

Hydrodynamiske relasjoner for en porøs geometri i et fluid med fri overflate, beregnet med panelmetoden

Lars Petter Karstensen

Masteroppgave, våren 2016



Forsidedesign av Martin Helsø

Forsiden viser et utsnitt av rotsystemet til den eksepsjonelle liegruppen E_8 , projisert ned i planet. Liegrupper ble oppfunnet av den norske matematikeren Sophus Lie (1842–1899) for å uttrykke symmetriene til differensiallikninger og spiller i dag en sentral rolle i flere deler av matematikken.

Forord

Jeg vil gjerne få takke min veileder professor John Grue for god oppfølging og interessante utfordringer. Hjertelig takk til alle dere på lesesalen, dere har vært med på å skape et godt miljø, både læringsmessig og ikke minst sosialt. Spesielt takk til Jørgen Dokken, samarbeidet med deg har vært morsomt og det har høynet kvaliteten på dette prosjektet.

Lars Petter Karstensen
Oslo, Mai 2016

Abstract

In this thesis interactions between water waves and porous bodies are investigated. In accordance with Taylor's [1] fine-pore assumption, Darcy's law [2] is applied to the porous boundary surface. The hydrodynamic identities added mass and damping coefficients, the Haskind relation and the energy equation is examined for a deeply submerged sphere, as well a hemisphere floating on the free surface. An inner sloshing mode is observed to wavelengths equal to the body's diameter. Diffraction drift forces are calculated using momentum conservation as basis, and results similar to those of Zhao *et al.* [3] is achieved. It is found that the drift forces upon porous bodies are greater than those of solid bodies in the long wave regime.

Nomenklatur

- A = Amplitude på innkommende bølge
 $H(\theta)$ = Kochinfunksjonen definert av (B.8)
 ω = Frekvens
 g = Tyngdeakselerasjon
 \mathbf{n} = Enhetsnormalvektor ut av fluidet
 p = Fluidtrykk
 t = Tid
 ρ = Massetetthet til fluid
 x, y, z = Kartesiske koordinater
 R = Polar radius, $R^2 = x^2 + y^2$
 ϕ_j = Hastighetspotensialer for radiasjon, $j = 1, \dots, 6$
 ϕ_0 = Hastighetspotensial for innkommende bølge
 ϕ_7 = Reflektert hastighetspotensial
 ϕ_d = Det totale diffraksjonspotensialet, $\phi_0 + \phi_7$
 ϕ_s = Totalt radierende potensial, $j = 1, \dots, 7$
 K = Bølgetallet på uendelig dyp, $K = \omega^2/g$
 ξ_j = Kompleks amplitude på bevegelser i radiasjonsproblemet
 a = Radius til kule og halvkule
 α = Porøsitetsparameter gitt ved $\rho\omega b/\mu$
 G = Dimensjonsløs porøsitetsparameter, α/K
 $G(\mathbf{x}, \xi)$ = Greenfunksjonen gitt ved (B.1)
 $S = S_b, S_f, S_\infty, S_{bunn}$, Integrasjonsflater, se figur 2.4
 η = Overflatehevningen
 w_j, w_d = Gjennomstrømmingen i henholdsvis radiasjon og diffraksjon
 a_{ij} = Koeffisienter for addert masse
 b_{ij} = Dempningskoeffisienter
 $\frac{\partial}{\partial n}$ = Normalderivert gitt ved $\mathbf{n} \cdot \nabla$
 X_i = Kompleks amplitude på eksitasjonskraften
 β = Vinkel mellom positiv x-akse og innkommende bølges propageringsretning

E = Midlere energitetthet i innkommende bølge gitt ved $\rho g A^2 / 2$

\overline{F}_i^t = Midlere driftkraft i retning i

χ = Fasefunksjon benyttet i stasjonær fase

$\sigma(\mathbf{x})$ = Kildestyrken på et panel, (fra kildeformuleringen)

W = Midlet arbeid. Subscript b,f,j,d for h.h.v. body, fjernfelt, radiasjon og diffraksjon

Innhold

| | |
|--|-----------|
| Figurer | 10 |
| 1 Introduksjon | 11 |
| 2 Matematisk formulering | 13 |
| 2.1 Greens teorem. Integralligningene. | 14 |
| 2.2 Dekomponering av hastighetspotensialet | 14 |
| 2.2.1 Radasjonsproblemet | 14 |
| 2.2.2 Diffraksjonsproblemet | 15 |
| 2.3 Randbetingelser | 16 |
| 2.4 Lineært trykkfall | 18 |
| 2.5 Porositetsparameteren α | 19 |
| 2.6 Kobling av det indre og ytre potensialet | 19 |
| 2.6.1 Radasjon | 19 |
| 2.6.2 Diffraksjon | 21 |
| 2.7 Diskretisering | 22 |
| 2.7.1 Panelmetoden | 22 |
| 2.7.2 Matriseligningen | 23 |
| 2.8 Implementering | 24 |
| 2.8.1 Egen solver | 24 |
| 2.8.2 WAMIT TM | 24 |
| 3 Beregning av addert masse og dempning | 25 |
| 3.1 Symmetri | 25 |
| 3.2 Radierende og porøs dempning | 26 |
| 3.3 Spesialtilfelle: Kule på dypet | 27 |
| 3.4 Resultater | 27 |
| 4 Eksitasjonskraft og Haskindrelasjonen | 39 |
| 4.1 Eksitasjonskraft ved trykkintegrasjon | 40 |
| 4.2 Haskindrelasjonen | 40 |

INNHold

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.3 | Resultater | 41 |
| 5 | Energi | 47 |
| 5.1 | Energidissipasjon | 47 |
| 5.2 | Energifluks i uendelig | 48 |
| 5.3 | Energiligningen i radiasjon | 50 |
| 5.4 | Energiligningen for fritt flytende geometri | 50 |
| 5.5 | Resultater | 51 |
| 6 | Drift | 57 |
| 6.1 | Momentumanalysen | 57 |
| 6.2 | Konvensjonell driftkraft | 60 |
| 6.3 | Porøs driftkraft | 64 |
| 6.4 | Resultater | 65 |
| 7 | Oppsummering og konklusjon | 69 |
| 7.1 | Videre arbeid | 71 |
| | Tillegg | 73 |
| A | Greens teorem og integralligninger | 75 |
| B | Bølgegreenfunksjonen | 77 |
| B.1 | Bølgegreenfunksjonen i fjernfeltet | 78 |
| B.2 | Hastighetspotensialet i fjernfeltet | 81 |
| C | Kildeformulering | 83 |
| D | Tolkningen av $\int_{S_i} \frac{\partial G}{\partial n} dS$ | 89 |
| E | WAMITTM | 91 |
| E.1 | Mesh | 92 |
| E.2 | Kule | 92 |
| E.3 | Halvkule | 93 |
| F | Alternativ utledning av koblede ligninger i diffraksjon | 97 |
| | Bibliografi | 100 |

Figurer

| | | |
|------|--|----|
| 2.1 | Bevegelsesmoder i radiasjon | 15 |
| 2.2 | Illustrasjon av radiasjonsproblemet | 15 |
| 2.3 | Illustrasjon av diffraksjonsproblemet | 16 |
| 2.4 | Integrasjonsflater | 17 |
| 3.1 | Addert masse og dempning for nedsunket kule | 29 |
| 3.2 | Addert masse og dempning. Sammenligning av løserne. | 29 |
| 3.3 | Konvergens av addert masse for nedsunket kule | 30 |
| 3.4 | Negativ addert masse fra [13] | 31 |
| 3.5 | Addert masse og dempning for flytende kule. Lav porøsitet | 32 |
| 3.6 | Addert masse vs Ka i mode 1 for halvkule i overflaten | 32 |
| 3.7 | Addert masse vs Ka i hiv for halvkule i overflaten | 33 |
| 3.8 | Addert masse for det ytre og indre problemet. Solid geometri | 33 |
| 3.9 | Illustrasjon av de forskjellige dempningsbidragene i mode 1 | 34 |
| 3.10 | Dempning vs Ka på halvkule med forskjellige porøsiteter | 35 |
| 3.11 | Illustrasjon av de forskjellige dempningsbidragene i hiv | 35 |
| 3.12 | Dempning i hiv vs Ka for forskjellige porøsiteter | 36 |
| 3.13 | Dempning i mode 1, som gitt i [3] | 36 |
| 3.14 | Fra [3], dempning i mode 1 | 37 |
| 4.1 | Fra [3]. Haskind eksiterende krefter i mode 1 | 42 |
| 4.2 | Amplitude og fase for Haskind i mode 1 | 43 |
| 4.3 | Fra [3]. Haskind eksiterende krefter i hiv | 43 |
| 4.4 | Amplitude og fase for Haskind i hiv | 44 |
| 4.5 | Amplitude på eksitasjonskraft i jag for forskjellige porøsiteter | 44 |
| 4.6 | Amplitude på eksitasjonskraft i hiv for forskjellige porøsiteter | 45 |
| 5.1 | Energifluks og dissipasjon i radiasjon vs Ka . Mode 1 | 52 |
| 5.2 | Energifluks og dissipasjon i radiasjon vs G . Mode 1 | 53 |
| 5.3 | Energifluks og dissipasjon i radiasjon vs Ka . Mode 3 | 53 |
| 5.4 | Energifluks og dissipasjon i radiasjon vs G . Mode 3 | 54 |

FIGURER

| | | |
|-----|---|----|
| 5.5 | Energifluks og dissipasjon i diffraksjon vs Ka | 54 |
| 5.6 | Energifluks og dissipasjon i diffraksjon vs G | 55 |
| 6.1 | Fra [3]. Horisontal drift for fastholdt porøs sylinder. | 67 |
| 6.2 | Horisontal drift vs Ka for fastholdt porøs kule | 67 |
| 6.3 | Horisontal drift vs Ka for forskjellige prøsiteter | 68 |
| 6.4 | Horisontal drift vs G for fastholdt kule | 68 |
| A.1 | Integrasjonsflater for Greens teorem | 76 |
| B.1 | Integrasjonsvei i det komplekse plan | 80 |
| B.2 | Integrasjonsvei i det komplekse plan | 80 |
| C.1 | Konvergens av kildeformuleringen i mode 1. Solid | 85 |
| C.2 | Konvergens av kildeformuleringen i mode 3. Solid | 85 |
| C.3 | Konvergens av kildeformuleringen med porøsitet. Mode 1 | 86 |
| C.4 | Konvergens av kildeformuleringen med porøsitet. Mode 1 | 86 |
| C.5 | Konvergens av kildeformuleringen med porøsitet. Mode 3 | 87 |
| E.1 | Eksempelmesh av kube med 384 paneler. | 92 |
| E.2 | Eksempelmesh av kube med 1014 paneler hvor meshet er forfinet mot hjørnene ved bruk av en cosinusfordeling av punktene. | 93 |
| E.3 | Her er punktene på en side av kuben projisert inn på et kuleskall. Av illustrative hensyn er kuleskallet forskyvet i positiv x-retning. | 94 |
| E.4 | Eksempelmesh av kule med 600 paneler. Her er alle sidene på kuben projisert inn på en kule med radius 1 og origo i $(0,0,0)$ | 95 |
| E.5 | Eksempelbilde av mesh med 225 paneler. Avbildet fra kvadrat til sirkel, og fra sirkel til halvkuleskall. Kuleskallet er her forskyvet i z-retning av illustrative hensyn. | 96 |

Kapittel 1

Introduksjon

Denne oppgaven studerer hydrodynamiske identiteter og relasjoner for en porøs halvkule liggende i overflaten av et fluid. Vi studerer også en kule på dypt vann hvor beregningene er gjort på to forskjellige måter. Kule er enten satt i en tvungen harmonisk svingning eller fastholdt under påvirkning av en innkommende gravitasjonsbølge. Denne studien er gjort i 3D hvor potensialteori danner grunnlaget. Porøsitet i denne sammenhengen innebærer at en prosentandel av geometrien består av spalter som slipper fluid gjennom randen. Spaltene skal, i tråd med Taylors antagelse [1], tenkes på som uendelig mange og uendelig små porer. Det er flere måter å modellere porøsiteten på, men i denne oppgaven knytter vi gjennomstrømningshastigheten til Darcys lineære motstandslov [2].

Porøse strukturers oppførsel i bølger er et tema som får mer og mer oppmerksomhet takket være en stor ekspansjon av oppdrettsfiskeindustrien. Nettopp større rigide fiskemerder til havs er mye av motivasjonen bak denne studien. Porøse strukturer er også brukt som bølgebrytere og beskyttere til offshoreanlegg og sub-seamoduler. Chwang [4] og Chwang&Li [5] var tidlig ute med sine studier om en porøs bølgemakers effekt på gravitasjonsbølger, hvor Darcys lineære motstandslov [2] dannet grunnlaget for den porøse modelleringen. Molin [6] foreslår en kvadratisk motstandslov som tar hensyn til separasjonseffekter gjennom spaltene. Det kvadratiske trykkfallet tar i større grad hensyn til fysikken bak og porøsiteten er her proporsjonal med den faktiske åpningsraten. Relasjonen inneholder dog en utslippskoeffisient som må bestemmes empirisk og det er nødvendig med iterasjoner i beregningene. An&Faltinsen [7] bruker samme motstandslov i sin studie på en porøs plate representert med en virveldistribusjon. Min medstudent Jørgen Schartum Dokken [8] bruker også denne kvadratiske loven i sin oppgave. Molin [6] undersøker en porøs struktur som virker som en stabilisator for et oljetårn. Den

KAPITTEL 1. INTRODUKSJON

porøse strukturen bidrar til en lokalt forhøyet addert masse og har som funksjon å minske vibrasjoner på tårnet. I denne studien vises det også at de hydrodynamiske koeffisientene addert masse og dempning blir avhengig av amplituden på bevegelsen som følge av den kvadratiske formuleringen. I et nyere arbeid ser Molin&Remy [9] på det som blir kalt *Tuned Liquid Dampers*. Dette er rektangulære bokser delvis fylt med vann, hvor det er plassert ut porøse vegger inne i boksen. Disse boksene blir plassert i toppen av slanke bygninger og har som hensikt å minske vibrasjoner i bygget ved at egenfrekvensene blir dempet. I nyere tid har Zhao *et al.* [3, 10] studert en porøs sylinder med ikke-permeabel bunn på endelig dyp, hvor lineært trykkfall er benyttet. Her blir de hydrodynamiske identiteter og relasjonene addert masse og dempning, Haskindrelasjon og bølgedrift studert i det porøse tilfellet. Det blir funnet at driften for det porøse legemet er større enn i det solide tilfellet for lange bølger. De har også studert samme oppsett eksperimentelt [10] og lagd en empirisk formel som kobler den lineære porøsiteten opp mot strukturens faktiske åpningsrate.

[3], [6] og [7] bruker alle semianalytiske metoder og egenfunksjonsutviklinger. En ren *Boundary Integral Equation Method* (BIEM) er så vidt vi kan se, ikke ofte brukt i denne sammenhengen. Oppgaven tar først og fremst sikte på å utlede og studere de hydrodynamiske koeffisientene addert masse og dempning, validering av ligninger og implementasjoner gjennom Haskindrelasjonen og energiligningen. Til slutt ser vi på de andreordens driftkrefter virkende på geometrien. Innledningsvis i arbeidet er radiasjonsproblemet implementert i 2D og 3D i uendelig fluid på egenhånd. Programmet skrevet av forfatter blir så brukt for å sammenligne mot WAMITTM på dypt vann, hvor effekten av bølger er neglisjerbar. Visualiseringer er gjort over et bredt spekter av bølgetall og kan ikke uten videre relateres direkte til fysiske bølger i naturen, men er nødt til å betraktes som labskala bølgefenomener.

Dette er på flere måter en utvidelse av Sindre Sogge Heggens masteroppgave [11] fra våren 2015. Heggens studerer kreftene som virker på en horisontal neddykket porøs plate i 2D. Heggens analyse er gjort med både lineært og kvadratisk trykkfall og i tillegg til bølger er analysen gjort med strøm. Denne oppgaven tar problemet videre til 3D. Dette arbeidet har også gått parallelt med Dokken [8], som i sin studie sammenligner det lineære og kvadratiske trykkfallets effekt på første- og andreordens krefter på en porøs geometri.

Kapittel 2

Matematisk formulering

Som nevnt innledningsvis skal vi i denne oppgaven studere porøse geometrier som interakterer med bølger. Fluidet er begrenset av en horisontal overflate, hvor både dypet og lateral utstrekning er uendelig. I hovedsak ser vi på en kule på dypt vann under tvugne svingninger, og en halvkule som flyter i overflaten, hvor sentrum ligger på uforstyrret overflate. Begge geometriene har radius lik a . For en nedsenket kule har vi analytiske løsninger for potensialet, så denne er hovedsaklig brukt i øyemed verifisering. I overflateproblemet ser vi på to tilfeller, ett hvor legemet gjør svingninger og ett hvor legemet er fastholdt under påvirkning av en innkommende bølge. Origo er plassert i sentrum av geometrien. Porøsiteten betyr at geometrien har åpne spalter som væske kan strømme igjennom. I denne oppgaven beskrives gjennomstrømningshastigheten med en lineær lov, som beskrevet i Taylor [1]. Her er porøsiteten modellert ved at det over legemet er uendelig mange og uendelig små porer, og hastigheten gjennom veggen kan beskrives ved Darcys lov. Det er antatt at veggene er uendelig tynne.

Videre antas det at fluidet er inkompressibelt og at hastighetsfeltet er irrotasjonelt, og dermed kan beskrives av et potensial Φ som oppfyller Laplaced ligningen

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}, t) = 0 . \tag{2.1}$$

Det antas også at potensialer, trykk og hastigheter alle har samme periodiske oppførsel i tid og at denne tidsavhengigheten kan uttrykkes ved $e^{i\omega t}$, hvor ω betegner frekvensen. Tidsavhengigheten er dermed tatt utenfor alle beregninger, slik at vi kun løser problemet i frekvensdomenet.

2.1 Greens teorem. Integralligningene.

Problemet beskrevet over skal løses med integralligninger. En vanlig måte å gjøre dette på er ved å bruke Greens teorem, hvilket er hva vi også skal gjøre. Bruk av Greens teorem og utledning av integralligningene er lagt til Tillegg A. Hovedresultatet er som følger; gitt to potensialer ϕ og φ som begge oppfyller Laplaces ligningen, får vi

$$\iint_S \left(\phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = 0, \quad (2.2)$$

som er en form av Greens teorem. Ved å bytte ut φ med en Greenfunksjon, kan hastighetspotensialet i 3D representeres av følgende integralligninger

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2\pi \\ -4\pi \end{pmatrix} \phi(\mathbf{x}) = \iint_{S_B} \left(\phi(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \phi}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}}(\boldsymbol{\xi}) \right) dS, \quad (2.3)$$

for \mathbf{x} henholdsvis utenfor, på og innefor S_b . Vi er kun interessert i å regne ut potensialet på legemets overflate, så ligningen med -2π er den vi kommer til å benytte. Ligning (2.3) gjelder også i 2D, men da er venstresiden ganget med $-1/2$.

$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ kalles Greenfunksjonen og representerer et kildepotensial, men i tilfellet med fri overflate inneholder den også et bølgebidrag. Det står mer om bølgegreenfunksjonen i tillegg B.

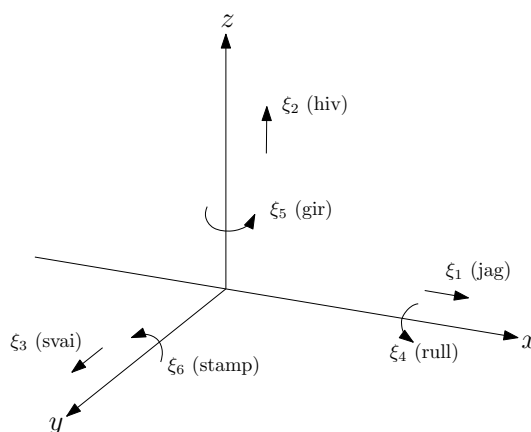
2.2 Dekomponering av hastighetspotensialet

Vi har antatt at potensialene alle har samme periodiske oppførsel i tid, og siden problemet vårt er lineært oppfordrer det til dekomponering av hastighetspotensialet. Vi skal dele problemet opp i sju komponenter, seks radierende potensialer og ett diffrakterende potensial.

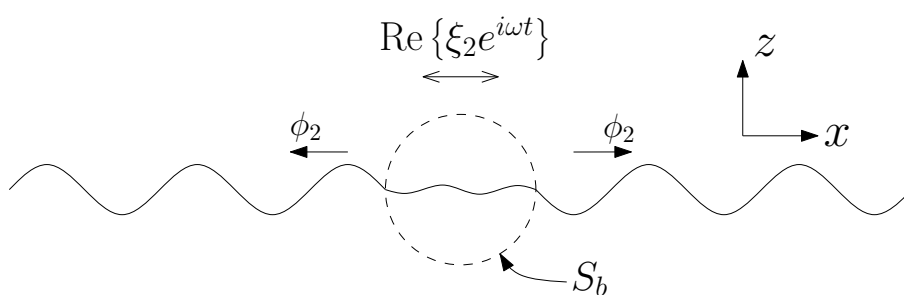
2.2.1 Radasjonsproblemet

Radasjonsproblemet er gitt ved at legemet er satt under tvugne svingninger i seks ulike moder, eller retninger. Bevegelesmodene er forklart i figur 2.1. Radasjons-

KAPITTEL 2. MATEMATISK FORMULERING



Figur 2.1: Skisse av de seks bevegelsesmodene jag, hiv, svai, rull, gir og stamp.



Figur 2.2: Bølger radierer ut mot sidene p.g.a. tvungen svai (mode 2). Origo ligger i sentrum av geometrien, ellers på fri overflate i ro.

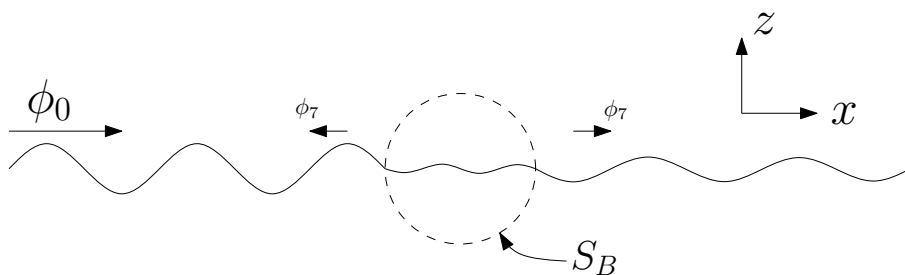
potensialet skriver vi

$$\Phi_r = \text{Re} \left\{ i\omega \sum_{j=1}^6 \xi_j \phi_j(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \right\}, \quad (2.4)$$

Navnet kommer av at de tvugne svingningene skaper bølger på overflaten som radierer ut fra legemet. Mode 3 er illustrert i figur 2.2.

2.2.2 Diffraksjonsproblemet

I diffraksjonsproblemet holder vi legemet fast og sender inn en plan progressiv bølge med et kjent potensial ϕ_0 , og angrepsvinkel β , definert som vinkelen mellom den innkommende bølgen og positiv x-akse. Det totale diffraksjonspotensialet skriver



Figur 2.3: Difraksjonsproblemet: Innkommende bølge med hastighetspotensial ϕ_0 treffer en fastholdt geometri og reflekterer et hastighetspotensial ϕ_7 .

vi

$$\Phi_d = \text{Re} \left\{ \frac{igA}{\omega} (\phi_0 + \phi_7) e^{i\omega t} \right\}, \quad (2.5)$$

hvor A er amplituden til den innkommende bølge. Potensialet ϕ_7 beskriver den refleksjonen som er grunnet legemets tilstedeværelse. Problemet er illustrert i figur 2.3. På uendelig dyp er potensialet for den innkommende bølgen gitt ved

$$\phi_0 = e^{Kz - iK(x \cos \beta + y \sin \beta)},$$

hvor g er tyngdeakselerasjonen og $K = \omega^2/g$ er bølgetallet på uendelig dyp.

2.3 Randbetingelser

Alle potensialene må som nevnt oppfylle Laplaces ligning

$$\nabla^2 \phi_j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 7$$

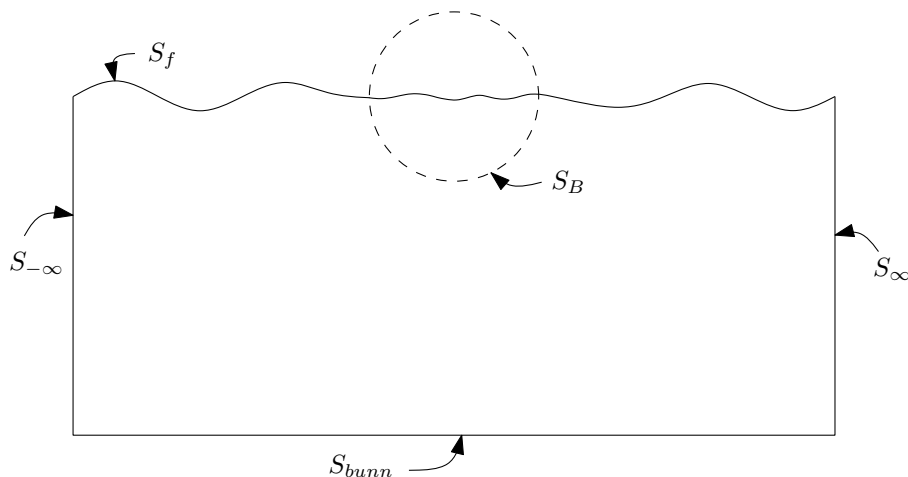
På den frie overflaten trenger vi en kinematisk og en dynamisk randbetingelse. Vi må kreve at normalhastighetene til fluidet og randen er like, altså er den kinematiske betingelsen er gitt ved

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (2.6)$$

hvor η er overflatehevingen. I tillegg har vi at trykket skal være atmosfærisk ved overflaten, som gir oss den dynamiske betingelsen på formen

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

KAPITTEL 2. MATEMATISK FORMULERING



Figur 2.4: Integrasjonsflater

Deriverer man denne betingelsen med hensyn på t , og setter inn den kinematiske betingelsen (2.6), så ender man opp med én felles randbetingelse for overflaten

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \text{på } y = 0,$$

hvor ligningen også har blitt linearisert. Ved innsetting av Ligning (2.4) og (2.5) i ligningen over får vi

$$-\frac{\omega^2}{g} \phi_j + \frac{\partial \phi_j}{\partial z} = 0, \quad \text{på } y = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 7,$$

hvor tidsavhengigheten er tatt ut. På endelig dyp krever vi at normalhastigheten på bunnen skal være 0, og den tilsvarende betingelsen for uendelig dyp er

$$\phi_j \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad j = 1, \dots, 7.$$

For å gjøre randverdiproblemet entydig, trenger vi en ekstra randbetingelse ved uendelig. Denne betingelsen kalles radiasjonsbetingelsen og sier at bølgene assosiert med potensialene ϕ_j , $j = 1, 2, \dots, 7$ skal radiere ut fra legemet. Vi har følgende betingelser i 2D og 3D

$$\begin{aligned} \phi_j &\propto e^{\pm iKx}, \quad \text{når } x \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, \dots, 7 \\ \phi_j &\propto R^{-\frac{1}{2}} e^{-iKR}, \quad \text{når } R \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, \dots, 7, \end{aligned} \quad (2.7)$$

hvor $R = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$.

