UiO : Matematisk institutt
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Euklids Elementer

En sammenligning av geometri og geometrisk algebra i Euklids *Elementer* og i et nyere læreverk

Preben Lie

Masteroppgave, våren 2016

Forsidedesign av Martin Helsø

Forsiden viser et utsnitt av rotsystemet til den eksepsjonelle liegruppen E_8, projisert ned i planet. Liegrupper ble oppfunnet av den norske matematikeren Sophus Lie (1842–1899) for å uttrykke symmetriene til differensiallikninger og spiller i dag en sentral rolle i flere deler av matematikken.

Universitetet i Oslo

Matematisk institutt

MAT5930L, Masterspesialisering i matematikk for Lektorprogrammet.

Euklids Elementer

Skrevet av:
Preben Lie

Veileder:
Kristian Ranestad

Mai 2016

Innhold

1 Innledning

Euklids *Elementer* er et av de mest studerte verkene i historien. Ikke bare det, men det er også en av de mest brukte lærebøkene. Dette verket har i stor grad vært med på å danne grunnlaget for matematikken [Str93]. *Elementer* kjennetegnes ved at det ikke brukes matematiske tegn, og alle konstruksjoner som blir gjort kan konstrueres med bare passer og linjal. Bevis ved å måle størrelsen til to størrelser blir ikke regnet som gyldig. Man har kun lov til å bruke at størrelser enten er like, eller at den ene er større enn den andre [Fit08].

Oppgaveordlyden for denne oppgaven er:

> Gjør rede for hvordan Euklid i Elementer, bok I-III, definerer grunnleggende begreper i plangeometri og viser konstruksjoner og setninger ved hjelp av geometrisk algebra. Legg særlig vekt på den logiske strukturen i språkbruken, og sammenlign denne med introduksjon av algebra og geometri i læreverk brukt i grunnskolen.

Vi skal altså fokusere på de tre første bøkene. Disse bøkene dreier seg om plangeometri. Bok I omhandler de grunnleggende definisjonene og proposisjonene innen plangeometri. Her er det hovedsakelig snakk om rette linjer, eller figurer som består av bare rette linjer og vinkler. Bok II dreier seg om geometrisk algebra og bruker ofte kvadrater og rektangler. Bok III omhandler sirkler og egenskapene de har. Her er det også snakk om vinkler inni sirkler og tangenter [Fit08].

Euklid skriver kun med ord, og bruker ikke matematiske symboler. Så hvordan ville da proposisjonene hans se ut i moderne notasjon? I dag brukes den ikke som lærebok i skolen, men kan vi fremdeles se spor i de lærebøkene som brukes i dag? Blir noen temaer introdusert på samme måte? Kan vi finne noen av Euklids proposisjoner i moderne læreverk i grunnskolen?

Ut fra oppgaveordlyden og disse spørsmålene har jeg valgt å bruke problemstillingen:

> *Hvordan introduserer Euklid matematiske begreper i bok I-III av* Elementer*, og hvordan vil proposisjonene hans være i moderne notasjon? Hvilke likheter og forskjeller kan vi se mellom Euklids* Elementer*, og lærebøker som introduserer geometri og algebra i dag?*

Siden jeg ikke kan gresk, kommer jeg til å ta utgangspunkt i Fitzpatrick sin engelske oversettelse av *Elementer* fra 2008 ([Fit08]). I noen tilfeller ønsker jeg å se på hva som står i originalteksten, og om det kan oppklare noen misforståelser eller tvetydigheter. Derfor hadde jeg en samtale med Jens Erland Braarvig, som er professor i religionshistorie ved universitetet i Oslo. Vi snakket om noen formuleringene og betydningen av enkeltord, sett fra den greske og den latinske utgaven.

Jeg har hatt Kristian Ranestad som veileder. Vi har hatt flere samtaler om formuleringer og formelt oppsett, samt hva jeg skulle fokusere på.

I *Elementer* er det ikke noe annet skille mellom en proposisjon og beviset for proposisjonen enn et avsnitt. Jeg velger å holde meg på denne formen. Proposisjonene avsluttes med en svart boks. Setningene der jeg oversetter Euklids proposisjoner, velger jeg derimot å ha på den mer moderne formen der setningen er i kursiv og beviset står separat.

I seksjonen om skolematematikk, har jeg valgt å bruke læreverket *Faktor* som er utgitt av Cappelen. Disse bøkene blir brukt på 8.-10. trinn. Siden jeg bare ser på ett læreverk, er ikke utvalget representativt, men jeg ønsker bare å se på noen likheter og forskjeller mellom dette verket og *Elementer*. I disse bøkene er ikke definisjonene satt opp formelt som definisjoner. Det jeg kaller for definisjoner i seksjon 6 er altså når et nytt begrep blir innført. Regler er derimot innført helt tydelig som en regel, og det samme gjelder eksempler.

2 Historisk motivasjon

På grunn av praktiske behov innen teknikk og økonomi, ble matematikken utviklet. Derfor kan man anta at den er omtrent like gammel som skriftspråket. Men det var grekerne som brukte matematikken som et teoretisk system og byggverk. Filosofien og matematikken vokste opp samtidig. Selv om Platon ikke var matematiker, var han veldig interessert i matematikk, og matematikken spilte sannsynligvis en stor rolle i utviklingen av idélæren. Grekerne regnet mekanikk, optikk, astronomi og musikkteori som praktiske matematiske områder. Men den rene matematikken ble regnet som en abstrakt og generell vitenskap; vitenskapen om det formelle og uforanderlige [Str93].

Euklids *Elementer* er et av de mest berømte matematiske verkene som er skrevet. Det ble brukt som lærebok fra det ble skrevet, rundt 300 f. Kr., og kontinuerlig i omtrent 2000 år framover [Fit08]. Kun et bokverk har blitt studert mer enn *Elementer*, nemlig Bibelen [HP14a]. Euklid står sannsynligvis ikke bak de fleste av proposisjonene i *Elementer*, men han samlet og organiserte dem på en logisk måte, slik at man kunne se at de fulgte fra fem enkle aksiomer. Andre matematikkverk hadde blitt skrevet før Euklids *Elementer*, men Euklids verk var så tydelig og konsist at man sluttet å bruke alle tidligere verk [Str93]. Den matematiske bevismodellen kommer fra Euklids *Elementer*, så vi kan altså si at mye av matematikkens grunnlag ble dannet i dette verket [Maz14].

Selv om *Elementer* er så berømt, vet vi lite om Euklid selv. Sannsynligvis kom han til Alexandria i sammenheng med opprettelsen av byens bibliotek og museum, rundt 300 f. Kr., og regnes som grunnleggeren av den matematiske skolen der. Euklid skrev ikke bare *Elementer*, men også verk innen de praktiske matematiske områdene. Det sies at han var en meget god pedagog. En historie forteller om en rik mann som ønsket å lære matematikk. Etter ett teorem spør han om han vil ha noen nytte av dette. Euklid henvender seg til en slave og sier: "Gi ham tre oboler siden han føler han må tjene på det han lærer." [Str93].

Euklid har hatt stor betydning i senere tid. En ukjent, nesten førti år gammel humanist kom over et eksemplar av *Elementer*. Han ble imponert over den logiske strukturen og de overbevisende bevisene. På grunn av dette ønsket han å lage en eksakt vitenskap om mennesket. Denne humanisten er den kjente filosofen Thomas Hobbes [Str93].

Elementer har blitt diskutert siden det ble skrevet, spesielt postulat 5, også kjent som parallellpostulatet. Mange mente at det ikke kunne stå som et postulat, men burde bli sett på som et teorem som måtte bevises. Først på 1800-tallet ble det bevist at det ikke førte til selvmotsigelser dersom man så bort fra parallellpostulatet. Man introduserte også nye geometrier, ikke-euklidske geometrier, som så bort fra postulat 5 [Str93].

3 Didaktisk motivasjon

En stor forskjell på Euklids *Elementer* og matematikkbøkene skolene bruker i dag er at Euklid ikke bruker matematiske symboler, kun tekst. Bruk av symboler kan ha stor betydning for elevers forståelse av matematikken [Öst06]. La oss derfor se litt på hva matematiske symboltegn har å si for forståelsen.

Matematikk skiller seg ut fra mange fag på grunn av det spesielle språket det bruker. Det har egne faguttrykk, som de andre fagområdene også har, men også et symbolspråk i tillegg til dette. Dette symbolspråket kan betraktes som et eget språk, i følge definisjonen av språk [Öst06]. Men det at det blir introdusert et nytt språk, som er svært forskjellig fra andre språk elevene har sett, er med på å skape vanskeligheter for mange elever. Disse vanskelighetene kan faktisk være større enn om det kun hadde blitt brukt ord.

La oss begynne med å se på "=", altså likhetstegnet. Sfard [Sfa91] sier at dette symbolet både kan sees på som symbol som omhandler en relasjon, eller som en kommando som brukes til å utføre operasjoner. Likhetstegnet er et av de viktigste symbolene i matematikken, og hvis elevene begynner å bli forvirret allerede der, kan vi skjønne at de matematiske symbolene kan være vanskelige å forholde seg til.

Et annet mye brukt tegn er tegnet "+", addisjonstegnet. Hvis vi skal uttale dette tegnet i en setning, sier vi "pluss", "addere", "legge til" eller "øke med". Her ser vi at de matematiske tegnene ofte kan oversettes til forskjellige ord. Elevene kan altså ikke på samme måte holde seg til hvordan ordet høres ut, men må i stedet bruke anvendelsen av symbolet for å skape en forståelse for det [Öst06].

I en test med 100 elleveåringer ble spørsmålene stilt både skriftlig med mye matematiske symboler, og muntlig. I det første tilfellet klarte ingen av elevene over 40 % av oppgavene, mens i den andre delen var det bare 30 elever som fikk under 40 % riktig. Her ser vi tydelig at elevene hadde problemer med de matematiske symbolene, og ikke matematikken i seg selv [Chi12]. Symboltunge uttrykk kan være med på å "overvinne" elevene på den måten at de blir avskrekket fra å angripe oppgaven.

Symboltunge regler og uttrykk kan bli noe som elever bare pugger, uten å ha noen forståelse for hva dette betyr. Men som Björkqvist [Bjö93] sier så er konkrete situasjoner med på å hjelpe elevene til å danne forståelse og bygge opp begreper. Dette kan føre til at de abstrakte symbolene i matematikken hindrer elevene i å skape denne forståelsen av en matematisk situasjon som i realiteten er ganske konkret. Denne manglende forståelsen kan føre til at elevene bare pugger den uforståelige formelen, og dermed ikke klarer å bruke dette resultatet til å danne forståelse for temaer som er mer avanserte [Sfa91]. Dette kan igjen føre til at elevene kommer inn i en ond sirkel hvor de har problemer med å danne en forståelse for nytt stoff på grunn av manglende forståelse av tidligere stoff.

Vi bør nevne at Sfard [Sfa91] mener at geometriske idéer er mindre abstrakte enn andre områder av matematikken. Dette er i stor grad fordi geometriske representasjoner er mer visuelle enn andre matematiske representasjoner. Derfor blir strukturen, noe Sfard mener er det mest abstrakte, lettere å forstå. Denne forståelsen kan bli oppnådd uten å ha forståelse for prosessene som ligger til grunn. Euklids framleggelse av matematikken burde altså være lettere å forstå, siden den er mer visuell.

Men hvis det bare var en ulempe med matematiske symboler, ville vi nok ikke brukt dem. Ved hjelp av de abstrakte symbolene matematikken bruker, kan man mye lettere gå mellom lignende situasjoner ved kun å gjøre små endringer i uttrykket [Bjö93]. Med andre ord; det er ofte lettere å manipulere en situasjon beskrevet med algebraiske symboler, enn en setning kun bestående av ord og matematiske begreper [Maz14]. En av hensiktene med matematiske symboler er også å fjerne misforståelser og tvetydigheter, som er viktig siden matematikken er avhengig av presise og entydige definisjoner.

Et av problemene kan altså ligge i at elevene bare sliter med det matematiske symbolspråket. Siden matematikk sjelden blir presentert som et språk for elevene, er det ikke sikkert de selv kan se at de må lære deler av matematikken på en lignende måte som de lærer tysk eller spansk [Maz14].

Det er tydelig at det både er fordeler og ulemper med det matematiske symbolspråket. La oss nå derfor bevege oss over til å se på Euklids *Elementer*.

4 Definisjoner i Elementer

I denne seksjonen skal vi se på definisjonene, postulatene og de allmenne slutningsreglene som Euklid introduserer og bruker i proposisjonene sine.

4.1 Definisjoner

Det første Euklid starter med i *Elementer*, bok I, er å introdusere en rekke definisjoner. Jeg vil prøve å holde meg så nær til originalen og den engelske oversettelsen som mulig. Derfor vil jeg bruke noen ord og begreper i presentasjonen av definisjonene og proposisjonene som ikke blir brukt til vanlig i skolematematikken på norsk, men det burde komme tydelig fram hvilken egenskap jeg beskriver. La oss starte med å se på de tre første definisjonene:

Definisjon 4.1.1 ([Fit08, Definisjon 1.1, s. 6])**.** *Et punkt er det som ikke har noen del.*

Definisjon 4.1.2 ([Fit08, Definisjon 1.2, s. 6])**.** *Og en linje er en lengde uten bredde.*

Definisjon 4.1.3 ([Fit08, Definisjon 1.3, s. 6])**.** *Og ekstremene til en linje er punkter.*

Euklids språk kan være litt tungt av og til, eller noen av setningene er vanskelige å oversette. Vi ser dette ganske tydelig i definisjon 4.1.1. Det han mener her er at et punkt er den minste delen, og at den derfor ikke kan deles videre. Eller slik som vi vanligvis definerer det nå; et punkt er et element uten utstrekning. Vi ser også at definisjon 4.1.2 og 4.1.3 er annerledes enn hvordan vi definerer disse i dag. Det han kaller en linje er hva vi nå gjerne kaller en kurve, eller mer korrekt, et kurvestykke, siden den er avgrenset av punkter i hver ende og dermed er endelig. Men Euklid spesifiserer av og til at et linjestykke er endelig, noe som kan tyde på at han selv mener definisjonen ikke nødvendigvis er helt eksakt.

Euklid opererer ikke med et lengdemål, så når vi snakker om lengde er det fordi linjen har en lengde eller en utstrekning. Han er kun interessert i størrelsesforhold mellom lengder, ikke etter å sette et mål på den. I dag vil vi si at en linje eller kurve har en lengde, mens Euklid, i følge definisjon 4.1.2 så er en linje en lengde. Spesifikt lengden mellom to punkter som vi ser i definisjon 4.1.3.

Det vi tenker på som en linje, eller nærmere bestemt et linjestykke, er det

Euklid kaller en rett-linje.

Definisjon 4.1.4 ([Fit08, Definisjon 1.4, s. 6])**.** *En rett-linje er en som ligger jevnt med punkter på seg selv.*

Definisjon 4.1.4 kan virke forvirrende språklig. For hva mener han egentlig med at en linje ligger jevnt med punkter på seg selv? Fra den greske teksten kan man tolke dette til å bety at forlengelsen av linjen til neste punkt ligger rett på seg selv. Forlengelsen vil altså bare legge til et linjestykke til linjen i samme retning som det forrige linjestykket slik at den endelige linjen er rett.

Men i andre tilfeller ser vi at Euklid opererer med samme definisjon som det vi gjør i dag. Dette kan vi se i de første definisjonene som omhandler overflater.

Definisjon 4.1.5 ([Fit08, Definisjon 1.5, s. 6])**.** *En overflate er det som kun har lengde og bredde.*

Definisjon 4.1.6 ([Fit08, Definisjon 1.6, s. 6])**.** *Og ekstremene til en overflate er linjer.*

Definisjon 4.1.7 ([Fit08, Definisjon 1.7, s. 6])**.** *En plan overflate er en som ligger jevnt med rett-linjer på seg selv.*

Vi ser at definisjon 4.1.5, 4.1.6 og 4.1.7 ligner henholdsvis på definisjon 4.1.2, 4.1.3 og 4.1.4. Så Euklid bygger opp strukturen til linjer og overflater på samme måte. Det Euklid kaller en plan overflate er det vi i skolen kaller et plant område, men det burde komme tydelig fram fra definisjonene at disse to er de samme. Igjen kan det være vanskelig å vite om Euklid opererer med endelige eller uendelige overflater, så om han mener et plant område eller et plan må vurderes fra situasjon til situasjon.

Definisjon 4.1.8 ([Fit08, Definisjon 1.8, s. 6])**.** *Og en plan vinkel er inklinasjonen mellom linjene, når to linjer i et plan møtes, og ikke ligger på en rett-linje.*

Definisjon 4.1.9 ([Fit08, Definisjon 1.9, s. 6])**.** *Og når linjene som inneholder vinkelen er rette, så kalles vinkelen rettlinjet.*

I skolematematikken opererer vi bare med rettlinjede vinkler. Vi kommer til å se at Euklid også kun bruker rettlinjede vinkler i de tre første bøkene, som er det som er i fokus i denne oppgaven.

Definisjon 4.1.10 ([Fit08, Definisjon 1.10, s. 6]). *Og når en rett-linje som står på en annen rett-linje lager tilstøtende vinkler som er like hverandre, er hver av vinklene en rett-vinkel og den førstnevnte rett-linjen kalles en ortogonal til den som den står på.*

Ordet som er brukt i den engelske oversettelsen er 'perpendicular'. Dette ordet kan oversettes til det norske ordet perpendikulær, men ortogonal er også et ord som kan brukes. Siden ortogonal er mer vanlig i skolematematikken i Norge, velger jeg å bruke dette ordet. Uttrykket nabovinkler blir ofte brukt i stedet for tilstøtende vinkler, spesielt i skolematematikken.

Definisjon 4.1.11 ([Fit08, Definisjon 1.11, s. 6]). *En butt vinkel er en som er større en en rett-vinkel.*

Definisjon 4.1.12 ([Fit08, Definisjon 1.12, s. 6]). *Og en spiss vinkel er en som er mindre enn en rett-vinkel.*

Dette er de samme definisjonene som vi bruker, men for Euklid er det noe mer. På samme måte som han ikke har noen måleenhet for lengde, utenom lengdeforhold til andre lengder, så har han heller ikke et nøyaktig mål for vinkler. Han opererer bare med rett-vinkler, sum av flere rett-vinkler eller halve rett-vinkler som et mål på hvor stor en vinkel er. Selv om han kan si at to vinkler er like store, kan han ikke alltid si hvor store disse er. Her har han altså også definert det eneste vinkelmålet han har, som ikke kun er et forholdsmål.

Definisjon 4.1.13 ([Fit08, Definisjon 1.13, s. 6]). *En grense er det som er en ekstrem for noe.*

Det engleske ordet som er brukt i definisjon 4.1.13 er 'boundary'. Dette kan oversettes til både grense og begrensing, men jeg mener ordet grense er en bedre beskrivelse av egenskapene disse ekstremene har.

Definisjon 4.1.14 ([Fit08, Definisjon 1.14, s. 6]). *En figur er det som er inneholdt av en eller flere grenser.*

Fra den engelske oversettelsen av definisjon 4.1.14 av Fitzpatrick [Fit08] kommer det ikke tydelig fram om det er snakk om endelige og uendelige figurer, men ordet som brukes på både gresk og latin betyr omsluttet av, omgitt av eller omfattet av, noe som tyder på at han snakker om endelige figurer.

Definisjon 4.1.15 ([Fit08, Definisjon 1.15, s. 6])**.** *En sirkel er en plan figur omsluttet av en enkelt linje (som kalles omkrets), slik at alle rett-linjer som stråler ut mot omkretsen fra et punkt av dem som ligger på inssiden av figuren er like hverandre.*

Definisjon 4.1.16 ([Fit08, Definisjon 1.16, s. 6])**.** *Og dette punktet kalles senteret i sirkelen.*

Ordet som bruker for omkrets er ordet periferi. Dette er et godt eksempel på at Euklids språk bruker hverdagslige uttrykk, og burde derfor ikke være for komplisert å lese. De rette linjene som stråler ut fra senteret til omkretsen er det vi kaller radien. Euklid definerer aldri radius andre steder enn i definisjon 4.1.15, men dette er noe han bruker videre. Vi møter på dette allerede i proposisjon 5.1.1.

Definisjon 4.1.17 ([Fit08, Definisjon 1.17, s. 6])**.** *Og en diameter av sirkelen er enhver rett-linje trukket gjennom senteret og avsluttet i hver retning av omkretsen. Og enhver slik rett-linje halverer sirkelen.*

Fra definisjon 4.1.17 ser vi at diameteren består av to radier som går i motsatt retning av hverandre. Dette er ikke noe Euklid definerer, men det burde komme klart frem at radius er halvparten av diameter.

Definisjon 4.1.18 ([Fit08, Definisjon 1.18, s. 6])**.** *Og en halvsirkel er figuren som er omgitt av diameteren og omkretsen som blir skåret av den. Og senteret til halvsirkelen er det samme punktet som senteret til sirkelen.*

Definisjon 4.1.19 ([Fit08, Definisjon 1.19, s. 6])**.** *Rettlinjede figurer er de figurene som er inneholdt mellom rett-linjer: trilaterale figurer er de som er inneholdt mellom tre rett-linjer, kvadrilaterale figurer er de som er inneholdt mellom fire rett-linjer, og multilaterale figurer er de som er inneholdt mellom mer enn fire.*

I følge Euklid er altså en figur ikke definert ut fra hvor mange hjørner den har, men antall sidekanter. En trekant er altså området eller figuren som er inneholdt blant tre rette linjer, og en firkant blant fire rette linjer.

