

Pensler av kvadrikker

Håvard Bjørgum

Master's Thesis, Spring 2016



Cover design by Martin Helsø

The front page depicts a section of the root system of the exceptional Lie group E_8 , projected into the plane. Lie groups were invented by the Norwegian mathematician Sophus Lie (1842–1899) to express symmetries in differential equations and today they play a central role in various parts of mathematics.

Innledning

I denne oppgaven er hovedmålet å gjøre en klassifisering av pensler av kvadriker i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. Klassifiseringen vil gjøres ut ifra hvordan signaturen til den definerende reelle, symmetriske matrisen endrer seg over $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Vi ser kun på pensler av kvadriker som inneholder kvadriker av rang fire.

I kapittel 1 definerer vi en kvadrikk i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ som nullpunktsmengden til en reell kvadratisk form i fire variabler. Vi undersøker hvordan en kvadrikk kan representeres ved reelle, symmetriske matriser. Vi gjør rede for hvilke kvadriker vi vil se på som ekvivalente, og viser blant annet at kongruente matriser definerer ekvivalente kvadriker. Vi viser dessuten at to reelle, symmetriske matriser A og B er kongruente hvis og bare hvis de har samme signatur. Signaturen til en matrise angir hvor mange positive og negative egenverdier matrisen har. I slutten av det første kapittelet gjør vi en klassifisering av kvadriker i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ opp til ekvivalens, og av reelle, symmetriske matriser opp til kongruens.

I kapittel 2 studerer vi pensler av kvadriker. En pensel av kvadriker i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ defineres som nullpunktsmengden til en familie av reelle, kvadratiske former. Vi viser hvordan en pensel av kvadriker kan defineres av en matrise $sA + tB$, der A og B er reelle, symmetriske 4×4 matriser og $(s, t) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Videre analyserer vi hvordan signaturen til matrisen $sA + tB$, og dermed også signaturen til kvadrikkene definert av matrisen, endrer seg over $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. I slutten av kapittelet gjør vi en konstruksjon av det vi kaller "en pensels diskriminant". Dette er en kurve i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ som blant annet gir et geometrisk bilde av hvordan signaturmønsteret til en pensel av kvadriker endrer seg over $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Vi utleder resultater om kurven som vil vise seg nyttige i arbeidet med å vise hvilke signaturmønstre som kan eksistere.

I kapittel 3 behandles såkalte diagonale pensler av kvadriker. En diagonal pensel av kvadriker vil være ekvivalent med en pensel av kvadriker som er definert ved en reell, diagonal matrise $sD_1 + tD_2$, der D_1 og D_2 er reelle, diagonale matriser. Klassifiseringen av disse penslene er derfor spesielt enkel. I dette kapittelet går vi også inn på hva som kjennetegner en diagonal pensel av kvadriker. Vi viser blant annet at dersom diskriminanten til en

pensel tangerer linjen i det reelle projektive planet som definerer penselen, så kan ikke penselen være diagonal.

Klassifikasjonen av diagonale pensler har vi delt i to underkategorier, nemlig definitte pensler og ikke-definitte pensler. Definitte pensler er spesielle i den forstand at de er ekvivalente med en pensel definert av en matrise på formen $sI + tD$, der I er identitetsmatrisen, og D er en reell, diagonal matrise.

Fremgangsmåten vi bruker i klassifikasjonen av både diagonale og ikke-diagonale pensler er i prinsippet den samme. I arbeidet med å klassifisere de ikke-diagonale penslene i kapittel fire brukes imidlertid egenskapene til diskriminanten i større grad.

I kapittel fem gir vi en oppsummering av alle signaturmønstrene vi har funnet. Klassifikasjonen påstås å være fullstendig i den forstand at alle signaturmønstrene som kan eksistere er funnet, og eksistensen av dem er bevist ved eksempler.

Om notasjon og antakelser Gruppen av reelle, symmetriske 4×4 -matriser benevnes $\text{Sym}_4(\mathbb{R})$ i oppgaven. Gruppen av reelle, ortogonale 4×4 -matriser benevnes $O_4(\mathbb{R})$ i oppgaven. Gruppen av reelle, invertible 4×4 -matriser benevnes $GL_4(\mathbb{R})$ i oppgaven.

Resultater fra kapittel 1 i [Har77] vil brukes uten referanser i oppgaven. I tillegg vil noen resultater i lineær algebra brukes uten bevis. Dette gjelder blant annet spektralteoremet og rank-nullity teoremet for reelle, symmetriske 4×4 -matriser.

Takk til

Først og fremst vil jeg takke min veileder gjennom masteroppgaven, Kristian Ranestad. Uten veiledningstimene jeg har fått av deg, ville denne oppgaven ikke vært mulig å gjennomføre. Takk for at du alltid har tatt deg tid til å svare på spørsmål, det har betydd veldig mye.

Tusen takk til mine medstudenter, ikke minst Yngve Antonsen og Hildgunn Solberg. Takk for mange artige og lærerike samtaler de to siste årene på Blindern.

Videre vil jeg takke venner og familie som har gitt meg støtte og oppmuntring gjennom hele mastergraden. Til slutt en stor takk til mor og far for korrekturlesing.

Innholdsfortegnelse

1	Kvadrikker	7
2	Pensler av kvadrikker	17
2.1	Pensler av kvadrikker	17
2.2	Signaturendringer i en pensel av kvadrikker	18
2.3	Signaturmønsteret til en pensel av kvadrikker	20
2.4	Ekvivalente pensler av kvadrikker	25
2.5	Regulære og irregulære røtter	25
2.6	En pensels diskriminant	28
2.6.1	Singulære punkter på diskriminanten	35
3	Diagonale pensler	38
3.1	Om diagonale pensler	38
3.2	Om klassifikasjonen av diagonale pensler	42
3.3	Definitte pensler	44
3.4	Klassifikasjon av definitive pensler	45
3.4.1	$\det M(P) = l_0(P)l_1(P)l_2(P)l_3(P)$	45
3.4.2	$\det M(P) = l_0(P)^2l_1(P)l_2(P)$	47
3.4.3	$\det M(P) = l_0(P)^2l_1(P)^2$	49
3.4.4	$\det M(P) = l_0(P)^3l_1(P)$	50
3.5	Diagonale pensler som ikke er definitive	50
3.5.1	$\det M(P) = l_0(P)l_1(P)l_2(P)l_3(P)$	50
3.5.2	$\det M(P) = l_0(P)^2l_1(P)l_2(P)$	52
3.5.3	$\det M(s, t) = l_0(P)^2l_1(P)^2 = 2$	54
3.5.4	$\det M(P) = l_0(P)^3l_1(P)$	56
4	Ikke-diagonale pensler	58
4.1	Pensler med konstant signatur	58
4.1.1	Pensler med konstant signatur og glatt diskriminant	58
4.1.2	Pensler med konstant signatur	61
4.2	Klassifikasjon av ikke-diagonale pensler	63
4.2.1	$\det M(P) = l_0(P)^4$	64
4.2.2	$\det M(P) = l_0(P)^3l_1(P)$	68

4.2.3	$\det M(P) = l_0(P)^2 l_1(P) l_2(P)$	71
4.2.4	$\det M(P) = l_0(P)^2 l_1(P)^2$	74
4.2.5	$\det M(P) = m(P) l_0(P)^2$	78
4.2.6	$\det M(P) = m(P) l_0(P) l_1(P)$	81
5	Oversikt over signaturmønstre	83
	Bibliografi	84

Kapittel 1

Kvadrisker

Definisjon 1.1. *Det reelle projektive rommet i n dimensjoner definerer vi som $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n = \{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\} / \sim$, der $(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$ hvis det eksisterer en $k \neq 0$ slik at $k(x_0, \dots, x_n) = (y_0, \dots, y_n)$.*

Definisjon 1.2. Et homogent andregradspolynom $q \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$ kaller vi en reell *kvadratisk form* i n variabler.

I denne oppgaven behandles nesten utelukkende reelle kvadratiske former i fire variabler, og vi kommer derfor til å omtale disse som kvadratiske former.

Definisjon 1.3. En *kvadrikk* $Q \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ er nullpunktsmengden til en kvadratisk form $q \in \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2, x_3]$, i.e. $Q = V(q(x)) = \{P \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid q(P) = 0\}$.

Enhver kvadratisk form $q \in \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ definerer altså en kvadrikk.

Eksempel 1.4. Den kvadratiske formen $q(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ definerer kvadrikken $V(q) = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$. Dersom $x_3 = 0$ får vi den tomme mengden i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. Dersom $x_3 = 1$ får vi likningen for en kule med radius 1. Kvadrikken $V(q) = \{(x_0, x_1, x_2, 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ består altså av en kule som ligger i den affine delen av $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ der $x_3 = 1$. ■

At kroppen \mathbb{R} ikke er algebraisk lukket medfører at en kvadrikk kan være lik den tomme mengden.

Eksempel 1.5. Dersom $q(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ får vi at $V(q(x)) = \emptyset$ ■

Legg merke til at dersom $q \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_3]$ er en kvadratisk form og $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, så vil $V(q) = \{P \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid q(P) = 0\} = \{P \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid kq(P) = 0\} = V(kq)$. Dermed har vi følgende:

Observasjon 1.6. *Kvadratiske former som er like opp til multiplikasjon med en konstant ulik null, vil definere den samme kvadrikken.*

Enhver matrise $A \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ definerer en unik kvadratisk form $q_A(x) = x^T A x$, hvor altså $x \in \mathbb{R}^4$ er en kolonnevektor. Dessuten har vi følgende:

Lemma 1.7. For enhver kvadratisk form $q \in \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ finnes det en unik matrise $A \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ slik at $q(x) = x^T Ax$.

Dermed finnes det altså en en-til-en-korrespondanse mellom mengden av alle reelle symmetriske matriser, og mengden av alle reelle kvadratiske former.

Merknad 1.8. I brorparten av denne oppgaven kommer vi til å bruke matriser i $\text{Sym}_4(\mathbb{R})$ for å representere kvadriker. En generell kvadrikk $Q \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ vil kunne skrives som $V(x^T Ax)$, der $A \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$. Det er naturlig å identifisere kvadriker som er like opp til et variabelskifte. Dersom $x = Py$, der $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ definerer et invertibelt variabelskifte, får vi følgende: $x^T Ax = (Py)^T A(Py) = y^T P^T APy$. Vi ser altså at $V(x^T Ax)$ og $V(y^T P^T APy)$ består av de samme punktene i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$, men punktene er gitt ved ulik basis i det underliggende vektorrommet.

I den videre omtalen av kvadriker tenker vi oss imidlertid at vi fikserer en basis. Istedenfor å snakke om kvadriker som er like opp til et variabelskifte, vil vi snakke om kvadriker som er like opp til en bijeksjon i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$, induisert av en automorfi av \mathbb{R}^4 .

En av fordelene ved å fikse en basis er at notasjonen $Q_A = V(x^T Ax)$, der $A \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$, gir entydig mening. Merk at dersom Q er en kvadrikk som kan skrives som $Q = Q_A$, så følger det fra observasjon 1.6 at $Q = kA$, der $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

De bijeksjonene mellom kvadriker i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ som er av interesse for oss, er de som indueres av lineære automorfier av det underliggende vektorrommet \mathbb{R}^4 . La oss nå nærmere på disse automorfierne.

De lineære automorfierne av \mathbb{R}^4 er gitt ved gruppen av matriser $\text{GL}_4(\mathbb{R})$. Enhver lineær automorfi vil altså være definert av en $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \phi_P : \mathbb{R}^4 &\mapsto \mathbb{R}^4 \\ x &\mapsto Px. \end{aligned}$$

Enhver slik automorfi vil ta underrom av \mathbb{R}^4 til underrom av \mathbb{R}^4 . Spesielt vil den ta linjer gjennom origo til linjer gjennom origo. En linje gjennom origo tilsvare et punkt i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. En slik matrise P vil dermed også induere en bijeksjon:

$$\begin{aligned} \phi'_P : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 &\mapsto \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \\ x &\mapsto Px \end{aligned}$$

Restriksjonen av en slik bijeksjon $\phi'_P \upharpoonright Q : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mapsto \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ til en kvadrikk Q vil definere et nytt sett med punkt i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$, som er i en-til-en-korrespondanse

med punktene definert av Q . La oss kalle denne mengden av punkt $PQ = \{Px \mid x \in Q\}$. Man kan vise at dersom $A \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ er en *varietet*, i.e. dersom A er nullpunktsmengden til en mengde funksjoner, så vil $PA = \{Px \mid x \in A\}$ være en varietet [CLO, Proposition 1. s. 409]. Spesielt gjelder dette for en kvadrikk $Q \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. Ikke overraskende så vil PQ være en ny kvadrikk. For å vise dette blir følgende lemma nyttig:

Lemma 1.9. *Dersom $S \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ og P er en 4×4 -matrise, så vil $P^T S P \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$.*

Bevis. $(P^T S P)^T = P^T S^T (P^T)^T = P^T S^T P$. □

Lemma 1.10. *Dersom Q er en kvadrikk og $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$, så vil PQ være en kvadrikk.*

Bevis. Anta at Q kan skrives som $V(x^T A x)$, der $A \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$. Dersom vi kan vise at $PQ = V(x^T B x)$, der $B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ så følger det at PQ også er en kvadrikk. For å se dette, la $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ og la $x' = Px$. Det følger at $P^{-1}x' = x$, og dermed ser vi at $x^T A x = 0$ hvis og bare hvis $(P^{-1}x')^T A (P^{-1}x') = x'^T P^{-1} A P^{-1} x' = 0$. Dermed ser vi at $x \in Q_A$ hvis og bare hvis $Px \in Q_{(P^{-1})^T A P^{-1}}$. Dette impliserer følgende:

$$PQ_A = Q_{(P^{-1})^T A P^{-1}}. \quad (1.1)$$

At matrisen $(P^{-1})^T A P^{-1}$ er symmetrisk følger av lemma 1.9, og dermed har vi vist at PQ er en kvadrikk. □

Definisjon 1.11. To kvadrikker $Q, Q' \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ er *ekvivalente* dersom det finnes $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ slik at $PQ = \{Px \mid x \in Q\} = Q'$.

La oss nå undersøke hva som er relasjonen mellom matriser som definerer de samme kvadrikkene opp til ekvivalens. Følgende definisjon blir nyttig i dette henseendet:

Definisjon 1.12. To matriser $A, B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ er *kongruente* dersom det finnes en $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ slik at $P^T A P = B$

Lemma 1.13. *La $A, B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$. Dersom matrisene A og $\pm B$ er kongruente, så er kvadrikkene Q_A og Q_B ekvivalente.*

Bevis. Anta først at A er kongruent med matrisen $+B$, i.e. at det finnes en $P^{-1} \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ slik at $(P^{-1})^T A P^{-1} = B$. At kvadrikkene Q_A og $Q_B = Q_{(P^{-1})^T A P^{-1}}$ er ekvivalente følger nå fra likning (1.1).

Dersom $(P^{-1})^T A P^{-1} = -B$, får vi at $Q_{-B} = Q_B = Q_{(P^{-1})^T A P^{-1}}$. Dermed får vi igjen fra likning (1.1) at kvadrikkene Q_A og Q_B er ekvivalente. □

Ettersom kongruente matriser definerer ekvivalente kvadrikker, vil vi nå se nærmere på hvilke matriser som finnes opp til kongruens. Det første vi kan merke oss i dette henseende er følgende:

Lemma 1.14. *Matrisekongruens er en ekvivalensrelasjon.*

Bevis. To matriser $A, B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ er kongruente dersom det finnes $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ slik at $P^T A P = B$.

- Identitet: $A \sim A$ ettersom $I^T A I = A$
- Refleksivitet: $A \sim B$ medfører $B \sim A$ ettersom $P^T A P = B$ medfører at $(P^T)^{-1} B P^{-1} = (P^{-1})^T B P^{-1} = A$.
- Transitivitet: $A \sim B$ og $B \sim C$ medfører $A \sim C$, ettersom $P^T A P = B$, $U^T B U = C$, medfører at $(PU)^T A (PU) = C$, der $\{U, P, PU\} \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$.

□

Ettersom kongruente matriser definerer ekvivalente kvadrikker, så vil alle matrisene i en ekvivalensklasse definere den samme kvadrikken. For å kunne si mer om disse ekvivalensklassene vil vi se nærmere på hva som er nødvendige og tilstrekkelige betingelser for at to symmetriske matriser skal være kongruente. Det treffende begrepet som brukes i litteraturen i dette henseendet, er begrepet *signatur*.

Definisjon 1.15. Anta at vi er gitt en matrise $A \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$. *Signaturen* til matrisen, $\text{sign } A$, definerer vi som tuppelet (n_+, n_-) som angir antall egenverdier tilhørende matrisen A som er henholdsvis positive og negative.

Vi kan merke oss at dersom $A \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ og $\text{sign } A = (n_+, n_-)$, så vil følgende identitet alltid holde: $n_+ + n_- + n_0 = 4$, der n_0 er antall egenverdier tilhørende matrisen A som er lik null.

Vi kommer altså til å vise at to symmetriske matriser $A, B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ er kongruente hvis og bare hvis $\text{sign } A = \text{sign } B$. På veien til å gjøre dette, skal vi imidlertid først se at enhver kvadrikk Q vil være ekvivalent med en kvadrikk på *normalformen* $V(a_0 x_0^2 + \dots + a_3 x_3^2)$, der $a_i \in \{-1, 1, 0\}$.

Ettersom kongruente matriser definerer ekvivalente kvadrikker, vil det ofte være av interesse å finne en $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ slik at $P^T A P$ er en enklest mulig matrise. Følgende klassiske resultat viser at vi alltid kan finne en $P \in \text{O}_4(\mathbb{R})$ slik at $P^T A P = D$, der D er en reell diagonalmatrise:

Lemma 1.16. *La $A \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ og la P være en matrise der kolonnene er lik egenvektorene til matrisen A . Da vil matrisen P være ortogonal og $P^T A P = D$, der D er en diagonalmatrise. Diagonalelementene til matrisen D vil være lik egenverdiene til matrisen A .*

Korollar 1.17. *Enhver kvadrikk $Q \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ vil være ekvivalent med en kvadrikk på formen $V(x^T D x)$, der D er reell, diagonalmatrise.*

Lemma 1.18. *Enhver kvadrikk kan skrives på normalform.*

Bevis. Fra korollar 1.17 vet vi at enhver kvadrikk kan skrives på formen $V(x^T D x)$, der D er en reell diagonal matrise. I.e.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Uansett hvordan den reelle diagonale matrisen D ser ut så kan vi konstruere følgende matrise $U \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & u_n \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

der

$$u_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} & \text{if } \lambda_i \neq 0 \\ 1 & \text{if } \lambda_i = 0 \end{cases}$$

Det følger ved vanlig matriseregning at $U^T D U = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) = N$, der $a_i \in \{0, -1, 1\}$. Vi har altså at matrisen D er kongruent med matrisen N . Ettersom kongruente matriser definerer ekvivalente kvadrikker følger det at $V(x^T D x)$ er ekvivalent med $V(x^T N x)$, der $x^T N x = a_0 x^2 + \dots + a_n x^2$ og $a_i \in \{0, -1, 1\}$. \square

Legg merke til at i beviset av lemma 1.18 så følger det av definisjonen til matrisen U i likning (1.2) at $\text{sign } D = \text{sign } U^T N U = \text{sign } N$. Dermed har vi følgende:

Observasjon 1.19. *Dersom D er en reell, diagonal matrise D , så finnes $U \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ slik at $U^T D U = N = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, der $a_i \in \{0, -1, 1\}$ og $\text{sign } D = \text{sign } N$.*

Lemma 1.20. *Anta at vi er gitt en $n \times n$ diagonalmatrise $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Enhver diagonalmatrise D_p som er slik at diagonalelementene består av en permutasjon av $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ vil være kongruent til D .*

Bevis. Det er åpenbart at vi kan realisere enhver permutasjon av et endelig antall elementer $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ved å gjøre det trinnvis, altså ved å bytte ett og ett element om gangen. Videre trenger man bare å gjøre endelig mange slike bytter for å realisere permutasjonen. Det holder dermed å vise at et bytte

av to vilkårlige elementer på diagonalen vil resultere i kongruente matriser.

La $A = \text{diag}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ og la $A_p = \text{diag}(a_1, a_3, a_2, a_4)$ være den samme diagonalmatrisen med unntak av at elementet a_2 er byttet med a_3 . La matrisen $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ være lik identitetsmatrisen med unntak av at den andre kolonnen er byttet med den tredje kolonnen. Vi får at

$$P^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & s \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix}$$

Videre får vi at:

$$(P^T A)P = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix}$$

Dermed følger det at A_p er kongruent med A . Ved en liknende konstruksjon kan vi bytte om to vilkårlige elementer langs diagonalen til en 4×4 -matrise. \square

Lemma 1.21. *Dersom to matriser $A, B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ har samme signatur, så er matrisene kongruente.*

Bevis. Ved lemma 1.16 så vet vi at det finnes $P_A, P_B \in \text{O}_4(\mathbb{R})$ slik at $P_A^T A P_A = D_A$ og $P_B^T B P_B = D_B$, der D_A og D_B er to reelle, diagonale matriser bestående av egenverdiene til matrisene A og B . Det følger at $A \sim D_A$ og $B \sim D_B$. Ved antakelsen i lemmaet har vi at $\text{sign } D_A = \text{sign } D_B$.

Ved observasjon 1.19 så finnes $U_A, U_B \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ som er slik at $U_A^T D_A U = N_A$ og $U_B^T D_B U_B = N_B$. Ved samme observasjon følger det at: $\text{sign } N_A = \text{sign } D_A = \text{sign } D_B = \text{sign } N_B$.

Ettersom matrisene N_A og N_B bare har elementer i mengden $\{0, -1, 1\}$, og $\text{sign } N_A = \text{sign } N_B$ følger det fra lemma 1.20 at $N_A \sim N_B$. Dermed har vi følgende:

$$A \sim D_A \sim N_A \sim N_B \sim D_B \sim B$$

\square

Å vise at to matriser som er kongruente nødvendigvis må ha samme signatur, krever noen flere definisjoner og delresultater.

Rangen til en matrise A , $\text{rk } A$, definerer vi som dimensjonen til vektorrommet

utspent av kolonnene til matrisen A . *Nulliteten* til en matrise A , $\text{null } A$, definerer vi som dimensjonen til nullrommet til A .

Teorem 1.22. *Dersom $A \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$, så holder følgende: $\text{rk } A + \text{null } A = 4$.*

Definisjon 1.23. En matrise $A \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ sies å være *positiv definit* dersom $x^T A x > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$. En matrise $A \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ sies å være *positiv definit på en mengde av vektorer* $U \subset \mathbb{R}^4$ dersom $x^T A x > 0$ for alle $x \in U \setminus \{0\}$.

Definisjon 1.24. La $A \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$. *Kjernen* til A , $\ker A$, definerer vi som $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$. *Bildet* til A , $\text{Im } A$, definerer vi som $\{Ax \in \mathbb{R}^4 \mid x \in \mathbb{R}^4\}$.

Det første lemmaet nedenfor følger direkte fra definisjonen av kjernen og bildet til en matrise $A \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$.

Lemma 1.25. *Dersom $C, D \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ så holder følgende:*

1. $\ker(CD) \supseteq \ker(D)$ og $\ker(CD) = \ker(D)$ hvis C er invertibel.
2. $\text{Im}(CD) \subseteq \text{Im}(C)$ og $\text{Im}(CD) = \text{Im}(C)$ hvis D er invertibel.

Lemma 1.26. *Dersom $A, B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ og $A \sim B$, så vil $\text{rk } A = \text{rk } B$.*

Bevis. Anta at $A = P^T B P$, der $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$. Dette medfører at $P^T \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$.

Fra lemmaet like ovenfor har vi at: $\text{Im}(BP) = \text{Im}(B)$ og at $\ker(P^T(BP)) = \ker(BP)$. Ved teorem 1.22 får vi dermed:

$$\begin{aligned} \text{rk } A &= \text{rk } P^T B P = n - \dim(\ker(P^T B P)) = \\ &= n - \dim(\ker(BP)) = n - \dim(\ker(B)) = \text{rk } B \end{aligned}$$

□

Vi har nå de delresultatene vi trenger for å bevise det som noen steder i litteraturen kalles "Sylvesters lov om fortegn". Vi vil se at dette resultatet impliserer at kongruente matriser har lik signatur.

Teorem 1.27. *La $A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ og $P_1 \in O_n(\mathbb{R})$ være slik at $P_1^T A P_1 = D_1$, der D_1 er en reell, diagonal matrise som består av egenverdiene til matrisen A . La $P_2 \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ være slik at $P_2^T A P_2 = D_2$, der D_2 er en reell, diagonal matrise. Da holder følgende: $\text{sign } A = \text{sign } D_1 = \text{sign } D_2$.*

Bevis. At $\text{sign } A = \text{sign } D_1$ følger fra definisjonen av signaturen til en matrise.

Vi kan anta uten å miste generalitet at for D_1 og D_2 , så vil de positive egenverdiene komme først langs diagonalen, deretter de negative egenverdiene, og til slutt egenverdiene som er lik 0.

Legg merke til at D_1 og D_2 er kongruente, ettersom $D_1 \sim A \sim D_2$. Ved lemma 1.26 vet vi at $\text{rk}(D_1) = \text{rk}(D_2)$. Dette kan vi bruke til å vise at $\text{sign}(D_1) = \text{sign}(D_2)$. Anta at antall egenverdier til D_1 som er positive og negative er henholdsvis k_1 og l_1 , telt med multiplisitet. Anta på samme måte at antall egenverdier til D_2 telt med multiplisitet som er positive og negative, er henholdsvis k_2 og l_2 . Ettersom $\text{rk}(D_1) = \text{rk}(D_2)$, får vi at $k_1 + l_1 = k_2 + l_2$. Dermed holder det å vise at $k_1 \geq k_2$ og $l_1 \geq l_2$.