KAPITTEL 2. MATEMATISK FORMULERING

På geometriens overflate har vi i det solide tilfellet at fluidets hastighet skal være lik hastigheten til randen. Ved introdusering av porøsitet får vi en strømning gjennom legemets overflate, og betingelsen er nå at vi krever kontinuerlig normalhastighet på utsiden og innsiden av legemet. Denne felles betingelsen definerer vi

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = n_j + w_j \quad (2.8)$$

i radiasjon, og

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial n} = w_d$$

i diffraksjon. I den neste seksjonen skal vi se nærmere på den porøse randbetingelsen på geometrien, og hvordan gjennomstrømningen vi har kalt w kan modelleres.

2.4 Lineært trykkfall

Som Chwang [4] skal vi beskrive hastigheten gjennom legemets overflate med et lineært trykkfall. Det ble nevnt innledningsvis at alle potensialer, hastigheter og trykk er antatt å være periodiske i tid, og har en tidsfaktor $e^{i\omega t}$

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x})e^{i\omega t}, \quad P(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x})e^{i\omega t}, \quad W(\mathbf{x}, t) = w(\mathbf{x})e^{i\omega t}$$

Vi relaterer trykket $P(\mathbf{x}, t)$ til hastighetspotensialet Φ ved å linearisere Bernoullis ligning:

$$P = -\rho\Phi_t, \quad (2.9)$$

hvor ρ er massetettheten til fluidet. Som tidligere nevnt bruker vi Taylors [1] antagelse om uendelig mange og uendelig små porer og anvender Darcys lov [2] på de porøse veggene. Denne loven sier at normalhastigheten på randen er proporsjonal med trykkforskjellen mellom utsiden og innsiden. Vi lar superscriptene $+$ og $-$ betegne henholdsvis det ytre og det indre, og vi skriver Taylors antagelse slik:

$$W(\mathbf{x}, t) = \frac{b}{\mu}(P^+ - P^-), \quad (2.10)$$

hvor μ er dynamisk viskositet, og b er en porøsitetsparameter med enhet lengde. Geometrien er solid når $b = 0$ og fullstendig porøs når $b \rightarrow \infty$. Tar vi ut tidsavhengigheten og bruker (2.9) kan Ligning (2.10) omskrives til

$$w(\mathbf{x}) = -i\alpha(\phi^+(\mathbf{x}) - \phi^-(\mathbf{x})), \quad (2.11)$$

KAPITTEL 2. MATEMATISK FORMULERING

hvor $\alpha = \rho\omega b/\mu$. Det skal også nevnes at lineær teori ikke dekker separasjonseffekter som kan oppstå ved randen ved stor gjennomstrømning, så i analysen skal vi kun betrakte porøse vegger med veldig fine porer.

2.5 Porøsitetsparameteren α

Parameteren α er avhengig av frekvensen, så det å øke frekvensen er ekvivalent med å øke porøsitetsvariabelen b . Som Chwang definerer vi også en dimensjonsløs porøsitetsparameter G , brukt i visualiseringsøyemed ved å dele α på bølgetallet K . Det vi her har kalt α skriver Zhao [3] som σ , og de definerer den dimensjonsløse parameteren som $2\pi G$. Samme gruppe gjorde også et eksperimentelt studie [10] på en porøs sylinder med ikke-permeabel bunn på grunt vann, hvor de har lagd en empirisk formel for b

$$b = \frac{(17.8/\epsilon + 143.2)\tau^2}{1 + 1.06\tau},$$

hvor $\epsilon = k_0 A$ er bølgesteilleheten. De testet her fire sylindere med ulike åpningsrater og fant verdier for den dimensjonsløse porøsitetsparameteren som passet best. For en bølgesteillehet på 0.05 får de følgende verdier for b , 9.0, 19.5, 41.0, 85.0 for τ lik henholdsvis 0.140, 0.226, 0.326 og 0.509. Legemet er solid når $\tau = 0$ og helt åpen når $\tau = 1$. Siden vi jobber med en annen geometri er ikke disse verdiene direkte overførbare, men kan gi en pekepinn på hvor porøs strukturen vår er.

2.6 Kobling av det indre og ytre potensialet

På grunn av geometriens porøsitet er vi nødt til å finne hastighetspotensialet på både utsiden og innsiden, altså må vi sette opp integralligningen for begge to. De neste seksjonene vil vise hvordan vi har koblet disse ligningene ved hjelp av randbetingelsen beskrevet i de forrige seksjonene.

2.6.1 Radiasjon

For å ta hensyn til porøsiteten, ønsker vi som sagt koble det indre og ytre potensialet gjennom randbetingelsen (2.11). Vi bruker nå Ligning (2.3) og setter opp

KAPITTEL 2. MATEMATISK FORMULERING

uttrykkene for det indre og ytre problemet

$$2\pi\phi_j^- + \iint_{S_B} \phi_j^- \frac{\partial G}{\partial n^-} dS = \iint_{S_B} G \frac{\partial \phi_j^-}{\partial n^-} dS \quad (2.12)$$

$$2\pi\phi_j^+ + \iint_{S_B} \phi_j^+ \frac{\partial G}{\partial n^+} dS = \iint_{S_B} G \frac{\partial \phi_j^+}{\partial n^+} dS . \quad (2.13)$$

Vi definerer $\mathbf{n} = \mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^-$, slik at Ligning (2.12) nå kan skrives på formen

$$-2\pi\phi_j^- + \iint_{S_B} \phi_j^- \frac{\partial G}{\partial n} dS = \iint_{S_B} G \frac{\partial \phi_j^-}{\partial n} dS . \quad (2.14)$$

Ved å subtrahere og addere ligningene (2.13) og (2.14) vil man ende opp med et ligningsystem som vi kan bruke for å bestemme de to potensialene. Vi starter med å trekke (2.14) fra (2.13):

$$2\pi(\phi_j^+ + \phi_j^-) + \iint_{S_B} (\phi_j^+ - \phi_j^-) \frac{\partial G}{\partial n} dS = \iint_{S_B} G \underbrace{\left(\frac{\partial \phi_j^+}{\partial n} - \frac{\partial \phi_j^-}{\partial n} \right)}_{=0} dS \quad (2.15)$$

hvor høyresiden er null grunnet kontinuerlig normalhastigheten gjennom skallet. Addisjon av Ligning (2.13) og (2.14) gir

$$2\pi(\phi_j^+ - \phi_j^-) + \iint_{S_B} (\phi_j^+ + \phi_j^-) \frac{\partial G}{\partial n} dS = \iint_{S_B} G \left(\frac{\partial \phi_j^+}{\partial n} + \frac{\partial \phi_j^-}{\partial n} \right) dS ,$$

hvor vi på høyresiden bruker randbetingelsen (2.8)

$$2\pi(\phi_j^+ - \phi_j^-) + \iint_{S_B} (\phi_j^+ + \phi_j^-) \frac{\partial G}{\partial n} dS = 2 \iint_{S_B} (n_j + w_j) dS \quad (2.16)$$

Hvis vi her bruker koblingen (2.11), flytter alle ukjente over på venstre side og innfører hjelpevariablene $\Phi_j = \phi_j^+ + \phi_j^-$ og $\Psi_j = \phi_j^+ - \phi_j^-$, kan Ligning (2.15) og (2.16) skrives

$$2\pi\Phi_j + \iint_{S_B} \Psi_j \frac{\partial G}{\partial n} dS = 0 \quad (2.17)$$

$$2\pi\Psi_j + \iint_{S_B} \Phi_j \frac{\partial G}{\partial n} dS + 2i\alpha \iint_{S_B} \Psi_j G dS = 2 \iint_{S_B} n_j G dS , \quad (2.18)$$

hvor $\alpha = \rho\omega \frac{b}{\mu}$.

2.6.2 Diffraksjon

Vi trenger et ligningssett tilsvarende Ligning (2.17) og (2.18) for diffraksjon. Vi starter med å se på ligningen for det totale ytre diffraksjonspotensialet, altså $\phi_d^+ = \phi_0 + \phi_7^+$

$$-2\pi\phi_d^+ = \iint_{S_b+S_\infty} \phi_d^+ G_{n_\xi} - G\phi_{d,n_\xi}^+ dS_\xi ,$$

hvor vi må ta med integralet over S_∞ , da dette ikke forsvinner siden ϕ_0 ikke tilfredsstiller radiasjonsbetingelsen. Skriver man ut denne ligningen får man

$$-2\pi\phi_d^+ = \iint_{S_b} \phi_d^+ \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_d^+}{\partial n} dS_\xi + \iint_{S_\infty} \phi_0 \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_0}{\partial n} dS_\xi .$$

Videre setter vi inn for randbetingelsen på geometrien, og observerer at det bakerste integralet er integralligningen for ϕ_0 i et fluid omsluttet av S_∞ uten tilstedeværelsen av et legeme. Totalt ender vi opp med

$$2\pi\phi_d^+ + \iint_{S_b} \phi_d^+ \frac{\partial G}{\partial n} dS_\xi + i\alpha \iint_{S_b} (\phi_d^+ - \phi_d^-) G dS_\xi = 4\pi\phi_0 .$$

For det indre diffraksjonspotensialet skal vi kun integrere over geometrien, og justert ved å bruke ytre normalvektor skriver vi integralligningen slik

$$-2\pi\phi_d^- + \iint_{S_b} \phi_d^- \frac{\partial G}{\partial n} dS_\xi + i\alpha \iint_{S_b} (\phi_d^+ - \phi_d^-) G dS_\xi = 0 .$$

Som tidligere skal vi ta sum og differanse mellom disse to ligningene, og vi ender da opp med følgende ligningssett

$$\begin{aligned} 2\pi\Psi_d + \iint_{S_b} \Phi_d \frac{\partial G}{\partial n} dS_\xi + i\alpha \iint_{S_b} \Psi_d G dS_\xi &= 4\pi\phi_0 , \\ 2\pi\Phi_d + \iint_{S_b} \Psi_d \frac{\partial G}{\partial n} dS_\xi &= 4\pi\phi_0 , \end{aligned}$$

hvor $\Phi_d = \phi_d^+ + \phi_d^-$ og $\Psi_d = \phi_d^+ - \phi_d^-$. Vi observerer at venstresiden fortsatt har samme form som i radiasjon, men høyresidene er forskjellige. Alternativt kan man sette opp og løse ligningene for det reflekterte potensialet alene. Denne utledningen er vist i Tillegg F.

2.7 Diskretisering

Dette kapittelet går kort inn på hvilken numerisk metode som er brukt og hvordan ligningene er diskretisert. Vi nøyer oss med å vise diskretiseringen av radiasjonsproblemet, da alle ligningssettene er så like at noe mer ville blitt veldig repetitivt. Til diskretiseringen skal vi benytte panelmetoden, også kalt *Boundary Integral Equation Method (BIEM)*.

2.7.1 Panelmetoden

Panelmetoden er en numerisk metode for å løse integralligninger. Metoden dreier seg om å diskretisere overflaten til geometrien i paneler, hvor det ukjente potensialet i ligningen regnes konstant over ett panel. For oss betyr det at vi trekker potensialene Φ og Ψ utenfor integralet og summerer over antall paneler. Nettopp dette er en av styrkene til metoden, det at man kun trenger å diskretisere overflaten til geometrien vi jobber med. Ligningssettet (2.17)-(2.18) kan diskretiseres på følgende måte

$$2\pi\Phi_i + \sum_{j=1}^N \Psi_j \iint_{S_j} \frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}_i) d\xi = 0$$

$$2\pi\Psi_i + \sum_{j=1}^N \Phi_j \iint_{S_j} \frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}_i) d\xi + 2i\alpha \sum_{j=1}^N \Psi_j \iint_{S_j} G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}_i) d\xi = 2 \sum_{j=1}^N n_j \iint_{S_j} G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}_i) d\xi \quad (2.19)$$

Her er i indeksen til det panelet vi står i, j er indeksen til panelet det integreres over og må ikke forveksles med modenummeret.

2.7.2 Matriseligningen

For å løse dette numerisk slår vi sammen ligningene i (2.19) og løser følgende matrisesystem:

$$\begin{pmatrix} 2\pi & 0 & \cdots & 0 & 0 & \theta_2^1 & \cdots & \theta_N^1 \\ 0 & 2\pi & & \vdots & \theta_1^2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 2\pi & \theta_N^1 & \cdots & & 0 \\ 0 & \theta_1^2 & \cdots & \theta_1^N & 2\pi + \gamma_1^1 & \gamma_1^2 & \cdots & \gamma_1^N \\ \theta_2^1 & 0 & & \vdots & \gamma_2^1 & 2\pi + \gamma_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ \theta_N^1 & \cdots & & 0 & \gamma_N^1 & \cdots & & 2\pi + \gamma_N^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_N \\ \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_1^j \\ \vdots \\ \beta_N^j \end{pmatrix},$$

hvor γ , β og θ er gitt ved

$$\begin{aligned} \gamma_i^j &= 2i\alpha \iint_{S_j} G(\xi, \mathbf{x}_i) d\xi, \\ \beta_i^j &= 2 \sum_{j=1}^N n_j \iint_{S_j} G(\xi, \mathbf{x}_i) d\xi, \\ \theta_i^j &= \iint_{S_j} \frac{\partial}{\partial n_\xi} G(\xi, \mathbf{x}_i) d\xi. \end{aligned}$$

I de selvimplementerte programmene i 2D og 3D er panelene projisert ned i henholdsvis enhetslinjen og enhetsplanet og integrert over med n-punkts gaussisk kvadratur, se Dokken [8] for detaljer. I WAMITTM som vi skal omtale senere, er θ_i^j integrert eksakt som fluksen fra en kilde som treffer det panelet det integreres over, se Tillegg D for hvordan dette er gjort i 2D. Til slutt finner vi ϕ_j^+ og ϕ_j^- ved

$$\phi_j^+ = \frac{1}{2}(\Phi_j + \Psi_j), \quad \phi_j^- = \frac{1}{2}(\Phi_j - \Psi_j).$$

Venstrehåndsmatrisen for det originale solide problemet er veldig godt kondisjonert. Ved innføring av det indre problemet vil man få en matrise som har vesentlig dårligere kondisjonstall. Dette har bydd på noen rariteter og usikkerhet underveis, men det har til syvende og sist heldigvis ikke skapt noen problemer i denne oppgaven.

2.8 Implementering

Som nevnt innledningsvis startet vi med å modellere en sirkel i 2D og kule i 3D i et uendelig fluid. Her programmerte vi en løser fra bunnen av for radiasjonsproblemet. Dette ble gjort som en innledning til overflateproblemet og som en sjekk for at de nye ligningene var riktige. Sammenligninger er gjort mot Molin [6] og An&Faltinsen [7]. I overflateproblemet har vi benyttet WAMITTM, hvor vi først satte en kule langt nede under overflaten, hvor effektene av bølger er neglisjerbare, for å kunne sammenligne resultater fra vårt eget program.

2.8.1 Egen solver

Vi har implementert matricesystemet i fortran90 og har brukt Python og f2py som en wrapper for integrasjonsrutinene.

Vi har resultater på addert masse og dempning for kvadrat og sirkel i 2D, og kube og kule i 3D. Diskretisering av geometriene i 2D er rett frem, så vel som kube i 3D, men kule i 3D er noe mer omstendelig. For å lage kule parametriserte vi punktene på kubens overflate til et kuleskall, se Tillegg E.2 for detaljer.

2.8.2 WAMITTM

Videre i overflateproblemet skal vi benytte programvaren WAMITTM versjon 5.3D. WAMITTM er en radiasjon- og diffraksjonsløser som benytter panelmetoden (BIEM) i sin lineære analyse av overflatebølgers interaksjon med offshorekonstruksjoner. Programvaren er utviklet ved Massachusetts Institute of Technology, department of ocean engineering. Versjon 5.3D er en utgave av versjon 5.3 som i 1998 ble modifisert av UiO til å inkludere wave-drift damping / slow motion problem, altså med strøm. WAMITTM takler i utgangspunktet ikke porøse geometrier, så en stor del av arbeidet har vært bli fortrolig med kildekoden og hvordan modifisere denne på mest mulig effektiv måte. Se Tillegg E for mer informasjon om denne prosessen og litt om hvordan vi har bygget opp geometriene.

I de kommende kapitlene vil ulike hydrodynamiske identiteter og relasjoner gjennomgås. Strukturen er lagt opp slik at hvert kapittel starter med teori og utledning, for deretter og følges opp med tilhørende resultater.

Kapittel 3

Beregning av addert masse og dempning

I dette kapitlet skal vi gå kort inn på hva addert masse og dempning er og hvordan vi finner disse. I slutten av kapitlet presenteres resultatene vi har fått. Addert masse er en betegnelse på tregheten som tilføres systemet når et legeme beveger seg gjennom et omkringliggende fluid. Væskpartiklene må forflyttes for å gi plass til det bevegende legemet. Addert masse er av den grunn en størrelse proporsjonal med akselerasjonen. Dempningen er et resultat av at legemets bevegelser danner bølger på den frie overflaten, og er proporsjonal med hastigheten til legemet. I tilfellet hvor legemet er porøst, får vi en ekstra dempning i systemet, selv i fravær av fri overflate. Vi finner disse koeffisientene ved standard trykkintegrering over legemets overflate. Disse koeffisientene er kun knyttet til et legeme i bevegelse, så vi skal her kun benytte det radierende potensialet. Vi ender dermed opp med

$$a_{ij} - \frac{i}{\omega} b_{ij} = \rho \iint_{S_b} (\phi_j^+ - \phi_j^-) n_i \, dS . \quad (3.1)$$

3.1 Symmetri

Setter vi opp Greens ligning (2.2) med $\phi_i^+ + \phi_i^-$ og $\phi_j^+ + \phi_j^-$ som de to potensialene, får vi følgende ligning

$$\iint_{S_b} \left[(\phi_i^+ - \phi_i^-) \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - (\phi_j^+ - \phi_j^-) \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right] dS = 0 ,$$

KAPITTEL 3. BEREGNING AV ADDERT MASSE OG DEMPNING

hvor vi kun sitter igjen med integralet over geometrien når vi har brukt betingelsene for fri overflate, radiasjon og på bunnen. Vi setter nå inn den porøse randbetingelsen

$$\iint_{S_b} (\phi_i^+ - \phi_i^-) (n_j - i\alpha(\phi_j^+ - \phi_j^-)) \, dS = \iint_{S_b} (\phi_j^+ - \phi_j^-) (n_i - i\alpha(\phi_i^+ - \phi_i^-)) \, dS .$$

Her ser vi at leddene hvor porøsitetsparameteren inngår faller bort. Vi får dermed følgende resultat

$$a_{ij} - \frac{i}{\omega} b_{ij} = \iint_{S_b} (\phi_i^+ - \phi_i^-) n_j \, dS = \iint_{S_b} (\phi_j^+ - \phi_j^-) n_i \, dS = a_{ji} - \frac{i}{\omega} b_{ji} ,$$

som viser at symmetrien i addert masse- og dempningskoeffisientene er bevart selv ved introdusering av porøsitet.

3.2 Radierende og porøs dempning

Dempningen er relatert til bølgeamplituden i fjernfeltet og nedenfor kommer en alternativ måte å regne denne på. Vi kan her bruke energiligningen gitt i Seksjon 5.3, hvor den i radiasjon tar følgende form

$$\operatorname{Im} \left\{ \iint_{S_b} (\phi_i^+ - \phi_i^-) \frac{\partial \phi_j^*}{\partial n} \, dS \right\} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} H_i(\theta) H_j^*(\theta) \, d\theta \right\} ,$$

hvor bidraget fra stasjonær fase faller bort da dette kommer som en følge av diffraksjon, se Seksjon 5.2. Setter vi inn randbetingelsen for $\partial \phi^* / \partial n$ får vi

$$\operatorname{Im} \left\{ \iint_{S_b} (\phi_i^+ - \phi_i^-) [n_j - i\alpha(\phi_j^{+*} - \phi_j^{-*})] \, dS \right\} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} H_i(\theta) H_j^*(\theta) \, d\theta \right\} .$$

Fra Ligning (3.1) kan vi skrive dempningen

$$-\frac{b_{ij}}{\rho\omega} = \operatorname{Im} \left\{ \iint_{S_b} (\phi_j^+ - \phi_j^-) n_i \, dS \right\} .$$

KAPITTEL 3. BEREGNING AV ADDERT MASSE OG DEMPNING

Vi observerer at dette uttrykket kan settes inn i energiligningen over. Vi ender dermed opp med

$$\frac{b_{ij}}{\rho\omega} = \operatorname{Re} \left\{ \iint_{S_b} \alpha(\phi_i^+ - \phi_i^-)(\phi_j^{+*} - \phi_j^{-*}) dS \right\} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} H_i(\theta) H_j^*(\theta) d\theta. \quad (3.2)$$

Det første integralet representerer dempningen som følge av at legemet er porøst, og det siste integralet er den konvensjonelle radierende bølgedempningen. Dette gir oss muligheten til å visualisere hvor mye de ulike leddene bidrar til dempning. Ved å ha to måter å beregne dempningen kan vi lettere verifisere implementasjonen vår.

3.3 Spesialtilfelle: Kule på dypet

Det selvimplementerte radiasjonsproblemet i uendelig fluid og WAMITTM vil her bli sammenlignet. Det ligger en styrke i å ha beregnet det samme på to forskjellige måter, da man har vesentlig mer grunnlag for å vite at ligningene er implementert riktig. I uendelig fluid, eventuelt på stort dyp hvor effekten av bølger er neglisjerbar, er den analytiske løsning for den ytre adderte masse på solid kule lik halvparten av den fortrenkte massen, altså $2\pi\rho a^3/3$ (Newman [12] § 4.134). Den indre adderte massen er ganske enkelt lik $4\pi\rho a^3/3$ som er massen til det fortrenkte volumet. Dette gir oss en sjekk på at det koblede ligningssettet er korrekt implementert i fravær av porøsitet. For alle geometrier, i to og tre dimensjoner i uendelig fluid, skal kurvene til addert masse og dempning skjære hverandre i dempningens toppunkt [6]. Dempningens maksverdi skal være halvparten av den adderte massen for solid legeme. Den adderte massen har et vendepunkt i dette skjæringspunktet. Dette kan brukes som enda en verifisering av implementasjonen.

3.4 Resultater

Legemets symmetri tilsier at resultater for mode 1 og 2 her skal bli like, i tillegg skal mode 4-6 bli 0. Våre beregninger bekrefter dette, så her er bare resultater for mode 1 og 3 presentert. For kule på dypet har vi gode overenstemmende resultater fra beregninger med egen solver og WAMITTM. Disse resultatene har også samme oppførsel som for eksempel [6, 7], se Figur 3.2. Addert masse og dempning er avhengig av frekvensen på bevegelsen også på dypet, dette er illustrert i Figur 3.1.

KAPITTEL 3. BEREGNING AV ADDERT MASSE OG DEMPNING

I Figur 3.3 er det vist hvordan den adderte masse fra WAMITTM og vår egen solver konvergerer, som solid og i ett porøst tilfelle.

Addert masse blir kun evaluert som et integral over legemets overflate, men dempning blir i tillegg også beregnet i fjernfeltet. Vi har god overensstemmelse mellom nær- og fjernfeltsberegningen for dempningen, se Figur 3.10. Siden legemets bevegelse er eneste kilde til energi i systemet, så skal dempningen alltid være positiv (Newman *et al.* [13]), noe som blir bekreftet i Figur 3.10 og 3.12. Vi ser også av Figur 3.6 og 3.7 at addert masse som forventet er størst når solid og avtar med økende porøsitet. Vi ser av Figur 3.10 og 3.12 at dempningen i mode 1 og 3 blir en strengt avtagende funksjon når porøsiteten er høy. Som forventet er også det radierende dempningsbidraget øvre begrenset av den solide dempningen.

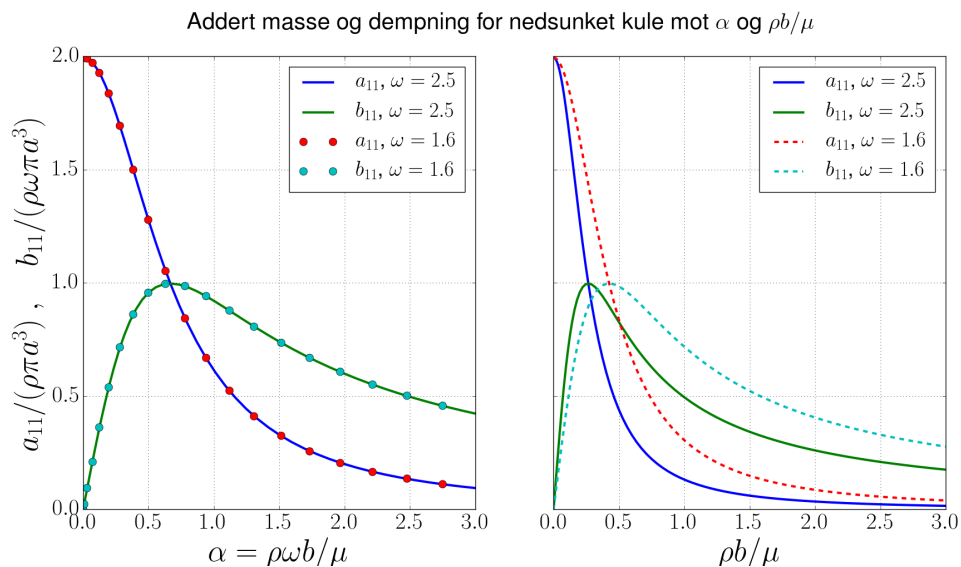
Nå over til den mer iøynefallende effekten vi kan se i Figur 3.5, 3.6, 3.8 og 3.9, nemlig de voldsomme utslagene ved $Ka = \pi/2$ i addert masse og dempning. Dette er i det solide tilfellet karakterisert som en irregulær frekvens, som her inntreffer ved $Ka = \pi/2$, altså bølgelengde $\lambda = 2a$. Det er relativt svak dempning av de indre stående bølgene, spesielt ved høyere frekvenser, hvor de solide veggene hindrer energien i å radiere ut. Dette resulterer i at vi får store effekter på addert masse og dempning på disse frekvensene [13]. I det solide tilfellet er dette en ikke-fysisk oppførsel som følge av at det indre problemet er tatt med. Ved introduksjon av porøsitet blir denne oppførselen fysisk siden vi nå har en direkte kobling mellom det ytre og det indre domenet. I det porøse tilfellet kaller vi denne frekvensen for første sloshingmode. Ved introduksjon av porøsitet vil mer av denne energien, som bygger seg opp rundt disse frekvensene, få lov til å radiere ut til den ytre frie overflaten. Man opplever ikke lenger resonans, men likefullt store utslag når porøsiteten er lav. Vi ser av Figur 3.6 hvordan den resonante verdien har blitt kraftig dempet som følge av porøsiteten.