Definisjon 4.1.20 ([Fit08, Definisjon 1.20, s. 6])**.** *Og av de trilaterale figurene: en likesidet trekant har tre like sider, en likebeint trekant har to like sider, og en scalene trekant har tre ulike sider.*

Ordet 'scalene' er det som blir brukt på engelsk. Jeg har ikke klart å finne en god norsk oversettelse av ordet, så jeg har valgt å bruke det engelske ordet. Begrepet blir uansett forklart, så det burde ikke føre til forvirring eller misforståelser.

Definisjon 4.1.21 ([Fit08, Definisjon 1.21, s. 7])**.** *Og videre av de trilaterale figurene: en rettvinklet trekant er en som har en rett vinkel, en buttvinklet trekant er en som har en butt vinkel, og en spissvinklet trekant er en som har tre spisse vinkler.*

I stedet for buttvinklet trekant og spissvinklet trekant, kan vi bruke henholdsvis butt trekant og spiss trekant.

Definisjon 4.1.22 ([Fit08, Definisjon 1.22, s. 7])**.** *Og for de kvadrilaterale figurene: et kvadrat er det som er rettvinklet og likesidet, et rektangel er det som er rettvinklet men ikke likesidet, en rombe er det som er likesidet men ikke rettvinklet, og en romboide er det som har motstående sider og vinkler like hverandre men hverken rettvinklet eller likesidet. Og la alle andre kvadrilaterale figurer utenom disse bli kalt trapeser.*

Her ser vi en av de mange misforståelsene i skolen i dag. Hvis elever blir spurt om hva definisjonen av et kvadrat er gir de vanligvis definisjonen av en rombe i stedet for. Dette kan skyldes at lærere ikke legger stor vekt på dette, fordi man lett kan se at de er rette eller fordi det bare er slike figurer man opererer med tidlig i skolen (Forelesning, H. Aslaksen, januar 2015). I definisjonen kan vi gjerne i dag bruke at et kvadrat er snittet av en rombe og et rektangel, altså spesialtilfellet der en rombe og et rektangel er like hverandre.

Definisjon 4.1.23 ([Fit08, Definisjon 1.23, s. 7])**.** *Parallelle linjer er rettlinjer som, hvis i samme plan, og trukket til det uendelige i hver retning, ikke møtes med hverandre i noen av disse retningene.*

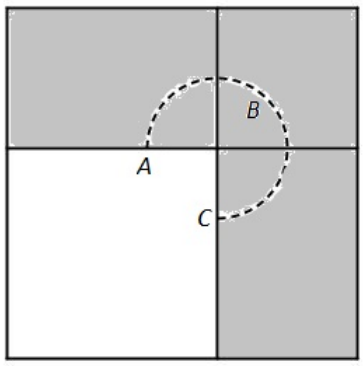
I matematikken ut videregående er dette en definisjon som blir brukt. Denne definisjonen gjelder ikke i projektiv geometri, men dette er ikke noe som Euklid opererer med.

Definisjon 4.1.24 ([Fit08, Definisjon 2.1, s. 50])**.** *Ethvert rektangulært parallellogram sies å være omsluttet av de to rett-linjene som inneholder en rett-vinkel.*

Euklid definerer her det vi kaller et rektangel, altså en firkant der alle hjørnene er rettvinklet. Måten han definerer det på er ved å si 'det som ligger under', og deretter navngi de sidekantene som har ulik lengde. Hvis det er snakk om et kvadrat, vil han bare nevne en sidekant, siden alle er like lange.

Definisjon 4.1.25 ([Fit08, Definisjon 2.2, s. 50]). *Og i enhver parallellogramisk figur, la hvilket som helst av parallellogrammene om diagonalen tatt sammen med sine to komponenter, bli kalt et gnomen.*

Et gnomen er en figur som ikke blir brukt i skolematematikken i Norge, men Euklid bruker det i noen av proposisjonene sine. Først velger man et punkt på en av sidekantene i et rektangel, og deretter trekker normalen fra sidekanten til man treffer diagonalen. Så trekker man en normal fra dette punktet og ned på alle de andre sidekantene slik at man får to kvadrater som er delt i to av diagonalen, og to rektangler. Et gnomen er da et av kvadratene og de to tilstøtende rektanglene. I figur 4.1 er ABC et gnomen.



Figur 4.1: Et gnomen.

Definisjon 4.1.26 ([Fit08, Definisjon 3.1, s. 70]). *Like sirkler er sirkler hvis diameter er like, og hvis avstander fra sentrum til omkretsen er like, altså at de har lik radius.*

At avstanden fra sentrum og ut til omkretsen betyr at sirklene har lik radius er ikke noe som nevnes av Euklid. Dette er lagt til i den engelske oversettelsen. Euklid gir aldri en ordentlig definisjon av radius, men han bruker radien i noen av proposisjonene sine.

Definisjon 4.1.27 ([Fit08, Definisjon 3.2, s. 70]). *En rett-linje som sies å berøre en sirkel er enhver linje som, møter sirkelen og produsert, ikke deler sirkelen.*

At linjen blir produsert betyr at den blir trukket i hver retning fra et punkt, slik at vi ender opp med en linje, gjerne en som er uendelig lang. Vi kan bruke begrepet forlenges. Definisjonen som vi ville brukt i dag er at linjen bare treffer sirkelen i et punkt.

Definisjon 4.1.28 ([Fit08, Definisjon 3.3, s. 70]). *Sirkler som sies å berøre hverandre er sirkler som, hvor de møtes, ikke deler hverandre.*

Definisjon 4.1.27 og definisjon 4.1.28 er ganske like. Grunnen til at han trenger å ha med begge, er at både en rett linje og en sirkelbue er spesialtilfeller av linjer, det vi ville kalt kurver i dag. Dette gjelder nemlig ikke for en generell kurve, noe som burde være opplagt.

Definisjon 4.1.29 ([Fit08, Definisjon 3.4, s. 70]). *I en sirkel, rett-linjer som sies å være like langt fra sentrum når normalene til dem blir tegnet fra senteret er like.*

Definisjon 4.1.30 ([Fit08, Definisjon 3.5, s. 70]). *Og den rett-linjen som sies å være lengre fra sentrum, blir truffet av den lengste normalen fra sentrum.*

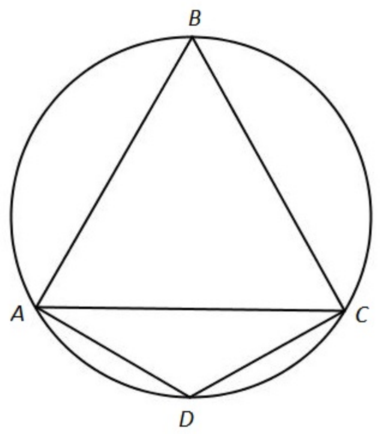
Definisjon 4.1.31 ([Fit08, Definisjon 3.6, s. 70]). *Et sirkelsegment er figuren som er omgitt av en rett-linje og en omkrets av en sirkel.*

Definisjon 4.1.32 ([Fit08, Definisjon 3.7, s. 70]). *Og vinkelen av et segment er inneholdt av en rett-linje og omkretsen av en sirkel.*

Definisjon 4.1.33 ([Fit08, Definisjon 3.8, s. 70]). *Og en vinkel i et segment er vinkelen inneholdt mellom to tilstøtende rett-linjer, når et punkt er tatt på segmentets omkrets, og rett-linjene går fra punktet og til ytterpunktene på rett-linjen som er grunnlinjen til segmentet.*

I figur 4.2 er $\angle ABC$ vinkelen i sirkelsegmentet ABC, og $\angle ADC$ er vinkelen av sirkelsegmentet ABC.

Definisjon 4.1.34 ([Fit08, Definisjon 3.9, s. 70]). *Og når rett-linjene som inneholder en vinkel kutter av en omkrets, sies det at vinkelen står på den omkretsen.*



Figur 4.2: Vinkelen i og vinkelen av et segment.

Definisjon 4.1.35 ([Fit08, Definisjon 3.10, s. 70])**.** *Og en sirkelsektor er figuren som er omsluttet av de rett-linjene som avgrenser en vinkel, og omkretsen som kuttes av dem, når vinkelen blir konstruert i sentrum av sirkelen.*

Definisjon 4.1.36 ([Fit08, Definisjon 3.11, s. 70])**.** *Lignende sirkelsegmenter er de som godtar like vinkler, eller som har vinkler som er like hverandre.*

4.2 Euklids fem postulater

Euklid bruker fem aksiomer eller postulater.

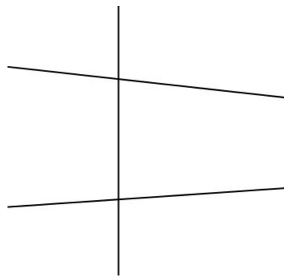
Postulat 1. *En rett-linje kan trekkes fra et punkt til et annet.*

Postulat 2. *En endelig rett-linje kan forlenges til en vilkårlig lang rett-linje.*

Postulat 3. *Rundt ethvert punkt kan man konstruere en sirkel med vilkårlig stor radius.*

Postulat 4. *Alle rette vinkler er like store.*

Postulat 5. *Når en rett-linje skjærer to andre rett-linjer slik at summen* *av de to indre vinklene på samme side er mindre enn to rette vinkler, vil de to rett-linjene møtes på den siden av den første rett-linjen hvor summen av de to indre vinklene var mindre enn to rette vinkler, når rett-linjene forlenges mot det uendelige.*



Figur 4.3: Situasjonen beskrevet i postulat 5.

I postulat 5 ser vi at geometrien Euklid jobber med er flat.

4.3 Allmenne slutningsregler

Euklid innfører eller nevner noen dagligdagse og trivielle begreper eller oppfatninger som han bruker i proposisjonene sine. Uttrykket som blir brukt på engelsk er 'common notion'. Jeg har valgt å kalle disse for allmenne slutningsregler, siden jeg mener dette er det som beskriver disse fem "reglene" best.

Slutningsregel 4.3.1 ([Fit08, Allmenn slutningsregel 1, s. 7])**.** *Ting som er like samme ting er også like hverandre.*

Slutningsregel 4.3.2 ([Fit08, Allmenn slutningsregel 2, s. 7])**.** *Og hvis like ting blir lagt til like ting, så er også totalene like.*

Slutningsregel 4.3.3 ([Fit08, Allmenn slutningsregel 3, s. 7])**.** *Og hvis like ting blir trukket fra like ting, vil også restene være like.*

Slutningsregel 4.3.4 ([Fit08, Allmenn slutningsregel 4, s. 7])**.** *Og ting som sammenfaller er like hverandre.*

Slutningsregel 4.3.5 ([Fit08, Allmenn slutningsregel 5, s. 7])**.** *Og hele er større enn delene.*

Selv om disse begrepene er allmenne oppfatninger, er ikke dette noe man kan ta forgitt når man kommer til mer avansert matematikk. Da er det noe man må kontrollere og bekrefte at stemmer. Men siden vi jobber i et flatt, todimensjonalt rom, er ting mer intuitivt, og vi antar derfor slike ting.

Vi kommer også til å se at Euklid bruker allmenne slutningsregler som han ikke nevner her. Men som de andre, er de ganske intuitive.

Disse begrepene er vanligere å se i algebra enn i geometri i skolematematikken. Men dette kommer vi tilbake til senere.

5 Proposisjoner i Elementer

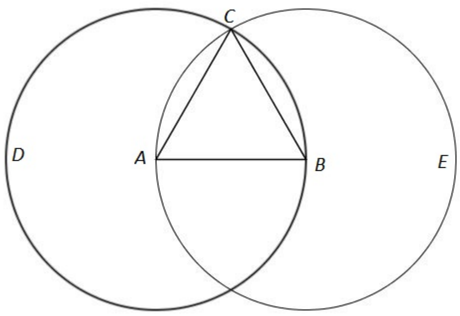
Før vi begynner med å se på proposisjonene, la oss se litt på noe så simpelt som hvordan Euklid navngir punkter. På samme måte som oss, så gir han dem navn ved hjelp av å bruke de store bokstavene i det alfabetet som er brukt til hverdags, og i Euklids tilfelle blir dette opplagt det greske alfabetet. Men han bruker også bokstaver for å nummerere definisjoner og proposisjoner. I disse tilfellene er det snakk om små bokstaver. For Euklid er det dermed ingen forskjell på å kalle hjørnene i en trekant for A, B, C og å kalle dem 1, 2, 3 (Samtale, J.E. Braarvig, 15.02.2016).

Nå skal vi se på noen av proposisjonene Euklid presenterer. Etter at en proposisjon er presentert vil jeg gi en utgave av proposisjonen i en mer moderne notasjon i form av en setning.

5.1 Proposisjoner om plangeometri med rette linjer

Proposisjonene i denne seksjonen er tatt fra bok I av *Elementer*. Som tittelen tilsier omhandler disse proposisjonene basiskunnskaper innen plangeometri med rette linjer. Bok I er den lengste av de tre første bøkene, og derfor er denne seksjonen naturlig nok den som vil inneholde flest proposisjoner i denne oppgaven.

Proposisjon 5.1.1 ([Fit08, Proposisjon 1.1, s. 8])**.** Å konstruere en likesidet trekant på en gitt endelig rett linje.



Figur 5.1: Proposisjon 5.1.1.

La AB være en gitt endelig rett linje. Vi skal konstruere en likesidet trekant på den rette linjen AB.

La sirkel BCD med senter A og radius AB og sirkel ACE med senter B og radius BA ha blitt tegnet. Og la de rette linjene CA og CB være trukket fra punkt C, der sirklene skjærer hverandre, henholdsvis til punktene A og B.

Og siden punkt A er sentrum i sirkel CDB, er AC lik AB. Igjen, siden punkt B er sentrum i sirkel CAE, er BC lik BA. Men CA har blitt vist lik AB. Dermed er CA og CB begge like AB. Men ting som er lik samme ting er også like hverandre. Dermed er CA også like CB. Altså er de tre rette linjene CA, AB og BC like hverandre.

Dermed er trekant ABC likesidet, og har blitt konstruert på den gitte endelige rette linjen AB. Og dette var det vi skulle gjøre. ■

Vi ser her at Euklid spesifiserer at linjen er en endelig rett linje, selv om han allerede har definert en linje til å ligge mellom to ekstremer, som i dette tilfellet er A og B. En av grunnene til at dette forekommer kan være at Euklid selv ser at definisjonene hans, selv om de er matematiske, ikke nødvendigvis er helt eksakte, eller at de i alle fall kan misforstås (Samtale, J.E. Braarvig, 15.02.2016).

Her ser vi også et godt eksempel på noe Euklid gjør i noen av proposisjonene sine. I stedet for å bevise at et utsagn stemmer, viser han hvordan man konstruerer en viss figur, gitt noen forutsetninger. Selv om dette kan se ut som bare en oppskrift for hvordan man kan tegne en figur, så kan man formulere en setning ut av dette. Ikke bare kan man formulere en setning, men måten Euklid går frem på vil i tillegg bevise denne setningen. I tillegg til å formulere denne setningen, la oss "oversette" konstruksjonsoppskriften til et språk som man ville brukt i dag. Vi bruker tegnet $\triangle$ for å fortelle at figuren er en trekant og $|\cdot|$ som notasjon for lengden av noe.

Setning 5.1.2 (Formulert fra proposisjon 5.1.1)**.** *Gitt en endelig rett linje, kan man konstruere en likesidet trekant på denne linjen, der alle sidekantene er like lange som det rette linjestykket.*

Bevis. Gitt linjestykket $AB > 0$, konstruer sirkel BCD med sentrum i A og radius $r = |AB|$, og konstruer sirkel ACE med sentrum i B også med radius r. La C være et av skjæringspunktene mellom sirklene. Siden både AC og BC er radier, vil $\triangle ABC$ bestå av tre sidekanter med lengde r, og er dermed likesidet. □

Vi ser klart at Euklid beviser setning 5.1.2 geometrisk gjennom konstruksjonen. Han klarer altså å bevise noe, uten at det nødvendigvis ser ut som et bevis. Dette ville, i alle fall i dag, bli sett på som smart både pedagogisk og didaktisk. Bevis er noe som kan virke avskrekkende på mange elever, men her kan man klare å kamuflere beviset i en enkel konstruksjon.

Men en av utfordringene som Euklid har, er at han mangler algebraisk notasjon. Dette trenger ikke å være et problem i seg selv, siden algebraiske tegn kan være forvirrende, men det fører til at bevisene hans blir veldig lange. Siden dette er en konstruksjon er ikke setningen min mye kortere, men vi vil se dette tydeligere når vi kommer til den algebraiske delen.

I setning 5.1.2 definerer jeg $AB > 0$. Dette er en antagelse vi er nødt til å gjøre, for A og B kunne ligge i samme punkt. Da ville ikke radien hatt utstrekning, og vi kunne ikke konstruert en sirkel, noe som hadde ført til at sirklene definitivt ikke hadde skjært hverandre heller. Grunnen til at Euklid ikke gjør dette, er fordi han viser til figuren. Vi kommer til å se dette flere ganger i noen av proposisjonene hans. I stedet for å bevise at noe stemmer, viser han til figuren sin, hvor man helt tydelig kan se at hva han sier stemmer. Til Euklids forsvar, kan vi gå tilbake å se på definisjon 4.1.2, hvor Euklid helt klart sier at en linje har en lengde, og derfor ikke kan være et punkt. La oss derfor fra nå av anta at alle linjer har lengde større enn 0.

Vi bruker tegnet $\triangle$ i stedet for ordet trekant av flere grunner. For det første er det en kortform, slik at det tar mindre plass. I tillegg er det også lettere å legge merke til. Med så mange linjer og figurer som blir navngitt på veldig like måter, gir det bedre oversikt når man kan bruke symboler for noen matematiske begreper i stedet for å skrive dem ut med ord. For Euklid ville det vært forvirrende å bruke symbolet $\triangle$ for trekant, siden delta, som er den fjerde greske bokstaven, skrives Δ. Disse ligner så mye på hverandre at det heller ville skapt mer forvirring enn å gjøre det mer oversiktlig. I tillegg må vi tenke på hvordan Euklid navngir de forskjellige punktene. Som sagt tidligere, så bruker han bokstavene i alfabetet til dette. Det betyr at i omtrent alle proposisjoner vil det eksistere et punkt som han kaller for Δ. Vi ser derfor at det ikke er en god løsning for Euklid å bruke symbolet $\triangle$ for trekant.

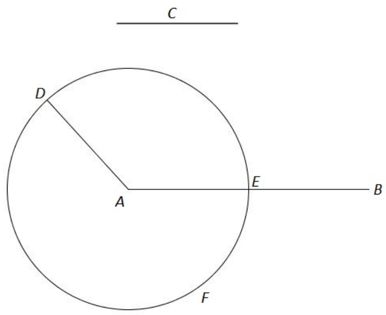
Proposisjon 5.1.3 ([Fit08, Proposisjon 1.3, s. 9-10])**.** For to gitte ulike rette linjer, å skjære av en bit fra den største linjen like stor som den minste.

La AB og C være to gitte ulike rette linjer, og la AB være større. Vi skal kutte av en rett linje lik den mindre, C, fra den større, AB.

La linjen AD, lik den rette linjen C, ha blitt plassert i punkt A. Og la sirkel DEF bli konstruert med sentrum i A og radius AD.

Og siden punktet A er sentrum i sirkel DEF, så er AE lik AD. Altså, AE og C er begge like AD. Så AE er lik C.

Dermed, for to gitte ulike rette linjer, AB og C, har AE blitt kuttet lik den mindre linjen, C, fra den større linjen, AB. Og dette var det vi skulle



Figur 5.2: Proposisjon 5.1.3.

gjøre. ■

Dette er også en ren konstruksjon, slik som proposisjon 5.1.1. Og igjen kan vi formulere dette om til en setning som Euklid viser.

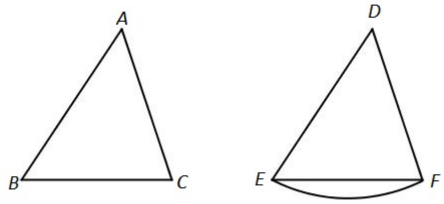
Setning 5.1.4 (Formulert fra proposisjon 5.1.3)**.** *Gitt to linjestykker av ulik lengde, kan man kutte den største slik at den er like lang som den minste linjen.*

Bevis. Gitt linjestykkene AB og C, $|AB| > |C|$. La $|AD| = |C|$, og konstruer sirkel DEF med sentrum i A og radius $r = |AD|$. La punktet E ligge på AB. AB har blitt kuttet og $|AE| = |AD| = r$, og dermed er $|AE| = |C|$. □

Vi brukte tegnet for lengde, $|\cdot|$, allerede i setning 5.1.2, men i setning 5.1.4 blir det brukt i stor grad. Som vi har sagt tidligere, så sier Euklid i definisjon 4.1.2 ikke bare at en linje har en lengde, men at en linje *er* en lengde.

Proposisjon 5.1.5 ([Fit08, Proposisjon 1.4, s. 10-11])**.** Hvis to trekanter har henholdsvis to sider lik to sider, og har lik vinkel mellom de to like rett-linjene, så vil også basen være like basen, og trekanten vil være lik trekanten, og de resterende vinklene som er mellom de like sidene vil være like til de tilsvarende resterende vinklene.

La ABC og DEF være to trekanter som har sidene AB og AC lik sidene DE og DF, henholdsvis. Altså, AB med DE, og AC med DF. Og la vinkelen BAC være lik vinkelen EDF. Jeg sier at basen BC er også lik basen EF, og trekant ABC vil være lik trekant DEF, og de resterende vinklene mellom de like sidene vil være lik de tilsvarende resterende vinklene.



