegg kan man se tegn på utvikling av begrepsforståelse og 'oppretting' i misoppfatninger. Anders sin andre logg var en svakt oppsummerende logg, likevel kunne også denne loggen fortelle en del om hans begrepsforståelse, fordi han forklarte det han tenkte.

Alle Saras tre logger var godt oppsummerende. Likevel var det mindre informasjon å hente fra disse loggene enn fra Anders sine. Loggene er klassifisert under den høyeste kategorien som er representert, noe som betyr at om en logg har godt oppsummerende språk havner den i denne kategorien selv om det også er svakt oppsummerende eller fortellende språk i loggen. Både Sara og Anders sine tredje logger var godt oppsummerende, men Anders sin logg bestod av mer godt oppsummerende språk enn Sara sin. Saras siste logg viste tegn til at hun hadde oversett noen sammenhenger. Disse sammenhengene ble ikke forklart og derfor ble det vanskeligere å bestemme hennes nivå for begrepsforståelse av derivasjon.

Disse resultatene samsvarer med studiens teoretiske grunnlag. I godt oppsummerende logger har læreren mulighet til å følge elevenes tankegang, og kan dermed få et innsyn i elevens begrepsforståelse. Siden fortellende logger ikke gjør et forsøk på å forklare de matematiske aspektene, kan ikke læreren se hva eleven kan eller hva eleven strever med. I fortellende logger kan læreren i beste fall se elevens oppfatning av hva han/hun sliter med.

5 Oppsummering og konklusjon

Det fremstilles tre hovedtemaer i denne studien; begrepsforståelse, derivasjon og skriving i matematikk. Gjennom analyse av til sammen 65 elevlogger har jeg undersøkt elevenes loggskrivingsferdigheter, bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling, og elevenes begrepsforståelse i derivasjon. I studien har jeg hatt to roller. Under tilbakemeldingene i elevenes logger fungerte jeg som lærer B, og i analysene som forsker. Det ble derfor viktig å holde seg til kodingsapparatene og forholde seg analytisk til elevloggene under analysen.

Studien har en todelt problemstilling, og består av en dokumentanalyse og en casestudie. Gjennom analysene ønsker jeg å belyse mulige sammenhenger mellom disse undersøkelsesområdene.

5.1 Hovedfunn

Innledningsvis i dette delkapittelet vil noen hovedfunn fra dokumentanalysen bli belyst. Dokumentanalysen fokuserer på skriveferdigheter og bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling i fagloggene. Deretter belyses noen av hovedfunnene i casestudiet. Casestudiet har til hensikt å undersøke elevens begrepsforståelse som fremkommer av fagloggene.

5.1.1 Dokumentanalysen

Loggskrivingsferdigheter og bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling i loggene er to undersøkelsesområder i denne studien. Resultatene fra studien kan ikke generaliseres til en populasjon da utvalget er lite, men teoretisk generalisering fremkommer i drøftingen.

Resultatene fra dokumentanalysen viser flere godt oppsummerende logger i logg 2 enn i logg 1. Samtidig er det færre godt oppsummerende logger i logg 3 (se Figur 5, s. 48). Dette kan skyldes at de to første loggføringsøktene hadde en relativt lik undervisningskontekst (se Figur 3, s. 26). I tredje loggføringsøkt var temaet mer overordnet, noe som stilte høyere krav til elevenes begrepsforståelse. Det krever høyere matematisk kompetanse å skrive godt oppsummerende logger, enn å skrive fortellende logger (Clarke et al., 1993). Innledningsvis i denne oppgaven ble Lim og Pugalee (2004) sin forskning angående loggskriving drøftet. Den studien gikk over et helt skoleår, og viste resultater som samsvarer med utviklingen fra første til andre logg i denne studien. De beskriver at elevene selv gir uttrykk for positive sider ved loggskriving, og at loggene utviklet seg positivt i løpet av året. I min studie har det kun vært gjennomført tre loggføringsøkter, derfor kan det være tilfeldigheter som utgjør endringen i loggskrivingsferdighetene.

Utviklingen i forhold til bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling var lik. Det var flere logger som inneholdt eksemplifisering og grafisk fremstilling i logg 2 enn i logg 1. I tredje logg var det færre logger med eksemplifisering og grafisk fremstilling (se Figur 6, s. 51). I derivasjon kan bruk av grafisk fremstilling være et tegn på god begrepsforståelse i emnet. Det kreves god grafisk forståelse av hva stigningstall, tangent og sekant er, for å kunne forstå derivasjon (Asiala et al., 1997; Kalvø, 2002; Orton, 1983).