Det som enda ikke er snakket om er at vi for $Ka > \pi/2$ opplever å få negativ addert masse. Negativ addert masse er omtalt i Newman *et al.* [13], McIver&Evans [14] og Linton&McIver [15]. De to førstnevnte studerer en sylinder i mode 3 (hiv) som er så vidt neddykket under overflaten, se Figur 3.4. Det er tidligere vist at addert masse er proporsjonal med differansen av kinetisk og potensiell energi, en relasjon generalisert av [14] (§ A1.9)

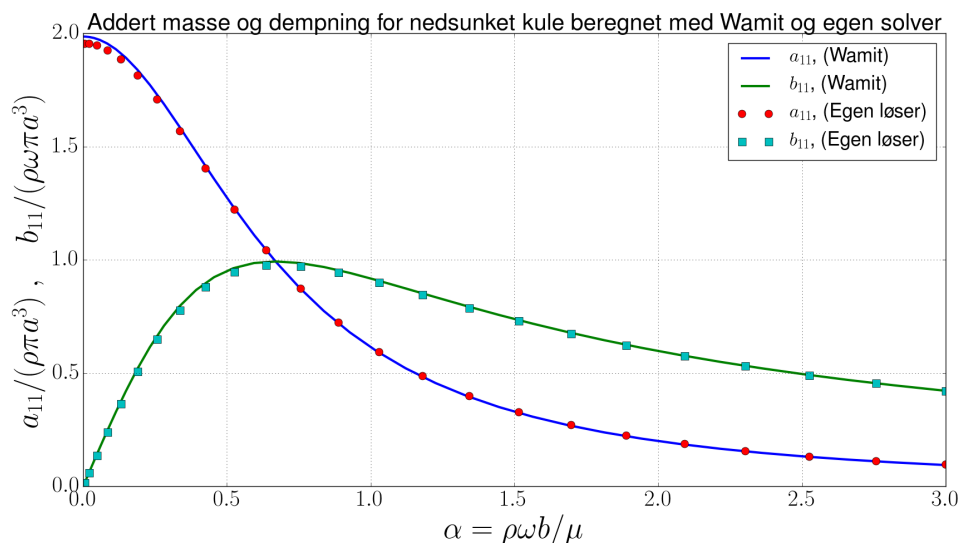
$$T - V = \frac{1}{4} \sum_{i,j} A_{i,j} U_i U_j^* .$$

Her er T og V henholdsvis kinetisk og potensiell energi, A den adderte massematrisen og U_i den komplekse hastighetsamplituden i mode i . Det indre problemet kan oppleve store overflatehevninger ved sloshingmoder, slik at den potensielle energien blir veldig stor og gjør uttrykket over negativt.

KAPITTEL 3. BEREGNING AV ADDERT MASSE OG DEMPNING

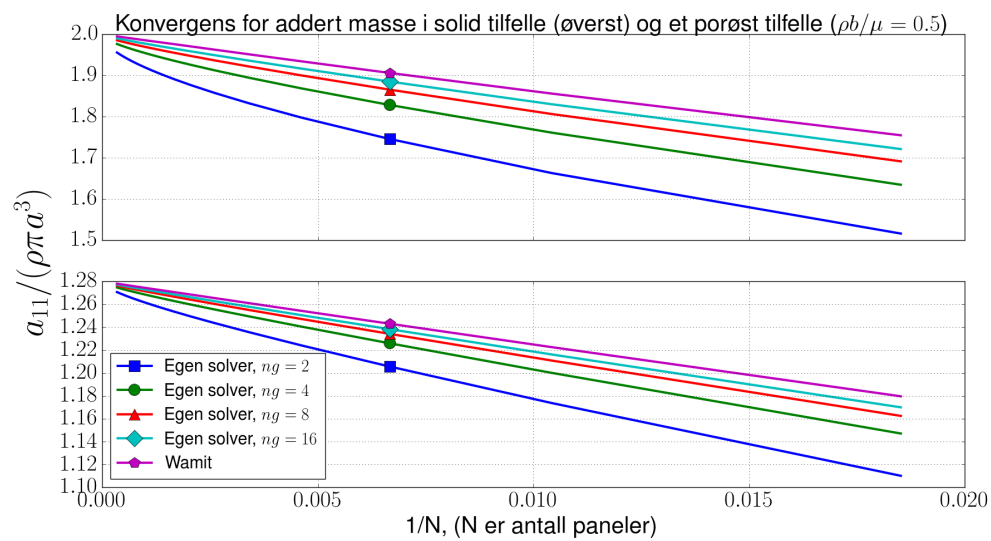


Figur 3.1: Addert masse og dempning for en nedsunket kule beregnet i WAMITTM. Figuren illustrerer frekvensavhengigheten. Kurvene skjærrer hverandre i dempningens toppunkt.



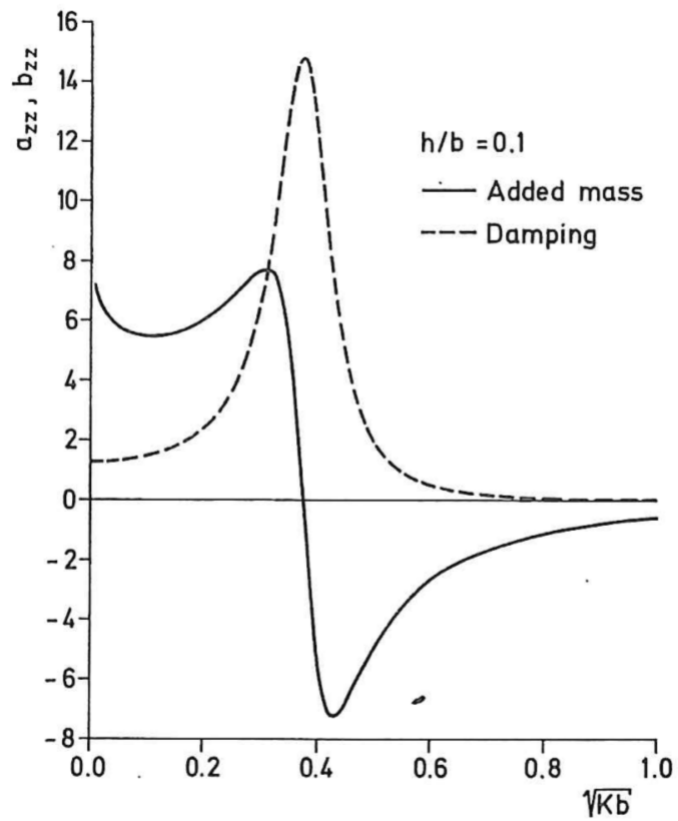
Figur 3.2: Addert masse og dempning for en nedsunket kule beregnet med WAMITTM og egen solver. Antall paneler brukt er for begge løserne 1014 er, og vi har integrert med 8-punkts Gausskvadratur i vår egen løser. Vi har en god overenstemmelse mellom de to.

KAPITTEL 3. BEREGNING AV ADDERT MASSE OG DEMPNING



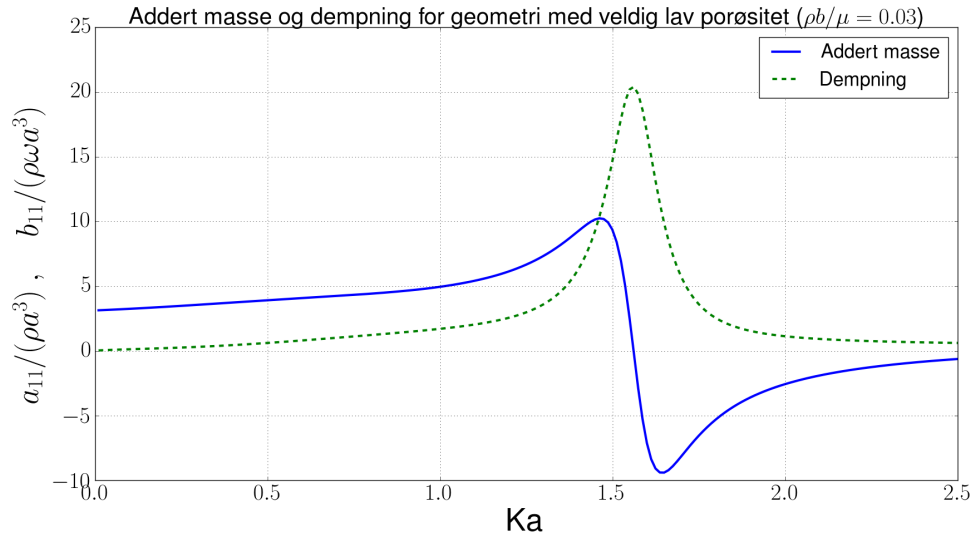
Figur 3.3: Konvergensplott av addert masse i mode 1, regnet med WAMITTM og egen solver med forskjellig antall Gausspunkter brukt i integreringen. Analytisk løsning i det solide tilfellet er 2 med skaleringen som er brukt.

KAPITTEL 3. BEREGNING AV ADDERT MASSE OG DEMPNING

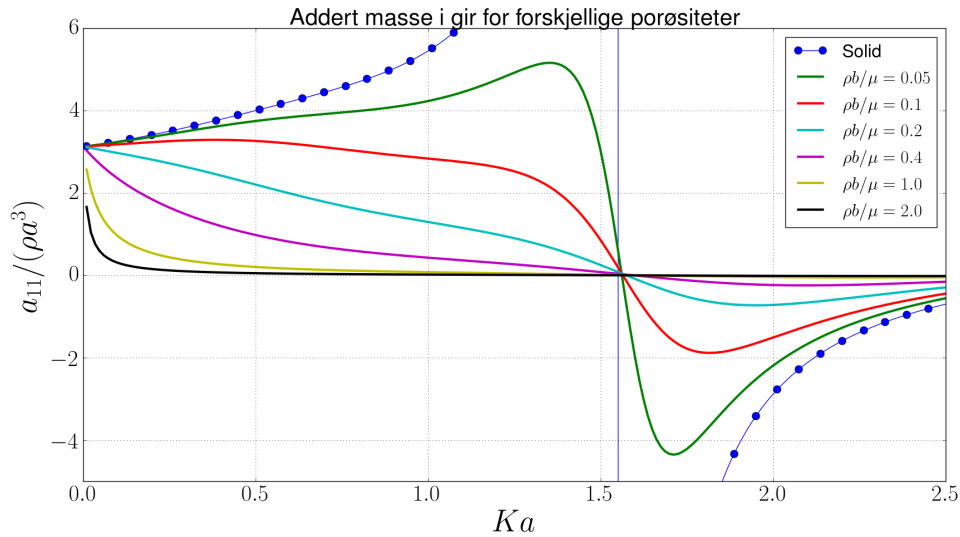


Figur 3.4: Fra Newman *et al.* [13], hvor de ser på en sylinder med radius b som er neddykket en høyde h , hvor $h < 2b$. Figuren viser dimensjonsløse addert masse- og dempningskoeffisienter mot et dimensjonsløst bølgetall i hiv. Her opplever man også en lignende effekt som for vårt flytende legeme, hvor vi ved en gitt frekvens får en resonant oppførsel og negativ addert masse.

KAPITTEL 3. BEREGNING AV ADDERT MASSE OG DEMPNING

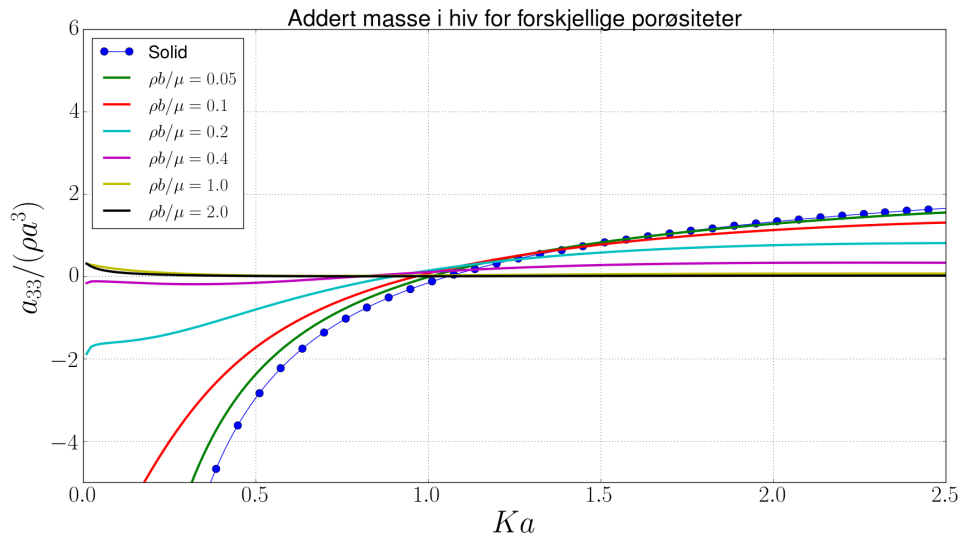


Figur 3.5: Addert masse og dempning for en flytende halvkule med lav porøsitet ($\rho b/\mu = 0.025$) plottet mot dimensjonsløst bølgetall. Når legemet er porøst har vi en kobling av det ytre og indre problemet, og vi ser ikke lenger noen resonant oppførsel, men likefullt en kraftig forhøyet addert masse og dempning ved bølgelengde $\lambda = 2a$ ($Ka = \pi/2$).

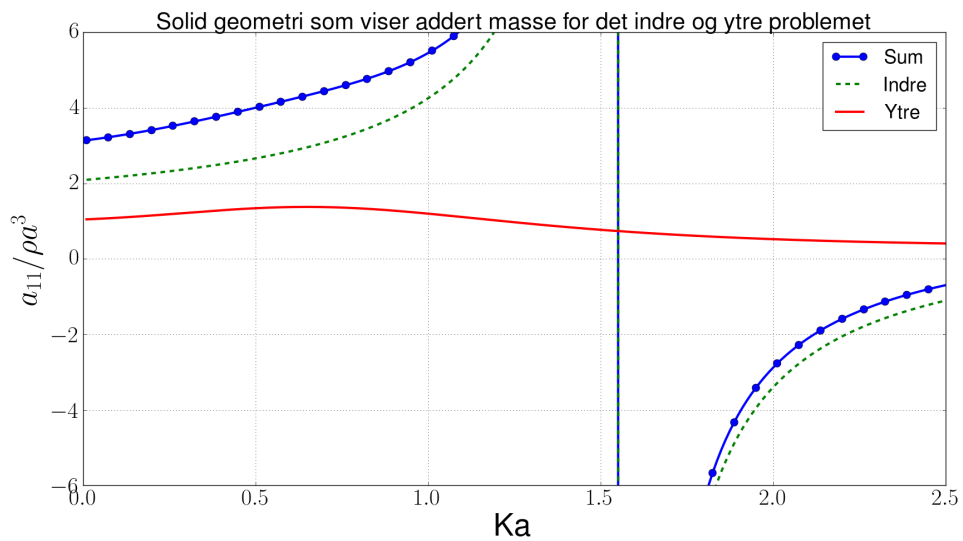


Figur 3.6: Addert masse i gir for et utvalg porøsiteter, plottet mot dimensjonsløst bølgetall. Ved bølgelengde $\lambda = 2a$ ($Ka = \pi/2$) får vi en resonant oppførsel i det indre problemet, hvor vi ser at økende porøsitet demper denne amplituden.

KAPITTEL 3. BEREGNING AV ADDERT MASSE OG DEMPNING

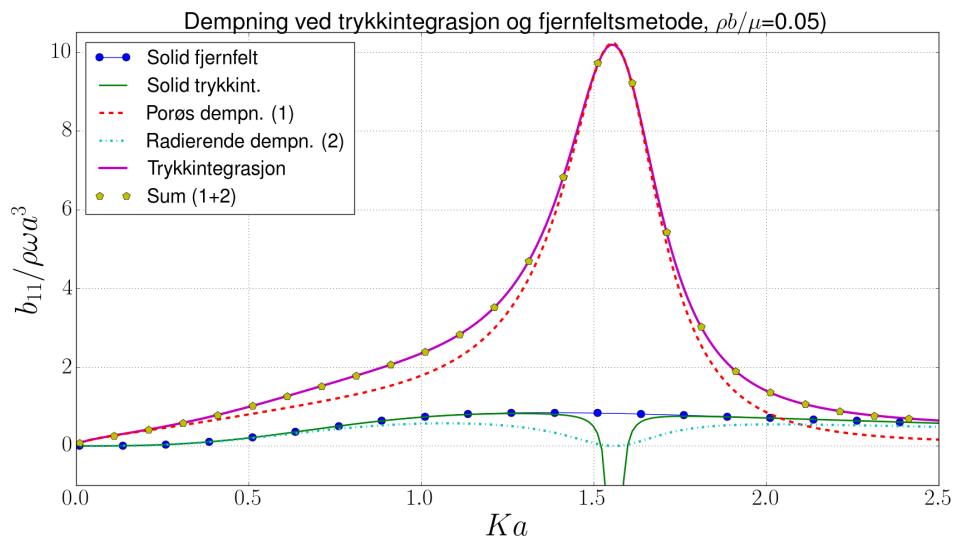


Figur 3.7: Addert masse i hiv for et utvalg porøsiteter, plottet mot dimensjonsløst bølgetall. Når frekvensen går mot 0 går den adderte massen mot uendelig, en oppførsel som blir forsinket og dempet med økende porøsitet.



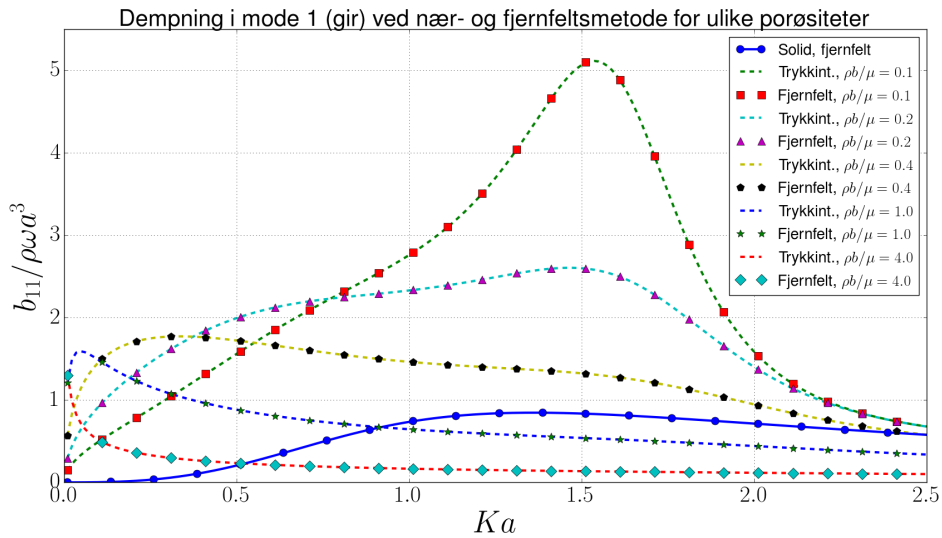
Figur 3.8: Addert masse for det ytre og indre problemet i mode 1 (jag) for det solide tilfellet, plottet mot dimensjonsløst bølgetall. Bildet er med for å illustrere at det er det indre problemet som opplever resonans ved bølgelengde $\lambda = 2a$.

KAPITTEL 3. BEREGNING AV ADDERT MASSE OG DEMPNING

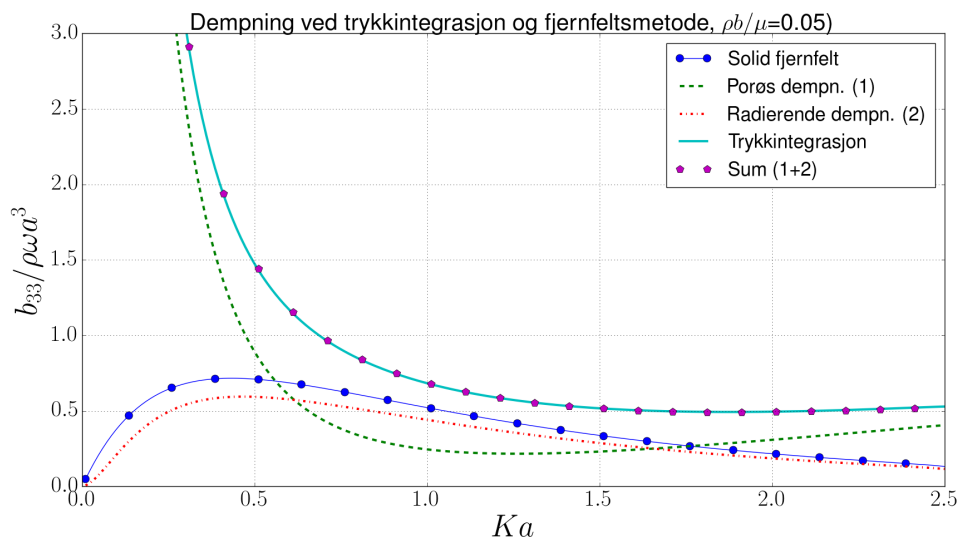


Figur 3.9: Dempning i mode 1 (jag) for halvkule med lav porøsitet, plottet mot dimensjonsløst bølgetall Ka . Bildet viser bidraget fra porøs og radierende dempning, såvel som god overenstemmelse mellom trykkintegrasjon og fjernfeltsmetode. For solid tilfelle ser vi også at fjernfeltsmetoden ikke kjenner resonansen som skjer inne i legemet. Det radierende bidraget til dempningen vil alltid ha solid dempning som øvre begrensning.

KAPITTEL 3. BEREGNING AV ADDERT MASSE OG DEMPNING

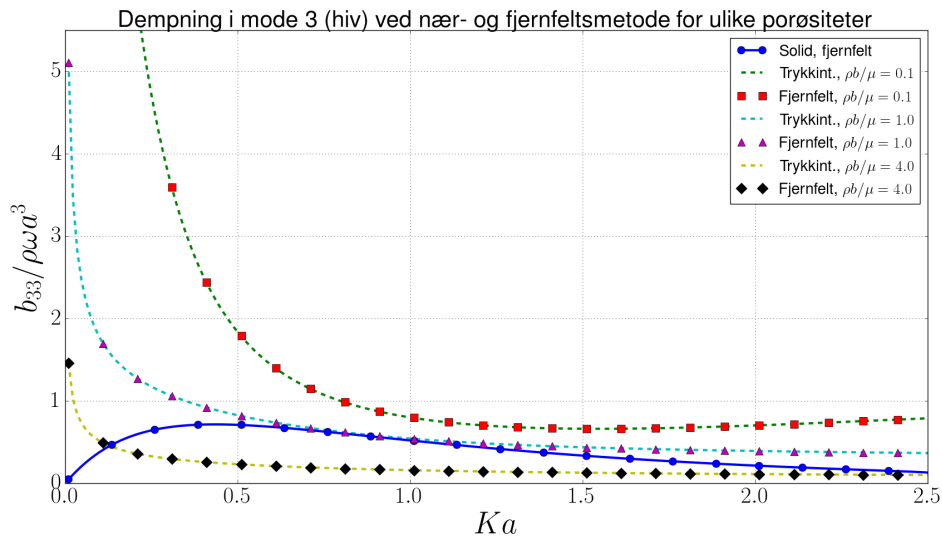


Figur 3.10: Dempning for halvkule i mode 1 (jag) for forskjellige porøsiteter, plottet mot dimensjonsløst bølgetall Ka . Vi ser god overenstemmelse mellom trykkintegrasjon og fjernfeltsmetode.

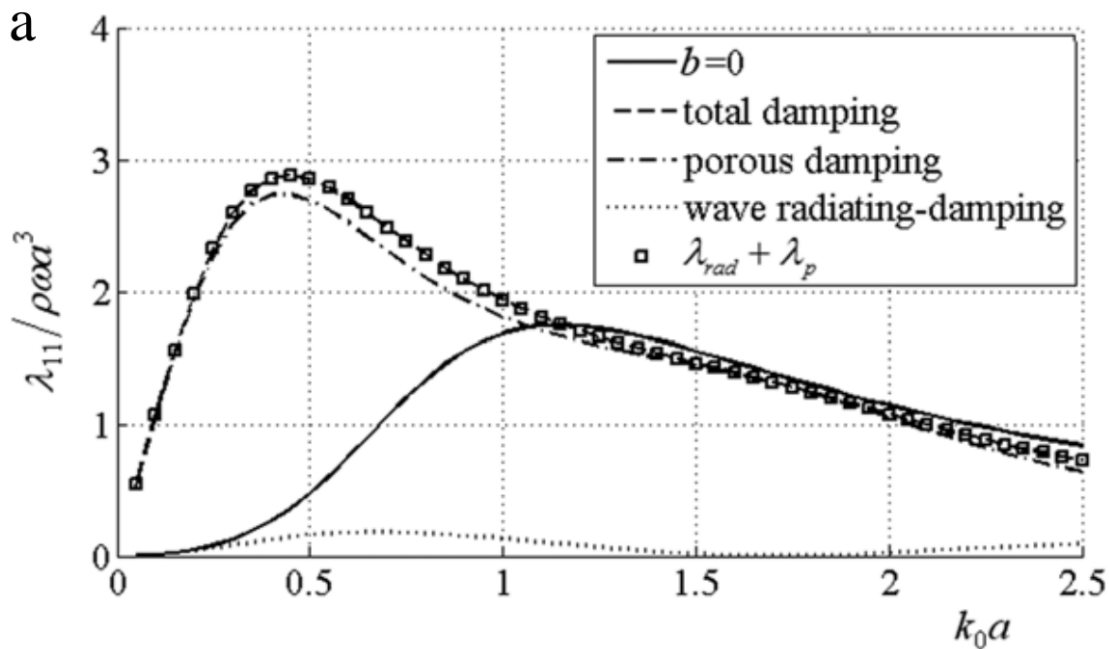


Figur 3.11: Dempning for halvkule i mode 3 (hiv) med lav porøsitet, plottet mot dimensjonsløst bølgetall Ka . Bildet viser bidraget fra porøs og radierende dempning, såvel som god overenstemmelse mellom trykkintegrasjon og fjernfeltsmetode. Det radierende bidraget til dempningen vil alltid ha solid dempning som øvre begrensning.