Figur 5.3: Proposisjon 5.1.5.

For hvis trekant ABC anvendes på trekant DEF, punktet A plassert på punktet D, og rett-linjen AB på DE, da vil også punktet B sammenfalle med E, på grunn av at AB er lik DE. Så fordi AB sammenfaller med DE, vil også rett-linjen AC sammenfalle med DF, på grunn av at vinkel BAC er lik EDF. Så punktet C vil også sammenfalle med punktet F, igjen på grunn av at AC er lik DF. Men punktet B sammenfaller også klart med punkt E, slik at basen BC sammenfaller med basen EF. For hvis B sammenfaller med E, og C med F, og basen BC ikke sammenfaller med EF, vil de to rett-linjene omslutte et område. Dette er umulig. Dermed, basen BC vil falle sammen med EF, og vil være lik den. Da vil hele trekanten ABC sammenfalle med hele trekanten DEF, og vil være like den. Og de resterende vinklene vil sammenfalle med det resterende vinklene, og vil være lik dem. Altså, ABC med DEF, og ACB med DFE.

Dermed, hvis to trekanter har henholdsvis to sider lik to sider, og har lik vinkel mellom de to like rett-linjene, så vil de også ha basen lik basen, og trekanten vil være lik trekanten, og de resterende vinklene vil være like de tilsvarende resterende vinklene. Og dette var det vi skulle vise. ■

I motsetning til de to forrige proposisjonene, så er proposisjon 5.1.5 ikke en konstruksjonsoppskrift, men allerede en setning. Vi trenger derfor ikke å oversette oppskriften til en setning. Men vi ser at språket til Euklid kan bli tungt å lese når proposisjonene hans blir lengre. La oss derfor oversette den før vi fortsetter.

Setning 5.1.6 (Formulert fra proposisjon 5.1.5)**.** *Hvis to trekanter har to og to tilsvarende sider like og vinkelen mellom disse sidene er like, vil trekantene være kongruente.*

Bevis. Gitt $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$, la $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$ og $\angle BAC = \angle EDF$.

Hvis vi anvender $\triangle ABC$ på $\triangle DEF$ slik at A sammenfaller med D, AB med DE og AC med DF, vil også B og C henholdsvis sammenfalle med

E og F.

Hvis BC og EF ikke sammenfaller, vil de omslutte et område. Men dette er umulig, fordi en rett linje mellom to punkter er unik. Altså må BC og EF også sammenfalle.

Dermed er $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, og derfor er også tilsvarende vinkler like. $\square$

Her velger jeg å bruker ordet kongruent i stedet for lik og bruker notasjonen $\cong$. La oss derfor definere dette begrepet ordentlig.

Definisjon 5.1.7. *To figurer er kongruente hvis og bare hvis de har like mange hjørner og sidekanter, og alle tilsvarende sider og vinkler i figurene er like.*

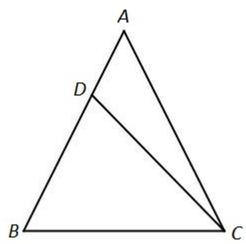
Senere kommer vi til å se at Euklid bruker det samme ordet for likhet når han snakker om areallikhet. Det er opplagt at kongruente figurer vil ha likt areal, men det at to figurer har likt areal, betyr overhodet ikke at de er kongruente. Derfor velger jeg å bruke begrepet kongruent for når to figurer sammenfaller.

Her innfører jeg notasjonen $\angle$ for vinkel, på samme måte som $\triangle$ for trekant. Dette er igjen av samme grunner. Det er lettere å se at det er en vinkel det er snakk om. Men la oss komme inn på dette i neste proposisjon.

Legg også merke til at det kan føre til forvirring når Euklid sier "trekanten er lik trekanten" eller "to sider lik to sider". Man kan vanligvis forstå hva han mener, men språket er ikke presist. Matematisk notasjon og språk er veldig presist. Dette er for at man skal unngå tvetydigheter og misforståelser. Språket til Euklid er lettlest i den grad at han bruker et lite ordforråd, som består hovedsakelig av hverdagsbegreper (Samtale, J.E. Braarvig, 15.02.2016). Men dette kan i noen tilfeller føre til at språket bli upresist. Mangel på matematisk notasjon gjør det ikke språket upresist, men det kan bli vanskeligere å få oversikt over hva han prøver å vise.

Dette er første gang Euklid bruker ordet base. Definisjonen vi bruker nå er at basen til en figur er den siden som står vinkelrett på høyden. Dette betyr at alle sidene i en figur kan være figurens base. Så med mindre man har fått oppgitt eller fått beskjed om å finne en av høydene, kan man gi hvilken som helst av sidene navnet figurens base. Det er litt uklart om Euklid bruker denne definisjonen, siden det ikke alltid er snakk om høyden i en figur. Det virker som om han kaller den siste ukjente siden som er interessant for figurens base. Men denne bruken av begrepet virker unødvendig, siden han ikke bryr seg om høyden i flere av disse eksemplene, slik som proposisjon 5.1.5.

Proposisjon 5.1.8 ([Fit08, Proposisjon 1.6, s. 12-13])**.** Hvis en trekant har to vinkler som er like hverandre, da vil sidene som står ovenfor de like vinklene også være like hverandre.



Figur 5.4: Proposisjon 5.1.8.

La ABC være en trekant med vinkel ABC lik vinkel ACB. Jeg sier at side AB er lik side AC.

For hvis AB er ulik AC må en av dem være større. La AB være større. Og la DB, lik den mindre AC, ha blitt kuttet fra den større AB. Og la DC bli trukket.

Derfor, siden DB er lik AC, og BC er felles, de to sidene DB, BC er henholdsvis lik de to sidene AC, CB, og vinkelen DBC er lik vinkelen ACB. Altså er basen DC lik basen AB, og trekant DBC vil være lik trekant ACB, den mindre lik den større. Dette er absurd. Dermed er AB ikke ulik AC. Altså må den være lik.

Dermed, hvis en trekant har to vinkler som er like hverandre, så vil sidene som står ovenfor de like vinklene også være like hverandre. Og dette var det vi skulle vise. ■

Her bruker Euklid en slutningsregel som han ikke har innført. La oss derfor introdusere den.

Slutningsregel 5.1.9. *To størrelser som ikke er ulike er like.*

Vi ser at slutningsregel 5.1.9, som de fem andre Euklid presenterer, er intuitiv. Dette er noe som vi bruker i matematiske bevis i dag.

Vi ser at Euklid bare viser tilfellet der han antar at $|AB| > |AC|$. Siden vi da fremdeles har muligheten at $|AB| < |AC|$ er ikke dette et fullstendig bevis. Men det er lett å se at beviset også ville holdt for $|AB| < |AC|$, siden det i prinsippet bare er å gjenta det som vi allerede har gjort. Dette er likevel noe Euklid ikke nevner. Dette kan være fordi han tar utgangspunkt i figuren, som man ser er likebeint.

Setning 5.1.10 (Formulert fra proposisjon 5.1.8)**.** *I en trekant med to like vinkler er de motstående sidene også like hverandre.*

Bevis. Gitt $\triangle ABC$ med $\angle ABC = \angle ACB$. Anta at $|AB| \neq |AC|$. Da er en av dem større en den andre. Vi antar $|AB| > |AC|$. Velg D på AB slik at $|BD| = |AC|$.

Siden $|BD| = |AC|$, $\angle DBC = \angle ACB$ og BC er felles er $\triangle DBC \cong \triangle ACB$. Men $\triangle DBC < \triangle ABC$, så dette er umulig.

På samme måte kan vi vise at $AB \not< AC$. Dermed er $AB = AC$. □

Siden beviset for $|AB| < |AC|$ går på akkurat samme måte, er det nok å nevne det. Men dette er noe som er vanlig for Euklids bevisføring. Hvis det er flere mulige situasjoner, vil han noen ganger kun vise en av dem, og overlate de resterende tilfellene til leseren [Fit08].

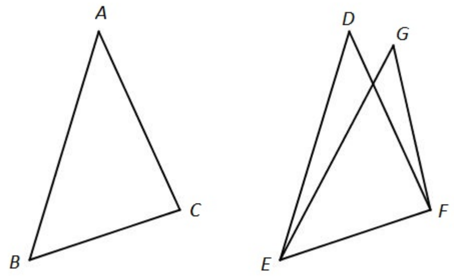
Vi ser her at Euklid nevner både trekanten ABC og vinkelen ABC. Selv om Euklid hele tiden bruker ordene 'trekant' og 'vinkel', så kan det være lett å overse disse. Dette fører til at det blir vanskeligere å skille mellom trekant ABC og vinkel ABC, enn $\triangle ABC$ og $\angle ABC$.

Jeg argumenterte tidligere for at Euklid har en unnskyldning for å ikke bruke $\triangle$ som symbol for trekant. Men når det kommer til symbolet $\angle$ for vinkel har han ikke samme unnskyldning. Det er ingen av de greske bokstavene som ligner spesielt på dette tegnet. Den fønikiske bokstaven lamedh bruker tegnet $\angle$, men det er lite sannsynlig at dette ville skapt forvirring, siden tegnet tilhører et annet språk. Dermed er det sannsynligvis kun snakk om mangel på matematisk notasjon.

I denne proposisjonen, det Euklid i prinsippet gjør er å utvide den delen av definisjon 4.1.20 som er om likebeinte trekanter. Ikke bare har de to like sider, men også to like vinkler. La oss derfor definere det utvidede begrepet ordentlig.

Definisjon 5.1.11. *En likebeint trekant har to like lange sider og to like store vinkler.*

Proposisjon 5.1.12 ([Fit08, Proposisjon 1.8, s. 14-15])**.** Hvis to trekanter har to sider henholdsvis lik to sider, og også har basen lik basen, da vil også de vinklene som er omsluttet av like linjer være like.



Figur 5.5: Proposisjon 5.1.12.

La ABC og DEF være to trekanter som har de to sidene AB og AC henholdsvis lik de to sidene DE og DF. Altså AB lik DE og AC lik DF. La de også ha basen BC lik basen EF. Jeg sier at vinkelen BAC er lik vinkelen EDF.

For hvis trekant ABC anvendes på trekant DEF, punktet B plassert i punktet E, og linjen BC på EF, så vil punktet C også sammenfalle med punktet F, siden BC er lik EF. Så siden BC sammenfaller med EF, vil sidene BA og CA henholdsvis også sammenfalle med sidene ED og DF. For hvis basen BC sammenfaller med basen EF, men sidene AB og AC henholdsvis ikke sammenfaller med sidene ED og DF, men bommer slik som EG og GF (som i figuren), da har vi konstruert på den samme basen to linjer som er henholdsvis like to andre linjer, og møtes i forskjellige punkter, men som starter fra samme sted. Men dette kan ikke konstrueres. Så hvis basen BC anvendes på basen EF, kan ikke sidene BA og AC ikke falle sammen henholdsvis med sidene ED og DF. Altså sammenfaller de. Så vinkel BAC vil også falle sammen med vinkel EDF, og vil være lik den.

Dermed, hvis to trekanter har to sider henholdsvis lik to sider, og har basen lik basen, så vil også de vinklene som er omsluttet av like linjer være like. Og dette var det vi skulle vise. ■

Noe vi ser her er at Euklid bruker AB og BA om samme linjestykke. Så det er altså tydelig at han er mer interessert i lengden av linjen enn hva som er startpunkt og sluttpunkt. Vi ser også at han refererer til figuren som et eksempel. I dette tilfellet trenger man ikke nødvendigvis figuren for å forstå at to linjer ikke møtes i samme punkt som to andre linjer, men det kan gjøre det lettere.

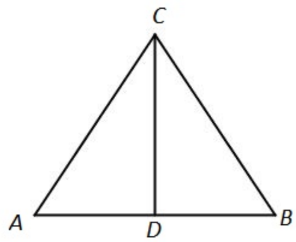
Setning 5.1.13 (Formulert fra proposisjon 5.1.12)**.** *Hvis to trekanter har alle sidene parvis like, så vil vinklene mellom parvis like sider også være parvis like.*

Bevis. Gitt $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ hvor $|AB| = |DE|, |AC| = |DF|, |BC| = |EF|$. Hvis $\triangle ABC \ncong \triangle DEF$, men i stedet $\triangle ABC \cong \triangle GEF$, hvor $|AB| = |GE|, |AC| = |GF|, G \neq D$. Men denne konstruksjonen er umulig når $|BC| = |EF|$. Altså er $\triangle ABC \ncong \triangle DEF$ umulig, og dermed har vi $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Da har vi også at $\angle BAC = \angle EDF$. □

Euklid definerer ikke hvor punktet G skal ligge, men man skjønner ut fra teksten at det ikke kan sammenfalle med D. Hvis vi ser på figuren er det tydelig at $D \neq G$, noe som kan være årsaken til at han refererer til den i teksten. Vi kommer til å se flere eksempler på at Euklid i stor grad bruker figuren til å vise eller tydeliggjøre hvordan situasjonen er.

Selv om Euklid ikke nevner det i denne sammenhengen er dette en av måtene å definere en entydig trekant opp til kongruens. Hvis vi ser tilbake på proposisjon 5.1.5, så ser vi at dette er en annen måte å oppgi det på. Måtene man kan tegne en trekant entydig opp til kongruens er hvis man vet lengden til de tre sidene, lengden til to sider og størrelsen på vinkelen mellom dem eller lengden til en side og størrelsen på to vinkler.

Proposisjon 5.1.14 ([Fit08, Proposisjon 1.10, s. 15-16])**.** Å dele en gitt endelig linje i to halve.



Figur 5.6: Proposisjon 5.1.14.

La AB være en gitt endelig rett linje. Vi ønsker å dele denne endelige rette linjen AB i to halve.

La den likesidede trekanten ABC ha blitt konstruert på AB, og la vinkelen ACB ha blitt halvert av den rette linjen CD. Jeg sier at den rette linjen AB halveres i punktet D.

For siden AC er lik CB, og CD er felles, så er de to rette linjene AC og CD lik de to rette linjene BC og CD, henholdsvis. Og vinkelen ACD er lik vinkelen BCD. Altså er basen AD lik basen BD.

Dermed har den endelige rette linjen AB blitt halvert i punkt D. Og det var dette vi skulle gjøre. ■

Her ser vi enda et eksempel på at Euklid spesifiserer at en linje er endelig. Slik som med de andre konstruksjonene, kan vi formulere en setning fra denne.

Setning 5.1.15 (Formulert fra proposisjon 5.1.14)**.** *Gitt en endelig rett linje, kan man halvere denne linjen.*

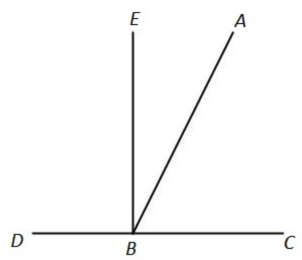
Bevis. Gitt linjestykket AB. La $\triangle ABC$ være likesidet og lengden av sidekantene være $|AB|$. La $\angle ACB$ være halvert av CD, hvor $D \in AB$.

Da er $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ siden $\angle ACD = \angle BCD$ og $|AC| = |BC|$. Da er også $|AD| = |DB|$. Dermed har $|AB|$ blitt halvert i punktet D. $\square$

Her ser vi at Euklid ikke bruker begrepet kongruens. Han nevner ikke at trekantene er like i det hele tatt. Dette er en indikator på at Euklids likhetsbegrep dreier seg om størrelser.

Proposisjon 5.1.14 er veldig lik oppgaver som elever kan få i skolematematikken i dag. Kanskje til og med mer lik setning 5.1.15 som vi har formulert med moderne notasjon. Men vi skal se mer på dette senere.

Proposisjon 5.1.16 ([Fit08, Proposisjon 1.13, s. 18])**.** Hvis en rett linje står på en annen rett linje, vil den definitivt lage to rette vinkler, eller to vinkler med vinkelsum lik to rette vinkler.



Figur 5.7: Proposisjon 5.1.16.

For la en rett linje AB stå på den rette linjen CD og lage vinklene CBA og ABD. Jeg sier at vinklene CBA og ABD er definitivt enten to rette vinkler, eller har vinkelsum lik to rette vinkler.

Faktisk, hvis CBA er lik ABD så er de begge rette vinkler. Men, hvis ikke, la BE ha blitt tegnet fra punktet B med rette vinkler på CD. Dermed er CBE og EBD to rette vinkler. Og siden CBE er lik de to vinklene CBA

og ABE, la EBD ha blitt lagt til begge. Altså er summen av vinklene CBE og EBD lik summen av de tre vinklene CBA, ABE og EBD. Igjen, siden DBA er lik de to vinklene DBE og EBA, la ABC ha blitt lagt til begge. Altså er summen av vinklene DBA og ABC lik summen av de tre vinklene DBE, EBA og ABC. Men summen av CBE og EBD var også vist til å bli lik summen av de samme tre vinklene. Og ting lik samme ting er også like hverandre. Derfor er summen av CBE og EBD også lik summen av DBA og ABC. Dermed er summen av ABD og ABC også lik to rette vinkler.

Dermed, hvis en rett linje står på en annen rett linje, vil den definitivt lage to rette vinkler eller to vinkler med vinkelsum lik to rette vinkler. Og det var dette vi skulle vise. ■

Her velger Euklid å la være å bruke begrepet ortogonal, eller det tilsvarende greske begrepet. Vi ser at dette begrepet er definert i definisjon 4.1.10, men likevel velger han å si "med rette vinkler til". Hva dette kommer av er jeg ikke sikker på.

Setning 5.1.17 (Formulert fra proposisjon 5.1.16)**.** *Hvis en rett linje står på en annen rett linje vil vi få to vinkler på* $90°$ *eller to vinkler som har vinkelsum på* $180°$.

Bevis. Gitt to rette linjer AB og CD, la AB stå på CD, og lage $\angle ABC$ og $\angle ABD$.

Vi trekker linjen EB slik at $EB \perp CD$. Hvis AB sammenfaller med EB så har vi $\angle ABC = \angle ABD = 90°$.

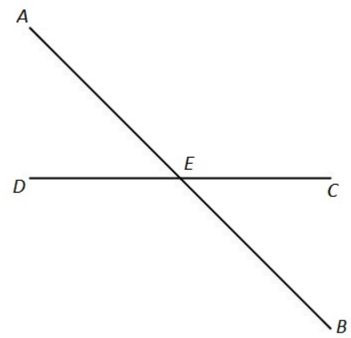
Hvis AB og EB ikke sammenfaller, antar vi $\angle ABC < \angle ABD$. Da ser vi at $\angle ABC + \angle ABD = \angle ABC + \angle EBA + \angle EBD = \angle EBC + \angle EBD = 180°$. Altså er $\angle ABC + \angle ABD = 180°$.

På samme måte kan vi vise tilfellet der $\angle ABC > \angle ABD$. □

Her ser vi et tydelig eksempel på at Euklid ikke har et vinkelmål utover rette vinkler. Men vi ser også at dette ikke fører til store problemer i dette tilfellet. Det at han sier 'to rette vinkler' i stedet for '180°' skaper ikke noen stor forvirring. Det eneste er det jeg har nevnt før, at når han bare bruker ord, er det ikke alltid like lett å oppdage informasjonen som blir gitt.

Euklid definerer ikke hvilken av $\angle ABC$ og $\angle ABD$ som er størst. Så når han sier i proposisjon 5.1.16 at "CBE er lik de to vinklene CBA og ABE", er dette kun tatt fra figuren. Hvis $\angle ABC > \angle ABD$ ville vi fått et annet bilde og dermed et annet regnestykke. Beviset ville gått på samme måte siden dette bare er en speilvending, men vi ser tydelig at Euklid bruker figuren i stor grad. Fra min erfaring i skolen liker ikke elever å tegne hjelpefigurer, og vil ofte angripe en oppgave uten. Men Euklid er her et godt eksempel på at figurer er meget nyttige når man skal løse et geometrisk problem.

Proposisjon 5.1.18 ([Fit08, Proposisjon 1.15, s. 19-20])**.** Hvis to rette linjer krysser hverandre, da lager de vertikalt motsatte vinkler like hverandre.



Figur 5.8: Proposisjon 5.1.18.

La de to rette linjene AB og CD krysse hverandre i punktet E. Jeg sier at vinkel AEC er lik vinkel DEB, og vinkel CEB lik vinkel AED.

For siden den rette linjen AE står på den rette linjen CD, og lager vinklene CEA og AED, er summen av vinklene CEA og AED dermed lik to rette vinkler. Igjen, siden den rette linjen DE står på den rette linjen AB, og lager vinklene AED og DEB, er summen av vinklene AED og DEB dermed lik to rette vinkler. Men summen av CEA og AED var også vist å være lik to rette vinkler. Dermed er summen av CEA og AED lik summen av AED og DEB. La AED bli trukket fra begge. Dermed er resten CEA lik resten BED. På samme måte kan det vises at CEB og DEA også er like.

Dermed, hvis to rette linjer krysser hverandre, da lager de vertikalt motsatte vinkler like hverandre. Og dette var det vi skulle vise. ■

Her ser vi at Euklid ikke alltid beviser alle tilfellene som han beskriver. Her ser vi tydelig, og Euklid sier det også, at beviset vil gå på akkurat samme måte som det tilfellet han har bevist. Det gjør at teksten blir kortere og dermed gjerne også mer oversiktlig. I tillegg kan leseren utføre dette beviset som en oppgave. Da vil beviset Euklid har gjort fungere som et eksempel som leseren kan følge. Slike situasjoner møter vi på i lærebøkene i dag.