Merk at siden D_1 er symmetrisk, så er den algebraiske multiplisiteten til enhver egenverdi λ_i lik dimensjonen til det tilhørende egenvektorrommet V_{λ_i} . Dermed følger det at k_1 er lik dimensjonen til egenvektorrommet spent ut av de positive egenverdiene til D_1 , i.e. $k_1 = \dim(V_{\lambda^+}) = \dim(\{\oplus V_{\lambda_i} \mid \lambda_i > 0\})$.

Ettersom $D_1 \sim D_2$ så finnes det $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ slik at $P^T D_2 P = D_1$. Definer nå følgende vektorrom av dimensjon k_2 :

$$V_{k_2}^+ = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid Pv = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{k_2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mid b_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Observer at for $v \in V_{k_2}^+$ så vil $(Pv)^T D_2 (Pv) = b_1^2 \lambda_1 + \dots + b_{k_2}^2 \lambda_{k_2} > 0$. Ettersom $(Pv)^T D_2 (Pv) = v^T D_1 v$, så følger det at D_1 er positivt definit på $V_{k_2}^+$, som altså er et vektorrom av dimensjon k_2 .

La $U^+ = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v^T D_1 v > 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ være mengden av vektorer der D_1 er positivt definit, og observer at U^+ er et vektorrom. Det følger at $V_{\lambda^+} \subseteq U^+$ og $V_{k_2}^+ \subseteq U^+$. Det holder nå å vise at V_{λ^+} er det maksimale vektorrommet inneholdt i U^+ , i.e. at dersom $V \subset U^+$ er et vektorrom, så vil $V \subset V_{\lambda^+}$.

Ettersom D_1 er symmetrisk vet vi at $V_{\lambda^+} \oplus V_{\lambda^-} = \mathbb{R}^n$, der V_{λ^-} er egenvektorrommet tilhørende egenverdiene til D_1 som ikke er positive. Anta nå for å få en selvmotsigelse at det finnes en $v \in U^+$ slik at $v \notin V_{\lambda^+}$. Dette medfører at $V_{\lambda^-} \cap U^+ \neq \emptyset$, og dette er en selvmotsigelse. Dermed må altså vektorrommet $V_{k_2}^+$ av dimensjon k_2 være inneholdt i vektorrommet V_{λ^+} av dimensjon k_1 . Dette impliserer at $k_1 \geq k_2$.

Ved tilsvarende argumentasjon får vi at $l_1 \geq l_2$. □

Korollar 1.28. *To matriser $A, B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ er kongruente hvis og bare hvis matrisene har den samme signaturen.*

Bevis. Vi har allerede vist at dersom $\text{sign } A = \text{sign } B$, så vil matrisene være kongruente.

Anta at $P^T A P = B$, der $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$. La $U \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ være en matrise som diagonaliserer B . I.e $U^T B U = D$. Observer at $D = U^T B U = U^T (P^T A P) U = (P U)^T A (P U)$, der $\{P, U, P U\} \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$. Ved teorem 1.27 følger det at $\text{sign } A = \text{sign } B$. □

Signaturen til en reell symmetrisk 4×4 -matrise vil være et av følgende tupler:

rang 4	rang 3	rang 2	rang 1
(4,0)	(3,0)	(2,0)	(1,0)
(3,1)	(2,1)	(1,1)	(0,1)
(2,2)	(1,2)	(0,2)	
(1,3)	(0,3)		
(0,4)			

Ettersom to matriser $A, B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ er kongruente hvis og bare hvis de har samme signatur, så gir tabellen en klassifisering av $\text{Sym}_4(\mathbb{R})$ opp til kongruens.

Tidligere har vi vist at $Q_A = Q_{kA}$, der $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Merk at dersom $\text{sign } A = (n_1, n_2)$ så vil $\text{sign } kA = \text{sign } A$ for $k > 0$ og $\text{sign } -A = \text{sign } kA$ for $k < 0$. Dessuten har vi at $\text{sign } A = (n_1, n_2)$ hvis og bare hvis $\text{sign } -A = (n_2, n_1)$, der $n_i \in \mathbb{N}$. Signaturen til de ulike matrisene $kA \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ som kan brukes til å definere en og samme kvadrikk, vil altså være den samme opp til en slik "ombytting". Dette betyr at enhver kvadrikk kan defineres av en matrise i $\text{Sym}_4(\mathbb{R})$ med signatur av typen med uthevet skrift i tabellen ovenfor. Dersom for eksempel kvadrikk Q kan defineres av en matrise A som er slik at $\text{sign } \pm A = (4, 0)/(0, 4)$ så sier vi at *signaturen til kvadrikken*, $\text{sign } Q$, er lik $(4, 0)$. *Rangen til kvadrikken* Q , $\text{rk } Q$, definerer vi som rangen til en vilkårlig matrise kA som kan brukes til å definere kvadrikken Q . *Nulliteten til en kvadrikk*, $\text{null } Q$, definerer vi som nulliteten til en vilkårlig matrise som kan brukes til å definere kvadrikken.

En kvadrikk Q er per definisjon ekvivalent med alle kvadrikker på formen PQ , der $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$. Anta nå at $Q = Q_A$, der $A \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$. Fra likning (1.1) har vi at: $PQ_A = Q_{(P^{-1})^T A P^{-1}}$. Ettersom A er kongruent med

$(P^{-1})^T A P^{-1}$ så følger det at $\text{sign } A = \text{sign}(P^{-1})^T A P^{-1}$. Dermed følger det at dersom P og PQ er to ekvivalente kvadrikker så vil $\text{sign } Q = \text{sign } PQ$.

Dersom Q for eksempel er kvadrikk slik at $\text{sign } Q = (3, 1)$ så betyr det at vi kan finne en $A \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ slik at $\text{sign } A = (3, 1)$ og $Q = Q_A$. Ved teorem 1.27 og lemma 1.20 følger det at Q er ekvivalent med en kvadrikk på normalformen $V(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)$. En similær argumentasjon gir at enhver kvadrikk vil være ekvivalent med en av følgende kvadrikker på normalform:

rang	signatur	normalform	nullpunktsmengde
4	(4,0)	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	\emptyset
	(3,1)	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	kule
	(2,2)	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$	sammenhengende hyperboloide
3	(3,0)	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$	(0,0,0,1)
	(2,1)	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$	kjegleflate
2	(2,0)	$x_0^2 + x_1^2$	en linje
	(1,1)	$x_0^2 - x_1^2$	to plan
1	(1,0)	x_0^2	et dobbeltplan

Kapittel 2

Pensler av kvadriker

I dette kapittelet studerer vi pensler av kvadriker og deres tilhørende signaturmønstre. Vi gjør også rede for hvilke pensler av kvadriker vi vil definere som ekvivalente. I slutten av kapittelet konstruerer vi kurven vi har valgt å kalle "en pensels diskriminant". Denne kurven gir et geometrisk bilde av signaturmønsteret til en pensel av kvadriker, som vil bli nyttig i den senere klassifikasjonen.

2.1 Pensler av kvadriker

Definisjon 2.1. Anta at vi er gitt to ulike kvadratiske former $q_A, q_B \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_3]$. En pensel av kvadriker (q_A, q_B) er en familie av kvadriker definert ved en familie av kvadratiske former på følgende form: $\{sq_A(x) + tq_B(x) \mid (s, t) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1\}$.

Ettersom punktene $(s, t) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ egentlig er ekvivalensklasser, følger det at familien av kvadratiske former som definerer en pensel av kvadriker, også deles opp i ekvivalensklasser. Hvis for eksempel $(s_0, t_0) = k(s_0, t_0)$, der $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, er to representasjoner for det samme punktet i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, følger at de kvadratiske formene $(s_0q_A + t_0q_B)$ og $(ks_0q_A + kt_0q_B) = (k(s_0q_A + t_0q_B))$ også er i samme ekvivalensklasse. Dette gir mening ettersom $(k(s_0q_A + t_0q_B))$, definerer samme kvadrikk for alle valg av $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. I en pensel (q_A, q_B) vil altså ethvert punkt $(s_0, t_0) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ definere en kvadrikk $V(s_0q_A + t_0q_B) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$.

Mengden av alle kvadratiske former i fire variabler danner et todimensjonalt vektorrom $V_{10} = \{a_1x_0^2 + a_2x_0x_1 + a_3x_0x_2 + a_4x_0x_3 + \dots + a_{10}x_3^2 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$. En kvadrikk Q genereres av et endimensjonalt underrom av dette vektorrommet. Et todimensjonalt underrom av V_{10} vil genereres av to kvadratiske former som ikke er like opp til en multiplikasjon med en konstant. Dermed har vi følgende:

Proposisjon 2.2. En pensel av kvadriker (q_A, q_B) genereres av et todimensjonalt underrom av V_{10} .

Anta at (q_A, q_B) er en pensel av kvadriker. Dersom $q_C = s_0q_A + t_0q_B$ og $q_D = s_1q_A + t_1q_B$ er to vilkårlige ulike lineære kombinasjoner av de kvadratiske formene q_A og q_B , så følger det fra proposisjon 2.2 at $(q_A, q_B) = (q_C, q_D)$.

Tidligere viste vi at det finnes en en-til-en-korrespondanse mellom kvadratiske former og reelle symmetriske matriser. Dersom (q_A, q_B) er en pensel av kvadriker og $A, B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ er de unike matrisene som er slik at $q_A(x) = x^T A x$ og $q_B(x) = x^T B x$, så følger det at: $\{sq_A(x) + tq_B(x) \mid (s, t) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1\} = \{s(x^T A x) + t(x^T B x) \mid (s, t) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1\} = \{x^T (sA + tB)x \mid (s, t) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1\}$. Legg merke til at den symmetriske matrisen $sA + tB \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ definerer penselen av kvadriker (q_A, q_B) . Det vil i denne oppgaven være hensiktsmessig å jobbe med matriserepresentasjonen for en pensel av kvadriker. I stedet for notasjonen (q_A, q_B) kommer vi herfra derfor til å bruke følgende notasjon for en pensel av kvadriker: $(A, B) = \{Q_{sA+tB} \mid (s, t) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1\} = \{V(x^T (sA + tB)x) \mid (s, t) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1\}$.

2.2 Signaturendringer i en pensel av kvadriker

I denne seksjonen vil vi se nærmere på hvordan rangen og signaturen til kvadrikkene Q_{sA+tB} i en pensel av kvadriker (A, B) endrer seg over $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. La oss først fokusere på hvordan rangen til Q_{sA+tB} endrer seg over $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Vi vet at $\text{rk } Q = \text{rk } A$, der $A \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ er en vilkårlig matrise som er slik at $Q = Q_A$. Dermed følger det at

$$\det sA + tB = 0 \Leftrightarrow \text{rk } sA + tB < 4 \Leftrightarrow \text{rk } Q_{sA+tB} < 4$$

Ettersom $\det sA + tB$ er et reelt homogent fjerdegradspolynom, så er følgende lemma av interesse:

Lemma 2.3. *Et reelt, homogent n -te gradsgradspolynom i to variabler $f(s, t) \in \mathbb{R}[s, t]$ vil ha n røtter i $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.*

Bevis. Vi kan alltid gjøre et variabelskifte, slik at alle røttene tilhørende $f(s, t)$ er på formen $(s, 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Dermed følger resultatet fra algebraens fundamentalsetning. \square

Definisjon 2.4. La (A, B) være en pensel av kvadriker. Det homogene fjerdegradspolynomet $\det sA + tB \in \mathbb{R}[s, t]$ kaller vi *determinanten til penselen* (A, B) .

Lemma 2.5. *Dersom en pensel (A, B) inneholder en kvadrikk av rang 4, så vil penselen inneholde uendelig mange kvadriker av rang 4. Penselens determinant $\det sA + tB$ vil ha fire røtter $(s_i, t_i) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ telt med multiplisitet. Bare i disse punktene (s_i, t_i) vil $0 < \text{rk } Q_{s_i A + t_i B} < 4$.*

Bevis. Observer at

$$\det sA + tB = \det \begin{pmatrix} sa_{00} + tb_{00} & sa_{01} + tb_{01} & sa_{02} + tb_{02} & sa_{03} + tb_{03} \\ sa_{01} + tb_{01} & sa_{11} + tb_{11} & sa_{12} + tb_{12} & sa_{13} + tb_{13} \\ sa_{02} + tb_{02} & sa_{12} + tb_{12} & sa_{22} + tb_{22} & sa_{23} + tb_{23} \\ sa_{03} + tb_{03} & sa_{13} + tb_{13} & sa_{23} + tb_{23} & sa_{33} + tb_{33} \end{pmatrix}$$

er et reelt homogent fjerdegradspolynom. Enten vil polynomet være konstant lik 0, eller så vil polynomet ved lemma 2.3 ha fire røtter $(s_i, t_i) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, telt med multiplisitet. Ettersom vi antar at penselen inneholder en kvadrikk av rang fire, så vil $\det sA + tB$ ikke være konstant lik null.

At $\text{rk } Q_{sA+tB} < 4$ bare i røttene (s_i, t_i) tilhørende $\det sA + tB$ følger av at:

$$\det sA + tB = 0 \Leftrightarrow \text{rk } sA + tB < 4 \Leftrightarrow \text{rk } Q_{sA+tB} < 4.$$

At $\text{rk } sA + tB > 0$ følger av at en pensel er definert ved to ulike kvadratiske former. \square

Merknad 2.6. Som nevnt i innledningen antar vi at alle penslene av kvadrikker i denne oppgaven inneholder kvadrikker av rang fire. Resultatet fra lemma 2.5 vil derfor være gjeldene for alle pensler vi ser på i denne oppgaven.

Når vi beveger oss langs $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ så vil altså alle punkter i en pensel (A, B) definere kvadrikker av rang fire, med unntak av de punktene $(s_i, t_i) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ som er røtter tilhørende $\det sA + tB$. La oss nå undersøke hvordan signaturen til kvadrikkene i en pensel endrer seg over $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$.

Signaturen til en kvadrikk $Q_{sA+tB} \in (A, B)$ er bestemt av signaturen til matrisen $sA + tB$. Signaturen til matrisen $sA + tB$ bestemmes av fortegnene til egenverdiene tilhørende matrisen. La oss derfor undersøke hvordan egenverdiene til $sA + tB$ endrer seg over $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$.

Egenverdiene $\lambda_i \in \mathbb{R}$ til en matrise $sA + tB \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ er røttene til matrisens karakteristiske polynom:

$$\begin{aligned} & \det(\lambda I - (sA + tB)) = \\ & \det \begin{pmatrix} \lambda - (sa_{00} + tb_{00}) & sa_{01} + tb_{01} & sa_{02} + tb_{02} & sa_{03} + tb_{03} \\ sa_{01} + tb_{01} & \lambda - (sa_{11} + tb_{11}) & sa_{12} + tb_{12} & sa_{13} + tb_{13} \\ sa_{02} + tb_{02} & sa_{12} + tb_{12} & \lambda - (sa_{22} + tb_{22}) & sa_{23} + tb_{23} \\ sa_{03} + tb_{03} & sa_{13} + tb_{13} & sa_{23} + tb_{23} & \lambda - (sa_{33} + tb_{33}) \end{pmatrix} \\ & = \lambda^4 + \lambda^3 r_1(s, t) + \lambda^2 r_2(s, t) + \lambda r_3(s, t) + r_4(s, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

der $r_i(s, t)$ er homogene polynom av grad i . Vi kan se på polynomet som et fjerdegradspolynom i λ .

Røttene til ett reelt fjerdegradspolynom er kontinuerlig avhengig av koeffisientene til polynomet [NP94]. Koeffisientene til fjerdegradspolynomet er i vårt tilfelle kontinuerlige funksjoner $r_i(s, t) \in \mathbb{R}[s, t]$. Røttene $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tilhørende $\det(\lambda I - (sA + tB))$ er dermed kontinuerlig avhengig av $(s, t) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$.

De fire egenverdiene λ_i til matrisen $sA + tB$ er altså kontinuerlig avhengig av $(s, t) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. En egenverdi $\lambda_i \in \mathbb{R}$ kan dermed ikke hoppe fra å være positiv til bli negativ når vi lar parametrene (s, t) endre seg kontinuerlig langs $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Dette betyr at signaturen til $sA + tB$, og dermed også signaturen til kvadrikkene $Q_{sA+tB} \in (A, B)$, bare endres i de punktene $(s_i, t_i) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ som er slik at minst en egenverdi tilhørende matrisen $(s_i A + t_i B)$ er lik 0.

Fra lemma 2.5 vet vi at det finnes fire punkt $(s_i, t_i) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, telt med multiplisitet, hvor $\text{null } sA + tB > 0$. Det følger at signaturen til matrisen $sA + tB$ og kvadrikkene Q_{sA+tB} , kun kan endres i disse punktene. Merk at dersom noen av røttene befinner seg i $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, og ikke i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, så gir det ikke mening å snakke om en signaturendring i disse punktene.

Ettersom $\det sA + tB$ er et homogent fjerdegradspolynom med reelle koeffisienter, så vil komplekse røtter forekomme i komplekskonjugerte par. Dermed vil $\det M(s, t)$ ha 0, 2 eller 4 røtter i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, telt med multiplisitet. La oss oppsummere noen av disse observasjonene i et lemma:

Lemma 2.7. *Anta at vi er gitt en pensel av kvadrikker (A, B) . De reelle egenverdiene til matrisen $sA + tB \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ endrer seg kontinuerlig over $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Signaturen til matrisen $sA + tB$ og signaturen til kvadrikkene Q_{sA+tB} i penselen, endres kun i de reelle røttene $(s_i, t_i) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ tilhørende penselens determinant $\det sA + tB$. Telt med multiplisitet finnes det 0, 2 eller 4 slike punkt $(s_i, t_i) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$.*

Legg merke til at dette lemmaet begrenser mulighetene for hvordan signaturen til kvadrikkene Q_{sA+tB} i en pensel (A, B) kan endre seg over $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Signaturen til Q_{sA+tB} kan for eksempel ikke endres direkte fra $(2, 2)$ til $(1, 3)$ når vi beveger oss langs den projektive reelle linjen. Dette ville implisere at en av de omtalte egenverdiene tilhørende $sA + tB$ ikke endret seg kontinuerlig. Av samme grunn kan heller ikke signaturen for eksempel endre seg direkte fra $(4, 0)$ til $(2, 1)$.

2.3 Signaturmønsteret til en pensel av kvadrikker

La $(A, B) = \{Q_{sA+tB} \mid (s, t) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1\}$ være en pensel av kvadrikker. Vi vet nå at det finnes 0, 2 eller 4 punkt $(s_i, t_i) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ telt med multiplisitet hvor signaturen til kvadrikkene i penselen endres. Videre vet vi at disse punktene

er de eneste punktene i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ som definerer kvadriker av rang mindre enn fire. Disse punktene vil dermed dele opp $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ i segmenter som definerer kvadriker av rang fire og hvor signaturen er konstant. La oss se et eksempel på dette.

Eksempel 2.8. La (A, B) være en pensel kvadriker definert ved følgende matrise $sA + tB$:

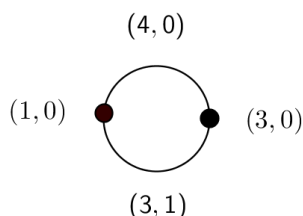
$$\begin{pmatrix} s+t & & & \\ & s & & \\ & & s & \\ & & & s \end{pmatrix}$$

Etttersom $\det sA + tB = (s+t)s^3$, så følger det at signaturen til kvadrikkene i (A, B) endres i punktene $(0, 1)$ og $(-1, 1)$.

Signaturen til matrisen $\pm(sA + tB)$ bestemmer signaturen til kvadrikkene Q_{sA+tB} i penselen (A, B) . Observer at $\text{sign } Q_B = (1, 0)$, $\text{sign } Q_{-A+B} = (1, 0)$, $\text{sign } Q_A = (4, 0)$ og $\text{sign } Q_{-A+2B} = (3, 1)$.

Figur 2.1 gir et bilde av situasjonen.

Figur 2.1



Sirkelen symboliserer $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. De to punktene på sirkelen symboliserer røttene til penselens determinant, altså punktene $(0, 1)$ og $(-1, 1)$. Vi ser at disse punktene er de eneste punktene hvor signaturen endres, og at disse punktene deler opp $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ i to segmenter bestående av punkter som definerer kvadriker av rang fire. ■

Dersom vi starter en vilkårlig plass på sirkelen ovenfor og går en runde rundt, så vil de ulike signaturene forekomme i en bestemt rekkefølge. Denne rekkefølgen er nært knyttet til det vi senere vil definere som signaturmønsteret til en pensel av kvadriker.

Definisjon 2.9. La $A, B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ være to symmetriske matriser. En familie av matriser på formen $[sA + B] = \{sA + B \mid s \in \mathbb{R} \mid \text{rk } A = 4\}$ definerer vi som en *affin pensel av matriser*.

Når vi lar $s \in (-\infty, \infty)$, så vil matrisene i den affine penselen $[sA + B]$ som har samme signatur forekomme i en bestemt rekkefølge. *Signaturmønsteret til en affin penselen av matriser*, $\overline{\text{sign}}[sA + B]$, definerer vi som denne rekkefølgen. Kravet om at rangen til matrisen A skal være fire, sikrer at $\det sA + B$ alltid har fire komplekse røtter, telt med multiplisitet. La oss se et eksempel på en affin pensel av matriser og dens signaturmønster:

Eksempel 2.10. La $[sA + B]$ være en affin pensel av matriser, definert ved følgende matrise:

$$sA + B = \begin{pmatrix} s+1 & & & \\ & s & & \\ & & s & \\ & & & s \end{pmatrix}$$

Signurmønsteret til $[sA + B]$ er gitt ved tabellen nedenfor. Etersom $sA + B$ er en diagonal matrise, ser vi at egenverdiene blir lineære funksjoner i s . Vi ser fra tabellen at $\overline{\text{sign}}[sA + B] = (0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 0)(4, 0)$.

Tabell 2.1

s		-1		0	
s + 1	-	0	+	+	+
s	-	-	-	0	+
s	-	-	-	0	+
s	-	-	-	0	+
sign	(0,4)	(0,3)	(1,3)	(1,0)	(4,0)

■

De to foregående eksemplene viser en pensel av kvadriker (A, B) og en affin pensel av matriser $[sA + B]$, definert ved de samme matrisene $A, B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$. Ved misbruk av notasjon skriver vi $S \in (A, B)$, der $S \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$, dersom det finnes $(s, t) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ slik at $S = sA + tB$.

Ved proposisjon 2.2 følger det at dersom (A, B) er en pensel av kvadriker, $C = s_0A + t_0B$ og $D = s_1A + t_1B$, så vil $(A, B) = (C, D)$. Etersom $\{-A, -B, (A - 2B)\} \in (A, B)$ følger det at $(A, B) = (-A, -B) = (-A, B) = ((A - 2B), B)$. La oss sammenlikne signaturmønsteret til de affine penslene av matriser definert ved disse parene av matriser.

Dersom vi lar matrisene A og B være som i de to foregående eksemplene, så vil signaturmønstrene til matrisepenslene $[-sA - B]$, $[-sA + B]$, og $[s(A - 2B) + B]$ være gitt ved henholdsvis følgende tre tabeller:

Tabell 2.2: $[-sA - B]$

s		-1		0	
$-s - 1$	+	0	-	-	-
$-s$	+	+	+	0	-
$-s$	+	+	+	0	-
$-s$	+	+	+	0	-
sign		(4,0)	(3,0)	(3,1)	(0,1) (0,4)

Tabell 2.3: $[-sA + B]$

s		0		1	
$-s + 1$	+	+	+	0	-
$-s$	+	0	-	-	-
$-s$	+	0	-	-	-
$-s$	+	0	-	-	-
sign		(4,0)	(1,0)	(1,3)	(0,3) (0,4)

Tabell 2.4: $[s(A - 2B) + B]$

s		0		1	
$-s + 1$	+	+	+	0	-
s	-	0	+	+	+
s	-	0	+	+	+
s	-	0	+	+	+
sign		(1,3)	(1,0)	(4,0)	(3,0) (3,1)

Oppsummert har vi da funnet følgende signaturmønstre:

1. $\overline{\text{sign}}[sA + B] = (0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 0)(4, 0)$
2. $\overline{\text{sign}}[-(sA + B)] = (4, 0)(3, 0)(3, 1)(0, 1)(0, 4)$
3. $\overline{\text{sign}}[-sA + B] = (4, 0)(1, 0)(1, 3)(0, 3)(0, 4)$
4. $\overline{\text{sign}}[s(A - 2B) + B] = (1, 3)(1, 0)(4, 0)(3, 0)(3, 1)$

Alle disse signaturmønstrene er konstruert av matriser $A', B' \in (A, B)$, der (A, B) er penselen av kvadriker fra eksempel 2.8.

Definisjon 2.11. La (A, B) være en pensel av kvadriker. *Signaturmønstret* til (A, B) definerer vi som $\overline{\text{sign}}(A, B) = \{\overline{\text{sign}}[sA' + B'] \mid A', B' \in (A, B) \mid \text{rk } A' = 4\}$.

Signaturmønsteret til en pensel av kvadriker er altså en mengde av signaturmønster til affine pensler av kvadriker. La oss nå se hvorfor en av disse representantene er tilstrekkelig til å beskrive signaturmønsteret til en pensel av kvadriker.

Generelt har vi at $\text{sign } A = (n_1, n_2)$ hvis og bare hvis $\text{sign } -A = (n_2, n_1)$. Dersom vi sammenlikner de to første affine signaturmønstrene, $\overline{\text{sign}}[sA + B]$ og $\overline{\text{sign}}[-(sA+B)]$, ser vi at tallparene på denne måten har blitt "byttet om".