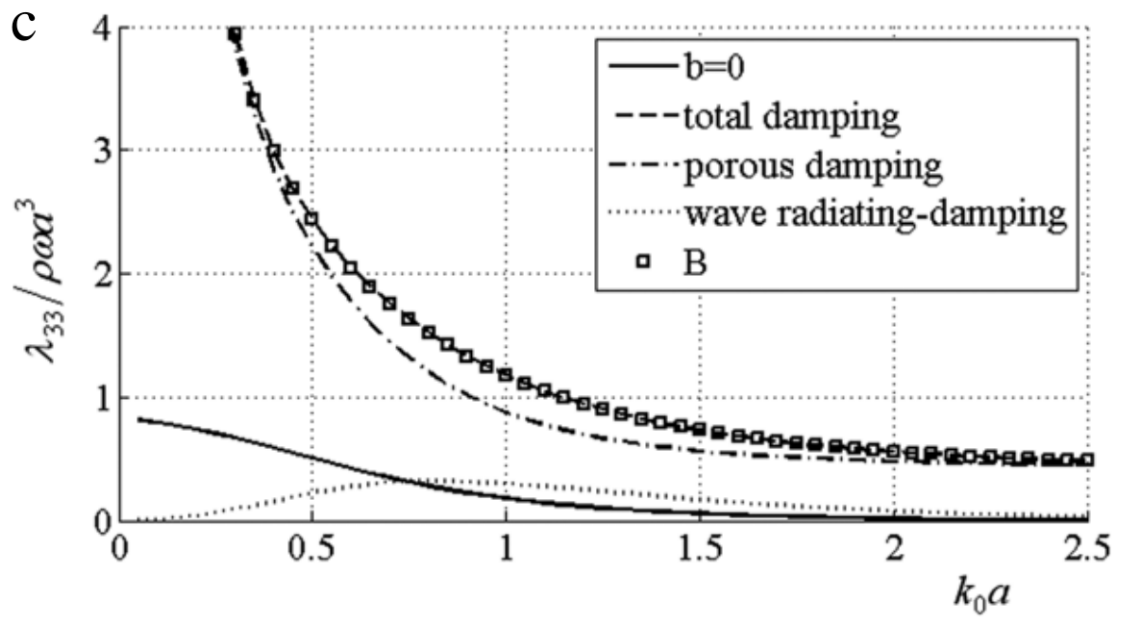
KAPITTEL 3. BEREGNING AV ADDERT MASSE OG DEMPNING



Figur 3.12: Dempning for halvkule i mode 3 (hiv) for forskjellige porøsiteter, plottet mot dimensjonsløst bølgetall Ka . Vi ser god overensstemmelse mellom trykkintegrasjon og fjernfeltsmetode.



Figur 3.13: Fra Zhao *et al.* [3]. Dempning i mode 1 (jag) for porøsitet $b = 8.5$, som tilsvarer ca 14% åpningsrate [10], plottet mot dimensjonsløst bølgetall Ka .



Figur 3.14: Fra Zhao *et al.* [3]. Dempning i mode 1 (jag) for porøsitet $b = 8.5$, som tilsvarer ca 14% åpningsrate [10], plottet mot dimensjonsløst bølgetall Ka .

KAPITTEL 3. BEREGNING AV ADDERT MASSE OG DEMPNING

Kapittel 4

Eksitasjonskraft og Haskindrelasjonen

Eksitasjonskraften er en førsteordens kraft virkende på legemet som er proporsjonal med den innkommende bølgens amplitude. Eksitasjonskraften kan beregnes ved standard trykkintegrasjon med diffraksjonspotensialet eller ved Haskindrelasjon. Haskindrelasjonen krever kun bruk av potensialene for radiasjon og innkommende bølge. Dette er en veldig god sjekk på om ligningssettene er korrekt implementert. Vi starter her med å sette opp Greens identitet (2.3), men denne gangen setter vi inn potensialene for diffraksjon og radiasjon for henholdsvis ϕ og φ . Etter forenkling sitter vi igjen med integralet over legemet, men også over kontrollflaten i uendelig, siden det totale diffraksjonspotensialet ikke tilfredsstiller radiasjonsbetingelsen. Vi får dermed

$$\iint_{S_b} \left[(\phi_d^+ - \phi_d^-) \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - (\phi_j^+ - \phi_j^-) \frac{\partial \phi_d}{\partial n} \right] dS = - \iint_{S_\infty} \left(\phi_d^+ \frac{\partial \phi_j^+}{\partial n} - \phi_j^+ \frac{\partial \phi_d^+}{\partial n} \right) dS \quad (4.1)$$

hvor randbetingelser på legemet i henholdsvis radiasjon og diffraksjon er

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = \frac{\partial \phi_j^+}{\partial n} = \frac{\partial \phi_j^-}{\partial n} = n_j - w_j, \quad w = i\alpha(\phi_j^+ - \phi_j^-), \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial n} = \frac{\partial \phi_d^+}{\partial n} = \frac{\partial \phi_d^-}{\partial n} = -w_d, \quad w_d = i\alpha(\phi_d^+ - \phi_d^-). \quad (4.3)$$

4.1 Eksitasjonskraft ved trykkintegrasjon

Hvis vi nå kun ser på venstresiden i Ligning (4.1) og setter vi inn randbetingelsene fra Ligning (4.3) og (4.2) finner vi

$$\begin{aligned} \iint_{S_b} \left\{ (\phi_d^+ - \phi_d^-) [n_j - i\alpha(\phi_j^+ - \phi_j^-)] + i\alpha(\phi_j^+ - \phi_j^-)(\phi_d^+ - \phi_d^-) \right\} dS \\ = \iint_{S_b} (\phi_d^+ - \phi_d^-) n_j dS = \frac{X_j}{\rho}, \end{aligned}$$

som er amplituden til eksitasjonskraften gitt ved standard trykkintegrasjon.

4.2 Haskindrelasjonen

Siden både radiasjonspotensialene ϕ_j^+ og diffraksjonpotensialet ϕ_7^+ tilfredsstiller radiasjonsbetingelsen (2.7) forenkler høyresiden i Ligning (4.1) seg til

$$HS = - \iint_{S_\infty} \left(\phi_0 \frac{\partial \phi_j^+}{\partial n} - \phi_j^+ \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \right), \quad (4.4)$$

hvor

$$\begin{aligned} \phi_0 &= e^{Kz - iKR \cos(\theta - \beta)}, \\ \phi_j &\sim H_j(\theta) \sqrt{\frac{K}{2\pi R}} e^{K(z - iR) - i\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Sistnevnte er utledet i Tillegg (B.1) og gjelder altså bare i fjernfeltet. Flaten S_∞ er en sylinder hvor radius $R \rightarrow \infty$, og hvor normalvektor er \mathbf{i}_r . Integralet (4.4) kan dermed skrives

$$HS = - \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \left(\phi_0 \frac{\partial \phi_j^+}{\partial R} - \phi_j^+ \frac{\partial \phi_0}{\partial R} \right) R dz d\theta, \quad (4.5)$$

hvor de deriverte er gitt ved

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0}{\partial R} &= -iK \cos(\theta - \beta) e^{Kz - iKR \cos(\theta - \beta)}, \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial R} &= -H_j(\theta) \sqrt{\frac{K}{2\pi R}} iK e^{K(z - iR) - i\frac{\pi}{4}} + \mathcal{O}(R^{-\frac{3}{2}}). \end{aligned}$$

KAPITTEL 4. EKSITASJONSKRAFT OG HASKINDRELASJONEN

Vi setter disse inn i Ligning (4.5) og får

$$HS = H_j(\theta) \sqrt{\frac{K}{2\pi R}} e^{-i\frac{\pi}{4}} iK \underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{2Kz} dz}_{=1/(2K)} \int_0^{2\pi} e^{-iKR(1+\cos(\theta-\beta))} (1 - \cos(\theta - \beta)) R d\theta .$$

På dette integralet skal vi bruke stasjonær fase, en teknikk som ble brukt og vist omstendelig i Tillegg B.1, så her blir en del av detaljene droppet. Etter litt regning kommer vi dit hvor vi skal substituere. Det brukes samme substitusjon som før, men vi får et tillegg på grunn av cosinusleddet i integranden over

$$HS = H_j(\beta + \pi) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \left(2 - \frac{u^2}{iKR}\right) du .$$

Det er dog ikke noe problem da det forsvinner siden er av orden R^{-1} . Det første leddet i integralet over er det samme som i Tillegg B.1, slik at totalt ender vi opp med Haskindrelasjonen på formen

$$HS = H_j(\beta + \pi) + \mathcal{O}(R^{-1}) ,$$

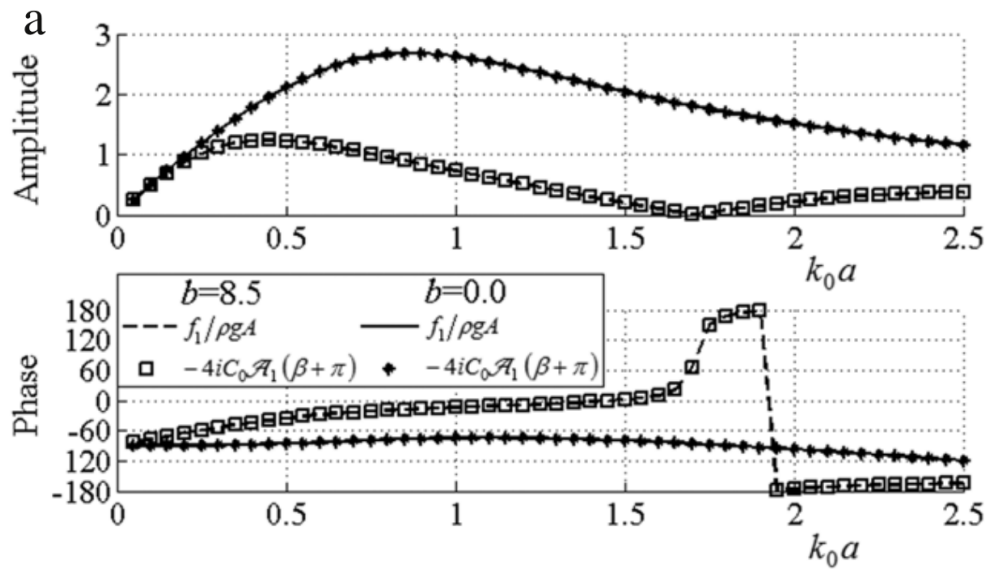
hvor $H(\theta)$ er Kochinfunksjonen definert i tillegg B.2. Relasjonen ser helt lik ut som i det solide tilfellet, men det er her viktig å merke seg at Kochinfunksjonen har en modifisert randbetingelse på grunn av porøsiteten.

4.3 Resultater

Angrepsvinkelen β til de innkommende bølgeene er satt til 0, hvilket betyr at vi kun skal ha utslag i mode 1,3 og 6, da resten vil bli 0 som følge av legemets symmetri. Beregningene våre viser også at dette er tilfelle. Amplituden og fasen til eksitasjonskraften er regnet med både trykkintegrasjon over legemet, så vel som evaluert i fjernfeltet. Figur 4.2 og 4.4 viser god overenstemmelse og bekrefter at beregningene er riktige. For porøse legemer er det som forventet er amplituden på kraften er øvre begrenset av det solide tilfellet. I mode 1 (jag) ser vi store likheter i oppførsel både av amplitude og fase mellom våre beregninger og Zhao *et al.* [3]. I hiv er det også likheter i oppførsel, men der hvor amplituden i vårt tilfelle alltid vil være øvre begrenset av det solide tilfellet, gjelder ikke dette hos [3], da sylindren de ser på har en ikke-permeabel bunn.

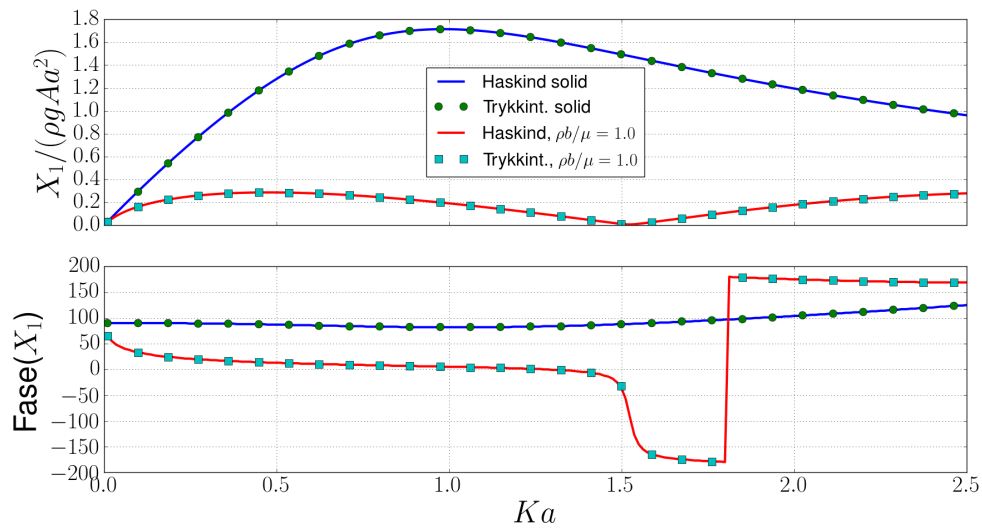
KAPITTEL 4. EKSITASJONSKRAFT OG HASKINDRELASJONEN

Av Figur 4.2 og 4.5 ser vi også her effektene av den indre sloshingmoden omtalt i Seksjon 3.4. Solid geometri vil åpenbart ikke ha denne sloshingmoden, da geometrien er fastholdt i diffraksjonproblemet. Det er når vi introduserer porøsitet, og koblingen mellom det ytre og det indre at vi igjen ser denne effekten opptre. Fra Seksjon 3.4 og Ligning (3.2) har vi en kobling mellom dempningen og amplituden på eksitasjonskraften gjennom det radierende dempningsleddet. På sloshingfrekvensen går den radierende dempningen mot 0, så dermed går også amplituden på eksitasjonskraften mot 0 her. Vi ser også av Figur 4.2 at fasen har et vendepunkt på denne frekvensen.

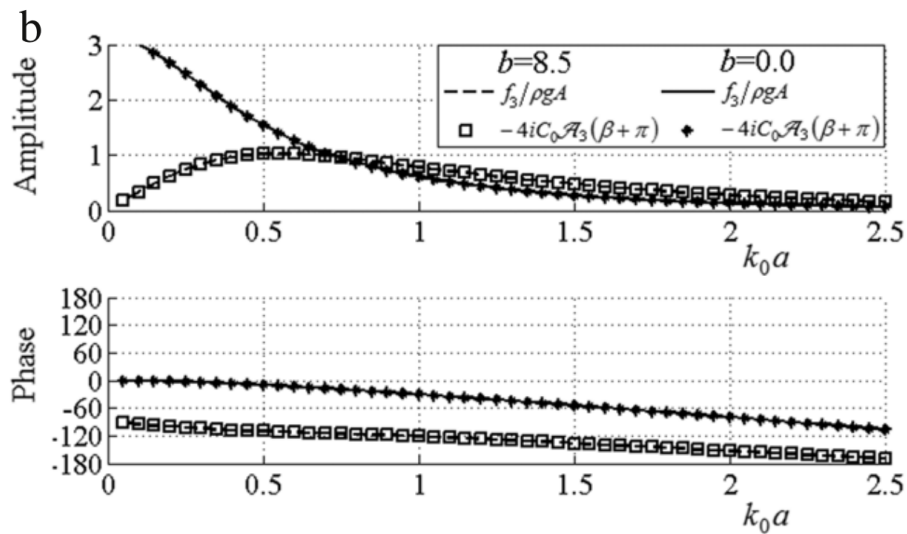


Figur 4.1: Fra Zhao *et al* [3]. Haskind eksiterende krefter i jag (amplitude og fase) når $h/a = 3.0$, $d/a = 1.0$, hvor h er vanddyb, a er radius på sylinder og d er dypgang. $b = 8.5$ og tilsvarer en fysisk åpning på ca. 14% [10]

KAPITTEL 4. EKSITASJONSKRAFT OG HASKINDRELASJONEN

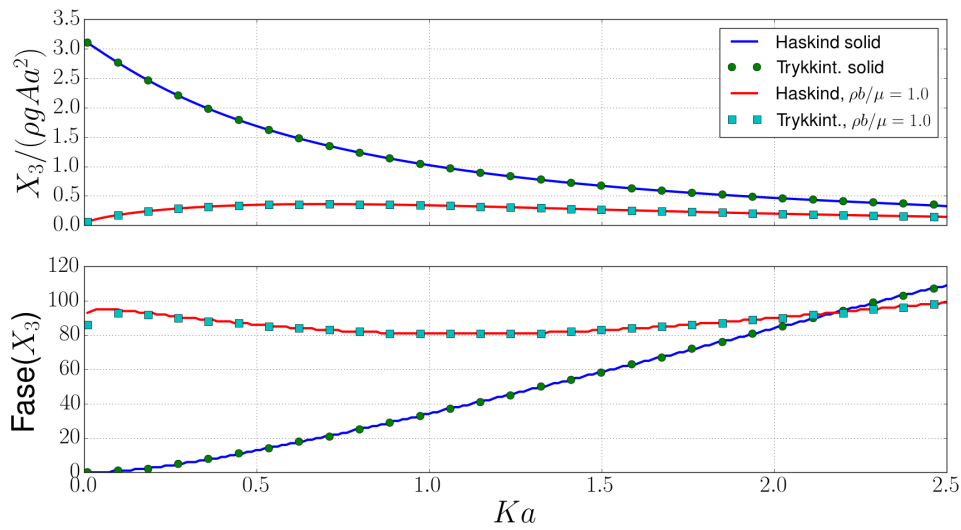


Figur 4.2: Amplitude og fase for Haskind eksiterende krefter i jag for halvkule i overflaten mot dimensjonsløst bølgetall.

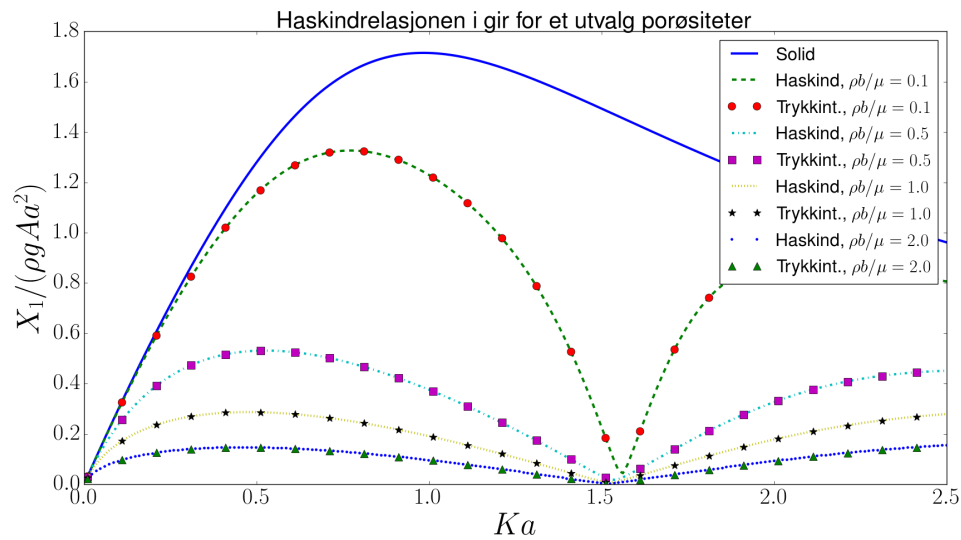


Figur 4.3: Fra Zhao *et al* [3]. Haskind eksiterende krefter i hiv (amplitude og fase) når $h/a = 3.0$, $d/a = 1.0$, hvor h er vanddyb, a er radius på sylinder og d er dypgang. $b = 8.5$ som tilsvarer en fysisk åpning på ca. 14% [10].

KAPITTEL 4. EKSITASJONSKRAFT OG HASKINDRELASJONEN

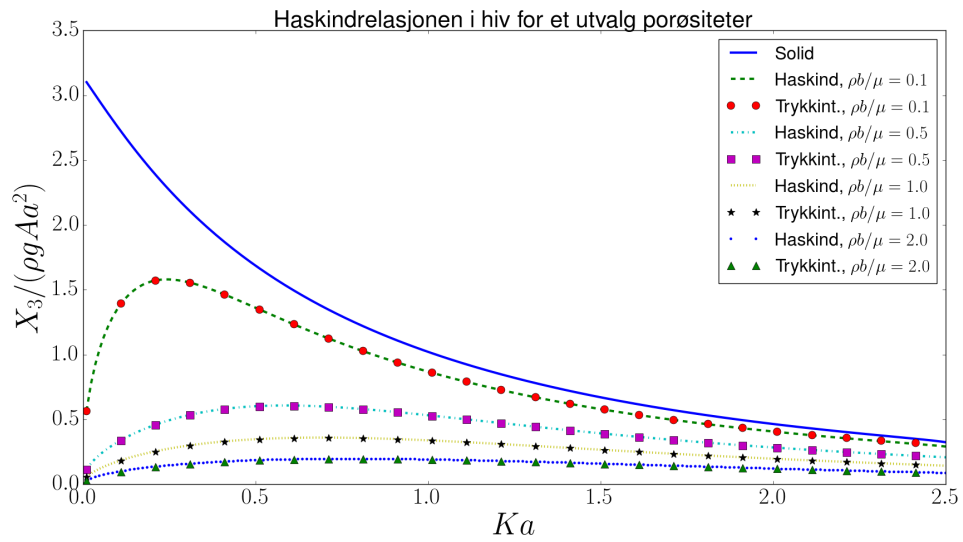


Figur 4.4: Haskind eksiterende krefter i hiv (amplitude og fase) for halvkule i overflaten mot dimensjonsløst bølgetall.



Figur 4.5: Amplitude på eksiterende krefter i jag for en halvkule i overflaten mot dimensjonsløst bølgetall og for et utvalg porøsiteter.

KAPITTEL 4. EKSITASJONSKRAFT OG HASKINDRELASJONEN



Figur 4.6: Amplitude på eksiterende krefter i hiv for en halvkule i overflaten mot dimensjonsløst bølgetall og for et utvalg porøsiteter.

KAPITTEL 4. EKSITASJONSKRAFT OG HASKINDRELASJONEN

Kapittel 5

Energi

Energiligningen relaterer midlere fluks av bølgeenergi ut av en kontrollflate som omslutter legemet, til det midlere arbeidet gjort av trykket over legemets overflate. I tilfellet hvor geometrien er solid og fritt flytende vil det ikke dissiperes energi, altså er trykkets arbeid på legemet er null. Dette medfører at netto energifluks ut av kontrollflaten også må være null. Når legemet er porøst vil det dissiperes energi over legemets overflate. I dette tilfellet vil ikke midlere energifluks ut av kontrollflaten være null, men skal ha samme verdi som dissipert energi over legemet. Her har vi en fin sjekk for å se om metodene våre er robuste. I denne oppgaven ser vi dog ikke på en fritt flytende geometri, men enten tvungen bevegelse (radiasjonsproblemet) eller fastholdt geometri under påvirkning av innkommende bølge (diffraksjonsproblemet). I dette kapittelet utledes bare energiligningen for diffraksjon i detalj, siden utledningen i radiasjon er tilsvarende.

5.1 Energidissipasjon

Vi starter med å betrakte diffraksjonsproblemet alene. Trykkets arbeid per tid gjort på legemet kan uttrykkes ved følgende integral

$$W_{b,d} = \iint_{S_b} \overline{\Delta P_d \frac{\partial \Phi_d^t}{\partial n}} dS, \quad (5.1)$$

hvor det totale diffraksjonspotensialet er gitt av Ligning (2.5). Leddene i integranden skriver vi da

$$\Delta P = -\rho \frac{d}{dt} (\Phi_d^+ - \Phi_d^-) = \rho g A \operatorname{Re} \{ e^{i\omega t} (\phi_d^+ - \phi_d^-) \},$$

KAPITTEL 5. ENERGI

og

$$\frac{\partial \Phi_d}{\partial n} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{igA}{\omega} e^{i\omega t} \frac{\partial \phi_d}{\partial n} \right\} = -\frac{gA}{\omega} \operatorname{Im} \left\{ e^{i\omega t} \frac{\partial \phi_d}{\partial n} \right\}.$$

Totalt blir integranden

$$\begin{aligned} \overline{\Delta P_d \frac{\partial \Phi_d}{\partial n}}^t &= -\frac{\rho g^2 A^2}{\omega} \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{(\phi_d^+ - \phi_d^-) e^{i\omega t}}_A \right\} \operatorname{Im} \left\{ \underbrace{\frac{\partial \phi_d}{\partial n} e^{i\omega t}}_B \right\} \\ &= -\frac{\rho g^2 A^2}{\omega} \left(\frac{A + A^*}{2} \right) \left(\frac{B - B^*}{2i} \right)^t, \end{aligned}$$

hvor leddene AB og A^*B^* forsvinner under tidsmidlingen, og vi får

$$\overline{\Delta P \frac{\partial \Phi_d}{\partial n}}^t = \frac{\rho g^2 A^2}{4i\omega} (AB^* - A^*B) = \frac{\rho g^2 A^2}{2\omega} \operatorname{Im} \{ AB^* \} = \frac{\rho g^2 A^2}{2\omega} \operatorname{Im} \left\{ (\phi_d^+ - \phi_d^-) \frac{\partial \phi_d^*}{\partial n} \right\}.$$

Setter vi dette inn i Ligning (5.1) ender vi opp med

$$\frac{W_{b,d}}{2Ec_g} = \operatorname{Im} \left\{ \iint_{S_b} (\phi_d^+ - \phi_d^-) \frac{\partial \phi_d^*}{\partial n} dS \right\}.$$

Arbeidet er skalert med $E = \rho g A^2 / 2$ som er midlere energitetthet i de innkommende bølgene, og gruppehastigheten c_g gitt ved $\omega / (2K)$.