Setning 5.1.19 (Formulert fra proposisjon 5.1.18)**.** *To rette linjer som krysser hverandre lager vertikalt motsatte vinkler som henholdsvis er like hverandre.*

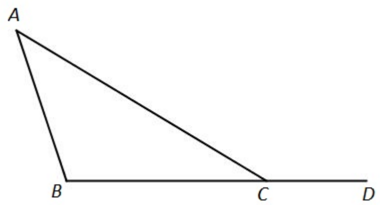
Bevis. Gitt to rette linjer AB og CD, la skjæringpunktet mellom AB og CD være E.

Da får vi at $\angle AEC + \angle AED = 180°$. Vi får også at $\angle AED + \angle BED = 180°$. Det betyr at $\angle AEC = \angle BED$.

På samme måte kan vi vise at $\angle AED = \angle BEC$. □

I proposisjonene 5.1.16 og 5.1.18 ser vi at Euklid kun snakker om linjer og vinkler. Vi ser at en gruppering av to bokstaver er en linje, og en gruppering av tre bokstaver er en vinkel. I disse proposisjonene skaper ikke dette noen stor forvirring, men om det også skulle ha vært med noen trekanter i disse proposisjonene, ville det ha blitt mer komplisert å lese. Vi har allerede sett et eksempel på dette i proposisjon 5.1.5 Som jeg har nevnt tidligere bruker jeg $\triangle$ og $\angle$ for henholdsvis trekanter og vinkler. Uten disse tegnene kan man lett overse ordene 'trekant' og 'vinkel' blant alle de andre ordene. Sirkler blir vanligvis også oppgitt som en gruppering av tre bokstaver, så vi ser tydelig at dette kan føre til at det blir vanskeligere å hente ut informasjonen fra teksten. Vi kommer til å få enda et eksempel på dette i den neste proposisjonen vi skal ta for oss.

Proposisjon 5.1.20 ([Fit08, Proposisjon 1.17, s. 21-22])**.** For enhver trekant er summen av to vinkler, tatt på hvilken som helst mulig måte, mindre enn to rette vinkler.



Figur 5.9: Proposisjon 5.1.20.

La ABC være en trekant. Jeg sier at summen av to vinkler i trekant ABC tatt på hvilken som helst mulig måte, er mindre enn to rette vinkler.

For la BC ha blitt forlenget til D.

Og siden vinkelen ACD er en ytre vinkel til trekant ABC, er den større enn den interne og motstående vinkelen ABC. La ACB ha blitt lagt til begge. Dermed er summen av vinklene ACD og ACB større en summen av vinklene ABC og BCA. Men summen av ACD og ACB er lik to rette vinkler. Dermed er summen av ABC og BCA mindre enn to rette vinkler. På samme måte kan vi vise at summen BAC og ACB er mindre enn to rette vinkler, og videre at summen av CAB og ABC er mindre en to rette vinkler.

Dermed, for enhver trekant er summen av to vinkler, tatt på hvilken som helst mulig måte, mindre enn to rette vinkler. Og dette var det vi skulle vise. ■

Euklid bruker her $\angle ACB$ og $\angle BCA$ om hverandre. Det er helt opplagt at det er samme vinkelen det er snakk om, men det er ikke veldig ideelt for en leser. Spesielt hvis leseren ikke er erfaren, noe som ikke er utenkelig siden vi ser at Euklid bygger opp geometrikunnskapen fra bunnen av. Så selv om det er matematisk korrekt, så er det ikke et godt didaktisk grep. Dette kan være nok til at man roter seg bort i et unødvendig problem, noe som kan gjøre det vanskeligere å forstå løsningen. Grunnen til dette kan være at han ønsker å navngi vinklene på samme måte som de ligger. Altså, hvis den andre vinkelen ligge med klokken i forhold til den første, blir navnet på vinkelen rekkefølgen til bokstavene med klokken.

Setning 5.1.21 (Formulert fra proposisjon 5.1.20)**.** *Summen av to vinkler i en trekant er alltid mindre enn* $180°$*.*

Bevis. Gitt $\triangle ABC$, la BC bli forlenget til punktet D. Siden $\angle ACD$ er en ytre vinkel til $\triangle ABC$ så er $\angle ACD > \angle ABC$.

Dette gir oss $\angle ABC + \angle ACB < \angle ACD + \angle ACB = 180°$.

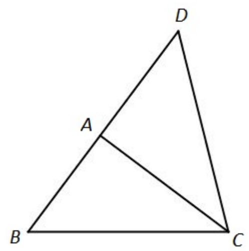
På samme måte kan vi vise at $\angle ACB + \angle BAC, \angle BAC + \angle ACB < 180°$. □

Her er det bare en trekant og noen få vinkler. Det er derfor ikke veldig vanskelig å holde styr på om Euklid snakker om en trekant eller en vinkel. Men det krever allikevel større konsentrasjon for holde dem adskilt, enn hvis man har tegn i stedet for ord for å fortelle hvilken konstruksjon man snakker om.

Det Euklid viser her ville nok mange skoleelever i dag se på som unødvendig. For siden summen av vinklene i en trekant alltid skal være $180°$

og man ikke kan ha en vinkel på 0°, så er jo dette en selvfølge. Men dette er ikke noe Euklid viser, eller i det hele tatt nevner, før senere.

Proposisjon 5.1.22 ([Fit08, Proposisjon 1.20, s. 23-24])**.** I enhver trekant er summen av to sider tatt på hvilken som helst mulig måte, større enn den resterende siden.



Figur 5.10: Proposisjon 5.1.22.

For la ABC være en trekant. Jeg sier at i trekant ABC er summen av to sider tatt på hvilken som helst mulig måte, større enn den resterende siden. Så summen av BA og AC er større enn BC, summen av AB og BC er større enn AC, og summen av BC og CA er større enn AB.

For la BA ha blitt forlenget til punkt D, og la AD bli gjort lik CA, og la DC bli trukket.

Derfor, siden DA er lik AC, er vinkel ADC også er lik ACD. Dermed er BCD større enn ADC. Og siden DCB er en trekant med vinkel BCD større enn BDC, og den største vinkelen omfatter den største sidekanten, er altså DB større enn BC. Men DA er lik AC. Dermed er summen av BA og AC større enn BC. På samme måte kan vi vise at summen av AB og BC er større enn CA, og summen av BC og CA er større enn AB.

Dermed, i enhver trekant er summen av to sider tatt på hvilken som helst mulig måte, større enn den resterende siden. Og dette var det vi skulle vise. ■

Resultatet vi får fra proposisjon 5.1.22 er et viktig resultat innenfor matematikken. Det er kanskje ikke like lett å se hvilket resultat det er uten matematisk notasjon, så la oss derfor vente med å presentere det til etter setning 5.1.23.

Setning 5.1.23 (Formulert fra proposisjon 5.1.22)**.** *Summen av to sider i en trekant er alltid større en den resterende siden.*

Bevis. Gitt $\triangle ABC$, la BA bli forlenget til D, slik at $|AD| = |AC|$.

$|AD| = |AC| \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC$.

Dette gir $\angle BCD > \angle ACD \Rightarrow \angle BCD > \angle BDC \Rightarrow |BD| > |BC|$.

Da får vi $|BD| = |AB| + |AC| > |BC|$.

På samme måte kan vi vise at $|AB| + |BC| > |AC|$ og $|AC| + |BC| > |AB|$. $\square$

Resultatet vi får ligner veldig på trekantsetningen, som sier $|a+b| < |a| + |b|$. Dette er et viktig teorem som blir brukt innen flere felt i matematikken. Men her kommer den bare som et resultat fordi man lurer på noen av egenskapene til en geometrisk figur.

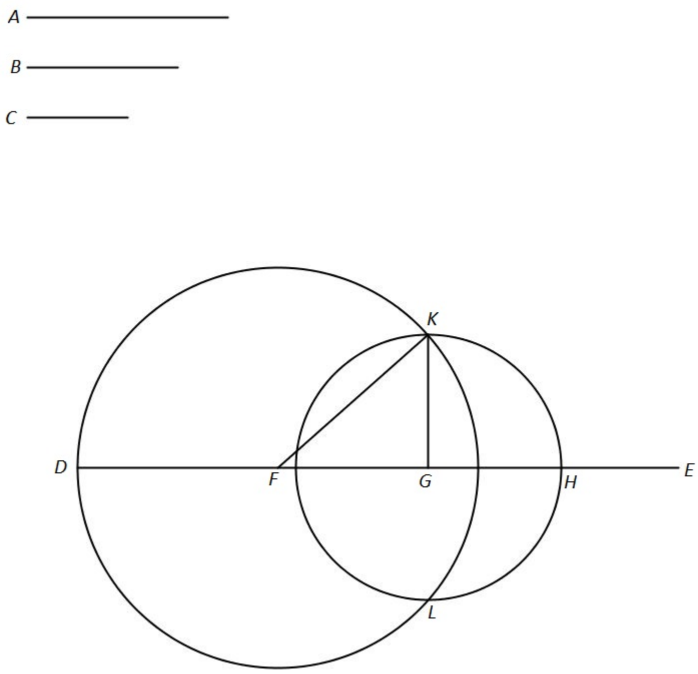
Hvis vi tenker ut fra sunn fornuft, er det ikke vanskelig å forestille seg at den korteste avstanden mellom to punkter er den rette linjen mellom dem. Man kan også prøve å konstruere en trekant der den ene siden er lengre enn summen av de to andre. Disse metodene er jo ikke noe bevis, men resultatet vi får her skulle altså ikke være vanskelig å forstå, selv ikke for de som ikke driver med matematikk i stor grad.

Proposisjon 5.1.24 ([Fit08, Proposisjon 1.22, s. 25-26])**.** Å konstruere en trekant med tre rette linjer som er like tre gitte rette linjer. Det er nødvendig at summen av to av de rette linjene tatt på hvilken som helst mulig måte er større enn den resterende siden, med tanke på det faktum at i enhver trekant er summen av to av sider tatt på hvilken som helst mulig måte større enn den resterende siden.

La A, B og C være tre gitte rette linjer, og la summen av to tatt på hvilken som helst mulig måte være større enn den resterende. Altså, summen av A og B er større enn C, summen av A og C er større enn B, og summen av B og C er større enn A. Vi skal konstruere enn trekant med rette linjer lik A, B og C.

La en rett linje DE bli tegnet, sluttet i D og uendelig i retning av E. La DF bli gjort lik A, og FG lik B, og GH lik C. Og la sirkel DKL ha blitt tegnet med sentrum i F og radius FD. Igjen, la sirkelen KLH ha blitt tegnet med sentrum i G og radius GH. Og la KF og KG bli tegnet. Jeg sier at trekant KFG har blitt konstruert av tre rette linjer lik A, B og C.

For siden punktet F er senteret i sirkel DKL, så er FD lik FK. Men, FD er lik A. Dermed er KF også lik A. Igjen, siden punktet G er senteret i sirkel LKH, så er GH lik GK. Men, GH er lik C. Dermed er KG også lik C. Og FG er også lik B. Altså er de tre rette linjene KF, FG og GK er henholdsvis lik de tre rette linjene A, B og C.



Figur 5.11: Proposisjon 5.1.24.

Dermed har trekanten KFG blitt konstruert med de tre rette linjene KF, FG og GK, som er henholdsvis lik de tre rette linjene A, B og C. Og dette var det vi skulle gjøre. ■

Euklid nevner resultatet fra proposisjon 5.1.22 tre ganger før han begynner på selve konstruksjonen, så dette er nok noe som han synes er viktig for leseren å få med seg. Vanligvis pleier han bare å nevne et tidligere resultat i det han bruker det. Men vi ser jo klart at hvis leseren skulle begynt å gjøre konstruksjonen i proposisjon 5.1.24 uten å ta hensyn til resultatet i proposisjon 5.1.22 ville han ikke ha kommet særlig langt.

La oss nå konstruere en setning ut fra Euklids konstruksjonsoppskrift.

Setning 5.1.25 (Formulert fra proposisjon 5.1.24)**.** *Gitt tre rette linjer, der summen av to av dem alltid er større enn den resterende, finnes det en trekant med sidekanter som er lik disse tre linjene.*

Bevis. Gitt linjene A, B og C, hvor $|A|+|B|>|C|, |A|+|C|>|B|, |B|+|C|>|A|$.

La linjen DE bli tegnet. La $|DF|=|A|, |FG|=|B|$ der $F, G \in DE$. La sirkel DKL bli tegnet med radius $r_1=|DF|$ og sentrum i F, og sirkel

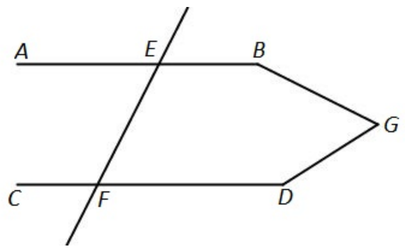
KHL med radius $r_2 = |C|$ med sentrum i G. La K ligge i skjæringspunktet mellom sirkel DKL og KHL.

Da har $\triangle FGK$ sidene $|FK| = r_1 = |A|, |FG| = |B|, |GK| = r_2 = |C|$. $\square$

På denne måten kan man altså konstruere en hvilken som helst trekant, så lenge sidekantene oppfyller kravet fra proposisjon 5.1.22. Dermed kan vi skjønne hvorfor Euklid gjentar det resultatet så ofte i proposisjon 5.1.24. Selv har vi brukt det to ganger i setning 5.1.25, som er mye kortere.

Her velger jeg ikke å bruke et symbol for å markere at en figur er en sirkel. Dette kommer av at man vanligvis ikke bruker et tegn for dette i skolematematikken. I tillegg ligner $\bigcirc$ på den latinske bokstaven 'O'. Dermed velger jeg å la være å bruke $\bigcirc$ for å markere en sirkel av samme grunn som det ville ha vært unaturlig for Euklid å bruke $\triangle$ for å markere en trekant.

Proposisjon 5.1.26 ([Fit08, Proposisjon 1.27, s. 30-31])**.** Hvis en rett linje krysser to rette linjer lager samsvarende vinkler lik hverandre, da vil de to rette linjene være parallelle.



Figur 5.12: Proposisjon 5.1.26.

La den rette linjen EF, som krysser de to rette linjene AB og CD, lage samsvarende vinkler AEF og EFD lik hverandre. Jeg sier at AB og CD er parallelle.

For hvis ikke, hvis de blir forlenget, vil AB og CD definitivt møtes: Enten i retningen til B og D, eller i retningen til A og C. La dem ha blitt forlenget, og la dem møtes i retningen til B og D i punkt G. Så, for trekant GEF er den ytre vinkelen AEF lik den indre og motstående vinkelen EFG. Dette er umulig. Altså, hvis de forlenges, vil AB og CD ikke møtes i retningen til B og D. På samme måte kan det vises at de ikke vil møte hverandre i retningen til A og C. Men rette linjer som ikke møter hverandre i noen av retningene er parallelle. Dermed er AB og CD parallelle.

Altså, hvis en rett linje krysser to rette linjer lager samsvarende vinkler lik hverandre, da vil de to rette linjene være parallelle. Og dette var det vi skulle vise. ■

Her ser vi et eksempel på at Euklid antar det motsatte, for så å bevise at det er umulig. Han har allerede vist i en tidligere proposisjon at i en trekant er en ytre vinkel større en de indre og motstående vinklene. Han ender dermed opp med en trekant som ikke kan eksistere, og da er det bare en mulighet igjen; nemlig at de er parallelle.

Setning 5.1.27 (Formulert fra proposisjon 5.1.26)**.** *To linjer er parallelle, hvis en rett linje som krysser dem lager samsvarende vinkler som er like hverandre.*

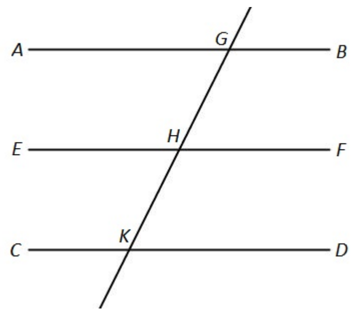
Bevis. Gitt de rette linjene AB, CD og EF, la EF krysse AB og CD slik at $\angle AEF = \angle EFD$.

Anta $AB \nparallel CD$ og la dem møtes i G i retningen til B og D. I $\triangle GEF$ er $\angle EFD$ en indre motstående vinkel til $\angle AEF$, som er en ytre vinkel. Men da er $\angle AEF > \angle EFD$. Men dette er en selvmotsigelse. På samme måte kan vi vise at AB og CD ikke møtes i retningen til A og C.

Altså er $AB \parallel CD$. □

Dette er den første proposisjonen der Euklid bruker begrepet parallell. Vi ser i proposisjon 5.1.26 at Euklid forsøker å ende opp med definisjon 4.1.23. Selv om Euklids definisjon av parallell ikke holder i alle geometrier, så holder det for hans geometri.

Proposisjon 5.1.28 ([Fit08, Proposisjon 1.30, s. 33])**.** Rette linjer som er parallelle med samme rette linje, er også parallelle med hverandre.



Figur 5.13: Proposisjon 5.1.28.

La begge de rette linjene AB og CD være parallell med EF. Jeg sier at AB er også parallell med CD.

La den rette linjen krysse AB, CD og EF.

Og siden den rette linjen GK krysser de parallelle rette linjene AB og EF, så er vinkel AGK lik GHF. Igjen, siden den rette linjen GK krysser de parallelle rette linjene EF og CD, er vinkel GHF lik vinkel GKD. Dermed er også AGK lik GKD. Og de er samsvarende vinkler. Dermed er AB parallell med CD.

Altså, rette linjer som er parallelle med samme rette linje, er også parallelle med hverandre. Og dette var det vi skulle vise. ■

Setning 5.1.29 (Formulert fra proposisjon 5.1.28)**.** *Linjer som er parallelle samme rette linje, er også parallelle med hverandre.*

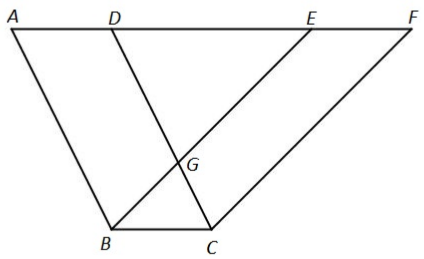
Bevis. Gitt linjene AB, CD og EF, la $AB \parallel EF$ og $CD \parallel EF$ og la linjen GK krysse de andre tre linjene.

Siden $AB \parallel EF$ har vi at $\angle AGK = \angle GHF$, og siden $CD \parallel EF$ har vi at $\angle GKD = \angle GHF$.

Dermed er $\angle AGK = \angle GKD$ som betyr at $AB \parallel CD$. □

Hvis vi ser på slutningsregel 4.3.5 ser vi at denne ligner på resultatet i proposisjon 5.1.28. Men hva er så grunnen til at Euklid føler han trenger å vise dette, og ikke bare benytter seg av en allmenn slutningsregel? Grunnen kan kanskje være at likhet er et begrep som folk flest bruker til daglig, mens parallellitet er et matematisk uttrykk som folk flest ikke har et behov for å bruke i hverdagen. Og begreper som man ikke er vant til å bruke, er ofte mye vanskeligere å forstå egenskapene til. Derfor mener jeg det er legitimt å bevise resultatet i proposisjon 5.1.28, men la være å bevise allmenn slutningsregel 4.3.5.

Proposisjon 5.1.30 ([Fit08, Proposisjon 1.35, s. 37])**.** Parallellogrammer som har samme base og er mellom samme paralleller er like hverandre.



Figur 5.14: Proposisjon 5.1.30.

La $ABCD$ og $EBCF$ være parallellogrammer med samme base BC, og mellom samme paralleller AF og BC. Jeg sier at $ABCD$ er lik parallellogram $EBCF$.

For siden $ABCD$ er et parallellogram, er AD lik BC. Av samme grunn er er EF også lik BC. Så AD er også lik EF. Og DE er felles. Dermed er hele den rette linjen AE lik hele den rette linjen DF. Og AB er også lik DC. Så de to rette linjene EA og AB er henholdsvis lik de to rette linjene FD og DC. Og den eksterne vinkelen FDC er lik den interne vinkelen EAB. Dermed er basen EB lik basen FC, og trekant EAB er lik trekant DFC. La DGE ha blitt trukket fra begge. Dermed er det gjenværende trapeset $ABGD$ lik det gjenværende trapeset $EGCF$. La trekant GBC bli lagt til begge. Dermed er hele parallellogrammet $ABCD$ lik hele parallellogrammet $EBCF$.

Altså, parallellogrammer som har samme base og er mellom samme paralleller er like hverandre. Og dette var det vi skulle vise. ■

Her ser vi for første gang at likheten Euklid bruker mellom figurer ikke kan bety kongruens. Selv om det er mulig for de to parallellogrammene $ABCD$ og $ECBF$ å være kongruente, så er det mye mer sannsynlig at de ikke er det. Så her er det snakk om areallikhet. Trekantene ABE og DCF, som han bruker for vise denne areallikheten, er kongruente. Likevel bruker han samme likhetsbegrep om disse trekantene. Men siden kongruente figurer også har likt areal, er det nok snakk om en areallikhet. En av forskjellene er at når han viser kongruens, viser han at et visst antall sider og vinkler er henholdsvis parvis like hverandre. Men når han viser areallikhet, så er det et resultat av at kongruente ting blir lagt til og trukket fra to figurer. Det er altså en forskjell i måten han går fram for å vise disse to formene for likhet, noe som kan tyde på at disse ikke er likestilt.

Før vi begynner på oversettelsen av proposisjon 5.1.30, så vil jeg introdusere en notasjon. Når jeg snakker om arealet til en figur, vil jeg bruke $\mathcal{A}(\cdot)$. Altså, $\mathcal{A}(\triangle ABC)$ er arealet av $\triangle ABC$.