Til slutt belyser drøftingen av dokumentanalysen sammenhengen mellom loggskrivingsnivå og bruken av eksemplifisering og grafisk fremstilling. Teorien peker på at å skrive på høyere loggskrivingsnivå, krever bedre begrepsforståelse (Clarke et al., 1993). I tillegg krever språket høyere presisjon og klarhet enn hverdagsspråket (Lee, 2006). Flere forskere forteller at det kreves bedre begrepsforståelse for å kunne inkludere grafisk fremstilling i tekster (Hashemi et al., 2014; Kalvø, 2002; Orton, 1983). Dermed er det kanskje ikke så overraskende at de godt oppsummerende loggene hadde svært høy hyppighet i bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling, mens de fortellende loggene hverken inneholdt eksemplifisering eller grafisk fremstilling (se Tabell 3, s. 59).

5.1.2 Casestudiet

I casestudiet blir det undersøkt hva elevenes faglogger forteller om deres begrepsutviklingen i derivasjon gjennom tre faglogger.

Malin skriver tre fortellende logger. Fortellende logger kan ikke si like mye om elevens begrepsforståelse i derivasjon som oppsummerende logger. Derimot viser Anders og Sara sine logger mange indikasjoner på begrepsforståelse og utvikling av begrepsforståelse. Loggene viser utvikling i begrepsforståelse ved å koble matematiske ideer sammen og forsøke å se de innlærte temaene i et helhetlig bilde. I Anders sin logg blir blant annet momentan vekstfart forklart både i første og i tredje logg, og her viser han utvikling ved å gå fra kondenserings-stadiet til reifikasjonsstadiet for dette begrepet (se kapittel 4.3.2). I derivasjon er det viktig å kunne tangent/sekant og stigningstall for å kunne lære seg hva vekstfart er (Asiala et al., 1997; Kalvø, 2002). Dette er igjen viktig å kunne før man når reifikasjonsstadiet for derivasjon. Sfard (1991) påpeker at man må nå reifikasjonsstadiet for et begrep, for å kunne bygge hierarkiske kunnskapsskjemaer og dermed øke sin kognitive kapasitet.

Anders og Sara viser også god begrepsforståelse da de forklarte sammenhengen mellom grafene $f(x)$ og $f'(x)$ (se kapittel 4.3.2 og 4.3.3). Dette krever at mange tankeprosesser blir satt i gang og eleven må strukturere tankene før de skal ned på papiret. Denne prosessen er kognitivt krevende for eleven (Lorentzen & Kringstad, 2014).

Sara bruker eksemplifisering og grafisk fremstilling i begge sine to siste logger. Her viser hun begrepsutvikling ved måten hun inkluderer figurene i teksten. Dette beskrives av mange forskere som å være krevende for mange elever på grunn av manglende begrepsforståelse (Hashemi et al., 2014; Kalvø, 2002).

5.2 Konklusjon

Problemstillingen for denne oppgaven er todelt, første del lyder; '*Hvilke ferdigheter i loggskriving, og bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling, kommer frem i fagloggene til elever i en 1T-klasse?*'. Denne studien viser at elevenes loggskrivingsferdigheter og bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling generelt er varierende. Over et så kort tidsrom er det liten utvikling i loggskrivingsferdihetene, men studien viser at elevene generelt skrev faglogger på et lavere loggskrivingsnivå i den loggskrivingsøkten der undervisningstemaet var mindre konkret og elevene ikke hadde fått like mye tid til å løse oppgaver og eget arbeid på forhånd. Den samme tendensen fremkom da det gjaldt bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling. Det var færre elever som benyttet dette i logg 3 da undervisningskonteksten siktet på et bredere tema, noe som kanskje stilte høyere krav til elevens begrepsutvikling.

Da det i norsk skole er mye fokus på undervisningsmetoder som sikter på regnetekniske ferdigheter (Brekke, 2002; Grønmo, 2005), kan skriving fungere som et frisk pust i undervisningen. Faglogg er en form for tankeskriving og legger til rette for refleksjon og utforsking (Hiemstra, 2001; Morgan, 2002), noe som legger til rette for begrepsutvikling (Kilpatrick et al., 2001). I tillegg kan skriving av fullstendige setninger sette i gang flere tankeprosesser hos elevene (Dysthe et al., 2000; Lorentzen & Kringstad, 2014).

