

UiO : Matematisk institutt

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Interaksjon mellom dønning og vindsjø

Vegar Klem Hafnor

Masteravhandling i Realfagsutdanning, våren 2016



Forsidedesign av Martin Helsø

Forsiden viser et utsnitt av rotsystemet til den eksepsjonelle liegruppen E_8 , projisert ned i planet. Liegrupper ble oppfunnet av den norske matematikeren Sophus Lie (1842–1899) for å uttrykke symmetriene til differensiallikninger og spiller i dag en sentral rolle i flere deler av matematikken.

Sammendrag

Avhandlingen er en del av en større forskning på bimodal sjø. Det er gjort eksperimenter med vindsjø sammen med dønning, samt bikromatisk bølge bestående av en kort bølge ridende på dønning er generert i bølgetanken. Det er gjort flere målinger av overflatehevingen for vindsjø-dønningssystemet med stadig økende styrke på dønningen. I tillegg er det gjort deterministiske betraktninger av kort bølge ridende på en delvis stående dønning. Overskridelsessannsynligheten til overflatehevingen peker i retning av at dønningen demper ikkelineære effekter i vindsjøen. Eksperimentene med bikromatiske bølger har vist at den korte bølgens amplitude og bølgetall moduleres av dønningen. Den korte bølgens amplitude er målt til å være størst rett før eller rett etter dønningens kam. Bølgetallet til kort bølge ser ut til å reduseres på kammen av dønningen og øke noe på dønningens buk.

Annerkjennelse

Jeg vil takke Karsten Trulsen for muligheten til å skrive denne avhandlingen. Tusen takk for god veiledning og hyggelige samtaler underveis i arbeidet. Takk til Shkurta og Bogdan for samarbeidet i laben, og takk til laboratorieingeniør Olav Gundersen for hjelp i laboratoriearbeidet. Tusen takk til medstudenter på lesesalen i 9.etg som har tatt meg godt imot. Jeg vil dessuten takke alle i lektorgjengen for årene vi har hatt sammen på Blindern. Studietiden hadde ikke vært i nærheten av det samme uten dere. Takk til familie og svigerfamilie: Mamma, pappa, Solveig og Tuffy for oppmuntringer og forbønn. Sist men ikke minst vil jeg takke min kone Tea Chanel for å ha vist enestående støtte og tålmodighet gjennom et hektisk semester.

Innhold

1	Introduksjon	1
2	En enkel modell: Bikromatisk bølge	5
2.1	Modifisert beregning av overflateheving	6
2.2	Modulasjon av kort bølge	11
3	Teoretisk bakgrunnsstoff	15
3.0.1	Svakt stasjonære stokastiske prosesser	16
3.0.2	Overflatehevingen som stokastisk prosess	16
3.1	Spektralanalyse	17
3.1.1	Smalbåndet prosess	18
3.1.2	JONSWAP-spektrum	19
4	Eksperimentelt arbeid	23
4.1	Oppsett	23
4.2	Variabilitet	25
4.3	Måling av overflatehevingen	26
4.3.1	Oppstartseffekter	26
4.3.2	Tidsserier	28
4.4	Postprosessering	29
5	Resultater: Bikromatisk bølge	31
5.1	Tidsserier	31
6	Matematisk verktøykasse	51
6.1	Overskridelsessannsynlighet, kurtose og skjevhet	51
6.2	Nullkryssingsmetoden og lokal peak	53
6.2.1	Hilbertenvelopen	54
6.2.2	Tayfun-referanser	55
6.2.3	Oppsummering	55

7	Resultater	57
7.1	Tidsserier	57
7.2	Spektrum	61
7.3	Kurtose og Skjevhet	63
7.3.1	Kurtose	63
7.3.2	Skjevhet	64
7.4	Overskridelsessannsynlighet	65
8	Diskusjon	83
8.1	Dønning og vindsjø	83
8.1.1	Effekter av båndbredde	83
8.1.2	Ikkelineære effekter	87
8.1.3	Kurtose, skjevhet og karakteristisk steilhet	88
8.1.4	Bølgeammer og bølgehøyder	91
8.2	Bikromatisk bølge	92
8.3	Utfordringer og videre arbeid	93
9	Konklusjon	95
A	Eksperimentelt oppsett	97
A.1	Styresignal	97
A.2	Matematisk verktøykasse	100

Kapittel 1

Introduksjon

Med freakbølger menes bølger mye større enn det som forventes av sjøtilstanden [1, Dyste, Krogstad & Müller, 2008]. Freakbølger oppstår på grunt og dypt vann, og kan gjøre store skader på skip og konstruksjoner i havet. I perioden 1969 til 1994 skal 22 skip ha forlist og 525 menneskeliv gått tapt grunnet freakbølger [2, Kharif & Pelinovsky, 2003]. I 1995 ble det målt en bølge med bølgehøyde på 25.6 meter på Statoils oljeplattform "Draupner" som ligger i Nordsjøen [3, Grue & Trulsen, 2006]. Det finnes ulike måter å definere en freakbølge. I denne avhandlingen er det brukt to definisjoner: En freakbølge er en bølge med bølgehøyde større enn dobbel signifikant bølgehøyde, $\frac{H}{H_{m0}} > 2$, eller en bølge med kamhøyde større enn 5 ganger standardavviket til overflatehevingen $\eta_c > 5\sigma$.

Spørsmålet om hvorvidt bimodal sjø er farligere enn unimodal sjø har til tider vært et kontroversielt tema og et felt med delte meninger. Høsten 2002 forliste oljetankeren Prestige utenfor spanskekysten. Hendelsen skjedde i en sjø dominert av en dønning fra nordvest sammen med vindgenererte bølger fra sørvest [4, Trulsen et al., 2015]. Det er blitt stilt spørsmål om ulykken var forårsaket av en freakbølge. Osborne mente den gjeldende sjøtilstand var meget farlig [5, Naucher Global, 2013]. Lechuga [6, 2006] mente derimot det var veldig lite sannsynlig at Prestige-ulykken var forårsaket en freakbølge. Dette indikerer et behov for økt innsikt rundt interaksjonen mellom dønning og vindsjø, og generelt sjøtilstanden i bimodal sjø.

Toffoli et al. [7, 2005] gjorde en analyse av skipsulykker som viste at mange skip forliser i kryssende sjø bestående av vindsjø og dønning. Toffoli et al. [8] gjorde videre simuleringer av to kryssende bølgesystem med samme karakteristiske vinkelfrekvens. Resultatet fra simuleringene viste at kamhøyden generelt var lavere for de bimodale tilfellene sammenlignet med unimodal sjø.

Om bølgesystemenes propagerte med en vinkel på 35 grader mellom seg var imidlertid sannsynligheten større for freakbølger enn det som var tilfellet for unimodal sjø.

Lisa Rye [9, 2014] gjorde i sin avhandling eksperimenter i av to JONSWAP-genererte bølgesystem som propagerte i motsatt retning. Det vil si at vinkelen mellom bølgesystemene var 180 grader. Denne sjøtilstanden var av resultatene mindre farlig enn for tilfellet med en enkelt JONSWAP-sjø. Odin Gramstad [10, Gramstad & Trulsen, 2010] analyserte interaksjon mellom dønning og vindsjø av dønningmodifisert ikkelineær schrödingerlikning samt Monte Carlo-simuleringer. Det analytiske arbeidet viste at dønningen hadde liten innvirkning på kurtose og forekomst av freakbølger. Simuleringene viste at tilstedeværelsen av dønning kunne gi noe økt freakbølgesannsynlighet (5-20%) sammenlignet med sjø uten dønning. Tilfellet der vinkelen mellom dønning og vindsjø var 90 grader gav betydelig lavere freakbølgesannsynlighet, mens vinkel på 45 grader gav høyest freakbølgesannsynlighet.

Denne avhandlingen er en videreføring av Odin Gramstads arbeid med vindsjø og dønning. Det er gjort eksperimenter med dønning sammen med et irregulært bølgetog og dønning sammen med monokromatisk kort bølge. Eksperimentene er gjort i Hydrodynamisk Laboratorium ved Universitetet i Oslo. Lisa Rye gjorde sine eksperimenter i samme bølgetank. Det er ellers gjort eksperimenter med bølger generert av et JONSWAP-spektrum for å studere blant annet demping og dispersjonsrelasjonen. Det er imidlertid ikke gjort forsøk med korte bølger sammen med lang dønning. De fysiske dimensjonene til bølgetanken gjør det utfordrende å skape ønsket sjøtilstand. Om det genereres for korte bølger vil dissipasjon av energi i praksis dempe bølgene før de når enden av tanken. Bølgetankens lengde setter begrensninger på hvor lange dønninger det er mulig å kjøre. Samtidig kreves det tilstrekkelig differanse mellom karakteristisk periode for dønning og vindsjø.

Longuet-Higgins og Stewart har i artikkelen "Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents"[11, 1960] vist hvordan en lang monokromatisk bølge kan modifisere en kort bølge som rir på den lange. Den korte bølgens amplitude øker og bølgetallet minker på kammene til dønningen, mens amplituden minker og bølgetallet øker på buken av den lange bølgen. Det betyr at den korte bølgen er høyere og kortere på kammene av den lange bølgen, og grunnere og lengre på buken av den lange bølgen. Teorien er gyldig så lenge overflatehevingen kan rekkeutvikles om likevektsnivå. Eksperimentene i denne avhandlingen starter i samme gyldighetsområde og ser på effekten av en stadig steilere dønning. Vi vil bevege oss

vekk fra gyldighetsområdet til Longuet-Higgins & Stewarts artikkel fra 1960.

Eksperimentene med bikromatisk bølge og dønning med vindsjø har tatt utgangspunkt i de antakelser Gramstad gjorde i "Can swell increase the number of freak waves in wind sea?". La ω_1 og ω_2 være karakteristisk vinkelfrekvens for henholdsvis vindsjø eller kort bølge og dønning. Videre er karakteristisk steilhet ϵ_1 og ϵ_2 . Vi starter da med å velge parametere slik at

$$\begin{aligned} \frac{\omega_2}{\omega_1} &= \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}) \\ \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} &= \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \tag{1.1}$$

og lar steilheten ϵ_2 øke gradvis.

Dette arbeidet bør sees i lys av en større forskning på bimodal sjø og det spesielle tilfellet med sjø bestående av vindsjø og dønning. Det er gjort vurderinger hvorvidt dønningen gjør sjøen mer eller mindre Gaussisk. Videre gjøres det betraktninger i forhold til forekomst av freak bølger. Dessuten gir eksperimentene med bikromatisk bølge en ytterligere forståelse av interaksjonen mellom dønning og korte bølger i et deterministisk perspektiv.

Kapittel 2

En enkel modell: Bikromatisk bølge

Dette kapittelet tar utgangspunkt i M. S. Longuet-Higgins og R. W. Stewarts artikkel fra 1960: "Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents"[11]. Ved hjelp av potensialteori og perturbasjonsteknikker har Longuet-Higgins & Stewart analysert hvordan en kort bølges amplitude og bølgetall forandres avhengig av hvor på den lange bølgen den er. Det er i denne avhandlingen gjort forsøk av bikromatiske bølger i bølgetanken i Hydrodynamisk Laboratorium ved Universitetet i Oslo. Til forskjell fra Longuet-Higgins og Stewarts teori vil de korte bølgene ri på delvis stående bølger grunnet refleksjon i bølgetanken. For å kunne sammenligne eksperimentelle resultater med Longuet-Higgins og Stewarts teori er det derfor gjort en modifisering som omfatter korte bølger ridene på delvis stående bølger.

Dypet i bølgetanken er valgt $h = 0.75m$. Det dimensjonsløse dypet kh er brukt til å bestemme hvorvidt $h = 0.75m$ tilsvarer uendelig dyp eller endelig dyp. Vinkelfrekvenser for dønning og kort bølge er valgt $\omega_2 = 2.73s^{-1}$ og $\omega_1 = 8.98s^{-1}$. Ved iterasjon er den lineære dispersjonsrelasjonen $\omega^2 = gk \tanh kh$ brukt til å finne bølgetall. Bølgetallet til den korte bølgen er $k_1 = 8.21m^{-1}$ og dønningens bølgetall er $k_2 = 1.11m^{-1}$. Dette gir $k_1h = 6.16$ og $k_2h = 0.83$ som igjen gir $\tanh k_1h = 1$ og $\tanh k_2h = 0.68$. For uendelig dyp er $\tanh kh \approx 1$. Det betyr at vindsjøen propagerer på uendelig dyp, men dønningen lever på endelig dyp. Longuet-Higgins & Stewart beskrev kortbølger ridende på dønning for både uendelig og endelig dyp. Utregningene gjort for endelig dyp-teorien er mye lik det som er gjort i teorien for uendelig dyp, men omfatter mer regning. Da fokuset i denne avhandlingen er på det eksperimentelle og tidsrammen begrenset, er det valgt å sammenligne resultater med teori for bølger på uendelig dyp.

2.1 Modifisert beregning av overflateheving

Det antas at hastighetsfeltet i væsken er gitt av gradienten til et potensial ϕ . Vi antar at hastighetsfeltet er divergensfritt og at Eulers trykklikning gjelder i væsken. Dette gir likningene:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \nabla\phi \\ \nabla^2\phi &= 0 \\ \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \frac{\partial\phi}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Randbetingelser er henholdsvis dynamisk og kinematisk grensebetingelse ved overflaten og antakelse om at hastighetsfeltet går mot null i dypet.

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{\rho} + gz + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \frac{\partial\phi}{\partial t} &= 0 \quad \text{ved } z = \eta \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial z} &= 0 \quad \text{ved } z = \eta \\ \nabla\phi &= 0 \quad \text{for } z \rightarrow -\infty \end{aligned} \tag{2.2}$$

I det følgende gjøres det Taylorutvikling av (2.2). I tillegg uttrykkes hastighetsfeltet, hastighetspotensialet, overflaten og trykket som perturbasjonsrekker.

Taylorutvikling av (2.2):

$$\begin{aligned} g\eta + \left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)_{z=0} + \eta \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \right]_{z=0} + \dots &= 0, \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_{z=0} + \eta \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \right]_{z=0} + \dots &= 0. \end{aligned}$$

I denne avhandlingen vil $\epsilon \ll 1$ gi størrelsen på ledd, mens ϵ_1, ϵ_2 er steilheten til henholdsvis kort og lang bølge.

$$\begin{aligned} \phi &= \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2 + \dots \\ \eta &= \epsilon\eta_1 + \epsilon^2\eta_2 + \dots \end{aligned}$$

Til $\mathcal{O}(\epsilon)$ har vi likningene:

$$\mathbf{u}_1 = \nabla\phi_1, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi_1 &= 0, \\ \nabla\phi_1 &= 0 \quad \text{for } z \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} g\eta_1 + \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\right)_{z=0} &= 0, \\ \frac{\partial\eta_1}{\partial t} - \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right)_{z=0} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Vi slår sammen likningene i (2.5) og får:

$$\left(\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right)_{z=0} = 0. \quad (2.6)$$

Randverdiproblemet av orden $\mathcal{O}(\epsilon)$ med tre bølger (kort bølge, lang bølge og reflektert lang bølge) gir:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \sum_{n=1}^3 a_n \cos(k_n x - \omega_n t) \\ &= \sum_{n=1}^3 \frac{a_n}{2} e^{-i(k_n x - \omega_n t)} + c.c., \\ \phi_1 &= \sum_{n=1}^3 \frac{a_n \omega_n}{k_n} e^{k_n z} \sin(k_n x - \omega_n t) \\ &= \sum_{n=1}^3 \frac{a_n \omega_n}{k_n} \frac{i}{2} e^{k_n z} e^{-i(k_n x - \omega_n t)} + c.c., \\ \mathbf{u}_1 &= \left[\sum_{n=1}^3 a_n \omega_n e^{k_n z} \cos(k_n x - \omega_n t) \right] \mathbf{i} \\ &\quad + \left[\sum_{n=1}^3 a_n \omega_n e^{k_n z} \sin(k_n x - \omega_n t) \right] \mathbf{k} \\ &= \left[\sum_{n=1}^3 a_n \omega_n e^{k_n z} \frac{1}{2} e^{-i(k_n x - \omega_n t)} + c.c. \right] \mathbf{i} \\ &\quad + \left[\sum_{n=1}^3 a_n \omega_n e^{k_n z} \frac{i}{2} e^{-i(k_n x - \omega_n t)} + c.c. \right] \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.7)$$

der $\omega_n > 0$ og indeks 1, 2 og 3 viser til henholdsvis kort, lang og reflektert lang bølge. Fasefunksjonen til bølgene er oppgitt med bølgetall og ikke bølgetallsvektor da bevegelsen er todimensjonal. Bølgetallsvektoren og posisjonsvektoren er $\mathbf{k}_n = k_n \mathbf{i}$ og $\mathbf{r} = x \mathbf{i}$.

Vi har:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1, & k_1 &= k_1, & \omega_1 &= \omega_1 \\ a_2 &= a_{2H}, & k_2 &= k_2, & \omega_2 &= \omega_2 \\ a_3 &= a_{2V}, & k_3 &= -k_2, & \omega_3 &= \omega_2. \end{aligned}$$

Til 2. ordens tilnærming, $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, er randverdi problemet:

$$\mathbf{u}_2 = \nabla \phi_2, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_2 &= 0, \\ \nabla \phi_2 &= 0, \quad \text{for } z \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} g\eta_2 + \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}_1^2 + \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z \partial t} \right)_{z=0} &= 0, \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \frac{\partial \phi_2}{\partial z} - \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} \right)_{z=0} &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Likningene i (2.10) gir

$$\left(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right)_{z=0} = - \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_1^2) + \eta_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right) \right]_{z=0}. \quad (2.11)$$

Fra (2.6) vil siste ledd i likningen være lik null. Likningen som skal løses for å finne ϕ_2 er dermed

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_2}{\partial z} &= - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_1^2) \\ &= -2a_1 a_{2H} \omega_1 \omega_2 (\omega_1 - \omega_2) \sin((k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t) \\ &\quad - 2a_1 a_{2V} \omega_1 \omega_2 (\omega_1 - \omega_2) \sin((k_1 - k_3)x - (\omega_1 - \omega_2)t) \quad (2.12) \\ &= -a_1 a_{2H} \omega_1 \omega_2 (\omega_1 - \omega_2) i e^{-i((k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t)} + c.c. \\ &\quad - a_1 a_{2V} \omega_1 \omega_2 (\omega_1 - \omega_2) i e^{-i((k_1 - k_3)x - (\omega_1 - \omega_2)t)} + c.c. \end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned}\phi_2 = & -a_1 a_{2H} \omega_1 e^{(k_1 - k_2)z} \sin((k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t) \\ & - a_1 a_{2V} \omega_1 e^{(k_1 - k_3)z} \sin((k_1 - k_3)x - (\omega_1 - \omega_2)t).\end{aligned}\quad (2.13)$$

η_2 bestemmes av dynamisk randbetingelse i (2.11):

$$\eta_2 = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_1^2 + \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z \partial t} \right)_{z=0} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_2}{\partial t} \Big|_{z=0} = & a_1 a_{2H} \omega_1 (\omega_1 - \omega_2) \cos((k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t) \\ & + a_1 a_{2V} \omega_1 (\omega_1 - \omega_2) \cos((k_1 - k_3)x - (\omega_1 - \omega_2)t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \mathbf{u}_1^2 \Big|_{z=0} = & \frac{1}{2} a_1^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} a_{2H}^2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} a_{2V}^2 \omega_2^2 \\ & + a_1 a_{2H} \omega_1 \omega_2 \cos((k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t) \\ & + a_1 a_{2V} \omega_1 \omega_2 \cos(k_1 - k_3)x - (\omega_1 - \omega_2)t) \\ & + a_{2H} a_{2V} \omega_2^2 \cos((k_2 - k_3)x - (\omega_1 - \omega_2)t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z \partial t} \Big|_{z=0} = & -a_1^2 \omega_1^2 \frac{1}{2} \cos(2(k_1 x - \omega_1 t)) - a_{2H}^2 \omega_2^2 \frac{1}{2} \cos(2(k_2 x - \omega_2 t)) \\ & - a_{2V}^2 \omega_2^2 \frac{1}{2} \cos(2(k_3 x - \omega_2 t)) \\ & - \frac{1}{2} a_1^2 \omega_1^2 - \frac{1}{2} a_{2H}^2 \omega_2^2 - \frac{1}{2} a_{2V}^2 \omega_2^2 \\ & - a_1 a_{2H} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \frac{1}{2} \cos((k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t) \\ & - a_1 a_{2H} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \frac{1}{2} \cos((k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t) \\ & - a_1 a_{2V} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \frac{1}{2} \cos((k_1 + k_3)x - (\omega_1 + \omega_2)t) \\ & - a_1 a_{2V} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \frac{1}{2} \cos((k_1 - k_3)x - (\omega_1 - \omega_2)t) \\ & - a_{2H} a_{2V} \omega_2^2 \cos((k_2 + k_3)x - (\omega_2 + \omega_2)t) \\ & - a_{2H} a_{2V} \omega_2^2 \cos((k_2 - k_3)x - (\omega_2 - \omega_2)t)\end{aligned}\quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}
\eta_2 = & -(\omega_1^2 - \omega_2^2) \frac{a_1 a_{2H}}{2g} \cos((k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t) \\
& + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \frac{a_1 a_{2H}}{2g} \cos((k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t) \\
& - (\omega_1^2 - \omega_2^2) \frac{a_1 a_{2V}}{2g} \cos((k_1 - k_3)x - (\omega_1 - \omega_2)t) \\
& + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \frac{a_1 a_{2V}}{2g} \cos((k_1 + k_3)x - (\omega_1 + \omega_2)t) \\
& + a_{2H} a_{2V} \frac{\omega_2^2}{g} \cos((k_2 + k_3)x - (\omega_2 + \omega_2)t) \\
& + \frac{1}{2} a_1^2 \frac{\omega_1^2}{g} \cos(2(k_1 x - \omega_1 t)) \\
& + \frac{1}{2} a_{2H}^2 \frac{\omega_2^2}{g} \cos(2(k_2 x - \omega_2 t)) \\
& + \frac{1}{2} a_{2V}^2 \frac{\omega_2^2}{g} \cos(2(k_3 x - \omega_2 t))
\end{aligned} \tag{2.16}$$

De fire probene som måler overflatehevingen står ved posisjonene $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$ og $x = x_4$. Når Longuet-Higgins og Stewarts teori skal sammenlignes med eksperimentelle resultater fra bølgelaben kan vi velge å se på hva som skjer for $x_i = 0$ og deretter tilpasse fasen.

$$\begin{aligned}
\eta_2|_{x=0} = & -\frac{a_1(a_{2H} + a_{2V})}{2g} (\omega_1^2 - \omega_2^2) \cos((\omega_1 - \omega_2)t) \\
& + \frac{a_1(a_{2H} + a_{2V})}{2g} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \cos((\omega_1 + \omega_2)t) \\
& + \frac{a_1^2}{2g} \omega_1^2 \cos(2\omega_1 t) \\
& + \frac{(a_{2H}^2 + 2a_{2H}a_{2V} + a_{2V}^2)}{2g} \omega_2^2 \cos(2\omega_2 t)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Endelig uttrykk for overflatehevingen for kort bølge ridene på delvis stående lang bølge ved $x = 0$ er:

$$\begin{aligned}
\eta = \eta_1 + \eta_2 &= a_1 \cos(\omega_1 t) + (a_{2H} + a_{2V}) \cos(\omega_2 t) \\
&\quad - \frac{a_1(a_{2H} + a_{2V})}{2g} (\omega_1^2 - \omega_2^2) \cos((\omega_1 - \omega_2)t) \\
&\quad + \frac{a_1(a_{2H} + a_{2V})}{2g} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \cos((\omega_1 + \omega_2)t) \\
&\quad + \frac{a_1^2}{2g} \omega_1^2 \cos(2\omega_1 t) \\
&\quad + \frac{(a_{2H} + a_{2V})^2}{2g} \omega_2^2 \cos(2\omega_2 t)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

2.2 Modulasjon av kort bølge

I analysen av den korte bølgens amplitude og bølgetall velger Longuet-Higgins & Stewart å se bort fra følgende ledd: 1. og 2. harmonisk til dønning og 2. harmonisk til kort bølge. La $\psi_1 = k_1 x - \omega_1 t$, $\psi_2 = k_2 x - \omega_2 t$ og $\psi_3 = k_3 x - \omega_2 t$. De interessante ledd er med denne antakelsen:

$$\begin{aligned}
\eta_{kort} &= a_1 \cos(\psi_1) \\
&\quad - a \cos(\psi_1 - \psi_2) \\
&\quad + b \cos(\psi_1 + \psi_2) \\
&\quad - c \cos(\psi_1 - \psi_3) \\
&\quad + d \cos(\psi_1 + \psi_3) \\
&= a_1 \cos \psi_1 - a \sin \psi_1 \sin \psi_2 - a \cos \psi_1 \cos \psi_2 \\
&\quad - b \sin \psi_1 \sin \psi_2 + b \cos \psi_1 \cos \psi_2 \\
&\quad - c \sin \psi_1 \sin \psi_3 + c \cos \psi_1 \cos \psi_3 \\
&\quad - d \sin \psi_1 \sin \psi_3 + d \cos \psi_1 \cos \psi_3 \\
&= \cos \psi_1 [a_1 - (a - b) \cos \psi_2 - (c - d) \cos \psi_3] \\
&\quad - \sin \psi_1 [(a + b) \sin \psi_2 + (c + d) \sin \psi_3]
\end{aligned} \tag{2.19}$$

der

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{a_1 a_{2H}}{2g} (\omega_1^2 - \omega_2^2) \\
 b &= \frac{a_1 a_{2H}}{2g} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \\
 c &= \frac{a_1 a_{2V}}{2g} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \\
 d &= \frac{a_1 a_{2V}}{2g} (\omega_1^2 - \omega_2^2) \\
 a - b &= -a_1 a_{2H} \frac{\omega_2^2}{g} \\
 c - d &= -a_1 a_{2V} \frac{\omega_2^2}{g} \\
 a + b &= a_1 a_{2H} \frac{\omega_1^2}{g} \\
 c + d &= a_1 a_{2V} \frac{\omega_1^2}{g}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Overflatehevingen til kort bølge blir da:

$$\eta_{kort} = a_1(1 + P) \cos \psi_1 - a_1 Q \sin \psi_1 \tag{2.21}$$

der

$$\begin{aligned}
 P &= (a_{2H} \cos \psi_2 + a_{2V} \cos \psi_3) \frac{\omega_2^2}{g} \\
 Q &= (a_{2H} \sin \psi_2 + a_{2V} \sin \psi_3) \frac{\omega_1^2}{g}
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Til sammenligning er Longuet-Higgins & Stewarts uttrykk for overflatehevingen til kort bølge

$$\eta_{kort} = a_1(1 + \hat{P}) \sin \psi_1 - a_1 \hat{Q} \cos \psi_1 \tag{2.23}$$

der $\hat{P} = a_2 k_2 \sin \psi_2$ og $\hat{Q} = a_2 k_1 \cos \psi_2$. Videre beskriver Longuet-Higgins & Stewart modifisert amplitude og bølgetall:

$$\begin{aligned}
 a' &= a_1(1 + \hat{P}) \\
 k' &= k_1 \left(1 + \frac{1}{k_1} \frac{\partial \hat{Q}}{\partial x}\right)
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

\hat{P} og \hat{Q} er beskrevet som små størrelser, men innbyrdes størrelsesforhold er ikke presisert. Det er vanskelig å forstå bakgrunnen for overgangen (2.23) til (2.24) av artikkelen alene. I det følgende gjøres en nærmere undersøkelse av de bakenforliggende antakelser gjort i overgangen. Vi har tre parametre $\epsilon_1 = a_1 k_1$, $\epsilon_2 = a_2 k_2$ og $\mu = \frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ som er steilhet til kort bølge, steilhet til lang bølge og forholdstallet mellom karakteristisk periode til dønning og kort bølge.

I teorien er overflatehevingen rekkeutviklet om likevektsnivå. Bak dette ligger en antakelse om små forstyrrelser, eller med andre ord: overflatehevingens utslag er tilstrekkelig nær likevektsnivå. Dette gir begrensninger for parametrene som inngår i uttrykket for η . Vi antar:

$$\epsilon_1 \ll 1 \quad (2.25)$$

$$\epsilon_2 \ll 1 \quad (2.26)$$

$$a_1 k_2 \ll 1 \Leftrightarrow \epsilon_1 \mu^2 \ll 1 \quad (2.27)$$

$$a_2 k_1 \ll 1 \Leftrightarrow \frac{\epsilon_2}{\mu^2} \ll 1 \quad (2.28)$$

Vi finner modifisert amplitude og bølgetall ved å anta at η kan skrives som en sinusoidal bølge med amplitude A og fasefunksjon $\psi_1 + \theta$ der $\theta = \alpha + \beta x - \gamma t + \dots$ er en ukjent funksjon. Etter noe omskriving kan vi finne uttrykk for A og θ .

$$\begin{aligned} a_1(1 + P) \cos \psi_1 - a_1 Q \sin \psi_1 &= A \cos(\psi_1 + \theta) \\ &= A \cos \theta \cos \psi_1 - A \sin \theta \sin \psi_1 \end{aligned}$$

For at dette skal stemme må følgende gjelde:

$$A \cos \theta = a_1(1 + P) \quad (2.29)$$

$$A \sin \theta = a_1 Q \quad (2.30)$$

For å finne amplitude kvadrerer vi 2.29, 2.30 og summerer. For å finne et uttrykk for bølgetall deler vi 2.30 på 2.29. Begge uttrykk rekkeutvikles for å få en løsning av ønsket nøyaktighet.

$$\begin{aligned} A &= a_1 \sqrt{(1 + P)^2 + Q^2} = a_1 \sqrt{1 + 2P + P^2 + Q^2} \\ &\approx a_1 \left(1 + P + \frac{1}{2}(P^2 + Q^2) - \frac{1}{8}(2P + P^2 + Q^2)^2\right) \\ &\approx a_1 \left(1 + P + \frac{1}{2}Q^2\right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\tan \theta = \frac{Q}{1+P}$$

$$\theta = \arctan \frac{Q}{1+P} \approx \frac{\pi}{4} + \frac{\partial \theta}{\partial x} x + \frac{\partial \theta}{\partial t} t + \dots$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1 + (\frac{Q}{1+P})^2} \left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}(1+P) - Q \frac{\partial P}{\partial x}}{(1+P)^2} \right) \approx \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$k' = k_1 \left(1 + \frac{1}{k_1} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \quad (2.32)$$

Tilnærmingen $A \approx a_1(1 + P + \frac{1}{2}Q^2)$ er fornuftig hvis $P \ll Q$ og $P \sim Q^2$. Tilnærmingen $A \approx a_1(1+P)$ er fornuftig hvis $Q^2 \ll P$. Løsningen til Longuet-Higgins & Stewart legger et strengere krav på forholdet mellom ϵ_2 og μ :

$$Q^2 \ll P \Leftrightarrow \epsilon_2 \ll \mu^4 \quad (2.33)$$

Kapittel 3

Teoretisk bakgrunnsstoff

Ettersom havoverflaten er så kompleks og uforutsigbar at det ikke er mulig å beskrive den deterministisk, kan vi se på overflatehevingen $\eta(\mathbf{x}, t)$ som en stokastisk prosess [3, Trulsen, 2006]. En stokastisk variabel X er en regel som tilordner et tall x_i til hvert mulige utfall i [3]. Et eksempel på dette kan være det diskrete tilfellet der X er antall øyne en terning viser. Et mulig utfall kan da være 4 som er tilordnet sannsynligheten $\frac{1}{6}$. Ochi [12, 1998] definerer en stokastisk prosess $X(t)$ som en familie av tilfeldige (stokastiske) variable. Videre forklarer Ochi dette ved å se på målinger av overflatehevingen ved n ulike steder i samme område: $(x(t)^1, x(t)^2, \dots, x(t)^n)$. For hver tid t_j vil mengden $\{x(t_j)^1, \dots, x(t_j)^n\}$ være et ensemble av tilfeldige variable. Vi skal i denne avhandlingen se på målinger fra en realisasjon, $x(t)$, og ikke bruke data fra et ensemble. Vi antar at statistikken fra et ensemble også kan bestemmes fra en realisasjon. Vi antar med andre ord at prosessen er ergodisk [12].

Sentralgrenseteoremet

De stokastiske variablene X_1, X_2, \dots, X_n er uavhengige dersom tetthetsfunksjonen $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2} \dots f_{X_n}(x_n)$.

La $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ være summen av n uavhengige stokastiske variable med forventningsverdi μ_i og varians σ_i^2 . Da er i følge sentralgrenseteoremet Y normalfordelt med forventningsverdi $\sum_{i=1}^n \mu_i$ og varians $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ [13, Papoulis, 1991].

3.0.1 Svakt stasjonære stokastiske prosesser

Den stokastiske prosessen $X(t)$ er for en gitt tid t_i en stokastisk variabel $X(t_i)$. Kumulativ sannsynlighetsfordeling og sannsynlighetstetthetsfunksjonen for de stokastiske variablene $X(t_1)$ og $X(t_2)$ er:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2; t_1, t_2) &= P\{X(t_1) \leq x_1 \cap X(t_2) \leq x_2\} \\ f(x_1, x_2; t_1, t_2) &= \frac{\partial F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Forventningsverdien til en stokastisk prosess er:

$$\mu(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx \quad (3.2)$$

Autokorrelasjonsfunksjonen er definert ved:

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (3.3)$$

En stokastisk prosess er svakt stasjonær om forventningsverdien er konstant i forhold til tiden ($\mu(t) = \mu$) og autokorrelasjonsfunksjonen kun er avhengig av differansen $\tau = t_2 - t_1$:

$$R(t_1, t_2) = R(\tau)$$

3.0.2 Overflatehevingen som stokastisk prosess

Sjøtilstanden på havet er ikke stasjonær. Selv på et avgrenset område, vil sjøen forandres med tiden. Innenfor en begrenset tidsramme vil imidlertid disse endringene være så små at vi kan anta sjøen som svakt stasjonær og ergodisk [3].

Ergodisitet med hensyn til tid vil for en stokastisk prosess $X(t)$ bety at tidsmidling gir samme informasjon som et ensemblemiddel [3]:

$$E[g(X(t))] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x; t) dz = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(x(t)) dt \quad (3.4)$$

I lineær teori kan vi beskrive "urbølgen" som

$$\eta = a \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \theta)$$

der a er amplituden, \mathbf{k} er bølgetallsvektoren, ω er vinkelfrekvensen og θ er fasen. θ er uniformt fordelt på intervallet $[0, 2\pi)$. Overflaten $\eta(\mathbf{x}, t)$ antas å være en sum av uavhengige stokastiske variable. Fra sentralgrenseteoremet er dermed overflatehevingen gaussisk. En kan for eksempel velge å uttrykke $\eta(\mathbf{x}, t)$ som en sum av cosinus-funksjoner.