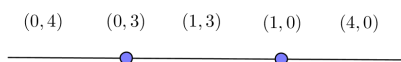
Dersom vi leser det første signaturmønsteret $\overline{\text{sign}}[sA + B]$ fra høyre mot venstre ser vi at vi får det tredje signaturmønsteret $\overline{\text{sign}}[-sA + B]$.

Dersom vi leser det første signaturmønsteret $\overline{\text{sign}}[sA + B]$ fra (1, 3), og leser fra venstre mot høyre, ser vi at vi får det fjerde signaturmønsteret $\overline{\text{sign}}[s(A - 2B) + B]$.

Poenget er at dersom vi kjenner $\overline{\text{sign}}[sA' + B']$, der $A', B' \in (A, B)$ så kjenner vi egentlig hele mengden $\overline{\text{sign}}(A, B)$. Observasjonene ovenfor kan generaliseres. Vi kan "bytte om" alle tallparene samtidig, vi kan lese i hvilken retning vi ønsker, og vi kan starte avlesningen hvor som helst. En representasjon for et signaturmønster gir oss altså tilstrekkelig informasjon til å kjenne hele mengden av representasjoner. Vi vil herfra derfor omtale en vilkårlig slik representant som *signaturmønsteret* (i bestemt form) til en pensel av kvadriker.

Analogien til sirkelen i figur 2.1 ovenfor, er at vi kan velge et vilkårlig punkt på sirkelen som punktet i det uendelig fjerne, og deretter lese av signaturmønsteret i valgfri retning. Legg merke til at punktet i det uendelig fjerne må definere en kvadrikk av rang fire. Dersom vi for eksempel velger punktet i det uendelig fjerne i segmentet på sirkelen som definerer kvadriker med signatur (4, 0), kan vi tenke oss at vi klipper opp sirkelen i dette punktet, og står igjen med en linje som definerer en affin pensel av matriser. Vi kan for eksempel lese av signaturmønsteret i retning mot klokken og se for oss at vi "bytter om" alle tallparene, slik at vi er situasjonen som er illusert i figur 2.2 nedenfor.

Figur 2.2



Legg for øvrig merke til at dersom $[sA' + B']$ er en affin pensel av matriser, så vil signaturen til matrisen A' bestemme signaturen til penselen når s

går mot grensene $\pm\infty$, ettersom signaturen til matrisen A' vil dominere i grensene.

2.4 Ekvivalente pensler av kvadriker

Det er naturlig å identifisere pensler av kvadriker i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ dersom det finnes en bijeksjon mellom dem induisert av en lineær automorfi av \mathbb{R}^4 . Følgende definisjon sørger for dette:

Definisjon 2.12. To pensler av kvadriker \mathcal{P}_1 og \mathcal{P}_2 er *ekvivalente* dersom det finnes en $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ slik at for alle $Q \in \mathcal{P}_1$ så vil $PQ \in \mathcal{P}_2$.

Ekvivalente pensler av kvadriker vil ha det samme signaturmønsteret. At to pensler har samme signaturmønster medfører imidlertid ikke at penslene nødvendigvis er ekvivalente, noe vi skal se eksempler senere i oppgave.

Lemma 2.13. La $\{A, B, A', B'\} \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$. Penselene definert ved (A, B) og (A', B') er ekvivalente hvis og bare hvis det eksisterer $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ slik at $(P^T AP, P^T BP) = (A', B')$.

Bevis. Fra likning (1.1) har vi at $UQ = Q_{(U^{-1})^T AU^{-1}}$, der $U \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$. Dersom vi lar $U = P^{-1} \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ får vi $P^{-1}Q = Q_{P^T AP}$.

Anta først at penslene er ekvivalente. Legg merke til at alle kvadriker i penselen (A, B) kan skrives som Q_{sA+tB} . At penslene er ekvivalente medfører at det vil eksisterer en $P^{-1} \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ slik at

$$P^{-1}Q_{sA+tB} = Q_{P^T(sA+tB)P} \in (A', B') \quad \forall (s, t) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1. \quad (2.2)$$

Spesielt har vi at $P^{-1}Q_A = Q_{P^T AP} \in (A', B')$ og $P^{-1}Q_B = Q_{P^T BP} \in (A', B')$. Ettersom en pensel ved proposisjon 2.2 kan uttrykkes ved to vilkårlige matriser inneholdt i penselen får vi at $(A', B') = (P^T AP, P^T BP)$.

Anta nå at det eksisterer en $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ slik at $(A', B') = (P^T AP, P^T BP)$. Enhver kvadrikk i (A, B) og $(P^T AP, P^T BP)$ kan skrives som henholdsvis Q_{sA+tB} og $Q_{P^T(sA+tB)P}$. Dermed viser likning (2.2) at det finnes en $P^{-1} \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ slik for alle $Q \in (A, B)$, så vil $P^{-1}Q \in (P^T AP, P^T BP) = (A', B')$. \square

2.5 Regulære og irregulære røtter

La (A, B) være en pensel av kvadriker definert av matrisen $sA+tB$. Vi vet at det $sA+tB$ har fire røtter $(s_i, t_i) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ telt med multiplisitet. La (s_0, t_0) være en av disse røttene. Vi har åpenbart at

$$\det s_0A + t_0B = 0 \Leftrightarrow \text{rk } s_0A + t_0B < 4 \Leftrightarrow \text{null } s_0A + t_0B > 0. \quad (2.3)$$

Merk at rangen til $s_0A + t_0B$ må være større enn 0 for alle punkt $(s_0, t_0) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. For dersom rangen var 0, så ville ikke $sA + tB$ definert en pensel av kvadriker. Anta nå at (s_0, t_0) er en rot tilhørende $\det sA + tB$ av multiplisitet k_1 og at $\text{null } M(s_0, t_0) = k_2$. Likning 2.3 viser at $k_1 > 0$ hvis og bare hvis $k_2 > 0$. Det er nærliggende å spørre om vi kan si noe mer om relasjonen mellom k_1 og k_2 .

Det viser seg at for enhver pensel av kvadriker så vil $k_1 \geq k_2$. For å utlede dette resultatet trenger vi følgende lemma:

Lemma 2.14. *Dersom A og A' er to $n \times n$ -matriser som er identiske med unntak av at en rad eller en kolumne i A er multiplisert med $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, så er $\det A = k \det A'$.*

Bevis. La A' være en $n \times n$ -matrise, og la A være en identisk matrise med unntak av at første rad er multiplisert med $k \neq 0$. Vi har at

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n0} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \\ &= a_{00} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + a_{0n} \begin{vmatrix} a_{10} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= k \left(\frac{a_{00}}{k} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \frac{a_{0n}}{k} \begin{vmatrix} a_{10} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \right) = k \det A'. \end{aligned}$$

Argumentasjonen blir den samme uavhengig av hvilken rad eller kolonne vi multipliserer med k . \square

Lemma 2.15. *La (A, B) være en pensel av kvadriker slik at punktet (s_0, t_0) er en rot av multiplisitet k_1 tilhørende $\det sA + tB$. Dersom $\text{null } s_0A + t_0B = k_2 \geq 0$, så vil $k_1 \geq k_2$.*

Bevis. For å forenkle notasjonen kan vi gjøre et variabelskifte slik at (s_0, t_0) blir punktet $(0, 1)$.

Fra antakelsen i lemmaet får vi dat at $\det sA + B = s^{k_1}r(s)$, der $r(0) \neq 0$, og $\text{null } 0A + 1B = \text{null } B = k_2$

Vi ønsker å vise at $k_1 \geq k_2$ for $k_2 \geq 0$. Dersom $k_2 = 0$ eller $k_2 = 1$, følger av likning (2.3) at $k_1 \geq k_2$. Argumentasjonen for tilfellet $k_2 = 2$ er generisk for tilfellet $k_2 = 3$. Vi kommer derfor kun til å se på tilfellet $k_2 = 2$.

Anta at $k_2 = 2 = \text{null } B$. Dette medfører at matrisen B har to egenverdier λ_1 og λ_2 som er ulik null, og to egenverdier λ_3 og λ_4 som er lik null. Siden $B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ vet vi lemma 1.16 at det finnes $P \in O_4(\mathbb{R})$ slik at $P^T B P = D$, der D er en reell, diagonal matrise bestående av egenverdiene til matrisen B .

Dermed får vi at $\det(sA + B) = \det P^T (sA + B) P = \det(sA' + D)$, der $A' = P^T A P \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$. Observer nå at

$$\det sA + B = \begin{vmatrix} sa_{00} + \lambda_1 & sa_{01} & sa_{02} & sa_{03} \\ sa_{01} & sa_{11} + \lambda_2 & sa_{12} & sa_{13} \\ sa_{02} & sa_{12} & sa_{22} & sa_{23} \\ sa_{03} & sa_{13} & sa_{23} & sa_{33} \end{vmatrix}$$

Fra lemma 2.14 får vi dermed at

$$\det sA + B = s^2 \begin{vmatrix} sa_{00} + \lambda_1 & sa_{01} & sa_{02} & sa_{03} \\ sa_{01} & sa_{11} + \lambda_2 & sa_{12} & sa_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = s^2 r(s)$$

Dersom vi skriver ut $r(s)$ får vi et andregradspolynom i s . Det kan skje at null er en rot til dette polynomet, av multiplisitet en eller to. Dermed ser vi at null er en rot tilhørende $\det sA + B = s^2 r(s)$ av multiplisitet $k_1 \geq 2$. \square

Det vil bli nyttig å kunne beskrive de røttene tilhørende en pensels determinant som er slik at de omtalte multiplisitetene k_1 og k_2 er like. Følgende definisjon sørger for dette:

Definisjon 2.16. En rot $(s_0, t_0) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ av multiplisitet k tilhørende en pensels determinant $\det sA + tB$ er en *regulær rot* dersom $k = \text{null } s_0 A + t_0 B$.

Dersom en rot ikke er regulære, sier vi at den er *irregulær*. Vi kommer senere til å vise at en pensel (A, B) er diagonal, i.e. er ekvivalent med en pensel på formen (D_1, D_2) , der D_1 og D_2 er reelle, diagonale matriser hvis og bare hvis alle røttene til determinanten til penselen (A, B) er regulære. Dette betyr at enhver ikke-diagonal pensel vil inneholde en rot som ikke er regulær. I slutten av neste seksjon gir vi en geometrisk beskrivelse av hva som karakteriserer regulære og irregulære røtter.

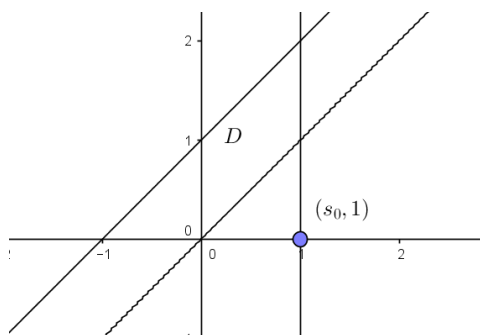
2.6 En pensels diskriminant

La (A, B) være en pensel av kvadriker definert ved følgende matrise

$$sA + tB = \begin{pmatrix} s+t & & & \\ & s & & \\ & & s & \\ & & & s \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Vi har tidligere vist at $\text{sign}[sA + B] = (0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 0)(4, 0)$. Figur 2.3 nedenfor viser en kurve i $s\lambda$ -planet, definert av polynomet $\det \lambda I - (sA + B) = (\lambda - (s - 1))(\lambda - s)^3 = 0$. Kurven viser med andre ord hvordan egenverdiene til $[sA + B]$ endrer seg for $s \in (-\infty, \infty)$.

Figur 2.3



Legg merke til at for ethvert punkt $(s_0, 1)$, så vil matrisen $(s_0A + B) \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ har fire egenverdier $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Dette er grunnen til at en vertikal linje gjennom et vilkårlig punkt $(s_0, 1)$ snitter grafen fire ganger, telt med multiplisitet. Vi vil gi en definisjon av snittmultiplisitet senere i seksjonen. Signaturen til matrisen $s_0A + B$ ser vi ut ifra hvor mange ganger den vertikale linjen $s = s_0$ krysser diskriminanten D over og under s -aksen. Fra figuren kan vi dermed observere at $\text{sign}[sA + B] = (0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 0)(4, 0)$, i.e. at signatormønsteret til penselen av kvadriker (A, B) er $(0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 0)(4, 0)$.

For enhver pensel av kvadriker (A, B) kan vi konstruere en tilsvarende kurve D , som vil gi oss et geometrisk bilde av hvordan signatormønsteret til penselen ser ut. Dette motiverer følgende definisjoner:

Definisjon 2.17. Anta vi er gitt en pensel av kvadriker (A, B) . Penselens tilhørende det homogene fjerdegradspolynom $f(\lambda, s, t) = \det(\lambda I - (sA + tB))$, kaller vi *penselens karakteristiske polynom*.

Definisjon 2.18. Anta vi er gitt en pensel (A, B) med tilhørende karakteristiske polynom $f(\lambda, s, t)$. *Diskriminanten* til penselen definerer vi som $V(f(\lambda, s, t)) = \{(\lambda, s, t) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid f(\lambda, s, t) = 0\}$.

Merknad 2.19. Ved proposisjon 2.2 vet vi at dersom $\{A', B'\} \in (A, B)$, så vil $(A, B) = (A', B')$. Kurvene definert ved $\det(\lambda I - (sA + tB)) = 0$ og $\det \lambda I - (sA' + tB') = 0$ vil være projektivt ekvivalente.

Før vi ser nærmere på hva diskriminanten til en pensel kan fortelle oss om en penselens signaturmønster, er det hensiktsmessig å innføre litt notasjon.

La (A, B) være en pensel av kvadriker med tilhørende diskriminant $D \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, definert ved $V(f(\lambda, s, t))$. For ethvert punkt $P = (\lambda, s, t) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ lar vi i det følgende: $Q_P = Q_{(\lambda, s, t)} = V(x^T(\lambda I - (sA + tB))x) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. Ethver punkt $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ definerer altså en kvadrikk $Q_P \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. Fra definisjonen av diskriminanten D følger det at for et vilkårlig punkt $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, så vil:

$$\text{rk } Q_P < 4 \Leftrightarrow P \in D. \quad (2.5)$$

La linjen $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ være definert ved $\lambda = 0$. Denne linjen består av alle punkt på formen $(0, s, t)$, der $(s, t) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Legg merke til at linjen L definerer penselen av kvadriker (A, B) ettersom:

$$Q_{0,s,t} = V(x^T(0I - (sA + tB))x) = V(x^T(sA + tB)x) = Q_{sA+tB}.$$

Linjen L vil potensielt kunne snitte kurven D . Ettersom $D \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, følger det av Bezout at L kan snitte D maksimalt fire ganger, telt med multiplisitet. Fra likning (2.5) følger det at et punkt $P \in L$ vil definere en kvadrikk Q_P av rang mindre enn fire hvis og bare hvis $P \in L \cap D$. Fra korollar 2.7 vet vi at signaturen til penselen (A, B) kun endres i disse snittpunktene.

Merknad 2.20. La $N \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ være en vilkårlig linje i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Anta linjen går gjennom punktene $P_1 = (\lambda_1, s_1, t_1)$ og $P_2 = (\lambda_2, s_2, t_2)$. Linjen N vil være definert ved $\alpha P_1 + \beta P_2$, der $\alpha, \beta \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. La $Q_{P_i} = V(x^T(\lambda_i I - (s_i A + t_i B))x) = V(x^T M_i x)$, der $i = 1, 2$. Et punkt på linjen N vil definere en kvadrikk på formen

$$Q_{\alpha P_1 + \beta P_2} = V(x^T(\alpha M_1 + \beta M_2)x).$$

Dermed ser vi at en vilkårlig linje $N \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ vil definere en pensel av kvadriker. Fra likning (2.5) følger det at punktene P_i på linjen N som definerer singulære kvadriker må være punktene $P_i \in N \cap D$. Ved Bezout finnes det maksimalt fire slike punkter, telt med multiplisitet.

Legg merke til at dette impliserer at diskriminanten deler opp $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ i avgrensede områder, hvor alle punktene definerer kvadriker av samme signatur.

For å kunne si mer om relasjonen mellom punktene på kurvene L og D slik de er definert ovenfor og kvadrikkene som disse punktene definerer, vil vi trenge noen flere definisjoner.

Definisjon 2.21. La $Y \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ være en kurve definert av $f(x, y, z) = 0$, der $f(x, y, z)$ er et homogent polynom av grad d . La $P = (a, b, c) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ være et punkt på kurven Y . Gjør et lineært koordinatskifte slik at punktet (a, b, c) sendes til punktet $(0, 0, 1)$. Skriv deretter $f(x, y, 1) = f(x, y) = f_0 + f_1(x, y) + f_2(x, y) + \dots + f_d(x, y)$, der f_i er homogene polynomer i (x, y) av grad i . *Multiplisiteten til punktet P på kurven Y definerer vi som $\mu_P(Y) = \min\{i \mid f_i \neq 0\}$.*

Definisjon 2.22. La Y være en kurve definert av et polynom f av grad d og la $P \in Y$. Dersom $\mu_P(Y) = 1$ så sier at kurven Y er *glatt* i punktet P . Dersom $\mu_P(Y) > 1$, sier vi at kurven Y er *singulær* i punktet P .

Definisjon 2.23. La $L \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ være en linje definert ved en linær form og la $Y \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ være en kurve definert av et homogent polynom av grad d . Anta at $P = (a, b, c) \in Y \cap L$. Gjør et lineært koordinatskifte slik at punktet (a, b, c) sendes til punktet $(0, 0, 1)$. Linjen L vil nå være definert av et polynom på formen $l(x, y) = ax + by$. La f være det homogene polynomet av grad d som definerer kurven Y . La $f \upharpoonright_L(y) = f(-\frac{by}{a}, y, 1)$ være polynomet f restriktert til linjen L i den affine delen av $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ der vi har satt $t = 1$. Skriv $f \upharpoonright_L(y) = f_1(y) + f_2(y) + \dots + f_d(y)$, der f_i er polynom av grad i . *Snittmultiplisiteten $I_P(L \cap Y)$ til punktet P definerer vi som $\min\{i \mid f_i \neq 0\}$.*

La oss se hva som er relasjonen mellom multiplisiteten til diskriminanten i et punkt $P_0 \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ og nulliteten til kvadrikken Q_{P_0} som punktet definerer.

Lemma 2.24. *La linjen $L \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ definere penselen (A, B) og la D være diskriminanten til penselen definert ved $f(\lambda, s, t) = \det(\lambda I - (sA + tB)) = 0$. Dersom $P_0 = (\lambda_0, s_0, t_0) \in D$ og Q_{P_0} er kvadrikken definert av punktet P_0 , så holder følgende: $\mu_{P_0}(D) = k \Leftrightarrow \text{null } Q_{P_0} = k$.*

Bevis. Anta først at $\text{null } Q_{P_0} = \text{null } V(x^T(\lambda_0 I - (s_0 A + t_0 B))x) = \text{null } V(x^T M_{P_0} x) = \text{null } M_{P_0} = k$, hvor M_{P_0} er en matrise som definerer Q_{P_0} . Merk at siden $M_{P_0} \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ så vil det eksistere $U \in O_4(\mathbb{R})$ slik at $U^T M_{P_0} U = D$, der D er en reell, diagonal matrise og $\text{null } D = \text{null } M_{P_0} = k$. Gjør et variabelskifte slik at punktet P_0 sendes til punktet $(0, 0, 1)$. Observer at:

$$f(\lambda, s, 1) = \det(\lambda I - (sA + B)) = \det P^T (\lambda I - (sA + B)) P = \det(\lambda I - (sA + D))$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} \lambda - sa_{00} & sa_{01} & sa_{02} & sa_{03} \\ sa_{01} & \lambda - sa_{11} & sa_{12} & sa_{13} \\ sa_{02} & sa_{12} & \lambda - sa_{22} & sa_{23} \\ sa_{03} & sa_{13} & sa_{23} & \lambda - sa_{33} \end{bmatrix} - D \right)$$

Ettersom $\text{null } D = k$ hvis og bare hvis $\text{rk } D = 4 - k$, ser vi at $\min\{i \mid f_i \neq 0\} = k$.

Anta nå at $P_0 = (\lambda_0, s_0, t_0) \in D$ og at $\mu_{P_0}(D) = k$. Gjør et lineært variabelskifte slik at punktet P_0 blir punktet $(0, 0, 1)$. Ved antakelsen følger det at $\det(\lambda I - (sA + tB)) = f_k(\lambda, s) + \dots + f_4(\lambda, s)$, der $f_i(\lambda, s)$ er homogene polynom av grad i og $B = \lambda_0 I - (s_0 A + t_0 B)$.

Ettersom $B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ vet vi at det finnes $P \in O_4(\mathbb{R})$ slik at $P^T B P = D$, der D er diagonal og $\text{null } B = \text{null } D$. Observer at dersom

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - (sA + tB)) &= \det P^T (\lambda I - (sA + tB)) P = \\ &= \det(\lambda I - (sA' + tD)) = f_k(\lambda, s) + \dots + f_4(\lambda, s), \end{aligned}$$

så må $\text{null } D = k$. Dermed følger det at $\text{null}(\lambda_0 I - (s_0 A + t_0 B)) = k$. \square

La oss se nærmerere på hva vi kan si om hvor mange ganger en generell linje i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ vil snitte diskriminanten D , telt med multiplisitet. Ettersom diskriminanten D er en fjerdegradskurve i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, så følger det ved Bezout at en generell linje i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ vil snitte D i maksimalt fire punkt telt med multiplisitet. Det viser seg imidlertid at vi si mer enn dette om en vilkårlig linje L' gjennom punktet $(1, 0, 0) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$:

Lemma 2.25. *La $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ være linjen som definerer penselen (A, B) . La kurven $D \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ være penselens diskriminant. Dersom $L' \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ er en vilkårlig linje som går gjennom punktet $(1, 0, 0)$ og $L' \cap D = \{P_0, \dots, P_k\}$, så holder følgende:*

$$\sum_{n=0}^k I_{(P_i)}(L' \cap D) = 4.$$

Bevis. En vilkårlig linje L' gjennom punktet $(1, 0, 0)$ møter linjen L i nøyaktig et punkt. Anta dette punktet er $(0, s_0, t_0)$. Linjen L' kan skrives på formen $(\lambda, \beta s_0, \beta t_0)$, der $\lambda, \beta \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Kurven D er definert ved $f(\lambda, s, t) = \det(\lambda I - (sA + tB)) = 0$. Merk at punktet $(1, 0, 0) \in L'$, men $(1, 0, 0) \notin D$, ettersom $\det I \neq 0$. Punktene $P_i \in L' \cap D$ må dermed tilfredsstillere $\det(\lambda I - (s_0 A + t_0 B)) = 0$. Ettersom $s_0 A + t_0 B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ følger det at denne matrisen har fire egenverdier λ_i telt med multiplisitet. Det eneste som gjenstår å vise er at den algebraiske multiplisiteten k til en spesifikk egenverdi λ_0 er lik $I_{\lambda_0, s_0, t_0}(L' \cap D)$

Ettersom $s_0 A + t_0 B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ og vi antar λ_0 er en egenverdi av multiplisitet k , følger det at $\text{null}(\lambda_0 I - (s_0 A + t_0 B)) = k$. Etter et variabelskifte slik at (λ_0, s_0, t_0) blir punktet $(0, 0, 1)$, så vil diskriminanten D være definert av et polynom $f(\lambda, s, t) = \det(\lambda I - (sA + tB))$, der $\text{null } B = k$. Ettersom $B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ vet vi at det finnes $P \in O_4(\mathbb{R})$ slik at $P^T A P = D$, der D er reell, diagonal matrise og $\text{null } B = \text{null } D = k$. Linjen L' vil nå være definert

av et polynom på formen $l(\lambda, s, t) = a\lambda + bs$. La

$$\begin{aligned} f \upharpoonright L(y) &= f\left(\frac{-bs}{a}, s, 1\right) = \\ &= \det\left(\frac{-bs}{a}I - (sA + B)\right) = \\ &= \det P^T\left(\frac{-bs}{a}I - (sA + B)\right)P = \\ &= \det\left(\frac{-bs}{a}I - (sP^TAP + D)\right) \end{aligned}$$

Ettersom null $D = k$ hvis og bare hvis $\text{rk } D = 4 - k$, ser vi at $\min\{i \mid f_i \neq 0\} = k$. Altså følger det at $I_{(\lambda_i, s_0, t_0)}(L' \cap D) = k$. \square

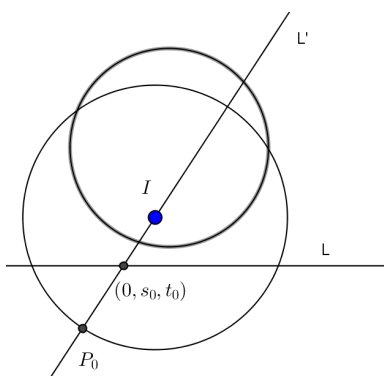
Merk at dersom $(\lambda_0, s_0, t_0) \in D$ så har vi fra lemma 2.24 at $\mu_{(\lambda_0, s_0, t_0)}(D) = \text{null } Q_{(\lambda_0, s_0, t_0)} = \text{null}(\lambda_0 I - (s_0 A + t_0 B))$, der $\lambda_0 I - (s_0 A + t_0 B)$ er en matrise som definerer $Q_{(\lambda_0, s_0, t_0)}$. Dessuten viste vi i lemma 2.25 at $\text{null}(\lambda_0 I - (s_0 A + t_0 B)) = I_{\lambda_0, s_0, t_0}(L' \cap D)$, der L' er linjen som går gjennom punktet $(1, 0, 0)$ og $(0, s_0, t_0)$. Dermed følger det at

$$\mu_{(\lambda_0, s_0, t_0)}(D) = I_{\lambda_0, s_0, t_0}(L' \cap D), \quad (2.6)$$

for alle punkt $\lambda_0 \in D$.