Problemstillingens andre del, lyder; '*Hva forteller fagloggene til elever i en 1T matematikklasse om begrepsutvikling i derivasjon gjennom loggskriving?*'. I casestudiet kommer det frem at godt oppsummerende logger kan fortelle mye om elevens begrepsforståelse. Elevenes grad av matematisk fokus, bruk av eksemplifisering og grafisk fremstilling, formuleringer og kobling av ulike temaer kan fortelle hva eleven forstår. Siden det matematiske språket krever en høy grad av klarhet og presisjon, gir det gode muligheter for å se hva eleven strever med.

Fortellende logger, uten matematisk fokus, kan ikke fortelle mye om elevens begrepsforståelse. For at eleven skal klare å ha et matematisk fokus i sin logg, må eleven ha noe matematisk kunnskap å formidle. Det betyr likevel ikke nødvendigvis at eleven ikke kan matematikken, om han/hun skriver en fortellende logg. Faglogg kan gi informasjon om elevens begrepsforståelse både til læreren, men også til eleven selv (Pugalee, 1997).

I loggene forsøker elevene å formidle det de kan på en så god måte som mulig. Dette kan gi læreren kunnskap om elevens begrepsforståelse. Likevel er det ikke gitt at lærerens tolkning av informasjonen som fremkommer alltid er korrekt. Læreren kan undervurdere eller overvurdere elevens begrepsforståelse. Dette kan skje enten ved at eleven ikke får formidlet sin matematiske kunnskap fordi det matematiske språket er utfordrende, eller det kan skje ved at eleven har pugget seg til sammenhenger og metoder, slik at læreren tror at eleven ser sammenhenger som han/hun kanskje ikke ser. Disse utfordringene gjelder også for elevens innsyn i egen læring. Derfor kreves det en ærlighet fra eleven for at loggskriving skal fungere optimalt. Det må også sies at ved oppsummerende og dialogiske logger, som er mer forklarende og granskende, vil denne utfordringen kunne bli mindre. I Anders og Sara sine logger viste de begrepsutvikling i måten de brukte de matematiske begrepene i sine forklaringer. De brukte begreper som ble forklart i første logg i forklaringen av mer avanserte matematiske begreper. Dette er tegn på utvikling av begrepsforståelse.

5.3 Implikasjoner for bruk av skriving i matematikk og videre forskning

Resultater fra denne studien indikerer at elevers begrepsforståelse i derivasjon kommer frem gjennom elevers faglogger. Det kan tyde på at bruk av faglogg i derivasjon kan virke styrkende på elevenes begrepsforståelse. Resultatene peker på at man får mer informasjon om elevenes begrepsforståelse når elevene utvikler gode skriveferdigheter. For at faglogg skal kunne fungere som et godt verktøy i undervisningen burde man kanskje ha fokus på å lære elevene å bli gode skrivere. Sterrett (1990) peker på at Blooms taksonomi kan hjelpe elevene å forstå hva begrepsforståelse i matematikk er. Både den dialogiske loggen og reifikasjons-stadiet er generelle nivåer, og kanskje er Blooms taksonomi mer konkret her. Ved en innføring i dette hierarkiet kan elevene få mer konkrete retningslinjer til hvordan de kan utvikle bedre skriveferdigheter ved å vite om hvilke tanker de kan gjøre seg underveis i læringsprosessen. Det at elevene klarer å skille mellom forståelse og anvendelse, og forstå at anvendelse ved forståelse gir bedre videre læringsgrunnlag, kan gjøre at elevene får et mer forklarende fokus i fagloggene sine. Målet med denne formen for skriving er at elevene kan se skriving som et læringsverktøy som styrker begrepsforståelse. I tillegg vil eleven kunne se at skriving kan gi automatisk feedback, ved at misoppfatninger avsløres.

Videre viser studien at i godt oppsummerende logger kan læreren og eleven få informasjon om begrepsforståelse i derivasjon. I norsk skole er det mye fokus på oppgaver som styrker regnetekniske ferdigheter. Skriving i matematikk kan være en aktivitet som både kan bidra til økt begrepsforståelse og motivasjon i form av variasjon i undervisningsmetoder. De positive aspektene ved å bruke skriving i matematikk ligner de aspektene som viser god begreps-forståelse. Skriving kan virke sammenbindende (Morgan, 2002). Samtidig er tegn på god begrepsforståelse å kunne koble forkunnskaper, ny kunnskap og ulike kunnskapsområder sammen (Kilpatrick et al., 2001; Rittle-Johnson et al., 2001; Sfard, 1991). I tillegg stiller skriving høye krav til å strukturere tankene og være detaljert og klar i språket (Lee, 2006). Begrepsforståelse handler om å kunne bygge hierarkiske kunnskapsskjemaer og ikke la hvert tema representere puslespillbrikker som ikke passer sammen. Caseanalysen kan ikke vise denne påvirkningen på elevene, men den viser hvordan faglogg legger til rette for at man kan se elevenes begrepsutvikling og tankegang i oppsummerende logger.