Setning 5.1.31 (Formulert fra proposisjon 5.1.30)**.** *Parallellogrammer med samme base og som ligger mellom samme paralleller har samme areal.*

Bevis. Gitt linjene AF og BC, der $AF \parallel BC, |BC| = |AD| = |EF|$, har vi parallellogrammene $ABCD$ og $EBCF$.

Vi har at $|AE| = |DF|, |AB| = |DC|, \angle EAB = \angle FDC$.

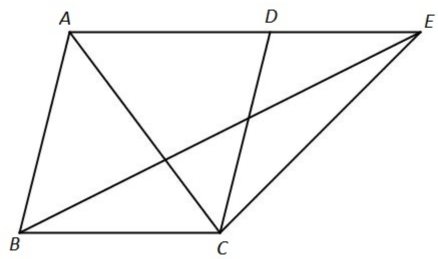
Dette gir oss $\triangle ABE \cong \triangle DCF \Rightarrow \mathcal{A}(\triangle ABE) = \mathcal{A}(\triangle DCF)$. Hvis vi nå legger til $\triangle BCG$ og trekker fra $\triangle DGE$ på begge sider får vi parallellogrammene $ABCD$ og $EBCF$, hvor $\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(ECBF)$. □

Proposisjon 5.1.30 er et spesialtilfelle av Cavallieris prinsipp for to dimensjoner; hvis to områder i planet ligger mellom to parallelle linjer i dette planet, og hver linje parallell med disse to linjene skjærer begge områdene med like lange linjestykker, da har de to områdene likt areal.

Vi ser at dette gjelder i denne sammenhengen. Siden avstanden mellom to parallelle linjer alltid er den samme, og de to parallellogrammene har samme avstand mellom linjene, vil de også ha samme areal.

Euklid viser senere at dette også gjelder for trekanter. Vi kommer ikke til å ta for oss den proposisjonen, men vi skal se bruk av den i den neste proposisjonen vi skal se på.

Proposisjon 5.1.32 ([Fit08, Proposisjon 1.41, s. 41])**.** Hvis et parallellogram har samme base som en trekant, og er mellom de samme parallellene, så er parallellogrammet det dobbelte av trekanten.



Figur 5.15: Proposisjon 5.1.32.

La parallellogram $ABCD$ har samme base BC som trekant EBC, og la dem være mellom de samme parallellene BC og AE. Jeg sier at parallellogram $ABCD$ er det dobbelte av trekant BEC.

La AC ha blitt tegnet. Så trekant ABC er lik trekant EBC. For de står på samme base BC, og ligger mellom de samme parallellene BC og AE. Men parallellogram $ABCD$ er det dobbelte av trekant ABC. For diagonalen AC deler den første i to halve. Så parallellogram $ABCD$ er også det dobbelte av trekant EBC.

Altså, hvis et parallellogram har samme base som en trekant, og er mellom de samme parallellene, så er parallellogrammet det dobbelte av trekanten. Og det var dette vi skulle vise. ■

Det at to figurer ligger mellom samme paralleller, betyr også at de har samme høyde. La oss derfor bruke dette i setningen.

Setning 5.1.33 (Formulert fra proposisjon 5.1.32)**.** *Hvis et parallellogram og en trekant har samme base og lik høyde, gir dette* $\mathcal{A}(\textit{Parallellogram}) = 2 \cdot \mathcal{A}(\textit{Trekant})$.

Bevis. Gitt $\triangle BCE$ og parallellogram $ABCD$ med lik høyde og felles base BC, la parallellogram $ABCD$ deles i to langs diagonalen AC. Da har vi at $2 \cdot \mathcal{A}(\triangle ABC) = \mathcal{A}(ABCD)$.

Siden $\triangle ABC$ og $\triangle BCE$ har samme høyde og base, får vi $\mathcal{A}(\triangle ABC) = \mathcal{A}(\triangle BCE)$.

Dermed får vi $\mathcal{A}(ABCD) = 2 \cdot \mathcal{A}(\triangle BCE)$. □

Fra figuren ser vi at to av $\triangle BCE$ ikke kan settes sammen til parallellogrammet $ABCD$. Dette kommer av at $\triangle ABC \ncong \triangle BCE$. "Likheten" som settes mellom trekanten og parallellogrammet gir derfor bare mening hvis vi snakker om areal.

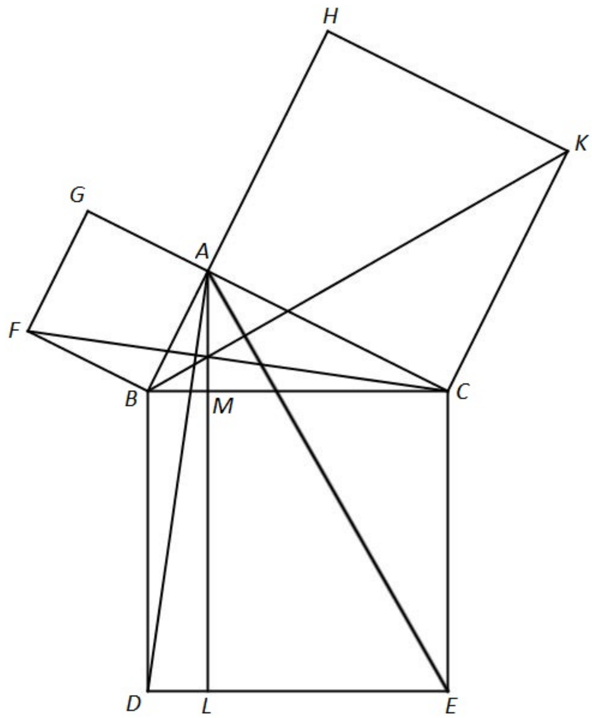
Vi kan se på et enda mer ekstremt eksempel. Hvis basen til trekanten er det dobbelte av basen til parallellogrammet, ville Euklid sagt at de var like. Hvis vi ser på den geometriske formen, har trekanten tre hjørner og tre sidekanter, mens parallellogrammet har fire hjørner og fire sidekanter. Disse to figurene har altså ikke lik geometrisk form i det hele tatt. Men hvis vi ser på arealet, så har vi $\mathcal{A}(\text{Parallellogram}) = \mathcal{A}(\text{Trekant})$.

Nå skal vi gå til en av de siste proposisjonene i bok I. Dette er Euklids bevis for Pytagoras' setning.

Proposisjon 5.1.34 ([Fit08, Proposisjon 1.47, s. 46-47])**.** I en rettvinklet trekant, kvadratet på siden ovenfor den rette vinkelen er lik summen av kvadratene på sidene som omgir den rette vinkelen.

La ABC være en rettvinklet trekant med vinkel BAC som den rette vinkelen. Jeg sier at kvadratet på BC er lik summen av kvadratene på BA og AC.

La kvadratet $BCED$ ha blitt tegnet på BC, og kvadratene GB og HC på henholdsvis AB og AC. Og la AL ha blitt tegnet gjennom punktet A parallell til BD eller CE. Og la AD og FC ha blitt tegnet. Og siden vinklene BAC og BAG begge er rette, så vil de to rette linjene AC og AG, som ikke ligger på samme side, lage nabovinkler med en rett linje BA ved punktet A, med sum lik to rette vinkler. Dermed ligger CA i forlengelsen av AG. Så, av samme grunner ligger BA i forlengelsen av AH. Og siden vinkel DBC er lik FBA, for de er begge rette vinkler, la ABC ha



Figur 5.16: Proposisjon 5.1.34. Punktet M er ikke i Euklids opprinnelig figur.

blitt lagt til begge. Dermed er hele vinkelen DBA lik hele vinkelen FBC. Og siden DB er lik BC, FB er lik BA, så er de to rette linjene DB og BA henholdsvis lik de to rette linjene CB og BF. Og vinkel DBA er lik vinkel FBC. Dermed er basen AD lik basen FC, og trekanten ABD er lik trekanten FBC. Og parallellogram BL er det dobbelte av trekant ABD. For de har samme base, BD, og ligger mellom de samme parallellene, BD og AL. Og kvadrat GB er det dobbelte av trekant FBC. For igjen har de samme base, FB, og ligger mellom de samme parallellene, FB og GC. Og det dobbelte av like ting er også like hverandre. Dermed er parallellogrammet BL lik kvadratet GB. Så, på samme måte, hvis AE og BK ha blitt tegnet, kan det bli vist at parallellogrammet CL er lik kvadratet HC. Dermed er hele kvadratet $BDEC$ lik summen av de to kvadratene GB og HC. Og kvadratet $BDEC$ er tegnet på BC, og kvadratene GB og HC på henholdsvis BA og AC. Dermed er kvadratet på siden BC lik summen av kvadratene på sidene BA og AC.

Altså, i en rettvinklet trekant, kvadratet på siden ovenfor den rette vinkelen er lik summen av kvadratene på sidene som omgir den rette vinkelen. Og det var dette vi skulle vise. ■

Når Euklid sier “kvadratet på linjen”, så betyr altså dette kvadratet som har sidekanter som er like lang denne linjen, hvor en av sidekantene er linjen selv. Vi så et lignende eksempel allerede i proposisjon 5.1.1, men der var det snakk om en trekant.

Siden vi ikke har brukt firkanter i noen stor grad så langt, ser vi først nå hvordan han vanligvis navngir dem. I stedet for å liste all hjørnene slik som vi vanligvis gjør, pleier Euklid bare å nevne to motsatte hjørner, vanligvis hjørnet øverst til venstre og hjørnet nederst til høyre. Fordelen ved å gjøre det på denne måten er at navnene blir kortere og man trenger ikke å gi navn til alle hjørnene. Ulempen er at det blir lettere å forveksle firkanten med diagonalen som går mellom disse hjørnene.

Vi ser i proposisjon 5.1.34 at han bruker firkantene GB og HC i stedet for $GFBA$ og $HACK$. Likevel sier han firkant $BDEC$, og ikke BE. Dette er kanskje fordi denne firkanten deles opp og at det er mange linjer som går gjennom den, men dette er vanskelig å vite.

Der jeg velger å bruke uttrykket ’forlengelsen av’ står det ’straight-on’ i den engelske oversettelsen. Det Euklid mener er at linjene blir plassert inntil hverandre slik at vinkelen mellom dem er 180°, eller at de danner en rett linje. Men om jeg skulle brukt uttrykket ’rett på’ kunne det tolkes som at linjene dannet en vinkel på 90°. Derfor har jeg valgt å bruke ’forlengelsen av’.

Euklid innfører en ny slutningsregel her. Han sier at det dobbelte av like ting også er lik hverandre. Selv om dette ligner veldig på de andre slutningsreglene han har gitt, så er denne litt annerledes. La oss derfor innføre den.

Slutningsregel 5.1.35. *Det dobbelte av like ting er også lik hverandre.*

Setning 5.1.36 (Formulert fra proposisjon 5.1.34)**.** *I en rettvinklet trekant er kvadratet av hypotenusen lik summen av kvadratene av katetene.*

Bevis. La $\triangle ABC$ være rettvinklet med $\angle BAC = 90°$. Konstruer kvadratene $\square BDEC$ på BC, $\square HACK$ på AC og $\square GFBA$ på AB.

Tegn $AL \parallel BD, L \in DE, M \in AL, BC$. Tegn også AD og FC.

Siden $\angle DBC = \angle FBA$ får vi $\angle DBC + \angle ABC = \angle FBA + \angle ABC \Rightarrow \angle DBA = \angle FBC$.

Siden $|BC| = |BD|, |FB| = |AB|$ får vi $\triangle ABD = \triangle FBC$.

$\mathcal{A}(\square BDLM) = 2 \cdot \mathcal{A}(\triangle ABD)$ fordi de har samme grunnlinje og samme høyde.

$\mathcal{A}(\square GFBA) = 2 \cdot \mathcal{A}(\triangle FBC)$ fordi de har samme grunnlinje og samme høyde.

Dette gir oss
$\mathcal{A}(\square BDLM) = 2 \cdot \mathcal{A}(\triangle ABD) = 2 \cdot \mathcal{A}(\triangle FBC) = \mathcal{A}(\square GFBA)$.

På samme måte kan vi vise at $\mathcal{A}(\square HACK) = \mathcal{A}(\square MLEC)$.

Vi ender da opp med
$\mathcal{A}(\square GFBA) + \mathcal{A}(\square HACK) = \mathcal{A}(\square BDEC)$,
eller mer algebraisk

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

$\square$

Punkt M er ikke et punkt som Euklid bruker i sin proposisjon, men jeg valgte å legge til for å unngå å navngi firkanter ved å bare nevne motstående hjørner.

Her velger jeg å bruke symbolet $\square$ for å markere at en figur er en firkant.

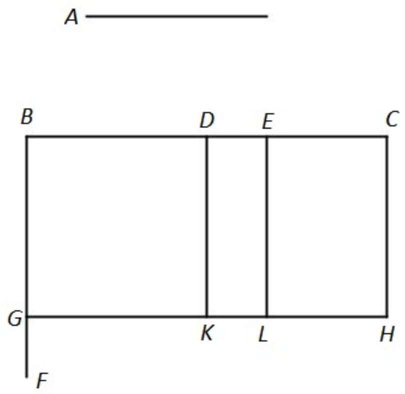
Dette er kanskje en av de viktigste og mest brukte formlene innenfor geometri i ungdomsskolen i dag. Beviset i setning 5.1.36 er ikke det som vanligvis brukes, siden det krever en god forståelse av geometriske egenskaper og relasjoner, noe man ikke forventer at elever i den alderen har utviklet. Vi ser i proposisjon 5.1.34 at omtrent all kunnskap man har tilegnet seg i løpet av bok I brukes for å vise Pytagoras' setning.

5.2 Proposisjoner om geometrisk algebra

Proposisjonene i denne seksjonen er hentet fra bok II i Euklids *Elementer*. Disse omhandler basiskunnskaper innen geometrisk algebra. Her vil jeg prøve å vise hvordan Euklids rene geometriske proposisjoner svarer til rene algebraiske uttrykk. Jeg vil likevel bruke geometri til å vise det Euklid viser, men jeg kommer også til å bruke algebra.

Vi skal se at Euklid i stor grad bruker resultater fra bok I for å vise resultatene i bok II. Proposisjonene i bok II bygger mer på resultatene i bok I enn bygger på hverandre, slik som i bok I.

Proposisjon 5.2.1 ([Fit08, Proposisjon 2.1, s. 50-51])**.** Hvis det er to rette linjer, og en av dem er delt i et hvilket som helst antall deler, da er rektangelet utspent av de to rette linjene lik summen av rektanglene utspent av den udelte rette linjen, og hver av delene fra den oppdelte rette linjen.



Figur 5.17: Proposisjon 5.2.1

La A og BC være to rette linjer, og la BC bli delt tilfeldig ved punktene D og E. Jeg sier at rektangelet utspent av A og BC er lik rektanglene utspent av A og BD, av A og DE, og av A og EC.

La BF ha blitt tegnet fra punkt B ortogonalt på BC, og la BG ha blitt gjort lik A, og la GH ha blitt tegnet gjennom G parallelt med BC, og la DK, EL og CH ha blitt tegnet gjennom henholdsvis punktene D, E og C, parallelt med BG.

Så rektangelet BH er lik rektanglene BK, DL og EH. Og BH er rektangelet utspent av A og BC. For det er utspent av GB og BC, og BG er lik A. Og BK er rektangelet utspent av A og BD. For det er utspent av GB og BD, og BG er lik A. Og DL er rektangelet utspent av A og DE. For DK, som er lik BG, er lik A. På samme måte er EH også rektangelet utspent av A og EC. Dermed er rektangelet utspent av A og BC lik rektanglene utspent av A og BD, av A og DE, og av A og EC.

Dermed, hvis det er to rette linjer, og en av dem er delt i et hvilket som helst antall deler, da er rektangelet utspent av de to rette linjene lik summen av rektanglene utspent av den udelte rette linjen, og hver av delene fra den oppdelte rette linjen. Og dette var det vi skulle vise. ■

Vi ser her at Euklid fortsetter å navngi firkanter ved å bruke motstående hjørner. Men i motsetning til hva jeg har gjort her (som også den engelske oversettelsen gjør), så nevner han ikke et ord for firkant foran navnet til rektangelet. Ut fra figuren ser man lett at man ikke er interessert i diagonalene, men uten figuren kunne det oppstå misforståelser. Igjen ser vi alstå at Euklid i stor grad støtter seg på figuren for å skape klarhet i hva han prøver å fortelle.

Setning 5.2.2 (Formulert fra proposisjon 5.2.1)**.** *Hvis et rektangel deles opp i mindre rektangler, er arealet av rektangelet lik summen av arealene til de mindre rektanglene den ble delt i.*

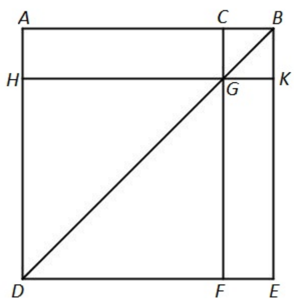
Bevis. Gitt to rette linjer A og BC, la BC og BG utspenne rektangelet $\square BGHC$, der $|BG| = |A|$, og la BC deles ved D og E, slik at vi har rektanglene $\square BGKD$, $\square DKLE$ og $\square ELHC$.

Dette gir oss $\mathcal{A}(\square BGKD) + \mathcal{A}(\square DKLE) + \mathcal{A}(\square ELHC) = |A| \cdot |BD| + |A| \cdot |DE| + |A| \cdot |EC| = |A| \cdot (|BD| + |DE| + EC|) = |A| \cdot |BC| = \mathcal{A}(\square BGHC)$. $\square$

Det Euklid viser her er et av de algebraiske aksiomene, nemlig $a(b + c) = ab + ac$.

I setning 5.2.2 bruker jeg formelen for arealet av et rektangel, $\mathcal{A} = a \cdot b$. Dette er med på å gjøre den mye kortere enn proposisjon 5.2.1. Men siden formler er noe som hører til algebraen, er ikke dette noe Euklid benytter seg av siden han bruker ren geometri. Fordelen med Euklids metode er at vi får et konkret eksempel å jobbe med.

Proposisjon 5.2.3 ([Fit08, Proposisjon 2.4, s. 52-54])**.** Hvis en rett linje blir delt tilfeldig, er kvadratet på hele den rette linjen lik summen av kvadratene på delene av den rette linjen og to ganger rektangelet som er utspent av delene.



Figur 5.18: Proposisjon 5.2.3

La den rette linjen AB ha blitt delt i et tilfeldig punkt C. Jeg sier at kvadratet på AB er lik summen av kvadratene på AC og CB, og to ganger rektangelet utspent av AC og CB.

La kvadratet $ADEB$ ha blitt tegnet på AB, og la BD ha blitt tegnet, og la CF ha blitt tegnet gjennom C, parallell med enten AD eller EB, og la HK ha blitt tegnet gjennom G, parallell med enten AB eller DE. Og siden CF er parallell med AD, og BD krysser dem, er den ytre vinkelen CGB lik den indre og motstående vinkelen ADB. Men ADB er lik ABD, fordi siden BA også er lik AD. Dermed er vinkel CGB også lik GBC. Så siden BC er lik siden CG. Men, CB er lik GK og CG lik KB. Altså er GK også lik KB. Dermed er $CGKB$ likesidet. Så jeg sier det er også rettvinklet. For siden CG er parallell med BK, og linjen CB krysser dem, er vinklene KBC og GCB lik to rette vinkler. Men KBC er en rett vinkel. Altså er BCG også en rett vinkel. Så de motstående vinklene CGK og GKB er også rett vinkler. Dermed er $CGKB$ rettvinklet. Og det var også likesidet. Altså er det et kvadrat. Og det er på CB. Av samme grunner er HF også et kvadrat. Og det er på HG, og derfor på AC. Dermed er kvadratene HF og KC på henholdsvis AC og CB. Og rektangelet AG er lik rektangelet GE. Og AG er rektangelet utspent av AC og CB. For GC er lik CB. Dermed er GE også lik rektangelet utspent av AC og CB. Dermed er rektanglene AG og GE lik to ganger rektangelet utspent av AC og CB. Og HF og CK er kvadratene på henholdsvis AC og CB. Altså er de fire figurene HF, CK, AG og GE lik summen av kvadratene på AC og CB, og to ganger rektangelet utspent av AC og CB. Men, figurene HF, CK, AG og GE er lik hele $ADEB$, som er kvadratet på AB. Altså er kvadratet på AB lik summen av kvadratene på AC og CB, og to ganger rektangelet utspent av AC og CB.

Altså, hvis en rett linje blir delt tilfeldig, er kvadratet på hele den rette linjen lik summen av kvadratene på delene av den rette linjen og to ganger rektangelet som er utspent av delene. Og det var dette vi skulle vise. ■

Euklids geometriske bevis går her i stor grad ut på å vise at fire figurer satt sammen blir en viss figur. Det er det samme som han gjør i proposisjon 5.2.1. På denne måten unngår han formler og algebraiske uttrykk.

Setning 5.2.4 (Formulert fra proposisjon 5.2.3)**.** *Hvis en rett linje blir delt tilfeldig, er kvadratet på hele den rette linjen lik summen av kvadratene på delene av den rette linjen og to ganger rektangelet som er utspent av delene.*

Bevis. Gitt en rett linje AB, la AB bli delt i et tilfeldig punkt $C \in AB$, og la $|AC| = a, |BC| = b$. Tegn kvadratet $\square ADEB$ med sidekanter $a + b$.

Tegn $CF \parallel AD$, der $F \in DE$, og $HK \parallel AB$, der $H \in AD, K \in BE$. La $G \in CF \cap HK$.

Vi vet at $\square CGKB$ er rettvinklet. Hvis vi trekker diagonalen BD ser vi at $\angle CBG = \angle DBA = \angle ADB = \angle CGB$. Da er også $|BC| = |CG|$.