At enhver linje $L' \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ gjennom punktet $(1, 0, 0)$ vil snitte diskriminanten $D \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ fire ganger, telt med multiplisitet legger geometriske føringer for hvordan diskriminanten kan se ut. Figur 2.4 nedenfor viser et eksempel på hvordan en diskriminant tilhørende en pensel (A, B) potensielt kan se ut i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.

Figur 2.4



Observer at enhver linje gjennom punktet $(1, 0, 0)$ snitter D i fire punkt, telt med multiplisitet. Punktene der linjen L' snitter D er de fire punktene som tilfredsstiller likningen $\det(\lambda I - (s_0 A + t_0 B))$. Vi kan tenke på

disse fire punktene λ_i som egenverdiene til matrisen $s_0A + t_0B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$. Merk imidlertid at ettersom $(\lambda, s_0, t_0) = k(\lambda, s_0, t_0) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, så vil disse fire "egenverdiene" bare være veldefinert opp til multiplikasjon med en konstant $k \neq 0$. Dermed følger det fra analysen ovenfor at en matrise i penselen $s_0A + t_0B$ i denne forstand har en egenverdi λ_0 av algebraisk multiplisitet k hvis og bare hvis $\mu_{(\lambda_0, s_0, t_0)}(D) = I_{\lambda_0, s_0, t_0}(L' \cap D) = k$.

Dersom vi tenker på linjen $L' \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ gjennom punktet $(1, 0, 0)$ og et vilkårlig punkt $(0, s_0, t_0)$ som en sirkel, så ser vi at disse to punktene vil dele denne sirkelen inn i to segmenter. Signaturen til $Q_{s_0A+t_0B}$ kan leses ut ifra hvor mange ganger diskriminanten skjærer disse to segmentene. I figuren ovenfor ser vi at $\text{sign } Q_{s_0A+t_0B} = (3, 1)$.

Av lemma 2.24 følger det at alle diskriminantens glatte punkt definerer kvadriker av rang tre. De to singulære punktene på kurven D definerer kvadriker av rang to. Observer at linjen L som definerer penselen snitter D i to glatte punkt. Vi vet at $\det sA + tB$ har en rot i disse snittpunktene. La oss nå se hva som er relasjonen mellom $I_P(L \cap D)$ og røttene til determinanten til penselen definert ved linjen L .

Lemma 2.26. *La linjen $L \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ være definert ved $\lambda = 0$ og la (A, B) være penselen definert av linjen L . La diskriminanten $D \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ være definert ved $f(\lambda, s, t) = \det(\lambda I - (sA + tB)) = 0$. Anta at determinanten til penselen $\det(sA + tB)$ har en reell rot $(s_0, t_0) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ av multiplisitet k . Linjen L vil snitte D i $(0, s_0, t_0)$ og $I_P(Y \cap L) = k$.*

Bevis. Det følger av definisjonene av D og L at dersom $\det s_0A + t_0B = 0$ så vil $(0, s_0, t_0) \in Y \cap L$. Det eneste som må vises er at $I_P(Y \cap L) = k$. For å vise dette gjør vi et lineært variabelskifte slik at $(0, s_0, t_0)$ sendes til punktet $(0, 0, 1)$. Vi antar altså at $(0, 1)$ er en rot til $f(0, s, t) = \det sA + tB$ av multiplisitet k .

Linjen L er gitt ved $\lambda = 0$. Dermed får vi $f|_L = f(0, s, 1) = \det sA + B$. Men ettersom vi antar at $(0, 1)$ er en rot til $f(0, s, t) = \det sA + tB$ av multiplisitet k , følger det at $f|_L = f(0, s, 1) = s^k r(s)$, der $r(0) \neq 0$. Dermed følger det at $f|_L = a_1 s^k + a_2 s^{k+1} + \dots + a_{d-k} s^d$, og vi ser at $\min\{i \mid f_i \neq 0\} = k$. \square

For å kunne si enda mer om disse snittpunktene mellom linjen L som definerer en pensel og den tilhørende diskriminanten D , trenger vi noen flere definisjoner og lemma.

Definisjon 2.27. *La $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ være en kurve definert av $f = 0$ og la $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ være en linje definert av $l = 0$. Anta at $P \in L \cap Y$ og at $\mu_P(Y) = k$. Gjør et lineær variabelskifte slik at punktet P sendes til $(0, 0, 1)$ og la $f(x, y) = f(x, y, 1) = f_k + f_{k+1} + \dots + f_d$, der f_i er homogene polynom av grad i . Vi sier at linjen L tangerer Y i punktet P dersom $l|f_k$.*

Følgende lemma er hentet fra [Har77, Oppgave 5.4. s. 36].

Lemma 2.28. *La $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ være en linje og la $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ være en kurve av grad større enn 1. Dersom $P \in L \cap Y$ og $\mu_P(D) = k$ så vil $I_P(Y \cap L) > k$ hvis og bare hvis L tangerer D i punktet P .*

Definisjon 2.29. La (A, B) være en pensel av kvadriker. En rot $(s_0, t_0) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ av multiplisitet k tilhørende penselens determinant $\det sA + tB$ er en regulær rot dersom $k = \text{null } s_0A + t_0B$.

Korollar 2.30. *La $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ være linjen som definerer penselen (A, B) og la D være diskriminanten til penselen definert ved $f(\lambda, s, t) = \det(\lambda I - (sA + tB)) = 0$. Determinanten til penselen $\det sA + tB$ har en irregulær rot i (s_0, t_0) hvis og bare hvis diskriminanten tangerer penselen i $P_0 = (0, s_0, t_0)$.*

Bevis. La (s_0, t_0) være en rot tilhørende $\det sA + tB$ av multiplisitet k . Vi ønsker å vise at $k > \text{null } M_{P_0} = \text{null}(s_0A + t_0B)$ hvis og bare hvis D tangerer L i punktet P_0 . Fra lemma 2.26 og lemma 2.24 har vi at:

$$\begin{aligned} k &= I_{P_0}(D \cap L) \\ \mu_{P_0}(D) &= \text{null } M_{P_0} \end{aligned}$$

Fra lemma 2.28 får vi

$$k = I_{P_0}(D \cap L) > \mu_{P_0}(D) = \text{null } M_{P_0}$$

hvis og bare hvis D tangerer L i P_0 . □

Anta nå at L er linjen som definerer penselen (A, B) og at D er penselens diskriminant. Legg merke til at dersom $\det sA + tB$ har en enkel rot $(s_0, t_0) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, så vil $I_{(0, s_0, t_0)}(D \cap L) = \mu_{P_0}(D) = 1$. Dette medfører diskriminanten D krysser linjen L i punktet $(0, s_0, t_0)$, som i sin tur medfører at signaturen til kvadrikkene i penselen definert av punktene på ulike sider av punktet (s_0, t_0) ikke kan være den samme. Dermed har vi følgende:

Observasjon 2.31. *Dersom determinanten til en pensel har en enkel rot $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, så vil signaturen til kvadrikkene definert av punktene på ulike sider av punktet $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ ha ulik signatur.*

Merknad 2.32. *Når vi sier at punkter på ulike sider av en rot $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ definerer kvadriker av ulik signatur, mener vi at det finnes et lite omegn på begge sider av roten P langs den projektive reelle linjen hvor dette stemmer.*

2.6.1 Singulære punkter på diskriminanten

Definisjon 2.33. To diskriminanter er *ekvivalente* dersom penslene som definerer dem er ekvivalente, i.e. $D_{(A,B)}$ er ekvivalent med $D_{(A',B')}$ dersom (A, B) er ekvivalent med (A', B') .

Ettersom ekvivalente diskriminanter er definert av ekvivalente pensler, så følger det at de vil se like ut lokalt rundt punktene hvor de snitter linjen som definerer penselen. Når vi her sier like, mener vi like i den forstand at de vil enten vil krysse linjen som definerer penselen transversalt, eller tangere den.

Spesielt betyr dette at ekvivalente diskriminanter vil ha like mange singulariteter på linjen som definerer penslene. Videre vet vi at ekvivalente diskriminanter er to fjerdegradskurver i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Dermed har begge kurvene endelig mange singulariteter. Det er nærliggende å spørre seg om det finnes en relasjon totale antallet singulariteter tilhørnede to ekvivalente pensler. Eksempel 2.37 nedenfor viser at dette virker lite trolig. Eksempelet er også tatt med fordi det viser noe av sammenhengen mellom diskriminantens singulære punkter og matrisene i en pensel som definerer slike punkter.

Det kan være verdt å merke seg at en strengere form for ekvivalens av pensler sikrer at ekvivalente pensler har identisk diskriminant:

Definisjon 2.34. To pensler (A, B) og (A', B') er *ortogonalt ekvivalente* dersom det finnes en $P \in O_4(\mathbb{R})$ slik at $(P^T A P, P^T B P) = (A, B)$

Lemma 2.35. *Dersom (A, B) og $(P^T A P, P^T B P)$ er to ortogonalt ekvivalente pensler, så vil penslenes karakteristiske polynom $f_{(A,B)}$ og $f_{(P^T A P, P^T B P)}$ være identiske.*

Bevis.

$$\begin{aligned} f_{(A,B)}(\lambda, s, t) &= \det(\lambda I - (sA + tB)) = \\ &= \det(P^T P) \det(\lambda I - (sA + tB)) = \\ &= \det(\lambda P^T P - P^T (sA + tB) P) = \\ &= \det(\lambda I - P^T (sA + tB) P) = \\ &= f_{(P^T A P, P^T B P)}(\lambda, s, t) \end{aligned}$$

□

Korollar 2.36. *Dersom to pensler er ortogonalt ekvivalente, så vil penslene ha identisk diskriminant.*

Eksempel 2.37. La (A, B) og $(A', B') = (P^T A P, P^T B P)$ være to ekvivalente pensler definert ved følgende matriser:

$$sA + tB = s \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$sA' + tB' = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

der

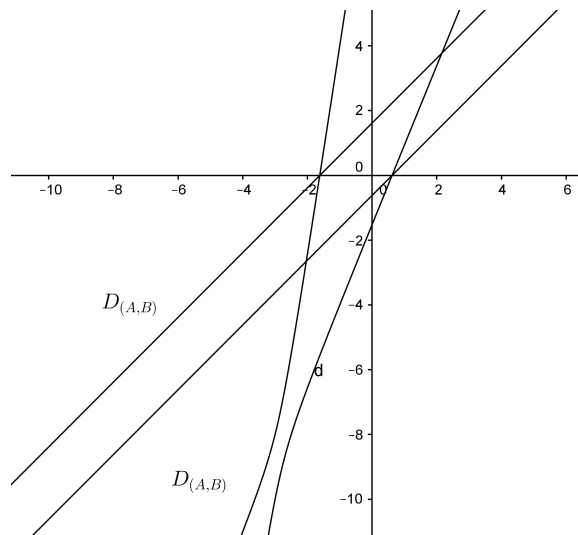
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Figur 2.5 nedenfor viser den affine delen av diskriminantene $D_{A,B}$ og $D_{A',B'}$ tilhørende de to ekvivalente penslene (A, B) og (A', B') , i $s\lambda$ -planet. De ekvivalente diskriminantene $D_{A,B}$ og $D_{A',B'}$ er gitt ved henholdsvis følgende polynom:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - (sA + B)) &= ((\lambda - (s + 1))(\lambda - s) - 1)^2 \\ \det(\lambda I - (sA' + B')) &= ((\lambda - (5s + 5))(\lambda - (4s + 4)) - (2s + 6)^2)^2 \end{aligned}$$

For hvert punkt $(s_0, 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ kan vi observere at det finnes fire egenverdier $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tilhørende både $s_0 A + B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ og $s_0 A' + B' \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$. Vi kan observere at for ethvert punkt $(s_0, 1)$ så er $\text{sign } s_0 A + B = \text{sign } s_0 A' + B'$. Det kan verifiseres fra figuren at signaturmønsteret til de to ekvivalente penslene (A, B) og (A', B') er $(0, 4)(0, 2)(2, 2)(2, 0)(4, 0)$.

Figur 2.5



Fra figuren ser vi at i ethvert punkt på formen $(s_0, 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ så vil både penselen (A, B) og penselen (A', B') ha to egenverdier av dobbel multiplisitet. Dette betyr at multiplisiteten til diskriminantene $D_{A,B}$ og $D_{A',B'}$ er to i alle disse punktene.

I punktet $(1, 0)$ kan vi imidlertid observere at matrisen $1A + 0B = I$, har en egenverdi $\lambda = 1$ av multiplisitet 4. Dermed følger det at $\mu_{(1,1,0)}(D_{A,B}) = 4$.

Det kan sjekkes at

$$1A' + 0B = A' = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

har to ulike positive egenverdier λ_1 og λ_2 av dobbel multiplisitet: $\frac{1}{2}(9 \pm \sqrt{17})$.

Multiplisiteten til diskriminanten $D_{A,B}$ er med andre ord to i alle punkt bortsett fra i punktet $(1, 1, 0)$, hvor multiplisiteten er fire. Multiplisiteten til diskriminanten $D_{A',B'}$ er derimot to i alle punkt. ■

Kapittel 3

Diagonale pensler

Definisjon 3.1. Dersom en pensel av kvadriker er ekvivalent med en pensel på formen (D_1, D_2) , der D_1 og D_2 er reelle, diagonale matriser, sier vi at penselen er *diagonal*.

En pensel av kvadriker som ikke er diagonal, sier vi er *ikke-diagonal*. I dette kapitlet vil vi se nærmere på noen av egenskapene til diagonale pensler av kvadriker. Deretter gjør vi rede for metoden vi har valgt å bruke i klassifikasjonen av diagonale pensler, og i slutten av kapitlet gjennomfører vi selve klassifikasjonen.

3.1 Om diagonale pensler

Dersom man er gitt en pensel av kvadriker på formen (A, B) , der $A, B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ ikke er diagonale matriser, så vil det vanligvis ikke være åpenbart om denne penselen er diagonal eller ikke. Vi vil i denne seksjonen se nærmere på hva som er nødvendige og tilstrekkelige betingelser for at en generell pensel av kvadriker på formen (A, B) er ekvivalent med en pensel på formen (D_1, D_2) . I arbeidet med å finne slike betingelser blir følgende definisjoner nyttig:

Definisjon 3.2. To 4×4 -matriser A og B er *similære* dersom det finnes $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ slik at $P^{-1}AP$.

Definisjon 3.3. To matriser $A, B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ sies å være *simultant diagonaliserbare ved en kongruenstransformasjon* dersom det finnes en matrise $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ slik at $P^TAP = D_1$ og $P^TBP = D_2$, der D_1 og D_2 er reelle, diagonale matriser.

Det følger direkte fra definisjonen av en diagonal pensel og lemma 2.13 at en pensel (A, B) er diagonal hvis og bare hvis det finnes to matriser $A', B' \in (A, B)$ som er simultant diagonaliserbare ved en kongruenstransformasjon.

Det neste teoremet gir nødvendige og tilstrekkelige betingelser for når en pensel er diagonal. Et bevis for den nødvendige betingelsen er gitt hos [Uhl73, Corollary 1.4. s. 284].

Teorem 3.4. *En pensel (A, B) er diagonal hvis og bare hvis det finnes to matriser $A', B' \in (A, B)$ som er slik at $A', B' \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ og $A'^{-1}B'$ er similtær med en reell, diagonal matrise.*

Bevis. Vi kan anta uten å miste generalitet at penselen (A, B) er definert av to matriser som er slik at $A, B \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$. Dersom (A, B) er diagonal, så finnes det $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ slik at $P^T A P = D_A$ og $P^T B P = D_B$. Dermed følger det at

$$D_A^{-1} D_B = P^{-1} A^{-1} (P^T)^{-1} P^T B P = P^{-1} A^{-1} B P.$$

□

Merknad 3.5. *At en matrise inneholder to matriser A' og B' som er slik at $A'^{-1}B'$ er similtær med en reell diagonal matrise, medfører ikke at alle par av matriser i penselen har denne egenskapen. Penselen (D_1, D_2) definert ved matrisen $sD_1 + tD_2 =$*

$$\begin{bmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

inneholder for eksempel matrisene $\{D_1, D_2\}$ som ikke er invertible. Likevel er (D_1, D_2) en diagonal pensel.

Vi vil senere vise at dette teoremet medfører at dersom alle røttene til en pensels determinant er regulære, så vil penselen være diagonal. Den konverse påstanden, i.e. at dersom en pensel er diagonal, så vil determinanten til penselen kun ha regulære røtter, er enklere å vise.

En diagonal pensel (A, B) vil være ekvivalent med en pensel på formen (D_1, D_2) . Determinanten til disse penslene vil være projektivt ekvivalente. En pensel (D_1, D_2) vil være definert av en matrise $sD_1 + tD_2$ på følgende form:

$$\begin{pmatrix} a_1 s + b_1 t & & & \\ & a_2 s + b_2 t & & \\ & & a_3 s + b_3 t & \\ & & & a_4 s + b_4 t \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Her er konstantene $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, og $a_i s + b_i t$ er altså reelle lineære former. Dermed kan vi legge merke til følgende:

Observasjon 3.6. Dersom en pensel (A, B) er diagonal, så vil determinanten til penselen ha fire røtter $(s_i, t_i) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, telt med multiplisitet.

Lemma 3.7. Dersom en pensel (A, B) er diagonal, så vil alle røttene til determinanten til penselen $\det sA + tB$ være regulære.

Bevis. En diagonal pensel vil være ekvivalent med en pensel (D_1, D_2) definert av en matrise av typen (3.1) ovenfor. Observer at $\det sD_1 + tD_2$ har en rot $(s_i, t_i) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ av multiplisitet k hvis og bare hvis null $s_i D_1 + t_i D_2 = k$. \square

For å vise at en pensel med kun regulære røtter nødvendigvis er diagonal trenger vi følgende lemma:

Lemma 3.8. Dersom $A \in \text{Sym}_4(\mathbb{R}) \cap \text{GL}_4(\mathbb{R})$, $B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ og $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ så holder følgende: $\det(\lambda I - A^{-1}B) = k \det(\lambda A + B)$.

Bevis. Dersom $A \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ følger det at:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I + A^{-1}B) &= \det(A^{-1}A) \det(\lambda I + A^{-1}B) = \\ &= \det(A^{-1}) \det(\lambda A + B) = k \det \lambda A + B \end{aligned}$$

der $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. \square

Vi har nå de delresultatene vi trenger for å vise at dersom determinanten til en pensel bare har regulære røtter, så vil penselen være diagonal. Resultatet er et korollar til teorem 3.4.

Korollar 3.9. En pensel (A, B) er diagonal hvis og bare hvis alle røttene til penselens determinant $\det sA + tB$ er regulære.

Bevis. Anta at (A, B) er en pensel av kvadrikker. Vi kan anta uten å miste generalitet at $A, B \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$. Anta videre at (s_0, t_0) er en rot av multiplisitet k tilhørende $\det sA + tB$ slik at $k = \text{null } s_0 A + t_0 B$. Uten å miste generalitet kan vi anta at roten (s_0, t_0) er på formen $(s_0, 1)$, i.e. at $\text{null } s_0 A + B = k$.

Ved lemma 3.8 vet vi at $\det(sI + A^{-1}B)$ også vil ha en rot i punktet $s_0 \in \mathbb{R}$ av multiplisitet k . Dette medfører at $s_0 \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ er en egenverdi tilhørende matrisen $A^{-1}B$ av multiplisitet k .

Observer at ettersom A er antatt invertibel så vil $(sA + B)v = 0$ hvis og bare hvis $(sI + A^{-1}B)v = 0$, der v er en vilkårlig 4×1 kolonnevektor. Dermed følger det at $\text{null}(s_0 I + A^{-1}B) = \text{null}(s_0 A + B) = k$.

Dette impliserer at den algebraisk multiplisitet til enhver egenverdi s_0 tilhørende matrisen $A^{-1}B$, må være lik dimensjonen til egenvektorrommet assosiert med egenverdien s_0 . Ergo er $A^{-1}B$ similer med en diagonalmatrise. Dermed følger det fra teorem 3.4 at penselen er diagonal. \square

Lemma 3.10. *Dersom determinanten til en pensel (A, B) har fire ulike røtter $(s_i, t_i) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, så vil penselen være diagonal.*

Bevis. Vi kan anta at matrisene $A, B \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$. Dersom det er nødvendig kan vi gjøre et variabelskifte slik at de fire ulike røttene tilhørende $\det sA + tB$ er på formen $(s_i, 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Fra lemma 3.8 følger det at $\det sI + A^{-1}B$ vil ha fire distinkte røtter. Dette medfører at matrisen $A^{-1}B$ er similær med diagonalmatrise, som ved teorem 3.4 impliserer at penselen (A, B) er diagonal. \square

En annen tilstrekkelig betingelse man kan legge på to matriser $A, B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ for å sikre at en pensel (A, B) skal være diagonal, er betingelsen: $AB = BA$. Denne betingelsen er altså tilstrekkelig, men ikke nødvendig, for at penselen skal være diagonal.

Det viser seg imidlertid at denne betingelsen er nødvendig for at matrisene (A, B) skal inneholde to matriser som er slik det finnes en $P \in \text{O}_4(\mathbb{R})$ som simultant diagonaliserer begge matrisene ved en kongruenstransformasjon [HJ12]. Den konverse påstanden, i.e. at dersom det finnes en $P \in \text{O}_4(\mathbb{R})$ som simultant diagonaliserer A og B , ved en kongruenstransformasjon, så vil penselen (A, B) være diagonal, holder åpenbart også. Dermed har vi følgende:

Lemma 3.11. *Anta vi er gitt en pensel av kvadrikker (A, B) . Det finnes en $P \in \text{O}_4(\mathbb{R})$ slik at $(P^T A P, P^T B P) = (D_1, D_2)$ hvis og bare hvis $AB = BA$.*

Merknad 3.12. *Enhver matrise i penselen (A, B) kan skrives på formen $s_i A + t_i B$. Utregningen nedenfor viser at dersom to matriser i penselen kommuterer, så vil alle matrisene kommutere:*

$$\begin{aligned} (s_0 A + t_0 B)(s_1 A + t_1 B) &= s_0 A s_1 A + s_0 A t_1 B + t_0 B s_1 A + t_0 B t_1 B \\ (s_1 A + t_1 B)(s_0 A + t_0 B) &= s_1 A s_0 A + s_1 A t_0 B + t_1 B s_0 A + t_1 B t_0 B \end{aligned}$$

Dette medfører at dersom man er gitt en pensel (A, B) , så holder det å sjekke om et vilkårlig par av matriser inneholdt i penselen kommuterer, dersom man ønsker å finne ut om det eksisterer en $P \in \text{O}_4(\mathbb{R})$ slik at $(P^T A P, P^T B P) = (D_1, D_2)$.

Ved lemma 2.36 vet vi at dersom to pensler er ortogonalt ekvivalente så vil de ha identisk diskriminant. Diskriminanten til en diagonal pensel (D_1, D_2) vil være definert ved et polynom på formen $\det \lambda I - (sD_1 + tD_2)$. En slik diskriminant vil bestå av fire linjer. Merk at noen av linjene kan være sammenfallende. Dermed har vi følgende:

Lemma 3.13. *La (A, B) være en pensel av kvadrikker. Dersom $AB = BA$ så vil penselens diskriminant D bestå av fire linjer, telt med multiplisitet.*

Det er nærliggende å spørre om den konverse påstanden holder: "Dersom en pensels diskriminant består av fire linjer, vil matrisene i penselen nødvendigvis kommutere?". Om denne påstanden holder forblir et åpent spørsmål i denne oppgaven.

Dersom diskriminanten til en pensel består av fire linjer, kan vi imidlertid slå fast at penselen må være ekvivalent med en diagonal pensel. Dette følger av at en diskriminant bestående av fire linjer ikke kan tangere linjen som definerer penselen. Vi har tidligere vist at determinanten til en pensel har en uregulær rot i $P_0 \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ hvis og bare hvis diskriminanten tangerer linjen som definerer penselen i P_0 . At en pensel som har en diskriminant bestående av fire linjer, er ekvivalent med en diagonal pensel, følger dermed fra korollar 3.9. Merk for øvrig også at ingen av diskriminantens fire linjer kan være sammenfallende med linjen som definerer penselen. For dersom dette var tilfellet så ville alle kvadrikkene i penselen hatt rang mindre enn fire, noe vi i denne oppgaven antar at ikke er tilfellet.

3.2 Om klassifikasjonen av diagonale pensler

Vi har valgt å dele klassifikasjonen av de diagonale penslene i to underkategorier, nemlig definte pensler og ikke-definte pensler. Metoden vi bruker i klassifikasjonen av de to underkategoriene vil imidlertid være den samme. I denne seksjonen beskriver vi hvordan klassifikasjonen av diagonale pensler vil gjøres, og hvorfor denne klassifikasjonen blir spesielt enkel.

Vi vet at determinanten $\det sD_1 + tD_2$ til en diagonal pensel (D_1, D_2) , fra nå av kalt $\det M(P)$, har fire røtter $P_i \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, telt med multiplisitet. Dette medfører at $\det M(P)$ vil faktoriseres i fire reelle, lineære former, telt med multiplisitet. Legg merke til noen de lineære formene vil være sammenfallende dersom $\det M(P)$ har røtter av multiplisitet to eller høyere. At alle røttene P_i til en diagonal pensel er regulære gjør at dersom vi kjenner multiplisiteten til røttene P_i , så kjenner vi også nulliteten til kvadrikkene som røttene P_i definerer. Tabell 3.1 nedenfor viser de ulike måtene $\det M(P)$ kan faktoriseres.