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos(k_n x - \omega_n t + \theta_n) \quad (3.5)$$

Den virkelige havoverflaten viser seg å være nære, men ikke helt gaussisk [14, Krogstad & Arntsen, 2000].

Ved å inkludere svakt ikke-lineære effekter kan en bølge på dypt vann tilnærmes av en 2.ordens stokes bølge:

$$\eta = a \cos(kx - \omega t + \theta) + \frac{a}{2} \epsilon \cos(2(kx - \omega t + \theta)) \quad (3.6)$$

der steilheten $\epsilon = ak$. I dette tilfellet vil sjøen ikke lenger sees på som en superposisjon av flere uavhengige stokastiske variable. Ikke-linearitet bringer inn avhengighet som gjør sentralgrenseteoremet ugyldig. Overflatehevingen er ikke normalfordelt i ikke-lineær teori.

3.1 Spektralanalyse

For en svakt stasjonær prosess defineres bølgespekteret eller bare spekteret til å være fouriertransformasjonen av autokorrelasjonen. Spekteret, $S(\omega)$ gir informasjon om hvilke vinkelfrekvenser energien er konsentrert rundt.

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (3.7)$$

For svakt stasjonære prosesser har vi av Wiener-Khintchine-teoremet at autokorrelasjonen og spekteret er fouriertransformasjonspar [12, Ochi, 1998]. For en reell prosess er spekteret og autokorrelasjonen symmetriske funksjoner.

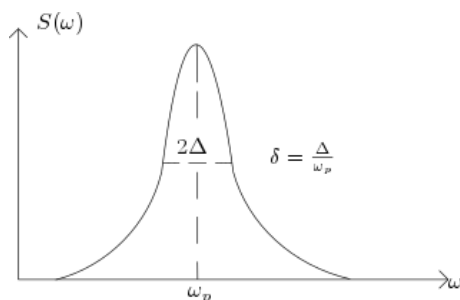
$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \\
 R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 \eta(t) \text{ reell : } \quad R(-\tau) &= R(\tau), \\
 S(-\omega) &= S(\omega)
 \end{aligned}$$

Av dette ser vi at variansen til overflatehevingen kan estimeres fra spekteret:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = R(0) = E[\eta(t)^2] = \sigma^2
 \tag{3.9}$$

3.1.1 Smalbåndet prossess



Figur 3.1: Båndbredde

En smalbandet prossess er definert som en prossess der spekteret er konsentrert rundt en karakteristisk frekvens ω_p [12, Ochi, 1998]. Om karakteristisk frekvens ω_p er kjent kan karakteristisk bølgetall k_p finnes av dispersjonsrelasjonen. Vi definerer karakteristisk amplitude $a_c = \sqrt{2}\sigma$ og karakteristisk steilhet $\epsilon_c = a_c k_p$. Båndbredden defineres i denne avhandlingen av forholdet mellom spekterets halve bredde ved spekterets halve maksimumsverdi og karakteristisk vinkelfrekvens 3.1.

$$\delta = \frac{\Delta}{\omega_p}
 \tag{3.10}$$

For en smalbandet prossess er $\delta \ll 1$.

Under antakelsen om overflaten som en sum av uavhengige stokastiske variable velges følgende matematiske modell for overflatehevingen:

$$\eta(t) = \sum A_n \cos(\theta_n - \omega_n t) \quad (3.11)$$

I grensen $\delta \rightarrow 0$ vil bidraget til η komme fra den karakteristisk frekvensen ω_p . Likning (3.11) forenkles da til:

$$\begin{aligned} \eta(t) &= A \cos(\theta - \omega_p t) = \operatorname{Re}[Ae^{i\theta} e^{-i\omega_p t}] \\ &= A \cos \theta \cos \omega_p t + A \sin \theta \sin \omega_p t = a \cos \omega_p t + b \sin \omega_p t \end{aligned} \quad (3.12)$$

der kun bidrag fra bølger med vinkelfrekvens ω_p er tatt med, og med substitusjonen $a = A \cos \theta$ og $b = A \sin \theta$. Det vil si at $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Fra tidligere antakelse om gaussisk sjø er det naturlig å anta at a og b er uavhengige stokastiske variable normalfordelt med $\mu = 0$ og $\sigma^2 = \frac{A^2}{2}$. Vi søker en tetthetsfunksjon $f(A, \theta) = f(a, b) \frac{\partial(a, b)}{\partial(A, \theta)} = f(a, b)A$.

$$\begin{aligned} f(a, b) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{a^2+b^2}{2\sigma^2}} \\ f(A, \theta) &= \frac{A}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$f(A) = \int_0^{2\pi} f(A, \theta) d\theta = \begin{cases} \frac{A}{\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} & , A \geq 0 \\ 0 & , A < 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$f(\theta) = \int_0^\infty \frac{A}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} dA = \frac{1}{2\pi}, \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (3.15)$$

I grensen av en smalbandet prosess er amplituden A rayleighfordelt og fasen uniformt fordelt på intervallet $[0, 2\pi]$. Dessuten ser vi at amplituden og fasen er uavhengige stokastiske variable da $f(\theta, A) = f(\theta)f(A)$.

3.1.2 JONSWAP-spektrum

Innholdet i dette avsnittet er basert på Krogstad og Arntsens artikkel "Random waves and wave statistics" [14, Krogstad & Arntsen, 2000]. På bakgrunn av målinger av overflatehevingen på havet er det utarbeidet funksjoner for realistisk representasjon av ulike sjøtilstander. Et kjent spektrum er Pierson-Moskowitz-spekteret:

$$S_{PM}(f) = \frac{A}{f^5} e^{-B/f^4} \quad (3.16)$$

der A og B er parametere som velges avhengig av sjøtilstand. Av målinger gjort i nordsjøen er det utviklet et spektrum for en mer presis beskrivelse av Nordsjøen. Dette kalles et JONSWAP-spektrum:

$$\begin{aligned} S(f) &= S_{PM}(f) \gamma^{\exp(-(f-f_p)^2/(2\sigma^2 f_p^2))} \\ &= \frac{A}{f^5} e^{-B/f^4} \gamma^{\exp(-(f-f_p)^2/(2\sigma^2 f_p^2))} \\ S(\omega) &= \frac{1}{2\pi} S_{PM}\left(f = \frac{\omega}{2\pi}\right) \gamma^{\exp(-(\omega-\omega_p)^2/(2\sigma^2 \omega_p^2))} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{A}{\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^5} e^{-\frac{B}{(\omega/2\pi)^4}} \gamma^{\exp(-(\omega-\omega_p)^2/(2\sigma^2 \omega_p^2))} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Eksperimentene gjort i denne avhandlingen er generert av et JONSWAP-spektrum som funksjon av vinkelfrekvens med følgende parametere: $\gamma = 3.3$, $A = \frac{5}{16} H_{m_0}^2 \left(\frac{\omega_p}{2\pi}\right)^4$ og $B = \frac{5}{4} \left(\frac{\omega_p}{2\pi}\right)^4$. $H_{m_0} = 4\sqrt{m_0} = 4\sqrt{\int_0^\infty S(\omega) d\omega} = 4\sigma$ er signifikant bølgehøyde.

Overskridelsessannsynlighet, kurtose og skjevhet

Overskridelsessannsynlighet, kurtose og skjevhet er brukt i analysen av aktuell sjøtilstand. Overskridelsessannsynligheten $P(x) = 1 - F(x)$ er sannsynligheten for at verdien til den stokastiske variabelen X er større enn x : $P(x) = P\{X > x\}$. Kurtose κ og skjevhet γ beskriver formen på en sannsynlighetsfordeling. Det finnes flere måter å definere størrelsene på. I denne avhandlingen er kurtose og skjevhet definert av 3. og 4. sentralmoment skalert med henholdsvis standardavviket til overflatehevingen i 3. og 4. potens.

$$\mu_n = E[(X - \mu)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^n f(x) dx \quad (3.18)$$

De er begge dimensjonsløse størrelser.

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{m_3 - 3\sigma^2\mu - \mu^3}{\sigma^3} \\ \kappa &= \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4} = \frac{m_4 - 4\gamma\sigma^4\mu - 6\sigma^2\mu^2 - \mu^4}{\sigma^4} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Følgende beskrivelse av kurtose og skjevhet er basert på to engelske wikipediasider [15] [16]. Kurtosen gir et mål på vektingen av sannsynlighetsfordelingens hale. Høyere kurtose betyr at større del av variansen er grunnet sjeldne og ekstreme avvik fra forventningsverdien fremfor hyppige moderate avvik. En estimator for kurtosen kan være

$$\kappa = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^2} \quad (3.20)$$

der n er antall målinger og \bar{x} er gjennomsnittet av målingene. Målinger nært gjennomsnittet gir veldig små bidrag til kurtosen $\tilde{\kappa}$. Bidrag fra x -verdier langt unna gjennomsnittet vil derimot gi betydelige bidrag. Av dette kan en se at kurtosen er dominert av det som skjer langt unna gjennomsnittsverdien til målte data.

Kurtosen til en normalfordelt stokastisk variabel er 3. En sannsynlighetsfordeling med kurtose over 3 kalles leptokurtisk og vil ha flere ekstreme tilfeller enn normalfordelingen. Om kurtosen er under 3 er sannsynlighetsfordelingen platykurtisk. En slik fordeling vil gi færre ekstreme bidrag enn tilfellet er for normalfordelingen.

Skjevheten er et mål på assymetri i sannsynlighetsfordelingen. Normalfordelingen er symmetrisk. Av dette følger det at skjevheten $\gamma = 0$. For en unimodal sannsynlighetsfordeling vil positiv skjevhet $\gamma > 0$ bety at halen på høyre side veier tyngre enn halen på venstre side. Negativ skjevhet indikerer en sannsynlighetstetthetsfunksjon med venstre hale som tyngst. Om skjevheten til overflatehevingen (med unimodal fordeling) er positiv vil det si at positive utslag er større enn negative utslag. Med andre ord vil kammene være høye og spisse, mens bukene grunne. For $\gamma < 0$ vil bølgebukene være dype og spisse, mens kammene være runde og lave. For multimodale fordelingsfunksjoner er det noe mer komplisert.

Kapittel 4

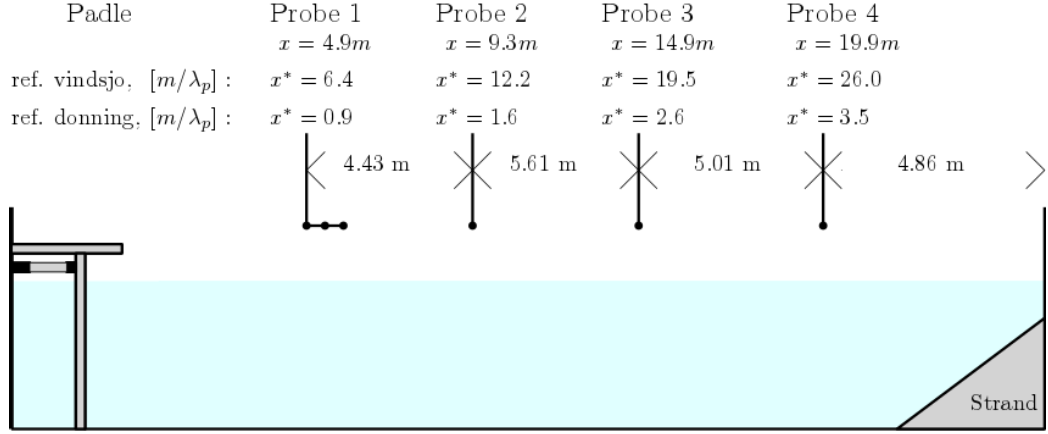
Eksperimentelt arbeid

4.1 Oppsett

Eksperimentene som presenteres i denne avhandlingen er gjort i bølgetanken i Hydrodynamisk Laboratorium ved Universitet i Oslo. Bølgetanken er 24.6m lang, 0.5m bred og 1.0m dyp. Nederst i tanken genererer en hydraulisk pumpe bølger ved at en plate beveger seg fram og tilbake i bølgetankens lengderetning. Platen dekker tverrsnittet i bølgetanken. De resulterende bølgene er plane med bredde lik tankens bredde og blir betraktet som todimensjonale. Programmet WaveLab[©] brukes for å bestemme bevegelsen til padlen. Programmet leser inputfil og sender et styresignal gitt i volt til padlen.

Målesystemet brukt for å måle overflatehevingen heter UltraLab[®] ULS Advanced. Probene som registrerer overflaten heter USS02/HFP og har rekkevidde på 30mm til 250mm og valgfri scanrate på 125Hz eller 250Hz. I dette eksperimentet ble 250Hz valgt som scanrate. UltraLab[®]-systemet har 4 kanaler og mulighet for å koble opptil 3 prober i hver kanal. Ved å velge flere prober i samme kanal vil en probe sende pulsen mens alle probene vil kunne motta den reflekterte pulsen. Om ingen prober mottar reflektert puls registreres en standard-verdi, en "dropout". Probene måler avstanden til overflaten. Om likevektsnivå velges som null-punkt, vil overflatehevingen $\eta = -(z - \bar{z})$ der z er registrerte data og \bar{z} er gjennomsnittet. Overflatehevingen ble målt 4 steder spredt utover tanken (se figur 4.1). Nærmest padlen (Probe 1) var 3 prober koblet sammen. For resterende målepunkter ble det brukt en probe per kanal.

I enden av tanken er det en strand som demper innkommende bølger.



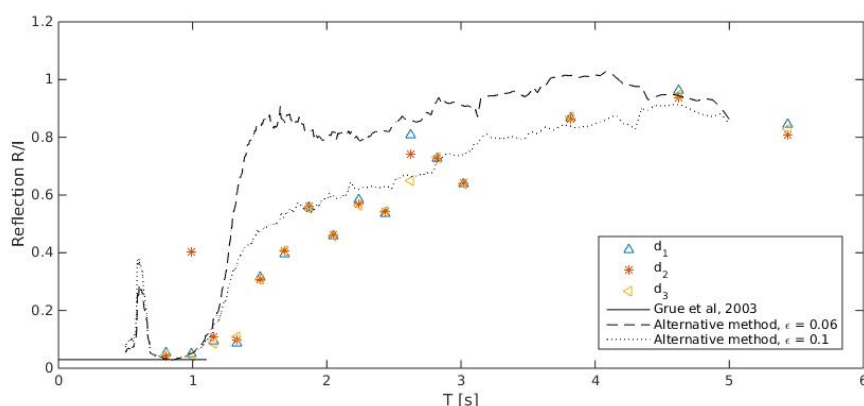
Figur 4.1: Oppsett bølgetanken

Refleksjonskoeffisienten er i et arbeid gjort av John Grue, Didier Clamond, Morten Huseby og Atle Jensen bestemt til å være under 3% [17, Grue et al., 2003]. Denne artikkelen omfatter bølger med periode på opp til 1.25 sekunder. Shkurta Olluri og Susanne Støle-Hentschel har gjort en nærmere undersøkelse av refleksjonskoeffisienten for bølger med perioder utover dette. Strandens dempende egenskaper svekkes betydelig for lange bølger. I denne avhandlingen ser vi på en superposisjon av et JONSWAP-spektrum og en lang monokromatisk bølge. Vi antar at mesteparten av energien fra JONSWAP-sjøen blir absorbert ved stranden, men en vesentlig del av dønningen vil bli reflektert. På bakgrunn av Støle-Hentschel og Olluris beregninger antas det at 70% av dønningen reflekteres [18, Olluri, 2016].

For vindsjøen er det valgt samme karakteristiske periode som Lisa Rye brukte i sin masteravhandling: $T_{p,kort} = 0.7s$ [9, 2014]. Dette gir karakteristisk vinkelfrekvens $\omega_{p,kort} = \frac{2\pi}{0.7} = 8.98s^{-1}$. Videre er det valgt samme forhold mellom karakteristisk vinkelfrekvens for vindsjø og dønning som er gjort av Gramstad og Trulsen [10, 2009]:

$$\frac{\omega_{p,lang}}{\omega_{p,kort}} = \frac{T_{p,kort}}{T_{p,lang}} = \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}) \quad (4.1)$$

Karakteristisk steilhet for bølger ved storm er normalt mindre enn 0.07 [1, Dysthe et al., 2008]. Korte bølger og vindsjø er generert slik at karakteristisk steilhet er av orden $\mathcal{O}(\epsilon) \sim 0.1$. Dette gir følgende karakteristiske periode for dønningen: $T_{p,lang} = 2.3s$. Styresignalet som sendes til bølgepadlen er laget i et MATLAB-program som superponerer et JONSWAP-spektrum ($\gamma = 3.3$ og $\omega_p = 8.98$) og en monokromatisk dønning (periode på 2.3 sekunder). For



Figur 4.2: Refleksjonskoeffisienter beregnet av Shkurta Olluri og Susanne Støle-Hentschel

å unngå frekvenser høyere enn padlen tåler, er frekvenser høyere enn $2\omega_p$ filtrert bort. For ytterligere detaljer om styresignalet vises det til tillegg A.1.

4.2 Variabilitet

I eksperimentene gjort i denne avhandlingen er skjevhet γ og kurtose κ ikke kjente størrelser, men estimert på grunnlag av målte data. Det betyr at skjevhet og kurtose er stokastiske variable med forventningsverdi og varians. Variansen til de estimerte størrelsene brukes her for å si noe om usikkerheten til de estimerte størrelser. Om estimatoren er god bør variansen til estimert kurtose og skjevhet bli mindre når antall målinger, n , øker. Under presenteres dimensjonsløse standardavvik for henholdsvis kurtose og skjevhet [19, Cramer, 1998][15][16].

$$\begin{aligned} \text{Standardavvik, kurtose: } \sqrt{\text{Var}(\kappa)} &= \sqrt{\frac{24}{n}} \\ \text{Standardavvik, skjevhet: } \sqrt{\text{Var}(\gamma)} &= \frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)} \approx \sqrt{\frac{6}{n}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Standardavvikene baserer seg på uavhengige observasjoner, dvs $n = \text{antall uavhengige data}$. Scanraten til probene USS02/HFP er satt til 250Hz. Da tiden mellom hver måling er så liten som 0.004 sekunder er ikke målingene uavhengige av hverandre. For å estimere hvor mye uavhengig data vi i praksis har er det valgt å kreve tiden mellom to uavhengige målinger til

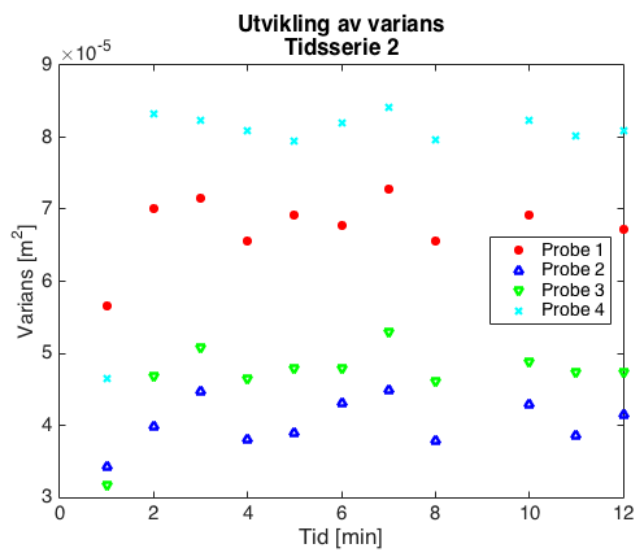
å være en karakteristisk periode, T_p . Overflatehevingen er målt i 15minutter. Med vindsjø som referanse er $T_p = 0.7$ og antall uavhengige målinger $n = \frac{15 \cdot 60 \cdot 250}{0.7 \cdot 250} \approx 1286$. Vindsjøen er brukt som referanse da det er effektene på vindsjøen som analyseres. Standardavvik for kurtose σ_κ og skjevhet σ_γ er i denne avhandlingen:

$$\begin{aligned}\sigma_\kappa &= \sqrt{\text{Var}(\kappa)} = \sqrt{\frac{24}{1286}} = 0.1366 \\ \sigma_\gamma &= \sqrt{\text{Var}(\gamma)} = \sqrt{\frac{6}{1286}} = 0.0683\end{aligned}\tag{4.3}$$

4.3 Måling av overflatehevingen

4.3.1 Oppstartseffekter

Fra det tidspunkt padlen begynner å generere bølger vil det være en periode med oppstartseffekter før overflatehevingen stabiliserer seg. Det er ønskelig å unngå slike oppstartseffekter. Dessuten vil tilstedeværelsen av en dønning i bølgetanken gi utfordringer grunnet refleksjon. Figur 4.3 viser utviklingen av variansen til overflateheving de første minuttene av en tidsserie. Av denne figuren ser vi at energien øker særlig i starten. På bakgrunn av dette er det valgt å kutte de 5 første minuttene av tidsserien. For hver kjøring måles overflatehevingen i 22 minutter. Det er valgt å se på overflatehevingen fra 5-20min. Dette gir en tidserie på 15 minutter som med probenes scanrate gir 225 000 målinger.

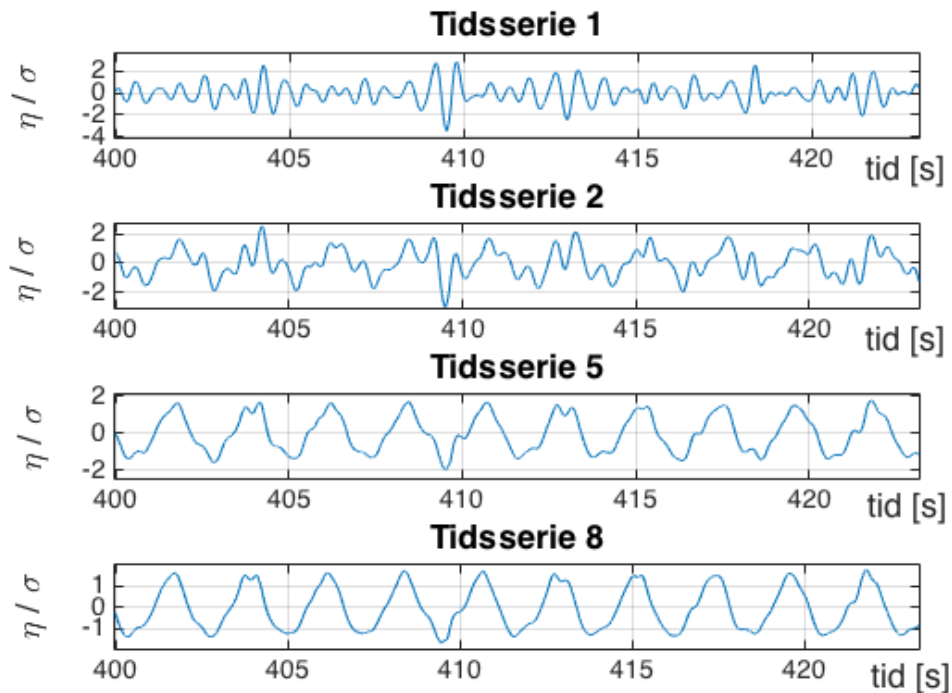


Figur 4.3: Oppstartseffekter for tidsseriene, kjøring $a_2 = 0.10$

4.3.2 Tidsserier

Det er tatt utgangspunkt i situasjonen der forholdet mellom steilheten til dønningen ϵ_2 og den karakteristiske steilheten til det som skal representere vindsjøen ϵ_1 er: $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \sim 0.1$. Dette er samme antakelse Odin Gramstad gjorde i sin artikkel "Can swell increase the number of freak waves in a wind sea?" [10, Gramstad og Trulsen, 2010]. Videre er det gjort forsøk med økende styrke på dønningen inntil observasjon av bølgebrytning. Det er også generert et rent JONSWAP-spektrum. Hvert forsøk er målt fire steder i tanken slik at effekten av dønningen kan sees i lys av romlig utvikling av sjøtilstanden.

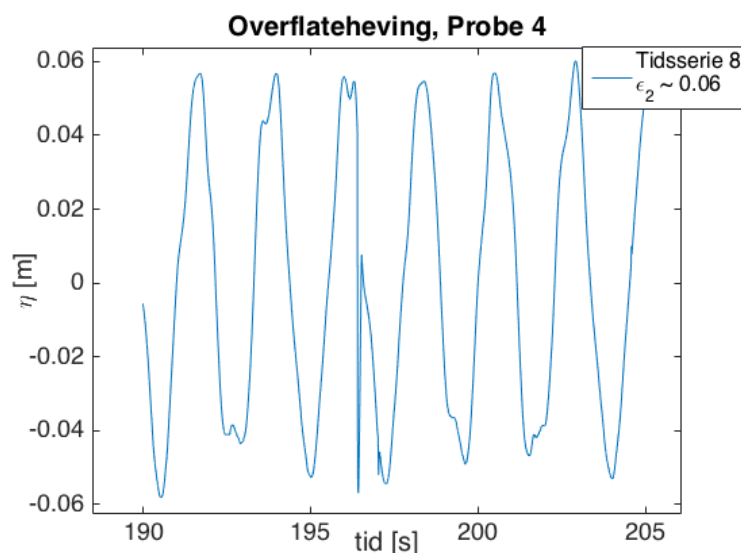
Figur 4.4 viser et utdrag av overflatemålinger for økende dønning. Etter som dønningen blir sterkere ser JONSWAP-spekteret ut til å nærmest bli små perturbasjoner på dønningen.



Figur 4.4: Utviklingen av normalisert overflateheving målt ved probe 1

4.4 Postprosessering

Probene gav gode resultater. Rådata er uten høyfrekvent støy, men med noen dropouts og andre forstyrrelser (hovedsakelig for kjøringene av de steileste dønningene). Dette er tatt hånd om med to programmer: *InterpolateDropouts.m* og *RemoveSpikes.m*. Det første programmet er opprinnelig utviklet av Tore Magnus Taklo, men tilpasset av Anne Raustøl og Lisa Rye [20, Raustøl] i forbindelse med deres masteravhandling. Da programmet *InterpolateDropouts.m* ikke fjernet alle forstyrrelser, utviklet Raustøl og Rye i samarbeid med Karsten Trulsen et program, *RemoveSpikes.m*, som fjerner og interpolerer områder der stigningstallet er større enn en gitt *threshold*. Slik kan små "spikes" i målingene fjernes og interpoleres (se figur 4.5). Både *InterpolateDropouts.m* og *RemoveSpikes.m* er noe tilpasset for implementering inn i denne avhandlingen.



Figur 4.5: Eksempel på forstyrrelser ("spikes") fra kjøringen av JONSWAP med den steileste dønningen

Kapittel 5

Resultater: Bikromatisk bølge

5.1 Tidsserier

Det er gjort 7 eksperimenter med bikromatiske bølger bestående av kort bølge med periode $T_1 = 0.7s$ (vinkelfrekvens $\omega_1 = 9.0s^{-1}$) og dønning med periode $T_2 = 2.7$ (vinkelfrekvens $\omega_2 = 2.7s^{-1}$). Karakteristiske frekvenser og steilheter er som for "dønning med vindsjø"-eksperimentet valgt i samsvar med antakelser gjort av Rye [9, 2014] og Gramstad [10, 2009]. Dette er diskutert i seksjon 4.1. Vi har $\mu = \frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \approx 0.3 \sim \mathcal{O}(\epsilon^{1/2})$. Tabell 5.1 gir en oversikt over tidsserier med tilhørende steilhet ved fire steder i bølgetanken. Karakteristisk steilhet for henholdsvis kort og lang bølge er funnet av karakteristisk amplitude og bølgetall: $a_c k_p = \sqrt{2}\sigma k_p$. σ er standardavviket til kort eller lang bølge.

Den målte overflatehevingen består av både kort og lang bølge. Kort og lang bølge kan imidlertid filtreres ut. Fouriertransformen $\hat{\eta}(\omega)$ av overflatehevingen $\eta(t)$ viser hvilke frekvenser energien til bølgesystemet er konsentrert rundt. Det er valgt en terskelverdi, $\omega = 5.8s^{-1}$, slik at kort bølge defineres som de komponenter av overflatehevingen med frekvens høyere enn $\omega = 5.8s^{-1}$. Dønningen er definert som de komponenter med frekvens lavere enn terskelverdien. For en bikromatisk bølge vil de ulike bidrag være tydelig separert. I analyse av bølger generert av et JONSWAP-spektrum vil en ha bidrag over større områder i vinkeldomenet. Karakteristisk vinkelfrekvens for dønning og kort bølge er funnet av fouriertransformens største verdi under og over terskelverdien. Karakteristisk bølgetall k_p er beregnet fra ω_p ved hjelp av dispersjonsrelasjonen. En kan uttrykke filtrert bølge ved den inverse fouriertransformen over vinkelfrekvenser over eller under terskelverdi. MATLAB-funksjonen *ifft* er brukt over dønningdelen av vinkeldomenet for

å finne dønningen, og over kortbølge-delen for å finne den korte bølgen. For videre forklaring henvises til seksjon 7.1. I avhandlingen er det brukt romertall om tidsserier av bikromatiske bølger.

Tidsserie		Probe 1	Probe 2	Probe 3	Probe 4
I	ϵ_1	0.100	0.097	0.088	0.082
	ϵ_2	0.013	0.009	0.005	0.010
	ϵ_2/ϵ_1	0.128	0.088	0.062	0.121
	a_2k_1	0.095	0.063	0.040	0.074
II	ϵ_1	0.100	0.097	0.087	0.084
	ϵ_2	0.023	0.017	0.013	0.019
	ϵ_2/ϵ_1	0.229	0.172	0.143	0.224
	a_2k_1	0.170	0.123	0.092	0.139
III	ϵ_1	0.100	0.098	0.088	0.085
	ϵ_2	0.032	0.025	0.020	0.026
	ϵ_2/ϵ_1	0.316	0.252	0.222	0.306
	a_2k_1	0.234	0.183	0.144	0.192
IV	ϵ_1	0.098	0.094	0.088	0.083
	ϵ_2	0.039	0.032	0.025	0.030
	ϵ_2/ϵ_1	0.392	0.337	0.283	0.361
	a_2k_1	0.285	0.234	0.184	0.222
V	ϵ_1	0.096	0.092	0.087	0.083
	ϵ_2	0.046	0.040	0.032	0.036
	ϵ_2/ϵ_1	0.484	0.429	0.365	0.436
	a_2k_1	0.344	0.292	0.235	0.268
VI	ϵ_1	0.093	0.091	0.086	0.084
	ϵ_2	0.054	0.048	0.041	0.044
	ϵ_2/ϵ_1	0.581	0.524	0.474	0.526
	a_2k_1	0.398	0.351	0.303	0.326
VII	ϵ_1	0.090	0.089	0.086	0.086
	ϵ_2	0.061	0.055	0.048	0.050
	ϵ_2/ϵ_1	0.682	0.622	0.560	0.583
	a_2k_1	0.453	0.410	0.356	0.372

Tabell 5.1: Oversikt over tidsserier av bikromatisk dønning med tilhørende karakteristisk steilhet for kort og lang bølge, forholdstallet mellom karakteristiske steilheter og størrelsen a_2k_1 . a_2k_1 gir størrelsesordenen til Q som inngår i modulasjonen av kort bølge gitt i likning (2.23). $a_2 = a_{2H} + a_{2V}$ er summen av amplituden til innkommende dønning og reflektert dønning.

Av figur 5.1 ser vi at målet om å generere kort bølge sammen med en lang dønning er innfridd. Første harmonisk av dønningen er representert av "toppen" ved $\omega = 2.7s^{-1}$. Andre harmonisk kan så vidt sees ved $\omega = 5.5s^{-1}$. Vi har 1. og 2. harmonisk til kort bølge ved $\omega = 9s^{-1}$ og $\omega = 18s^{-1}$. I tillegg er det registrert bølgekomponenter med vinkelfrekvens $\omega = 6.3s^{-1} = \omega_1 - \omega_2$ og $\omega = 11.7s^{-1} = \omega_1 + \omega_2$.

Kort bølge og dønning er filtret ut og analysert. Generelt ser det ut til at den korte bølgen har størst utslag i nærheten av toppen til dønningen. Det virker imidlertid som at dette hovedsakelig skjer rett før eller rett etter bølgekammen til dønningen. Figur 5.2, 5.3, 5.4 og 5.5 gir en oversikt over utdrag av målinger fra probe 1-4 for tidsserie I-VII. Av målinger fra probe 3 og tidsserie I ser den korte bølgen imidlertid ut til å ha maksimale utslag ved dønningens buk. Videre gir målinger fra probe 3 ved tidsserie II så små utslag at det er vanskelig å se en tydelig tendens. For tidsserie III - VI ser imidlertid den korte bølgen ut til å ha størst amplitude ved bølgekammene til dønningen. Ved tidsserie VII som er tilfellet med den steileste dønningen ser det ut til at dønningen påvirker den korte bølgen noe annerledes. Det kan virke som at den korte bølgens maksimale utslag varierer med en syklus på $\sim 10s$. Av figur 5.6a, 5.6b, 5.7a og 5.7b ser det ut til at den korte bølgens periode varierer lokalt avhengig av posisjon på lang bølge. Effekten ser ut til å forsterkes jo steilere dønningen er. Perioden avtar ved kammen til dønningen og øker ved dønningens buk. Dette betyr at bølgetallet vokser lokalt på kammen av dønningen og avtar lokalt på dønningens bølgebuk.

Steilheten til den korte bølgen avtar langs tanken. Dette er grunnet energidissipasjon langs bølgetanken. Steilheten til den lange bølgen avtar gradvis fra probe 1 til 3 men øker ved probe 4. Dette skyldes sannsynligvis det faktum at dønningen er delvis stående. Dønningens amplitude avhenger av probenes posisjon i tanken. I grensen av en fullstendig stående dønning vil det være mulig å plassere en probe slik at dønningens vertikale bevegelse er lik null. Slike punkt er kalt knutepunkt. Probene nær knutepunkt vil registrere en mindre dønning enn prober plassert nær områder der dønningen har maksimale utslag.

Videre er eksperimentelle resultater sammenlignet med teori. Fouriertransformen til henholdsvis teoretisk og målt overflateheving er plottet i figur 5.8 og 5.9. Overflatehevingen er sammenlignet i figur 5.10, 5.11, 5.12 og 5.13. Fouriertransformen og overflatehevingen har til hensikt å gi et visuelt inntrykk av hvor godt resultater samsvarer med teori. Videre er dønningens effekt på kort bølge analysert teoretisk i håp om å belyse hvilke effekter som

kan forventes i et teoretisk perspektiv.