Som en implikasjon for videre forskning har jeg med denne oppgaven ønsket å bidra til å identifisere elevers skriveferdigheter, og identifisere hva faglogger kan fortelle om elevenes begrepsutvikling i derivasjon. Kunnskapsministeren varsler i disse dager større fokus på dybdelæring i pensum i norsk skole. Dybdelæring og begrepsforståelse inneholder de samme momentene, og kan dermed tillegges samme verdi. Med dette er temaet for denne studien svært relevant i den videre utdanningspolitiske debatten.

Litteraturliste

Asiala, Mark, Cottrill, Jim, Dubinsky, Ed, & Schwingendorf, Keith E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 399-431. doi: 10.1016/S0732-3123(97)90015-8

Brekke, Gard. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk Kvalitet i matematikkundervisningen*

Clarke, David J, Waywood, Andrew, & Stephens, Max. (1993). Probing the structure of mathematical writing. *Educational Studies in Mathematics, 25*(3), 235-250.

Cobb, Paul et al. (1997). Reflective Discourse and Collective Reflection. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 258-277.

Countryman, Joan. (1992). *Writing To Learn Mathematics: Strategies That Work*: ERIC.

Dysthe, Olga, Hertzberg, Frøydis, & Hoel, Torlaug Løkensgard. (2000). *Skrive for å lære : skriving i høyere utdanning*. Oslo: Abstrakt forl.

Forehand, Mary. (2010). Bloom’s taxonomy. *Emerging perspectives on learning, teaching, and technology*, 41-47.

Grønmo, Liv Sissel. (2005). Ferdighetenes plass i matematikkundervisningen. *Gøteborg: I Nämnaren, årgang, 32*.

Grønmo, Liv Sissel, Onstad, Torgeir, & Pedersen, Ida Friestad. (2010). Matematikk i motvind. *TIMSS Advanced 2008 i videregående skole*.

Hansen, Wenche, Tanggaard, Lene, & Brinkmann, Svend. (2012). *Kvalitative metoder : empiri og teoriutvikling*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Hashemi, Nourooz, Abu, Mohd Salleh, Kashefi, Hamidreza, & Rahimi, Khadijeh. (2014). Undergraduate Students’ Difficulties in Conceptual Understanding of Derivation. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 143,* 358-366. doi: 10.1016/j.sbspro.2014.07.495

Hiebert, James. (1986). *Conceptual and procedural knowledge : the case of mathematics*. Hillsdale, N.J: Erlbaum.

Hiemstra, Roger. (2001). Uses and benefits of journal writing. *New directions for adult and continuing education, 2001*(90), 19.

Hole, Arne. (2003). *Grunnleggende matematikk* (3. utg. utg.). Oslo: Universitetsforl.

Johannessen, Asbjørn, Christoffersen, Line, & Tufte, Per Arne. (2010). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (4. utg. utg.). Oslo: Abstrakt.

Kalvø, Tove. (2002). Den deriverte på skråplanet : bruk av datalogger som en praktisk nærming til begrepsforståelse av den deriverte. Kristiansand: T. Kalvø.

Kaplan, Abdullah, Ozturk, Mesut, & Ocal, Mehmet Fatih. (2015). Relieving of misconceptions of derivative concept with derive. *International Journal of Research in Education and Science, 1*(1), 64-74.

Kenney, Rachael, Shoffner, Melanie, & Norris, David. (2014). Reflecting on the Use of Writing to Promote Mathematical Learning: An Examination of Preservice Mathematics Teachers' Perspectives. *The Teacher Educator, 49*(1), 28-43.

Kilpatrick, Jeremy. (2014). Competency Frameworks in Mathematics Education. I *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 85-87): Springer.

Kilpatrick, Jeremy , Swafford, Jane , & Findell, Bradford (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*: National Academies Press.

Kjærnsli, Marit, & Olsen, Rolf V. (2013). *Fortsatt en vei å gå : norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012*. Oslo: Universitetsforl.

Kunnskapsdepartementet. (2013). *Reviderte læreplaner fastsatt*. Regjeringen Stoltenberg II Lastet ned fra https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/reviderte-lareplaner-fastsatt/id731407/.