I tabellen er P_i en rot tilhørende $l_i(P)$ og det er antatt at $l_i(P) \neq l_j(P)$, dersom $i \neq j$. Dersom for eksempel $\det M(P) = l_0(P)^2 l_1(P) l_2(P)$ så betyr dette altså at P_0 er en rot av multiplisitet to tilhørende $\det M(P)$, og at P_1, P_2 er to enkle røtter tilhørende $\det M(P)$. Ved lemma 3.9 vet vi dermed at $\text{null } M(P_0) = 2$ og $\text{null } M(P_1) = \text{null } M(P_2) = 1$.

Tabell 3.1

$\det M(P)$	$\text{null } M(P_0)$	$\text{null } M(P_1)$	$\text{null } M(P_2)$	$\text{null } M(P_3)$
$l_0(P)l_1(P)l_2(P)l_3(P)$	1	1	1	1
$l_0(P)^2l_1(P)l_2(P)$	2	1	1	
$l_0(P)^2l_1(P)^2$	2	2		
$l_0(P)^3l_1(P)$	3	1		

I klassifikasjonen av diagonale pensler vil vi se på disse tilfellene hver for seg. Merk at ved korollar 3.9 så kan ikke et signaturmønster finnes i to av disse kategoriene. For dersom (D_1, D_2) og (D'_1, D'_2) er diagonale pensler og (s_0, t_0) er en rot av multiplisitet k tilhørende $\det(sD_1 + tD_2)$, så vil $\text{null}(s_0D_1 + t_0D_2) = k$. Og dersom $\det(sD'_1 + tD'_2)$ ikke har en rot av multiplisitet k , så vil denne penselen ikke kunne inneholde noen kvadrikk av nullitet k , og penslene vil derfor ikke kunne ha det samme signaturmønsteret. Vi vil se eksempler på at dette ikke gjelder for ikke-diagonale pensler.

Det utelatte tilfellet i tabellen, $\det M(P) = l_0(P)^4$, vil medføre at $\text{null } M(P_0) = 0$. Dette impliserer at vi ikke har å gjøre med en pensel av kvadrikker, og vi ser derfor bort fra denne situasjonen. Vi skal imidlertid se senere at det finnes interessante ikke-diagonale pensler hvis determinant kan skrives på formen $l_0(s, t)^4$.

At en diagonal pensel (D_1, D_2) er definert av en diagonal matrise på formen 3.1 gjør at signaturmønsteret blir spesielt enkelt å beskrive. Signaturmønsteret til en diagonal pensel av kvadrikker (D_1, D_2) vil bestemmes av en matrise på følgende form:

$$sD'_1 + D'_2 = \begin{pmatrix} a_1s + b_1 & & & \\ & a_2s + b_2 & & \\ & & a_3s + b_3 & \\ & & & a_4s + b_4 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

hvor $\text{rk } D'_1 = 4$.

Diagonalelementene til matrisen $sD'_1 + D'_2$ ovenfor, og dermed også egenverdiene til penselen $[sD_1 + D_2]$, er lineære funksjoner i variabelen s . Signaturmønsteret til en diagonal pensel av kvadrikker, bestemmes altså av fire lineære funksjoner. De fire lineære funksjonene har naturligvis nøyaktig en rot hver i \mathbb{R} . Signaturmønsteret til en diagonal pensel av kvadrikker blir dermed spesielt forutsigbart.

Anta for eksempel signaturmønsteret til en pensel av kvadrikker (A, B) er

på formen $(2, 2)(2, 1)(\alpha, \beta)\dots$. Dersom vi har å gjøre med en generell pensel av kvadrisker vet vi bare at (α, β) må være $(2, 2)$ eller $(3, 1)$. Dette følger av at egenverdiene til en matrise endrer seg kontinuerlig. Men dersom vi antar at penselen er diagonal, så må (α, β) være $(3, 1)$. For dersom signaturen hadde vært $(2, 2)$ så måtte en lineær funksjon hatt samme fortegn på begge sider av en rot.

Dersom signatormønsteret til en diagonal pensel av kvadrisker er på formen $(0, 4)(0, 1)(3, 1)(\alpha, \beta)\dots$ så kan vi slutte at tre lineære funksjoner har byttet fortegn fra negativt til positivt i det samme punktet. Den eneste lineære funksjonen som ikke har byttet fortegn er fortsatt negativ, og dermed følger det at (α, β) må være $(3, 0)$.

3.3 Definitte pensler

Definisjon 3.14. *En pensel av kvadrisker (A, B) er definitt dersom det finnes en kvadrisk $Q \in (A, B)$ slik at $\text{sign } Q = (4, 0)$.*

Det kan vises at en matrise $A \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ er positiv definitt hvis og bare hvis alle matrisens egenverdier er positive. I denne oppgaven vil det herfra være hensiktsmessig å bruke dette som definisjonen for en definitt matrise.

Definisjon 3.15. *En matrise $A \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ er *positiv definitt* eller *negativ definitt* dersom alle matrisens egenverdier er henholdsvis positive eller negative. En *definit matrise* er enten positiv definitt eller negativ definitt.*

Grunnen til at vi behandler definitive pensler i en egen seksjon, er at disse penslene er spesielt enkle. Vi har nemlig følgende resultat for definitive pensler av kvadrisker:

Lemma 3.16. *Enhver definit pensel av kvadrisker vil være ekvivalent med en pensel av kvadrisker på formen (I, D) , der I er identitetsmatrisen og D er en reell, diagonal matrise.*

Bevis. En definit pensel inneholder en kvadrisk som er slik at $\text{sign } Q = (4, 0)$. Dermed finnes en matrise A slik at $Q = Q_A$ og $\text{sign } A = (4, 0)$. En definit pensel kan dermed uttrykkes som (A, B) , der $A, B \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ og $\text{sign } A = (4, 0)$. Etersom $\text{sign } A = \text{sign } I$ så vet vi at det finnes $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ slik at $P^T D P = I$. Dermed får vi at $(A, B) \sim (P^T A P, P^T B P) = (I, B')$. Etersom $B' = (P)^T B (P) \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$, vet vi ved lemma 1.16 at det finnes $S \in O_4(\mathbb{R})$ slik at $S^T B' S = D$, der D er en reell, diagonal matrise. Dermed følger det at $((PS)^T A (PS), (PS)^T B (PS)) = (I, D)$. \square

3.4 Klassifikasjon av definte pensler

En defint pensel av kvadriker (A, B) inneholder per definisjon en kvadrikk Q av signatur $(4, 0)$. Dette medfører at i en defint pensel av kvadriker så vil det finnes et segment i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ som definerer kvadriker av signatur $(4, 0)$. Etersom vi kan starte avlesningen av signaturmønsteret fra et valgfritt punkt i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ har vi følgende:

Observasjon 3.17. *Enhver defint pensel av kvadriker vil ha et signaturmønster som kan skrives på formen $(0, 4)\dots(4, 0)$.*

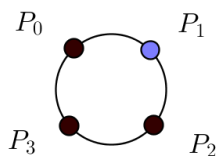
Klassifikasjonen av definte pensler av kvadriker vil gjøres i samsvar med metoden beskrevet i seksjon 3.2. Vi deler altså penslene opp i underkategorier ut fra hvordan penselens determinant faktoriserer. De ulike mulighetene er gitt i tabell 3.1. Vi vil også bruke samme notasjon som er beskrevet i denne tabellen. Vi antar altså i alle underkategorier at vi har å gjøre med en defint pensel av kvadriker, definert av en reell, diagonal matrise $sD_1 + sD_2 = M(s, t) = M(P)$.

3.4.1 $\det M(P) = l_0(P)l_1(P)l_2(P)l_3(P)$

Vi antar altså nå at vi har å gjøre med en defint pensel av kvadriker definert av en matrise $M(P)$ som er slik at $\det M(P) = l_0(P)l_1(P)l_2(P)l_3(P)$, der $l_i(P)$ er reelle lineære former. I samsvar med tabell 3.1 antar vi at P_i er en rot tilhørende den reelle lineære formen $l_i(P)$. Dette medfører at $\det M(P)$ har fire enkle røtter $\{P_0, P_1, P_2, P_3\} \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Etersom røttene til en diagonal pensel er regulære, har vi følgende informasjon om røttene P_i :

Punkt	null $M(P)$	sign $Q_{M(P)}$
P_0	1	$(3, 0)/(2, 1)$
P_1	1	$(3, 0)/(2, 1)$
P_2	1	$(3, 0)/(2, 1)$
P_3	1	$(3, 0)/(2, 1)$

Dersom vi tenker på $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ som en sirkel, ser vi at de fire ulike røttene P_i tilhørende $\det M(P)$ deler $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ opp i fire segmenter.



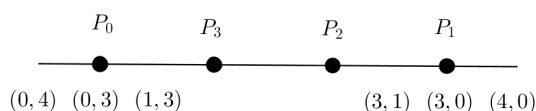
Etersom alle røttene er enkle, så vil segmentet som definerer kvadriker av signatur $(4, 0)$ grense til to punkter som definerer kvadriker av nullitet

en. Disse punktene vil definere kvadriker med signatur $(3, 0)$ eller $(2, 1)$. Men ved lemma 2.7 kan ikke et segment som definerer kvadriker med signatur $(4, 0)$ grense til et punkt som definerer en kvadrikk med signatur $(2, 1)$.

Ved observasjon 3.17 vet vi at signaturmønsteret kan skrives på formen $(0, 4)\dots(4, 0)$. Etersom segmentet som definerer kvadriker av signatur $(4, 0)$ grenser til to røtter som begge definerer kvadriker av signatur $(3, 0)$, så følger det at signaturmønsteret kan skrives på formen $(0, 4)(0, 3)\dots(3, 0)(4, 0)$. Etersom egenverdiene er lineære funksjoner, følger det at signaturmønsteret blir på formen $(0, 4)(0, 3)(1, 3)\dots(3, 1)(3, 0)(4, 0)$.

Vi kan se for oss at vi har valgt et punkt i segmentet mellom P_0 og P_1 som punktet i det uendelig fjerne, og har startet avlesningen av signaturmønsteret fra dette punktet, slik det vises i figuren nedenfor.

Figur 3.1



Punktene P_3 og P_2 er enkle røtter tilhørende det $M(P)$ og definerer dermed kvadriker av signatur $(2, 1)$ eller $(3, 0)$. Et signaturmønster av typen $(0, 4)(0, 3)(1, 3)(0, 3)\dots(3, 1)(3, 0)(4, 0)$ impliserer at en lineær funksjon har gått fra å være negativ, til å bli positiv, og deretter blitt negativ igjen. Dermed ser vi at signaturmønsteret må være på formen $(0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 2)\dots(2, 1)(3, 1)(3, 0)(4, 0)$. Etersom egenverdiene er lineære funksjoner så må signaturmønsteret bli $(0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 2)(2, 2)(2, 1)(3, 1)(3, 0)(4, 0)$. Dette signaturmønsteret er realisert i eksempel 3.18.

Eksempel 3.18. Signaturmønster:
 $(0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 2)(2, 2)(3, 1)(3, 0)(4, 0)$

La (A, B) være en pensel av kvadriker definert ved følgende matrise:

$$\begin{bmatrix} s-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+2t \end{bmatrix}$$

Tabellen nedenfor viser signaturmønsteret til penselen av kvadriker (A, B) :

s		-2		-1		0		1	
s-1	-	-	-	-	-	-	-	0	+
s	-	-	-	-	-	0	+	+	+
s+1	-	-	-	0	+	+	+	+	+
s+2	-	0	+	+	+	+	+	+	+
sign	(0,4)	(0,3)	(1,3)	(1,2)	(2,2)	(2,1)	(3,1)	(3,0)	(4,0)

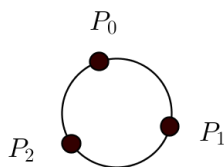
■

3.4.2 $\det M(P) = l_0(P)^2 l_1(P) l_2(P)$

I dette tilfellet har $\det M(P)$ en rot P_0 av multiplisitet to, og to røtter, P_1 og P_2 , av multiplisitet en. Etersom røttene til en diagonal pensel er regulære, har vi følgende informasjon om punktene P_0 , P_1 og P_2 :

Punkt	null $M(P)$	sign $Q_{M(P)}$
P_0	2	$(2,0)/(1,1)$
P_1	1	$(3,0)$
P_2	1	$(3,0)$

De tre røttene P_0, P_1, P_2 vil dele $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ opp i tre segmenter der alle punktene definerer kvadrikker av rang 4.



Fra observasjon 3.17 kan vi anta at signaturmønsteret er på formen $(0,4)\dots(4,0)$. Et av segmentene i figuren ovenfor definerer kvadrikker med signatur $(4,0)$. Legg merke til at dette segmentet, må grense til minst en av røttene P_1, P_2 . Dette medfører at segmentet der signaturen er $(4,0)$ må grense til minst et punkt som definerer en kvadrikk av nullitet en. Etersom vi kan lese av signaturmønsteret i valgfri retning, kan vi velge å lese av signaturmønsteret i retning av det punktet som definerer en kvadrikk med nullitet en. Vi kan dermed anta at signaturmønsteret er på formen $(0,4)(0,3)\dots(4,0)$. Etersom egenverdiene er lineære funksjoner kan vi videre slutte at signaturmønsteret kan skrives på formen $(0,4)(0,3)(1,3)\dots(4,0)$.

Den neste punktet hvor signaturen endres vil være et punkt som definerer en kvadrikk av nullitet en eller to. La oss se på disse situasjonene hver for seg. Dersom nulliteten er en må vi få et signaturmønsteret av typen

$(0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 2)\dots(4, 0)$ eller $(0, 4)(0, 3)(1, 3)(0, 3)\dots(4, 0)$. Det sistnevnte signaturmønsteret vil implisere at en lineær funksjon har to røtter, og dette er en selvmotsigelse. Det førstnevnte signaturmønsteret $(0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 2)\dots(4, 0)$ er fortsatt en kandidat. Etersom egenverdiene er lineære funksjoner, så må vi i dette tilfellet få følgende signaturmønster: $(0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 2)(2, 2)(2, 0)(4, 0)$. Dette signaturmønsteret er realisert i eksempel 3.19 nedenfor.

Anta nå at signaturmønsteret er på formen $(0, 4)(0, 3)(1, 3)\dots(4, 0)$ og at det neste punktet hvor signaturen endres er et punkt som definerer en kvadrikk av nullitet to. At nulliteten til en kvadrikk er to, medfører at signaturen er $(2, 0)$ eller $(1, 1)$. Vi kan utelukke et signaturmønster på formen $(0, 4)(0, 3)(1, 3)(0, 2)\dots(4, 0)$. Et slikt signaturmønster ville implisere at en lineær funksjon har to røtter. Den eneste muligheten blir dermed at signaturmønsteret er: $(0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 1)(3, 1)(3, 0)(4, 0)$. Dette signaturmønsteret er realisert i eksempel 3.20 nedenfor.

Eksempel 3.19. Signaturmønster: $(0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 2)(2, 2)(2, 0)(4, 0)$

La (A, B) være en pensel av kvadrikker definert av følgende matrise:

$$\begin{pmatrix} s + 2t & & & & & & & & & \\ & s + t & & & & & & & & \\ & & s & & & & & & & \\ & & & s & & & & & & \\ & & & & s & & & & & \\ & & & & & s & & & & \end{pmatrix}$$

Tabellen nedenfor viser signaturmønsteret til (A, B) :

Tabell 3.2

s		-2		-1		0		
$s + 2$	-	0	+	+	+	+	+	
$s + 1$	-	-	-	0	+	+	+	
s	-	-	-	-	-	0	+	
s	-	-	-	-	-	0	+	
sign		(0,4)	(0,3)	(1,3)	(1,2)	(2,2)	(2,0)	(4,0)

■

Eksempel 3.20. Signaturmønster: $(0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 1)(3, 1)(3, 0)(4, 0)$

La (A, B) være en pensel av kvadrikker definert ved følgende matrise:

$$\begin{pmatrix} s + t & & & & & & & & & \\ & s - t & & & & & & & & \\ & & s & & & & & & & \\ & & & s & & & & & & \\ & & & & s & & & & & \\ & & & & & s & & & & \end{pmatrix}$$

Tabellen nedenfor viser signaturmønsteret til (A, B) :

Tabell 3.3

s		-1		0		1	
$s + 1$	-	0	+	+	+	+	+
$s - 1$	-	-	-	-	-	0	+
s	-	-	-	0	+	+	+
s	-	-	-	0	+	+	+
sign	(0,4)	(0,3)	(1,3)	(1,1)	(3,1)	(3,0)	(4,0)

■

3.4.3 $\det M(P) = l_0(P)^2 l_1(P)^2$

I dette tilfellet har det $M(P)$ to røtter P_0 og P_1 av multiplisitet to. Ettersom røttene til en diagonal pensel er regulære, har vi følgende informasjon om punktene P_0 og P_1 :

Punkt	null $M(P)$	sign $Q_{M(P)}$
P_0	2	$(2, 0)/(1, 1)$
P_1	2	$(2, 0)/(1, 1)$

De to røttene P_0, P_1 vil dele $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ opp i to segmenter der signaturen ikke endres. Segmentet med signatur $(4, 0)$ vil grense til begge røttene. Et segment som definerer kvadriker av signatur $(4, 0)$ kan ved lemma 2.7 ikke grense til et punkt som definerer en kvadrikk av signatur $(1, 1)$. Eneste mulige signaturmønsteret blir derfor $(0, 4)(0, 2)(2, 2)(2, 0)(4, 0)$. Dette signaturmønsteret er realisert i eksempel 3.21.

Eksempel 3.21. Signaturmønster: $(0, 4)(0, 2)(2, 2)(2, 0)(4, 0)$

La (A, B) være en pensel av kvadriker definert ved følgende matrise:

$$\begin{pmatrix} s+1 & & & & \\ & s+1 & & & \\ & & s & & \\ & & & s & \\ & & & & s \end{pmatrix}$$

Penselen av kvadriker (A, B) vil ha følgende signaturmønster:

Tabell 3.4

s		-1		0	
s + 1	-	0	+	+	+
s + 1	-	0	+	+	+
s	-	-	-	0	+
s	-	-	-	0	+
sign	(0,4)	(0,2)	(2,2)	(2,0)	(4,0)

■

3.4.4 $\det M(P) = l_0(P)^3 l_1(P)$

I dette tilfellet har $\det M(P)$ en rot P_0 av multiplisitet tre og en rot P_1 av multiplisitet en. Ettersom røttene til en diagonal pensel er regulære, har vi følgende informasjon om punktene P_0 og P_1 :

Punkt	null $M(P)$	sign $Q_{M(P)}$
P_0	3	(1, 0)
P_1	1	(3, 0)/(2, 1)

Dersom vi tenker på $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ som en sirkel forstår vi at de to røttene P_0 og P_1 deler $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ opp i to segmenter hvor alle matrisene har rang 4. Segmentet i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ som definerer kvadrikker med signatur (4, 0) grenser til begge røttene P_0 og P_1 . Signaturen til kvadrikken definert av punktet P_0 må være (1, 0). Et segment som definerer kvadrikker av signatur (4, 0) kan ikke grense til et punkt som definerer en kvadrikk av signatur (2, 1). Ettersom vi får det samme signaturmønsteret uansett hvilken retning vi leser i, kan vi anta signaturmønsteret er på formen (0, 4)(0, 3)...(1, 0)(4, 0). Ettersom egenverdiene er lineære funksjoner følger det at signaturmønsteret må bli (0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 0)(4, 0). Dette signaturmønsteret er realistert i eksempel 2.10.

3.5 Diagonale pensler som ikke er definitte

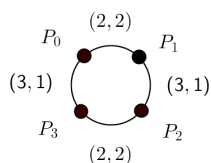
Vi er nå kun interessert i diagonale pensler som ikke inneholder noen kvadrikk av signatur (4, 0). Vi antar derfor at alle kvadrikker av rang fire har signatur (3, 1) eller (2, 2). Vi antar i alle underkategorier at vi har å gjøre med en diagonal pensel av kvadrikker, definert av en reell, diagonal matrise $sD_1 + tD_2 = M(s, t) = M(P)$.

3.5.1 $\det M(P) = l_0(P)l_1(P)l_2(P)l_3(P)$

Vi antar nå at at matrisen $M(P)$ definerer en pensel av kvadrikker som er diagonal, men ikke definnitt. Videre antar vi at $\det M(P)$ har fire enkle røtter

P_1, P_2, P_3 og P_4 .

Disse fire røtte P_i vil dele $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ opp i fire segmenter. Ved lemma 2.31 følger det at signaturen til kvadrikkene definert av punktene i nærheten av en enkel rot ikke kan være den samme. Ettersom vi antar at penselen ikke er definit, kan vi anta at signaturen til kvadrikkene definert av punktene på ulike sider av de enkle røttene, er $(2, 2)$ og $(3, 1)$. Situasjonen kan illustreres på følgende måte:



Ettersom vi antar at alle røttene P_i tilhørende det $M(P)$ er enkle, og vi antar at penselen er diagonal, vet vi at $\text{null } M(P_i) = 1$. Dette medfører at signaturen til kvadrikkene definert av de fire røttene P_i må være $(3, 0)$ eller $(2, 1)$. Ved lemma 2.7 blir dermed det eneste mulige signaturmønster i dette tilfellet

$(3, 1)(2, 1)(2, 2)(2, 1)(3, 1)(2, 1)(2, 2)(1, 2)(1, 3)$. Eksistensen av en pensel med et slikt signaturmønster er bevist i eksempel 3.22.

Eksempel 3.22. Signaturmønster:

$(3, 1)(2, 1)(2, 2)(2, 1)(3, 1)(2, 1)(2, 2)(1, 2)(1, 3)$

La (A, B) være en pensel av kvadrikker definert ved følgende matrise:

$$\begin{bmatrix} t+s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5t-s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t+s \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Tabellen nedenfor viser signaturmønsteret til (A, B) :

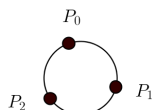
s		-1	-1/5	0	-1					
$t+1$	+	0	-	-	-	-	-	-	-	
$5t-1$	-	-	-	0	+	+	+	+	+	
$-t$	+	+	+	+	+	0	-	-	-	
$t+1$	+	+	+	+	+	+	+	0	-	
sign		(3,1)	(2,1)	(2,2)	(2,1)	(3,1)	(2,1)	(2,2)	(1,2)	(1,3)

■

3.5.2 $\det M(P) = l_0(P)^2 l_1(P) l_2(P)$

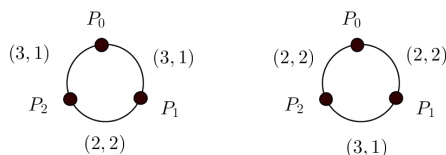
I dette tilfellet har $\det M(P)$ en rot P_0 av multiplisitet to og to røtter P_1 og P_2 av multiplisitet en. Ettersom penselen antas å være diagonal medfører dette at $\text{null } M(P_0) = 2$ og $\text{null } M(P_1) = \text{null } M(P_2) = 1$.

De tre røttene P_0, P_1, P_2 deler den projektive linjen opp i tre segmenter:



Fra figuren forstår vi at uansett hvordan vi plasserer de tre punktene på sirkelen, så vil punktene P_1 og P_2 stå ved siden av hverandre når vi beveger oss langs randen på sirkelen. Ved lemma 2.31 vet vi at signaturen til kvadrikkene definert av punktene på ulike sider av en enkel rot, ikke er den samme. Ettersom vi antar at penselen ikke er definitiv følger det at signaturen på ulike sider av røttene P_1 og P_2 er $(3, 1)$ og $(2, 2)$. Signaturen til kvadrikkene i segmentet mellom P_1 og P_2 må dermed være $(2, 2)$ eller $(3, 1)$. De to situasjonene er illustrert nedenfor:

Figur 3.2



Ettersom vi antar at $\text{null } M(P_1) = \text{null } M(P_2) = 1$, så følger det at signaturen til kvadrikkene definert av P_1 og P_2 må være $(2, 1)$. Anta at vi velger et punkt i segmentet mellom punktene P_1 og P_2 som punktet i det uendelig fjerne, i.e. at vi starter avlesningen av signaturmønsteret fra dette segmentet. Avhengig av om vi antar at kvadrikkene definert av dette segmentet har signatur $(3, 1)$ eller $(2, 2)$, får vi henholdsvis følgende to kandidater til signaturmønster:

1. $(3, 1)(2, 1)(2, 2) \text{ sign } M(P_0)(2, 2)(1, 2)(1, 3)$
2. $(2, 2)(2, 1)(3, 1) \text{ sign } M(P_0)(1, 3)(1, 2)(2, 2)$

Ettersom vi antar at P_0 er en rot av multiplisitet to tilhørende $\det M(P)$, og vi antar at penselen er diagonal, følger det at $\text{null } M(P_0) = 2$. Signaturen til $M(P_0)$ må altså være $(1, 1)$ eller $(2, 0)/(0, 2)$. I det første tilfellet ovenfor

kan vi ikke ha at $\text{sign } M(P_0) = (2, 0)/(0, 2)$, ettersom egenverdiene er lineære funksjoner. I det andre tilfellet kan $\text{sign } M(P_0)$ være både $(1, 1)$ og $(2, 0)$. De potensielle signaturmønstrene blir dermed følgende:

1. $(3, 1)(2, 1)(2, 2)(1, 1)(2, 2)(1, 2)(1, 3)$
2. $(2, 2)(2, 1)(3, 1)(1, 1)(1, 3)(1, 2)(2, 2)$
3. $(2, 2)(2, 1)(3, 1)(2, 0)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$

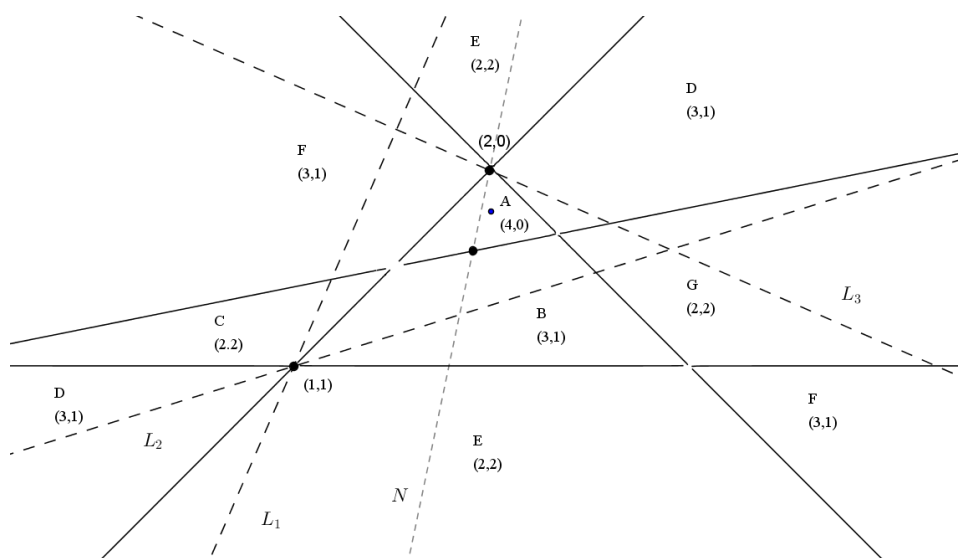
At det eksisterer pensler som har slike signaturmønstre er bevist i eksempel 3.23.