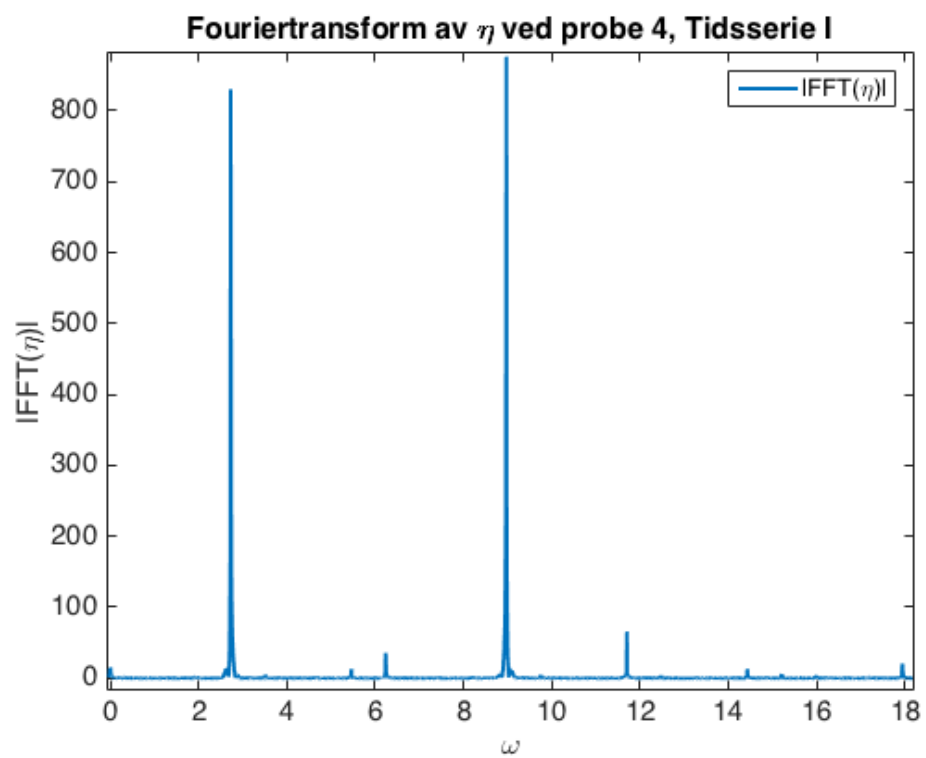
For tidsserie I er

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &\sim 0.1 \sim \mathcal{O}(\epsilon) \\ \epsilon_2 &\sim 0.01 \sim \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ Q &\sim a_2 k_1 \sim 0.1 \sim \mathcal{O}(\epsilon)\end{aligned}\tag{5.1}$$

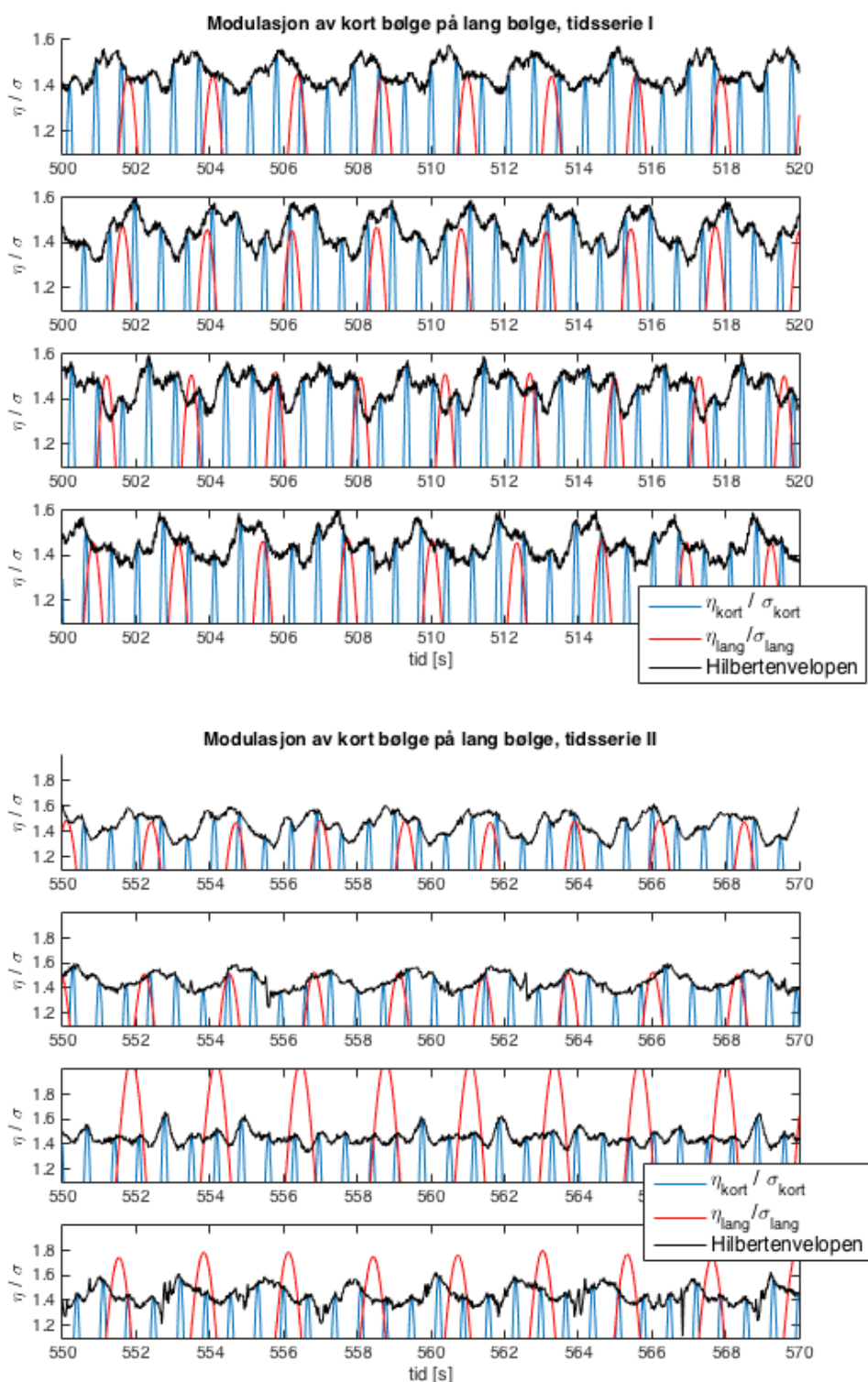
som betyr at $P \ll Q$ og $P \sim Q^2$. Om verdiene for ϵ_2 og $a_2 k_1$ brukes direkte har vi ved probe 1: $P = 0.01$ og $\frac{1}{2}Q^2 = \frac{1}{2}0.1^2 = 0.005$. $\frac{1}{2}Q^2$ er ikke ubetydelig i forhold til P , men vesentlig mindre. Ettersom dønningen vokser blir leddet $\frac{1}{2}Q^2$ større. For tidsserie III ved probe 1 er $P = 0.03$ og $\frac{1}{2}Q^2 = \frac{1}{2}0.23^2 = 0.03$.

Figur 5.15 og 5.16 illustrerer effekten av leddet $\frac{1}{2}Q^2$. Blå stiplet kurve er et plot av amplituden $A = a_1(1 + P)$ som er Longuet-Higgins og Stewarts forenklete modell for dønningens effekt på kort bølge [11, 1960]. Amplituden til kort bølge og dønning for målinger fra probe 4 er brukt for størrelsene a_1 og a_2 . Svart stiplet kurve er amplitudemodifikasjonen med $\frac{1}{2}Q^2$: $AA = a_1(1 + P + \frac{1}{2}Q^2)$. Avviket mellom A og AA blir større og større etter som dønningen vokser. Størrelsene P og Q er funksjoner av posisjon og tid. I figur 5.15 og 5.16 er det valgt $x = 0$ i uttrykkene A og AA for amplitudemodulasjonen.

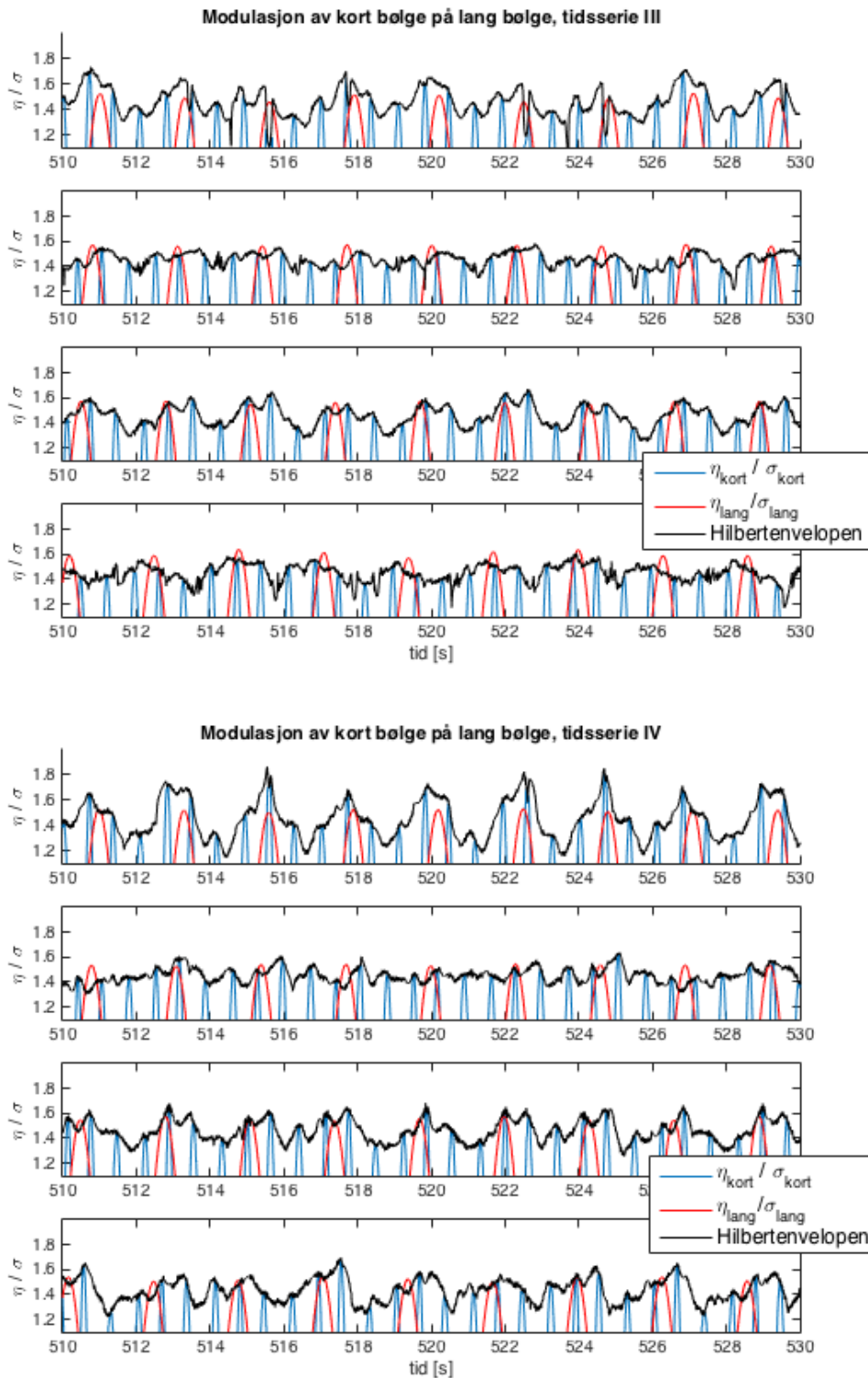
Av den modifiserte teorien for overflatehevingen, forventes amplituden til kort bølge å være størst i nærheten av dønningens bølgekam. Avhengig av forholdet mellom P og Q forventes amplituden til kort bølge å være størst enten ved kammen av dønningen eller rett før og etter dønningens bølgekam. Figur 5.15 og 5.14 illustrerer dette for tidsserie I til III. Det er brukt 3 forskjellige modeller for å beskrive hvordan det av teorien forventes at dønningen påvirker amplituden til kort bølge: Hilbertenvelopen, tilnærmet amplitudemodifikasjon fra Longuet-Higgins & Stewart [11, 1960] $A = a_1(1 + P)$ og amplitudemodifikasjon med Q -leddet i Longuet-Higgins & Stewarts teori $A = a_1(1 + P + \frac{1}{2}Q^2)$. Hilbertenvelopen er funnet med MATLAB-funksjonen *hilbert*. For tidsserie I predikerer alle modellene størst amplitude på dønningens bølgekam. For de to andre tidsseriene viser Hilbertenvelopen og AA størst amplitude før og etter kammen. AA har to like store lokale topper før og etter kammen. De lokale maksverdiene til Hilbertenvelopen varierer mellom å være noe større før, noe større etter eller like store på begge sider av dønningens kam.



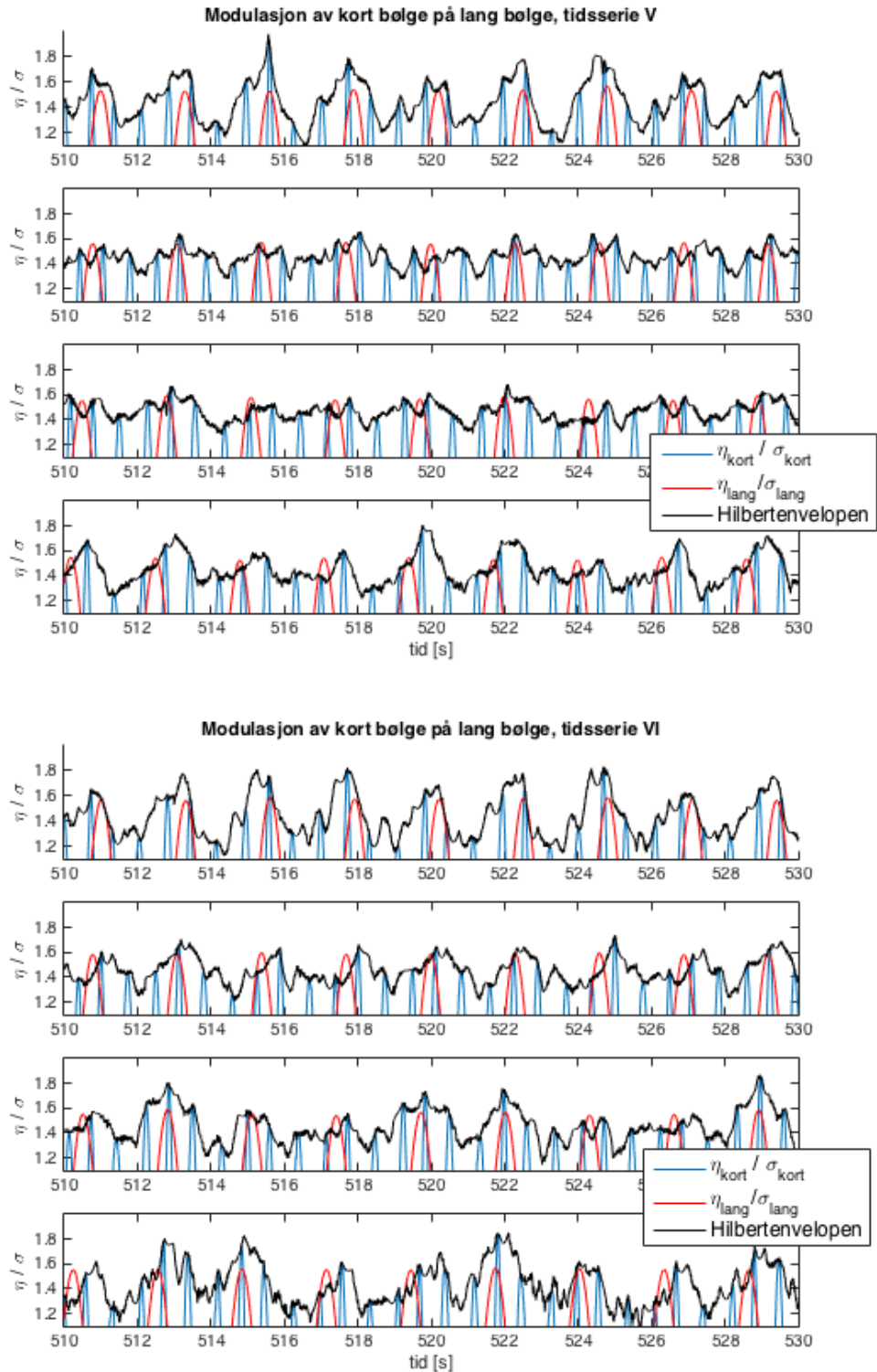
Figur 5.1: Absoluttverdien til $\hat{\eta}(\omega) = \text{fft}(\eta(t))$ som funksjon av vinkelfrekvensen ω



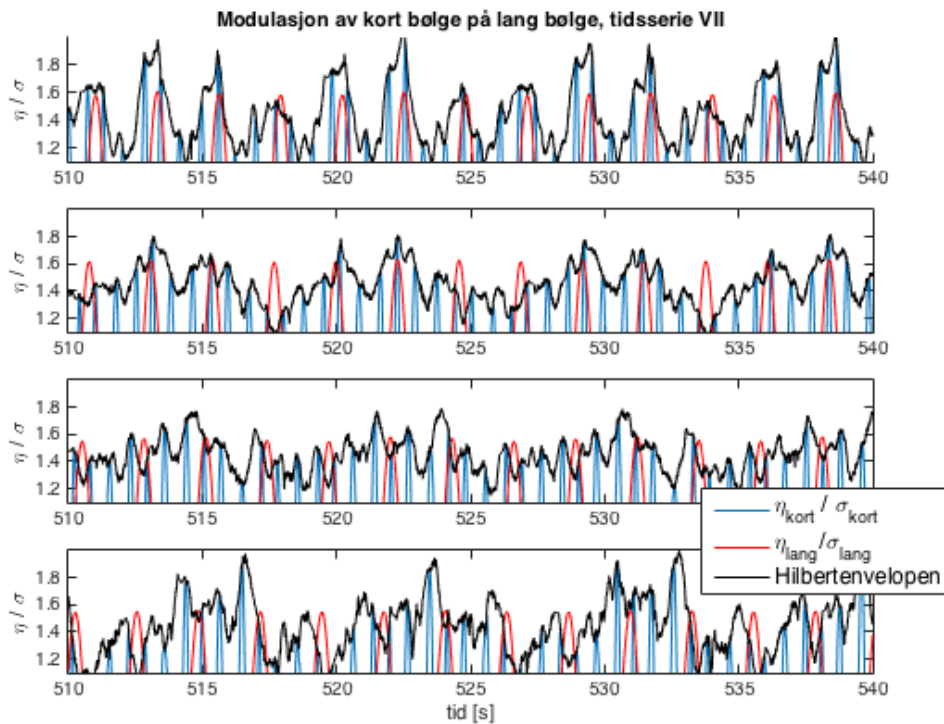
Figur 5.2: Overflateheving kort bølge η_{kort} sammen med overflateheving til lang bølge η_{lang} skalert med standardavviket til henholdsvis kort og lang bølge. Tidserier er spesifisert i tittel og inneholder 4 delplot med data fra probe 1,2,3 og 4. Data fra probe 1 er øverst. Deretter følger probe 2, 3 og 4, der data fra probe 4 er nederst.



Figur 5.3: Overflateheving kort bølge η_{kort} sammen med overflateheving til lang bølge η_{lang} skalert med standardavviket til henholdsvis kort og lang bølge. Tidserier er spesifisert i tittel og inneholder 4 delplot med data fra probe 1,2,3 og 4. Data fra probe 1 er øverst. Deretter følger probe 2, 3 og 4, der data fra probe 4 er nederst.

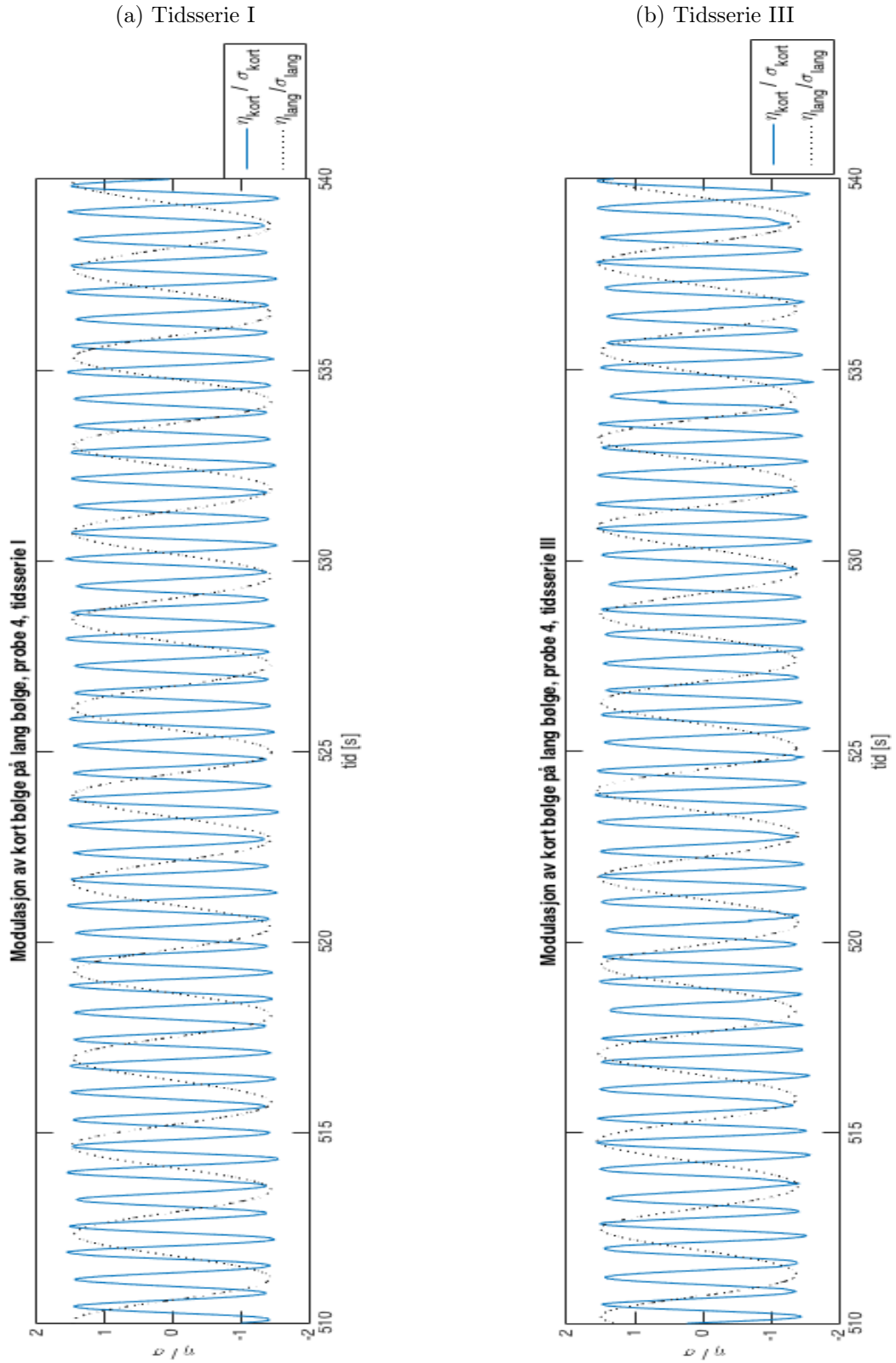


Figur 5.4: Overflateheving kort bølge η_{kort} sammen med overflateheving til lang bølge η_{lang} skalert med standardavviket til henholdsvis kort og lang bølge. Tidsserier er spesifisert i tittel og inneholder 4 delplot med data fra probe 1,2,3 og 4. Data fra probe 1 er øverst. Deretter følger probe 2, 3 og 4, der data fra probe 4 er nederst.

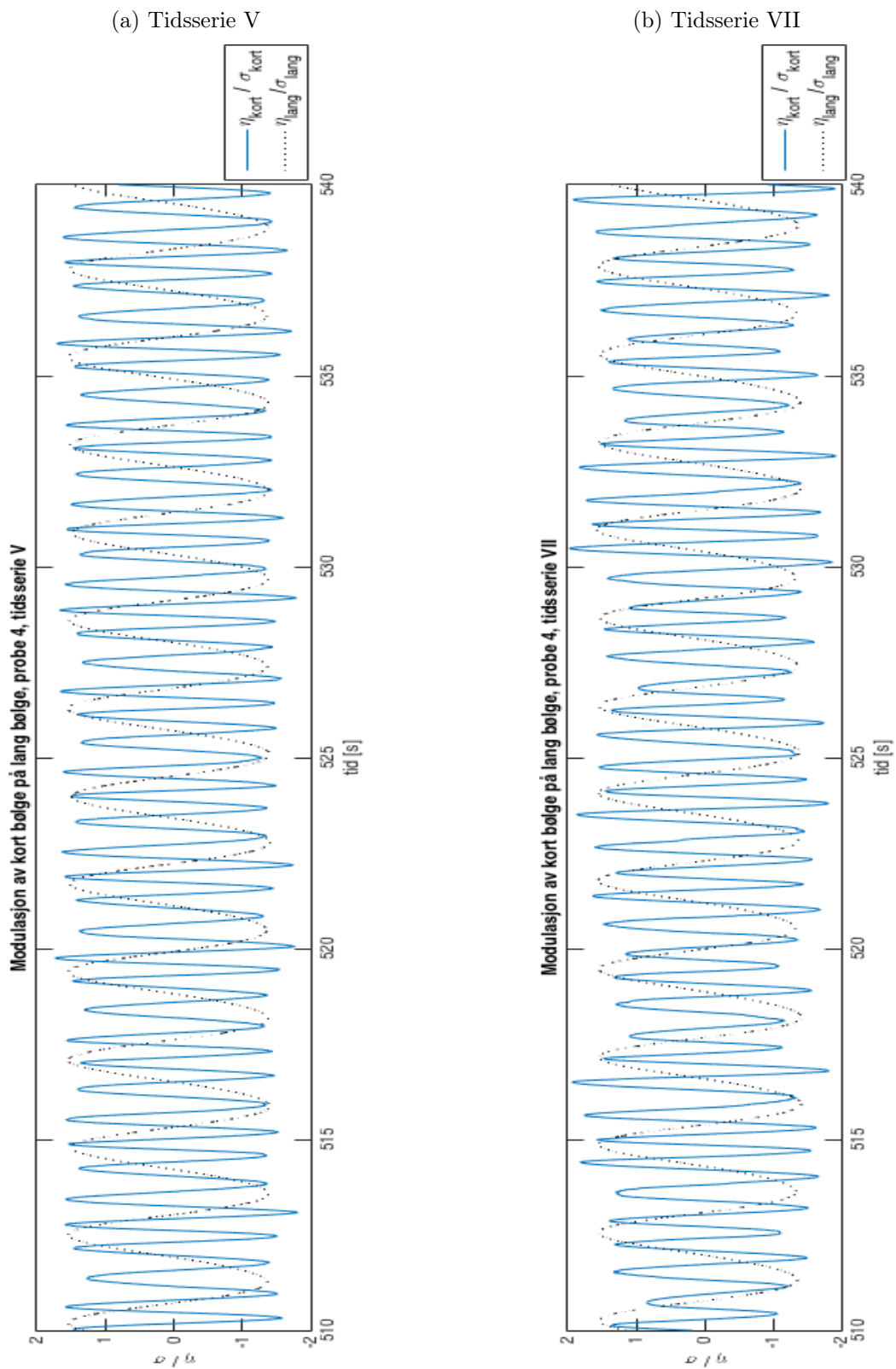


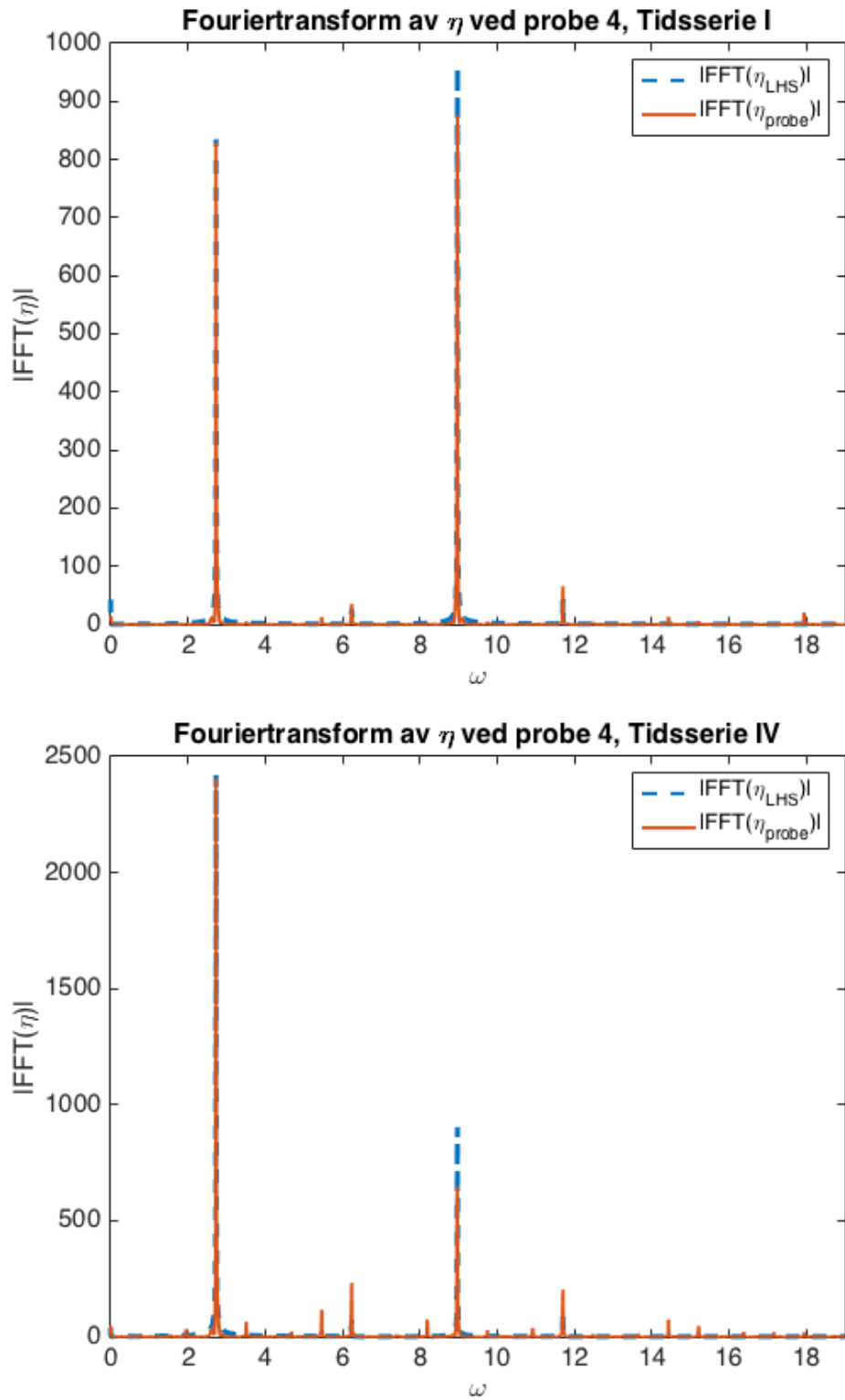
Figur 5.5: Overflateheving kort bølge η_{kort} sammen med overflateheving til lang bølge η_{lang} skalert med standardavviket til henholdsvis kort og lang bølge. Tidserier er spesifisert i tittel og inneholder 4 delplot med data fra probe 1,2,3 og 4. Data fra probe 1 er øverst. Deretter følger probe 2, 3 og 4, der data fra probe 4 er nederst.

Figur 5.6: Overflatehevingen til kort og lang bølge målt ved probe 4.

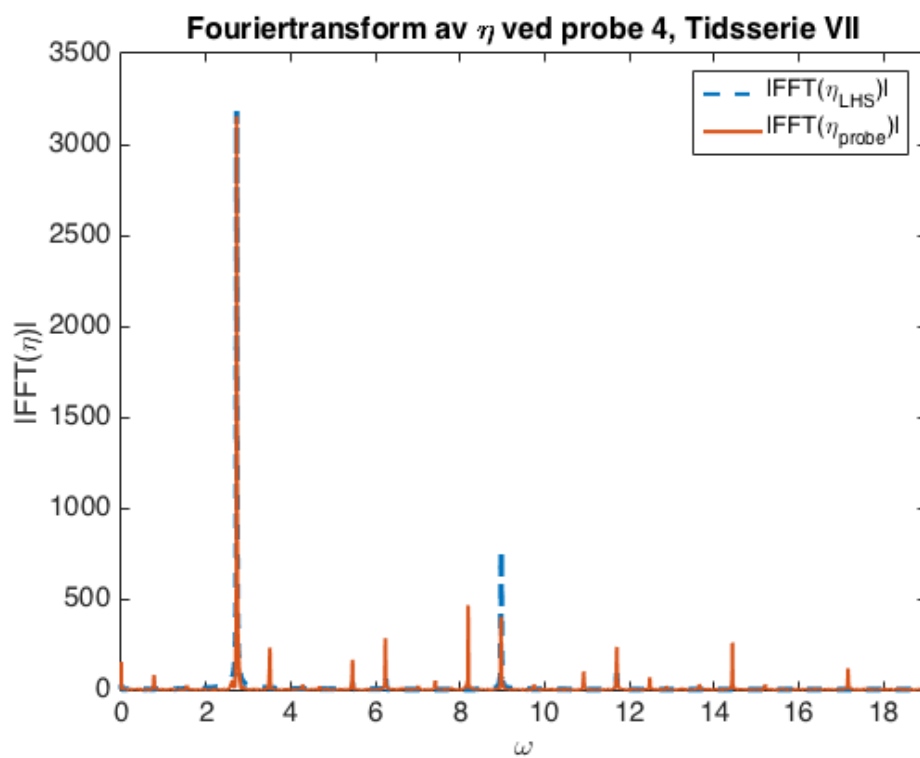


Figur 5.7: Overflatehevingen til kort og lang bølge målt ved probe 4.