Lee, Clare S. (2006). *Language for Learning Mathematics : Assessment for Learning in Practice*. Maidenhead: Open University Press.

Lim, Louis, & Pugalee, David K. (2004). Using journal writing to explore "They communicate to learn mathematics and they learn to communicate mathematically.". *Ontario Action Researcher, 7*(2), 17-24.

Lorentzen, Vibeke, & Kringstad, Trude. (2014). Skriving i matematikk og naturfag. *Bedre skole*.

Lunde, Olav. (2003). Har eleven matematikkvansker–-og hva skal vi gjøre for å oppnå mestring? *Skolepsykologi, tidsskrift for pedagogisk-psykologisk tjeneste, april*.

Maxwell, Joseph A. (2013). *Qualitative research design : an interactive approach* (3rd ed. utg. Vol. 41). Los Angeles: Sage.

Mitchell, J. Clyde. (2006). Case and Situation Analysis. I T. M. S. Evens & Don Handelman (Red.), *The Manchester school : practice and ethnographic praxis in anthropology* (s. 23 - 42). New York: Berghahn Books.

Morgan, C. (2002). *Writing Mathematically: The Discourse of 'Investigation'*: Taylor & Francis.

NESH. (2006). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*. Oslo: Forskningsetiske komiteer.

Nilsen, Hans Kristian (2013). Learning and Teaching Functions and the Transition from Lower Secondary to Upper Secondary School.

Nilssen, Vivi Lisbeth. (2012). *Analyse i kvalitative studier : den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforl.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *An International Journal, 14*(3), 235-250. doi: 10.1007/BF00410540

Piaget, Jean. (1970). *Genetic epistemology* (Vol. no 8). New York: Columbia University Press.

Pugalee, David K. (1997). Connecting writing to the mathematics curriculum. *The Mathematics Teacher, 90*(4), 308.

Pugalee, David K. (2001). Writing, mathematics, and metacognition: Looking for connections through students' work in mathematical problem solving. *School Science and Mathematics, 101*(5), 236-245.

Rittle-Johnson, Bethany, Siegler, Robert S, & Alibali, Martha Wagner. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of educational psychology, 93*(2), 346.

Sfard, Anna. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22*(1), 1-36.

Smidt, Jon. (2011). Skrivekulturer og skrivesituasjoner i bevegelse - fra beskrivelse til utvikling. I. Trondheim: Tapir akademisk forl., c2010.

Sterrett, Andrew. (1990). *Using writing to teach mathematics* (Vol. vol. 16). Washington,D.C: Mathematical Association of America.

Tall, David. (2013). *How humans learn to think mathematically: exploring the three worlds of mathematics*: Cambridge University Press.

Thagaard, Tove. (2013). *Systematikk og innlevelse : en innføring i kvalitativ metode* (4. utg. utg.). Bergen: Fagbokforl.

Utdanningsdirektoratet. Fire prinsipper for underveisvurdering. Lastet ned fra http://www.udir.no/Vurdering-for-laring/4-prinsipper/

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag - kompetansemål* Utdanningsdirektoratet Lastet ned fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Kompetansemaal?arst=1858830316&kmsn=2088314978.

Utdanningsdirektoratet. (2014). Fire prinsipper for god underveisvurdering. http://www.udir.no/Vurdering-for-laring/4-prinsipper/Viktige-prinsipper-for-vudering/fire-prinsipper/

Utdanningsetaten. (u.å.). *Skriveplan for videregående skole. Kompetente skrivere - bedre resultater*. Strømsveien 102 Pb 6127 Etterstad 0602 Oslo: Oslo kommune Lastet ned fra http://skrivestien.skrivesenteret.no/uploads/docs/Videregående/Skriveplan_kompetente_skrivere_27_06%282%29endelig.pdf.

Vinner, Shlomo. (2014). Concept Development in Mathematics Education. I *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 91-96): Springer.

Wendelborg, Christian. (2015). *Mobbing, krenkelser og arbeidsro i skolen : analyse av Elevundersøkelsen skoleåret 2014/15* Rapport (NTNU samfunnsforskning), Vol. 2015.

Yin, Robert K. (2007). *Fallstudier : design och genomförande*. Malmö: Liber.

Vedlegg

Vedlegg 1	Samtykkebrev
Vedlegg 2	Malin sine tre logger
Vedlegg 3	Anders sine tre logger
Vedlegg 4	Sara sine tre logger