Eksempel 3.23. La (A, B) være den samme penselen av kvadrikker som vi analyserte i eksempel 3.22. Vi viste at signaturmønsteret til penselen (A, B) er

$$(1, 3)(1, 2)(2, 2)(2, 1)(3, 1)(2, 1)(2, 2)(2, 1)(3, 1).$$

Diskriminanten til penselen (A, B) ovenfor er definert ved polynomet $f(\lambda, s, t) = \det(\lambda I - (sA + tB))$. Figuren nedenfor viser den affine delen av diskriminanten i st -planet, definert ved $\det(I - (sA + tB)) = 0$. Aksene er ikke tegnet inn i figuren, men punktet $(0, 0)$ er markert i området A . Dette punktet på figuren tilsvarer punktet $(1, 0, 0) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ og definerer kvadrikkene $Q_{(1,0,0)} = V(x^T(1I - (0A + 0B)x)) = Q_I$. Dette er grunnen til alle kvadrikkene definert av punktene i det avgrensede området hvor punktet $(0, 0)$ ligger har signatur $(4, 0)$.

Figur 3.3



Legg merke til at signaturen til kvadrikkene i to områder som er adskilt av en enkelt linje på figuren, som for eksempel områdene A og B , ikke kan

være den samme. Grunnen til dette er at vi kan trekke en linje N , som vil krysse linjen som skiller områdene A og B . Som tidligere nevnt, i merknad 2.20, så vil en slik linje N definere en pensel av kvadrikker som endrer signatur i punktene hvor N snitter D . Punktet hvor N krysser linjen mellom områdene A og B er markert på figuren. Vi ser at multiplisiteten til diskriminanten i dette punktet er en. Dette medfører at determinanten til penselen definert av linjen N vil ha en enkel rot i dette punktet. Ved observasjon 2.31 så må kvadrikkene definert av linjen N ha ulik signatur på ulike sider av en enkel rot. Ettersom signaturen til kvadrikkene definert av punktene i området A er $(4, 0)$, så vil signaturen til snittpunktet måtte være $(3, 0)$, og signaturen til kvadrikkene i området B må være $(3, 1)$. På denne måten kan vi fylle in signaturen til alle de ulike områdene $A - G$.

Linjen N går gjennom et punkt som grenser til både områdene A og E i figuren. Vi ser at diskriminanten har multiplisitet to i dette punktet. Signaturen til kvadrikkene definert av dette punktet må dermed være enten $(2, 0)$ eller $(1, 1)$. Men dersom signaturen til kvadrikkene definert av dette punktet var $(1, 1)$, så ville linjen N ha definert en pensel av kvadrikker hvor en kvadrikk med signatur $(1, 1)$ grenset til et segment i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ som definerte kvadrikker av signatur $(4, 0)$. Ved lemma 2.7 følger det at dette ikke er mulig, og dermed må dette punktet definere en kvadrikk av signatur $(2, 0)$.

Legg for øvrig merke til at alle linjer som går gjennom området A definerer definnitte pensler. Ettersom vi allerede har klassifisert disse, kan vi alternativt bruke denne klassifikasjonen til å bestemme signaturen i de ulike områdene på figuren. Linjen N definerer for eksempel en definnitt pensel med samme signaturmønster som penselen i eksempel 3.19, i.e. en definnitt pensel med signaturmønster $(0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 2)(2, 2)(2, 0)(4, 0)$

Det kan verifiseres fra figuren at linjene L_1, L_2 og L_3 definerer pensler av kvadrikker, med henholdsvis følgende signaturmønster:

1. $(3, 1)(2, 1)(2, 2)(1, 1)(2, 2)(1, 2)(1, 3)$
2. $(2, 2)(2, 1)(3, 1)(1, 1)(1, 3)(1, 2)(2, 2)$
3. $(2, 2)(2, 1)(3, 1)(2, 0)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$

■

3.5.3 $\det M(s, t) = l_0(P)^2 l_1(P)^2 = 2$

Vi antar nå at $\det M(P)$ har to røtter av multiplisitet to, P_0 og P_1 , og dermed at $\text{null } M(P_0) = \text{null } M(P_1) = 2$. De to røttene vil dele $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ opp i to segmenter som definerer kvadrikker av rang fire. Signaturen til kvadrikkene

definert av de to segmentene kan være $(2, 2)$ og/eller $(3, 1)$.

Anta først at et av segmentene definerer kvadrikker med signatur $(2, 2)$ og det andre segmentet definerer kvadrikker med signatur $(3, 1)$. Ettersom vi kan starte avlesningen av signaturmønsteret hvor vi vil, så kan vi skrive signaturmønsteret på formen $(1, 3) \text{sign } M(P_0)(2, 2) \dots (3, 1)$. Ettersom egenverdiene til en diagonal pensel bestemmes av lineære funksjoner ser vi at $\text{sign } M(P_0)$ må være $(1, 2)$ eller $(0, 1)$, men dette impliserer at det $M(P)$ har en enkel rot, eller en trippel rot, noe som er en selvmotsigelse.

Anta nå at begge segmentene definerer kvadrikker med signatur $(2, 2)$. Signaturmønsteret vil da kunne skrives på formen $(2, 2) \text{sign } M(P_0) \dots \text{sign } M(P_1)(2, 2)$. Legg merke til at signaturen til verken $M(P_0)$ eller $M(P_1)$ kan være $(2, 0)/(0, 2)$. Dersom dette var tilfellet, så ville penselen være definnitt, ettersom egenverdiene er lineære funksjoner. Eneste mulige signaturmønster blir dermed $(2, 2)(1, 1)(2, 2)(1, 1)(2, 2)$. Dette signaturmønsteret er realisert i eksempel 3.24.

Anta til slutt at begge segmentene definerer kvadrikker med signatur $(3, 1)$. Signaturmønsteret vil da kunne skrives på formen $(1, 3) \dots (3, 1)$. Signaturen til kvadrikkene definert av røttene P_0 og P_1 kan ikke begge to være $(2, 0)$. I dette tilfellet ville vi fått et signaturmønster av typen $(1, 3)(0, 2) \dots (2, 0)(3, 1)$. Ettersom egenverdiene endrer seg som lineære funksjoner følger det at signaturmønsteret blir på formen $(1, 3)(0, 2)(1, 3)(2, 0)(3, 1)$, noe som er en selvmotsigelse til lemma 2.7. Dersom signaturen til kvadrikkene definert av røttene P_0 og P_1 begge to var $(1, 1)$ ville vi fått et signaturmønster av typen: $(1, 3)(1, 1)(3, 1)(1, 1)(3, 1)$. Men dette signaturmønsteret impliserer at en egenverdi har endret fortegn to ganger, noe som ikke er mulig. Signaturmønsteret $(1, 3)(1, 1)(3, 1)(2, 0)(1, 3)$ eksisterer imidlertid, og dette er bevist i eksempel 3.25.

Eksempel 3.24. Signaturmønster $(2, 2)(1, 1)(2, 2)(1, 1)(2, 2)$

La (A, B) være en pensel av kvadrikker definert av følgende matrise:

$$\begin{pmatrix} s & & & \\ & -s & & \\ & & s+1 & \\ & & & s-1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Tabellen nedenfor viser signaturmønsteret til penselen av kvadrikker (A, B) :

Tabell 3.5

s	-1		0		
s	-	-	-	0	+
$-s$	+	+	+	0	-
$s + 1$	-	0	+	+	+
$-s - 1$	+	0	-	-	-
sign	(2,2)	(1,1)	(2,2)	(1,1)	(2,2)

■

Eksempel 3.25. Signaturmønster: $(1, 3)(1, 1)(3, 1)(2, 0)(3, 1)$

La (A, B) være en pensel av av kvadriker definert ved følgende matrise:

$$\begin{pmatrix} s+1 & & & & \\ & s+1 & & & \\ & & s & & \\ & & & -s & \\ & & & & \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Tabellen nedenfor viser signaturmønsteret til penselen av kvadriker (A, B) :

Tabell 3.6

s	-1		0		
$s + 1$	-	0	+	+	+
$s + 1$	-	0	+	+	+
s	-	-	-	0	+
$-s$	+	+	+	0	-
sign	(1,3)	(1,1)	(3,1)	(2,0)	(3,1)

■

3.5.4 $\det M(P) = l_0(P)^3 l_1(P)$

Vi antar nå at $\det M(P)$ en rot P_0 av multiplisitet tre og en rot P_1 av multiplisitet en. Ettersom penselen er diagonal vet vi at $\text{null } M(P_0) = 3$ og $\text{null } M(P_1) = 1$.

De to røttene P_0 og P_1 deler $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ opp i to segmenter som definerer kvadriker av rang fire. Signaturen til kvadrikkene definert av punktene på ulike sider av den enkle roten P_1 kan ved observasjon 2.31 ikke være den samme. Signaturen til kvadrikkene definert av punktene på ulike sider av punktet P_1 må dermed være $(2, 2)$ og $(3, 1)$. Dette impliserer at signaturen til

kvadriken definert av P_1 må være $(2, 1)$. Signaturmønsteret kan dermed skrives på formen $(1, 3)(1, 2)(2, 2) \text{ sign } M(P_0)(3, 1)$. Etersom vi antar at P_0 er en rot av multiplisitet tre, følger det at $\text{null } M(P_0) = 3$. Dermed må vi ha at $\text{sign } M(P_0) = (1, 0)$. Dette impliserer at signaturmønsteret blir $(1, 3)(1, 2)(2, 2)(1, 0)(3, 1)$, et signaturmønster som er realisert eksempel 3.26.

Eksempel 3.26. $(1, 3)(1, 2)(2, 2)(1, 0)(3, 1)$

La (A, B) være en pensel av kvadriker definert ved følgende matrise:

$$\begin{pmatrix} s+t & & & & \\ & s & & & \\ & & s & & \\ & & & s & \\ & & & & -s \end{pmatrix}$$

Tabellen nedenfor viser signaturmønsteret til penselen av kvadriker (A, B) :

Tabell 3.7

s	-1			0	
$s+1$	-	0	+	+	+
s	-	-	-	0	+
s	-	-	-	0	+
$-s$	+	+	+	0	-
sign	(1,3)	(1,2)	(2,2)	(1,0)	(3,1)



Kapittel 4

Ikke-diagonale pensler

I dette kapitlet studerer vi ikke-diagonale pensler. I første del av kapitlet studerer vi pensler med konstant signatur. Resten av kapitlet er viet til klassifikasjonen av de resterende ikke-diagonale penslene.

4.1 Pensler med konstant signatur

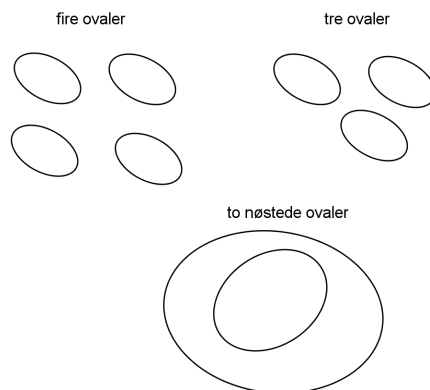
Det viser seg at dersom en pensel har konstant signatur, så må signaturen være $(2, 2)$. Det første vi kan legge merke til i dette henseendet er at dersom en pensel er definit, i.e. dersom en pensel inneholder en kvadrikk av signatur $(4, 0)$, så vil den være ekvivalent med en pensel på formen (I, D) . Etersom en diagonal pensel har fire røtter i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ telt med multiplisitet, så følger det at en pensel med konstant signatur, ikke vil ha signatur $(4, 0)$. For å vise at det ikke finnes noen pensler av kvadrikker med konstant signatur $(3, 1)$, vil vi ta utgangspunkt i diskriminanten til en pensel.

La $L \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, gitt ved $\lambda = 0$, betegne linjen som definerer penselen (A, B) . La $D \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ være diskriminanten til (A, B) , definert ved $f(\lambda, s, t) = \det(\lambda I - (sA + tB)) = 0$. Det første vi kan merke oss er at dersom en pensel har konstant signatur, så må $L \cap D = \emptyset$. Dette betyr kurven D vil være kompakt i st -planet.

4.1.1 Pensler med konstant signatur og glatt diskriminant

La oss først anta at diskriminanten D er glatt. Det finnes bare seks ulike topologisk typer glatte fjerdegradskurver i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$: fire ovaler, tre ovaler, to ovaler som ikke er nøstet sammen, en oval, to ovaler nøstet sammen og den tomme mengden [PSV11]. I figur 4.1 er noen av disse illustrert.

Figur 4.1: Glatte fjerdegradskurver

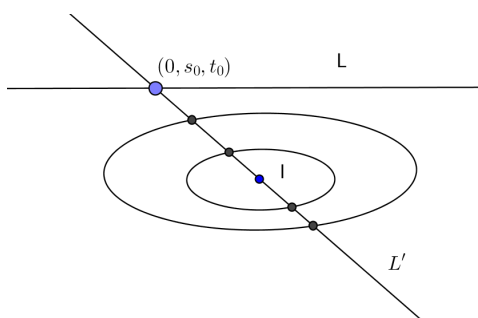


I vårt tilfelle vet vi at det finnes et punkt $(1, 0, 0) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ som er slik at enhver linje som går gjennom dette punktet snitter diskriminanten $D \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ fire ganger, telt med multiplisitet. Dette medfører at fjerdegradskurven må være av den topologiske typen "to nøstede ovaler". For uansett hvor vi tenker oss at punktet $(1, 0, 0)$ befinner seg når vi har å gjøre med en av de andre kandidatene, så vil det finnes linjer som ikke møter kurven i fire punkt.

Dersom vi antar at diskriminanten er glatt, så må den altså være av typen "to nøstede ovaler". Vi ser at enhver linje L' gjennom et punkt innenfor den "nøstede ovalen" til et punkt $(0, s_0, t_0)$ på linjen L , vil snitte grafen D i fire ulike punkt.

I figur 4.2 nedenfor er en slik linje L' tegnet inn. Vi tenker oss altså at D ligger i st -planet og at linjen L i det uendelig fjerne er trukket inn i bildet. En slik linje L' er gitt ved $\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, s_0, t_0)$, der $(\alpha, \beta) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$.

Figur 4.2



Som beskrevet i seksjon 3.2 antar vi at ethvert punkt $(\alpha, \beta s_0, \beta t_0)$ på linjen L' definerer en kvadrikk $Q_{(\alpha, \beta s_0, \beta t_0)} = V(x^T(\alpha I - \beta(s_0 A + t_0 B))x)$.

Linjen L' vil altså definere en pensel av kvadriker $(I, (s_0A + t_0B))$, definert av matrisen $W(\alpha, \beta) = (\alpha I + \beta(s_0A + t_0B))$. Etersom $\text{sign} W(1, 0) = \text{sign}(I + 0(s_0A + t_0B)) = (4, 0)$ følger det at penselen er definit.

Dessuten ser vi at linjen L' krysser D i fire ulike punkt P_i . Fra figuren ser vi at $\mu_{P_i}(D) = I_{P_i}(L' \cap D) = 1$. Dette betyr at det $W(\alpha, \beta)$ har fire ulike røtter i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$.

Fra vår klassifikasjon av definte pensler i seksjon 3.3 vet vi at dersom en definit pensel er definert av en matrise $W(\alpha, \beta)$ som har fire ulike røtter i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, så må penselen ha følgende signatormønster: $(0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 2)(2, 2)(2, 1)(3, 1)(3, 0)(4, 0)$.

Etersom $\text{sign} Q_I = (4, 0)$ så følger det at signaturen til kvadrikkene definert av punktene innenfor den innerste ovalen, må alle sammen ha signatur $(4, 0)$. Dermed følger det at segmentet av linjen L' som ligger i dette området definerer kvadriker av signatur $(4, 0)$. Etersom vi også kjenner signatormønsteret til penselen definert av L' , kan vi nå fylle dette inn langs linjen L' . Vi ser dermed at signaturen til kvadrikkene definert av punktene på utsiden av den ytterste ovalen, må bli $(2, 2)$. Dermed har vi vist at dersom en pensel av kvadriker har konstant signatur og glatt diskriminant, så har den konstant signatur $(2, 2)$.

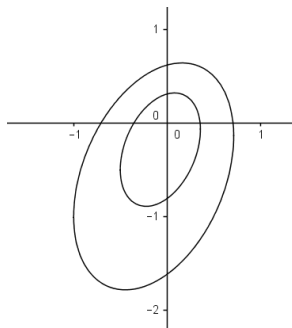
Eksempel 4.1 viser en pensel med konstant signatur og glatt diskriminant.

Eksempel 4.1. Signatormønster: $(2, 2)$

$$M(s, t) = \begin{bmatrix} s & s-t & 0 & 0 \\ s-t & s+t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2s & 2(s-t) \\ 0 & 0 & 2(s-t) & 2(s+t) \end{bmatrix}$$

Determinanten til $M(s, t)$ blir $4(2s^2 - st + t^2)^2$. Figur 4.3 viser den affine delen av diskriminanten tilhørende penselen definert av matrisen $M(s, t)$. Kurven er definert ved $\det(I - M(s, t)) = 0$ og ligger i st -planet.

Figur 4.3



■

4.1.2 Pensler med konstant signatur

Dersom kurven ikke nødvendigvis er glatt, vet vi ikke nøyaktig hvordan kurven D ser ut. Merk imidlertid at ettersom linjen L ikke skjærer kurven D definert ved fjerdegradspolynommet $f(\lambda, s, t)$, så kan ikke fjerdegradspolynommet f inneholde noen reelle lineære faktorer. Det homogene fjerdegradspolynommet $f(\lambda, s, t)$ må altså faktoriseres på en av følgende tre måter:

1. $g_1(\lambda, s, t)g_2(\lambda, s, t)$
2. $h(\lambda, s, t)$
3. $g_1(\lambda, s, t)^2$

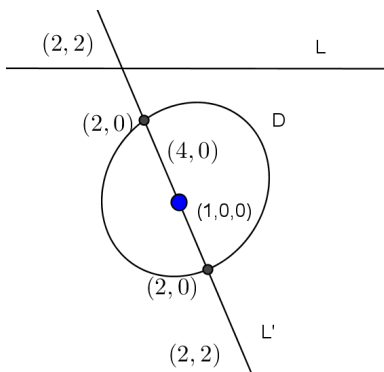
Her er g_1 og g_2 vilkårlige reelle, irreducible andregradspolynom i tre variable, og h er et reelt, irreducibelt homogent fjerdegradspolynom i tre variable.

I de to første tilfellene vet vi at kurven D vil ha endelig mange singulariteter. En generell linje gjennom punktet $(1, 0, 0)$ vil altså treffe D i fire ulike punkt. Dermed får vi ved samme argumentasjon som vi brukte da kurven var glatt, at signaturen til penselen må være konstant $(2, 2)$.

I det tredje tilfellet, hvor $f(\lambda, s, t) = g(\lambda, s, t)^2$, så vil diskrimanten D bestå av en lukket kurve som er slik at multiplisiteten til alle punkter på kurven er to. Dette medfører at enhver linje L' gjennom punktet $(1, 0, 0)$ vil treffe D i to ulike punkt P_0 og P_1 . Nulliteten til kvadrikkene Q_{P_0} og Q_{P_1} vil dermed være to. Signaturen innenfor den lukkede kurven hvor punktet $(1, 0, 0)$ ligger må være $(4, 0)$. En linje L' gjennom punktet $(1, 0, 0)$ vil dermed definere en definit pensel med to singulære kvadrikker, begge med nullitet lik to. Fra seksjon 3.4.3 vet vi at den eneste definitive penselen som inneholder to kvadrikker av nullitet to, har følgende signaturmønster:

$(4, 0)(2, 0)(2, 2)(4, 0)$. Ved å fylle inn dette signaturmønsteret langs linjen L' , ser vi av figur 4.4 at signaturen i området hvor linjen L befinner seg er $(2, 2)$.

Figur 4.4



Dermed har vi vist at dersom en pensel har en konstant signatur, så har den signatur $(2, 2)$.

Eksempel 4.2 viser en pensel som har en diskriminant D definert ved et polynom på formen $g(\lambda, s, t)^2$.

Eksempel 4.2. La (A, B) være en pensel av kvadriker definert ved følgende matrise:

$$sA + tB = \begin{bmatrix} -s & 0 & 0 & t \\ 0 & -s & t & 0 \\ 0 & t & s & 0 \\ t & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

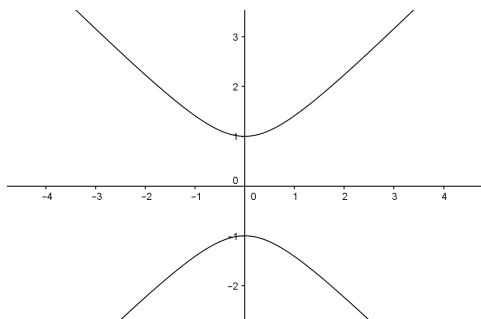
Det kan verifiseres at $\det M(s, t) = (s^2 + t^2)^2$. Røttene til dette polynomet, begge med multiplisitet to, er $(1, i)$ og $(1, -i)$. Altså endres ikke signaturen i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. For å finne signaturmønsteret holder det dermed å sjekke signaturen i et vilkårlig punkt. Siden $\text{sign } A = (2, 2)$ følger det dermed at signaturen er konstant $(2, 2)$.

Diskriminanten til penselen er definert ved følgende polynom

$$\det(\lambda I - (sA + tB)) = \begin{vmatrix} \lambda + s & 0 & 0 & t \\ 0 & \lambda + s & t & 0 \\ 0 & t & \lambda - s & 0 \\ t & 0 & 0 & \lambda - s \end{vmatrix} = (\lambda^2 - s^2 - t^2)^2$$

Den affine delen av diskriminanten i $s\lambda$ -planet, definert ved $(\lambda^2 - s^2 - 1)^2 = 0$, er illustrert i figur 4.5 nedenfor.

Figur 4.5



■

4.2 Klassifikasjon av ikke-diagonale pensler

Vi vil klassifisere de ikke-diagonale penslene på samme måte som vi har klassifisert de diagonale penslene, ved først å dele dem opp i kategorier ut fra hvordan determinanten faktoriserer. Vi vil også bruke samme notasjon som i klassifikasjonen av diagonale pensler. For å betegne determinanten til en generell ikke-diagonal pensel (A, B) vil vi bruke notasjonen $\det sA + tB = \det M(s, t) = \det M(P)$, hvor altså $M(P) \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$ er matrisen som definerer penselen. Merk at dersom $\det M(P) = l_0(P)l_1(P)l_2(P)l_3(P)$, der $l_i(P) \neq l_j(P)$ er reelle lineære former, så følger det fra lemma 3.10 at penselen er diagonal. Dersom $\det M(s, t) = m_0(s, t)m_1(s, t)$, der $m_1(s, t)$ og $m_2(s, t)$ er irreducible, reelle kvadratiske former i to variabler, så har $\det M(s, t)$ ingen røtter $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. I dette tilfellet vet vi at signaturen må være konstant $(2, 2)$. Vi kan altså se bort fra disse tilfellene. De resterende måtene determinanten til en ikke-diagonal pensel kan faktoriserer er vist i tabell 4.1.

I tabellen er $P_i \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ som vanlig en rot tilhørende en reell, lineær form $l_i(P)$. Ved korollar 3.9 vet vi at en pensel som har en determinant med fire røtter i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ telt med multiplisitet er diagonal hvis og bare hvis alle røttene til penselens determinant er regulære. Ettersom vi nå kun er interessert i ikke-diagonale pensler insisterer vi på at $\det M(P)$ må ha minst en irregulær rot, slik det fremgår av tabellen. Dersom determinanten til en pensel har komplekse røtter, så vil denne penselen automatisk være ikke-diagonal.