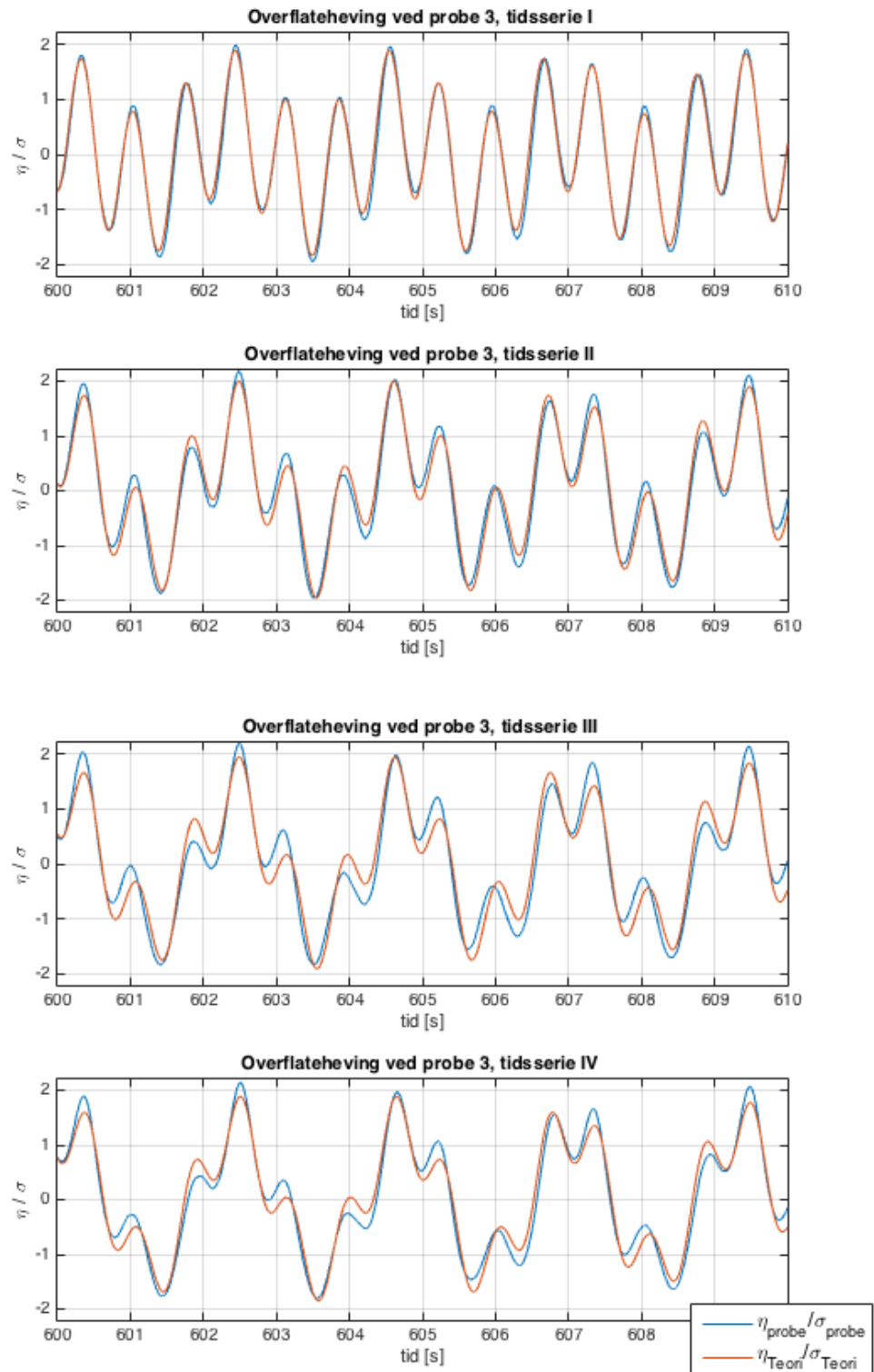




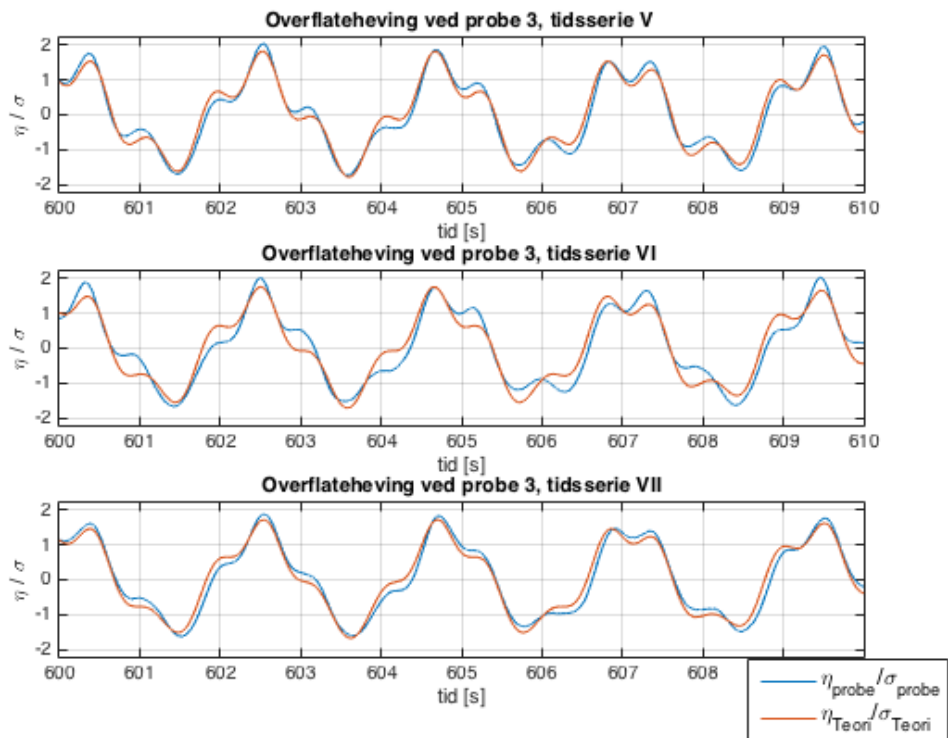
Figur 5.8: Absoluttverdien til fouriertransformen av η for tidsserie I og IV målt ved probe 4 sammenlignet med absoluttverdien til fouriertransformen av teoretisk overflateheving på uendelig dyp.



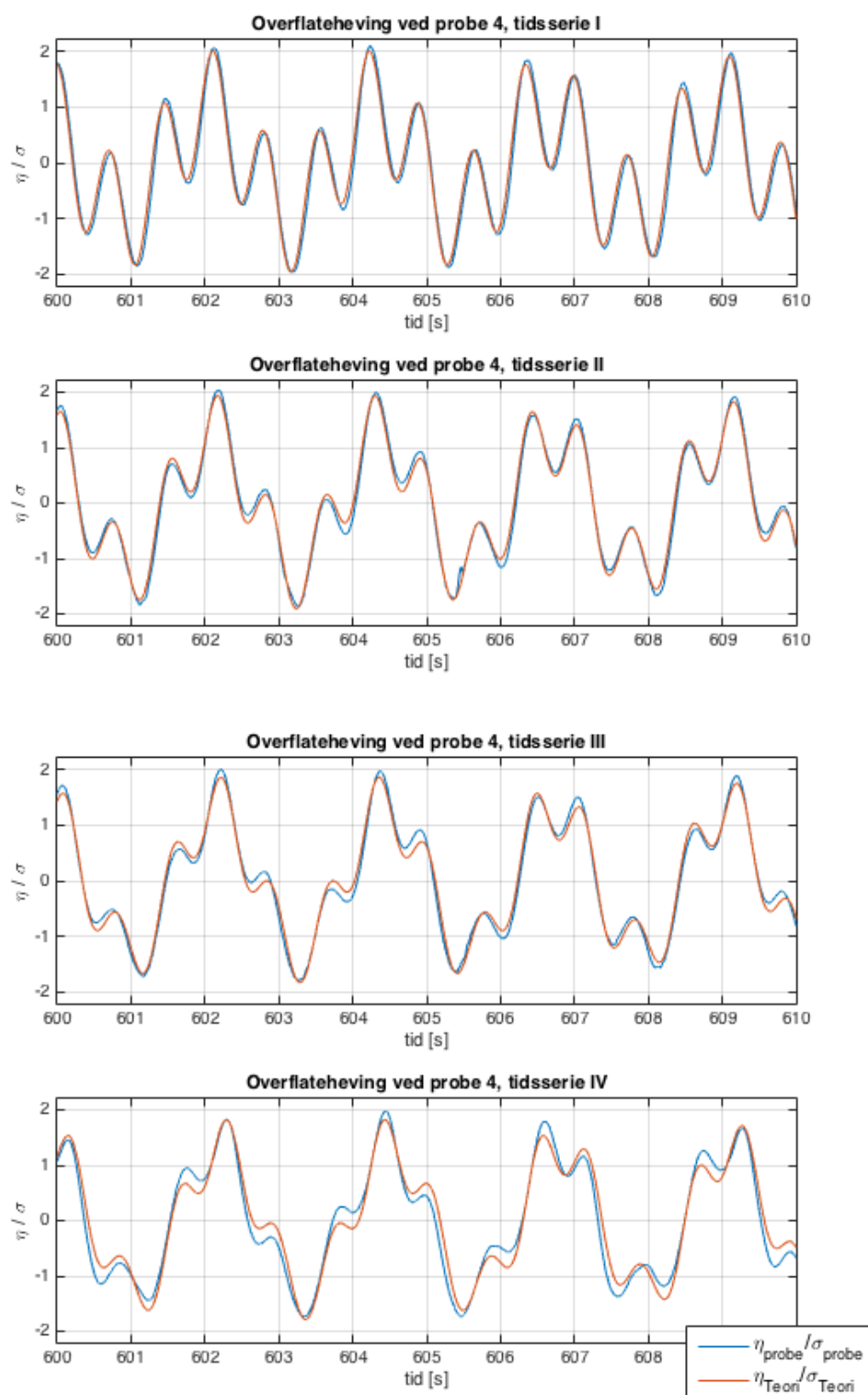
Figur 5.9: Absoluttverdien til fouriertransformen av η for tidsserie VII målt ved probe 4 sammenlignet med absoluttverdien til fouriertransformen av teoretisk overflateheving på uendelig dyp.



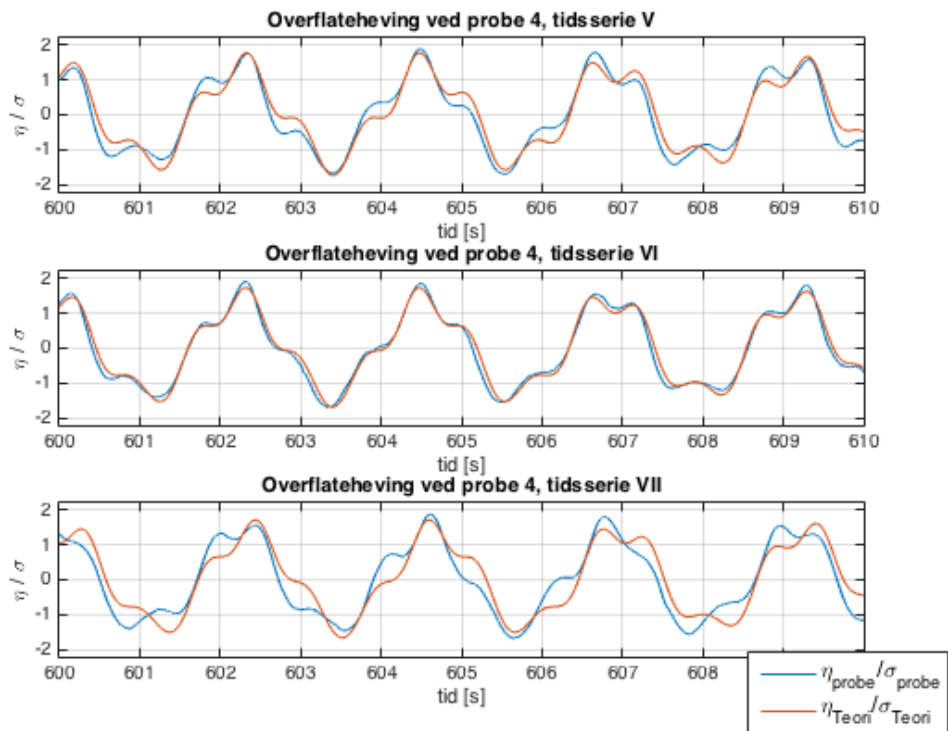
Figur 5.10: Overflatehevingen målt ved probe 3 sammenlignet med dønning-modifisert teori for overflatehevingen på uendelig dyp. Med dønning-modifisert teori menes teori for kort bølge ridende på delvis stående lang bølge. Tidsserie I til IV.



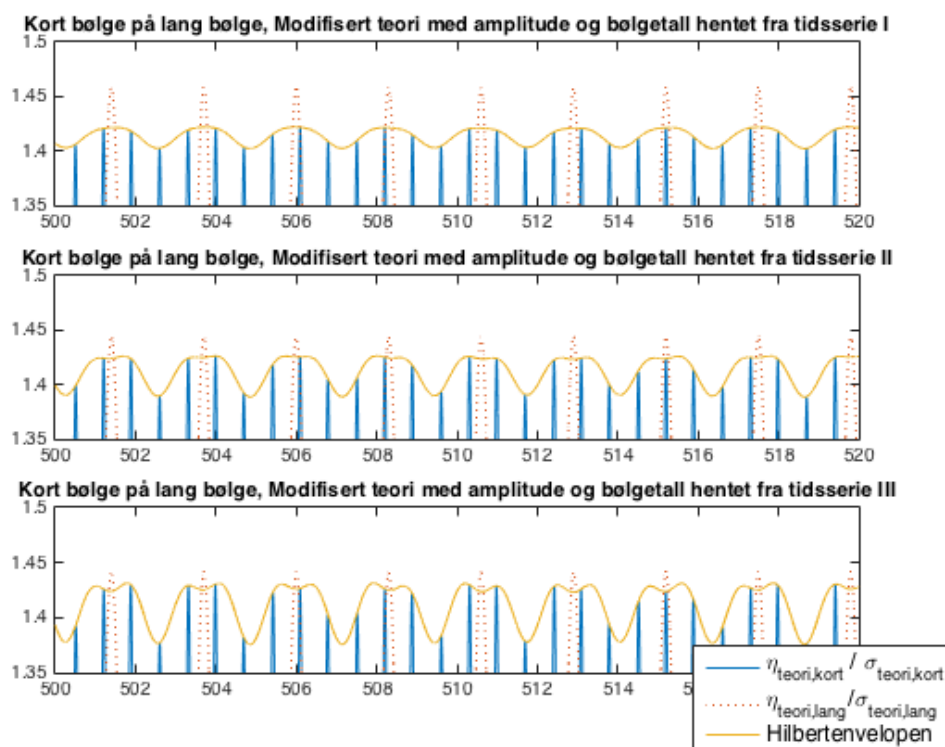
Figur 5.11: Overflatehevingen målt ved probe 3 sammenlignet med dønning-modifisert teori for overflatehevingen på uendelig dyp. Med dønning-modifisert teori menes teori for kort bølge ridende på delvis stående lang bølge. Tidsserie V til VII.



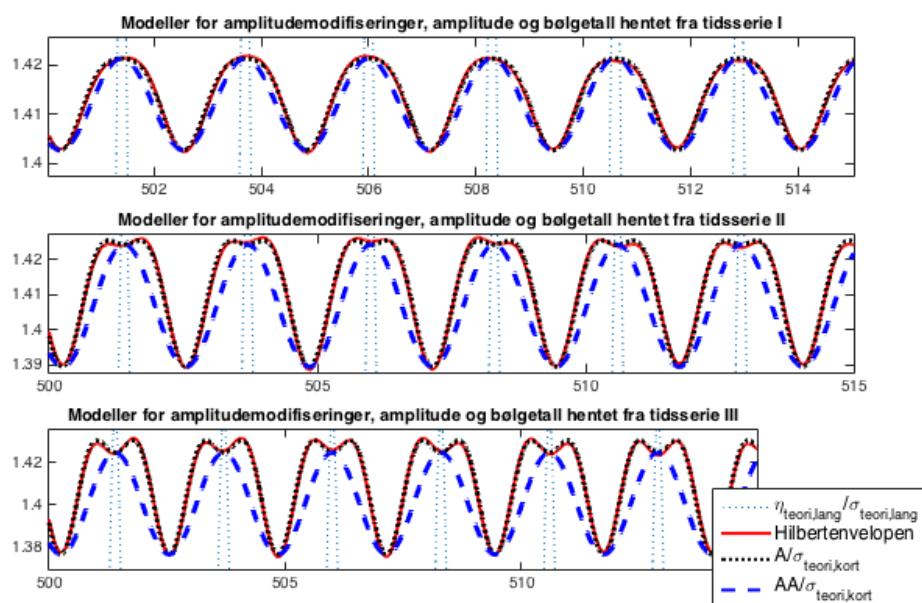
Figur 5.12: Overflatehevingen målt ved probe 4 sammenlignet med dønning-modifisert teori for overflatehevingen på uendelig dyp. Med dønning-modifisert teori menes teori for kort bølge ridende på delvis stående lang bølge. Tidsserie I til IV.



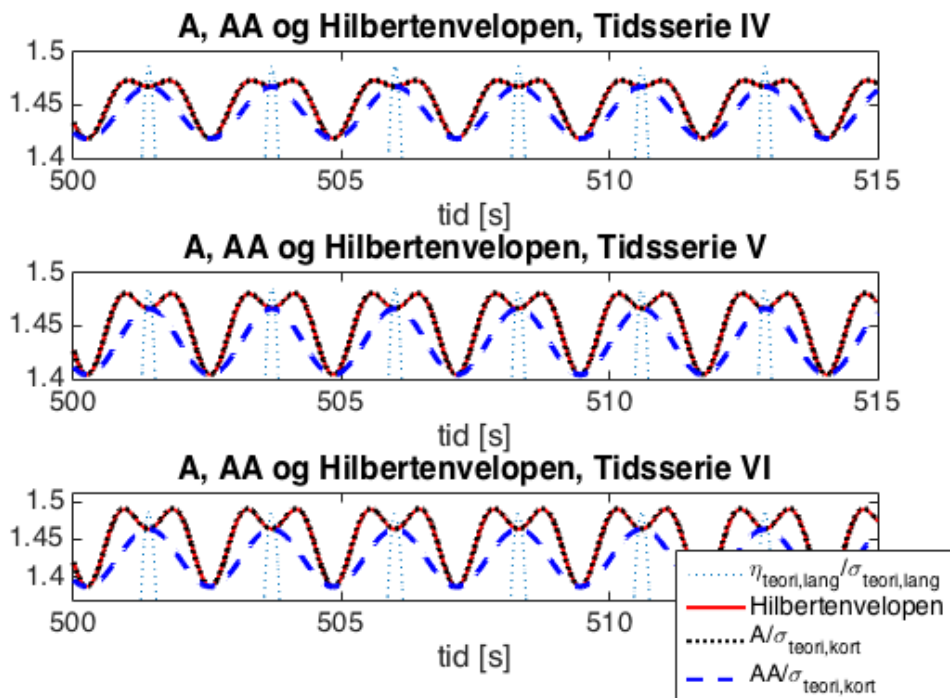
Figur 5.13: Overflatehevingen målt ved probe 4 sammenlignet med dønning-modifisert teori for overflatehevingen på uendelig dyp. Med dønning-modifisert teori menes teori for kort bølge ridende på delvis stående lang bølge. Tidsserie V til VII.



Figur 5.14: Kort bølge ridende på lang bølge for modifisert teori. Gul kurve er Hilbertenvelopen av den korte bølgen. Amplituder og bølgetall som inngår i uttrykket for overflatehevingen er hentet fra målinger for tidsserie I til III ved probe 4.



Figur 5.15: Ulike modeller for utvikling av amplituden langs dønningen. $A = a_1(1 + P + \frac{1}{2}Q^2)$, $AA = a_1(1 + P)$. Amplituder og bølgetall som inngår i uttrykket for amplitude A, AA og uttrykket for overflatehevingen er hentet fra målinger for tidsserie I til III ved probe 4.



Figur 5.16: Ulike modeller for utvikling av amplituden langs dønningen. $A = a_1(1 + P + \frac{1}{2}Q^2)$, $AA = a_1(1 + P)$. Amplituder og bølgetall som inngår i uttrykket for amplitude A, AA og uttrykket for overflatehevingen er hentet fra målinger for tidserie IV til VI ved probe 4.

Kapittel 6

Matematisk verktøykasse

6.1 Overskridelsessannsynlighet, kurtose og skjevhet

I følgende avsnitt presenteres de ulike verktøy brukt i statistisk analyse av eksperimentelle data. Kurtosen og skjevheten er beregnet med MATLAB-funksjonene *kurtosis* og *skewness*. Overskridelsessannsynligheter er estimert av forholdet mellom antall elementer over en gitt verdi og totalt antall data,

$$P\{Z > z\} = \frac{\text{antall verdier over } z}{\text{totalt antall data}}$$

Kurtose og skjevhet for Gaussisk sjø er henholdsvis $\kappa = 3$ og $\gamma = 0$. Vi har den lineære modellen for overflatehevingen $\eta = a \cos(\theta)$ der θ er uniformt fordelt på intervallet $[0, 2\pi]$ og a er for en smalbåndet prossess rayleigh-fordelt. Fasen θ og amplituden a er uavhengige stokastiske variable med tetthetsfunksjoner $f(\theta) = \frac{1}{2\pi}$ og $f(a) = \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma}}$. Vi har da

$$\begin{aligned} E[\eta^3] &= E[a^3]E[\cos^3(\theta)] = 0 \\ E[\eta^4] &= E[a^4]E[\cos^4(\theta)] = (8\sigma^4)\left(\frac{3}{8}\right) = 3\sigma^4 \\ \gamma &= \frac{E[\eta^3]}{\sigma^3} = 0 \\ \kappa &= \frac{E[\eta^4]}{\sigma^4} = 3 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Mori & Janssen [21, 2006] har gjort ikkelineær modifikasjon av kurtose. For svakt ikkelineær teori (2. ordens tilnærming) er kurtosen uendret. Til

3. ordens ikkelineær teori følger det et korreksjonsledd: $\kappa_{40} = 24\hat{\epsilon}^2$, med $\hat{\epsilon} = k_p\sqrt{m_0} = k_p\sigma$. Ved å benytte relasjonen $a_c = \sqrt{2}\sigma$ kan korreksjonsleddet uttrykkes av karakteristisk steilhet:

$$\kappa_{40} = 12(a_c k_p)^2 = 12\epsilon^2 \quad (6.2)$$

Dette gir

$$\kappa = 3 + 12\epsilon^2. \quad (6.3)$$

Srokosz & Longuet-Higgins viste i 1986 at skjevheten til en 2. ordens Stokes-bølge er positiv [22]:

$$\gamma = \frac{3}{\sqrt{2}}a_c k_p = \frac{3}{\sqrt{2}}\epsilon \quad (6.4)$$

Modifisert kurtose og skjevhet gjelder under antakelsen om smalbåndet sjø.

For en dønning kan vi tenke oss at amplituden er konstant. Dønningens kurtose og skjevhet kan regnes ut ved å la fasen θ være den stokastiske variabelen.

$$\begin{aligned} E[\eta^4] &= E\left[\left(a \cos(\theta) + \frac{a^2 k}{2} \cos(2\theta)\right)^4\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^4 \cos^4(\theta) + 4a^3 \left(\frac{a^2 k}{2}\right) \cos^3(\theta) \cos(2\theta) + \mathcal{O}(a^6 k^2) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{3}{8} \theta (a^4 + \mathcal{O}(a^6 k^2)) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{3}{8} (a^4 + \mathcal{O}(a^6 k^2)) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Vi har $a = \sqrt{2}\sigma \Leftrightarrow \sigma = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Dette gir kurtose κ :

$$\kappa = \frac{E[\eta^4]}{\sigma^4} = \frac{4E[\eta^4]}{a^4} = \frac{3}{2}(1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \quad (6.6)$$

En svakt ikkelineær dønning forventes å ha kurtose på 1.5.

$$E[\eta^3] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(a \cos(\theta) + \frac{a^2 k}{2} \cos(\theta)\right)^3 d\theta = \frac{3}{8} a^4 k \quad (6.7)$$

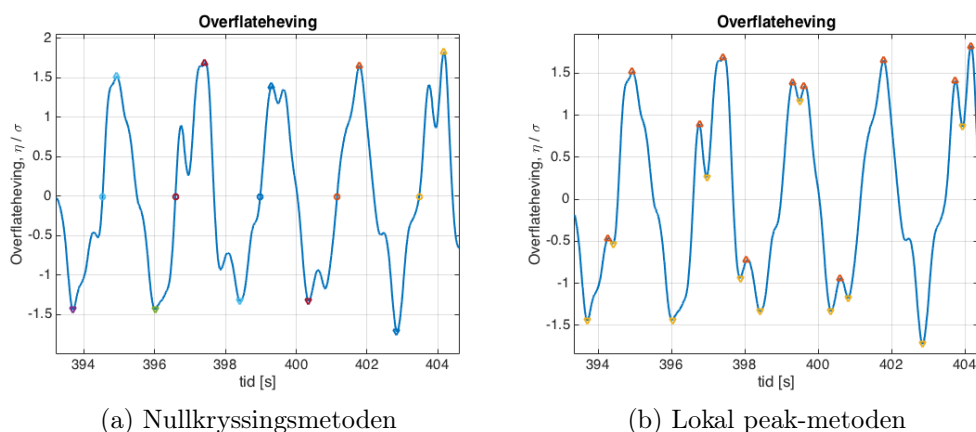
Skjevhet til en dønning:

$$\gamma = \frac{E[\eta^3]}{\sigma^3} = \frac{3\sqrt{2}}{4} a k = \frac{3\sqrt{2}}{4} \epsilon \quad (6.8)$$

6.2 Nullkryssingsmetoden og lokal peak

I analysen av eksperimentelle data finnes det forskjellige måter å definere en bølge på. Det er valgt å definere bølger ved hjelp av nullkryssingsmetoden samt det som i avhandlingen er kalt lokal peak-metoden. I nullkryssingsmetoden brukes overflatehevingens likevektsnivå som referanse i definisjonen av en bølge. Vi kan definere bølgens start og slutt ved punktet overflaten går fra å være negativ til positiv. Dette kaller vi null-opp-kryssing (zero-up crossing). Alternativt kan en bruke de punkter der overflatehevingen går fra positiv til negativ som referanse. Dette er kalt null-ned-kryssing (zero-down crossing). Ved å bruke nullkryssing bestemmes kamhøyden til å være bølgens maksimale verdi i intervallet den er definert. Bukdybden er minimumsverdien i samme intervall. Med andre ord er kammer alltid positive og buker alltid negative. Bølgehøyden defineres som avstanden mellom kam og etterfølgende buk.

Med lokal peak-metoden tillates negative kammer og positive buker. Bølgekammer og bølgebucker er funnet med MATLAB-funksjonen *findpeaks* som leter etter lokale maksimumsverdier innenfor en ramme av betingelser lagt på funksjonen. Se tillegg A.2 for videre forklaring. Bukene er funnet av lokale maksimumsverdier til negativ overflateheving. Bølgehøyden er bestemt av vertikal avstand mellom lokal kam og buk.



Figur 6.1: Kammer og buker funnet ved hjelp av nullkryss og lokal peak

En enkel måte å gjenkjenne en prosess som smalbåndet er å observere at kammene er positive, mens bukene er negative [23, Nieto Borge]. I dette tilfellet vil en finne alle lokale kammer av nullkryssingsmetoden. I det spesielle tilfellet med tilstedeværelse av en dønning, vil imidlertid flere kammer

være negative og flere buker være positive ettersom dønningen vokser.

Kamhøyden η_c kan relateres til bølgens amplitude. Vi har sett at amplituden A er rayleigh-fordelt for en smalbandet sjø. I grensen av ekstremt smalbandet sjø kan vi anta at bølgehøyden $H = 2A$. I grensen av smalbandet sjø er dermed bølgehøyden rayleighfordelt. Overskridelsessannsynlighetene er henholdsvis:

$$\begin{aligned} P_c(z) &= P\{\eta_c > z\} = 1 - F(z) = 1 - \int_{-\infty}^z \frac{z^*}{\sigma^2} e^{-\frac{z^{*2}}{2\sigma^2}} dz^* = e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \\ P_H(z) &= P\{H > z\} = P_H\{2\eta_c > z\} = P_H\{\eta_c > \frac{z}{2}\} = e^{-\frac{z^2}{8\sigma^2}} \end{aligned} \quad (6.9)$$

6.2.1 Hilbertenvelopen

Vi definerer et analytisk signal $Z(t) = X(t) - i\tilde{X}(t)$. $X(t)$ er en reell prosess og $\tilde{X}(t)$ er hilberttransformen av $X(t)$. Hilbertenvelopen er $|Z(t)| = \sqrt{X(t)^2 + \tilde{X}(t)^2}$ [26, Lindgren, 2013].

$$\tilde{X}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \hat{X}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (6.10)$$

Hilberttransformen kan også uttrykkes ved hjelp av den reelle prosessen $X(\xi)$:

$$\tilde{X}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\xi)}{t - \xi} d\xi \quad (6.11)$$

$$\hat{g}(\omega) = \begin{cases} -i & , \omega < 0 \\ 0 & , \omega = 0 \\ i & , \omega > 0 \end{cases}$$

Det kan vises at $X(t)$ og $\tilde{X}(t)$ er ukorrelerte ved samme tid t . Videre vil $\tilde{X}(t)$ være gaussisk om $X(t)$ er gaussisk. Da $X(t)$ og $\tilde{X}(t)$ er ukorrelerte og gaussiske, er de uavhengige stokastiske variable. Jamfør tidligere regning (seksjon 3.1.1) vil sannsynlighetstetthetsfunksjonen til $|Z(t)| = \sqrt{X(t)^2 + \tilde{X}(t)^2}$ være rayleigh-fordelt [3, Trulsen, 2006]. Dersom bakgrunnsprosessen er Gaussisk er hilbertenvelopen er rayleigh-fordelt uavhengig av båndbredde. I denne avhandlingen vil hilbertenvelopen være et godt verktøy for å vurdere hvorvidt en prosess er gaussisk eller ikke. Dessuten vil hilbertenvelopen i tilfellet der prosessen er smalbandet gi informasjon om bølgekammer.

6.2.2 Tayfun-referanser

Det er brukt Tayfun-modifiserte referansekurver for å sammenligne resultatene med effektene av å inkludere 2. ledd i Stokesbølgeomodellen. Det er med andre ord brukt Tayfun-referanser for å sammenligne resultatene med svakt ikkelineær teori. Tayfun-modifiserte fordelinger baserer seg på antakelse av smalbåndet prossess [27, Tayfun, 1980].

Tayfun-modifisert overskridelsessannsynlighet for kamhøyder og Tayfun-modifisert sannsynlighetstetthetsfunksjon for overflatehevingen [28, Socquet-Juglard, Dyste, Trulsen, Krogstad & Liu, 2005]:

$$P_c(z) = P\left\{\frac{\eta_c}{\sigma} > z\right\} = e^{-\frac{1}{\sigma^2}(\sigma z + 1 - \sqrt{2\sigma z + 1})} \quad (6.12)$$

og

$$f_{\frac{\eta}{\sigma}}(z) = \frac{1 - 7(k_p\sigma)^2/8}{\sqrt{2\pi(1 + 3G + 2G^2)}} e^{-\frac{G^2}{2(k_p\sigma)^2}} \quad (6.13)$$

Videre er $G = \sqrt{1 + 2k_p\sigma z} - 1$. Uttrykket for sannsynlighetstettheten er en tilnærming gyldig innenfor antakelsen $(k_p\sigma)^2 \ll 1$. Kumulativ sannsynlighetsfordeling er funnet av å integrere $f_{\frac{\eta}{\sigma}}(z)$ med MATLAB-funksjonen trapz.

6.2.3 Oppsummering

Overflatehevingen og hilbertenvelopen brukes til å vurdere hvorvidt sjøtilstanden er en gaussisk prossess. Tayfunmodifiseringer av overskridelsessannsynligheter brukes som referanse for ikkelineære effekter. Selv om freakebølger ikke er definert ved kurtose har vi god grunn til å anta at det er en sammenheng mellom høy kurtose og forekomst av freakebølger. Kurtose, skjevhet og Hilbertenvelopen er ikke avhengig av mye data for å bli brukt. Å hente informasjon om freakebølge-sannsynlighet fra bølgehøyder H og bølgekammer η_c krever derimot veldig mye data.

Kapittel 7

Resultater

7.1 Tidsserier

Det er målt 8 forskjellige tidsserier. Det som skiller tidsseriene fra hverandre er amplituden til dønningen. Tidsseriene er nummerert fra 1 til 8 der 1 viser til tidsserien med et rent JONSWAP-spektrum. Tidsserie 2-8 har spektrum bestående av JONSWAP og dønning. Karakteristisk steilhet for vindsjø og dønning er ϵ_1 og ϵ_2 . De karakteristiske steilhetene er funnet ved å filtrere ut de bølgekomponenter som er over eller under en gitt vinkelfrekvens. Det er valgt å sette grensen ved $\omega = 4.5s^{-1}$. Vinkelfrekvenser over dette defineres inn i vindsjøen. Det betyr at 2. harmonisk og 3. harmonisk til dønningen faller sammen med vindsjøen. Størrelser knyttet til dønningen er basert på 1. harmonisk til dønning. MATLAB-funksjonen *fft* er brukt for å regne ut Fouriertransform. Ved å bruke MATLAB-funksjonen *ifft* på dønningdelen av Fouriertransformen er overflatehevingen til dønningen filtrert ut. Det samme er gjort over frekvenser med absoluttverdi større enn $\omega = 4.5s^{-1}$ for å finne overflatehevingen til vindsjøen. Karakteristisk amplitude er funnet av standardavviket til overflatehevingen $a_c = \sqrt{2}\sigma$. Karakteristisk amplitude for dønning og vindsjø regnes av standardavviket til dønningens og vindsjøens overflateheving.