På samme måte kan vi vise at $|HG| = |HD|$.

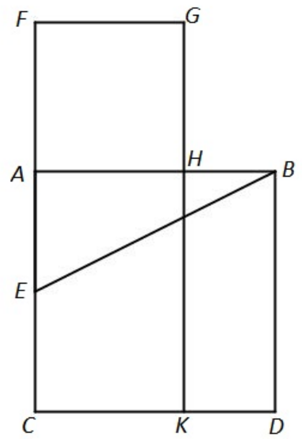
Da er $\mathcal{A}(\square HDFG) + \mathcal{A}(\square AHGC) + \mathcal{A}(\square GFEK) + \mathcal{A}(\square CGKB) = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = \mathcal{A}(\square ADEB)$. $\square$

Resultatet vi får er det vi kjenner som første kvadratsetning. Hvis vi ser på det algebraiske uttrykket blir gjerne Euklids beskrivelse av resultatet lettere å se. Kvadratet på hele linjen, som er $(a+b)^2$ er lik det ene kvadratet, a^2, pluss det andre kvadratet, b^2, pluss to ganger rektangelet utspent av de to lengdene, $2ab$.

Dette resultatet blir brukt i algebraen både på ungdomsskolen og videre i matematikkutdannelsen. Selv om det er en viktig formel som blir mye brukt, dukker den ikke ofte opp i en geometrisk sammenheng.

Selv om Euklid har vist et viktig algebraisk resultat rent geometrisk, ser vi et av problemene den rene geometrien har når vi går videre til de neste proposisjonene. Resultatene han får er er ganske forskjellige rent geometrisk, men algebraisk er det omtrent samme situasjon. Et av resultatene han får er $(2a+b)b + a^2 = (a+b)^2$. Dette er bare en enkel omskrivning av første kvadratsetning, men en helt ny situasjon geometrisk. Han må altså vise flere situasjoner siden han ikke har algebra som verktøy.

Proposisjon 5.2.5 ([Fit08, Proposisjon 2.11, s. 62-64])**.** Å dele en linje slik at rektangelet utspent av hele den rette linjen og en av delene av den, er lik kvadratet på den resterende delen.



Figur 5.19: Proposisjon 5.2.5.

La AB være den gitte rette linjen. Vi ønsker å dele AB slik at rektangelet utspent av hele den rette linjen og en av delene av den, er lik kvadratet på den resterende delen.

For la kvadratet $ABDC$ ha blitt tegnet på AB, og la AC ha blitt delt i to halve i punkt E, og la BE a blitt tegnet. Og la CA ha blitt forlenget til punkt F, og la EF ha blitt gjort lik BE. Og la kvadratet FH ha blitt tegnet på AF, og la GH ha blitt forlenget til punkt K. Jeg sier at AB har blitt delt i H slik at rektangelet utspent av AB og BH er lik kvadratet AH.

For siden den rette linjen AC har blitt delt i to halve i E, og FA har blitt lagt til den, er dermed rektangelet utspent av av CF og FA pluss kvadratet på AE lik kvadratet på EF. Og EF er lik EB. Dermed er rektangelet utspent av CF og FA pluss kvadratet på AE lik kvadratet på EB. Men summen av kvadratene på BA og AE er lik kvadratet på EB. For vinkelen i A er en rett vinkel. Dermed er rektangelet utspent av CF og FA pluss kvadratet på AE er lik summen av kvadratene på BA og AE. La kvadratet på AE ha blitt trukket fra begge. Dermed er det gjenværende rektangelet utspent av CF og FA lik kvadratet på AB. Og FK er rektangelet utspent av CF og FA. For AF er lik FG. Og AD er kvadratet på AB. Altså er rektangelet FK lik kvadratet AD. La rektangelet AK ha blitt trukket fra begge. Dermed er det resterende kvadratet FH lik rektangelet HD. Og HD er rektangelet utspent av AB og BH. For AB er lik BD. Og FH er kvadratet på AH. Altså er rektangelet utspent av AB og BH lik kvadratet på HA.

Altså, den gitte rette linjen AB har blitt delt i punkt H slik at rektangelet utspent av AB og BH er lik kvadratet på HA. Og dette var det vi ønsket å gjøre. ■

Slik som i mange andre proposisjoner, bruker Euklid her størrelsen til figurer og viser at disse er like noen andre. Deretter kan han manipulere uttrykket ved å legge til og trekke fra figurer, og til slutt ender han opp med det han ønsker å komme fram til.

Den engelske oversettelsen bruker frasen "ha blitt tegnet gjennom til punkt F". Her har jeg valgt å bruke "forlenget til F" i stedet for, siden jeg mener dette er med på å gjøre det lettere å forstå hva Euklid faktisk gjør.

Setning 5.2.6 (Formulert fra proposisjon 5.2.5)**.** *Gitt en linje, kan man dele denne linjen slik at arealet av rektangelet utspent av hele linjen og den minste delen er like stort som arealet av kvadratet på den største delen.*

Bevis. Gitt linjen AB, la kvadratet $\square ACDB$ ha blitt tegnet på AB, og la

AC bli delt på midten i E. La AC bli forlenget til F slik at $|EF| = |EB|$. Tegn kvadratet $\square FAHG$ på AF. La $|GK| = |FC|, GK \parallel FC$.

Vi vet at $|CF| \cdot |AF| + |AE|^2 = |EF|^2$. Men fra Pytagoras' setning vet vi også at $|AB|^2 + |AE|^2 = |EB|^2$.

Dette gir oss $|CF| \cdot |AF| + |AE|^2 = |AB|^2 + |AE|^2 \Rightarrow |CF| \cdot |AF| = |AB|^2 \Rightarrow \mathcal{A}(\square FCKG) = \mathcal{A}(\square ACDB)$.

Vi trekker $\mathcal{A}(\square ACKH) = |AC| \cdot |AH|$ fra begge sider. Da ender vi opp med

$$\mathcal{A}(\square FAHG) = \mathcal{A}(\square HKDB) \Rightarrow |AH|^2 = |AB| \cdot |BH|.$$

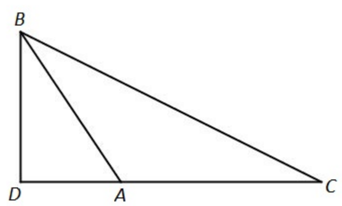
□

Det Euklid viser her er det vi kjenner som det gylne snitt. Det er ikke på denne formen vi er vant til å se den i dag, så la oss vise hvordan vi kommer til en mer kjent form.

Hvis vi definerer $|AB| = (a+b), |AH| = a, |BH| = b$, ser vi at $\mathcal{A}(\square FAHG) = \mathcal{A}(\square HKDB) \Rightarrow a^2 = (a+b)b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$.

Dette uttrykket er det de fleste er mest fortrolig med; forholdet mellom hele linjen og den store delen er lik forholdet mellom den store og den lille delen. Dette forholdet ser vi ikke bare i matematikken, men også i stor grad i kunst og arkitektur. Her ser vi altså at et matematisk resultat Euklid har kommet med, har spredt seg til ikke-matematiske felt.

Proposisjon 5.2.7 ([Fit08, Proposisjon 2.12, s. 64-65])**.** I buttvinklede trekanter er kvadratet på siden ovenfor den butte vinkelen større enn summen av kvadratene på sidene som grenser til den butte vinkelen med to ganger rektangelet utspent av en av sidene som grenser til den butte vinkelen, og forlengelsen av linjen ut til normalen fra det motstående hjørnet.



Figur 5.20: Proposisjon 5.2.7.

La ABC være en buttvinklet trekant, der vinkelen BAC er butt. Og la BD ha blitt tegnet fra B ortogonalt i forhold til AC. Jeg sier at kvadratet på BC er større enn summen av kvadratene på BA og AC med to ganger rektangelet utspent av CA og AD.

For siden den rette linjen CD har blitt delt i et tilfeldig punkt A, er kvadratet på DC lik summen av kvadratene på CA og AD pluss to ganger rektangelet utspent av CA og AD. La kvadratet på DB ha blitt lagt til begge. Dermed er summen av kvadratene på CD og DB lik summen av kvadratene på CA, AD og DB og to ganger rektangelet utspent av CA og AD. Men kvadratet på CB er lik summen av kvadratene på CD og DB. For vinkelen i D er rettvinklet. Og kvadratet på AB er lik summen av kvadratene på AD og DB. Dermed er kvadratet på CB større enn summen av kvadratene på CA og AB med to ganger rektangelet utspent av CA og AD.

Altså, i buttvinklede trekanter er kvadratet på siden ovenfor den butte vinkelen større enn summen av kvadratene på sidene som grenser til den butte vinkelen med to ganger rektangelet utspent av en av sidene som grenser til den butte vinkelen og forlengelsen av linjen ut til normalen fra det motstående hjørnet. Og dette var det vi skulle vise. ■

Det første (og derfor også det siste) avsnittet i proposisjon 5.2.7 var kronglete formulert, og derfor ikke lett å oversette. Men hvis man ser på figuren, og det andre avsnittet der Euklid beskriver en spesifikk situasjon, så er det lettere å forstå hva som blir sagt.

Vi ser også at dette er en variant av situasjonen i proposisjon 5.1.34. Men i dette tilfellet er ikke trekanten rettvinklet, som selvfølgelig fører til at Pytagoras' setning ikke gjelder. Han bruker likevel resultatet fra 5.1.34 til å bevise tilfellet i 5.2.7.

Resultatet han får her ser kanskje fremmed ut, men hvis vi oversetter det, blir det til en formel som brukes i videregående skole i dag.

Setning 5.2.8 (Formulert fra proposisjon 5.2.7)**.** *I en buttvinklet trekant er arealet av kvadratet på den siden motstående den butte vinkelen lik summen av arealene av kvadratene på de to sidene tilgrensende til den butte vinkelen pluss rektangelet som er utspent av en av de tilgrensende sidene og forlengelsen av den tilgrensende siden slik at trekanten blir rettvinklet.*

Bevis. Gitt $\triangle ABC$, der $\angle BAC > 90°$, la CA forlenges til D slik at $\triangle DCB$ er rettvinklet.

Da vet vi at $|DC|^2 = |AC|^2 + |AD|^2 + 2 \cdot |AC| \cdot |AD| \Rightarrow$
$|DC|^2 + |BD|^2 = |AC|^2 + |AD|^2 + |BD|^2 + 2 \cdot |AC| \cdot |AD|$.

Men $|CB|^2 = |CD|^2 + |BD|^2$ og $|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2$.

Da ender vi opp med $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 + 2 \cdot |AC| \cdot |AD|$. $\square$

Her avslutter Euklid proposisjon 5.2.7, for han har bevist det han ville. Men resultatet er fremdeles ikke helt på formen vi vil ha det på. La oss derfor fortsette.

Vi ser at $-\frac{|AD|}{|AB|} = \cos BAC$.

Hvis vi setter inn i resultatet fra setning 5.2.8 ender vi opp med $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 + 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos BAC$, eller

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos C.$$

Dette er det vi kjenner som cosinussetningen. Siden Euklid ikke bruker trigonometri, får han ikke setningen på denne formen. Dette er en generalisering av Pytagoras' setning. Vi kan se at hvis $\angle C = 90°$, så blir $2ab \cos C = 0$, og vi sitter igjen med $c^2 = a^2 + b^2$ som er Pytagoras's setning.

I proposisjonen etter denne viser Euklid et lignende tilfelle med en spiss trekant. Fra den proposisjonen kan vi komme fram til akkurat samme resultat, altså cosinussetningen. Igjen ser vi altså at to ulike geometriske situasjoner fører til den samme algebraiske situasjonen.

5.3 Proposisjoner om plangeometri med sirkler

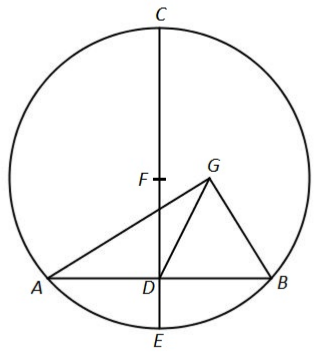
Proposisjonene i denne seksjonen er hentet fra bok III i Euklids *Elementer*. Disse omhandler basiskunnskaper innen plangeometri med sirkler. Dette er den siste av bøkene vi skal se på.

Proposisjon 5.3.1 ([Fit08, Proposisjon 3.1, s. 70-71])**.** Å finne sentrum i en gitt sirkel.

La ABC være en gitt sirkel. Vi ønsker å finne sentrum i sirkel ABC.

La en rett linje AB ha blitt tegnet tilfeldig gjennom ABC, og la AB ha blitt halvert i punkt D. Og la DC ha blitt tegnet fra D, ortogonalt på AB. Og la CD ha blitt forlenget til E. Og la CE ha blitt halvert i F. Jeg sier at F er sentrum i sirkel ABC.

For hvis ikke, la om mulig G være sentrum i sirkelen, og la GA, GD og GB ha blitt tegnet. Og siden AD er lik DB, og DG er felles, er de to rette linjene AD og DG henholdsvis lik de to rette linjene BD og DG. Og basen GA er lik basen GB. For de er begge radier. Dermed er vinkel



Figur 5.21: Proposisjon 5.3.1.

ADG lik vinkel GDB. Og når en rett linje står på en annen rett linje og lager nabovinkler som er like, da er begge vinklene en rett vinkel. Altså er GDB en rett vinkel. Og FDB er også en rett vinkel. Altså er FDB lik GDB, den større lik den mindre. Dette er umulig. Dermed er punktet G ikke sentrum i sirkel ABC. På samme måte kan vi vise at ingen andre punkter kan være det, utenom F.

Dermed er punkt F sentrum i sirkel ABC. ■

Korollar 5.3.2 ([Fit08, Korollar 3.1, s. 71])**.** Så, fra dette er det åpenbart at hvis en rett linje i en sirkel deler en annen på midten, og de er ortogonale, da er sentrum i sirkelen på den førstnevnte linjen. Og det var dette vi ønsket å gjøre. ■

Her viser Euklid at en vinkel som er beviselig større samtidig skal være lik en annen vinkel. Her får han en selvmotsigelse, og dermed har han fullført beviset. Dette er første gang han ender beviset i et korollar.

Noe som kan være verdt å merke seg, er at selv om han allerede har definert sentrum av en sirkel i definisjonene 4.1.15 og 4.1.16, så blir disse ikke brukt eller engang nevnt i beviset i proposisjon 5.3.1.

Setning 5.3.3 (Formulert fra proposisjon 5.3.1)**.** *Gitt en sirkel kan man finne sentrum i denne sirkelen.*

Bevis. Gitt sirkel ABC, la linjen AB ha blitt tegnet tilfeldig gjennom sirkelen. La D være midtpunktet på AB og tegn CE gjennom D slik at $AB \perp CE$. La F være midtpunktet på CE.

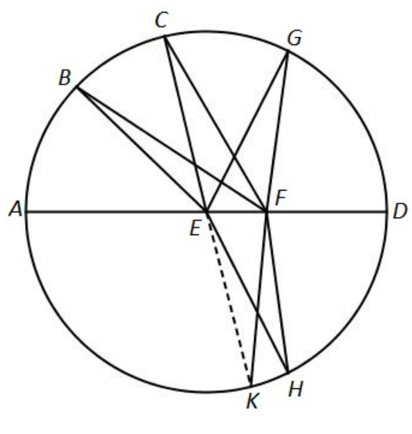
Anta at F ikke er sentrum i sirkelen, men at G er sentrum. Siden $\triangle ADG \cong \triangle DBG$ er $\angle ADG = \angle BDG = 90°$, siden de er nabovinkler. Men vi vet at $\angle BDF = 90°$, så $\angle BDF = \angle BDG$. Men $\angle BDF > \angle BDG$, så dette er en selvmotsigelse.

Altså er F sentrum i sirkel ABC. $\square$

Hvorfor Euklid velger å lage et korollar fra denne proposisjon kan være fordi han ønsker å gi enda en definisjon av sentrum i en sirkel. Det kan også være at dette er for å understreke et viktig poeng. Likevel kunne han bare brukt resultatet uten å lage et korollar, slik som han har gjort i de første bøkene. Det kan også være at han ønsker at det faktum at man kan finne sentrum, og det faktum at sentrum ligger på en linje som halverer en annen linje og samtidig er ortogonal til denne, som to forskjellige resultater.

Selv om han har definert sentrum av en sirkel før (definisjon 4.1.16), så er ikke dette en hensiktsmessig måte å gå fram på for å finne dette punktet. Det å tegne en masse tilfeldige linjer i håp om å finne et punkt som oppfyller definisjon 4.1.15 er litt for optimistisk. Det er bedre egnet som en måte å kontrollere at et punkt faktisk er sentrum.

Proposisjon 5.3.4 ([Fit08, Proposisjon 3.7, s. 75-77])**.** Hvis et punkt, som ikke er sentrum i sirkelen, blir tatt på diameteren til sirkelen, og rette linjer stråler ut fra dette punktet mot omkretsen av sirkelen, så er den største rette linjen den som sentrum ligger på, og den minste er det resterende av denne diameteren. Og for de andre, en rett linje nærmere den rette linjen gjennom sentrum er alltid større enn en rett linje lengre borte. Og kun to like rette linjer vil utstråle fra punktet mot omkretsen av sirkelen, en på hver av den minste rette linjen.



Figur 5.22: Proposisjon 5.3.4.

La $ABCD$ være en sirkel, og la AD være dens diameter, og la et punkt F, som ikke er sentrum i sirkelen, ligge på AD. La E være sentrum av sirkelen. Og la noen rette linjer, FB, FC og FG utstråle fra F mot omkretsen av sirkel $ABCD$. Jeg sier at FA er den største rette linjen, FD den minste, og FB er større enn FC, og FC er større enn FG.

For la BE, CE og GE ha blitt tegnet. Og siden to sider alltid er større en den resterende siden i en trekant, er EB og EF altså større enn BF. Og AE er lik BE, så BE og EF er lik AF. Dermed er AF større enn BF. Igjen, siden BE er lik CE og FE er felles, er de to rette linjene BE og EF henholdsvis lik de to rette linjene CE og EF. Men vinkel BEF er også større enn vinkel CEF. Dermed er basen BF større en basen CF. Av samme grunner er CF også større enn FG.

Igjen, siden GF og FE er større enn EG, og EG er lik ED, er GF og FE dermed større enn ED. La EF ha blitt trukket fra begge. Dermed er resten GF større enn resten FD. Altså er FA den største rette linjen, FD den minste, og FB er større enn FC, og FC er større enn FG.

Jeg sier også at det kun utstråler to like rette linjer fra punktet F mot omkretsen av sirkel $ABCD$, en på hver side av den minste rette linjen FD. For la vinkelen FEH, som er lik vinkel GEF, ha blitt konstruert på den rette linjen EF i punktet E, og la FH ha blitt tegnet. Dermed, siden GE er lik EH og, EF er felles, er de to rette linjene, GE og EF henholdsvis lik de to rette linjene HE og EF. Og vinkel GEF er lik vinkel HEF. Dermed er basen FG lik basen FH. Så jeg sier at det ikke vil utstråle en annen rett linje lik FG mot omkretsen av sirkelen fra punkt F. For, om mulig, la FK utstråle på denne måten. Og siden FK er lik FG, og FH er lik FG, er også FK lik FH, den rette linjen nærmere den rette linjen gjennom sentrum lik den rette linjen lengre borte. Dette er umulig. Altså en annen rett linje lik GF vil ikke utstråle fra punktet F mot omkretsen av sirkelen. Det finnes altså bare en slik rett linje.

Dermed, hvis et punkt, som ikke er sentrum i sirkelen, blir tatt på sirkelen, og rette linjer stråler ut fra dette punktet mot omkretsen av sirkelen, så er den største rette linjen den som sentrum ligger på, og den minste er det resterende av denne diameteren. Og for de andre, en rett linje nærmere den rette linjen gjennom sentrum er alltid større enn en rett linje lengre borte. Og kun to like rette linjer vil utstråle fra punktet mot omkretsen av sirkelen, en på hver av den minste rette linjen. Og det var dette vi skulle vise. ■

Igjen bruker Euklid trekanter til å vise størrelsesforhold. Vi ser at det er proposisjon 5.1.22 han bruker, som vi gjenkjenner som trekantsetningen.

Når Euklid sier at desto nærmere en linje ligger FA, desto større er den, mener han antagelig at avstanden er vinkelen mellom disse linjene.

Setning 5.3.5 (Formulert fra proposisjon 5.3.4)**.** *Hvis et punkt, ulikt sentrum, blir tatt på diameteren, vil linjer fra dette punktet og ut til omkretsen være større desto mindre vinkelen mellom linjen og den delen av diameteren som sentrum ligger på. Linjer fra dette punktet har kun én annen linje fra samme punkt som er like lang.*

Bevis. Gitt sirkel $ABCD$ med sentrum i E og diameter AD, velg et tilfeldig punkt $F \in AD, F \neq E$. La B, C, G ligge på sirkelbuen som i figuren. Da er $|FA| > |FB| > |FC| > |FG| > |FD|$, hvor $|FA|$ er den største mulige linjen fra F og ut til sirkelbuen, og FD er den minste mulige.

Vi vet at $|EB| + |EF| > |FB|$, og siden $|FA| = |EA| + |EF|$ får vi $|FA| > |FB|$.

Siden $\angle BEF > \angle CEF$ får vi at $|FB| > |FC|$.
På samme måte er $|FC| > |FG|$.

Vi vet at $|FG| + |EF| > |EG| = |ED|$, og $|ED| - |EF| = |FD|$. Dermed er $|FG| > |FD|$.