Tabell 4.1

$\det M(P)$	$\text{null } M(P_0)$	$\text{null } M(P_1)$	$\text{null } M(P_2)$
$l_0(P)^4 l_1(P)$	1,2,3	1	
$l_0(P)^3 l_1(P)$	1,2	1	
$l_0(P)^2 l_1(P) l_2(P)$	1	1	1
$l_0(P)^2 l_1(P)^2$	1	1,2	
$m(P) l_0(P)^2$	1,2		
$m(P) l_0(P) l_1$	1	1	

Før vi går igang med selve klassifikasjonen skal vi ta med et nyttig lemma. Vi har tidligere sett at dersom en pensel er definit, så vil den kunne skrives på formen (I, D) . Penselen vil med andre være diagonal. Dermed har vi følgende:

Lemma 4.3. *Dersom en kvadrikk i en ikke-diagonal pensel har rang fire, så vil kvadrikkens signatur være $(3, 1)$ eller $(2, 2)$*

4.2.1 $\det M(P) = l_0(P)^4$

I denne seksjonen antar vi at $\det M(P)$ har en rot $P_0 \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ av multiplisitet fire. Ved lemma 2.26 medfører dette at $I_{P_0}(L \cap D) = 4$, der $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ er linjen som definerer penselen, og D er penselens diskriminant. For å sikre at roten skal være irregulær insisterer vi på at $\text{null } M(P_0)$ skal være 1,2 eller 3, slik det fremgår i tabellen ovenfor. Vi vil se på disse tilfellene hver for seg. Merk at siden roten P_0 er irregulær i alle disse tilfellene så følger det fra korollar 2.30 at diskriminanten D tangerer linjen L i punktet P_0 .

Legg også merke til at dersom $\det M(P) = l_0(P)^4$ så vil signaturen kun endres i punktet P_0 . For å bestemme signaturmønsteret til slike pensler er det derfor tilstrekkelig å finne signaturen til kvadrikk definert av punktet P_0 , og en annen vilkårlig kvadrikk i penselen.

$\det M(P) = l_0(P)^4$, $\text{null } M(P_0) = 3$

Vi antar altså nå at P_0 er en rot tilhørende $M(P)$ av multiplisitet 4. Videre antar vi at $\text{null } M(P_0) = 3$. Dette medfører at $\text{sign } Q_{M(P_0)} = (1, 0)$, hvor altså $Q_{M(P_0)}$ er kvadrikk definert av matrisen $M(P_0)$.

Ettersom ingen kvadrikker i penselen kan ha signatur $(4, 0)$, så må kvadrikkene i penselen dermed enten ha signatur $(3, 1)$ og $(1, 0)$, eller $(2, 2)$ og $(1, 0)$. De potensielle signaturmønstrene blir dermed $(1, 3)(1, 0)(3, 1)$ og $(2, 2)(1, 0)(2, 2)$. Signaturmønstrene er realisert i henholdsvis eksempel 4.4 og 4.5.

Eksempel 4.4. Signaturmønster: $(2, 2)(1, 0)(2, 2)$

$$M(s, t) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ettersom $\det M(s, t) = t^4$ ser vi at punktet $(1, 0)$ er en rot tilhørende $\det M(s, t)$ av multiplisitet fire. Det kan sjekkes ved innsetting at $\text{sign } M(1, 0) = (1, 0)$.

Det holder å sjekke signaturen i et annet vilkårlig punkt $(s, t) \neq (1, 0)$ for å fastslå signaturmønsteret til penselen:

$$\det \lambda I - M(0, 1) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda^2 - 1)^2 \quad (4.2)$$

$M(0, 1)$ har altså egenverdiene $\lambda = \pm 1$, begge av multiplisitet to. Signaturen til kvadrikkene i penselen definert av matrisen $M(s, t)$ er dermed $(2, 2)$ i alle punkt utenom punktet $(1, 0)$, hvor den er $(1, 0)$. Signaturmønsteret blir dermed $(2, 2)(1, 0)(2, 2)$. ■

Eksempel 4.5. Signaturmønster: $(1, 3)(1, 0)(3, 1)$

$$M(s, t) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ettersom $\det M(s, t) = -t^4$ så følger det at $(1, 0)$ er rot av multiplisitet fire. Det kan også sjekkes at $\text{sign } M(1, 0) = (1, 0)$

For å fastslå hva signaturmønsteret er, kan vi sjekke signaturen til en kvadrikk definert av et punkt $(s, t) \neq (1, 0)$. For enkelthets skyld sjekker vi signaturen i punktet $(0, 1)$:

$$\det(\lambda I - M(0, 1)) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 - 1) \quad (4.3)$$

Egenverdiene til $M(0, 1)$ er altså 1 av multiplisitet tre, og -1 av multiplisitet en. Alle kvadrikkene i penselen definert av $M(s, t)$ har altså signatur $(3, 1)$ utenom kvadrikken definert av punktet $(1, 0)$, som altså har signatur $(1, 0)$.

Signaturmønsteret til penselen av kvadriker definert av matrisen $M(s, t)$ blir dermed $(1, 3)(1, 0)(3, 1)$. ■

$\det M(P) = l_0(P)^4$, $\text{null } M(P_0) = 2$

Vi antar nå at P_0 er en rot tilhørende $M(P)$ av multiplisitet fire. Videre antar vi at $\text{null } M(P_0) = 2$. Dette medfører at $\text{sign } Q_{M(P_0)}$ er enten $(1, 1)$ eller $(2, 0)$. Ved lemma 4.3 vil kvadrikkene i penselen dermed ha følgende signatur:

1. $(3, 1)$ og $(2, 0)$
2. $(2, 2)$ og $(2, 0)$
3. $(2, 2)$ og $(1, 1)$
4. $(3, 1)$ og $(1, 1)$

Alternativ 1 impliserer at alle punktene i penselen definerer kvadriker av rang $(3, 1)$, utenom punktet P_0 , som definerer en kvadrikk av rang $(2, 0)$. Signaturmønsteret kan da skrives på formen $(1, 3) \text{ sign } M(P_0)(3, 1)$. Men vi ser at $\text{sign } M(P_0)$ verken kan være $(2, 0)$ eller $(0, 2)$, og dermed kan vi se bort fra dette tilfellet.

Dersom signaturen til kvadrikkene i en pensel er $(2, 2)$ og $(2, 0)$, så må signaturmønsteret til penselen bli $(2, 2)(2, 0)(2, 2)$. Dersom signaturen til kvadrikkene i en pensel er $(2, 2)$ og $(1, 1)$, så signaturmønsteret til penselen bli $(2, 2)(1, 1)(2, 2)$. Disse to signaturmønstrene er realisert i eksempel 4.6.

Dersom signaturen til kvadrikkene i en pensel er $(3, 1)$ og $(1, 1)$, så må signaturmønsteret til penselen bli $(1, 3)(1, 1)(3, 1)$. Dette signaturmønsteret er realisert i eksempel 4.7.

Eksempel 4.6. Signaturmønster: $(2, 2)(2, 0)(2, 2)$ og $(2, 2)(1, 1)(2, 2)$

I dette eksempelet symboliserer $M^{+/-}(s, t)$ to ulike matriser som definerer to ulike pensler av kvadriker.

$$M^{+/-}(s, t) = \begin{bmatrix} \pm s & 0 & 0 & t \\ 0 & s & t & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det kan sjekkes at $\det M^{+/-}(s, t) = t^4$, $\text{sign } M^+(1, 0) = (2, 0)$ og $\text{sign } M^-(1, 0) = (1, 1)$.

I likning (4.2) ovenfor regnet vi ut at $\text{sign } M(0, 1) = (2, 2)$. Signaturmønsteret til penslene definert av matrisene $M^+(s, t)$ og $M^-(s, t)$ blir dermed henholdsvis $(2, 2)(2, 0)(2, 2)$ og $(2, 2)(1, 1)(2, 2)$, ■

Eksempel 4.7. Signaturmønster: $(1, 3)(1, 1)(3, 1)$

$$M(s, t) = \begin{bmatrix} 0 & s & 0 & t \\ s & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ettersom $\det M(s, t) = -t^4$ så følger det at $(1, 0)$ er rot av multiplisitet fire. At $\text{sign } M(1, 0) = (1, 1)$ er verifisert ved utregning nedenfor:

$$\det(\lambda I - M(1, 0)) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 1) \quad (4.4)$$

Fra utregningen i likning (4.3) ovenfor har vi at $\text{sign } M(0, 1) = (3, 1)$. Dermed må signaturmønsteret være $(1, 3)(1, 1)(3, 1)$. ■

$\det M(P) = l_0(P)^4$, $\text{null } M(P_0) = 1$

Vi antar nå at P_0 er en rot tilhørende $\det M(P)$ av multiplisitet fire, og at $\text{null } M(P_0) = 1$. Dette medfører at $\text{sign } M(P_0)$ er enten $(2, 1)$ eller $(3, 0)$. Ved lemma 4.3 vil kvadrikkene i penselen dermed enten ha signatur

1. $(2, 2)$ og $(3, 0)$
2. $(2, 2)$ og $(2, 1)$
3. $(3, 1)$ og $(2, 1)$
4. $(3, 1)$ og $(3, 0)$

Den første kandidaten kan vi utelukke ved lemma 2.7. Et segment i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ som definerer kvadrikk av signatur $(2, 2)$ kan ikke grense til et punkt som definerer en kvadrikk av signatur $(3, 0)$.

Den andre kandidaten impliserer et signaturmønster av typen $(2, 2)(2, 1)(2, 2)$, og er realisert i eksempel 4.8 nedenfor.

Den tredje og fjerde kandidaten kan vi også utelukke ved lemma 2.7. Den tredje kandidaten vil implisere at det finnes pensler med et signaturmønster av typen: $(1, 3) \text{ sign } M(P_0)(3, 1)$, der $\text{sign } M(P_0)$ er $(2, 1)$ eller $(1, 2)$. Men ettersom egenverdiene til en matrise er kontinuerlig avhengig av koeffisientene i matrisen, så kan ikke slike signaturmønster eksistere.

Den fjerde kandidaten vil implisere at det finnes pensler med et signaturmønster av typen $(1, 3) \text{ sign } M(P_0)(3, 1)$, der $\text{sign } M(P_0)$ er $(3, 0)$ eller $(0, 3)$, som igjen er en selvmotsigelse til at egenverdiene er kontinuerlig avhengig av koeffisientene i matrisen.

Eksempel 4.8. Signaturmønster: $(2, 2)(2, 1)(2, 2)$

$$M(s, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s & t \\ 0 & s & t & 0 \\ s & t & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ettersom $\det M(s, t) = -t^4$ følger $\det(1, 0)$ er en rot av multiplisitet fire. Fra likning (4.2) vet vi at $\text{sign } M(0, 1) = (2, 2)$. At $\text{sign } M(1, 0) = (2, 1)$ er et resultat av følgende utregning:

$$\det \lambda I - M(1, 0) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

Signaturmønsteret blir dermed $(2, 2)(2, 1)(2, 2)$. ■

4.2.2 $\det M(P) = l_0(P)^3 l_1(P)$

Vi antar nå at P_0 er en rot tilhørende $\det M(P)$ av multiplisitet tre, og at P_1 er en enkel rot.

Ved lemma 2.26 medfører dette at $I_{P_0}(L \cap D) = 3$, og at $I_{P_1}(L \cap D) = 1$, der $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ er linjen som definerer penselen, og D er penselens diskriminant. For å sikre at roten P_0 skal være irregulær insisterer vi på at $\text{null } M(P_0)$ skal være 1 eller 2, slik det fremgår i tabellen ovenfor. Vi vil se på disse to tilfellene hver for seg.

Legg merke til at de to røttene P_0 og P_1 tilhørende $\det M(P)$ vil dele $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ opp i to segmenter. P_1 er en enkel rot tilhørende $\det M(P)$ og ved observasjon 2.31 og lemma 4.3 følger det at signaturen til kvadrikkene definert av punktene i på ulike sider av punktet P_1 , må være $(3, 1)$ og $(2, 2)$. Signaturen til kvadrikkene definert av punktet P_1 må dermed være $(2, 1)$. Vi kan dermed anta at i alle tilfeller der $\det M(P) = l_0(P)^3 l_1(P)$, så vil signaturmønsteret kunne skrives på formen $(2, 2)(2, 1)(3, 1) \text{ sign } M(P_0)(2, 2)$.

$$\det M(P) = l_0(P)^3 l_1(P), \quad \text{null } M(P_0) = 1$$

Vi antar nå at $\text{null } M(P_0) = 1$. Dette medfører at $\text{sign } M(P_0)$ er $(3, 0)/(0, 3)$ eller $(2, 1)/(1, 2)$. Ettersom vi kan anta at signaturmønsteret er på formen $(2, 2)(2, 1)(3, 1)$ $\text{sign } M(P_0)(2, 2)$, ser vi at eneste mulighet er at $\text{sign } M(P_0)$ må være $(2, 1)$. At et slikt signaturmønsteret eksisterer, er bevist i eksempel 4.10 nedenfor.

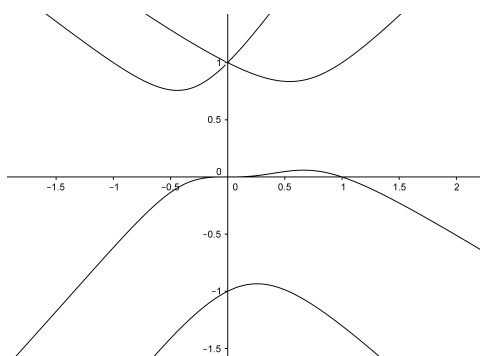
Merknad 4.9. I de resterende eksemplene i kapittelet viser vi utsnitt av en affin del av en pensels diskriminant i $s\lambda$ -planet, definert ved $\det \lambda I - (sA + B)$. Dette medfører at enhver vertikal linjen vil skjære diskriminanten i fire punkt telt med multiplisitet. De fire punktene er egenverdiene til matrisen $sA + B$.

Eksempel 4.10. Signaturmønster: $(2, 2)(2, 1)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$

$$M(s, t) = \begin{bmatrix} 0 & t & 0 & s \\ t & 0 & s & 0 \\ 0 & s & t & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det kan sjekkes at $\det M(s, t) = s^3(-t + s)$. Figur 4.6 nedenfor viser den affine delen av diskriminanten tilhørende penselen av kvadriker definert av matrisen $M(s, t)$. Kurven er definert ved $\det(\lambda I - M(s, 1)) = 0$ og ligger i $s\lambda$ -planet. Signaturmønsteret til penselen definert av matrisen $M(P)$ kan vi lese av fra figuren: $(2, 2)(2, 1)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$.

Figur 4.6



■

$$\det M(s, t) = l_0(s, t)^3 l_1(s, t), \quad \text{null } M(s_0, t_0) = 2$$

Vi antar nå at $\text{null } M(P_0) = 2$. Dette medfører at $\text{sign } M(P_0)$ er $(2, 0)/(0, 2)$ eller $(1, 1)$.

Ettersom vi kan anta at signaturmønsteret er på formen $(2, 2)(2, 1)(3, 1)$ sign $M(P_0)(2, 2)$, ser vi at sign $M(P_0)$ kan være både $(2, 0)$ og $(1, 1)$. Dermed får vi følgende to kandidater til signaturmønstre: $(2, 2)(2, 1)(3, 1)(2, 0)(2, 2)$ og $(2, 2)(2, 1)(3, 1)(1, 1)(2, 2)$. Dersom vi leser av det disse to signaturmønstrene fra høyre mot venstre, får vi henholdsvis signaturmønsteret $(2, 2)(2, 0)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$ og signaturmønsteret $(2, 2)(1, 1)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$. Begge disse kandidatene er realisert i eksempel 4.11 nedenfor.

Eksempel 4.11. Signaturmønster: $(2, 2)(2, 0)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$ og $(2, 2)(1, 1)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$

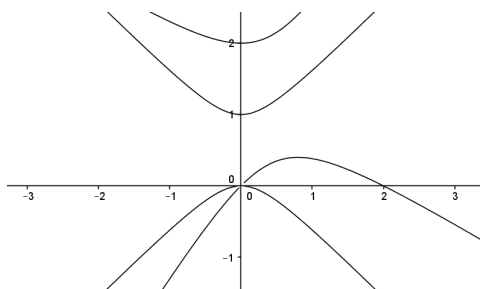
I dette eksempelet symboliserer $M^{+/-}(s, t)$ to ulike matriser som definerer to ulike pensler av kvadriker.

$$M^{+/-}(s, t) = \begin{bmatrix} \pm t & 0 & 0 & s \\ 0 & s & s & 0 \\ 0 & s & 2t & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

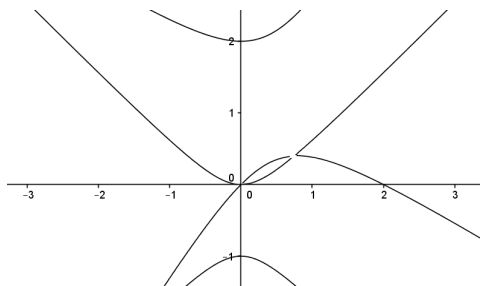
Det kan sjekkes at $\det M^{+/-}(s, t) = -s^3(2t - s)$. Figur 4.7 viser den affine delen av diskriminanten tilhørende penselen definert av matrisen $M^+(s, t)$. Kurven er definert ved $\det(\lambda I - M^+(s, 1)) = 0$ og ligger i $s\lambda$ -planet. Det kan sjekkes at signaturmønsteret til penselen av kvadriker definert ved matrisen $M^+(P)$ er $(2, 2)(2, 0)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$.

Figur 4.8 viser den affine delen av diskriminanten tilhørende penselen definert av matrisen $M^-(s, t)$, definert ved $\det(\lambda I - M^-(s, 1)) = 0$. Det kan sjekkes at signaturmønsteret til penselen av kvadriker definert ved matrisen $M^-(P)$ er $(2, 2)(1, 1)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$.

Figur 4.7



Figur 4.8



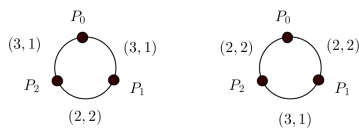
4.2.3 $\det M(P) = l_0(P)^2 l_1(P) l_2(P)$

I denne seksjonen antar vi at $\det M(P)$ har en rot P_0 av multiplisitet to, og to enkle røtter, P_1 og P_2 . For å sikre at penselen skal være ikke-diagonal insisterer vi på at $\text{null } M(P_0) = 1$.

Ved lemma 2.26 vet vi dessuten at $I_{P_0}(L \cap D) = 2$, og ved lemma 2.24 vet vi at $\mu_{P_0}(D) = 1$, der $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ er linjen som definerer penselen, og D er penselens diskriminant.

Ved lemma 2.31 vet vi at signaturen til kvadriker definert av punkter på ulike sider av en enkel rot i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ ikke kan være den samme. Ved lemma 4.3 følger det dermed at signaturen til kvadrikkene definert av punktene på ulike sider av de enkle røttene, P_1 og P_2 , må være $(2, 2)$ og $(3, 1)$. Signaturen til kvadrikkene definert av punktene P_1 og P_2 , må dermed være $(2, 1)$. Dette impliserer at signaturen til kvadrikkene i segmentet mellom P_1 og P_2 må være $(2, 2)$ eller $(3, 1)$, slik det vises i figuren nedenfor:

Figur 4.9



Anta først at signaturen til kvadrikkene definert av punktene i segmentet mellom røttene P_1 og P_2 er $(2, 2)$. I dette tilfellet ser vi at signaturen til kvadrikkene definert av punktet P_0 , kan være både $(2, 1)$ og $(3, 0)$. Dersom vi starter avlesningen av signaturmønsteret i segmentet mellom P_0 og P_1 , så blir signaturmønsteret på formen $(2, 2)(2, 1)(3, 1) \text{ sign } M(P_0) \dots (2, 2)$. Vi vet at signaturen til kvadrikkene definert av punktet P_0 er $(3, 0)$ eller $(2, 1)$. Dermed ser vi at $\text{sign } M(P_0)$ kan være både $(3, 0)$ og $(2, 1)$. Dermed vil det

potentielt kunne eksistere signaturmønster av typen $(2, 2)(2, 1)(3, 1)(2, 1)\dots(2, 2)$ og $(2, 2)(2, 1)(3, 1)(3, 0)\dots(2, 2)$.

Ettersom vi antar at $I_{P_0}(D \cap L) = 2$ og $\mu_{P_0}(D) = 1$, vet vi for det første at diskriminanten tangerer linjen L i punktet P_0 . For det andre vet vi at diskriminanten ikke krysser linjen L i dette punktet, for i så fall måtte $I_{P_0}(D \cap L)$ ha vært minst tre. Dermed så må signaturen være den samme på ulike sider av punktet P_0 . De to potensielle signaturmønstrene blir dermed $(2, 2)(2, 1)(3, 1)(2, 1)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$ og $(2, 2)(2, 1)(3, 1)(3, 0)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$. Disse to kandidatene er realisert i eksempel 4.12.

Anta nå at signaturen til kvadrikkene definert av punktene i segmentet mellom røttene P_1 og P_2 er $(3, 1)$. Av figur 4.9 ser vi at signaturen til kvadrikken definert av punktet P_0 i dette tilfellet ikke kan være $(3, 0)$, men må være $(2, 1)$. Ved samme argumentasjon som ovenfor, så blir eneste kandidat til signaturmønster i dette tilfellet: $(1, 3)(1, 2)(2, 2)(2, 1)(2, 2)(2, 1)(3, 1)$. Denne kandidaten er realisert eksempel 4.13.

Eksempel 4.12. Signaturmønster: $(2, 2)(2, 1)(3, 1)(3, 0)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$ og $(2, 2)(2, 1)(3, 1)(2, 1)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$

I dette eksempelet antar vi at $M^{+/-}(s, t)$ symboliserer to ulike matriser som definerer to ulike pensler av kvadrikker.

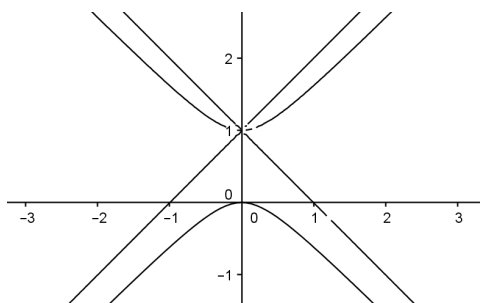
$$M(s, t) = \begin{bmatrix} \pm t & 0 & 0 & s \\ 0 & t & s & 0 \\ 0 & s & t & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det M(s, t) = -s^2(t + s)(t - s)$$

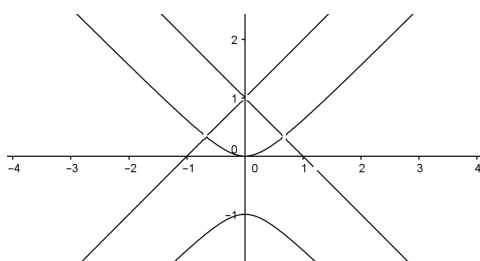
Figur 4.10 viser en affin del av diskriminanten til penselen definert av matrisen $M^+(s, t)$. Kurven er definert ved $\det \lambda I - M^+(s, 1) = 0$ og ligger i $s\lambda$ -planet. Det kan sjekkes fra figuren at signaturmønsteret til penselen definert av matrisen $M^+(s, t)$ er $(2, 2)(2, 1)(3, 1)(3, 0)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$

Figur 4.11 viser en affin del av diskriminanten til penselen definert av matrisen $M^-(s, t)$. Kurven er definert ved $\det \lambda I - M^-(s, 1) = 0$ og ligger i $s\lambda$ -planet. Det kan sjekkes fra figuren at signaturmønsteret til penselen definert av matrisen $M^-(s, t)$ er $(2, 2)(2, 1)(3, 1)(2, 1)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$.

Figur 4.10



Figur 4.11



■

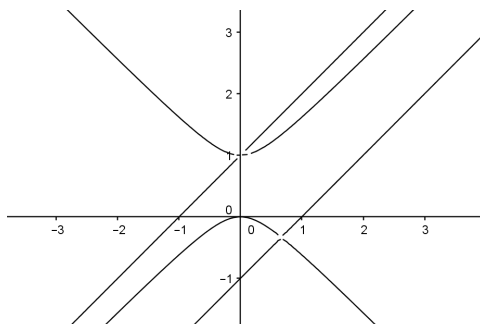
Eksempel 4.13. Signaturmønster: $(1, 3)(1, 2)(2, 2)(2, 1)(2, 2)(2, 1)(3, 1)$

$$M(s, t) = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 & s \\ 0 & s & t & 0 \\ 0 & t & s & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det M(s, t) = -t^2(t + s)(t - s)$$

Figur 4.12 viser den affine delen av diskriminanten til penselen definert av matrisen $M(s, t)$. Figuren viser kurven definert ved $\det(\lambda I - M(s, 1)) = 0$ og ligger i $s\lambda$ -planet. At signaturen er $(1, 3)(1, 2)(2, 2)(2, 1)(2, 2)(2, 1)(3, 1)$ kan bekreftes fra figuren.

Figur 4.12



4.2.4 $\det M(P) = l_0(P)^2 l_1(P)^2$

I denne seksjonen antar vi at $\det M(P) = l_0(P)^2 l_1(P)^2$, og at P_i er en rot tilhørende $l_i(P)$. For å sikre at penselen skal være ikke-diagonal insisterer vi på at $\text{null } M(P_0) = 1$. Vi vil se på de to tilfellen hvor $\text{null } M(P_1) = 1$ og $\text{null } M(P_1) = 2$ hver for seg.