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= a_{kort}k_{kort} = \sqrt{2}\sigma_{\eta_{kort}}k_{kort} \\ \epsilon_2 &= a_{lang}k_{lang} = \sqrt{2}\sigma_{\eta_{lang}}k_{lang}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_{kort} &: \text{Overflatehevingen for vindsjø (Dønning filtrert vekk)} \\ \eta_{lang} &: \text{Overflatehevingen for lang bølge (Vindsjø filtrert vekk)} \\ \sigma_{\eta_{kort}} &: \text{Standardavvik, overflateheving til vindsjø} \\ \sigma_{\eta_{lang}} &: \text{Standardavvik, overflateheving til dønning}\end{aligned}\tag{7.1}$$

Tidsserie		Probe 1	Probe 2	Probe 3	Probe 4
1	ϵ_1	0.0615	0.0572	0.0533	0.0500
	ϵ_2	-	-	-	-
	ϵ_2/ϵ_1	0	0	0	0
2	ϵ_1	0.0617	0.0574	0.0531	0.0500
	ϵ_2	0.0102	0.0068	0.0085	0.0126
	ϵ_2/ϵ_1	0.1653	0.1187	0.1599	0.2518
3	ϵ_1	0.0620	0.0585	0.0532	0.0497
	ϵ_2	0.0195	0.0151	0.0164	0.0217
	ϵ_2/ϵ_1	0.3145	0.2580	0.3088	0.4366
4	ϵ_1	0.0640	0.0625	0.0549	0.0511
	ϵ_2	0.0287	0.0236	0.0241	0.0297
	ϵ_2/ϵ_1	0.4488	0.3779	0.4399	0.5819
5	ϵ_1	0.0666	0.0695	0.0584	0.0531
	ϵ_2	0.0379	0.0323	0.0317	0.0372
	ϵ_2/ϵ_1	0.5694	0.4644	0.5433	0.7002
6	ϵ_1	0.0711	0.0801	0.0647	0.0563
	ϵ_2	0.0464	0.0406	0.0393	0.0443
	ϵ_2/ϵ_1	0.6525	0.5068	0.6076	0.7860
7	ϵ_1	0.0783	0.0943	0.0731	0.0607
	ϵ_2	0.0554	0.0492	0.0469	0.0514
	ϵ_2/ϵ_1	0.7077	0.5209	0.6408	0.8456
8	ϵ_1	0.0882	0.1124	0.0839	0.0656
	ϵ_2	0.0646	0.0578	0.0544	0.0584
	ϵ_2/ϵ_1	0.7316	0.5127	0.6472	0.8888

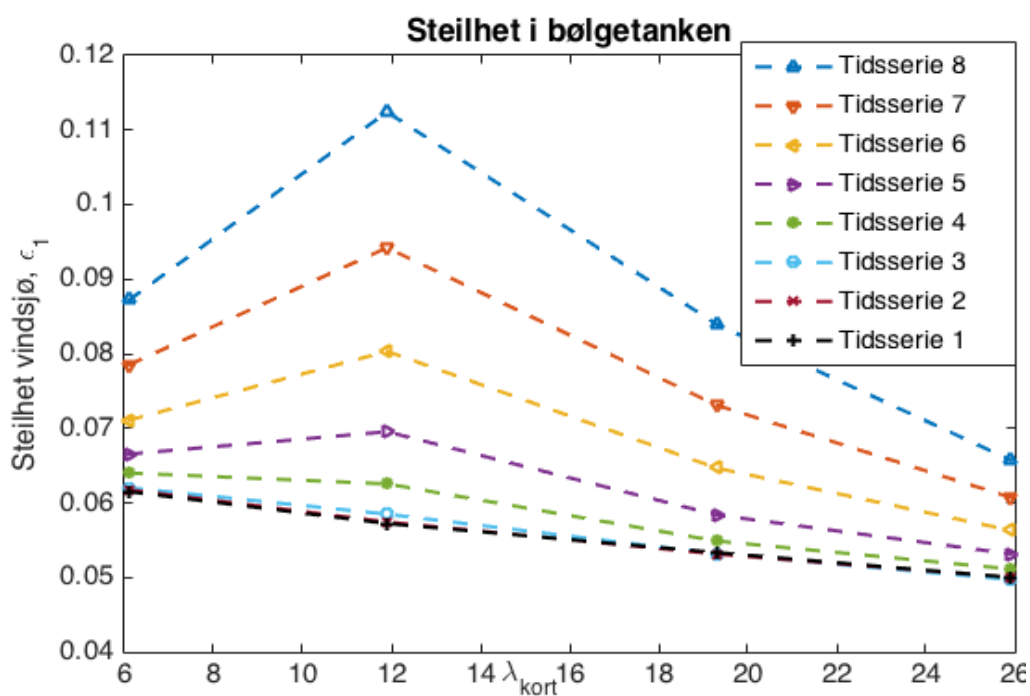
Tabell 7.1: Steilheter for alle tidsserier, JONSWAP-dønning

Generelt øker steilheten til vindsjøen noe fra probe 1 til probe 2 for deretter å avta utover tanken. Steilheten til dønningen er størst ved probe 1

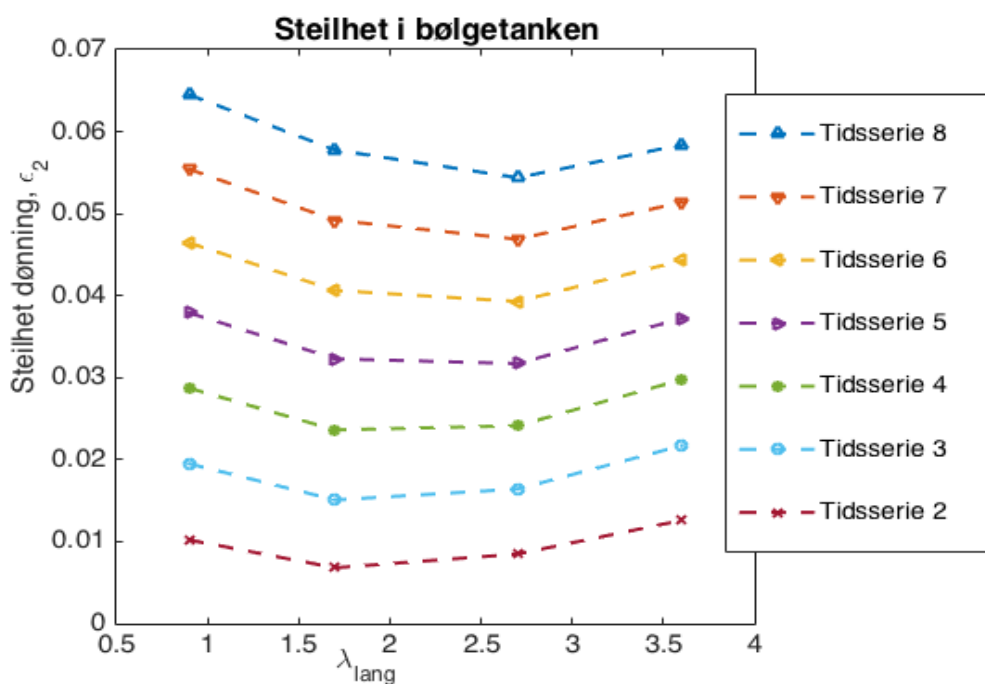
og 4 og minst ved probe 2 og 3. For tidsserien med den svakeste dønningen er steilheten lavere ved probe 1 enn ved probe 4. Ettersom dønningen blir sterkere blir etterhvert steilheten ved probe 1 imidlertid større enn ved probe 4. Det er naturlig å anta at den spesielle variasjonen langs bølgetanken kommer av refleksjon og det faktum at dønningen er en delvis stående bølge. Karakteristisk steilhet til vindsjø øker når dønningens steilhet øker.

For tidserie 1 (uten dønning) er steilheten $\epsilon_1 \approx 0.06$ ved probe 1 og avtar utover tanken. Steilheten ved probe 4 er $\epsilon_1 \approx 0.05$. Energitettheten til en bølge er proporsjonal med den kvadrerte amplituden a^2 . Det at steilheten avtar utover tanken viser energidissipasjon.

For tidsseriene med dønning ser dette noe annerledes ut da steilheten til dønningen avhenger hvor på den delvis stående bølgen overflatehevingen måles.



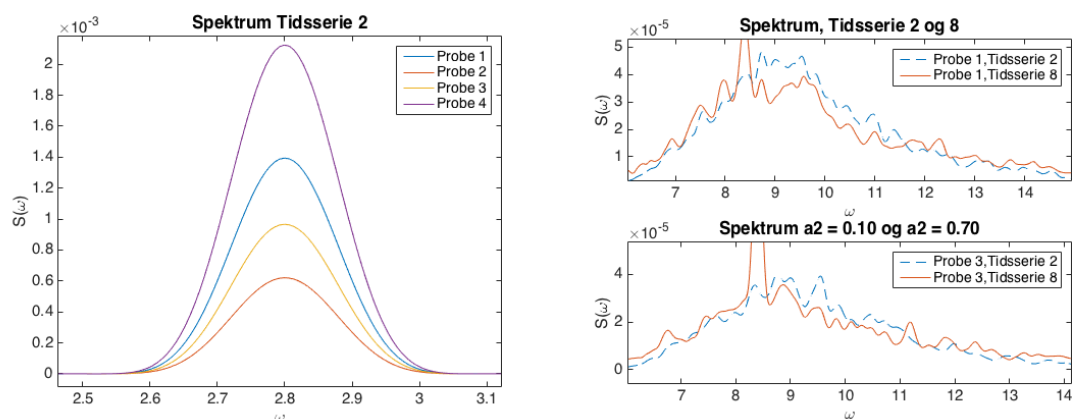
Figur 7.1: Steilhet til vindsjøen målt ved probe 1,2,3 og 4 i bølgetanken. Avstander langs x-akse er gitt i antall karakteristiske bølgelengder med vindsjø som referanse.



Figur 7.2: Steilhet til dønningen målt ved probe 1,2,3 og 4 i bølgetanken. Avstander langs x-akse er gitt i antall karakteristiske bølgelengder med dønning som referanse.

7.2 Spektrum

I det følgende presenteres spektre analysert i avhandlingen. Spektrumet estimert av data fra de 4 probene ved hjelp av matlab-funksjonen "pwelch". "Pwelch" finner fourertransformen til overlappende intervaller av tidsserien og estimerer ved å beregne gjennomsnittet. Figur 7.4 gir en oversikt over spektre i de 8 tidsseriene som er kjørt. Hvert delplott viser spektrum for oveflatehevingen henholdsvis ved probe 1, 2, 3 og 4. Figuren gir et inntrykk av dønningens økende dominans. Dønningen blir etter hvert så sterk at verdien til 3. harmonisk er større enn maksimumsverdien til vindsjøen. Det nærmer seg grensen av vindsjøen som små perturbasjoner på dønningen. Av figur 7.3a ser vi at dønningen er sterkest ved probe 1 og 4.

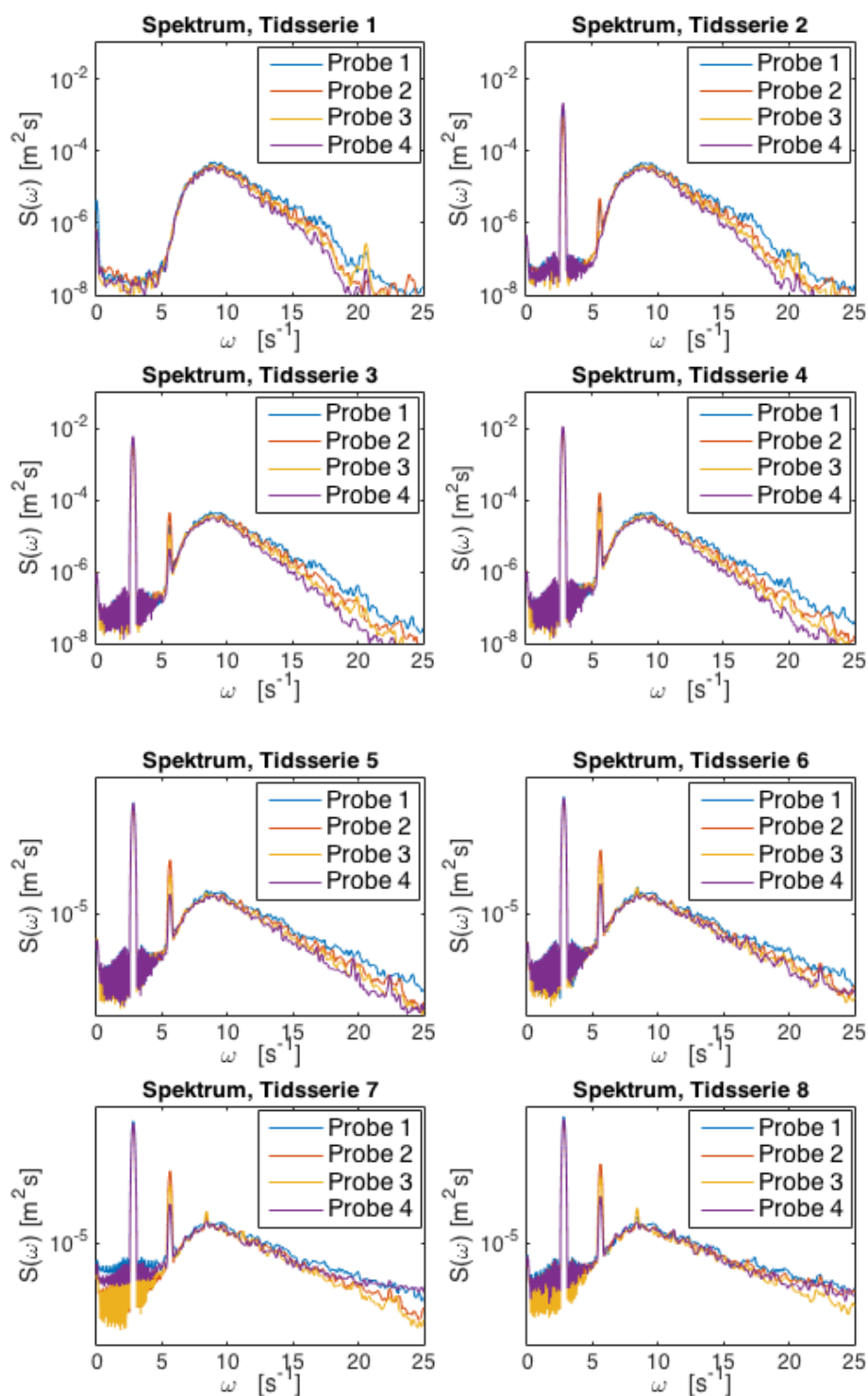


(a) Spektrum, dønning

(b) JONSWAP-spektrum med liten og stor dønning

Figur 7.3

Energidissipasjon vises ved halen av vindsjøen ved at $S(\omega)$ avtar fra probe 1 til probe 4. Av figur 7.3b ser det ut til at JONSWAP-spekteret sammen med en steil dønning er noe flatere og breere i forhold til JONSWAP-spekteret sammen med en svak dønning.

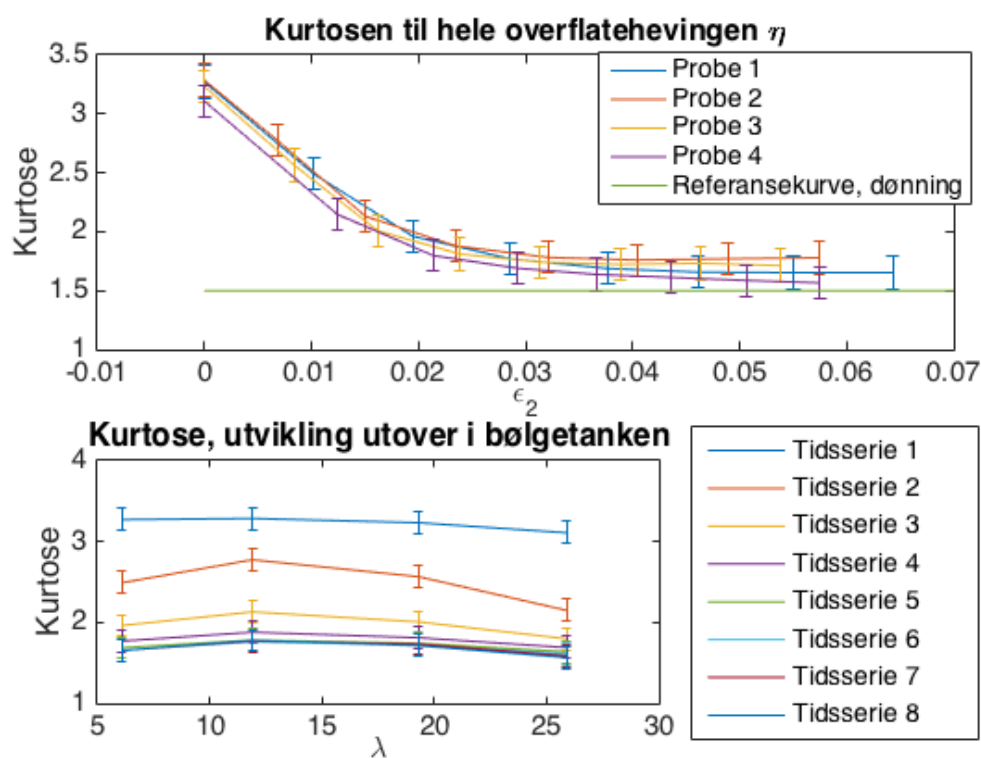


Figur 7.4: Spektrum for JONSWAP-sjø med økende amplitude på monokromatisk langbølge.

7.3 Kurtose og Skjevhet

7.3.1 Kurtose

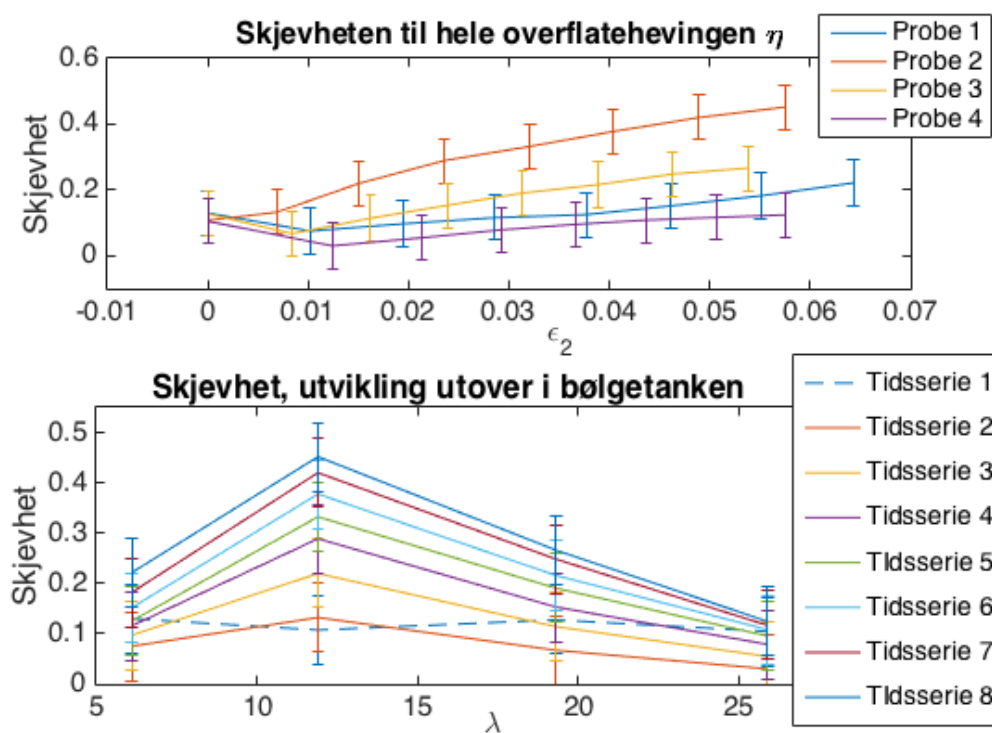
Kurtose og skjevhet er plottet med $\pm\sigma_\kappa$ og $\pm\sigma_\gamma$ som mål på usikkerheten ved hjelp av MATLAB-funksjonen *errorbar*. Standardavvikene er regnet ut i seksjon 4.2: $\sigma_\kappa = 0.14$ og $\sigma_\gamma = 0.07$. Figur 7.5 viser at kurtosen avtar gradvis med økende dønning. Den horisontale referansekurven gir teoretisk kurtose til dønning, $\kappa = 1.5$. Kurtosen er høyest ved probe 2 for alle tidsseriene. Økningen i kurtose fra probe 1 til probe 2 er størst for tidsserie $a_2 = 0.1$.



Figur 7.5: Kurtose som funksjon av steilheten til dønning og i forhold til avstand til padlen.

7.3.2 Skjevhet

Skjevheten er positiv for alle tidsseriene. Verdien øker med økningen av styrken på dønningen. Det at skjevheten øker med økt steilhet på dønning er forventet ut i fra det som ble regnet ut i seksjon 6.1. Den ikke-lineære korreksjonen regnet ut i seksjon 6.1 er imidlertid vesentlig lavere enn det som er registrert ved probene. Skjevheten har som kurtosen maksimal verdi ved probe 2.



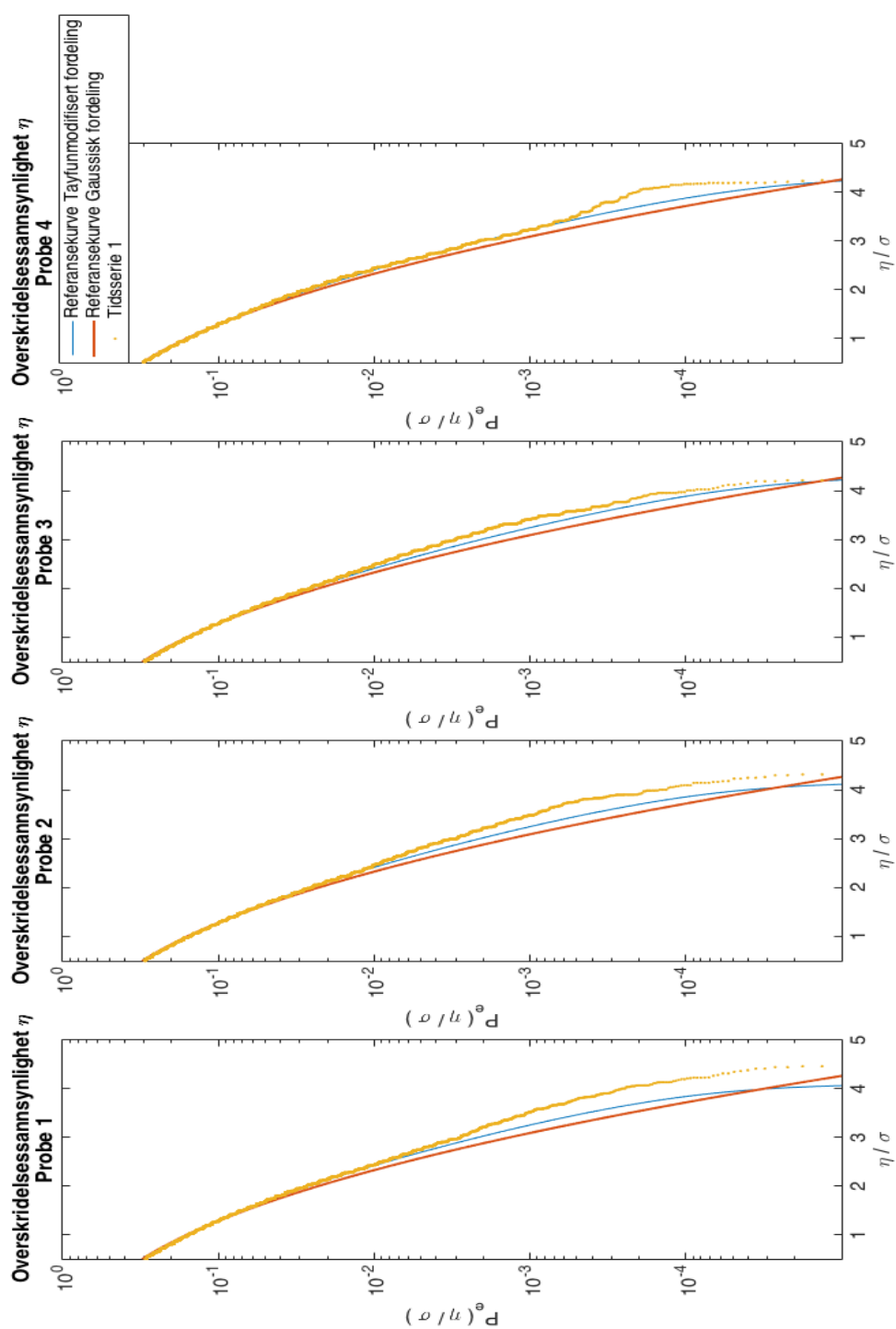
Figur 7.6: Skjevhet som funksjon av steilheten til dønning og i forhold til avstand til padlen.

7.4 Overskridelsessannsynlighet

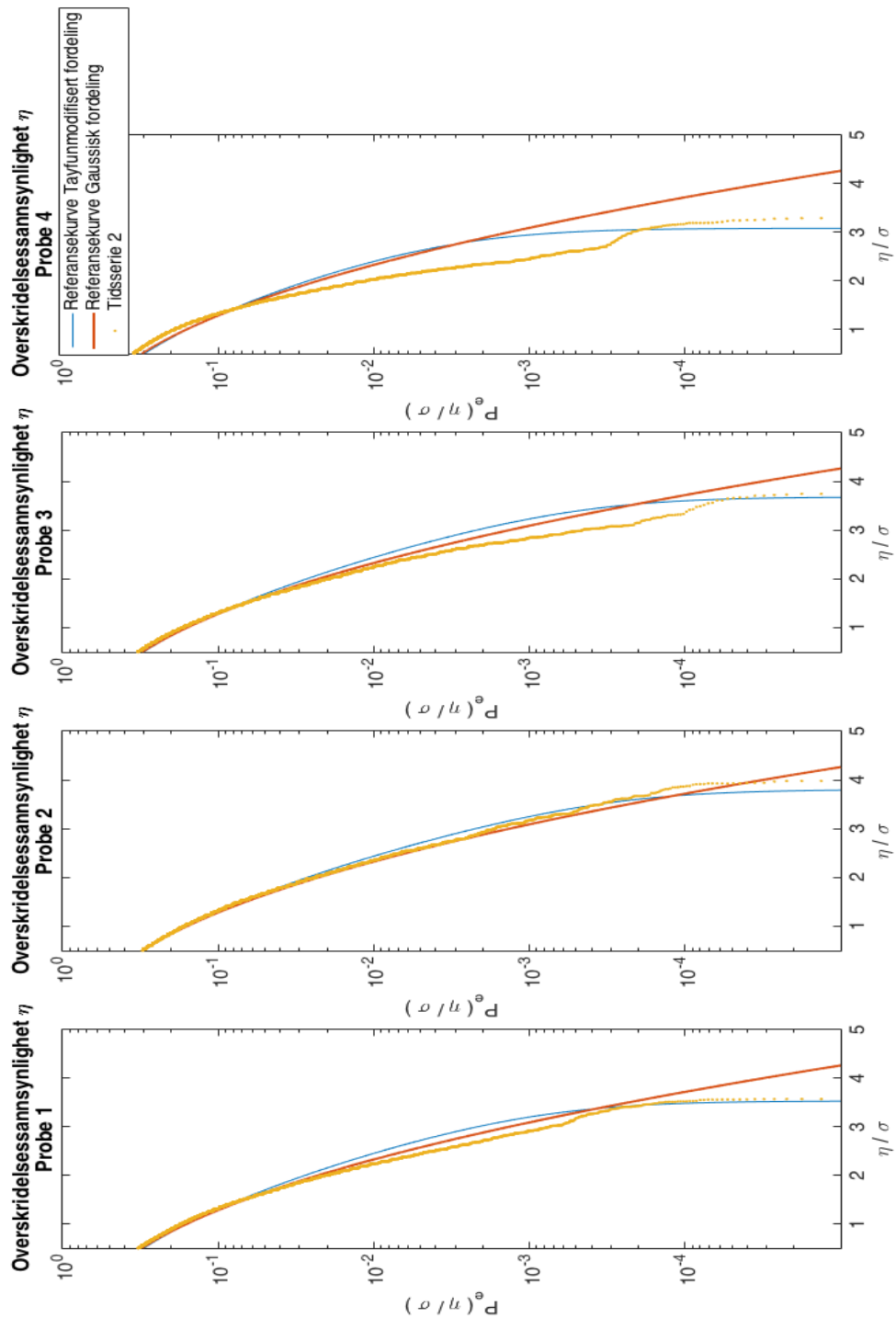
Overskridelsessannsynligheter for overflateheving, Hilbertenvelope, bølge-kammer og bølgehøyder er estimert og illustrert i figur 7.7 - 7.23. Alle størrelser er skalert med standardavviket σ til overflatehevingen η . Overskridelsessannsynligheter for overflateheving er plottet sammen med referansekurve for Gaussisk fordeling samt Tayfun-modifisert referansekurve for overflatehevingen. Dette er gjort med hensikt i å sammenligne resultater med lineær og svakt ikke-lineær teori. Overskridelsessannsynligheter for Hilbertenvelopen og bølgehøyder H er plottet sammen med Rayleigh-fordelte referansekurver. Bølgekammer η_c er funnet ved hjelp av nullkryssingsmetoden og lokal peak-metoden og plottet sammen med referansekurver for Rayleigh-fordeling og Tayfun-modifiserte overskridelsessannsynligheter for bølgekammer.

Vi ser av figur 7.7 at overskridelsessannsynligheten for vindsjøen generelt ligger noe over referansekurven for Gaussisk fordeling. Overskridelsessannsynlighetene bøyer av nedover i sterkere grad når steilheten til dønningen øker. Jo sterkere dønningen er, jo mer avviker overskridelsessannsynligheten fra Gaussisk fordeling. Dønningen har samme effekt på Hilbertenvelopen. Den bøyer mer og mer av jo sterkere dønningen er. Felles for $P(\frac{\eta}{\sigma})$ og $P(\frac{H_{Hilb.}}{\sigma})$ er at kurvene skyter litt ut igjen for de største verdiene av overflateheving og Hilbertenvelope.

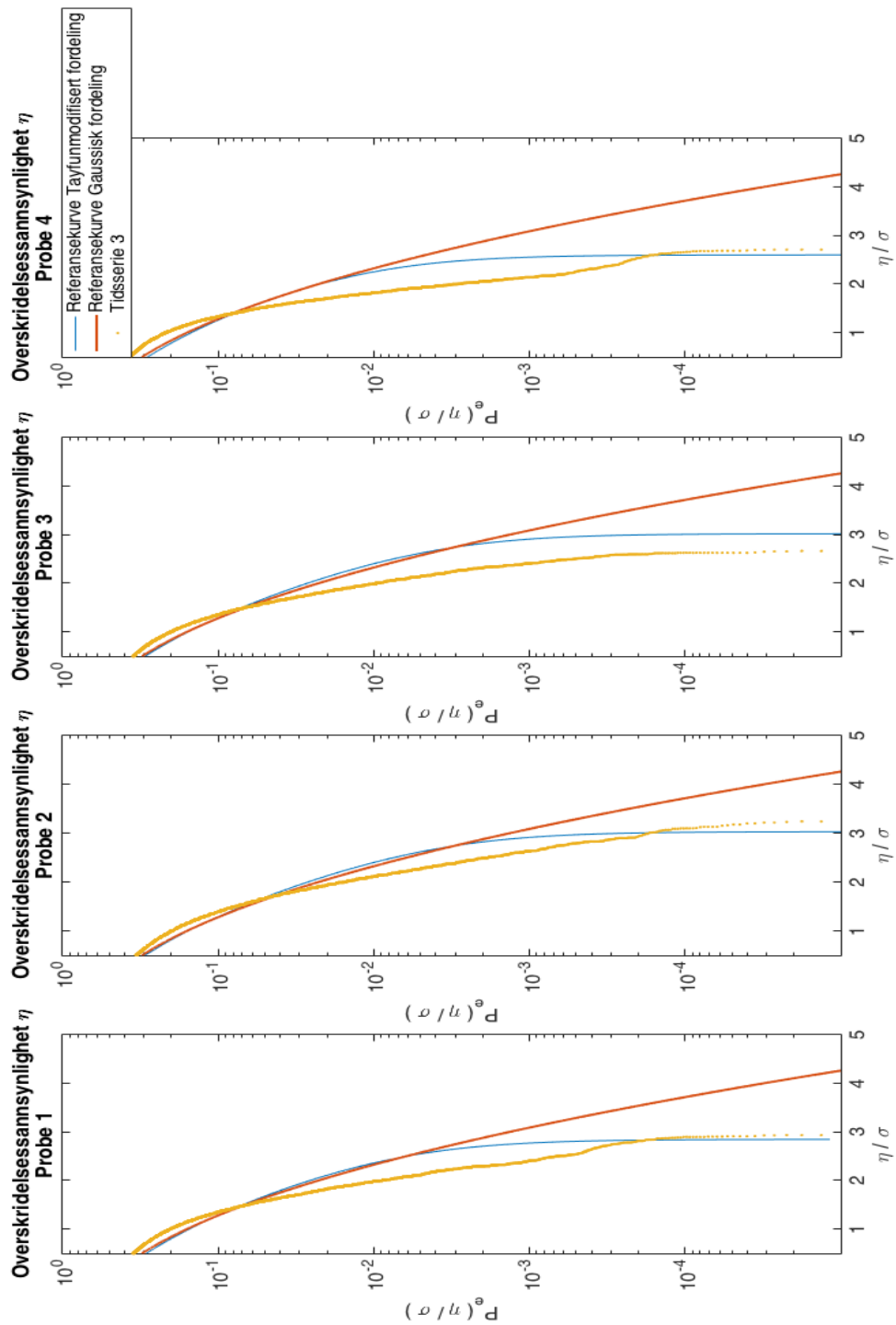
Vi ser av figurene 7.16 - 7.19 og 7.20 - 7.23, at tidsseriene er for korte til at det er registrert bølger større enn freakbølgekriteriene $\frac{\eta_c}{\sigma} > 5$ og $\frac{H}{\sigma} > 8$. Ettersom dønningen vokser, beveger overskridelsessannsynlighetene seg lenger unna freakbølgekriteriet. For tidsserie 1 er overskridelsessannsynligheter for kammer og bølgehøyder regnet ut ved hjelp av lokal peak-metoden og nullkryssingsmetoden tilnærmet like. For tidsseriene med dønning ligger kurver for bølgekammer og bølgehøyder regnet ut av lokal peak-metoden under nullkryssingsmetoden.



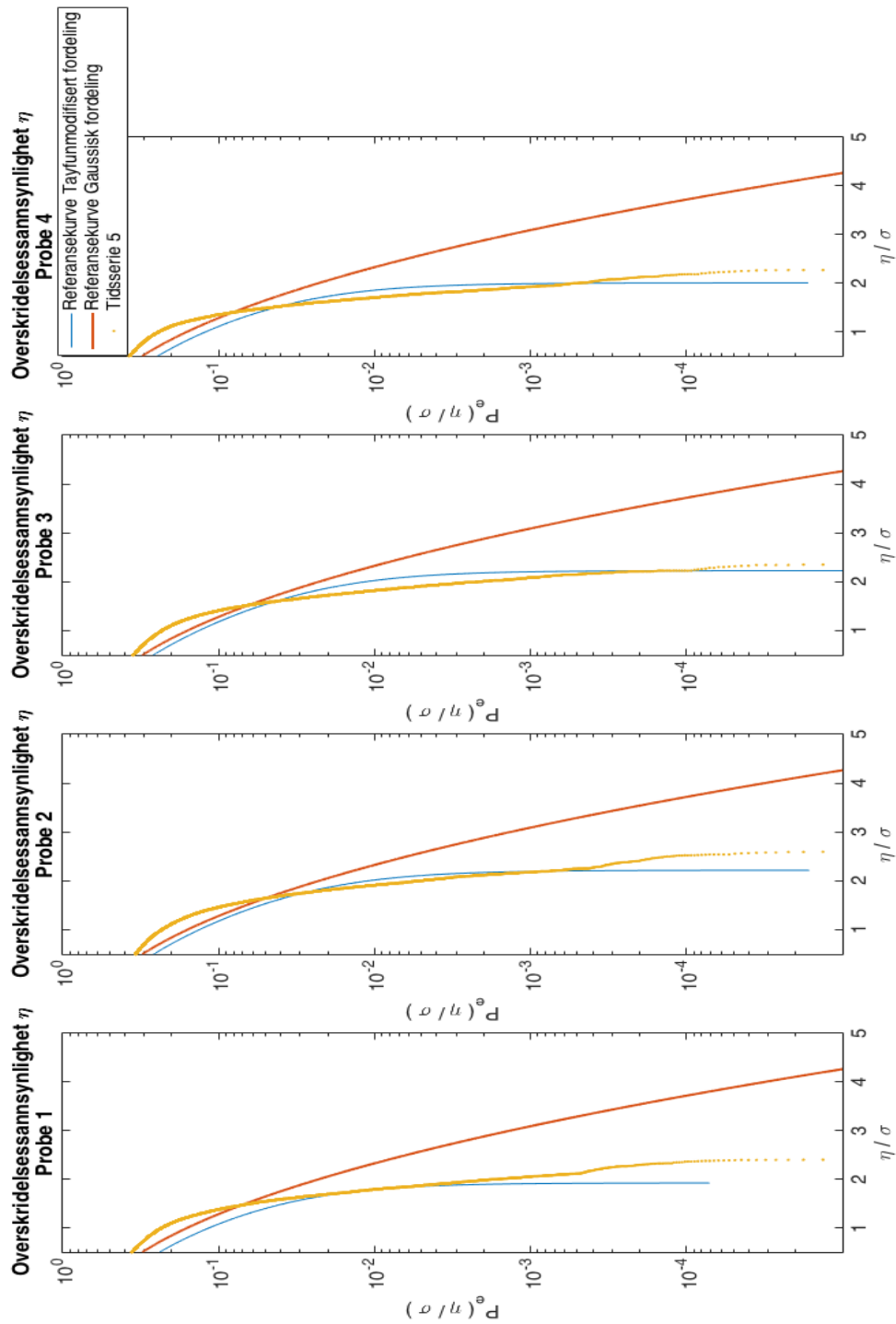
Figur 7.7: Overskridelsessannsynlighet til overflatehevingen ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 1.