5.2 Energifluks i uendelig

Vi fortsetter her med energifluksen i uendelig for diffraksjonsproblemet. Integralet for midlere energifluks tar samme form som for energidissipasjonen regnet i Seksjon 5.1. Her skal integralet tas over en kontrollflate i fjernfeltet, representert som en sylinder hvor radius går mot uendelig,

$$\frac{W_{\infty,d}}{2Ec_g} = \operatorname{Im} \iint_{S_\infty} \phi_d \frac{\partial \phi_d^*}{\partial n} dS = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^0 \int_0^{2\pi} \phi \frac{\partial \phi_d^*}{\partial R} R d\theta dz.$$

Videre skal vi bruke hastighetspotensialets asymptotiske form som er gitt i Tillegg B.2

$$\phi \sim \left(e^{-iKR \cos(\theta-\beta)} + \left(\frac{K}{2\pi R} \right)^{\frac{1}{2}} H_7(\theta) e^{-iKR} \right) e^{Kz} = (\phi_0 + \phi_7) e^{Kz},$$

KAPITTEL 5. ENERGI

hvor ϕ_7 kun er refleksjonspotensialet. Vi trenger også den deriverte som er gitt ved

$$\frac{\partial \phi_d^*}{\partial R} = iK \cos(\theta - \beta) \phi_0^* + iK \phi_7^* .$$

Integralet over dypet tar vi med en gang, da dette ganske enkelt er lik $1/(2K)$. Setter vi alt dette inn i integralet på starten av seksjonen får vi

$$\begin{aligned} \frac{W_{\infty,d}}{2Ec_g} &= \frac{1}{2K} \operatorname{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} (\phi_0 + \phi_7) iK [\cos(\theta - \beta) \phi_0^* + \phi_7^*] R \, d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} (\phi_0 + \phi_7) [\cos(\theta - \beta) \phi_0^* + \phi_7^*] R \, d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos(\theta - \beta) R \, d\theta + \frac{K}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_7(\theta) H_7^*(\theta) \, d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} \phi_0 \phi_7^* R \, d\theta + \int_0^{2\pi} \cos(\theta - \beta) \phi_7 \phi_0^* R \, d\theta \right\} . \end{aligned}$$

Det første integralet er null grunnet periodisitet, ledd to lar vi bli stående, men på ledd tre og fire skal vi bruke stasjonær fase. Denne teknikken blir vist i detalj i Tillegg B.1, så her blir mellomregningen utelatt

$$\begin{aligned} \frac{W_{\infty,d}}{2Ec_g} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{K}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_7(\theta) H_7^*(\theta) \, d\theta + iH_7^*(\beta) - iH_7(\beta) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{K}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_7(\theta) H_7^*(\theta) \, d\theta - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \{ H_7(\beta) \} \right\} . \end{aligned}$$

Siden det første leddet er reelt og realdel av imaginærdel er imaginærdelen, ender vi opp med

$$\frac{W_{\infty,d}}{2Ec_g} = \frac{K}{4\pi} \int_0^{2\pi} H_7(\theta) H_7^*(\theta) \, d\theta - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \{ H_7(\beta) \} ,$$

som er tilsvarende resultat som vises i for eksempel Nossen *et al.* [16], men hvor funksjonen $H_7(\theta)$ inneholder den porøse randbetingelsen som nå ikke er null. Når

KAPITTEL 5. ENERGI

legemet er solid, vil det i diffraksjonsproblemet ikke dissiperes energi over legemets overflate og det er heller ingen netto fluks ut av kontrollflaten i uendelig. Når vi introduserer porøsitet vil man få et energitap over legemet som skal gjenspeile seg i negativ netto energifluks ut av kontrollflaten i uendelig. Ettersom summen av dissipert energi og energifluks i fjernfeltet skal være null, kan energiligningen i diffraksjon skrives på følgende form

$$\begin{aligned} \frac{W_{b,d}}{2Ec_g} &= \text{Im} \left\{ \iint_{S_b} (\phi_d^+ - \phi_d^-) \frac{\partial \phi_d^*}{\partial n} dS \right\} \\ &= -\frac{K}{4\pi} \int_0^{2\pi} H_7(\theta) H_7^*(\theta) d\theta + \frac{1}{2} \text{Im} \{ H_7(\beta) \} = -\frac{W_{\infty,d}}{2Ec_g}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.3 Energiligningen i radiasjon

I radiasjonsproblemet tilfører vi systemet energi ved å sette et legeme i en tvungen oscillasjon. Utledningen av energiligningen i radiasjon er helt tilsvarende den i de foregående seksjonene, så her går vi rett på resultatet

$$\begin{aligned} \frac{W_{b,j}}{\frac{1}{2}\rho\omega^3|\xi|^2} &= \text{Im} \left\{ \iint_{S_b} (\phi_j^+ - \phi_j^-) \frac{\partial \phi_j^*}{\partial n} dS \right\} \\ &= -\frac{K}{4\pi} \int_0^{2\pi} |H_j(\theta)|^2 d\theta = -\frac{W_{\infty,j}}{\frac{1}{2}\rho\omega^3|\xi|^2}, \quad j = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

Verdt å merke seg her er at leddet fra stasjonær fase er borte, da dette er et bidrag som bare er assosiert med de innkommende og reflekterte bølgene. I radiasjon vil man forvente at tilført energi i systemet er på sitt største når legemet er solid, og bare vil minke som følge av økende porøsitet med dertilhørende energitap over legemet.

5.4 Energiligningen for fritt flytende geometri

Bare for å komplettgjøre energiutledningen, så vil energiregnskapet for det fritt flytende problemet, altså kombinasjonen av radiasjonsproblemet og diffraksjonsproblemet se likt ut som ligning (5.2), men hvor det totale potensialet og Kochin-

KAPITTEL 5. ENERGI

funksjonen er gitt som

$$\phi = \phi_d + K \sum_{j=1}^6 \frac{\xi_j}{A} \phi_j ,$$
$$H(\theta) = H_7(\theta) + K \sum_{j=1}^6 \frac{\xi_j}{A} H_j(\theta) .$$

Størrelsen ξ_j/A kalles for *responce amplitude operator* (RAO) og dette er legemets komplekse amplitude i mode j , som respons til en innkommende bølge med enhetsamplitude, frekvens ω og retning θ . Denne responsen er ikke beregnet i denne oppgaven, da man har behov for å vite mer om legemets masse.

5.5 Resultater

Energier i radiasjon og diffraksjon er regnet med trykkintegrasjon over legemet i tillegg til å evaluere de i fjernfeltet. Vi har god overenstemmelse for de to metodene, se Figur 5.1- 5.6. Siden det i radiasjon er vi som tilfører systemet energi ved å bevege legemet, så vil det være positiv netto energifluks i fjernfeltet og negativ netto energi på legemet som følge av dissipert energi der. I diffraksjon er det motsatt, altså netto energi i fjernfeltet er negativt som følge av at noe av den innkommende energien dissiperes over legemet.

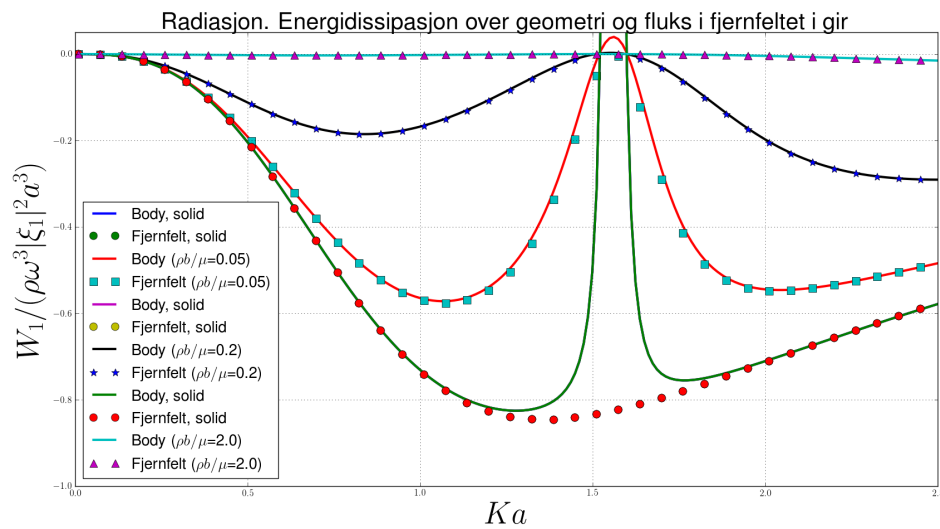
I radiasjon var det forventet at energien skal minke med porøsitet, en oppførsel som blir bekreftet av Figur 5.1- 5.3. En annen interessant effekt vi ser i Figur 5.2 og 5.4, hvor det er plottet mot dimensjonsløs porøsitet, er at energien minker saktere i lavfrekvensregimet. Ettersom porøsiteten er proporsjonal med frekvensen, vil opplevd porøsitet være større jo raskere vi beveger legemet.

Naturlig nok ser vi også her effektene av sloshingmoden i radiasjon omtalt i seksjon 3.4, da energien og dempningen er nært relaterte. For solide og nesten solide geometrier vil energien i liten grad ha mulighet til å radieres ut til den ytre overflaten, og disse vil kunne oppleve positiv netto energi rundt denne frekvensen.

I diffraksjon er energien som forventet 0 når legemet er solid, da all innkommende energi reflekteres. Ved introduisering av porøsitet vil mer og mer energi dissiperes i legemet, deretter vil det nå et maksimum før energien igjen synker og blir 0 når geometrien er fullstendig porøs. For relativt høy porøsitet gjelder det at økende porøsitet betyr mindre energi, men det gjelder ikke nødvendigvis for mer solide geometrier. I lavfrekvensregimet ($Ka < 0.3$) gjelder det at lavere porøsitet gir

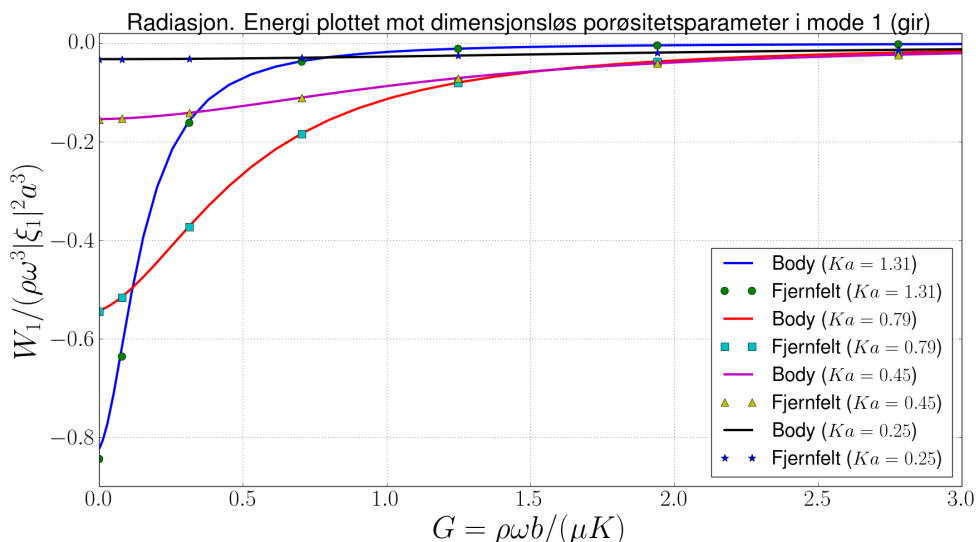
KAPITTEL 5. ENERGI

mer dissipert energi. Vi ser generelt høyest energidissipasjon ved relativt liten porøstitet.

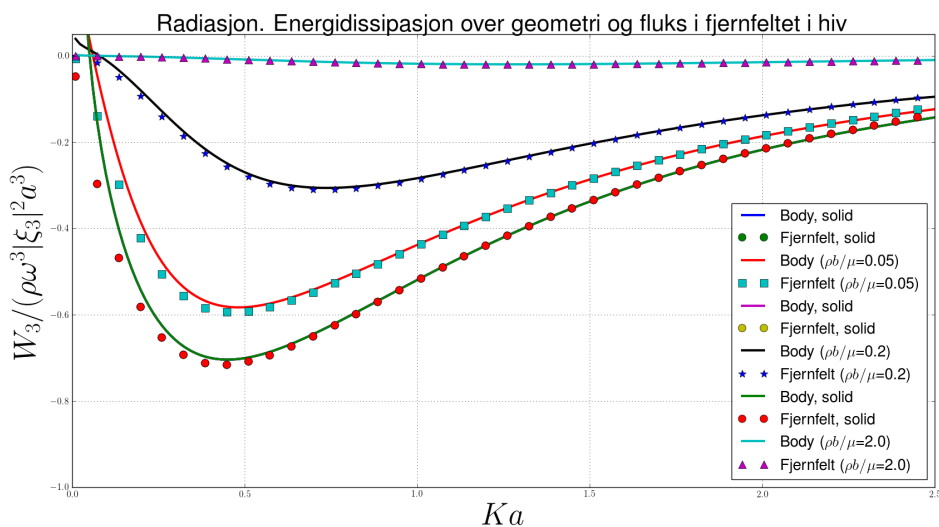


Figur 5.1: Energidissipasjon over legemet og energifluks gjennom kontrollflaten i fjernfeltet i radiasjon for mode 1 (jag). Solid og nesten solid legeme opplever en indre sloshingmode ved bølgelengde $\lambda = 2a$. Som antatt er energien tilført systemet størst når geometrien er solid. Antall paneler er her 1024.

KAPITTEL 5. ENERGI

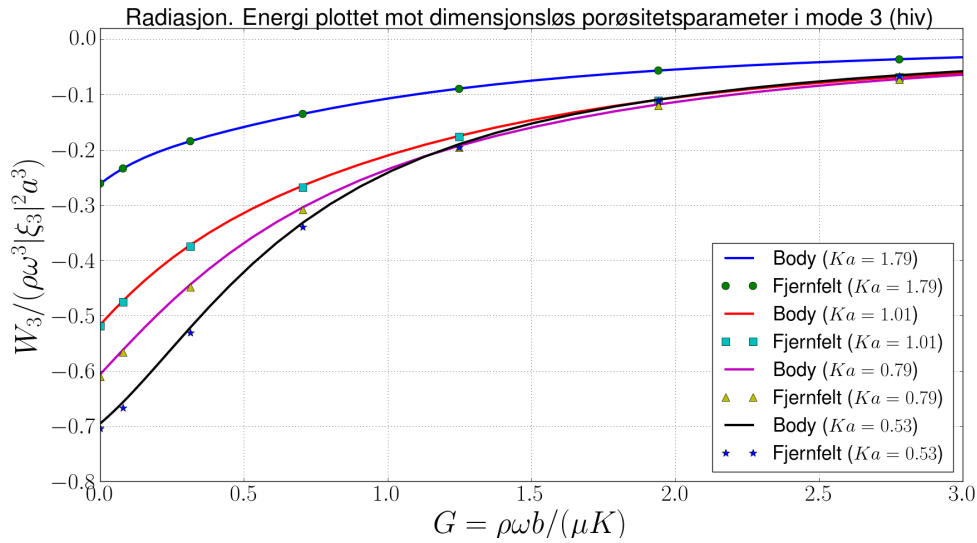


Figur 5.2: Energidissipasjon over legemet og energiflukt gjennom kontrollflaten i fjernfeltet i radiasjon for mode 1 (jag), plottet mot den dimensjonsløse porøsitetsparameteren G . Som antatt er energien tilført systemet størst når geometrien er solid. Antall paneler er her 1024.

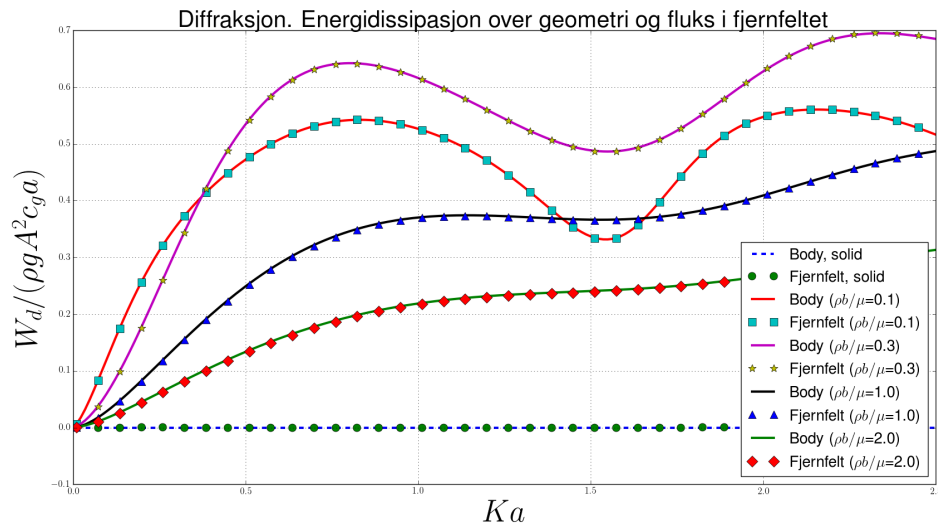


Figur 5.3: Energidissipasjon over legemet og energiflukt gjennom kontrollflaten i fjernfeltet i radiasjon for mode 3 (hiv). Som antatt er energien tilført systemet størst når geometrien er solid. Antall paneler brukt er 1024.

KAPITTEL 5. ENERGI

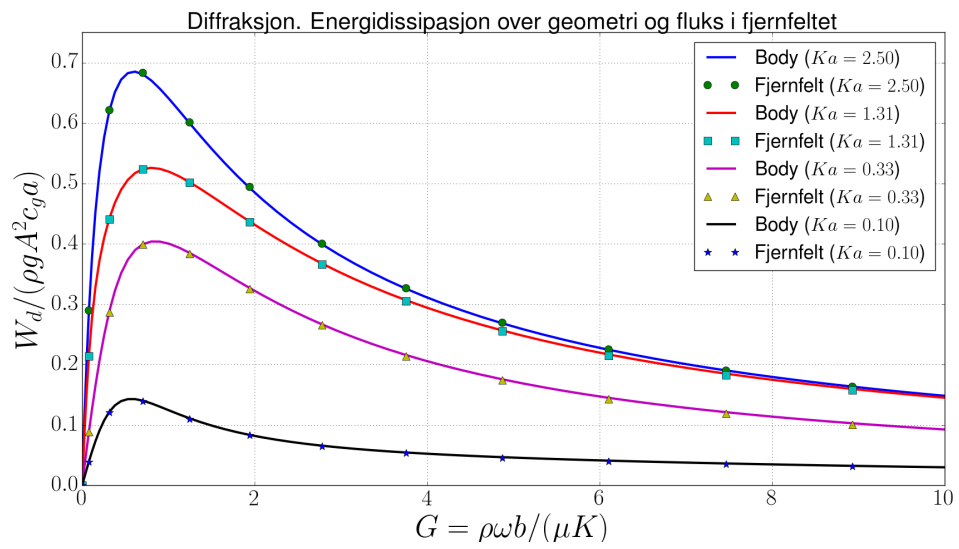


Figur 5.4: Energidissipasjon over legemet og energiflukt gjennom kontrollflaten i fjernfeltet i radiasjon for mode 3 (hiv), plottet mot dimensjonsløs porøsitetsparameter G . Som antatt er energien tilført systemet størst når geometrien er solid. Antall paneler brukt er 1024.



Figur 5.5: Energidissipasjon over legemet og energiflukt gjennom kontrollflaten i fjernfeltet i diffraksjon. Som antatt er energien 0 når geometrien er solid. Antall paneler brukt er 1024.

KAPITTEL 5. ENERGI



Figur 5.6: Energidissipasjon over legemet og energifluks gjennom kontrollflaten i fjernfeltet i diffraksjon. Energien dissiperer raskt ved introduisering av porøsitet. Antall paneler er 1024.

KAPITTEL 5. ENERGI

Kapittel 6

Drift

I denne oppgaven ser vi som nevnt innledningsvis kun på horisontal drift. De midlere driftkreftene oppstår som følge av at fluidpartiklene driver i samme retning som de innkommende bølgene propagerer. Driftkraften er en andreordens effekt som kan regnes ut enten med direkte trykkintegrering eller ved å anvende momentumligningen i fjernfeltet. Det er sistnevnte metode som er brukt i denne oppgaven. Fjernfeltsmetoden er også den mest nøyaktige av de to (Nossen *et al.* [16]). I tilfellet med uendelig dyp er også hastighetspotensialet eksakt til andre orden i bølgeamplitude (Newman [12]). Midlere drift er som nevnt en andreordens effekt, men hastighetspotensialet av andre orden bidrar ikke noe her. Vi har all informasjon vi trenger i potensialene av første orden (Faltinsen [17]).

6.1 Momentumanalysen

Vi starter med å se på momentumfluksen i et inkompressibelt fluid

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M}(t) = \rho \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \mathbf{v} .$$

Videre bruker transportteoremet og får

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M}(t) = \rho \iiint_{V(t)} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dV - \rho \iint_{S(t)} \mathbf{v} U_n dS , \quad (6.1)$$

KAPITTEL 6. DRIFT

hvor U_n er hastigheten til den faste randen, og ikke med gjennomstrømning slik vi har sett tidligere. Videre tar vi Eulers ligning (uten viskositet)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz \right),$$

og setter inn i Ligning (6.1)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}(t) = -\rho \iiint_{V(t)} \left[\nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] dV - \rho \iint_{S(t)} \mathbf{v} U_n dS. \quad (6.2)$$

Her kan vi bruke vektoridentiteten

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \underbrace{\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})}_{=0} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}),$$

siden fluidet er antatt irrotasjonelt. Videre bruker vi Gauss' teorem og får

$$\iiint_{V(t)} \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dV = \frac{1}{2} \iint_{S(t)} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n} dS.$$

Dette kan igjen omskrives som

$$\frac{1}{2} \iint_{S(t)} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n} dS = \iint_{S(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \nabla \Phi dS = \iint_{S(t)} V_n \mathbf{v} dS,$$

siden følgende indentitet gjelder når $\nabla^2 \Phi = 0$:

$$\frac{1}{2} \iint_{S(t)} (\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi) \mathbf{n} dS = \iint_{S(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \nabla \Phi dS.$$

Enhetsvektoren \mathbf{n} peker som før ut av fluidet og $V_n = \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi$. Setter vi alt inn i Ligning (6.2) får vi

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}(t) = -\rho \iint_{S(t)} \left[\left(\frac{p}{\rho} + gz \right) \mathbf{n} + \mathbf{v} (V_n - U_n) \right] dS. \quad (6.3)$$

Enn så lenge er integralet over helt generelt, men videre skal vi ta for oss det indre og ytre domenet i det porøse tilfellet. Vi betrakter så det lineariserte volumet, hvor overflaten ikke er forstyrret.

Flaten S^+ består av en kontrollflate i uendelig S_∞ , bunn S_{bunn} , overflate S_F^+ og randen til legemet S_b . Det hydrostatiske leddet $\iint_{S_t} \rho g z \mathbf{n} dS$ bidrar ikke til de

KAPITTEL 6. DRIFT

horisontale komponentene, og er dermed ikke relevant for den horisontale driften. På S_F^+ er $p = 0$ og $V_n = U_n$, så overflaten bidrar heller ikke. På bunnen er $V_n = U_n = 0$ og trykket har kun vertikalkomponent og bidrar dermed ikke til horisontal drift.

I det indre domenet er S^- delt i S_b og S_F^- . Integralet over overflaten forsvinner på samme måte som i det ytre domenet.

Bruker vi alle disse forenklingene, tar summen av momentumfluksen (6.3) på utsiden og innsiden, ender vi opp med:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{M}^+ + \mathbf{M}^-) = & -\rho \iint_{S_\infty} \left[\frac{p^+}{\rho} \mathbf{n} + \mathbf{v}^+ V_n \right] dS \\ & -\rho \iint_{S_b} \left[\frac{p^+ - p^-}{\rho} \mathbf{n} + (\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-)(V_n - U_n) \right] dS . \end{aligned}$$

Her gjenkjenner vi det første leddet i det andre integralet som kraften som virker på legemet ved ren trykkintegrasjon, altså $\mathbf{F} = \iint_{S_b} (p^+ - p^-) \mathbf{n} dS$. Neste steg er å tidsmidle ligningen ovenfor

$$\begin{aligned} \overline{\frac{d}{dt}(\mathbf{M}^+ + \mathbf{M}^-)}^t = & \overline{-\rho \iint_{S_\infty} \left[\frac{p^+}{\rho} \mathbf{n} + V_n \mathbf{v}^+ \right] dS}^t \\ & - \overline{\mathbf{F}^t - \rho \iint_{S_b} (\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-)(V_n - U_n) dS}^t . \end{aligned} \quad (6.4)$$

Siden vi ikke kan ha noen netto økning i momentum i kontrollvolumet over én periode blir venstresiden i (6.4) lik 0, og vi ender opp med

$$\overline{\mathbf{F}^t} = \overline{-\rho \iint_{S_\infty} \left(\frac{p^+}{\rho} \mathbf{n} + V_n \mathbf{v}^+ \right) dS}^t - \overline{\rho \iint_{S_b} (\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-)(V_n - U_n) dS}^t . \quad (6.5)$$

Det prinsipielt nye her er integralet over S_b som nå ikke forsvinner siden vi har gjennomstrømning. Ligningen over er lik den man finner i Zhao [3]. Med solid rand forsvinner det bakerste integralet og man får det samme uttrykket som gitt i f.eks. Faltinsen [17] eller Maruo [18]. I neste seksjon skal vi se på det første integralet over kontrollflaten i uendelig, som er leddet som gir den konvensjonelle driftkraften.