Felles for de to tilfellene er at de to røttene P_0 og P_1 vil dele $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ opp i to segmenter hvor punktene definerer kvadrikker med signatur $(2, 2)$ og/eller $(3, 1)$. Ved lemma 2.26 og lemma 2.24 vet vi dessuten at $I_{P_0}(L \cap D) = 2$ og $\mu_{P_0}(D) = 1$, der $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ er linjen som definerer penselen, og D er penselens diskriminant. Vi vet dermed at D tangerer, men ikke krysser, linjen L i punktene P_0 og P_1 . Situasjonen er illustrert nedenfor:

Figur 4.13



Signaturen til kvadrikkene i de to segmentene som definerer kvadrikker av rang fire, må dermed være den samme.

$$\det M(P) = l_0(P)^2 l_1(P)^2, \quad \text{null } M(P_0) = 1, \quad \text{null } M(P_1) = 1$$

Vi antar nå at $\text{null } M(P_0) = \text{null } M(P_1) = 1$. Dette medfører at signaturen til kvadrikkene definert av punktene P_0 og P_1 er $(2, 1)$ eller $(3, 0)$.

Anta først at begge segmentene som definerer kvadrikker av rang fire, definerer kvadrikker av signatur $(2, 2)$. Et segment i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ som definerer kvadrikker av rang $(2, 2)$, kan ikke grense til en punkt som definerer en kvadrikk av signatur $(3, 0)$. Dermed må signaturen til kvadrikkene definert av P_0 og P_1

i dette tilfellet være $(2, 1)$. Signaturmønsteret må dermed være på formen $(2, 2)(1, 2)(2, 2)(2, 1)(2, 2)$ eller $(2, 2)(1, 2)(2, 2)(1, 2)(2, 2)$. De to signaturmønstrene er realisert i henholdsvis eksempel 4.14 og 4.15.

Anta nå at begge segmentene som definerer kvadrikker av rang fire, definerer kvadrikker av signatur $(3, 1)$. Dette impliserer at signaturmønsteret kan skrives på formen $(1, 3)\dots(3, 1)$. Både punktet P_0 og punktet P_1 vil være punkt hvor diskriminanten D til penselen tangerer, men ikke krysser linjen L , slik det er illustrert i figur 4.13. Det impliserer et signaturmønster på formen $(1, 3)\text{sign } M(P_0)(1, 3)\text{sign } M(P_1)(1, 3)$, noe som er en selvmotsigelse.

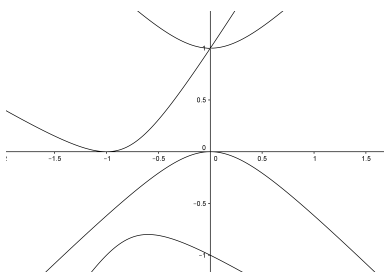
Eksempel 4.14. Signaturmønster: $(2, 2)(1, 2)(2, 2)(2, 1)(2, 2)$

$$M(s, t) = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 & s \\ 0 & s & s+t & 0 \\ 0 & s+t & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det M(s, t) = s^2(s+t)^2$$

Figur 4.14 viser den affine delen av diskriminanten til penselen av kvadrikker definert ved matrisen $M(s, t)$. Kurven ligger i $s\lambda$ -planet. Det kan sjekkes at signaturmønsteret er $(2, 2)(1, 2)(2, 2)(2, 1)(2, 2)$.

Figur 4.14



■

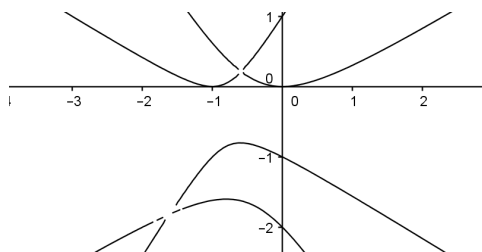
Eksempel 4.15. Signaturmønster: $(2, 2)(1, 2)(2, 2)(1, 2)(2, 2)$

$$M(s, t) = \begin{bmatrix} s-2t & 0 & 0 & s \\ 0 & s & s+t & 0 \\ 0 & s+t & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det M(s, t) = s^2(s+t)^2$$

Figur 4.15 viser den affine delen av diskriminanten til penselen av kvadrikker definert ved matrisen $M(s, t)$. Kurven ligger i $s\lambda$ -planet. Det kan sjekkes at signaturmønsteret er $(2, 2)(2, 1)(2, 2)(2, 1)(2, 2)$.

Figur 4.15



■

$\det M(s, t) = l_0(P)^2 l_1(P)^2$, $\text{null } M(P_0) = 1$, $\text{null } M(P_1) = 2$

Vi antar nå at $\text{null } M(P_0) = 1$ og at $\text{null } M(P_1) = 2$. Dette medfører at signaturen til kvadrikken definert av P_0 må være $(2, 1)$ eller $(3, 0)$, og at signaturen til kvadrikken definert av P_1 må være $(2, 0)$ eller $(1, 1)$. Punktene P_0 og P_1 deler opp $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ i to segmenter hvor punktene definerer kvadrikker med samme signatur. Legg merke til antakelsene nå impliserer at $I_{P_1}(D \cap L) = \mu_{P_1}(D) = 2$, i.e. at P_1 er en regulær rot.

Anta først at disse segmentene definerer kvadrikker med signatur $(2, 2)$. Etersom vi kan starte avlesningen av signaturmønsteret fra et valgfritt punkt i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, og lese i hvilken retning vi vil, kan vi anta at signaturmønsteret er på formen $(2, 2)(2, 1)(2, 2) \text{ sign } M(P_1)(2, 2)$. Etersom P_1 i dette tilfellet blir en regulær rot, så vet at diskriminanten krysser og ikke tangerer linjen som definerer penselen i punktet P_1 . Et signaturmønster på formen $(2, 2)(2, 1)(2, 2)(2, 0)(2, 2)$ impliserer at P_1 er et tangeringspunkt, og dermed må $\text{sign } M(P_1)$ være $(1, 1)$. Signaturmønsteret $(2, 2)(2, 1)(2, 2)(1, 1)(2, 2)$ er realisert i eksempel 4.16 nedenfor.

Anta nå begge segmentene som definerer kvadrikker av rang fire, definerer kvadrikker med signatur $(3, 1)$. Signaturmønsteret må da kunne skrives på formen $(1, 3) \text{ sign } M(P_0)(1, 3) \text{ sign } M(P_1)(3, 1)$. Signaturen til $M(P_0)$ ser vi at kan være både $(1, 2)$ og $(0, 3)$. Signaturen til $M(P_1)$ ser vi at ikke kan være $(2, 0)/(0, 2)$, ettersom egenverdiene endrer seg kontinuerlig. Signaturen til $M(P_1)$ må altså være $(1, 1)$. De to potensielle signaturmønstrene $(1, 3)(0, 3)(1, 3)(1, 1)(3, 1)$ og $(1, 3)(1, 2)(1, 3)(1, 1)(3, 1)$ er henholdsvis realisert i eksempel 4.17 og eksempel 4.18.

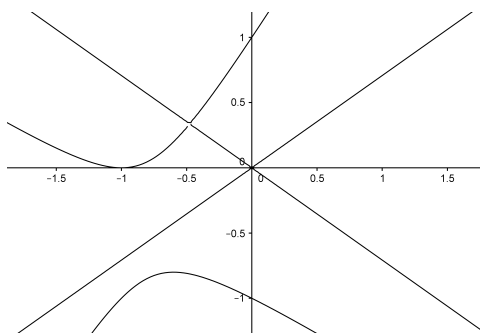
Eksempel 4.16. Signaturmønster: **$(2, 2)(1, 2)(2, 2)(1, 1)(2, 2)$**

$$M(s, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & s & s+t & 0 \\ 0 & s+t & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det M(s, t) = s^2(s + t)$$

Figur 4.16 viser den affine delen av diskriminanten tilhørende penselen definert av matrisen $M(s, t)$. Kurven er definert ved $\det(\lambda I - M(s, 1)) = 0$ og ligger i $s\lambda$ -planet. Signaturmønsteret kan vi lese av fra figuren: $(2, 2)(1, 2)(2, 2)(1, 1)(2, 2)$

Figur 4.16



■

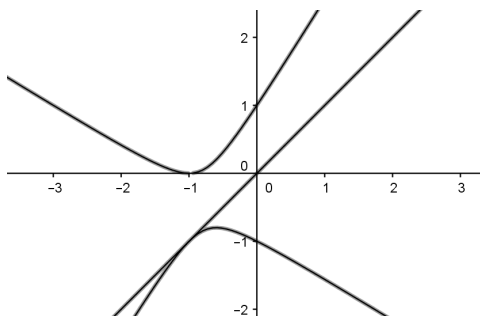
Eksempel 4.17. Signaturmønster: $(1, 3)(0, 3)(1, 3)(1, 1)(3, 1)$

$$M(s, t) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & s+t \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ s+t & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det M(s, t) = (s + t)^2 s^2$$

Figur 4.17 viser den affine delen av diskriminanten tilhørende penselen definert av matrisen $M(s, t)$. Linjen gjennom origo har multiplisitet to i alle punkt. Kurven er definert ved $\det(\lambda I - M(s, 1)) = 0$ og ligger i $s\lambda$ -planet. Det kan sjekkes fra figuren at signaturmønsteret er $(1, 3)(0, 3)(1, 3)(1, 1)(3, 1)$

Figur 4.17



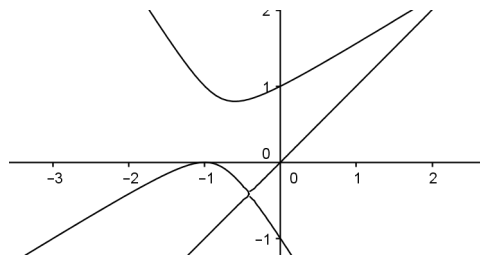
Eksempel 4.18. Signaturmønster: $(1, 3)(1, 2)(1, 3)(1, 1)(3, 1)$

$$M(s, t) = \begin{bmatrix} -s & 0 & 0 & s+t \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ s+t & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det M(s, t) = s^2(s+t)^2$$

Figuren 4.18 viser den affine delen av diskriminanten tilhørende penselen definert av matrisen $M(s, t)$. Linjen gjennom origo har multiplisitet to i alle punkt. Kurven er definert ved $\det(\lambda I - M(s, 1)) = 0$ og ligger i $s\lambda$ -planet. Signaturmønsteret kan vi lese av fra figuren: $(1, 3)(1, 2)(1, 3)(1, 1)(3, 1)$.

Figur 4.18



4.2.5 $\det M(P) = m(P)l_0(P)^2$

Vi antar nå at matrisen $M(P)$ definerer en pensel av kvadriker som er slik at $\det M(P) = m(P)l_0(s, t)^2$, der altså $m(P)$ er en irreduksibel reell kvadratisk form. Dette medfører at $\det M(P)$ kun har to røtter i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, telt med multiplisitet. Penselen er dermed ikke diagonal. Vi vil se på tilfellene der $\text{null } M(P_0) = 1$ og $\text{null } M(P_0) = 2$ hver for seg.

$\det M(P) = m(P)l_0(P)^2$, $\text{null } M(P_0) = 2$

Vi antar nå at $\det M(P)$ har en rot $P_0 \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ av multiplisitet to, og at $\text{null } M(P_0) = 2$. Dette medfører at P_0 er en regulær rot. Videre vet vi at punktet P_0 definerer en kvadrikk med signatur $(2, 0)$ eller $(1, 1)$.

Signaturen endres kun i punktet P_0 . Anta først at signaturen til kvadrikkene definert av alle andre punkt enn P_0 , er $(2, 2)$. Signaturmønsteret må da være på formen $(2, 2)(2, 0)(2, 2)$ eller $(2, 2)(1, 1)(2, 2)$. Det første tilfellet impliserer at diskriminanten har tangert linjen som definerer penselen i punktet

P_0 , og dette er en selmotsigelse til at P_0 er en regulær rot. Det andre tilfellet er realisert i eksempel 4.19.

Anta nå at signaturen til kvadrikkene definert av alle andre punkt enn P_0 er $(3, 1)$. Signaturmønsteret vil da kunne skrives på formen $(1, 3) \det M(P_0)(3, 1)$. Signaturen til kvadrikkene definert av P_0 vet vi er $(1, 1)$ eller $(2, 0)$. Dermed følger det at $\text{sign } M(P_0)$ må være $(1, 1)$ eller $(2, 0)/(0, 2)$. Ved lemma 2.7 følger det at signaturmønster av typen $(1, 3)(2, 0)(3, 1)$, eller av typen $(1, 3)(0, 2)(3, 1)$, ikke er mulig å realisere. Signaturmønsteret $(1, 3)(1, 1)(3, 1)$ er realisert i eksempel 4.20 nedenfor.

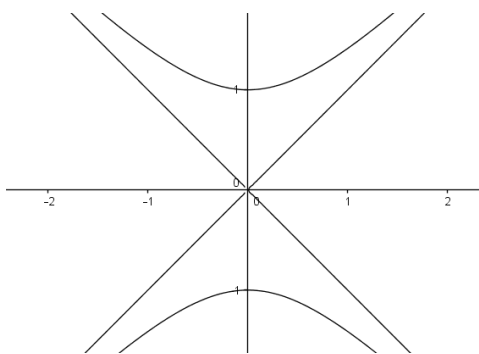
Eksempel 4.19. Signaturmønster: $(2, 2)(1, 1)(2, 2)$

$$M(s, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & -t & s & 0 \\ 0 & s & t & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det M(s, t) = s^2(t^2 + s^2)$$

Figur 4.19 viser den affine delen av diskriminanten tilhørende penselen definert av matrisen $M(s, t)$. Kurven er definert ved $\det(\lambda I - M(s, 1)) = 0$, og ligger i $s\lambda$ -planet. Signaturmønsteret kan vi lese av fra figuren: $(2, 2)(1, 1)(2, 2)$

Figur 4.19



■

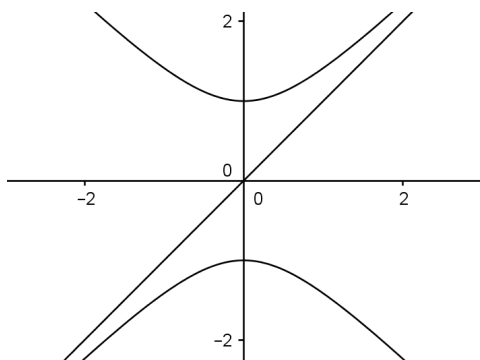
Eksempel 4.20. Signaturmønster: $(1, 3)(1, 1)(3, 1)$

$$M(s, t) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & t \\ 0 & 0 & t & -s \end{bmatrix}$$

$$\det M(s, t) = s^2(s^2 + t^2)$$

Figur 4.20 nedenfor viser den affine delen av diskriminanten tilhørende penselen definert av matrisen $M(s, t)$. Kurven er definert ved $\det(\lambda I - M(s, 1)) = 0$ og ligger i $s\lambda$ -planet. Linjen gjennom origo har multiplisitet to i alle punkt. Signaturmønsteret kan vi lese av fra figuren: $(1, 3)(1, 1)(3, 1)$.

Figur 4.20



■

$\det M(P) = m(P)l_0(s, t)^2$, $\text{null } M(P_0) = 1$

Vi antar nå at $\det M(P)$ har en rot P_0 av multiplisitet to, som er slik at $\text{null } M(P_0) = 1$.

Signaturen til kvadrikken definert av punktet P_0 må være $(3, 0)$ eller $(2, 1)$. Signaturen til kvadrikkene definert av alle andre punkt i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ må være enten $(2, 2)$ eller $(3, 1)$. Signaturmønsteret må altså være på formen $(2, 2) \text{ sign } M(P_0)(2, 2)$ eller $(1, 3) \text{ sign } M(P_0)(3, 1)$.

Dersom signaturmønsteret er på formen $(2, 2) \text{ sign } M(P_0)(2, 2)$, så følger det fra lemma 2.7 at $\text{sign } M(P_0)$ ikke kan være $(3, 0)/(0, 3)$. Signaturmønsteret $(2, 2)(2, 1)(2, 2)$ er realisert i eksempel 4.21.

Anta nå at signaturmønsteret er på formen $(1, 3) \text{ sign } M(P_0)(3, 1)$. Ettersom

signaturen til kvadrikken definert av P_0 antas å være $(3, 0)$ eller $(2, 1)$, følger det at $\text{sign } M(P_0)$ er $(3, 0)/(0, 3)$ eller $(2, 1)/(1, 2)$. Det følger fra lemma 2.7 at ingen av disse signaturmønstrene kan eksistere.

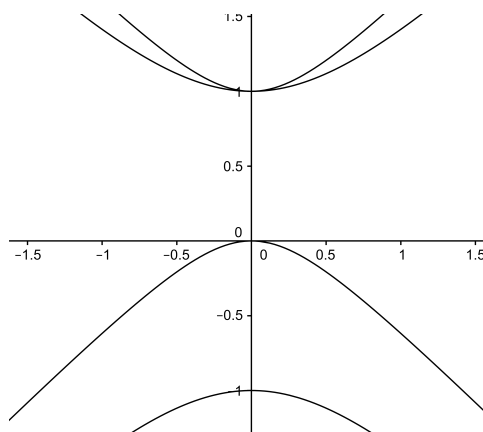
Eksempel 4.21. Signaturmønster: $(2, 2)(2, 1)(2, 2)$

$$M(s, t) = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 & s \\ 0 & -t & s & 0 \\ 0 & s & t & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det M(s, t) = s^2(t^2 + s^2)$$

Figur 4.21 viser den affine delen av diskriminanten tilhørende penselen definert av matrisen $M(s, t)$. Kurven er definert ved $\det(\lambda I - M(s, 1)) = 0$ og ligger i $s\lambda$ -planet. Signaturmønsteret kan vi lese av fra figuren: $(2, 2)(2, 1)(2, 2)$.

Figur 4.21



■

4.2.6 $\det M(P) = m(P)l_0(P)l_1(P)$

Vi antar nå at $\det M(P)$ har to enkle røtter P_0 og P_1 i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. De to røttene vil dele $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ opp i to segmenter som definerer kvadrikker av rang fire. Etersom røttene er enkle, følger det ved lemma 2.31 at signaturen til kvadrikkene definert av punktene i disse segmentene må være $(2, 2)$ og $(3, 1)$. Dersom vi starter avlesningen av signaturmønsteret i segmentet som definerer kvadrikker av signatur $(3, 1)$, får vi et signaturmønster på formen: $(1, 3) \text{sign } M(P_0)(2, 2) \text{sign } M(P_1)(3, 1)$. Signaturen til kvadrikkene definert av punktene P_0 og P_1 må være $(3, 0)$ og/eller $(2, 1)$. Et segment med signatur $(2, 2)$ kan ikke grense til et punkt med signatur $(3, 0)$. Signaturen

til kvadrikkene definert av punktene P_0 og P_1 må derfor være $(2, 1)$. Signaturmønsteret må dermed blir på formen $(1, 3)(1, 2)(2, 2)(2, 1)(3, 1)$. Dette signaturmønsteret er realisert i eksempel 4.22.

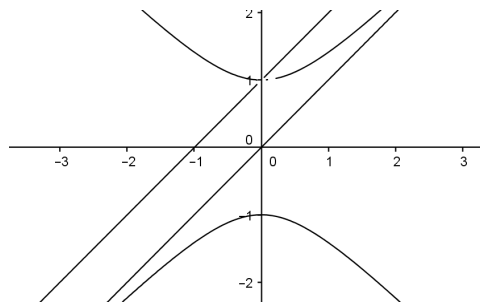
Eksempel 4.22. Signaturmønster: $(1, 3)(1, 2)(2, 2)(2, 1)(3, 1)$

$$M(s, t) = \begin{bmatrix} -s & t & 0 & 0 \\ t & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+t \end{bmatrix}$$

$$\det M(s, t) = -(s+t)s(s^2+t^2)$$

Figur 4.22 viser den affine delen av diskriminanten tilhørende penselen definert av matrisen $M(s, t)$. Kurven er definert ved $\det(\lambda I - M(s, 1)) = 0$ og ligger i $s\lambda$ -planet. Signaturmønsteret kan vi lese av fra figuren: $(1, 3)(1, 2)(2, 2)(2, 1)(3, 1)$.

Figur 4.22



■

Kapittel 5

Oversikt over signaturmønstre

Tabellene nedenfor viser alle signaturmønstrene vi har funnet. Klassifikasjonen er fullstendig i den forstand at vi har vist hvilke signaturmønstre som kan eksistere, og funnet eksempler som viser at de faktisk eksisterer.

Tabellen viser at dersom determinanten til to diagonale pensler faktoriserer ulikt, så vil penslene ikke kunne ha det samme signaturmønsteret. Vi kan observere at dette ikke er tilfellet for de ikke-diagonale penslene.

Tabell 5.1: Definitte pensler

$\det M(P)$	Signaturmønster
$l_0(P)l_1(P)l_2(P)l_3(P)$	(0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 2)(2, 2)(3, 1)(3, 0)(4, 0)
$l_0(P)^2l_1(P)l_2(P)$	(0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 2)(2, 2)(2, 0)(4, 0) (0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 1)(3, 1)(3, 0)(4, 0)
$l_0(P)^2l_1(P)^2$	(0, 4)(0, 2)(2, 2)(2, 0)(4, 0)
$l_0(P)^3l_1(P)$	(0, 4)(0, 3)(1, 3)(1, 0)(4, 0)

Tabell 5.2: Diagonale pensler som ikke er definitive

$\det M(P)$	Signaturmønster
$l_0(P)l_1(P)l_2(P)l_3(P)$	(3, 1)(2, 1)(2, 2)(2, 1)(3, 1)(2, 1)(2, 2)(1, 2)(1, 3)
$l_0(P)^2l_1(P)l_2(P)$	(3, 1)(2, 1)(2, 2)(1, 1)(2, 2)(1, 2)(1, 3) (2, 2)(2, 1)(3, 1)(1, 1)(1, 3)(1, 2)(2, 2) (2, 2)(2, 1)(3, 1)(2, 0)(3, 1)(2, 1)(2, 2)
$l_0(P)^2l_1(P)^2$	(2, 2)(1, 1)(2, 2)(1, 1)(2, 2) (1, 3)(1, 1)(3, 1)(2, 0)(3, 1)
$l_0(P)^3l_1(P)$	(1, 3)(1, 2)(2, 2)(1, 0)(3, 1)

Tabell 5.3: Ikke-diagonale pensler

$\det M(P)$	Signaturmønster
$l_0(P)^4, \text{ null } M(P_0) = 1$	$(2, 2)(1, 0)(2, 2)$ $(1, 3)(1, 0)(3, 1)$
$l_0(P)^4, \text{ null } M(P_0) = 2$	$(2, 2)(2, 0)(2, 2)$ $(2, 2)(1, 1)(2, 2)$ $(1, 3)(1, 1)(3, 1)$
$l_0(P)^4, \text{ null } M(P_0) = 3$	$(2, 2)(2, 1)(2, 2)$
$l_0(P)^3 l_1(P), \text{ null } M(P_0) = 1$	$(2, 2)(2, 1)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$
$l_0(P)^3 l_1(P), \text{ null } M(P_0) = 2$	$(2, 2)(2, 0)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$ $(2, 2)(1, 1)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$
$l_0(P)^2 l_1(P) l_2(P)$	$(2, 2)(2, 1)(3, 1)(3, 0)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$ $(2, 2)(2, 1)(3, 1)(2, 1)(3, 1)(2, 1)(2, 2)$ $(1, 3)(1, 2)(2, 2)(2, 1)(2, 2)(2, 1)(3, 1)$
$l_0(P)^2 l_1(P)^2, \text{ null } M(P_0) = 1, \text{ null } M(P_1) = 1$	$(2, 2)(1, 2)(2, 2)(2, 1)(2, 2)$ $(2, 2)(1, 2)(2, 2)(1, 2)(2, 2)$
$l_0(P)^2 l_1(P)^2, \text{ null } M(P_0) = 1, \text{ null } M(P_1) = 2$	$(2, 2)(1, 2)(2, 2)(1, 1)(2, 2)$ $(1, 3)(0, 3)(1, 3)(1, 1)(3, 1)$ $(1, 3)(1, 2)(1, 3)(1, 1)(3, 1)$
$m(P) l_0(P)^2, \text{ null } M(P_0) = 2$	$(2, 2)(1, 1)(2, 2)$ $(1, 3)(1, 1)(3, 1)$
$m(P) l_0(P)^2, \text{ null } M(P_0) = 1$	$(2, 2)(2, 1)(2, 2)$
$m(P) l_0(P) l_1(P)$	$(1, 3)(1, 2)(2, 2)(2, 1)(3, 1)$
$m_0(P) m_1(P)$	$(2, 2)$

Videre arbeid

En naturlig fortsettelse av arbeidet kan være å gjøre en klassifisering av pensler av kvadrikker som ikke inneholder kvadrikker av rang fire.

En annen vei å gå i et eventuelt videre arbeid, kan være å se på relasjonen mellom snittkurven mellom to kvadrikker i en pensel og signaturmønsteret til penselen. Historisk har man blant annet sett på sammenhengen mellom snittkurven mellom to kvadrikker i en pensel av kvadrikker, og matrisene som definerer kvadrikkene [Uhlr].

Bibliography

- [CLO] David Cox, John Little, and Donal O'shea. *Ideals, varieties, and algorithms*. Vol. 3. Springer.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Vol. 52. Springer Science & Business Media, 1977.
- [HJ12] Roger A Horn and Charles R Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge university press, 2012.
- [NP94] Raúl Naulin and Carlos Pabst. "The roots of a polynomial depend continuously on its coefficients". In: *Rev. Colombiana Mat.* 28.1 (1994), pp. 35–37. ISSN: 0034-7426.
- [PSV11] Daniel Plaumann, Bernd Sturmfels, and Cynthia Vinzant. "Quartic curves and their bitangents". In: *Journal of Symbolic Computation* 46.6 (2011), pp. 712–733.
- [Uhl73] Frank Uhlig. "Simultaneous block diagonalization of two real symmetric matrices". In: *Linear Algebra and Its Applications* 7.4 (1973), pp. 281–289.