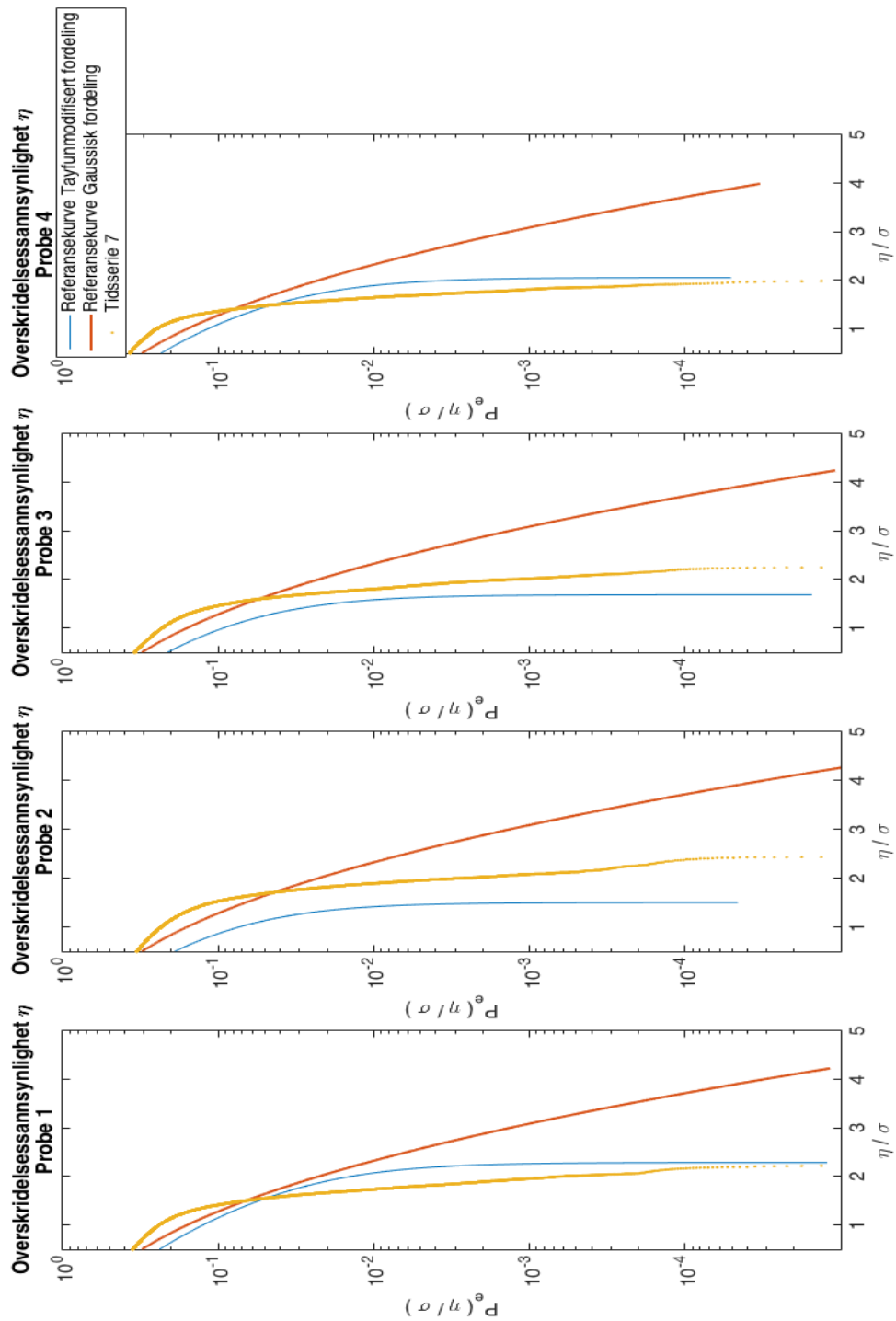
Figur 7.8: Overskridelse sannsynlighet til overflatehevingen ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 2.



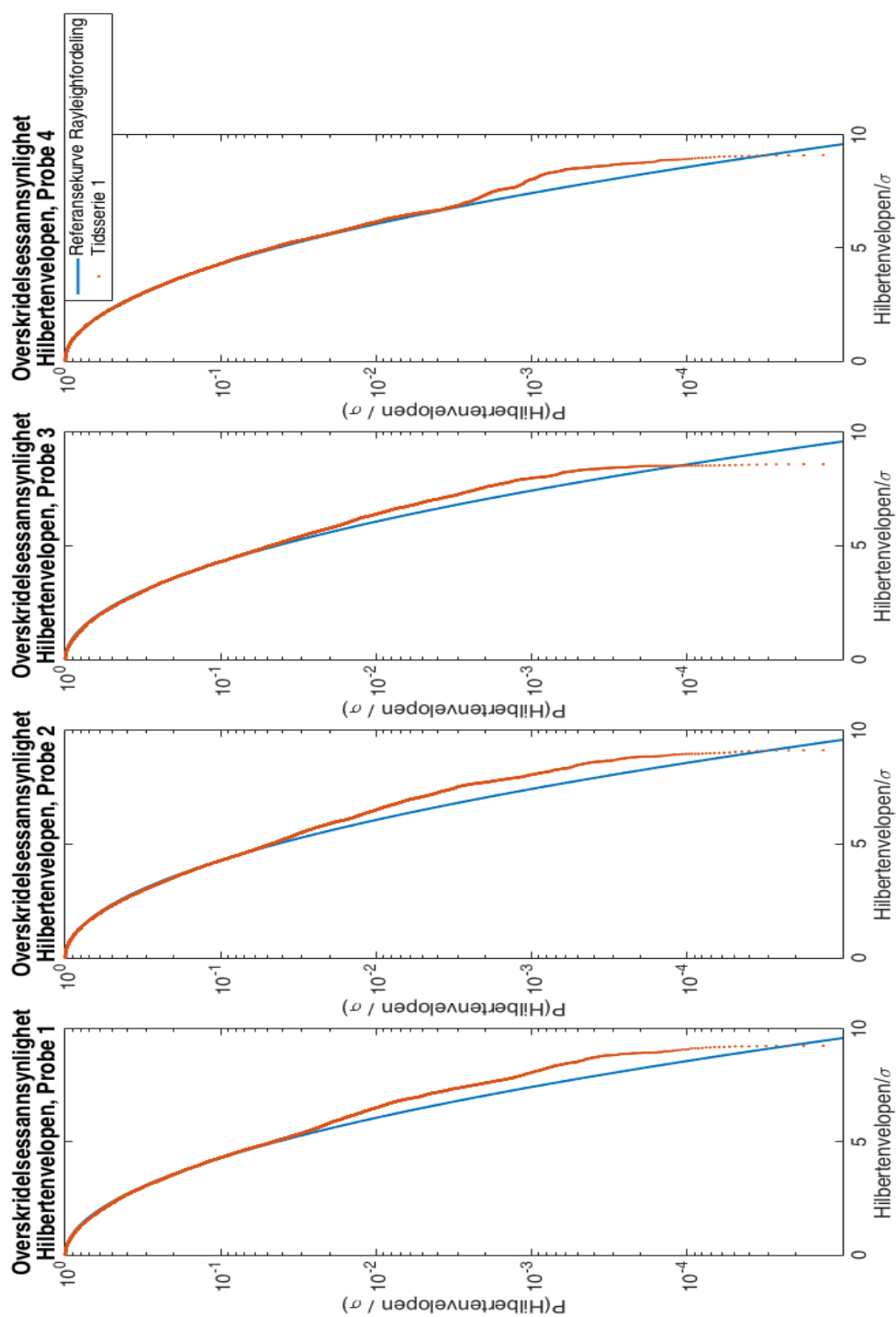
Figur 7.9: Overskridelsessannsynlighet til overflatehevingen ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 3.



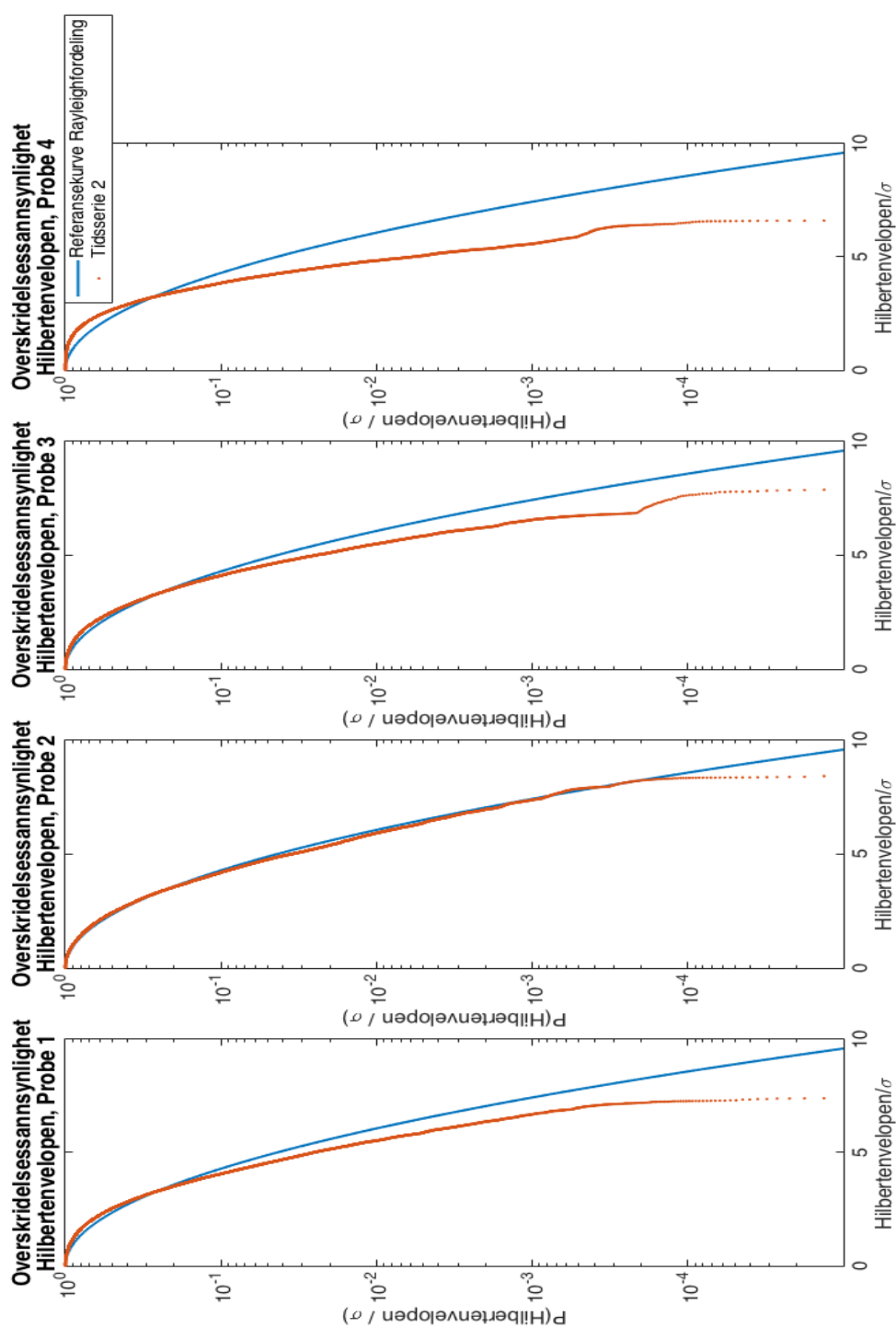
Figur 7.10: Overskridelse sannsynlighet til overflatehevingen ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 5.



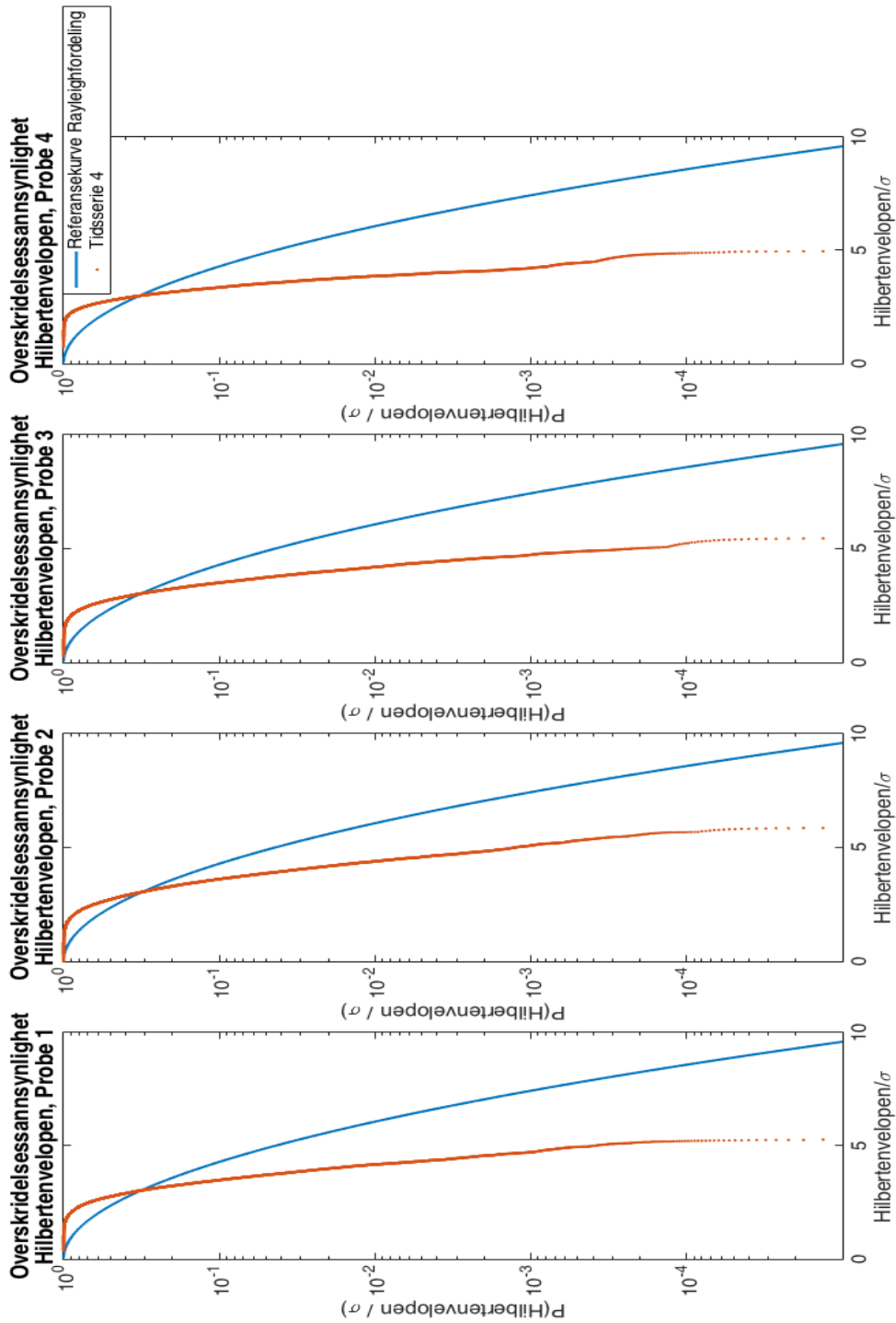
Figur 7.11: Overskridelsessannsynlighet til overflatehevingen ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 7.



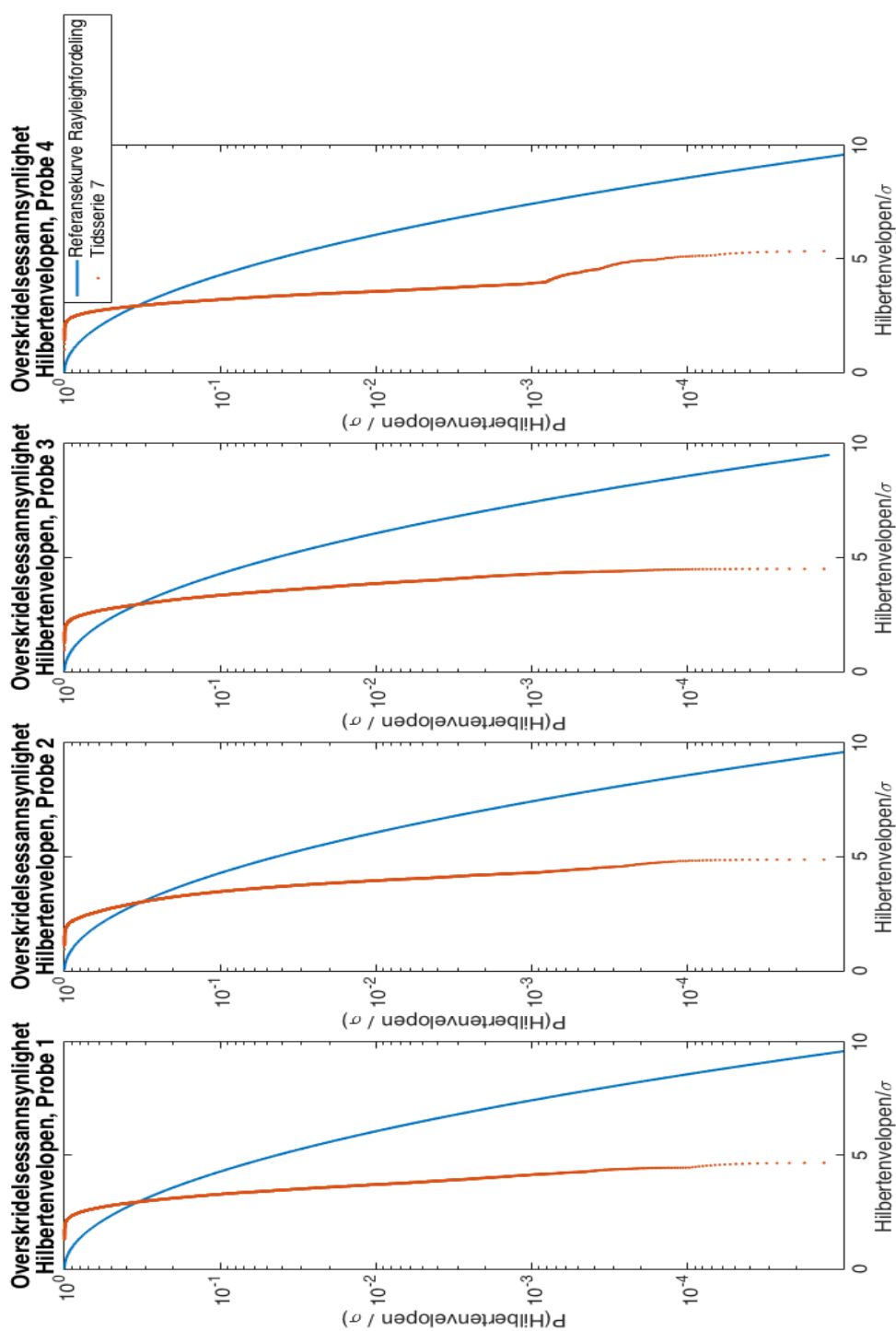
Figur 7.12: Overskridelse sannsynligheten til Hilbertenvelopen ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 1.



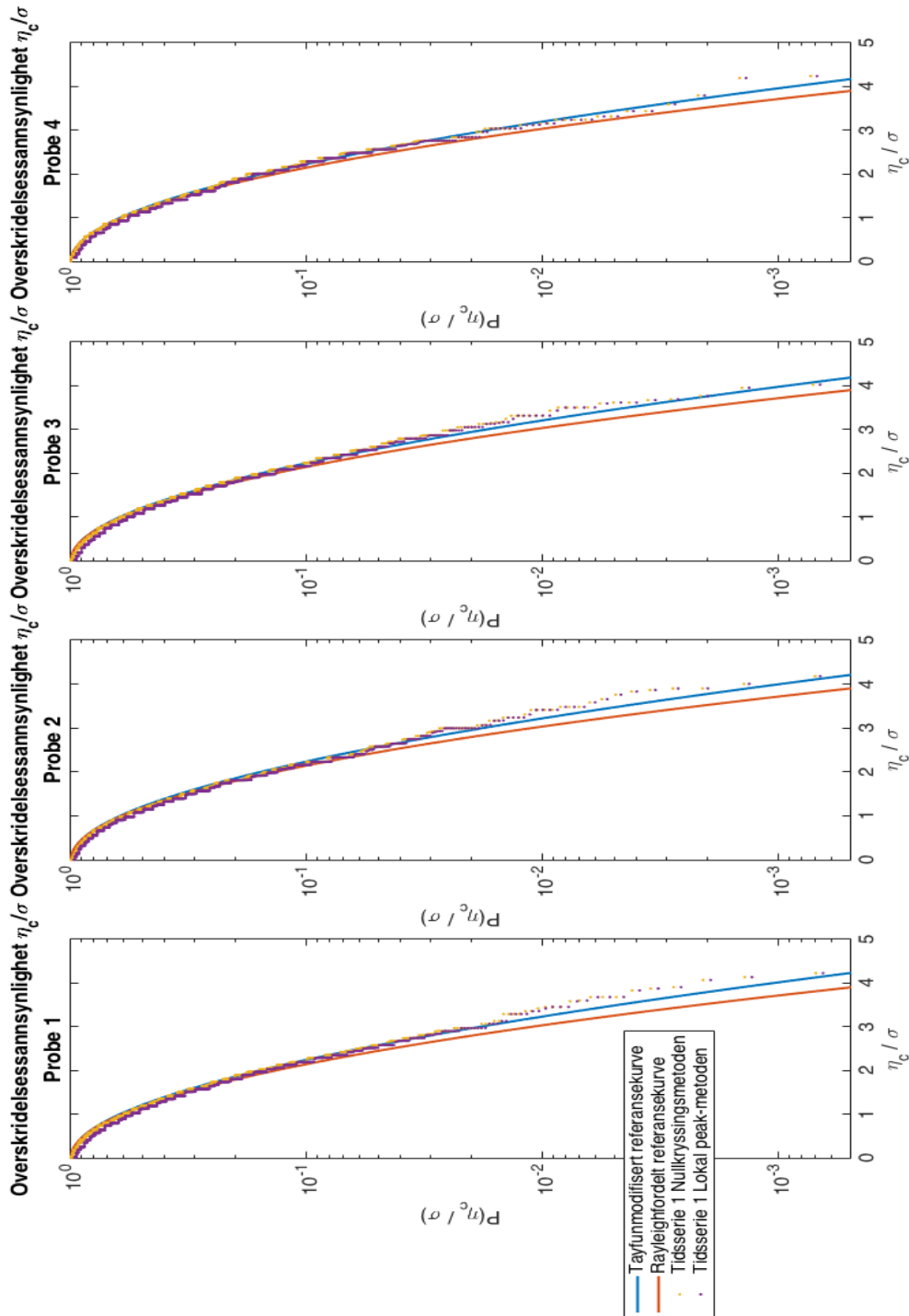
Figur 7.13: Overskridelsessannsynligheten til Hilbertenvelopen ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 2.



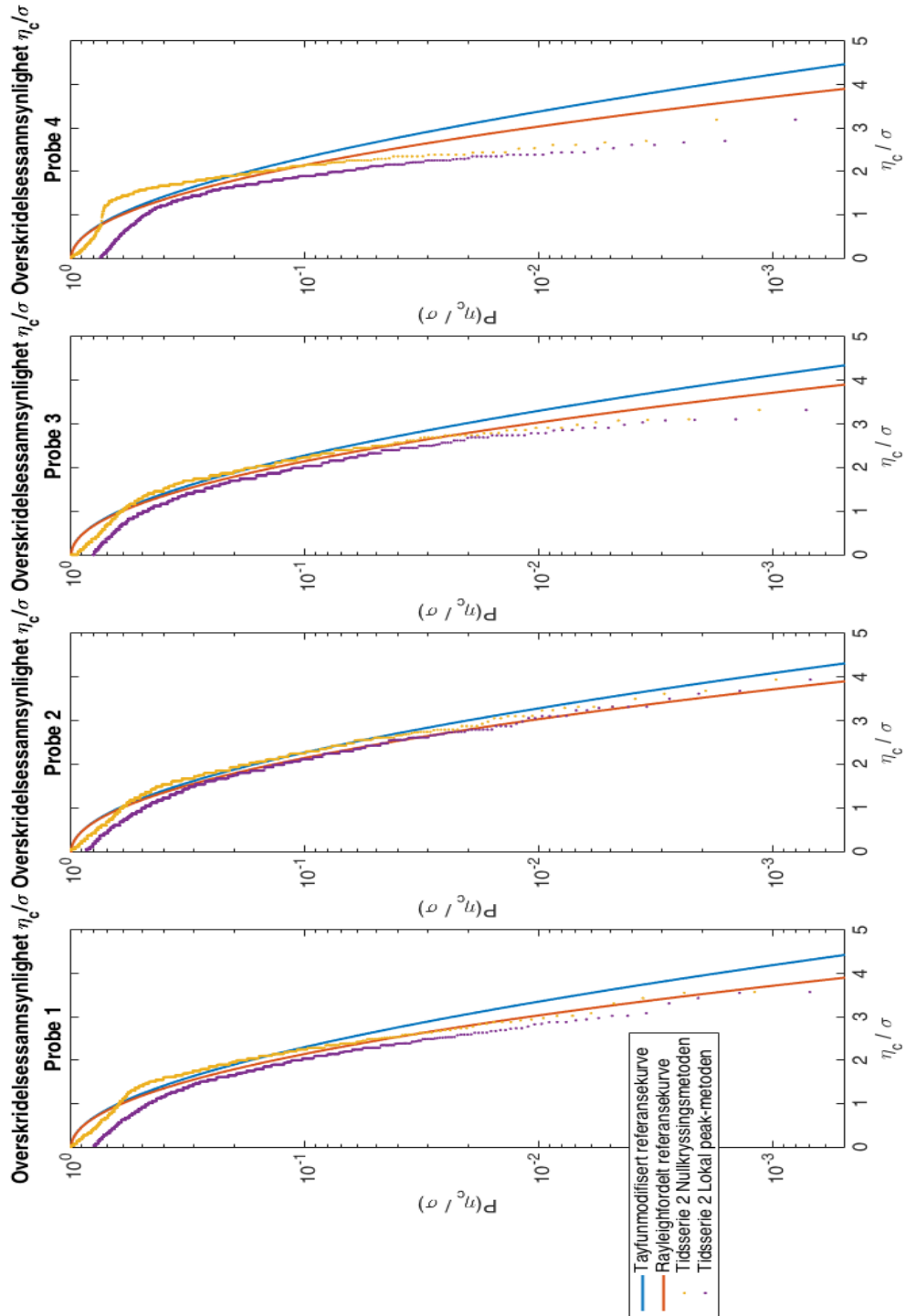
Figur 7.14: Overskridelse sannsynligheten til Hilbertenvelopen ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 4.



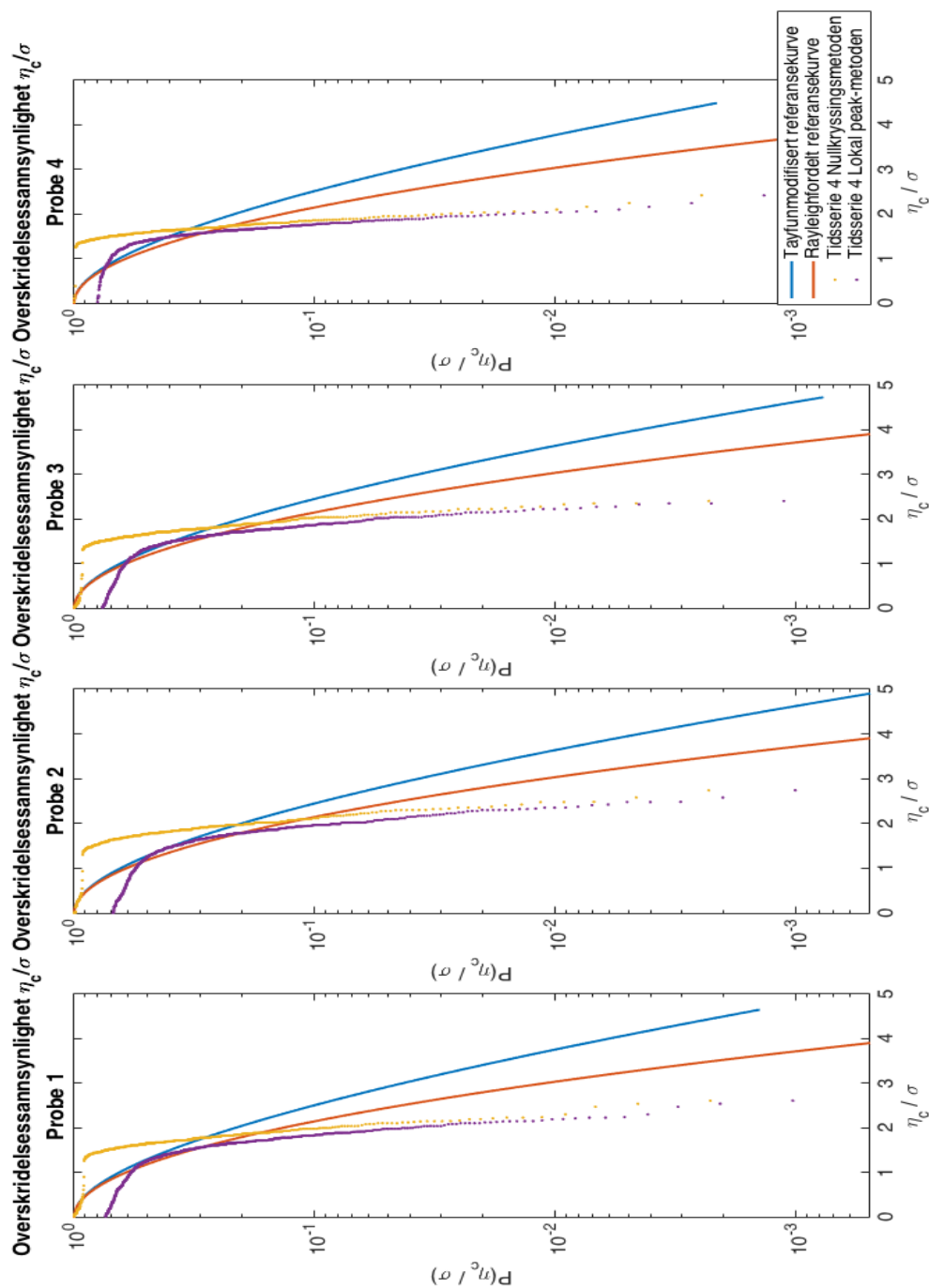
Figur 7.15: Overskridelsessannsynligheten til Hilbertenvelopen ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 7.



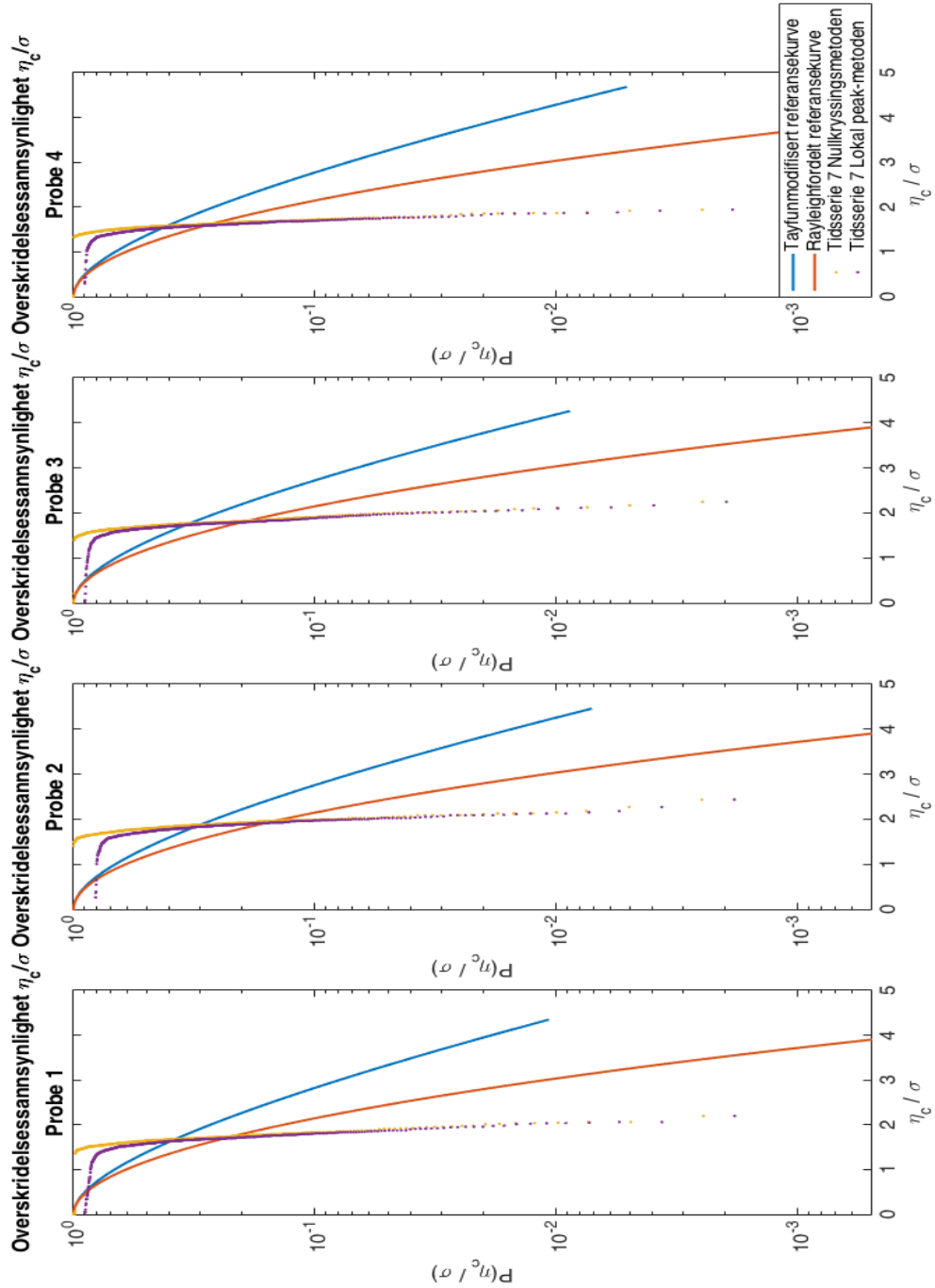
Figur 7.16: Overskridelsessannsynlighet til bølgekammer ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 1. Bølgekammer regnet ut av nullkryssingsmetoden og lokal peak-metoden.