6.2 Konvensjonell drifkraft

For enkelhetens skyld tas her utledningen bare for x -komponenten da utledningen for y er helt tilsvarende, hvor man kun bytter ut cosinuser med sinuser. I uendelig er kontrollflaten et sylinderskall hvor radius $R \rightarrow \infty$ og det integreres da fra bunn og til overflaten. Enhetsvektoren peker ut av fluidet og er gitt ved $\hat{\mathbf{i}}_r = \hat{\mathbf{i}} \cos \theta + \hat{\mathbf{j}} \sin \theta$ og hastigheten $\mathbf{v} = V_R \hat{\mathbf{i}}_r + V_\theta \hat{\mathbf{i}}_\theta = V_R(\hat{\mathbf{i}} \cos \theta + \hat{\mathbf{j}} \sin \theta) + V_\theta(-\hat{\mathbf{i}} \sin \theta + \hat{\mathbf{j}} \cos \theta)$.

$$\overline{F_x}^t = -\rho \int_{-\infty}^{\eta} \int_0^{2\pi} \left[\frac{p}{\rho} \cos \theta + V_R(V_R \cos \theta - V_\theta \sin \theta) \right] R \, d\theta \, dz \quad ,$$

hvor overflatehevningen η er gitt ved

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{g} \operatorname{Re} \{ i\omega \phi e^{i\omega t} \}_{z=0} \quad . \quad (6.6)$$

Trykket er gitt ved Bernoullis ligning

$$\frac{p}{\rho} = -\operatorname{Re} \{ i\omega \phi e^{i\omega t} \} - \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 - gz \quad ,$$

hvor hastighetskomponentene er gitt ved

$$V_R = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial R} e^{i\omega t} \right\} \quad , \quad V_\theta = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} e^{i\omega t} \right\} \quad \text{og} \quad V_z = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial z} e^{i\omega t} \right\} \quad .$$

Vi beholder kun ledd opp til andre orden, så da får vi

$$\overline{F_x}^t = -\rho \int_{-\infty}^0 \int_0^{2\pi} \left[(-\operatorname{Re} \{ i\omega \phi e^{i\omega t} \} - \frac{1}{2}(V_R^2 + V_\theta^2 + V_z^2) - gz) \cos \theta + V_R(V_R \cos \theta - V_\theta \sin \theta) \right] R \, d\theta \, dz \quad (6.7)$$

$$- \rho \int_0^{\eta} \int_0^{2\pi} (-\operatorname{Re} \{ i\omega \phi e^{i\omega t} \}_{z=0} - gz) R \cos \theta \, d\theta \, dz$$

I det første integralet på høyre side kan vi ta tidsmidlingen på integranden direkte, og vi ser fort at alle ledd som inneholder ledd som er harmoniske vil forsvinne under tidsmidling. Vi ser litt nærmere på hastighetskomponentene

$$V_R = \operatorname{Re} \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial R} e^{i\omega t}}_A \quad ,$$

KAPITTEL 6. DRIFT

kvadrert og tidsmidlet får vi da

$$\overline{V_R^2}^t = \overline{\left(\frac{A + A^*}{2}\right)^2}^t = \frac{1}{4} \overline{(AA + 2AA^* + A^*A^*)}^t = \frac{1}{2} AA^* = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial R} \frac{\partial \phi^*}{\partial R},$$

hvor første og siste ledd i uttrykket som er kvadrert forsvinner i tidsmidlingen. Tilsvarende for de andre komponentene gir

$$\overline{V_\theta^2}^t = \frac{1}{2R^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta}, \quad \overline{V_z^2}^t = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi^*}{\partial z} = \frac{k^2}{2} \phi \phi^*,$$

$$\overline{V_R V_\theta}^t = \frac{1}{4R} \left(\frac{\partial \phi}{\partial R} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi^*}{\partial R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$$

Etter å ha integrert med hensyn på θ forsvinner også bidraget fra det hydrostatiske trykket, dermed er dette leddet utelatt videre. Det første integralet i Ligning (6.7) kan nå skrives

$$\begin{aligned} & -\rho \int_{-\infty}^0 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\overline{V_R^2}^t - \overline{V_\theta^2}^t - \overline{V_z^2}^t \right) \cos \theta - \overline{V_R V_\theta}^t \sin \theta \right] R \, d\theta \, dz \\ &= -\frac{\rho}{4} \int_{-\infty}^0 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial R} \frac{\partial \phi^*}{\partial R} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta} - k^2 \phi \phi^* \right) \cos \theta - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \phi}{\partial R} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi^*}{\partial R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \sin \theta \right] R \, d\theta \, dz, \end{aligned}$$

og siden alle ledd har samme z -avhengighet, e^{2kz} , så er integrasjonen med hensyn på z rett frem å gjøre

$$= \frac{\rho}{8k} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi}{\partial R} \frac{\partial \phi^*}{\partial R} + k^2 \phi \phi^* \right) R \cos \theta + \left(\frac{\partial \phi}{\partial R} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi^*}{\partial R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \sin \theta \right]_{z=0} \, d\theta. \quad (6.8)$$

Integral nummer to i Ligning (6.7):

$$\begin{aligned} & -\rho \int_0^\eta \int_0^{2\pi} \overline{(-\operatorname{Re} \{i\omega \phi e^{i\omega t}\})_{z=0} - gz}^t R \cos \theta \, d\theta \, dz \\ &= -\rho \int_0^{2\pi} \left(-\overline{\eta \operatorname{Re} \{i\omega \phi e^{i\omega t}\}}^t + \frac{1}{2} g \overline{\eta^2}^t \right)_{z=0} R \cos \theta \, d\theta. \end{aligned}$$

KAPITTEL 6. DRIFT

Setter inn Ligning (6.6) og får

$$-\frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\omega^2}{g} \overline{\operatorname{Re}\{i\phi e^{i\omega t}\}} \operatorname{Re}\{i\phi e^{i\omega t}\}^t \right)_{z=0} R \cos \theta \, d\theta = -\frac{\rho}{8k} \int_0^{2\pi} 2k^2 \phi \phi^* \Big|_{z=0} R \cos \theta \, d\theta .$$

Setter vi bidraget over sammen med Ligning (6.8) får vi totalt

$$\begin{aligned} \overline{F_x}^t = \frac{\rho}{8k} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi}{\partial R} \frac{\partial \phi^*}{\partial R} - k^2 \phi \phi^* \right) R \cos \theta \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \phi}{\partial R} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi^*}{\partial R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \sin \theta \right]_{z=0} d\theta . \quad (6.9) \end{aligned}$$

Potensialet i formelene over er summen av den innkommende og det totale raderende potensialet på asymptotisk form (uten z-avhengigheten), $\phi = \phi_0 + \phi_s$, hvor

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{igA}{\omega} e^{-iKR \cos(\theta - \beta)} \\ \phi_s &= \left(\frac{K}{2\pi R} \right)^{\frac{1}{2}} H(\theta) e^{-iKR - i\frac{\pi}{4}} , \end{aligned}$$

hvor sistenevnte er utledet i tillegg B.2. Vi setter disse potensialene inn i Ligning (6.9) og løser. De deriverte er gitt ved

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0}{\partial R} &= \frac{gA}{\omega} K e^{-iKR \cos(\theta - \beta)} \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta} &= -\frac{gA}{\omega} KR \sin(\theta - \beta) e^{-iKR \cos(\theta - \beta)} \\ \frac{\partial \phi_s}{\partial R} &= -\left(\frac{K}{2\pi R} \right)^{\frac{1}{2}} H(\theta) iK e^{-iKR - i\frac{\pi}{4}} \\ \frac{\partial \phi_s}{\partial \theta} &= \left(\frac{K}{2\pi R} \right)^{\frac{1}{2}} H'(\theta) e^{-iKR - i\frac{\pi}{4}} . \end{aligned}$$

Verdt å merke seg er at alle bidrag fra ϕ_0 alene må forsvinne, da ingen krefter kan komme av et uforstyrret bølgesystem. Hele det første leddet i integralet forsvinner også, da det maksimalt er av orden $R^{-\frac{1}{2}}$. Videre tar vi ledd for ledd for oversiktens skyld.

KAPITTEL 6. DRIFT

II:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_s}{\partial R} \frac{\partial \phi_s^*}{\partial R} R \cos \theta &= \frac{K^3}{2\pi} H H^* \cos \theta \\ \frac{\partial \phi_s}{\partial R} \frac{\partial \phi_0^*}{\partial R} R \cos \theta &= -i K^2 \left(\frac{K R}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} H \frac{g A}{\omega} e^{-i K R(1-\cos(\theta-\beta)) - i\pi/4} \cos(\theta - \beta) \cos \theta \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial R} \frac{\partial \phi_s^*}{\partial R} R \cos \theta &= i K^2 \left(\frac{K R}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} H^* \frac{g A}{\omega} e^{i K R(1-\cos(\theta-\beta)) + i\pi/4} \cos(\theta - \beta) \cos \theta\end{aligned}$$

III:

$$\begin{aligned}K^2 \phi_s \phi_s^* R \cos \theta &= \frac{K^3}{2\pi} H H^* \cos \theta \\ K^2 \phi_s \phi_0^* R \cos \theta &= -i K^2 \left(\frac{K R}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} H \frac{g A}{\omega} e^{-i K R(1-\cos(\theta-\beta)) - i\pi/4} \cos \theta \\ K^2 \phi_0 \phi_s^* R \cos \theta &= i K^2 \left(\frac{K R}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} H^* \frac{g A}{\omega} e^{i K R(1-\cos(\theta-\beta)) + i\pi/4} \cos \theta\end{aligned}$$

IV:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_s}{\partial R} \frac{\partial \phi_s^*}{\partial \theta} \sin \theta &\rightarrow 0, \quad \mathcal{O}(R^{-1}) \\ \frac{\partial \phi_s}{\partial R} \frac{\partial \phi_0^*}{\partial \theta} \sin \theta &= i K^2 \left(\frac{K R}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} H \frac{g A}{\omega} e^{-i K R(1-\cos(\theta-\beta)) - i\pi/4} \sin(\theta - \beta) \sin \theta \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial R} \frac{\partial \phi_s^*}{\partial \theta} \sin \theta &\rightarrow 0, \quad \mathcal{O}(R^{-\frac{1}{2}})\end{aligned}$$

V:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_s^*}{\partial R} \frac{\partial \phi_s}{\partial \theta} \sin \theta &\rightarrow 0, \quad \mathcal{O}(R^{-1}) \\ \frac{\partial \phi_s^*}{\partial R} \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta} \sin \theta &= -i K^2 \left(\frac{K R}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} H^* \frac{g A}{\omega} e^{i K R(1-\cos(\theta-\beta)) + i\pi/4} \sin(\theta - \beta) \sin \theta \\ \frac{\partial \phi_0^*}{\partial R} \frac{\partial \phi_s}{\partial \theta} \sin \theta &\rightarrow 0, \quad \mathcal{O}(R^{-\frac{1}{2}})\end{aligned}$$

KAPITTEL 6. DRIFT

Ved samling av termene I-V og bruk av trigonometriske summeidentiteter får vi

$$\begin{aligned} \overline{F}_x^t = & -\frac{\rho K^2}{8\pi} \int_0^{2\pi} |H(\theta)|^2 \cos \theta \, d\theta \\ & - \frac{\rho}{4} \omega A \left(\frac{KR}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} (\cos \beta + \cos \theta) H(\theta) e^{-iKR(1-\cos(\theta-\beta)) - i\pi/4} \, d\theta \right\}. \end{aligned}$$

Videre skal vi bruke stasjonær fase på det siste leddet over, en teknikk gjennomgått i detalj i Tillegg B.1, så det meste av detaljer blir droppet her. Vi ender opp med

$$\overline{F}_x^t = -\frac{\rho K^2}{8\pi} \int_0^{2\pi} |H(\theta)|^2 \cos \theta \, d\theta + \frac{\rho}{2} \omega A \operatorname{Re} \{ H(\beta) \} \cos \beta.$$

Hvis vi trekker faktoren igA/ω ut av potensialet i $H(\theta)$ og skalerer med hensyn på $\rho g A^2$, ender vi til slutt opp med

$$\frac{\overline{F}_x^t}{\rho g A^2} = -\frac{K}{8\pi} \int_0^{2\pi} |H(\theta)|^2 \cos \theta \, d\theta - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \{ H(\beta) \} \cos \beta, \quad (6.10)$$

som er det konvensjonelle uttrykket for driftkraften. Den eneste forskjellen i dette uttrykket er at Kochinfunksjonen inneholder en modifisert randbetingelse som følge av porøsiteten.

6.3 Porøs driftkraft

Integralet over legemet i Ligning (6.5) gir oss et rent porøst bidrag til driften. Setter vi inn for hastighetskomponentene får vi

$$\overline{F}_{i,por}^t = -\rho \iint_{S_b} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi^-}{\partial x_i} \right) \right\} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - n_i \right) \right\} \, dS.$$

Ved å skrive $\operatorname{Re} \{ A \} = (A + A^*)/2$, for videre å gange ut integranden, ser vi fort at vi kun sitter igjen med kryssleddene, da de andre forsvinner i tidsmidlingen. Kryssleddene kan igjen samles ved å omskrive til realdel, og da ender vi opp

KAPITTEL 6. DRIFT

med

$$\overline{F}_{i,por}^t = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left\{ \iint_{S_b} \left(\frac{\partial \phi^{+*}}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi^{-*}}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - n_i \right) \right\} dS .$$

Setter vi så inn randbetingelsen for $\partial \phi / \partial n$ ender vi til slutt opp med

$$\overline{F}_{i,por}^t = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Im} \left\{ \iint_{S_b} \alpha (\phi^+ - \phi^-) \left(\frac{\partial \phi^{+*}}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi^{-*}}{\partial x_i} \right) \right\} dS ,$$

hvor vi får en kansellering av n_i i refleksjon, og hvor $\partial \phi / \partial n = 0$ i diffraksjon.

Ved bruk av energiligningen (5.2) kan vi eliminere leddet fra stasjonær fase i Ligning (6.10) og totalt ende opp med ett ledd for konvensjonell drift gitt av Maruos formel, gitt i f.eks. [17, 18, 19], og et ekstra porøst bidrag hvor det integreres over legemet. Totalt ender vi da opp med driftkraften gitt ved følgende uttrykk

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F}_i^t}{\rho g A^2} &= -\frac{K}{8\pi} \int_0^{2\pi} |H(\theta)|^2 \begin{pmatrix} \cos \theta + \cos \beta \\ \sin \theta + \sin \beta \end{pmatrix} d\theta \\ &+ \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ \iint_{S_b} (\varphi^+ - \varphi^-) \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} dS \right\} \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \\ &- \frac{1}{2K} \operatorname{Im} \left\{ \iint_{S_b} \alpha (\varphi^+ - \varphi^-) \left(\frac{\partial \varphi^{+*}}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi^{-*}}{\partial x_i} \right) dS \right\} , \quad i = 1, 2 , \end{aligned}$$

hvor vi har skalert ligningen ved å ta faktoren igA/ω ut fra potensialet. Det siste leddet i driften inneholder vanlig deriverte, og disse må behandles på en egen måte da derivering av integralligningen vi har brukt hittil ikke er triviell. For å regne ut disse deriverte skal vi i stedet representere hastighetspotensialet med det som heter en kildeformulering. Dette er beskrevet i Tillegg C.

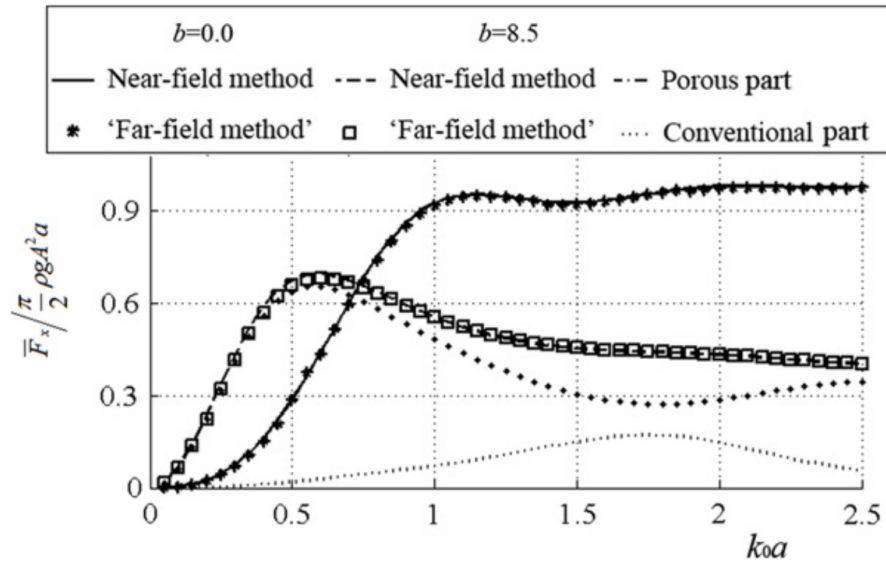
6.4 Resultater

For momentummetoden beregnes drift for solide geometrier kun ved å evaluere det i fjernfeltet, men ved porøsitet må vi også ha med integraler over overflaten for å korrekt beregne de porøse bidragene. Vi har ikke regnet drift med trykkintegrasjon, så vi har dessverre ingen sammenligning av nær- og fjernfeltsmetode, men vi skal sammenligne resultatene med de som er gitt i [3], Figur 6.1. Til tross for en annen

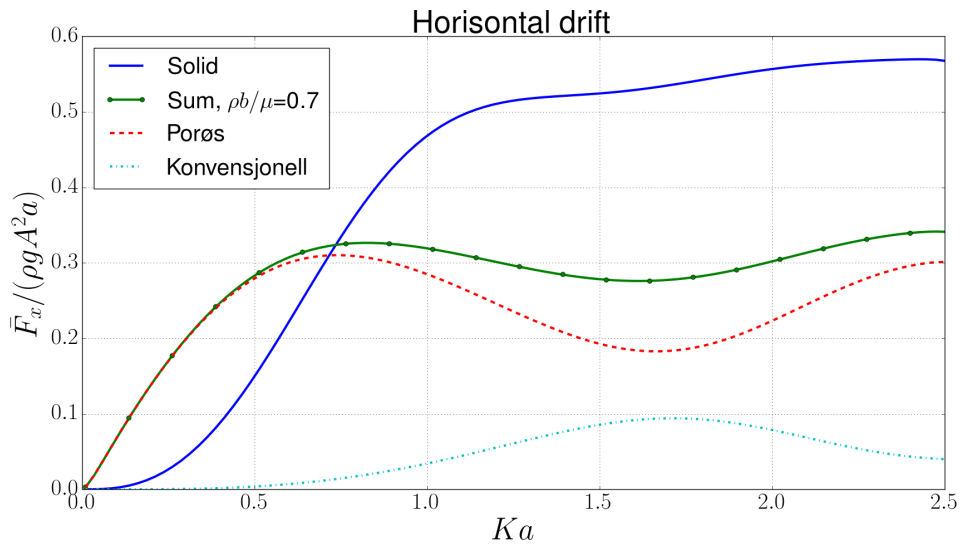
KAPITTEL 6. DRIFT

geometri og endelig vanddyb, ser vi klare likheter i oppførsel ved deres valg av porøsitet, som tilsvarer en åpningsrate på ca. 14%. For å illustrere likheter har vi valgt en porøsitet som ser ut til å ligge i samme område, se Figur 6.2. Oppførselen med at driften på porøs geometri er større enn for solid i lavfrekvensregimet (lange bølger) og mindre ved høyere frekvenser (korte bølger), kan forklares ved hjelp av et 2D eksempel. Ved veldig lange bølger (lav Ka) vil bølgen energien transmitteres fullstendig og resultere i liten drift for et solid legemet, men for den porøse geometrien vil ikke like stor andel av energien transmitteres, men bidra til økt drift siden mer av energien tas opp av legemet. I det motsatte tilfelle, hvor bølgene blir korte (høy Ka), så vil bølgeenergien i stor grad reflekteres når geometrien er solid og bidra til større driftkrefter. For porøst tilfelle vil det bli lavere som følge av at energi dissiperer over legemet. Vi ser dog fra Figur 6.3 at geometrier som er nesten solide, kan ta høyere verdier, selv for korte bølger. Denne oppførselen viser seg også i Figur 6.4 hvor driften er plottet mot den dimensjonsløse porøstetsparameteren G . Siden driften ikke bare er evaluert i fjernfeltet, men også på geometrien ser vi at driften i de nesten solide tilfellene vil påvirkes av den indre sloshingmoden ved bølgelengde $\lambda = 2s$ ($Ka = \pi/2$). Vi observerer også fra Figur 6.3 at som Zhao, så ser driften ut til bli konstant for høye verdier av Ka . Fra Figur 6.3 og 6.4 ser vi at i høyfrekvensregimet betyr høyere porøsitet lavere driftkrefter, men i lavfrekvensregimet er ikke dette nødvendigvis sant når porøsiteten er lav.

KAPITTEL 6. DRIFT

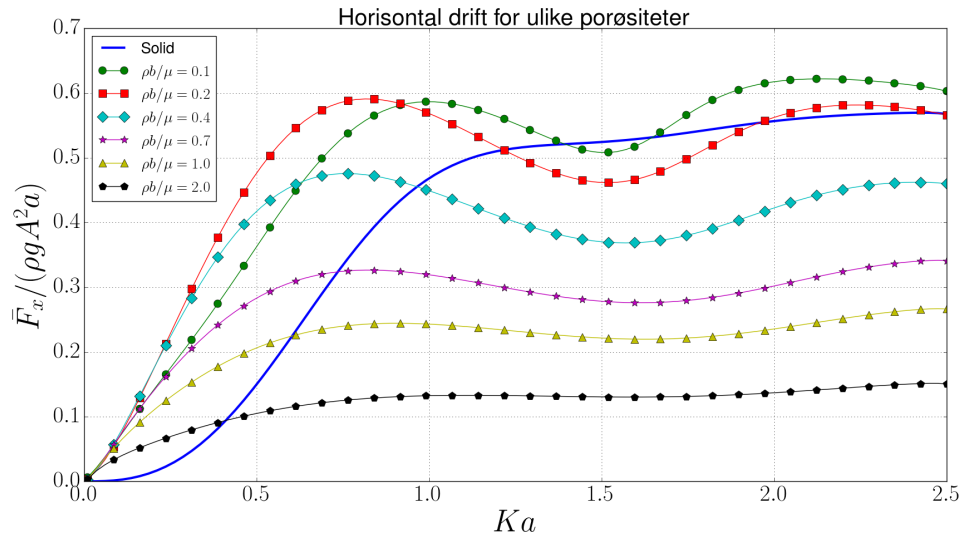


Figur 6.1: Fra Zhao *et al* [3]. Horizontal driftkraft virkende på en fastholdt porøs sylinder for $h/a = 3.0$, $d/a = 1.0$, hvor h er vanddyb, a er radius på sylinder, d er dypgang. $b = 8.5$ som tilsvarer en fysisk åpning på ca. 14% [10].

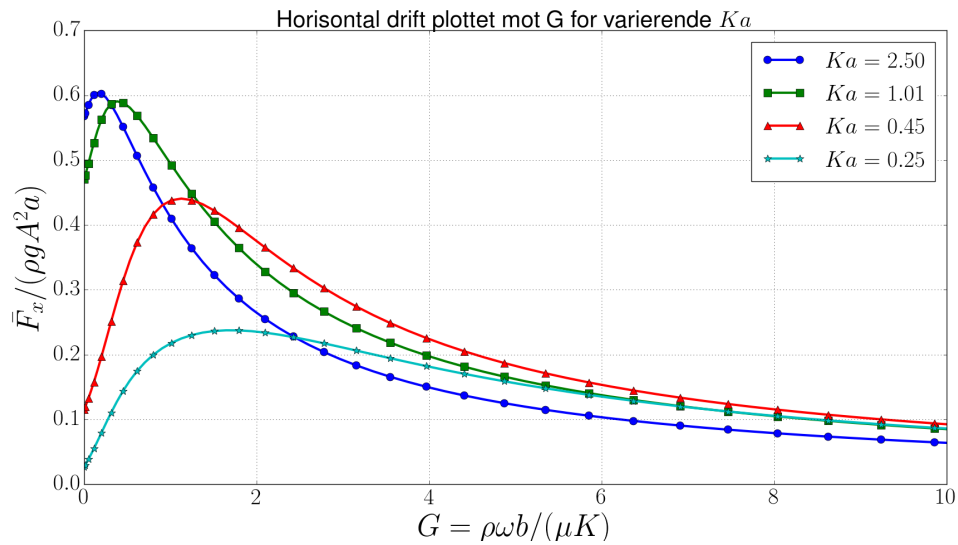


Figur 6.2: Horizontal driftkraft virkende på en fastholdt halvkule med radius a liggende i overflaten, vanddypet er uendelig.

KAPITTEL 6. DRIFT



Figur 6.3: Plottet viser horisontal driftkraft virkende på en fastholdt kule med radius a liggende i overflaten, mot dimensjonsløst bølgetall, hvor de ulike kurvene representerer ulike porøsiteter. Antall paneller: 1024.



Figur 6.4: Plottet viser horisontal driftkraft virkende på en fastholdt halvkule med radius a liggende i overflaten, mot den dimensjonsløse porøsitetsparameteren G . Antall paneller: 1024.

Kapittel 7

Oppsummering og konklusjon

I denne oppgaven har hovedfokus vært å studere porøse effekter og verifisering av hydrodynamiske identiteter og relasjoner for en porøs halvkule liggende i fri overflate. I tillegg er også en kule på dypt vann blitt undersøkt. Legemet har blitt analysert i tvungne svingninger og som fastholdt under påvirkning av en innkommende bølge. Porøsitetens effekt på addert masse, dempning, Haskindrelasjonen, energi og horisontal drift er studert.

Arbeidet startet med en 2D formulering i uendelig fluid, som ble tatt videre til 3D og til slutt opp på fri overflate. Radiasjonsproblemet i 2D og 3D i uendelig fluid er implementert av forfatter og i overflateproblemet er programvaren WAMITTM benyttet. Radiasjonsproblemet i uendelig fluid er sammenlignet med beregninger fra WAMITTM på dypt vann, hvor effekten av bølger er neglisjerbar. Det vises til god overenstemmelse for addert masse og dempning ved de to beregningsmåtene. Resultatene bekrefter også at ligningssettene er konsistent implementert. Lignende oppførsel som Molin [6] og An&Faltinsen [7] ble observert.

En stor del av oppgaven har vært å modifisere WAMITTM til å regne på porøse strukturer. Det har vært mye kode å sette seg inn i og vi har støtt på mange vanskeligheter underveis. WAMITTM v.5.3 ble skrevet i perioden 1988-1996. Ikke bare er det en gammel kode, men den er også optimalisert for en utdatert kompilator, så problemer som kun kan forklares som kompilatorfeil har tidvis bydd på mye frustrasjon, men med tid og stunder har man klart å omgå de. Det er velkjent at det indre problemet er dårligere kondisjonert enn det ytre, så vi hadde lenge mistanke om at vår koblede løser kunne lide under dette. WAMITTM er i tillegg skrevet med enkelpresisjon på flyttall, men dette ble heldigvis ikke til et problem.