Altså er $|FA| > |FB| > |FC| > |FG| > |FD|$. Altså, desto mindre vinkelen mellom en linje fra punktet F og ut til sirkelbuen og linjen FA er, desto større er linjen. Dermed ser vi at FA er den største mulige linjen, og FD er den minste mulige.

Linjer med like lengde fra punkt F og ut til sirkelbuen, eksisterer kun i par, en på hver side av AD

La $\angle GEF = \angle HEF$. Da er $|FG| = |FH|$.

Anta at punktet K ligger på sirkelbuen og at $|FK| = |FG|$. Men $\angle AEK < \angle AEH$, så $|FK| > |FH|$. Dette er en selvmotsigelse. Da er FH den eneste linjen fra F og ut til sirkelbuen med samme lengde som FG. □

Som en del av beviset, bruker Euklid at $\angle BEF > \angle CEF$. Men det eneste stedet han kan ha hentet denne informasjonen fra, er ved å se på figuren. Hvis vi ser på figuren, så er det helt tydelig at $\angle BEF > \angle CEF$, men dette blir aldri bevist. Dette er hvor mye Euklid støtter seg på figurene sine; informasjon man kan hente ved å bare se på figuren er gyldig som et argument i et bevis.

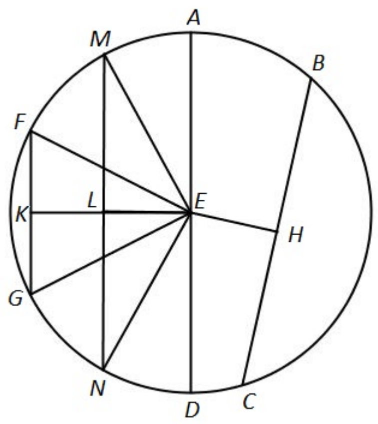
At FA er den største mulige linjen og FD den minste mulige, blir kun vist i den grad at resultatet viser at desto nærmere en linje ligger FA desto større er den. Siden FA er linjen selv, så er det jo klart at ingen linje kan ligge nærmere. Og siden vinkelen mellom FA og FD er$180°$, så er det også klart at ingen linje kan ligge lengre borte.

Når Euklid sier at det kun finnes to like linjer fra punkt F og ut til sirkelbuen, mener han opplagt at like linjer alltid er i par. Det finnes jo helt tydelig et uendelig antall par av like linjer fra F til sirkelbuen. Unntakene er selvfølgelig FA og FD, men han har allerede sagt at disse linjene er henholdsvis den største og den minste.

Vi ser at han får to ulike resultater fra denne proposisjonen. I proposisjon 5.3.1 lager han et eget korollar for et resultat, mens i proposisjon 5.3.4 lar han to ulike resultater så sammen.

Før vi tar for oss proposisjon 5.3.6, bør vi nevne at han bruker et resultat fra en tidligere proposisjon som sier at linjer som lige like langt fra sentrum, er like store.

Proposisjon 5.3.6 ([Fit08, Proposisjon 3.15, s. 85-86])**.** I en sirkel er en diameter den største rette linjen, og for de andre, så er en rett linje nærmere sentrum alltid større enn en som er lengre borte.



Figur 5.23: Proposisjon 5.3.6.

La $ABCD$ være en sirkel, og la AD være diameteren, og E være sentrum. Og la BC være nærmere diameteren, og FG lengre borte. Jeg sier at AD er den største rette linjen, og BC er større enn FG.

For la EH og EK ha blitt tegnet fra sentrum E, ortogonalt på henholdsvis BC og FG. Og siden BC er nærmere sentrum enn FG, så er EK større enn EH. La EL ha blitt gjort lik EH. Og la LM ha blitt tegnet fra L ortogonalt på EK, og la den bli forlenget til N. Og la ME, EN, FE og EG ha blitt tegnet.

Siden EH er lik EL, er BC også lik MN. Igjen, siden AE er lik EM, og ED er lik EN, er AD lik ME og EN. Men ME og EN er større enn MN, og MN er lik BC. Dermed er AD større enn BC. Og siden de to rette linjene ME og EN er henholdsvis like de to rette linjene FE og EG, og vinkel MEN er større enn vinkel FEG, er basen MN dermed større enn basen FG. Men MN var lik BC. Dermed er diameteren AD den størst, og BC er større enn FG.

Altså, i en sirkel er en diameter den største rette linjen, og for de andre, så er en rett linje nærmere sentrum alltid større enn en som er lengre borte. Og det var dette vi skulle vise. ■

Her bruker Euklid mye av de samme tingene som han brukte for å vise proposisjon 5.3.4, nemlig trekanter og radier. Men her er det ikke snakk om linjer fra et punkt på diameteren, men hele korder mellom punkter på sirkelbuen.

Det at diameteren AD er den største linjen blir vist ved at den er større enn en linje som ligger lengre borte, og desto lengre fra AD linjene ligger, desto mindre er de.

Setning 5.3.7 (Formulert fra proposisjon 5.3.6)**.** *I en sirkel er diameteren er den største linjen, og linjer er større desto nærmere linjen ligger sentrum.*

Bevis. Gitt sirkel $ABCD$, der AD er diameteren og E er sentrum, la BC ligge nærmere E enn FG. Altså $|EK| > |EH|$, der $EH \perp BC$ og $EK \perp FG$.

Gitt $L \in EK$ slik at $|EL| = |EH|$, og siden $EL \perp MN$ følger det at $|MN| = |BC|$.

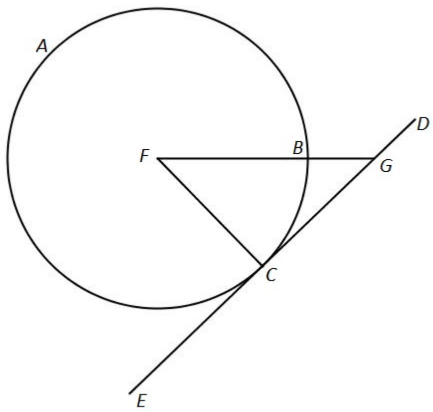
Ser at $|MN| < |EM| + |EN| = |EA| + ED| = |AD|$. Da følger det at $|AD| > |BC|$.

Siden $\angle FEG < \angle MEN$ så er $|FG| < |MN| = |BC|$. □

I begynnelsen av proposisjon 5.3.6 sier Euklid at BC er nærmere diameteren AD enn FG. Men avstandene han måler er avstanden fra sentrum E og til midtpunktet på linjen. Det blir altså ikke helt presist å si avstanden fra diameteren. I innledningen til proposisjonen, bruker han avstand til sentrum, så det er likevel tydelig hva han mener.

Slik som i proposisjon 5.3.4 ender han opp med å bruke at en vinkel er større enn en annen. Men igjen er dette kun hentet fra figuren. Det er ikke tvil om at det er slik når man ser på figuren, men dette blir altså ikke bevist.

Proposisjon 5.3.8 ([Fit08, Proposisjon 3.18, s. 89])**.** Hvis en rett linje berører en sirkel, og en annen rett linje er tegnet fra sentrum av sirkelen til kontaktpunktet, så er den rette linjen ortogonal til tangenten.



Figur 5.24: Proposisjon 5.3.8.

For la en rett linje DE berøre sirkel ABC i punkt C, og la senteret F av sirkel ABC ha blitt funnet, og la FC ha blitt tegnet fra F til C. Jeg sier at FC er ortogonal til DE.

For hvis ikke, la FG ha blitt tegnet fra F, ortogonalt på DE.

Dermed, siden vinkel FGC er en rett vinkel er vinkel FCG spiss. Og den største vinkelen står ovenfor den største siden. Altså er FC større enn FG. Og FC er lik FB. Altså er også FB større enn FG, den minste større enn den største. Dette er umulig. Dermed er FG ikke ortogonal til DE. På samme måte kan vi vise at ingen andre linjer er det heller, utenom FC. Altså er FC ortogonal til DE.

Altså, hvis en rett linje berører en sirkel, og en annen rett linje er tegnet fra sentrum av sirkelen til kontaktpunktet, så er den rette linjen ortogonal til tangenten. Og det var dette vi skulle vise. ■

Her bruker Euklid at siden summen i en trekant må være mindre enn to rette vinkler, og en av vinklene er rette, så må de andre vinklene være spisse, altså mindre enn en rett vinkel. Dette fører til at han kan si noe om størrelsen på sidene, og dermed skaper han en selvmotsigelse.

Setning 5.3.9 (Formulert fra proposisjon 5.3.8)**.** *Hvis en linje berører en sirkel, og en radie blir trukket ut til kontaktpunktet, så står radien ortogonalt på tangenten.*

Bevis. Gitt sirkel ABC med sentrum F, la linjen DE berøre sirkelen i C.

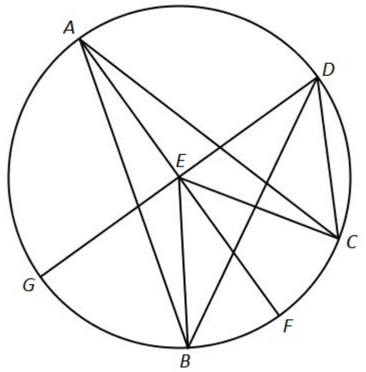
Anta at FC ikke står ortogonalt på DE, men at $FG \perp DE$. Da er $\angle FCG < \angle FGC = 90°$, så $FC > FG$ og $FB = FC$.

Men $FB < FG$. Dette er en selvmotsigelse. Så FG står ikke ortogonalt på DE. På samme måte kan vi vise at den eneste linjen som står ortogonalt på DE er FC.

Altså $FC \perp DE$. □

Dette er det første stedet Euklid bruker begrepet tangent. Dette begrepet blir ikke introdusert eller forklart på forhånd, men blir plutselig brukt. Det er ikke veldig vanskelig å lese seg fram til hva begrepet tangent brukes om, men det blir altså aldri forklart direkte. Dette skiller seg ganske klart ut fra mye annet Euklid har gjort så langt, for han introduserer og definerer begreper og resultater veldig systematisk.

Proposisjon 5.3.10 ([Fit08, Proposisjon 3.20, s. 90-91])**.** I en sirkel er vinkelen i sentrum det dobbelte av vinkelen på periferien, når vinklene spenner over samme sirkelbue.



Figur 5.25: Proposisjon 5.3.10.

La ABC være en sirkel, og la BEC være en vinkel ved sirkelens sentrum, og BAC en vinkel på sirkelens periferi. Og la dem spenne over samme sirkelbue BC. Jeg sier at vinkel BEC er det dobbelte av vinkel BAC.

La AE ha blitt forlenget til F.

Dermed, siden EA er lik EB, er vinkel EAB også lik EBA. Dermed er vinkel EAB og EBA det dobbelte av vinkel EAB. Og BEF er lik EAB og EBA. Altså er også BEF det dobbelte av EAB. Så av samme grunner er FEC også det dobbelte av EAC. Dermed er hele vinkelen BEC det dobbelte av hele vinkelen BAC.

La det være en annen vinkel BDC. Og la DE ha blitt tegnet og forlenget til G. På samme måte kan vi vise at vinkel GEC er det dobbelte av EDC, hvor GEB er det dobbelte av EDB. Dermed er den resterende vinkelen BEC det dobbelte av den resterende vinkelen BDC.

Altså, I en sirkel er vinkelen i sentrum det dobbelte av vinkelen på periferien, når vinklene spenner over samme sirkelbue. Og dette var det vi skulle vise. ■

Euklid summerer ulike vinkler, og bruker at i en trekant er den ytre vinkelen lik summen av de to motstående indre vinklene.

I den andre delen av beviset, viser Euklid at periferivinkelen kan være plassert hvor som helst på periferien, så lenge den har samme base som sentralvinkelen.

Setning 5.3.11 (Formulert fra proposisjon 5.3.10)**.** *I en sirkel er en sentralvinkel dobbelt så stor som en periferivinkel.*

Bevis. Gitt sirkel ABC med sentrum i E, la $\angle BEC$ være en sentralvinkel og $\angle BAC$ være en periferivinkel, med samme base BC.

Vi vet at $|EA| = |EB| \Rightarrow \angle EAB = \angle EBA$. Da er $\angle BEF = 2 \cdot \angle EAB$. På samme måte finner vi at $\angle FEC = 2 \cdot \angle EAC$.

Vi ser også at $\angle BEC = \angle BEF + \angle FEC$ og $\angle BAC = \angle EAB + \angle EAC$.

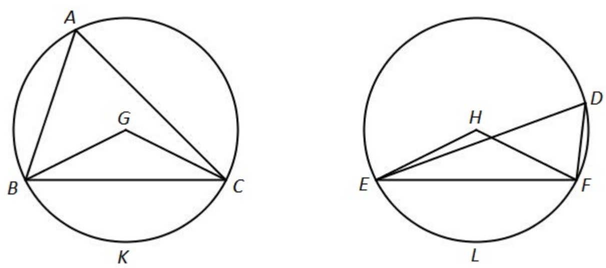
Dermed får vi at $\angle BEC = 2 \cdot \angle BAC$.

På samme måte kan vi vise $\angle GEC = 2 \cdot \angle EDC, \angle GEB = 2 \cdot \angle EDB \Rightarrow BEC = 2 \cdot \angle BDC$. □

Her blir det engelske uttrykket 'circumference base' brukt, og dette er den eneste proposisjonen der det blir brukt. Det som menes med dette begrepet er sirkelbuen mellom to punkter, i dette tilfellet buen mellom B og C, så det er dette begrepet jeg har valgt å bruke. Dette begrepet blir heller ikke introdusert tydelig eller definert, men igjen er det ikke vanskelig å forstå hva det betyr hvis man bare leser proposisjonen.

Resultatet om at periferivinkler er halvparten av sentralvinkler kommer først i videregående skole.

Proposisjon 5.3.12 ([Fit08, Proposisjon 3.26, s. 95-96])**.** I like sirkler, står like vinkler ovenfor like periferier, uansett om de står i sentrum eller på periferien.



Figur 5.26: Proposisjon 5.3.12.

La ABC og DEF være like sirkler, og inni dem la BGC og EHF være like vinkler i sentrum, og BAC og EDF like vinkler på periferien. Jeg sier at periferien BKG er lik periferien ELF.

La BC og EF ha blitt tegnet.

Og siden sirklene ABC og DEF er like, er radiene også like. Så de to rette linjene BG og GC er henholdsvis like de to rette linjene EH og HF. Og vinkelen i G er lik vinkelen i H. Dermed er basen BC lik basen EF. Og siden vinkelen i A er lik vinkelen i D, så er sirkelsegmentet BAC tilsvarende sirkelsegmentet EDF. Og de er på like rette linjer BC og EF. Og tilsvarende sirkelsegmenter på like rette linjer er like hverandre. Altså er sirkelsegment BAC lik sirkelsegment EDF. Og hele sirkel ABC er lik hele sirkel DEF. Dermed er den resterende periferien BKC lik den resterende periferien ELF.

Altså, i like sirkler, står like vinkler ovenfor like periferier, uansett om de står i sentrum eller på periferien. Og det var dette vi skulle vise. ■

Her bruker Euklid vinkler og sirkelsegmenter til å kommer fram til resultatet han ønsker. Vi ser også at i stedet for å navngi vinkler, sier han vinkelen som ligger i det punktet. Selv om han ikke bruker proposisjon 5.3.10 til å komme frem til resultatet, er det dette han bygger proposisjonen på.

Setning 5.3.13 (Formulert fra proposisjon 5.3.12)**.** *Like periferivinkler og like sentralvinkler spenner over like sirkelbuer i like sirkler.*

Bevis. Gitt to like sirkler ABC og DEF, med sentrum i henholdsvis G og H, la $\angle BGC = \angle EHF$ være sentralvinkler og $\angle BAC = \angle EDF$ være periferivinkler.

Siden sirklene ABC og DEF er like, får vi $|GC| = |GB| = |HE| = HF|$. Da er $|BC| = |EF|$, fordi $\angle BGC = \angle EHF$.

Siden $\angle BAC = \angle EDF$ og $|BC| = |EF|$, er sirkelsegmentene BAC og EDF like.

Siden sirklene ABC og DEF også er like, får vi at sirkelbuene BKC og ELF er like. □

Euklid sier først at sirkelsegmentene BAC og EDF er tilsvarende eller lignende (den engelske oversettelsen bruker ordet 'similar'), ikke like. Deretter viser han at de også er like. Grunnen til at han gjør dette kan være at punktene segmentene er gitt ved ikke faller sammen, selv om vinklene de danner er like store.

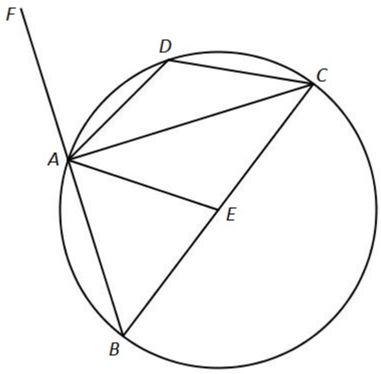
Euklid navngir ikke alltid alle vinklene med tre punkter her, men refererer i stedet bare til vinkelens toppunkt. Dette burde likevel ikke føre til misforståelser, siden det bare er en vinkel vi er interessert i ved hvert punkt. Likevel virker dette litt rart, siden han gjør mange andre ting veldig omstendelig og nesten pinlig nøyaktig.

Proposisjon 5.3.14 ([Fit08, Proposisjon 3.31, s. 98-100])**.** I en sirkel, vinkelen i en halvsirkel er en rett vinkel, og vinkelen i et større segment er mindre enn en rett vinkel, og i et mindre segment er vinkelen større enn en rett vinkel. Videre er vinkelen av et segment større enn en halvsirkel større enn en rett vinkel, og vinkelen i et segment mindre enn en halvsirkel er mindre enn en rett vinkel.

La $ABCD$ være en sirkel, og la BC være sirkelens diameter og E sirkelens sentrum. Og la BA, AC ,AD og DC ha blitt tegnet. Jeg sier at vinkelen BAC i halvsirkelen BAC er en rett vinkel, og vinkelen ABC i segmentet ABC, som er større enn en halvsirkel, er mindre enn en rett vinkel, og vinkelen ADC i segmentet ADC, som er mindre enn en halvsirkel, er større enn en rett vinkel.

La AE ha blitt tegnet, og la BA ha blitt forlenget til F.

Og siden BE er lik EA, er vinkel ABE også lik BAE. Igjen, siden CE er lik EA, er også ACE lik CAE. Dermed er hele vinkelen BAC lik de to vinklene ABC og ACB. Og FAC, som er den ytre vinkelen til ABC er også lik de to vinklene ABC og ACB. Altså er vinkel BAC også lik FAC.



Figur 5.27: Proposisjon 5.3.14.

Dermed er begge rette vinkler. Altså er vinklene BAC i halvsirkelen BAC en rett vinkel.

Og siden de to vinklene ABC og BAC i trekant ABC er mindre enn to rette vinkler, og siden BAC er en rett vinkel, er vinkel ABC altså mindre enn en rett vinkel. Og den er i segmentet ABC, som er større en en halvsirkel.

Og siden $ABCD$ er en firkant inni sirkelen, og for innskrevne firkanter i sirkler er summen av motstående vinkler lik to rette vinkler, og ABC er mindre enn en rett vinkel. Den gjenværende vinkelen ADC er dermed større enn en rett vinkel. Og den er i segmentet ADC, som er mindre enn en halvsirkel.

Jeg sier også at vinkelen av det større segmentet, altså segmentet avgrenset av omkretsen ABC og den rette linjen AC, er større enn en rett vinkel. Og vinkelen i det mindre segmentet, altså segmentet avgrenset av omkretsen ADC og den rette linjen AC, er mindre enn en rett vinkel. Og det er øyeblikkelig åpenbart. For siden vinkelen mellom de rette linjene BA og AC er en rett vinkel, er vinkelen mellom omkretsen ABC og den rette linjen AC dermed større enn en rett vinkel. Igjen, siden vinkelen mellom de rette linjene AC og AF er en rett vinkel, er vinkelen mellom omkretsen ADC og den rette linjen CA dermed mindre enn en rett vinkel.

Dermed, i en sirkel, vinkelen i en halvsirkel er en rett vinkel, og vinkelen i et større segment er mindre enn en rett vinkel, og i et mindre segment er vinkelen større enn en rett vinkel. Videre er vinkelen av et segment større enn en halvsirkel større enn en rett vinkel, og vinkelen i et segment mindre enn en halvsirkel er mindre enn en rett vinkel. ■

Her bruker Euklid et tidligere resultat som sier at summen av motstående vinkler i en innskreven firkant alltid er 180°. I tillegg bruker han det han vet om vinkler i og utenfor trekanter.

Her bruker han begrepene fra definisjon 4.1.32, vinklene av et segment, og fra definisjon 4.1.33, vinkelen i et segment. Denne proposisjonen er med på å gjøre det tydeligere hva som er forskjellen på disse begrepene.

Setning 5.3.15 (Formulert fra proposisjon 5.3.14)**.** *Vinkelen i en halvsirkel er* $90°$*, vinkelen i et større sirkelsegment er mindre enn* $90°$ *og vinkelen i et mindre sirkelsegment er større enn* $90°$*. Vinkelen av et større sirkelsegment er større enn* $90°$ *og vinkelen i et mindre sirkelsegment er mindre enn* $90°$*.*

Bevis. Gitt en sirkel $ABCD$, med diameter BC og sentrum i E, la BAC være en halvsirkel, og la BA ha blitt forlenget til et punkt F utenfor sirkelen.

Dermed har vi at $EB = EA \Rightarrow \angle ABE = \angle BAE$ og $EC = EA \Rightarrow \angle ACE = \angle CAE$.