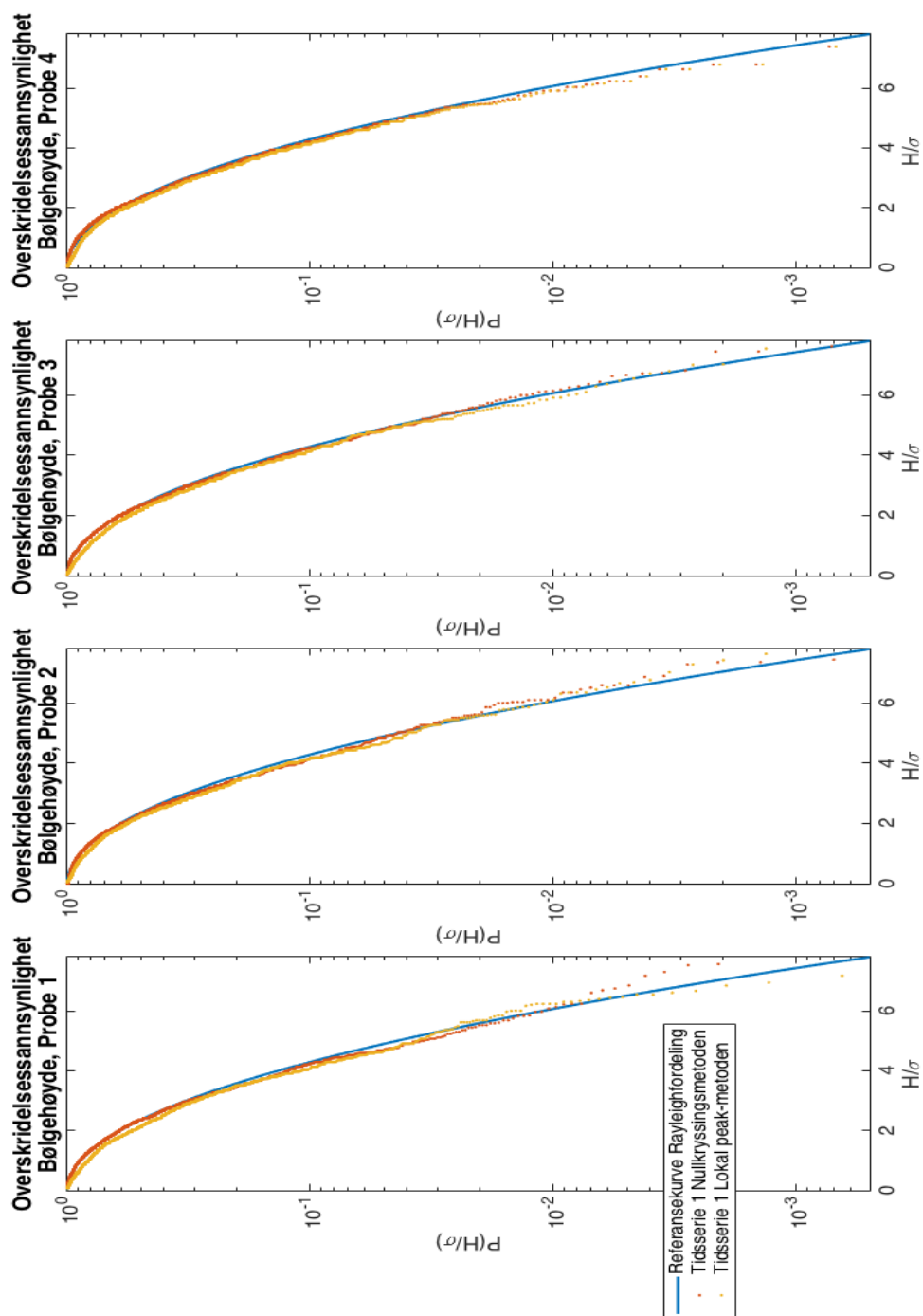
Figur 7.17: Overskridelsessannsynlighet til bølgekammer ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 2. Bølgekammer regnet ut av nullkryssingsmetoden og lokal peak-metoden.



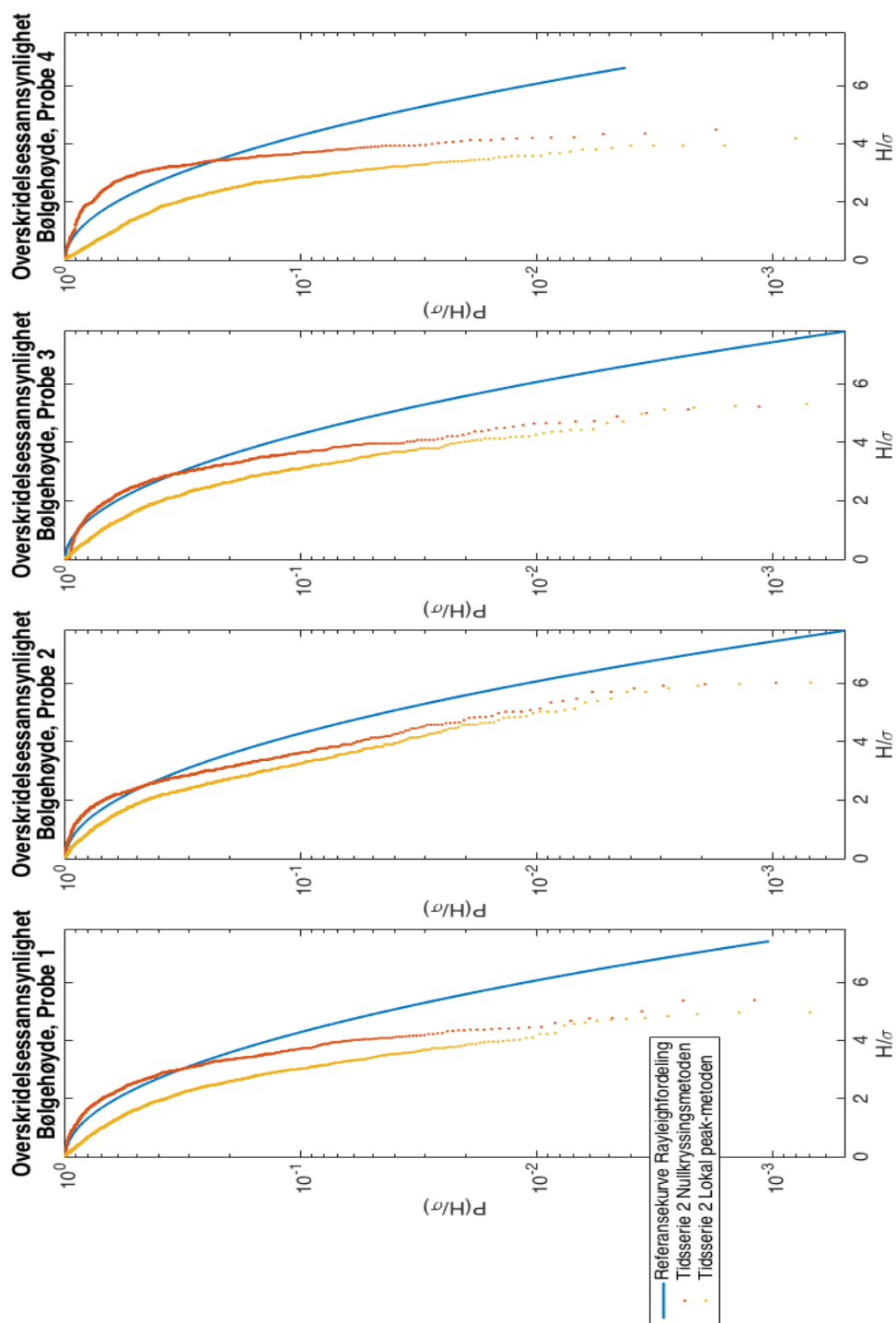
Figur 7.18: Overskridelsessannsynlighet til bølgekammer ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 4. Bølgekammer regnet ut av nullkryssingsmetoden og lokal peak-metoden.



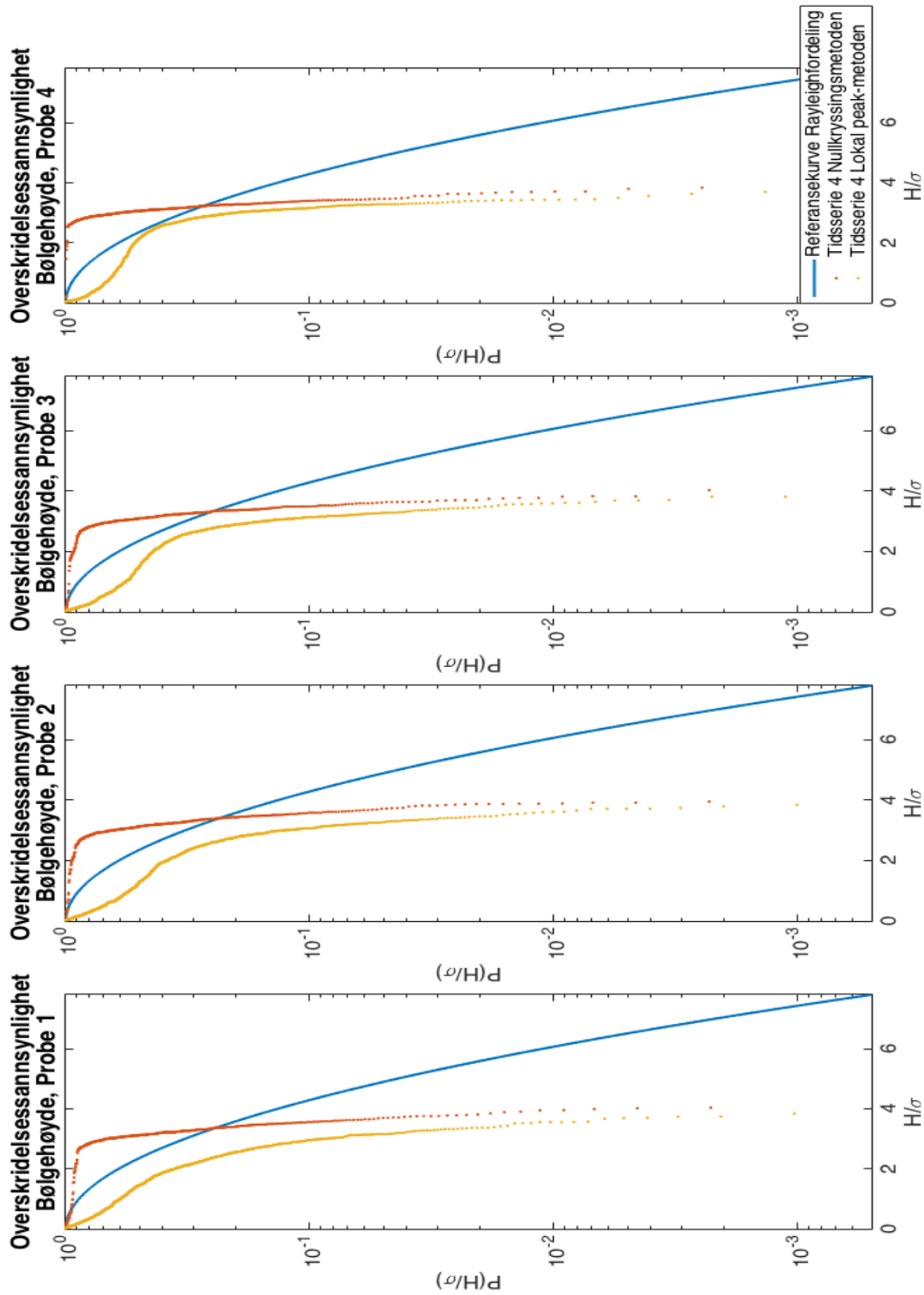
Figur 7.19: Overskridelsessannsynlighet til bølgekammer ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 7. Bølgekammer regnet ut av nullkryssingsmetoden og lokal peak-metoden.



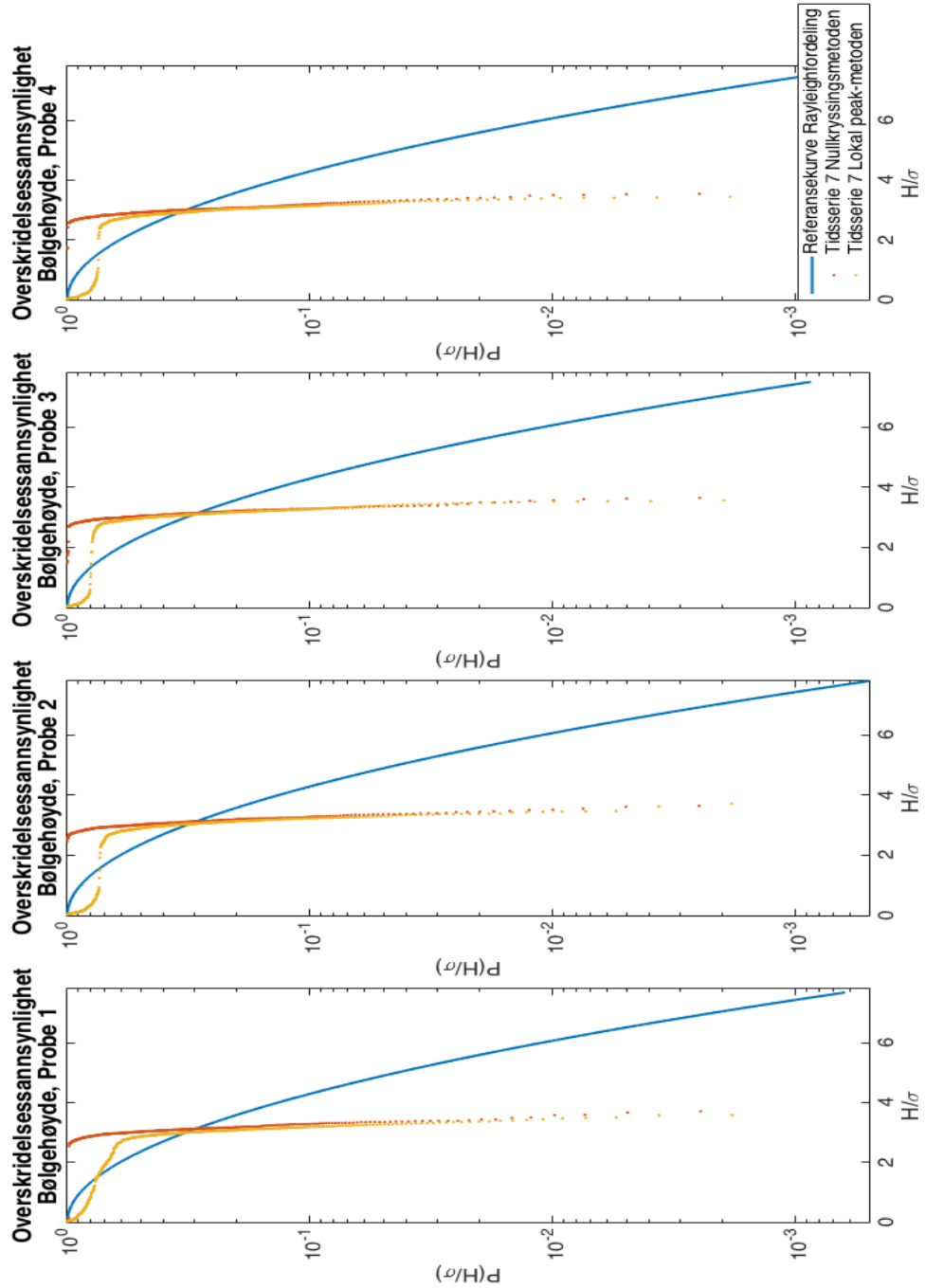
Figur 7.20: Overskridelsessannsynlighet til bølgehøyder ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 1. Bølgehøyder regnet ut av nullkryssingsmetoden og lokal peak-metoden.



Figur 7.21: Overskridelsessannsynlighet til bølgehøyder ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 2. Bølgehøyder regnet ut av nullkryssingsmetoden og lokal peak-metoden.



Figur 7.22: Overskridelsessannsynlighet til bølgehøyder ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 4. Bølgehøyder regnet ut av nullkryssingsmetoden og lokal peak-metoden.



Figur 7.23: Overskridelsessannsynlighet til bølgehøyder ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 7. Bølgehøyder regnet ut av nullkryssingsmetoden og lokal peak-metoden.

Kapittel 8

Diskusjon

8.1 Dønning og vindsjø

8.1.1 Effekter av båndbredde

Estimater av kurtose, skjevhet og overskridelsessannsynligheter avviker fra det som forventes av en Gaussisk sjø i sterkere grad jo steilere dønningen er. Kurtosen avtar, skjevheten øker og overskridelsessannsynlighetenes kurver for overflateheving, bølgekammer og bølgehøyder beveger seg vekk fra referansekurver. Referansekurvene for overskridelsessannsynligheter og estimat for kurtose og skjevhet er basert på antakelse om smalbåndet prosess. For tilfellet av sjø bestående av en dønning og vindsjø vil det i utgangspunktet være vanskelig å definere båndbredden. Båndbredden er definert for unimodal sjø, mens tilfellet dønning og vindsjø er et eksempel på bimodal sjø. Videre er ikke vindsjø som har et JONSWAP-spektrum i seg selv smalbåndet. I vurderingen av hvorvidt avvik fra referansekurver skyldes båndbreddeeffekter er det sett på overskridelsessannsynligheten til Hilbertenvelopen, Næss-modifiserte referansekurver for bølgehøyde [24, Næss, 1985] og båndbreddemodifikasjoner for bølgekammer [25, Cartwright&Longuet-Higgins, 1956].

Arvid Næss har gjort båndbreddemodifikasjoner av bølgehøydens overskridelsessannsynlighet [24, 1985]. I denne teorien brukes autokorrelasjonsfunksjonen som båndbreddeparameter. Overskridelsessannsynligheten for bølgehøyden er gitt av

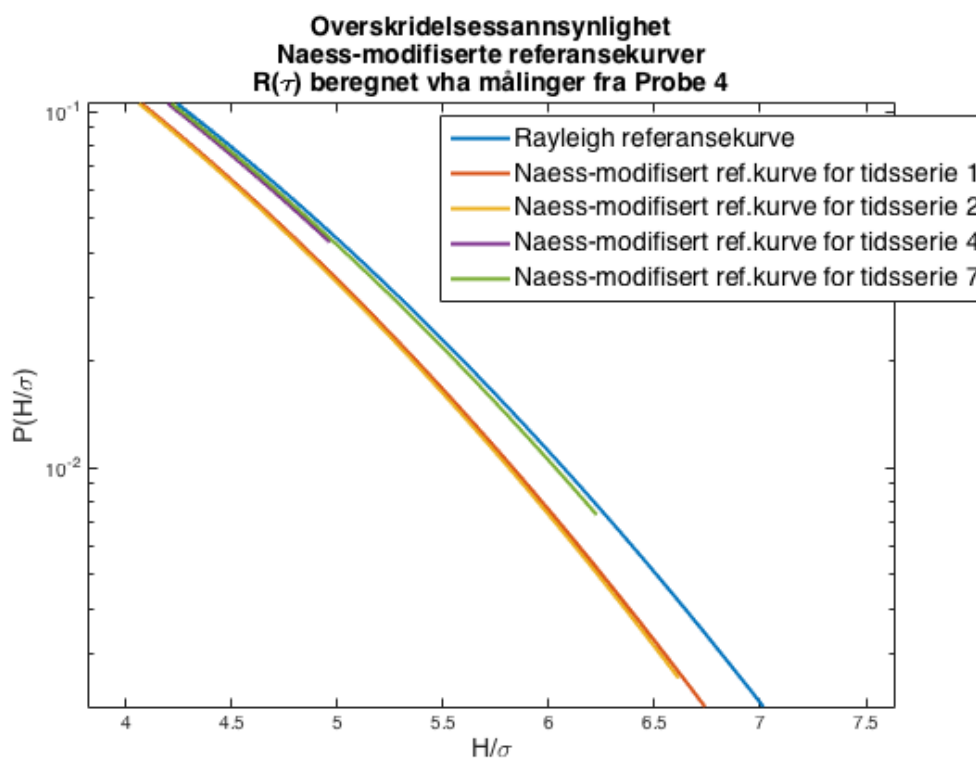
$$P_H(z) = \exp\left(-\frac{z^2}{4\sigma^2(1 - r(\frac{T}{2}))}\right) \quad (8.1)$$

der $r(\tau) = R(\tau)/\sigma^2$ er båndbreddeparameteren. I grensen av smalbåndet

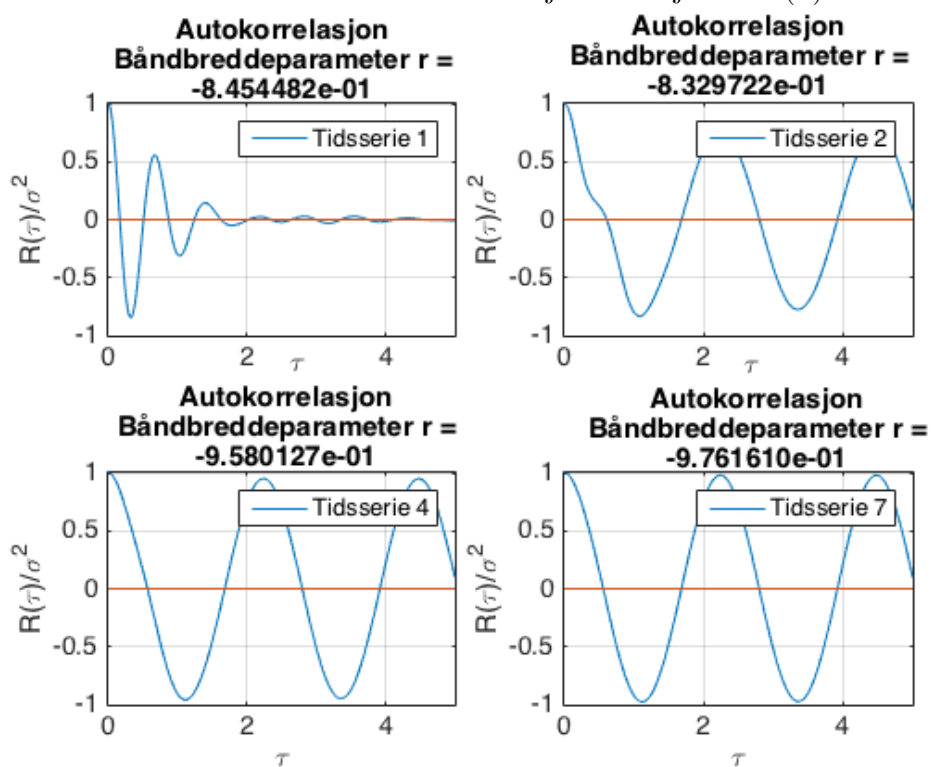
prosess vil $r(\frac{T}{2}) \rightarrow -1$. $\frac{T}{2}$ er tiden korresponderende til autokorrelasjonsfunksjonens minimumsverdi. Autokorrelasjonen er funnet av den inverse fouriertransformen til spektrumet $S(\omega)$. Figur 8.2 viser autokorrelasjonen skalert med variansen σ^2 til overflatehevingen η ved probe 4. Vi ser at ifølge Næss-parameteren $r(\tau)$ er spektrumet til overflatehevingen i tidsserie 2 mest bredbåndet. Ettersom dønningen øker blir sjøen mer og mer smalbåndet ut i fra Næss-parameteren. Båndbreddens effekt er illustrert i figur 8.1. Bredbåndethet medfører at referansekurven legger seg under Rayleigh-fordelingen. Overskridelsessannsynligheten fra tidsserie 2 er nederst, overskridelsessannsynligheten fra tidsserie 7 er nærmest Rayleighfordelingen. Den faktiske effekten dønningen har på overskridelsessannsynligheten til bølgehøyden er imidlertid at kurven legger seg lenger og lenger unna Rayleigh-fordelingen ettersom dønningen øker. Dette ville på bakgrunn av Næss-modifiserte referansekurver vært naturlig i overgangen fra tidsserie 1 til 2, men ikke for tidsserie 3 til 8.

Cartwright & Longuet-Higgins utviklet en båndbreddeparameter for bølgekammernes fordeling [25, 1956]. Det antas Rayleighfordelte bølgekammer i grensen av smalbåndet sjø og normalfordelte bølgekammer i grensen av ekstremt bredbåndet sjø. Båndbreddemodifikasjoner for bølgekammene lever i området under Rayleigh-fordelt referansekurve og over Gaussisk fordelt referansekurve. Cartwright & Longuet-Higgins båndbreddeparameter beskriver denne overgangen. Det kan sees av figur 8.3 at eksperimentelle data for bølgekammer ikke samsvarer med båndbreddemodifiseringer. Avvik blir tydeligere når dønningens steilhet øker, selv om prosessen tilsynelatende blir mer smalbåndet jo sterkere dønningen er. Overskridelsessannsynlighetenes form forklares ikke av båndbreddemodifikasjoner, hverken for bølgehøyder eller bølgekammer. Dette taler for tilstedeværelse av andre effekter enn båndbreddeffekter.

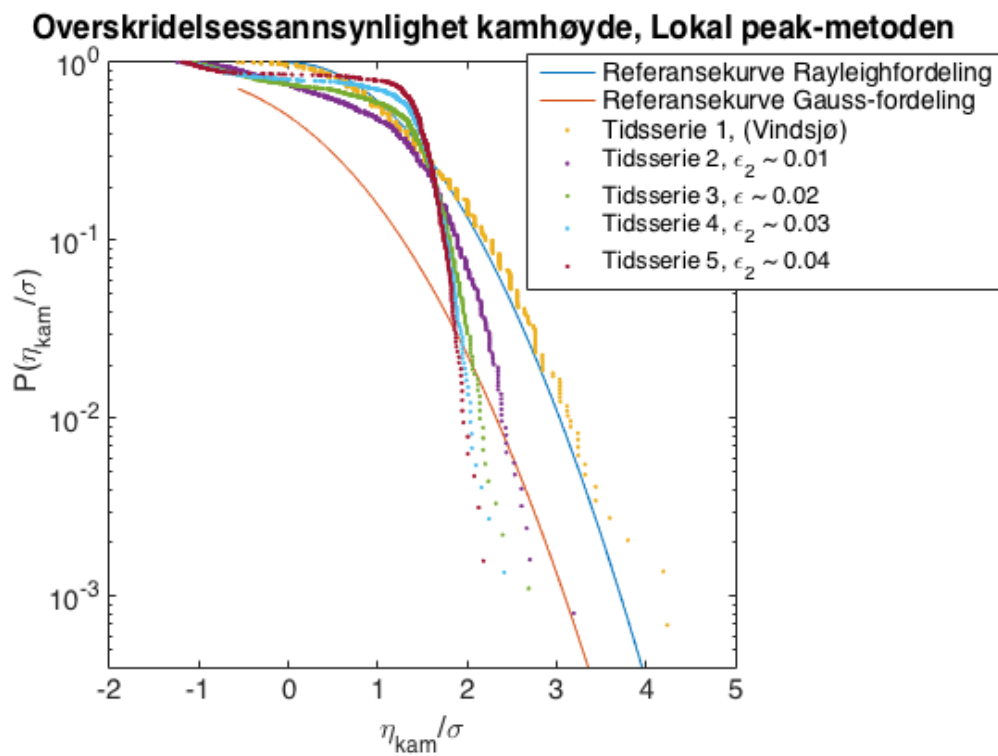
Til forskjell fra overskridelsessannsynligheter for bølgekammer og bølgehøyder er Hilbertenvelopen Rayleighfordelt uavhengig av båndbredde. Dette gjelder gitt en Gaussisk bakgrunnsprosess. Hilbertenvelopen til "vindsjø med dønning"-systemet avviker fra Rayleigh-fordelt referansekurve (figur 7.12 - 7.15 i resultat-kapittelet). Avviket blir større jo steilere dønningen er. Avviket fra Rayleigh-fordelingen indikerer en bakgrunnsprosess vikende fra Gaussisk fordeling i økende grad jo steilere dønningen er.



Figur 8.1: Referansekurver for sjø med økende dønning. Båndbredden estimert av minimumsverdien til autokorrelasjonsfunksjonen $R(\tau)$.



Figur 8.2: Autokorrelasjonen skalert med variansen til overflatehevingen for tidsserie 1, 2, 4 og 7.



Figur 8.3: Overskridelsessannsynligheten for bølgekammer, probe 4, med Rayleigh- og Gauss-fordeling som referansekurver for smalbandet og bredbandet prosess.

8.1.2 Ikkelineære effekter

Tayfun-modifiserte referansekurver for overflateheving og bølgekammer inkluderer effekten av 2. ordens ledd i Stokesbølge-modellen for en smalbåndet prosess. Overflatehevingens overskridelsessannsynlighet for tidsserie 1 følger Tayfunmodifisert referansekurve fram til $\frac{\eta}{\sigma} \approx 3.5$. Modifiseringer for 2. ordens effekter av Stokesbølge-modellen ser ut til å beskrive noe av overskridelsessannsynlighetens avvik fra Gaussisk statistikk. Modellen holder imidlertid ikke for å beskrive overskridelsessannsynligheten alene. Av figur 7.7 ser det ut til at kurvene nærmer seg Tayfun-modifisert referansekurve utover tanken. En mulig forklaring på dette er at vindsjøen blir dempet grunnet dissipasjon. Ved probe 4 "skyter" imidlertid kurven noe ut ved halen nederst til høyre i figuren. Dette indikerer eksistens av ikkelineære effekter akkumulert over en viss avstand fra padlen. Vindsjøen propagerer på uendelig dyp. For bølger på uendelig dyp vil det kunne oppstå firebølgers resonans [29, McGoldrick, 1965]. Dette er 3. ordens ikkelineære effekter. Den dimensjonsløse avstanden $\epsilon^2 k_p x$ sier noe om hvor store en kan forvente disse effektene å være. Denne størrelsesordenen er kalt Benjamin-Feir-skalaen. Tabell 8.1 gir en oversikt over avstandene i bølgetanken i forhold til Benjamin-Feir-skalaen:

	Probe 1	Probe 2	Probe 3	Probe 4
$\epsilon^2 k_p x$	0.14	0.27	0.44	0.59

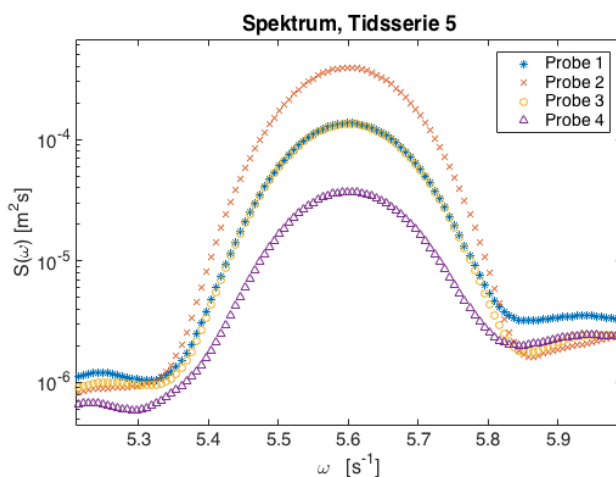
Tabell 8.1: Dimensjonsløse avstander i bølgetanken på Benjamin-Feir-skalaen.

Kubiske ikkelineære effekter forventes å inntreffe for $\epsilon^2 k_p x \sim \mathcal{O}(1)$. Størrelsene i tabellen er basert på karakteristisk steilhet $\epsilon = 0.06$. Dissipasjon gjør at steilheten forandres langs bølgetanken. Steilhet til vindsjøen ved probe 4 er $\epsilon = 0.05$ som gir $\epsilon^2 k_p x_{Probe4} = 0.05^2 (8.21 m^{-1})(19.9 m) = 0.41$. Tross noe usikkerhet rundt valget av steilhet, støtter Benjamin-Feir-avstanden ved probe 4 muligheten for å observere 3. ordens ikkelineære effekter i bølgetanken.

Den karakteristiske formen til overflatehevingens overskridelsessannsynlighet ser ut til å påvirkes av dønningen. Den "skyter" mindre og mindre ut ettersom dønningen vokser. Dønningen demper de ikkelineære effektene som gjør at kurven skyter ut ved halen.

8.1.3 Kurtose, skjevhet og karakteristisk steilhet

Kurtose, skjevhet og karakteristisk steilhet til vindsjøen øker fra probe 1 til probe 2. For Skjevheten og vindsjøens steilhet er effekten tydeligere jo sterkere dønningen er. Kurtosen øker mest i tidsserie 2 der dønningens steilhet er av orden $\epsilon_2 \sim 0.01$. I beregningen av dønningens steilhet er kun dønningens 1. harmonisk tatt i betraktning. 2. harmonisk til dønningen er sterkest ved probe 2 (figur 8.4). Da 2. og 3. harmonisk til dønning faller sammen med vindsjøen vil arealet under spekteret til vindsjøen øke grunnet bidrag fra dønningen. Vindsjøens karakteristiske amplitude kan uttrykkes ved: $a_c = \sqrt{2\sigma^2} = \sqrt{2 \int_{4.5}^{\infty} S(\omega) d\omega}$. Økt areal under spekteret betyr at karakteristisk amplitude øker. Dette kan være noe av forklaringen på det som skjer fra probe 1 til 2. Årsaker til sterke bidrag fra 2.harmonisk ved dønningen er imidlertid ikke belyst i avhandlingen.



Figur 8.4: 2. harmonisk til dønning ved probe 1, 2, 3 og 4, tidsserie 5.