Addert masse evalueres kun som et integral over legemets overflate, men dempning blir i tillegg også beregnet i fjernfeltet, hvor vi har god overensstemmelse mellom

KAPITTEL 7. OPPSUMMERING OG KONKLUSJON

nær- og fjernfeltsberegninger. Som forventet er addert masse størst når legemet er solid og avtar med økende porøsitet. Den porøse dempningen har vist seg å være en vesentlig bidragsyter til den totale dempningen. Beregningene viser også en indre sloshingmode ved bølgelenger lik diameter på legemet. I tilfellet hvor legemet er solid er dette en irregulær frekvens. Ved kobling av det ytre og indre domene er dette et fysisk fenomen, hvor vi har en kraftig sloshingeffekt ved lave porøsiteter som blir gradvis dempet ved økende porøsitet. Den radierende dempningen er som kjent svært liten på denne frekvensen, så det er porøsiteten som demper denne sloshingeffekten. Opptredelsen av negativ addert masse er også omtalt og linket mot differansen i kinetisk og potensiell energi.

Amplituden og fasen til eksitasjonskraften er regnet med trykkintegrasjon over legemet, så vel som evaluert i fjernfeltet. Resultater viser god overenstemmelse mellom de to metodene. For porøse legemer er det som forventet at amplituden på kraften er øvre begrenset av det solide tilfellet. Likheter mellom egne beregninger og Zhao [3] er omtalt. Vi ser også her effektene av den indre sloshingmoden, hvor amplituden går mot 0 og fasen har et vendepunkt.

Energier i radiasjon og diffraksjon er regnet med både nær- og fjernfeltsmetoder, og vi har god overenstemmelse for de to. Som forventet er den radierende energien størst når legemet er solid og avtar med økende porøsitet. Som følge av at porøsiteten er proporsjonal med frekvensen ser vi at energien avtar saktere i lavfrekvensregimet, som kan forklares med at opplevd porøsitet er større jo høyere frekvenser vi beveger legemet med. Naturlig nok ser vi også effekten av den indre sloshingmoden her. I diffraksjon er energien som forventet 0 når legemet er solid, da all innkommende energi reflekteres. Ved introduksjon av porøsitet vil mer og mer energi dissiperes i legemet, deretter vil det nå et maksimum før energien igjen synker og blir 0 når geometrien er fullstendig porøs.

Driften er beregnet med momentumligningen som vanligvis kun er en fjernfeltsanalyse. Porøsiteten kan dog ikke korrekt beregnes i fjernfeltet, så driftenberegningen inneholder også integraler over legemet. Vi har ikke regnet drift med trykkintegrasjon og mangler dermed en sjekk av metoden over. Resultater fra momentumanalysen er sammenlignet med driften funnet i [3] for en porøs sylinder. Det er vist at driftkrefter virkende på en porøs geometri er større enn i det solide tilfellet i lavfrekvensregimet (lange bølger). Bortsett fra nesten solide geometrier, vil det ved høyere frekvenser (korte bølger) gjelde at solid drift er størst. Det er også observert at driften ut til bli konstant for høye verdier av Ka . Det er vist at i høyfrekvensregimet betyr høyere porøsitet lavere driftkrefter, noe som ikke nødvendigvis stemmer i lavfrekvensregimet når porøsiteten er lav.

En svakhet ved bruk av den lineære porøsitetsrelasjonen er at den ikke fanger opp

KAPITTEL 7. OPPSUMMERING OG KONKLUSJON

effekter knyttet til separasjon ved åpningene i geometrien, hvilket den kvadratiske loven gjør. Dette gjør at det lineær trykkfallet ikke egner seg om gjennomstrømningen er vesentlig. Hvis man skal se dette i sammenheng med en fiskemerde, så forutsetter denne formuleringen et rigid legeme, slik at det er gitterstrukturer som er relevant her, og ikke nettingstrukturer. I tillegg vil en stor del av parameterrommet det blir visualisert for gi bølger som ikke finnes naturlig, men som bare kan reproduseres på lab skala.

7.1 Videre arbeid

En naturlig utvidelse hadde vært å studere dette med en annen formulering av porøsitet, for eksempel den kvadratiske formuleringen foreslått av Molin [6], men denne analysen er foretatt av Dokken [8]. Driften burde også regnes med trykk-integrasjon for å validere momentumanalysen. En driftanalyse med strøm hadde vært meget interessant å gjøre, slik som Heggen [11] har gjort i sin 2D analyse. Beregning av RAO og analyse av en fritt flytende geometri kunne også vært ønskelig å se på i tillegg til fortøyninger. Delvis porøse strukturer ville vært interessant å utforske og en fordel med tanke på applikasjon mot rigide fiskemerder.

KAPITTEL 7. OPPSUMMERING OG KONKLUSJON

Tillegg

Tillegg A

Greens teorem og integralligninger

For å komme frem til integralligningene vi senere skal bruke, så vil jeg her komme med en kortfattet gjengivelse av utledningen gitt i Newman [12, 127–131].

La oss betrakte to løsninger av Laplaces ligning (2.1) i et volum V fylt med et fluid avgrenset av en lukket overflate S . Vi kaller disse potensialene ϕ og φ , anvender divergensteoremet og ender opp med

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS &= \iiint_V \nabla \cdot (\phi \nabla \varphi - \varphi \nabla \phi) dV \\ &= \iiint_V (\phi \nabla^2 \varphi + \nabla \phi \cdot \nabla \varphi - \varphi \nabla^2 \phi + \nabla \varphi \cdot \nabla \phi) dV \stackrel{(A.1)}{=} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Videre byttes φ ut med et enhets kildepotensial, gitt ved

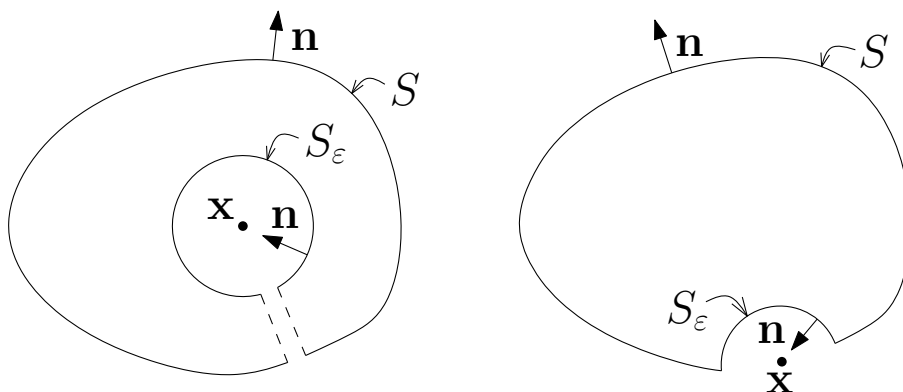
$$\varphi = 1/4\pi r = (1/4\pi)[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{-1/2},$$

hvor $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ er posisjonen til kilden i koordinatene $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Kildepotensialet tilfredsstiller ikke Laplace ligning i punktet $r = 0$, og dermed er ikke (A.1) gyldig om kildepunktet er inne i volumet V . Problemet omgås ved å integrere over et kuleskall, med $r = \varepsilon$, som omslutter singulariteten, se figur A.1.

Vi integrerer nå over $S + S_\varepsilon$ og (A.1) kan skrives

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_\varepsilon} \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \quad (A.2)$$

TILLEGG A. GREENS TEOREM OG INTEGRALLIGNINGER



Figur A.1: Integrasjonsflater for Greens teorem. Singulariteten omslutes med et kuleskall når den er innefor S , og med en halvkule når den er på randen.

I grensen $\varepsilon \rightarrow 0$, så kan det vises at første leddet på høyre side blir $4\pi\phi(\mathbf{x})$, hvorimot det siste leddet ikke gir noe bidrag. Derfor, hvis \mathbf{x} ligger inne i S , så ender vi opp med

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS .$$

Ligger \mathbf{x} på randen av S , så integrerer man istedet rundt en halvkule og får bidraget $2\pi\phi(\mathbf{x})$ fra høyresiden i (A.2). Om \mathbf{x} ligger utenfor S er hele høyresiden ganske enkelt lik 0.

I mer komplekse systemer kan legemet bevege seg i et fluid med andre avgrensninger, og det er dermed hensiktsmessig å generalisere kildepotensialet til det som blir kalt Greenfunksjonen

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{r} + H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) ,$$

hvor H velges slik at G oppfyller alle nødvendige randbetingelser.

I 3D kan et hastighetspotensial dermed representeres av følgende integralligninger

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2\pi \\ -4\pi \end{pmatrix} \phi(\mathbf{x}) = \iint_{S_B} \left(\phi(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G}{\partial n_\xi}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \phi}{\partial n_\xi}(\boldsymbol{\xi}) \right) dS , \quad (\text{A.3})$$

for \mathbf{x} henholdsvis utenfor, på og innefor S_b . Ligning (A.3) gjelder også i 2D, men da er venstresiden ganget med $-1/2$.

Tillegg B

Bølgegreenfunksjonen

Til forskjell fra greenfunksjonen i uendelig fluid som bare er potensialet for en kilde, med eventuell speiling, så trenger vi et ekstra bølgebidrag til greenfunksjonen når vi har en fri overflate i problemet. Som Nossen et. al. [16] skal vi ta utgangspunkt i

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} + \Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) ,$$

hvor r og r' er gitt ved

$$\begin{aligned} r &= [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{\frac{1}{2}} \\ r' &= [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2]^{\frac{1}{2}} , \end{aligned}$$

og hvor bølgebidraget er gitt ved

$$\Psi_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{k e^{k(z+\zeta)}}{k - K} J_0(kR) dk ,$$

hvor $R = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{\frac{1}{2}}$ og J_0 er Besselfunksjonen av første type og nullte orden. Buen på integraltegnet indikerer at det integreres i det komplekse plan, over polen $k - K$, og sikrer at bølger er utgående. Ligningen over er bølgebidraget til første orden i deres problem som er med forover hastighet. Denne ligningen kan

TILLEGG B. BØLGEGREENFUNKSJONEN

forenkles litt ved hjelp av omskrivning

$$\begin{aligned}
 \Psi_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{(k-K)e^{k(z+\zeta)}}{k-K} J_0(kR) \, dk + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{Ke^{k(z+\zeta)}}{k-K} J_0(kR) \, dk \\
 &= \frac{2}{\pi} \underbrace{\int_0^\infty e^{k(z+\zeta)} J_0(kR) \, dk}_{=\pi/r'} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{Ke^{k(z+\zeta)}}{k-K} J_0(kR) \, dk \\
 &= \frac{2}{r'} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{Ke^{k(z+\zeta)}}{k-K} J_0(kR) \, dk ,
 \end{aligned}$$

slik at totalt ender vi opp med følgende greenfunksjon

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{Ke^{k(z+\zeta)}}{k-K} J_0(kR) \, dk , \quad (\text{B.1})$$

som nå er formulert slik den blir brukt i WAMITTM. Denne formuleringen er gyldig lokalt, men ikke uendelig langt unna kildepunktet Nossen *et al.* [16].

I flere av utledningene til de ulike hydrodynamiske identitene og relasjonene trenger vi hastighetspotensialenes asymptotiske oppførsel. For å finne denne oppførselen starter vi med å betrakte greenfunksjonen i fjernfeltet. Her vil også den flittig brukte Kochinfunksjonen defineres.

B.1 Bølgegreenfunksjonen i fjernfeltet

Greenfunksjonen vi bruker her er gitt ved

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} + \Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) ,$$

hvor

$$\begin{aligned}
 r &= [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{\frac{1}{2}} \\
 r' &= [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

og bølgedelen er gitt av

$$\Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{E(\alpha, k) \, dk \, d\alpha}{k - K} . \quad (\text{B.2})$$

TILLEGG B. BØLGEGREENFUNKSJONEN

Her betyr \oint at vi integrerer oss over polen $k - K$. Telleren i integranden er gitt ved

$$E(\alpha, k) = k e^{k(z+\zeta) + ik[(x-\xi) \cos \alpha + (y-\eta) \sin \alpha]} ,$$

som vi med litt omstokking kan omskrive til

$$E(\alpha, k) = k e^{k(z+ix \cos \alpha + y \sin \alpha)} h_0(k, \boldsymbol{\xi}, \alpha) ,$$

hvor

$$h_0(k, \boldsymbol{\xi}, \alpha) = e^{k(\zeta - i\xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha)} .$$

Videre bruker vi polarkoordinater på feltpunktet \mathbf{x} , altså $x = R \cos \theta$ og $y = R \sin \theta$, og får

$$E(\alpha, k) = k e^{k(z+iR \cos(\alpha-\theta))} h_0(k, \boldsymbol{\xi}, \alpha)$$

(B.2) tar nå formen

$$\Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \oint_0^\infty \frac{k}{k-K} e^{k[z+iR \cos(\alpha-\theta)]} h_0(k, \boldsymbol{\xi}, \alpha) dk d\alpha \quad (\text{B.3})$$

The singulære integralet over k , tas nå ned i det komplekse k -planet, hvor $k = k_r + ik_i$. Når $\cos(\alpha - \theta) > 0$ må $k_i > 0$ og vi integrerer på oversiden, se figur B.1. Dette integralet blir 0, men når $\cos(\alpha - \theta) < 0$ er $k_i < 0$ og vi integrerer på undersiden, får vi ut residuen, se figur B.2. Fra Saff&Snider [20] og kompleks analyse har vi at det singulære integralet i Ligning (B.3) blir $-2\pi Res$, hvor residuen er gitt ved

$$Res = K e^{K[z+iR \cos(\alpha-\theta)]} h_0(K, \boldsymbol{\xi}, \alpha)$$

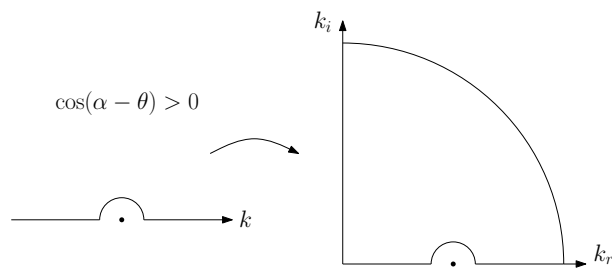
Ligning (B.3) er nå redusert til

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (-2\pi i) K e^{K[z+iR \cos(\alpha-\theta)]} h_0(K, \boldsymbol{\xi}, \alpha) d\alpha + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \\ &= -2i K e^{Kz} \int_0^{2\pi} e^{iKR \cos(\alpha-\theta)} h_0(K, \boldsymbol{\xi}, \alpha) d\alpha + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

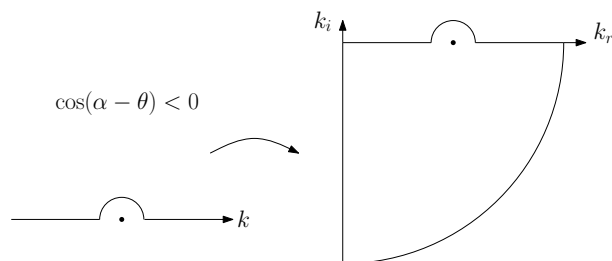
Stasjonær fase: $\cos(\alpha - \theta) < 0$, $R \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \chi &= \cos(\alpha - \theta) \\ \chi' &= -\sin(\alpha - \theta) \\ \chi'' &= -\cos(\alpha - \theta) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

TILLEGG B. BØLGEGREENFUNKSJONEN



Figur B.1: Hvis $\cos(\alpha - \theta) > 0$ må vi integrere på oversiden. Singulariteten er utelatt og integralet blir 0.



Figur B.2: Hvis $\cos(\alpha - \theta) < 0$ må vi integrere på undersiden. Singulariteten inngår i konturen og fra integralet får vi nå en residual.

hvor per definisjon Ligning (B.5) er null, vi får da følgende krav

$$\chi' = -\sin(\alpha - \theta) = 0 \Rightarrow \alpha - \theta = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

hvor vi må velge π siden $\cos(\alpha - \theta) < 0$. Vi utvikler nå fasefunksjonen χ om $\alpha_0 = \theta + \pi$

$$\chi \cong -1 + \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_0)^2$$

og nøyer oss med å evaluere h_0 i α_0 siden denne funksjonen varierer sakte og ikke vil bidra nevneverdig til integralet. Setter vi dette inn i Ligning (B.4) får vi

$$\Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -2iK e^{Kz} e^{-iT} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{1}{2}T(\alpha - \alpha_0)^2} h_0(K, \boldsymbol{\xi}, \alpha_0) d\alpha \quad (\text{B.6})$$

Siden $T = KR \rightarrow \infty$ og $\chi \in [-1, 1]$ så har vi byttet ut integralgrensene med $-\infty$ og ∞ . Nå gjør vi substitusjonen

$$i\frac{1}{2}T(\alpha - \alpha_0)^2 = -u^2,$$

TILLEGG B. BØLGEGREENFUNKSJONEN

og tar vi roten av dette uttrykket, bruker $\sqrt{-1} = i = \exp\{i\frac{\pi}{2}\}$ og $\sqrt{i} = \exp\{i\frac{\pi}{4}\}$, får vi

$$e^{i\frac{\pi}{4}} T^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha - \alpha_0}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} u$$

$$d\alpha = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} T^{-\frac{1}{2}} du$$

Dette setter vi inn i Ligning (B.6)

$$\Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -2iK e^{Kz} e^{-iT} e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} T^{-\frac{1}{2}} h_0(K, \boldsymbol{\xi}, \alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

Dette integralet er ganske enkelt lik $\sqrt{\pi}$, så totalt får vi greenfunksjonen i fjernfeltet til å bli

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{8\pi K}{R} \right)^{\frac{1}{2}} h_0(K, \boldsymbol{\xi}, \theta + \pi) \exp\{K(z - iR)\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right). \quad (\text{B.7})$$

B.2 Hastighetspotensialet i fjernfeltet

Når vi har uttrykket for bølgegreenfunksjonen i fjernfeltet, kan vi lett finne det asymptotiske uttrykket for hastighetspotensialet. Fra Ligning (A.3) er potensialet i ethvert punkt i fluidet, på grunn av tilstedeværelsen til et legeme, gitt ved

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_b} \left(G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \phi}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}}(\boldsymbol{\xi}) - \phi(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \right) dS_{\boldsymbol{\xi}},$$

hvor minusen er tatt inn i integralet er leddene i integranden har dermed byttet plass. Ved å sette inn Greenfunksjonens asymptotiske verdi i fjernfeltet, Ligning (B.7), får vi ut hastighetspotensialet på asymptotisk form

$$\phi(\mathbf{x}) = H(\theta) \left(\frac{K}{2\pi R} \right)^{\frac{1}{2}} e^{K(z - iR) - i\frac{\pi}{4}},$$

hvor

$$H(\theta) = \iint_{S_b} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{K(\zeta + i\xi \cos \theta + i\eta \sin \theta)} dS \quad (\text{B.8})$$

er Kochinfunksjonen. Legg merke til at π er fjernet fra argumentet h_0 og har resultert i et fortegnskifte i eksponentialet i Kochinfunksjonen. Det er også viktig

TILLEGG B. BØLGEGREENFUNKSJONEN

å nevne at selv om Kochinfunksjonen ser lik ut som i det solide tilfellet, så er det en forandring i randbetingelsen til $\partial\phi/\partial n$ som følge av porøsiteten.

For bruk til senere referanser, vil jeg her skrive opp Kochinfunksjonen for henholdsvis radiasjon og diffraksjon

$$H_j(\theta) = \iint_{S_b} \left(n_j - i\alpha(\phi_j^+ - \phi_j^-) - \phi_j^+ \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{K(\zeta + i\xi \cos \theta + i\eta \sin \theta)} dS ,$$
$$H_7(\theta) = \iint_{S_b} \left(-i\alpha(\phi_d^+ - \phi_d^-) - \phi_d^+ \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{K(\zeta + i\xi \cos \theta + i\eta \sin \theta)} dS ,$$

hvor bare det ytre potensialet er brukt i siste ledd i hver integrand, da dette stammer fra fjernfeltsanalysen.

Tillegg C

Kildeformulering

Det siste porøse bidraget til horisontal drift krever at vi regner ut hastighetene på panelene, og i dette tillegget går vi kort inn på hvordan. Derivering av kilde- og dipolformuleringen brukt tidligere er ikke triviell, og vi skal derfor se på hvordan dette kan løses enklere. Trikket er å bruke en ren kildeformulering på formen

$$\phi_7(\mathbf{x}) = \iint_{S_b} \sigma_7(\boldsymbol{\xi}) G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dS_\xi ,$$

hvor σ er kildestyrken. Vi viser denne utledningen for det reflekterende potensialet ϕ_7 , da det er dette vi trenger i driften. Når vi diskretiserer setter vi kildestyrken som konstant over hvert panel, og vi får

$$\phi_7(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^N \sigma_7(\mathbf{x}_j) \iint_{S_{Bj}} G(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi}) dS_\xi .$$

Av grunner som vil bli åpenbare, skal vi nå normalderivere ligningen over

$$\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{x}}} \phi_7(\mathbf{x}_i) = 2\pi \sigma_7(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^N \sigma_7(\mathbf{x}_j) \iint_{S_{Bj}} \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{x}}} G(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi}) dS_\xi .$$

Vi kan nå sette inn for randbetingelsen på venstresiden og løse systemet med hensyn på kildestyrken σ . I det solide tilfellet er venstresiden ganske enkelt lik $-\partial\phi_0/\partial n$, men som før må vi legge til gjennomstrømningen gitt av Ligning (2.11). Vi får også her et koblet system av det indre og ytre problemet, hvis utledning er

TILLEGG C. KILDEFORMLERING

helt tilsvarende som før, så her går vi rett på resultatet

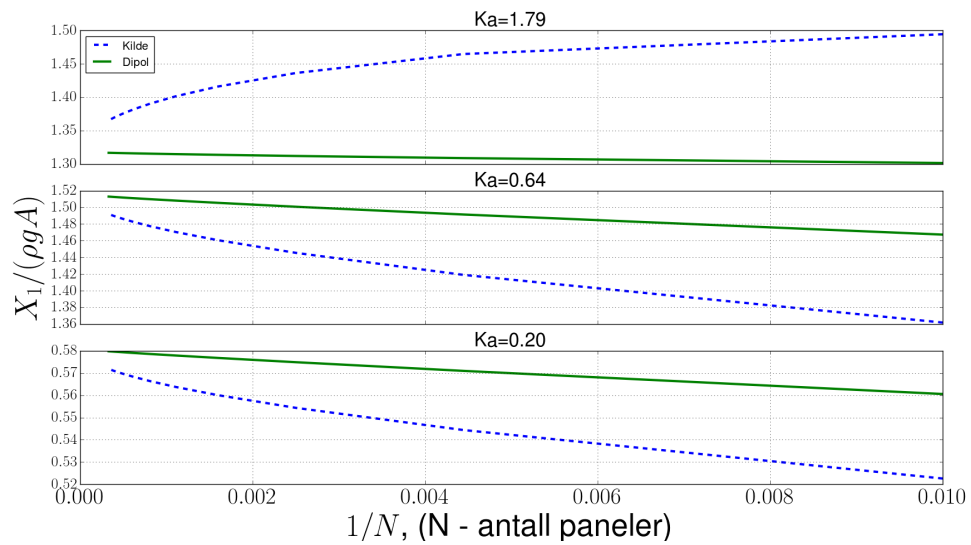
$$2\pi\Phi_s(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^N \Psi_s(\mathbf{x}_j) \iint_{S_{B_j}} \frac{\partial G(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\mathbf{x}}} dS_{\boldsymbol{\xi}} = 0$$

$$2\pi\Phi_s(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^N \Psi_s(\mathbf{x}_j) \iint_{S_{B_j}} \frac{\partial G(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\mathbf{x}}} dS_{\boldsymbol{\xi}} + 2i\alpha \sum_{j=1}^N \Psi_s \iint_{S_{B_j}} G(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}} = -2 \frac{\partial \phi_0}{\partial n},$$

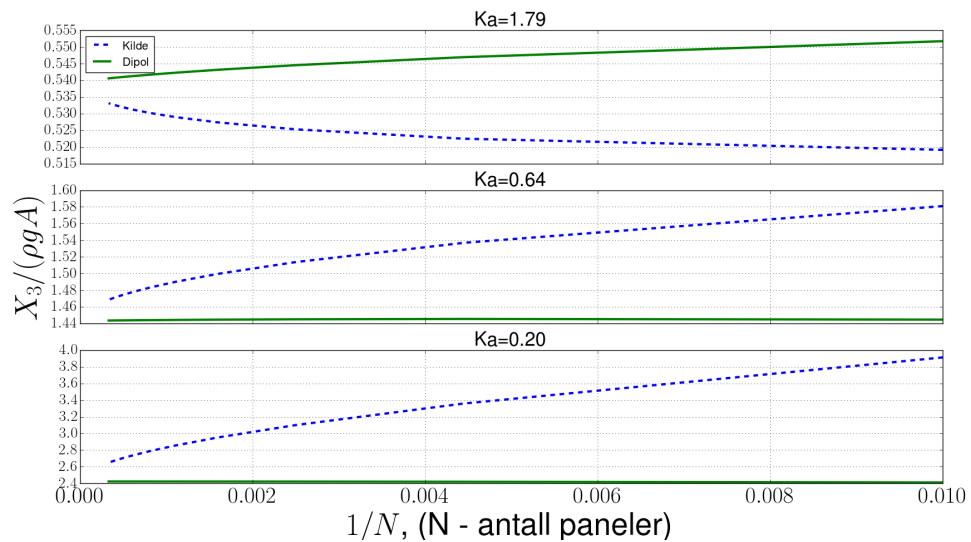
hvor $\Phi_s = \sigma_7^+ + \sigma_7^-$ og $\Psi_s = \sigma_7^+ - \sigma_7^-$. Alternativt kan man, hvis man allerede har løst ut potensialet fra kilde- og dipolformuleringen, løse det ytre og indre problemet hver for seg om man setter det kjente potensialet inn på venstresiden. Det er velkjent at kildeformuleringen konvergerer saktere, så å benytte potensialet fra kilde- og dipolformulering kunne vært et alternativ, og tilfører ikke ligningen noe mer kompleksitet. Det er ikke minst både raskere og enklere å løse to $N \times N$ -systemer enn ett som er $2N \times 2N$. Det er dog førstnevnte metode som er implementert i programmeringen av driften.

I figurene [C.1-C.5](#) vises det konvergens av amplitudene X_1 og X_3 beregnet med kilde- og kilde-dipolformuleringene. Det er plottet mot inversen av antall paneler for ulike dimensjonsløse bølgetall og porøsiteter.

TILLEGG C. KILDEFORMULERING

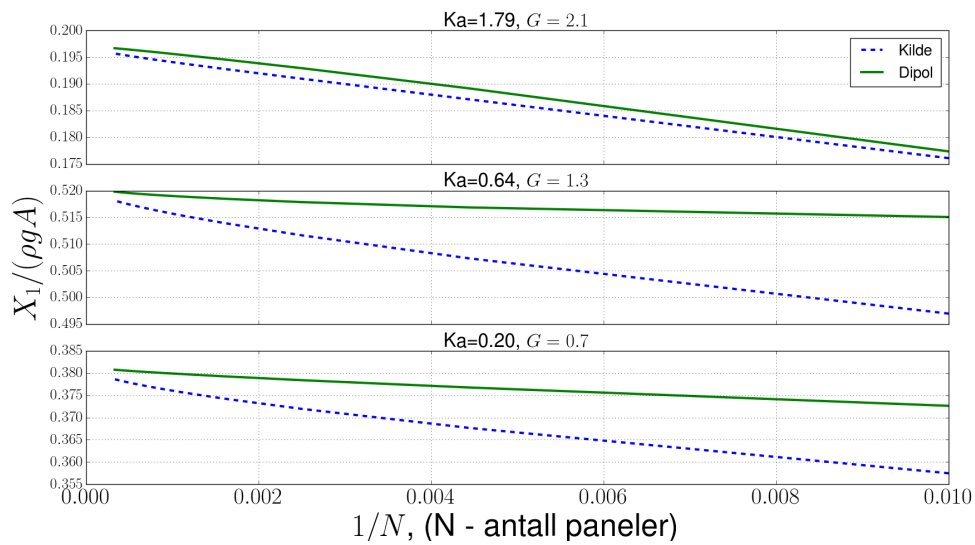


Figur C.1: Konvergens av amplituden X_1 til eksitasjonskraften beregnet med kilde- og kilde-dipolformuleringen, plottet mot inversen av antall paneler for forskjellig Ka når legemet er solid.

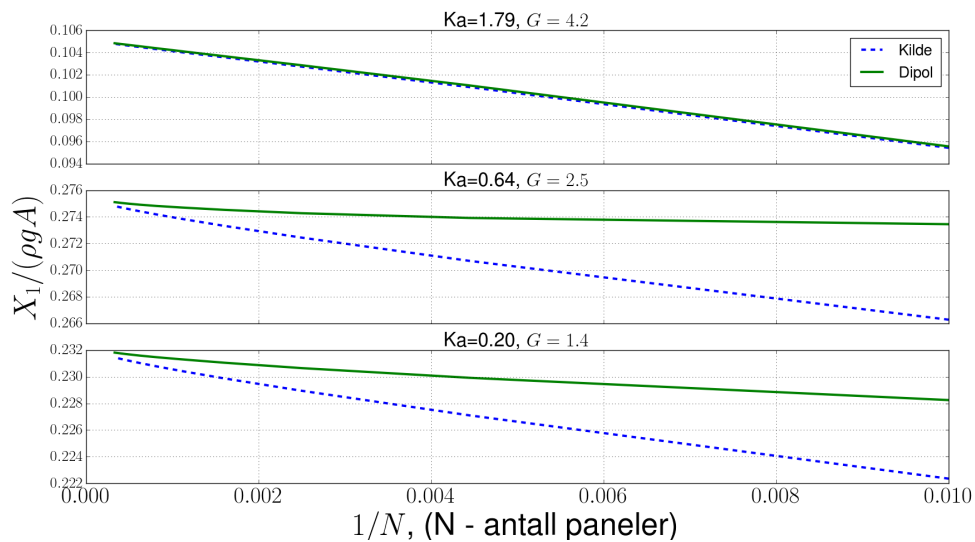


Figur C.2: Konvergens av amplituden X_3 til eksitasjonskraften beregnet med kilde- og kilde-dipolformulering, plottet mot inversen av antall paneler for forskjellig Ka når legemet er solid.

TILLEGG C. KILDEFORMULERING

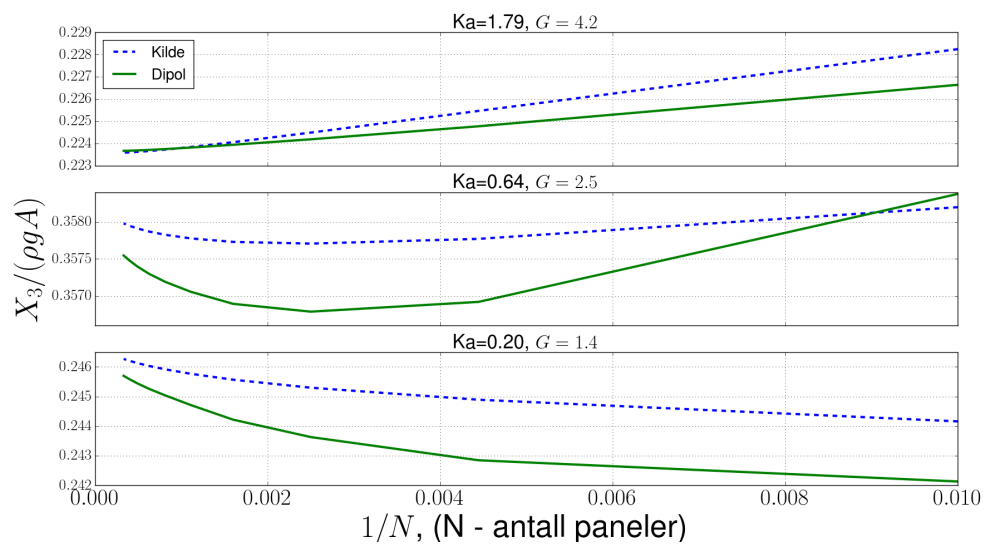


Figur C.3: Konvergens av amplituden X_1 til eksitasjonskraften beregnet med kilde- og kilde-dipolformulering, plottet mot inversen av antall paneler for forskjellig Ka og med $\rho b/\mu = 0.5$.



Figur C.4: Konvergens av amplituden X_1 til eksitasjonskraften beregnet med kilde- og kilde-dipolformulering, plottet mot inversen av antall paneler for forskjellig Ka og med $\rho b/\mu = 1.0$.

TILLEGG C. KILDEFORMLERING



Figur C.5: Konvergens av amplituden X_3 til eksitasjonskraften beregnet med kilde- og kilde-dipolformulering, plottet mot inversen av antall paneler for forskjellig Ka og med $\rho b/\mu = 1.0$.

TILLEGG C. KILDEFORMULERING

Tillegg D

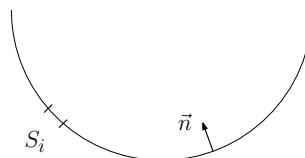
Tolkningen av $\int_{S_i} \frac{\partial G}{\partial n} dS$

$\int_{S_i} \frac{\partial G}{\partial n} dS$, hva er det? G er Greenfunksjonen gitt ved $\ln r$ som er potensialet for en kilde i 2D, hvor r er gitt ved

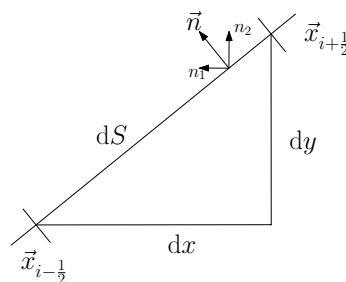
$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} .$$

Hva er $\int_{S_i} \frac{\partial}{\partial n} \ln r dS$?

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} &= n_1 \frac{\partial}{\partial x} + n_2 \frac{\partial}{\partial y} \\ dx &= n_2 dS \\ dy &= -n_1 dS \end{aligned}$$



Forholdene dx og dy kan enkelt vises v.h.a formlike trekkanter, eller bare tenkes på som projiseringen av dS i henholdsvis y - og x -retning.



$$\begin{aligned} \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial n} \ln r dS &= \int_{S_i} \left(dS n_1 \frac{\partial}{\partial x} + dS n_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \Re\{\ln z\} \\ &= \int_{S_i} \left(-dy \frac{\partial}{\partial x} + dx \frac{\partial}{\partial y} \right) \Re\{\ln z\} \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

TILLEGG D. TOLKNINGEN AV $\int_{S_i} \frac{\partial G}{\partial N} dS$

De deriverte i Ligning (D.1) er gitt ved

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln z = \frac{\partial}{\partial x} \ln z \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{z}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \ln z = \frac{i}{z},$$

og setter vi dette inn i Ligning (D.1) får vi

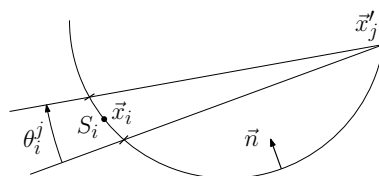
$$\begin{aligned} \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial n} \ln r dS &= \Re \int_{S_i} \frac{-dy + i dx}{z} \\ &= \Re \int_{S_i} \frac{i dx + i^2 dy}{z} \\ &= \Re \int_{S_i} \frac{i dz}{z} \\ &= \Re \{ i \ln z |_{\mathbf{x}_{i-\frac{1}{2}}}^{\mathbf{x}_{i+\frac{1}{2}}} \}. \end{aligned} \tag{D.2}$$

Vi har at

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln |z| + \arg z \\ i \ln z &= i \ln |z| - \arg z, \end{aligned}$$

og Ligning (D.2) kan derfor skrives

$$\Re \{ i \ln z |_{\mathbf{x}_{i-\frac{1}{2}}}^{\mathbf{x}_{i+\frac{1}{2}}} \} = -\arg z |_{\mathbf{x}_{i-\frac{1}{2}}}^{\mathbf{x}_{i+\frac{1}{2}}} = -\theta_i^j.$$



Fysisk er θ_i^j gitt som fluks-
sen ut av en åpningsvin-
kel.

Den samme tolkningen kan man også benytte i 3D, hvor integralet er gitt som fluksen fra kilden i punktet du står og ut av en flate, som er det panelet man integrerer over.

Tillegg E

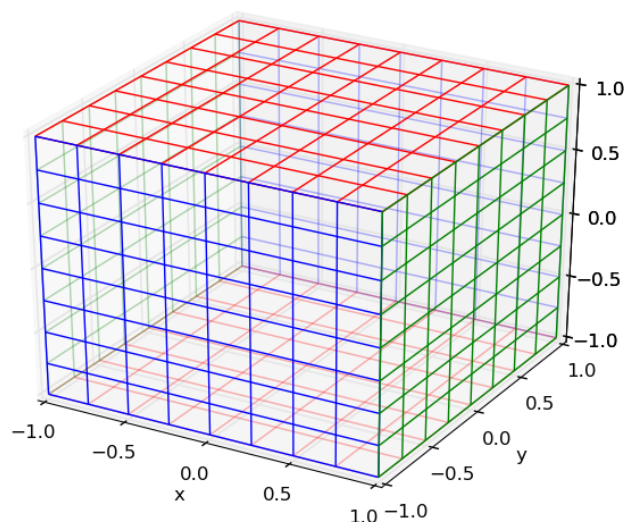
WAMITTM

Jobbing med WAMITTM har vært en stor del av prosessen i denne masteroppgaven. Rammeverket til programmet og kompleksiteten til kildekoden er stor, så det har naturlig nok tatt mye tid å sette seg inn i, for å modifisere koden på best mulig måte. Det er en relativt gammel kode som er optimalisert for en gammel Intel Fortran-kompilator, så underveis har vi også opplevd det som kun kan forklares som kompilatorfeil. Med tid og stundes har man dog klart å omgå problemene som oppstod og til slutt har vi fått et program som fungerer bra.

Det er velkjent at når vi tar med det indre problemet, så får vi et ligningssett som er dårligere kondisjonert, og vi trodde lenge det var årsaken til mange av problemene våre, men strukturen vi endte opp med har ingen problemer knyttet til dette.

WAMITTM løser bare det ytre $N \times N$ -systemet, så vår jobb har vært å utvide ligningssystemet som løses samt endring av randbetingelsene. Vi har skrevet en egen subrutine som tar inn det originale ligningssettet og returnerer den nye $2N \times 2N$ -matrisen og de nye høyresidene som er på en form som matriseløseren i WAMITTM kan håndtere.

Til beregninger av identiter og relasjoner som bruker ren trykkintegrasjon er ingenting endret annet enn potensialet som brukes er differansen mellom det ytre og det indre. I beregning av Haskindrelasjonen er randbetingelsene endret. Energirutiner er skrevet selv, da dette ikke har vært i WAMITTM, men vi har kunnet gjenbruke mye av koden fra drifrutinene. Med energirutinene på plass lagde vi også en rutine for den alternative dempingen, for til slutt å legge til de porøse bidragene i driften. Driften er beregnet på to måter, versjonen før man omskriver ligningen ved hjelp av energiligningen, og etter.



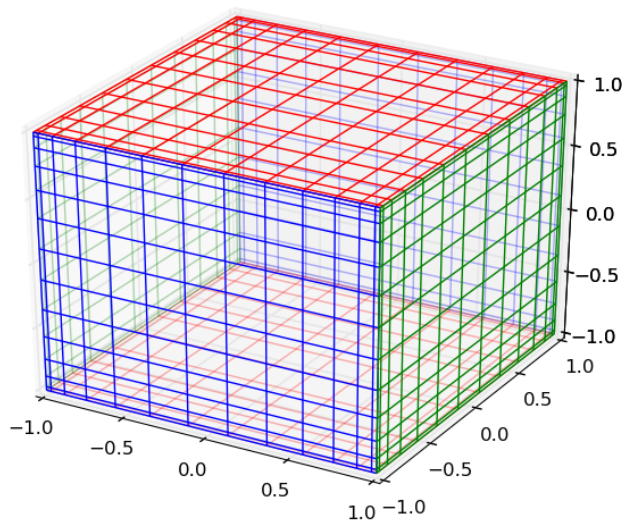
Figur E.1: Eksempelmesh av kube med 384 paneler.

E.1 Mesh

WAMIT™ har en struktur på meshet hvor hvert panel er definert av 4 punkter, satt i en rekkefølge med klokka, sett innenfra geometrien. I denne oppgaven er det brukt kube, kule og halvkule. Kuben er kun brukt for å se på symmetri i addert masse- og dempningskoeffisientene, men den er også utgangspunktet for kulen. Kulen har vi lagd ved å parametrisere kubens inn på enhetskulen, og på den måten unngå singulariteter, eller paneler som er veldig mye mindre enn andre. Ettersom det er mesh av våt overflate som WAMIT™ skal ha, måtte vi gjøre halvkulen på en egen måte.

E.2 Kule

Meshingen av kubens er relativt triviell, men for å lage kulen trengte vi en transformasjon som sendte punktene på kubens inn på en kule. Transformasjonen vi har



Figur E.2: Eksempel mesh av kube med 1014 paneler hvor meshet er forfinet mot hjørnene ved bruk av en cosinusfordeling av punktene.

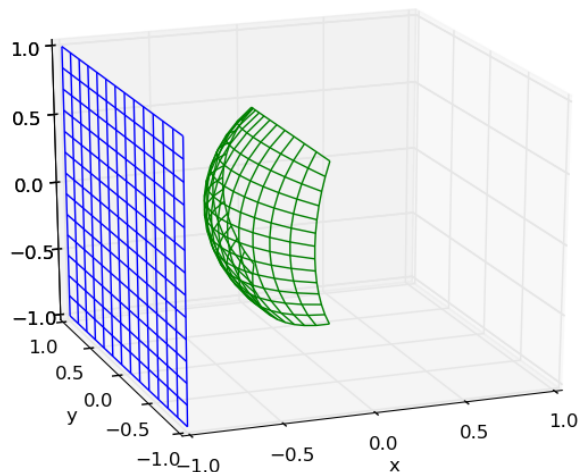
brukt er gitt ved [21]

$$\begin{aligned}
 x' &= x \sqrt{1 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} + \frac{y^2 z^2}{3}} \\
 y' &= y \sqrt{1 - \frac{z^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{z^2 x^2}{3}} \\
 z' &= z \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2 y^2}{3}}
 \end{aligned}$$

Se resultatet i figur E.3 og E.4.

E.3 Halvkule

Når geometrien tas opp til fluidets overflate, må vi endre diskretiseringen siden det i WAMIT™ er kun våt overflate som skal diskretiseres. For kube er det trivielt å endre, men en litt annen teknikk må brukes for å lage en halvkule, enn den som ble brukt i tillegg E.2. Valget falt her på en invers stereografisk projeksjon.



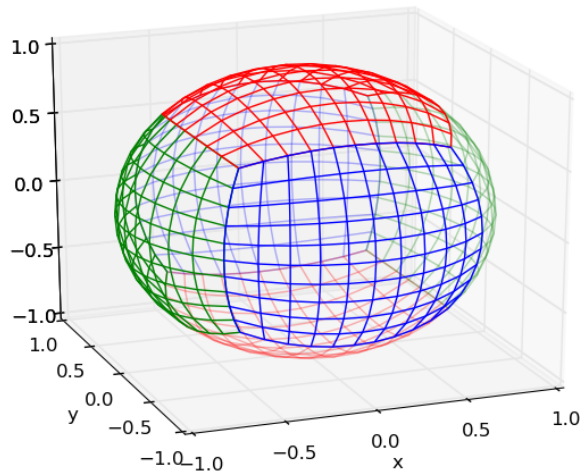
Figur E.3: Her er punktene på en side av kubens projisert inn på et kuleskall. Av illustrative hensyn er kuleskallet forskyvet i positiv x-retning.

Stereografisk projeksjon er en form for planprojeksjon, og har tidligere vært brukt for kart over halve kloden. Hvis vi i kartesiske koordinater setter (x, y, z) på kulen og (X, Y) i planet, så vil projeksjonen og dens inverse være gitt av [22]

$$\begin{aligned} (X, Y) &= \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \\ (x, y, z) &= \left(\frac{2X}{1+X^2+Y^2}, \frac{2Y}{1+X^2+Y^2}, \frac{-1+X^2+Y^2}{1+X^2+Y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

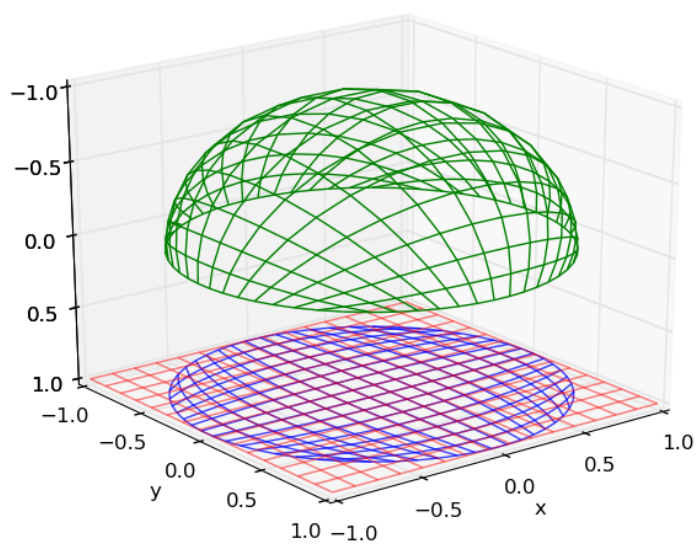
For å lage halvkulen med Ligning (E.1) ser vi av z-komponenten at ytterpunktene må ligge på en sirkel med radius 1. Vi valgte her og projisere et kvadrat til en sirkel, siden det er enkelt å diskretisere et kvadrat i paneler. Denne projiseringen er en lik den for en kule, som vi brukte i tillegg E.2, bare i to dimensjoner.

$$(X', Y') = \left(X \sqrt{1 - \frac{Y^2}{2}}, Y \sqrt{1 - \frac{X^2}{2}} \right) \quad (\text{E.2})$$



Figur E.4: Eksempelmesh av kule med 600 paneler. Her er alle sidene på kubens projisert inn på en kule med radius 1 og origo i (0,0,0)

Kvadratet blir projisert til en sirkel ved Ligning (E.2) og sirkelen blir igjen projisert til et kulskall ved Ligning (E.1). Resultatet kan sees i figur E.5



Figur E.5: Eksempelbilde av mesh med 225 paneler. Avbildet fra kvadrat til sirkel, og fra sirkel til halvkuleskall. Kuleskallet er her forskjøvet i z-retning av illustrative hensyn.

Tillegg F

Alternativ utledning av koblete ligninger i diffraksjon

I kapittel 2.6.2, så vi hvordan det totale diffraksjonspotensialet kan løses. En alternativ måte å løse dette på er å gjøre det for ϕ_7 direkte. Det ytre og indre diffraksjonspotensialet oppfyller begge betingelsene på fri overflate, så vi kan også benytte Green's teorem på disse

$$2\pi\phi_7^+ + \iint_{S_B} \phi_7^+ \frac{\partial G}{\partial n} dS = \iint_{S_B} G \frac{\partial \phi_7^+}{\partial n} dS \quad (\text{F.1})$$

$$-2\pi\phi_7^- + \iint_{S_B} \phi_7^- \frac{\partial G}{\partial n} dS = \iint_{S_B} G \frac{\partial \phi_7^-}{\partial n} dS, \quad (\text{F.2})$$

hvor vi som tidligere bruker $\mathbf{n} = \mathbf{n}^+$ og dermed flipper fortegnet på første ledd i (F.2). Randbetingelsene i diffraksjon er som følger

$$\frac{\partial \phi_7^+}{\partial n} = \frac{\partial \phi_7^-}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_0}{\partial n} - i\alpha(\phi_7^+ - \phi_7^-) \quad , \quad \alpha = \frac{\rho\omega b}{\mu} .$$

Vi definerer

$$\Phi_7 = \phi_7^+ + \phi_7^- \quad , \quad \Psi_7 = \phi_7^+ - \phi_7^-$$

og gjør samme prosedyre som i seksjon 2.6.1 og 2.6.2, nemlig tar sum og differanse av ligningene (F.1) og (F.2). Venstresidene blir helt like som før, men høyresidene

TILLEGG F. ALTERNATIV UTLEDNING AV KOBLEDE LIGNINGER I DIFFRAKSJON

blir forskjellig

$$2\pi\Phi_7 + \iint_{S_B} \Psi_7 \frac{\partial G}{\partial n} dS = 0$$
$$2\pi\Psi_7 + \iint_{S_B} \Phi_7 \frac{\partial G}{\partial n} dS + 2\alpha \iint_{S_B} \Psi_7 G dS = -2 \iint_{S_B} G \frac{\partial \phi_0}{\partial n} dS .$$

Programmeringsmessig er dog dette en metode som er hakket tyngre å utføre, fordi høyresiden vi ender opp med, er noe mer komplisert.

Bibliografi

- [1] G. Taylor, “Fluid flow in regions bounded by porous surfaces,” in *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 234, pp. 456–475, The Royal Society, 1956.
- [2] H. Darcy, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application...* Victor Dalmont, 1856.
- [3] F. Zhao, T. Kinoshita, W. Bao, R. Wan, Z. Liang, and L. Huang, “Hydrodynamics identities and wave-drift force of a porous body,” *Applied Ocean Research*, vol. 33, no. 3, pp. 169–177, 2011.
- [4] A. T. Chwang, “A porous-wavemaker theory,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 132, pp. 395–406, 1983.
- [5] A. Chwang and W. Li, “A piston-type porous wavemaker theory,” *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 17, no. 4, pp. 301–313, 1983.
- [6] B. Molin, “Hydrodynamic modeling of perforated structures,” *Applied Ocean Research*, vol. 33, no. 1, pp. 1–11, 2011.
- [7] S. An and O. M. Faltinsen, “Linear free-surface effects on a horizontally submerged and perforated 2d thin plate in finite and infinite water depths,” *Applied Ocean Research*, vol. 37, pp. 220 – 234, 2012.
- [8] J. S. Dokken, “Første og andre ordens krefter på porøse geometrier med lineær og kvadratisk hastighets- og trykkrelasjon,” Master’s thesis, Universitetet i Oslo, 2016.
- [9] B. Molin and F. Remy, “Experimental and numerical study of the sloshing motion in a rectangular tank with a perforated screen,” *Journal of Fluids and Structures*, vol. 43, pp. 463–480, 2013.
- [10] F. Zhao, W. Bao, T. Kinoshita, and H. Itakura, “Theoretical and experimental study on a porous cylinder floating in waves,” *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, vol. 133, no. 1, p. 011301, 2011.

BIBLIOGRAFI

- [11] S. S. Heggen, “Første og andre ordens krefter virkende på porøse plater i et fluid med en fri overflate, med applikasjoner til fiskemerder i norske fjorder.” Master’s thesis, Universitetet i Oslo, 2015.
- [12] J. N. Newman, *Marine hydrodynamics*. MIT press, 1977.
- [13] J. Newman, B. Sortland, and T. Vinje, “Added mass and damping of rectangular bodies close to the free surface,” *Journal of ship research*, vol. 28, no. 4, pp. 219–225, 1984.
- [14] P. McIver and D. Evans, “The occurrence of negative added mass in free-surface problems involving submerged oscillating bodies,” *Journal of engineering mathematics*, vol. 18, no. 1, pp. 7–22, 1984.
- [15] C. M. Linton and P. McIver, *Handbook of mathematical techniques for wave/structure interactions*. CRC Press, 2001.
- [16] J. Nossen, J. Grue, and E. Palm, “Wave forces on three-dimensional floating bodies with small forward speed,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 227, pp. 135–160, 1991.
- [17] O. Faltinsen, *Sea loads on ships and offshore structures*, vol. 1. Cambridge university press, 1993.
- [18] H. MAURO, “The drift of a body floating on waves,” *Journal of Ship Research*, vol. 4, pp. 1–5, 1960.
- [19] J. Newman, “The drift force and moment on ships in waves,” *Journal of ship research*, vol. 11, no. 1, pp. 51–60, 1967.
- [20] E. B. Saff and A. D. Snider, *Fundamentals of complex analysis for mathematics, science, and engineering*. Prentice-Hall, 1976.
- [21] P. Nowell, “Mapping a cube to a sphere,” 2005. URL: <http://mathproofs.blogspot.no/2005/07/mapping-cube-to-sphere.html>, [Online; accessed Oktober-2015].
- [22] Wikipedia, “Stereographic projection — wikipedia, the free encyclopedia,” 2016. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Stereographic_projection&oldid=704847047, [Online; accessed 9-January-2016].