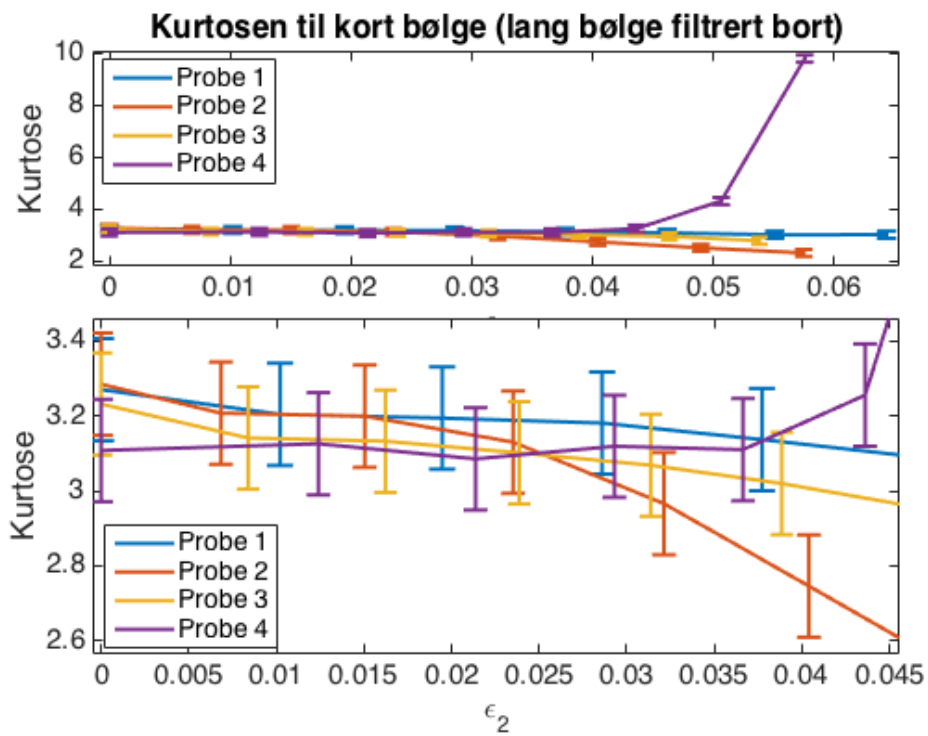
Av 3. ordens ikkelineær teori er det forventet at kurtosen er på litt over 3: $\kappa = 3 + 12\epsilon^2$ [21, Mori & Janssen, 2006]. Med steilheten ved probe 1 som referanse er korreksjonsleddet $12\epsilon^2 = 12(0.06)^2 = 0.04$. Selv med usikkerheten σ_κ tatt til hensyn er kurtosen til overflatehevingen i tidsserie 1 noe høyere enn forventet av teori for smalbandet prossess. Overflatehevingens skjevhet er positiv, men også denne er underestimert i forhold til teori. [22, 1986].

Kurtosen blir lavere ved tilstedeværelse av dønning selv om karakteristisk steilhet for dønning og vindsjø øker. Det må imidlertid påpekes at å definere

	Probe 1	Probe 2	Probe 3	Probe 4
κ :	3.27 ± 0.14	3.28 ± 0.14	3.23 ± 0.14	3.11 ± 0.14
$12\epsilon^2$:	0.04	0.04	0.03	0.03

Tabell 8.2: Kurtose med ett standardavviks usikkerhet og Mori & Janssens korreksjonsledd for tidsserie 1

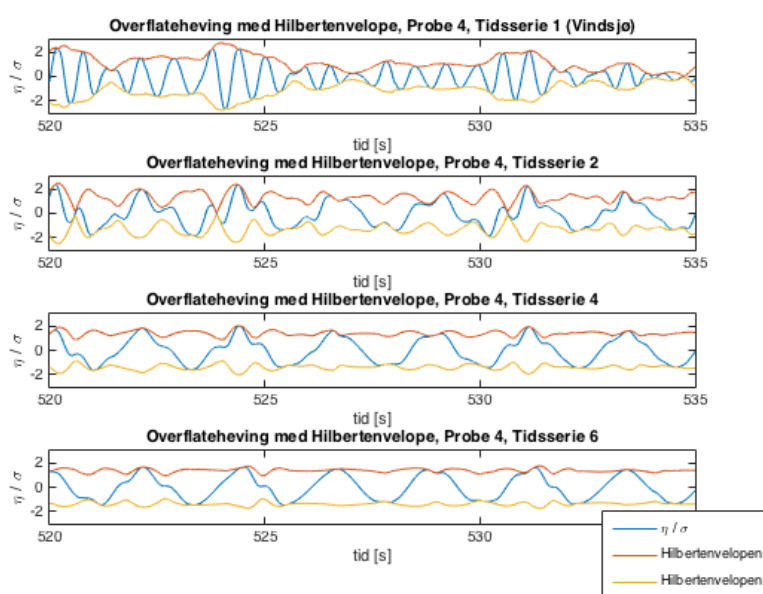
hva karakteristisk steilhet er i gjeldende sjøtilstand, er noe problematisk da bidrag fra dønningen faller inn i vindsjøen. Estimater av overflatehevingens kurtose domineres av dønningen. Ettersom dønningen øker i styrke, nærmer kurtosen seg referanseverdien til dønningen: $\kappa = 1.5$. Da dønningens effekt på vindsjøen er det som analyseres, kunne et alternativ vært å estimere kurtose av vindsjøen. Dette byr på problemer da bidrag fra dønningens 2. og 3. harmonisk vil påvirke estimatet. Det er allikevel gjort en beregning av kurtose for filtrert vindsjø. Figur 8.5 viser kurtosen ved probe 1 - 4 som funksjon av dønningens steilhet. Verdier for kurtose vises på figurens vertikale akse, mens verdien av dønningens steilhet for den aktuelle måling vises på figurens horisontale akse. Det kan sees at kurtosen øker unormalt mye for tidsseriene med de steileste dønningene ved probe 4. Det er valgt å se nærmere på kurtosen målt for tidsserier med karakteristisk steilhet for dønningen av størrelsesorden opp til ~ 0.04 . Det ser ut til at dønningen ikke forandrer forekomsten av ekstreme tilfeller i særlig stor grad. Kurtosen målt ved probe 1 til 3 ser ut til å avta svakt når dønningens styrke øker. Kurtosen ved probe 4 ser ut til å øke svakt. Resultatet må sees i lys av filtreringsproblematikken beskrevet over.



Figur 8.5: Kurtosen til vindjø målt ved sjø med stadig steilere dønning. Kurtosens verdi leses av på vertikal akse, mens dønningens steilhet for hvert estimat av kurtosen leses av på horisontal akse.

8.1.4 Bølgekammer og bølgehøyder

For en smalbandet prosess kan Hilbertenvelopen gi nyttig informasjon om bølgekammer og bølgehøyder. Det er ikke sikkert vindsjø generert av et JONSWAP-spektrum i seg selv er tilfredsstillende smalbandet. I tillegg medfører bimodaliteten utfordringer i forhold til hvordan en definerer båndbredde. Av figur 8.6 ser vi at Hilbertenvelopen allerede ved tidsserie 2 "mister" flere bølgekammer. For tidsserie 6 ser det ut til at hilbertenvelopen kun treffer overflatehevingen i nærheten av dønningens kammer og buker.



Figur 8.6: Hilbertenvelopen til overflatehevingen, tidsserie 1,2,4 og 6

På bakgrunn av dette er det valgt å bruke andre verktøy for å beskrive bølgekammer og bølgehøyders statistikk. Et alternativ er å bruke nullkryssingsmetoden beskrevet i seksjon 6.2. Dønningen vil imidlertid gjøre flere kammer negative og flere buker positive. Dette gir muligheter i forhold til hvordan vi definerer bølgene. Nullkryssingsmetoden er sammenlignet med lokal peak-metoden som definerer bølger etter det som er kalt lokale kammer og buker. Det er ikke tatt stilling til hvorvidt en metode er bedre enn en annen. Lokal peak-metoden fanger opp flere små bølger enn nullkryssingsmetoden. Dette kan sees øverst til høyre i overskridelsessannsynligheter for bølgekammer og bølgehøyder. Kurvene faller sammen for de høyeste verdiene av bølgekammer og bølgehøyder. For tidsserie 7 fanger nullkryssingsmetoden hovedsakelig opp kammer av verdi i intervallet $\frac{\eta_c}{\sigma} \in [1, 2]$ og bølgehøyder i

intervallet $\frac{H}{\sigma} \in [2, 3]$. Felles for nullkryssningsmetoden og lokal peak-metoden er at tidsseriene er for korte til at det er registrert freakbølger.

8.2 Bikromatisk bølge

Målet om å generere en kort bølge ridene på en mye lengre dønning er innfridd. Det er generert kort bølge med steilhet $\epsilon_1 \sim 0.1$ sammen med dønninger med steilhet $\epsilon_2 \sim 0.01$ til $\epsilon_2 \sim 0.06$. Eksperimentelle resultater viser at den korte bølgens amplitude og bølgetall moduleres av dønningen. En generell tendens for tidsserie I - V er at amplituden til den korte bølgen er størst rett før eller rett etter dønningens kam. Når dønningens steilhet øker ytterligere ser det ut til at den korte bølgens amplitude varierer noe annerledes. Amplituden ser da ut til å ha periodiske variasjoner over en syklus på litt under 10 sekunder.

I sammenligning av teori bør det tas i betraktning at teorien gjelder for uendelig dyp. Det faktum at dønningen er delvis stående gjør situasjonen noe mer komplisert. Det er mulig observerte effekter avhenger av om proben er nær posisjoner med minimale utslag (knutepunkter) eller ved posisjoner med maksimale utslag. I figurene presentert er det antatt $x = 0$ i uttrykkene for P og Q. Teorien beskriver maksimale utslag for den korte bølgens amplitude rett før og rett etter dønningens kam.

Resultatene avviker fra Longuet-Higgins & Stewarts modell for modifisert amplitude: $AA = a_1(1 + P)$. Det kan virke som at denne modellen har et strengt begrenset gyldighetsområde.

Bølgesystemet består av karakteristiske frekvenser

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 9.0s^{-1} \\ \omega_2 &= 2.7s^{-1}\end{aligned}\tag{8.2}$$

som gir

$$\mu \sim \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}).\tag{8.3}$$

Steilheten til kort bølge er valgt

$$\epsilon_1 \sim \mathcal{O}(\epsilon) \sim 0.1\tag{8.4}$$

Teorien for overflatehevingen til dønning sammen med kort bølge være gyldig innenfor begrensningene:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &\sim 0.1 \\ a_2k_1 \ll 1 &\Leftrightarrow \epsilon_2 \ll \mu^2 \sim \mathcal{O}(\epsilon) \sim 0.1\end{aligned}\tag{8.5}$$

Kravet $Q^2 \ll P$ fører imidlertid et strengere krav på dønningens steilhet:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &\sim 0.1 \\ \epsilon_2 &\ll \mu^4 \sim \mathcal{O}(\epsilon^2) \sim 0.01\end{aligned}\tag{8.6}$$

Samtidig er ledd av orden $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ sett bort fra i teorien. Analyse av størrelsesordener og eksperimentelle resultater indikerer at store deler av eksperimentet er gjort innenfor gyldigheten av Longuet-Higgins & Stewarts teori for overflatehevingen generelt, men ikke for det spesielle tilfellet $Q^2 \ll P$.

Resultatene samsvarer godt med Longuet-Higgins & Stewarts modell for bølgetallsmodulasjon. Bølgene blir kortere på dønningens kam og lengre på buken. Denne effekten blir sterkere jo steilere dønningen er. Når dønningens steilhet beveger seg ut av gyldighetsområdet til teorien brukt i denne avhandlingen trengs det andre modeller for forklaring av denne effekten.

8.3 Utfordringer og videre arbeid

Overskridelsessannsynligheter for bølgekammer og bølgehøyder viser at det trengs lengre tidsserier for å kunne si noe om freakbølgesannsynligheten. Å måle overflatehevingen til en sjø med JONSWAP-spektrum og dønning over lang tid, byr imidlertid på utfordringer i forhold til refleksjon i tanken. Vi har sett at mye av dønningen reflekteres i enden av tanken. Ved lange tidsserier kan en risikere at dønningens energi etter hvert øker så mye at det ikke lenger er neglisjerbart.

I denne avhandlingen ble overflatehevingen målt ved 4 steder i tanken. Avstanden mellom probene var på omtrent 5 meter. Vi har sett at det skjer noe interessant fra probe 1 til 2 uten å kunne forklare dette ytterligere. Et alternativ til å måle overflatehevingen 4 steder i tanken for forskjellige tidsserier, er å velge en av tidsseriene. Man kan kjøre denne flere ganger med probene plassert tettere og på ulike steder for hver gang. Dette vil belyse romlige effekter langs tanken. Dette er interessant med tanke på akkumulerende ikkelineære effekter, men også i forhold til effekter grunnet delvis stående dønning.

Kapittel 9

Konklusjon

Avhandlingen er en del av en større forskning på bimodal sjø. Det er gjort eksperimenter i bølgetanken ved Hydrodynamisk Laboratorium ved Universitetet i Oslo. Vindsjø sammen med dønning, samt bikromatisk bølge bestående av en kort bølge ridende på dønning er genrert i bølgetanken. Fra målinger av overflatehevingen er det gjort statistiske og deterministiske betrakninger. Tilstedeværelse av dønning resulterer i avvik fra Gaussisk statistikk. Kurtose og overskridelsessannsynligheter beveger seg mot referanseverdier for dønningen. Overskridelsessannsynligheten til overflatehevingen indikerer at dønningen demper ikkelineære effekter i vindsjøen. Det er ikke gjort lange nok målinger til å kunne observere freakbølger, men dønningen ser ut til å påvirke vindsjøen i retning av færre ekstreme tilfeller.

Eksperimentene med bikromatiske bølger har vist at den korte bølgens amplitude og bølgetall moduleres av dønningen. Av teori [11, Longuet-Higgins & Stewart, 1960] var det forventet at korte bølgers amplitude var størst på kammen av dønningen. Eksperimentelle resultater peker i retning av maksimal amplitude rett før eller rett etter kammen av dønningen. Videre er det gjort observasjoner som samsvarer med Longuet-Higgins & Stewarts teori for modulasjon av bølgetall. Bølgene blir kortere på kammene av dønningen og lengre på dønningens buk.

Tillegg A

Eksperimentelt oppsett

A.1 Styresignal

Under følger en forklaring på hvordan styresignalet er laget. Styresignalet lager en superposisjon av et JONSWAP-spektrum og en lang monokromatisk bølge. Først diskretiseres tid og vinkelfrekvens. Deretter lages JONSWAP-spekteret amplitudene hentes fra. Fasen er uniformt fordelt på intervallet $[0, 2\pi]$. Det er valgt å bruke $seed = 9$ for å kunne kjøre samme realisasjon hver gang. Videre lages fourierkoeffisienter som med MATLAB-funksjonen *ifft* gir et signal. Deretter legges dønningen til. Før signalet kan sendes til padlen må det tilpasses likevektsnivået til padlen som er 5.5V. Dette er gjort med et sinusfilter som sørger for at signalet er 0 i endepunktene samt ved å legge til likevektsnivået EQ. Siste del av programmet er hentet fra et program, *GaussianInput.m* utviklet av Tore Magnus Taklo. Her blir blant annet signalets maksimale akselerasjon regnet ut og styresignalet lagres som en inputfil lesbar for programmet WaveLab[©].

```
1 clear all, close all
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 %%   Diskretisering av tid   %%
4 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5 SR=50;           % Scanrate: frekvensen til signalet som sendes til padlen
6 T=60*22;        % Total tid for tidsserien i sekunder
7 N=T*SR;         % Totalt antall elementer i signalet som sendes til padlen
8 dt=1/SR;        % Diskretisering av tiden
9 t=0:dt:T-dt;    % Tidsvektoren
10 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
11 %%   Diskretisering av vinkelfrekvens   %%
12 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
13 j=0:N-1;
```

```

14 domega=(2*pi)/T;
15 omegamax = pi/dt;
16 omega=(2*pi*j)/T;                                % Ensidig
17 omegatosid = -omegamax + (0:N-1)*domega;         % Tosidig
18 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
19 %%  Parametere for JONSWAP-spektrum  %%
20 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
21 fp=1.43;                                         % Peak-frekvens
22 gamma = 3.3;
23 eps = 0.1;                                       % eps = ac*kp
24 ac = 0.0121;
25 omegap = 2*pi*fp;
26
27 for i = 1:N
28 if omega(i) <= omegap
29 vari = 0.07;
30 else
31 vari = 0.09;
32 end
33 end
34
35 Hm0 = 2*sqrt(2)*ac;
36 A = (5/16)*Hm0^2*omegap^4;
37 B = (5/4)*omegap^4;
38 E = exp(-B*(omega.^(-4)));
39
40 %Pierson-Moskowitz spectrum:
41 SPM = A*E.*(omega.^(-5));
42 SPM(1) = 0;
43
44 %JONSWAP spectrum:
45 S = SPM.*gamma.^(exp((- (omega-omegap).^2)/(2*vari*omegap^2)));
46
47 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
48 %%  Kutter frekvenser større enn 2*omegap i styresignalet da padlen %%
49 %%  ikke taler de høyeste frekvensene
50 %%
51 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
52 FF = fix(2*omegap/domega);
53 fill = zeros(1,N-FF);
54 S = [ S(1:FF) fill ];
55
56 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
57 %%  Amplitude  %%
58 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
59 AA = sqrt(2*S.*domega);
60
61 %Random fase, kan velge en fast verdi for seed for a kjore samme
62 %realisasjon:

```

```

62 seed = 9;
63 s = RandStream('mt19937ar', 'Seed', seed);
64 RandStream.setGlobalStream(s);
65 phi = 2*pi*rand(1,N);
66
67 %Fourierkoeffisienter:
68 Z = AA.*exp(sqrt(-1)*phi);
69
70 %Ufiltrert styresignal:
71 ETA = N*real(iff(Z));
72
73 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
74 %%%   Spekter for lang monokromatisk bolge   %%%
75 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
76 a2 =0.1;
77 omega2 = 2.8;
78 ETA2 = a2*cos(omega2*t);
79
80 ETA = ETA + ETA2;
81 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
82 %%%   Spektrum lang monokromatisk bolge sammen med JONSWAP vindsjo %%%
83 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
84 SS12 = 2*(abs(fftshift(fft(ETA)/N)).^2)/(domega);
85
86 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
87 %%% Sinusfilter, Gjør at ETA starter og slutter på 0   %%%
88 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
89 u = linspace(0,pi,50);
90 filter1 = (sin(u-(pi/2))+1)/2;
91 filter2 = (sin(u+(pi/2))+1)/2;
92
93 ETA(1:50) = ETA(1:50).*filter1;
94 ETA((N)-49:N) = ETA((N)-49:N).*filter2;
95
96 %AV bestemmes for a fa ønsket amplitude på bolgen som genereres:
97 AV = 2.10;
98 %Likevektsniva til padlen [Volt]:
99 EQ = 5.5;
100 % Signal (Filtrert og tilpasset likevekt) som leses i WaveLab:
101 ETAV = ETA*AV + EQ;
102
103 %#####
104 %Maximum/minimum values, velocities and accelerations of wave maker signal
105 %#####
106 Max_ETAV = max(ETAV)           % Maximum value
107 Min_ETAV = min(ETAV)           % Minimum value
108 Vel = diff(ETAV)/dt;           % First derivative; ''Velocity''
109 AbsMaxVel=abs(max(Vel))         % Absolute value of maximum ''Velocity''
110 [maxVel,IndexVel] = max(Vel)   % Find position of element with max value for

```

```

111 % the ''Velocity''
112 Acc = diff(Vel)/dt; % Second derivative; ''Acceleration''
113 AbsMaxAcc=abs(max(Acc)) % Absolute value of maximum ''Acceleration''
114 [maxAcc,IndexAcc] = max(Acc) % Find position of element with max value for
115 % the ''Acceleration''
116
117 #####
118 % Print of data file with discrete values in Volt for use in WaveLab
119 #####
120 fid = fopen('JONSWAPspektrumvegar','w');
121 for i = 1:N
122 fprintf(fid,'%f\n',ETAV(i));
123 end
124 fclose(fid);
125 #####

```

A.2 Matematisk verktøykasse

Tayfunmodifisert overskridelsessannsynlighet for overflatehevingen:

```

1 u = linspace(min(etasort(1,1:4)),max(etasort(N,1:4)),1000);
2 G = sqrt(1+2*(kc*sigma)*u)-1;
3 feta_modG = ((1-(7*(sigma*kc)^2/8)) ...
4 ./ (sqrt(2*pi*(1 + 3*G + 2*G.^2)))) ...
5 .*exp(-G.^2/(2*(sigma*kc)^2));
6
7 F(1) = normcdf(u(1));
8 for i = 2 : length(u)
9 F(i) = trapz(u(1:i),feta_modG(1:i))+F(1);
10 end
11
12 P = 1-F;
13 semilogy(u,P)
14 hold on

```

Bibliografi

- [1] K. Dysthe, H. E. Krogstad, and P. Müller, “Oceanic rogue waves,” *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 40, pp. 287–310, 2008.
- [2] C. Kharif and E. Pelinovsky, “Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon,” *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, vol. 22, no. 6, pp. 603–634, 2003.
- [3] K. Trulsen and J. Grue, *Waves in Geophysical Fluids. Tsunamis, Rogue Waves, Internal Waves and Internal Tides*, ch. Weakly nonlinear and stochastic properties of ocean wave fields. Application to an extreme wave event, pp. 49–106. Springer-Verlag Wien, 2006.
- [4] K. Trulsen, J. C. Nieto Borge, O. Gramstad, L. Aouf, and J.-M. Lefèvre, “Crossing sea state and rogue wave probability during the prestige accident,” *Journal of Geophysical Research: Oceans*, vol. 120, no. 10, pp. 7113–7136, 2015.
- [5] A. Osborne, “Un estado de mar con olas anormales y olas anormales rompientes,” 2013. Presentasjon i rettsak publisert på <http://www.naucher.com>.
- [6] A. Lechuga, “Were freak waves involved in the sinking of the tankerprestige?,” *Natural Hazards and Earth System Science*, vol. 6, no. 6, pp. 973–978, 2006.
- [7] A. Toffoli, J. Lefevre, E. Bitner-Gregersen, and J. Monbaliu, “Towards the identification of warning criteria: analysis of a ship accident database,” *Applied Ocean Research*, vol. 27, no. 6, pp. 281–291, 2005.
- [8] A. Toffoli, M. Onorato, and J. Monbaliu, “Wave statistics in unimodal and bimodal seas from a second-order model,” *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, vol. 25, no. 5, pp. 649–661, 2006.
- [9] L. Rye, “Freak waves in crossing sea with counterpropagating wave systems,” Master’s thesis, Universitet i Oslo, 2014.

- [10] O. Gramstad and K. Trulsen, “Can swell increase the number of freak waves in a wind sea?,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 650, pp. 57–79, 2010.
- [11] M. S. Longuet-Higgins and R. W. Stewart, “Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents,” pp. 565–583, 1960.
- [12] M. K. Ochi, *Ocean waves : the stochastic approach*. Cambridge, U.K. ; New York : Cambridge University Press, 1998. Includes bibliographical references and index.
- [13] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, Inc., third edition ed., 1991.
- [14] H. E. Krogstad and Ø. A. Arntsen, “Linear wave theory, part b: Irregular waves,” 2000. <http://folk.ntnu.no/oivarn>.
- [15] “Kurtosis.” <https://en.wikipedia.org/wiki/Kurtosis>. [Hentet: 2016-05-18].
- [16] “Skewness.” <https://en.wikipedia.org/wiki/Skewness>. [Hentet: 2016-05-18].
- [17] J. Grue, D. Clamond, M. Huseby, and A. Jensen, “Kinematics of extreme waves in deep water,” *Applied Ocean Research*, vol. 25, no. 6, pp. 355–366, 2003.
- [18] S. Olluri, “Freak waves in bimodal sea: Two waves systems traveling in the same direction with different peak frequencies,” Master’s thesis, Universitet i Oslo, 2016.
- [19] D. Cramer, *Fundamental statistics for social research: step-by-step calculations and computer techniques using SPSS for Windows*. Psychology Press, 1998.
- [20] A. Raustøl, “Freake bølger over variabelt dyp,” Master’s thesis, Universitetet i Oslo, 2014.
- [21] N. Mori and P. A. Janssen, “On kurtosis and occurrence probability of freak waves,” *Journal of Physical Oceanography*, vol. 36, no. 7, pp. 1471–1483, 2006.
- [22] M. Srokosz and M. Longuet-Higgins, “On the skewness of sea-surface elevation,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 164, pp. 487–98, 1986.

- [23] J. C. Nieto Borge, “The gaussian model of wind-generated waves.” <http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MEK4350/h15/pensumliste/gaussian-waves.pdf>, 2015.
- [24] A. Naess, “On the distribution of crest to trough wave heights,” *Ocean Engineering*, vol. 12, no. 3, pp. 221 – 234, 1985.
- [25] D. E. Cartwright and M. S. Longuet-Higgins, “The statistical distribution of the maxima of a random function,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 237, no. 1209, pp. 212–232, 1956.
- [26] G. Lindgren, *Stationary stochastic processes: theory and applications*. CRC Press, 2013.
- [27] M. A. Tayfun, “Narrow-band nonlinear sea waves,” *Journal of Geophysical Research*, vol. 85, no. C3, pp. 1548–1552, 1980.
- [28] H. Socquet-Juglard, K. Dysthe, K. Trulsen, H. E. Krogstad, and J. Liu, “Probability distributions of surface gravity waves during spectral changes,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 542, pp. 195–216, 2005.
- [29] L. F. Mcgoldrick, “Resonant interactions among capillary-gravity waves,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 21, no. 02, pp. 305–331, 1965.

Figurer

3.1	Båndbredde	18
4.1	Oppsett bølgetanken	24
4.2	Refleksjonskoeffisienter beregnet av Shkurta Olluri og Susanne Støle-Hentschel	25
4.3	Oppstartseffekter for tidsseriene, kjøring $a_2 = 0.10$	27
4.4	Utviklingen av normalisert overflateheving målt ved probe 1	28
4.5	Eksempel på forstyrrelser ("spikes") fra kjøringen av JONSWAP med den steileste dønningen	29
5.1	Absoluttverdien til $\hat{\eta}(\omega) = f ft(\eta(t))$ som funksjon av vinkel-frekvensen ω	35
5.2	Overflateheving kort bølge η_{kort} sammen med overflateheving til lang bølge η_{lang} skalert med standardavviket til henholdsvis kort og lang bølge. Tidserier er spesifisert i tittel og inneholder 4 delplot med data fra probe 1,2,3 og 4. Data fra probe 1 er øverst. Deretter følger probe 2, 3 og 4, der data fra probe 4 er nederst.	36
5.3	Overflateheving kort bølge η_{kort} sammen med overflateheving til lang bølge η_{lang} skalert med standardavviket til henholdsvis kort og lang bølge. Tidserier er spesifisert i tittel og inneholder 4 delplot med data fra probe 1,2,3 og 4. Data fra probe 1 er øverst. Deretter følger probe 2, 3 og 4, der data fra probe 4 er nederst.	37
5.4	Overflateheving kort bølge η_{kort} sammen med overflateheving til lang bølge η_{lang} skalert med standardavviket til henholdsvis kort og lang bølge. Tidserier er spesifisert i tittel og inneholder 4 delplot med data fra probe 1,2,3 og 4. Data fra probe 1 er øverst. Deretter følger probe 2, 3 og 4, der data fra probe 4 er nederst.	38

5.5	Overflateheving kort bølge η_{kort} sammen med overflateheving til lang bølge η_{lang} skalert med standardavviket til henholdsvis kort og lang bølge. Tidserier er spesifisert i tittel og inneholder 4 delplot med data fra probe 1,2,3 og 4. Data fra probe 1 er øverst. Deretter følger probe 2, 3 og 4, der data fra probe 4 er nederst.	39
5.6	Overflatehevingen til kort og lang bølge målt ved probe 4. . .	40
5.7	Overflatehevingen til kort og lang bølge målt ved probe 4. . .	41
5.8	Absoluttverdien til fouriertransformen av η for tidsserie I og IV målt ved probe 4 sammenlignet med absoluttverdien til fouriertransformen av teoretisk overflateheving på uendelig dyp. 42	42
5.9	Absoluttverdien til fouriertransformen av η for tidsserie VII målt ved probe 4 sammenlignet med absoluttverdien til fouriertransformen av teoretisk overflateheving på uendelig dyp. . .	43
5.10	Overflatehevingen målt ved probe 3 sammenlignet med dønning-modifisert teori for overflatehevingen på uendelig dyp. Med dønning-modifisert teori menes teori for kort bølge ridende på delvis stående lang bølge. Tidsserie I til IV.	44
5.11	Overflatehevingen målt ved probe 3 sammenlignet med dønning-modifisert teori for overflatehevingen på uendelig dyp. Med dønning-modifisert teori menes teori for kort bølge ridende på delvis stående lang bølge. Tidsserie V til VII.	45
5.12	Overflatehevingen målt ved probe 4 sammenlignet med dønning-modifisert teori for overflatehevingen på uendelig dyp. Med dønning-modifisert teori menes teori for kort bølge ridende på delvis stående lang bølge. Tidsserie I til IV.	46
5.13	Overflatehevingen målt ved probe 4 sammenlignet med dønning-modifisert teori for overflatehevingen på uendelig dyp. Med dønning-modifisert teori menes teori for kort bølge ridende på delvis stående lang bølge. Tidsserie V til VII.	47
5.14	Kort bølge ridende på lang bølge for modifisert teori. Gul kurve er Hilbertenvelopen av den korte bølgen. Amplituder og bølgetall som inngår i uttrykket for overflatehevingen er hentet fra målinger for tidserie I til III ved probe 4.	48
5.15	Ulike modeller for utvikling av amplituden langs dønningen. $A = a_1(1 + P + \frac{1}{2}Q^2)$, $AA = a_1(1 + P)$. Amplituder og bølgetall som inngår i uttrykket for amplitude A, AA og uttrykket for overflatehevingen er hentet fra målinger for tidserie I til III ved probe 4.	48

5.16	Ulike modeller for utvikling av amplituden langs dønningen. $A = a_1(1 + P + \frac{1}{2}Q^2)$, $AA = a_1(1 + P)$. Amplituder og bølgetall som inngår i uttrykket for amplitude A, AA og uttrykket for overflatehevingen er hentet fra målinger for tidserie IV til VI ved probe 4.	49
6.1	Kammer og buker funnet ved hjelp av nullkryss og lokal peak	53
7.1	Steilhet til vindsjøen målt ved probe 1,2,3 og 4 i bølgetanken. Avstander langs x-akse er gitt i antall karakteristiske bølgelengder med vindsjø som referanse.	60
7.2	Steilhet til dønningen målt ved probe 1,2,3 og 4 i bølgetanken. Avstander langs x-akse er gitt i antall karakteristiske bølgelengder med dønning som referanse.	60
7.3	61
7.4	Spektrum for JONSWAP-sjø med økende amplitude på monokromatisk langbølge.	62
7.5	Kurtose som funksjon av steilheten til dønning og i forhold til avstand til padlen.	63
7.6	Skjevhet som funksjon av steilheten til dønning og i forhold til avstand til padlen.	64
7.7	Overskridelsessannsynlighet til overflatehevingen ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 1.	66
7.8	Overskridelsessannsynlighet til overflatehevingen ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 2.	67
7.9	Overskridelsessannsynlighet til overflatehevingen ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 3.	68
7.10	Overskridelsessannsynlighet til overflatehevingen ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 5.	69
7.11	Overskridelsessannsynlighet til overflatehevingen ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 7.	70
7.12	Overskridelsessannsynligheten til Hilbertenvelopen ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 1.	71
7.13	Overskridelsessannsynligheten til Hilbertenvelopen ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 2.	72
7.14	Overskridelsessannsynligheten til Hilbertenvelopen ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 4.	73
7.15	Overskridelsessannsynligheten til Hilbertenvelopen ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 7.	74

7.16	Overskridelsessannsynlighet til bølgekammer ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 1. Bølgekammer regnet ut av nullkryssingsmetoden og lokal peak-metoden.	75
7.17	Overskridelsessannsynlighet til bølgekammer ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 2. Bølgekammer regnet ut av nullkryssingsmetoden og lokal peak-metoden.	76
7.18	Overskridelsessannsynlighet til bølgekammer ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 4. Bølgekammer regnet ut av nullkryssingsmetoden og lokal peak-metoden.	77
7.19	Overskridelsessannsynlighet til bølgekammer ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 7. Bølgekammer regnet ut av nullkryssingsmetoden og lokal peak-metoden.	78
7.20	Overskridelsessannsynlighet til bølgehøyder ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 1. Bølgehøyder regnet ut av nullkryssingsmetoden og lokal peak-metoden.	79
7.21	Overskridelsessannsynlighet til bølgehøyder ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 2. Bølgehøyder regnet ut av nullkryssingsmetoden og lokal peak-metoden.	80
7.22	Overskridelsessannsynlighet til bølgehøyder ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 4. Bølgehøyder regnet ut av nullkryssingsmetoden og lokal peak-metoden.	81
7.23	Overskridelsessannsynlighet til bølgehøyder ved probe 1, 2, 3 og 4 for tidsserie 7. Bølgehøyder regnet ut av nullkryssingsmetoden og lokal peak-metoden.	82
8.1	Referansekurver for sjø med økende dønning. Båndbredden estimert av minimumsverdien til autokorrelasjonsfunksjonen $R(\tau)$.	85
8.2	Autokorrelasjonen skalert med variansen til overflatehevingen for tidserie 1, 2, 4 og 7.	85
8.3	Overskridelsessannsynligheten for bølgekammer, probe 4, med Rayleigh- og Gauss-fordeling som referansekurver for smalbandet og bredbandet prossess.	86
8.4	2. harmonisk til dønning ved probe 1, 2, 3 og 4, tidsserie 5. . .	88
8.5	Kurtosen til vindjø målt ved sjø med stadig steilere dønning. Kurtosens verdi leses av på vertikal akse, mens dønningens steilhet for hvert estimat av kurtosen leses av på horisontal akse.	90
8.6	Hilbertenvelopen til overflatehevingen, tidsserie 1,2,4 og 6 . . .	91

Tabeller

5.1	Oversikt over tidserier av bikromatisk dønning med tilhørende karakteristisk steilhet for kort og lang bølge, forholdstallet mellom karakteristiske steilheter og størrelsen a_2k_1 . a_2k_1 gir størrelsesordenen til Q som inngår i modulasjonen av kort bølge gitt i likning (2.23). $a_2 = a_{2H} + a_{2V}$ er summen av amplituden til innkommende dønning og reflektert dønning.	32
7.1	Steilheter for alle tidsserier, JONSWAP-dønning	58
8.1	Dimensjonsløse avstander i bølgetanken på Benjamin-Feir-skalaen.	87
8.2	Kurtose med ett standardavviks usikkerhet og Mori & Janssens korreksjonsledd for tidsserie 1	89