Dermed får vi $\angle BAC = \angle ABC + \angle ACB = \angle FAC \Rightarrow$
$\angle BAC = \angle FAC = 90°$. Altså er vinkelen i en halvsirkel er $90°$.

Siden $\angle ABC + \angle BAC < 180°$, vet vi at $\angle ABC < 90°$. Så vinkelen i et sirkelsegment større enn en halvsirkel (her ABC) er mindre enn $90°$.

$\square ABCD$ er en innskreven firkant i sirkel $ABCD$. Dermed vet vi at $\angle ABC + \angle ADC = 180° \Rightarrow \angle ADC > 90°$. Så vinkelen i et sirkelsegment mindre enn en halvsirkel (her ADC) er større enn $90°$.

Siden $\angle BAC = 90°$ er vinkelen mellom sirkelbuen ABC og linjen AC større enn $90°$. Så vinkelen av et sirkelsegment større enn en halvsirkel (her ABC) er større enn $90°$.

Siden $\angle FAC = 90°$ er vinkelen mellom sirkelbuen ADC og linjen AC mindre enn $90°$. Så vinkelen av et sirkelsegment mindre enn en halvsirkel (her ADC) er mindre enn $90°$. □

Siden det ikke er så vanlig å se på vinkler som ikke ligger mellom to rett linjer, spesielt ikke i skolematematikken, kan funksjonen av begrepet 'vinkelen av et segment' være forvirrende. Så hvis vi ser på tangenten i punkt A, blir det kanskje enda lettere å se at vinkelen mellom AC og tangenten er større enn $\angle BAC$, og at vinkelen mellom AC og tangenten er mindre enn $\angle FAC$.

Vi har nå sett på noen av proposisjonene fra de tre første bøkene i Euklids *Elementer*, og sett hvordan de ser ut i litt mer moderne notasjon. Vi har også tatt for oss hvordan Euklid kommer til disse resultatene og hvordan han innfører noen av begrepene.

6 Sammenligning av Elementer og læreverket Faktor

I denne seksjonen skal vi se på noen eksempler på hvordan lærebøkene *Faktor 8-10*, som er lærebøker i matematikk for ungdomsskolen, presenterer og gjør ting som ligner på det Euklid presenterer i bok I-III av *Elementer.* Jeg legger mest vekt på geometri, siden det er dette Euklid hovedsakelig snakker om, men vi skal også se litt på algebra. Flere av temaene blir tatt opp i mer enn én av bøkene, men da vil jeg fokusere på ett av disse tilfellene.

6.1 Geometri

La oss starte denne seksjonen med å se på kapittelforsiden til geometrikapittelet i *Faktor 8.* Her er det en tegning av Euklid som sitter over bøkene sine og denne introduksjonsteksten:

> *Verdens mest berømte matematikkverk,* Elementene*, er skrevet av den greske matematikeren Euklid av Alexandria (325-265 før vanlig tidsregning). Det består av 13 bind og ble gitt ut i mer enn 1000 utgaver før det første gang ble trykket i 1482. Bortsett fra Bibelen er det ikke noe bokverk i historien som har blitt mer studert enn dette.* Elementene *handler om geometriens systematiske oppbygning og presisjon.*[HP14a, s. 107]

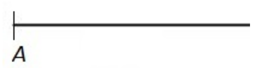
Vi ser at allerede i introduksjonen til geometri i 8. klasse blir elevene gjort oppmerksom på Euklids *Elementer*, og hvor viktig den har vært opp gjennom historien. Men er dette bare en liten historisk introduksjon, eller blir Euklid faktisk brukt videre i boken?

På første side i geometrikapittelet i *Faktor 8* blir det introdusert noen definisjoner. La oss liste opp disse.

Definisjon 6.1.1 ([HP14a, s. 108])**.** *Et* linjestykke *har et startpunkt og et endepunkt. Vi skriver store bokstaver ved endepunktene.*

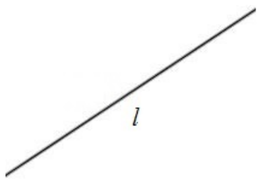
Figur 6.1: Definisjon 6.1.1.

Definisjon 6.1.2 ([HP14a, s. 108])**.** *En* stråle *har et startpunkt, men ikke et endepunkt. Vi markerer strålen med en stor bokstav ved startpunktet.*



Figur 6.2: Definisjon 6.1.2.

Definisjon 6.1.3 ([HP14a, s. 108]). *En* linje *fortsetter uendelig i begge retninger. Vi gir linja navn med en liten bokstav.*

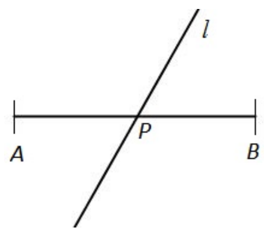


Figur 6.3: Definisjon 6.1.3.

Definisjon 6.1.4 ([HP14a, s. 109]). *Et* punkt *tegnes ofte med et kryss eller en prikk. Vi markerer punktet med en stor bokstav.*

Figur 6.4: Definisjon 6.1.4.

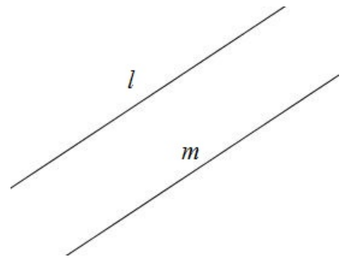
Definisjon 6.1.5 ([HP14a, s. 109]). Skjæringspunktet *mellom to linjer markeres også med en stor bokstav. Her er P skjæringspunktet mellom linjestykket AB og linja l.*



Figur 6.5: Definisjon 6.1.5.

Definisjon 6.1.6 ([HP14a, s. 109]). *To linjer er parallelle hvis avstanden mellom dem er den samme hele tiden. Det betyr at parallelle linjer aldri skjærer hverandre.*

Vi skriver $l \parallel m$. Les: l er parallell med m.



Figur 6.6: Definisjon 6.1.6.

Vi ser at i disse definisjonene blir det ikke bare introdusert forskjellige geometriske begreper, men det er også fokus på hvordan notasjonen skal se ut. Det er altså ikke vanskelig å se at dette også er en innføring i det matematiske språket. I de to siste blir det også brukt eksempler for at de skal være lettere å forstå.

I definisjon 6.1.1 blir ikke selve linjestykket beskrevet. Siden vi også har figur 6.1 skjønner vi hvordan linjestykke skal se ut, men uten figuren kunne vi kanskje ha trodd at det skulle være en halvsirkel mellom de to endepunktene. Hvis vi ser på Euklids definisjon 4.1.4 ser vi at han legger stor vekt på at en rett linje er noe spesielt. Vi husker at Euklids definisjon kunne være språklig tung og forstå, spesielt siden han ikke bruker figur. Men det kan være fordi dette faktisk er noe som er vanskelig å beskrive med bare ord. Likevel gjør Euklid et forsøk på å gi en tydelig definisjon.

Vi ser her at disse definisjonene ligner på dem som Euklid introduserer i begynnelsen av bok I. Men det er likevel tydelig at de fokuserer på ulike ting. Hvis vi ser på definisjon 6.1.4 ser vi at de ikke definerer det geometriske objektet punkt, men kun snakker om hvordan den skal bli notert. Dette står i motsetning til definisjon 4.1.1, hvor Euklid ikke snakker om notasjonen i det hele tatt. Grunnen til at *Faktor 8* ikke ser på hva definisjonen av et punkt er, kan være at det er et ganske abstrakt begrep, og de ønsker heller å fokusere på andre aspekter, slik som notasjon.

Vi kommer til å se flere eksempler på at definisjonene i skolematematikken er mer opptatt av egenskapene og notasjonen til det geometriske objektet enn selve objektet, som er det Euklid legger stor vekt på.

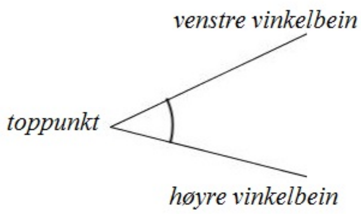
Det at to rette linjer aldri møtes vil også avstandene mellom dem være den samme hele tiden. Men dette er ikke noe Euklid nevner i definisjon 4.1.23. Men i definisjon 6.1.6 fra *Faktor 8* ser vi at det at linjene ikke møtes, er en følge av at avstanden mellom dem er den samme hele tiden. Så selv om begge bøkene introduserer parallellitet på lignende måter, så tar de utgangspunkt i forskjellige ting for å komme fram til definisjonen.

Selv om mye ligner på hvordan Euklid introduserer geometri, ser vi fort at skolematematikken i dag har fokus på andre ting. I første oppgave blir elevene bedt om å måle to linjestykker. Dette er en oppgave som er med på å få elevene til å gjøre seg kjent med linjalen, og hvordan den brukes. Siden Euklid ikke opererer med noe lengdemål, er det klart at han ikke har slike oppgaver i *Elementer*.

I oppgavene ser vi også at *Faktor 8* bestemmer navn på linjer på samme måte som Euklid gjør det. Altså, linjen mellom punktene A og B blir kalt AB.

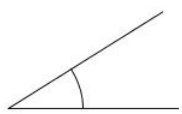
Etter å ha gitt noen oppgaver om linjer, går *Faktor 8* over til å se på vinkler. Igjen blir det introdusert noen definisjoner.

Definisjon 6.1.7 ([HP14a, s. 110]). *De to strålene som danner en vinkel, kaller vi* vinkelbein. *Punktet der vinkelbeina møtes, kaller vi* toppunktet. *Vi bruker ofte symbolet* $\angle$ *i stedet for ordet vinkel.*



Figur 6.7: Definisjon 6.1.7.

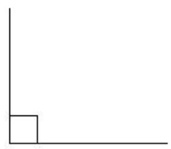
Definisjon 6.1.8 ([HP14a, s. 110]). *En* spiss vinkel *er mindre enn* 90°.



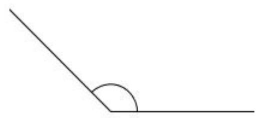
Figur 6.8: Definisjon 6.1.8.

Definisjon 6.1.9 ([HP14a, s. 110]). *En* rett vinkel *er akkurat* 90°. *Rette vinkler markeres med en hake ved toppunktet.*

Definisjon 6.1.10 ([HP14a, s. 110]). *En* stump vinkel *er større enn* 90°.

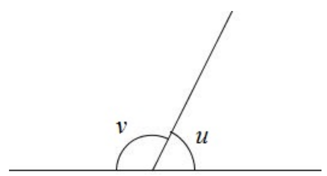


Figur 6.9: Definisjon 6.1.9.



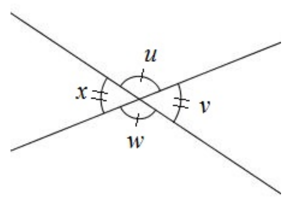
Figur 6.10: Definisjon 6.1.10.

Definisjon 6.1.11 ([HP14a, s. 111])**.** *Når to vinkler ligger inntil hverandre og danner* $180°$*, blir de kalt nabovinkler. De har samme toppunkt og et vinkelbein felles.*



Figur 6.11: Definisjon 6.1.11.

Definisjon 6.1.12 ([HP14a, s. 111])**.** *Når to vinkler har felles toppunkt og vinkelbeina motsatt vei langs samme linjer, kalles de toppvinkler.*



Figur 6.12: Definisjon 6.1.12.

Toppvinkler er alltid like store.
Legg merke til at vi merker like store vinkler med likt antall streker.

I skolematematikken merker vi gjerne like vinkler (og like sider) med likt antall streker. Dette er med på å gjøre det lettere for elevene å se hvilke objekter som er like store, og dermed lettere kunne fokusere på andre aspekter ved geometrien.

Igjen ser vi at disse definisjonene ligner på dem som Euklid bruker i bok I av *Elementer*. En av forskjellene er at *Faktor 8* måler vinklene i grader i stedet for i rette vinkler, men dette kommer av at Euklid ikke har noe annet vinkelmål enn rette vinkler. En av forskjellene er at Euklid kun definerer i definisjon 4.1.10 at like nabovinkler har total vinkelsum 180°. Det at vilkårlige nabovinkler har vinkelsum 180° blir vist i proposisjon 5.1.16, mens i *Faktor 8* er det dette resultatet vi finner i definisjon 6.1.11.

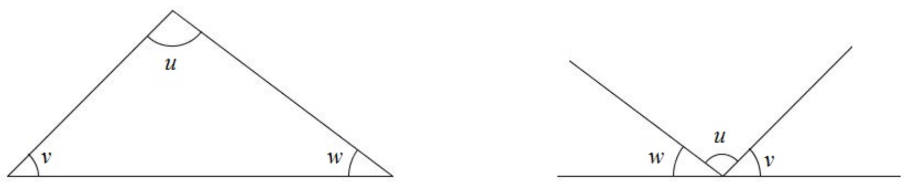
I oppgavene som følger ser vi igjen at det er fokus på å bruke måleredskaper for å finne størrelser. Så når elevene blir bedt om å finne hvor stor en vinkel er, skal de bruke gradskive. Dette avviker også fra Euklids *Elementer* siden han ikke opererer med mål på størrelser, kun forhold.

Etter dette blir trekanter introdusert. *Faktor 8* fortsetter med å vise den korrekte notasjonen for navn av en trekant. Så trekanten med hjørner A, B og C blir kalt $\triangle ABC$, der "symbolet $\triangle$ blir brukt i stedet for ordet trekant"[HP14a, s. 114].

Samtidig som trekanter blir introdusert, så blir også en alternativ notasjon for vinkler presentert. I $\triangle ABC$ vil vi vanligvis kalle vinkelen i punktet A for $\angle A$, men den kan også skrives som $\angle BAC$, der "den midterste bokstaven viser toppunktet til vinkelen"[HP14a, s. 114]. Det er denne måten Euklid vanligvis navngir vinkler.

Vinkelsummen i en trekant blir bare innført som en regel.

Regel 6.1.13 ([HP14a, s. 115])**.** *Summen av vinklene i en trekant er alltid 180°.*



Figur 6.13: Figur gitt som eksempel på regel 6.1.13.

Regel 6.1.13 blir ikke bevist, men det blir gitt et eksempel i form av en figur. I eksempelet blir vinklene i en trekant plassert ved siden av hverandre, og da ser vi at vinkelsummen er $180°$.

Spesielle trekanter blir delt inn etter egenskaper i tre kategorier.

Definisjon 6.1.14 ([HP14a, Likesidet trekant, s. 115]). *I en likesidet trekant er alle sidene like lange, og alle vinklene er* $60°$.

Definisjon 6.1.15 ([HP14a, Likebeint trekant, s. 115]). *I en likebeint trekant er to av sidene like lange og to av vinklene like store.*

Definisjon 6.1.16 ([HP14a, Rettvinklet trekant, s. 116]). *I en rettvinklet trekant er én av vinklene* $90°$.

Vi ser igjen at definisjonene i skolematematikken ikke definerer selve objektet. Hvis vi tar definisjon 6.1.15 som eksempel, ser vi at *Faktor 8* sier at det finnes noe som heter en likebeint trekant, og presenterer egenskapene denne typen trekanter har.

Selv om det av og til blir brukt trekanter som ikke faller innenfor disse tre kategoriene, så er det i hovedsak disse tre som blir brukt.

Disse er noen av de typene trekanter som Euklid definerer i definisjon 4.1.20 og 4.1.21. Men, i motsetning til Euklid, blir egenskapene til disse trekantene som har med vinkler å gjøre tatt med i definisjonen i stedet for å bli vist senere, slik som Euklid gjør det.

Helt til slutt i delkapittelet om trekanter, blir elevene gitt en oppgave som vi skal se på. Denne oppgaven er merket med en stjerne, som betyr at det er en utfordrende oppgave.

Oppgave 6.1.17 ([HP14a, Oppgave 4.19, s. 117]). *Tegn en halvsirkel. Tegn så en trekant inne i halvsirkelen. Diameteren i halvsirkelen skal være den ene siden i trekanten. Det tredje hjørnet i trekanten skal ligge på halvsirkelen.*
Hva slags trekant blir dette? Prøv med forskjellige trekanter.

Elevene blir altså bedt om å tegne forskjellige innskrevne trekanter i halvsirkelen, ved å velge det siste hjørnet i trekanten tilfeldig på sirkelbuen. Denne oppgaven ligner på de andre de har gjort i delkapittelet, for oppgavene går i hovedsak ut på å gjenkjenne de tre kategoriene av trekanter. Men i denne oppgaven er ikke trekanten gitt, så dermed er det en mer utforskende oppgave.

Hvis vi prøver med ulike punkter på sirkelbuen, ser vi at alle trekantene blir rettvinklet. Hvis vi går tilbake å ser på proposisjon 5.3.14, ser vi at dette er første del av resultatet Euklid beviser. Som vanlig blir det ikke ført noe bevis for at det stemmer, men kommer fram til samme resultat ved å prøve mange forskjellige trekanter. Her ser vi altså et tydelig spor av Euklid i skolematematikken i dag.

Faktor 8 går så over til firkanter. Her starter boken med å vise at en firkant kan deles i to trekanter, og dermed er vinkelsummen i en firkant 360°. Så blir dette innført som en regel.

Regel 6.1.18 ([HP14a, s. 118]). *Summen av vinklene i en firkant er alltid* 360°*.*

Etter dette deler de opp firkantene i fem kategorier etter egenskaper.

Definisjon 6.1.19 ([HP14a, Rektangel, s. 119]). *I et rektangel er to og to sider like lange og parallelle. Alle vinklene er* 90°*.*

Definisjon 6.1.20 ([HP14a, Kvadrat, s. 119]). *I et kvadrat er alle sidene like lange. Alle vinklene er* 90°*.*

Definisjon 6.1.21 ([HP14a, Parallellogram, s. 119]). *I et parallellogram er to og to sider like lange og parallelle. Motstående vinkler er like store og vinklene er ikke* 90°*.*

Definisjon 6.1.22 ([HP14a, Rombe, s. 119]). *I en rombe er alle sidene like lange. Motstående vinkler er like store, og vinklene er ikke* 90°*.*

Definisjon 6.1.23 ([HP14a, Trapes, s. 119]). *I et trapes er to av sidene parallelle.*

Akkurat slik som i *Faktor 8* sine definisjoner av trekanter, blir ikke selve den geometriske figuren definert. Fokuset ligger på egenskapene figuren har. Dette kan være fordi elever kanskje synes det er vanskelig å forholde seg til definisjoner, og derfor blir det i stedet lagt vekt på egenskapene som elevene skal kunne bruke.

Hvis vi går tilbake til definisjon 4.1.22, ser vi at det er de samme figurene som Euklid definerer, men med ett unntak. Euklid definerer ikke parallellogram i definisjon 4.1.22, men senere i en proposisjon.

Selv om både Euklid of *Faktor* definerer trapes, er det en forskjell i disse definisjonene. I *Elementer* er et trapes de firkantene som ikke kan plasseres i en av de andre kategoriene. Men i *Faktor* kan alle de andre typene av firkanter også klassifiseres som et trapes. Vi ser at alle de andre kategoriene er disjunkte, så derfor virker det litt rart at den siste kategorien inneholder de fire andre. Sannsynligvis har definisjonen for trapes blitt formulert slik for at definisjonen skal være enkel å forstå. Selv er jeg vant til at kategoriene ikke er disjunkte. Altså at et kvadrat er snittet mellom rombe og rektangel, eller at et rektangel også kan regnes som et parallellogram. Men vi ser at både Euklid og *Faktor* velger å bruke disjunkte definisjoner, sannsynligvis for at det skal være et tydeligere skille på dem.

Vi ser også at *Faktor 8* ikke bruker begrepet rettvinklet om firkanter, slik Euklid gjør, men i stedet sier at alle vinklene er $90°$. Dette kan kanskje ha noe med å gjøre at i en rettvinklet trekant er bare én vinkel $90°$, og dermed kunne det skapt misforståelser om dette begrepet. Alle egenskapene som *Faktor 8* ønsker å definere, er der uansett. Forskjellen er bare at elevene ikke lærer begrepet rettvinklet i forbindelse med firkanter, med mindre dette blir brukt av læreren.

En stor del av geometrikapittelet i *Faktor 8* er om konstruksjon. Konstruksjonseksemplene blir gitt som oppskrifter som ligner på måten Euklid beskriver situasjonene i proposisjonene sine. La oss se på eksempelet som viser hvordan man konstruerer en vinkel på $60°$.

Eksempel 6.1.24 ([HP14a, s. 134])**.** Konstruere $60°$

1. Tegn en linje og merk av et punkt A på linjen.
2. Sett passerspissen i A og slå en bue som skjærer linja. Kall skjæringpunktet for B.
3. Sett passerspissen i B og slå en bue som har samme radius som AB. Kall skjæringpunktet for C.
4. Trekk linjestykket AC. Du har nå konstruert en vinkel på $60°$.

I tillegg til oppskriften er det en tegning ved siden av vært punkt som viser hvordan hvert steg skal gjøres. Det sies ikke i teksten at det er $\angle BAC$ som er $60°$, men på den tilhørende figuren er det tydelig.

Hvis vi sammenligner eksempel 6.1.24 med proposisjon 5.1.1, ser vi tydelig at måten *Faktor 8* beskriver konstruksjonsprosessen ligner på hvordan Euklid beskriver den geometriske situasjonen.

Vi kan også se at hvis vi trekker linjen BC i eksempelet, får vi en likesidet trekant. Det vi gjør i punkt 2 og 3 er å tegne to sirkler med sentrum i henholdsvis A og B, begge med radius $r = |AB|$. Det er dette som blir gjort i proposisjon 5.1.1. Altså er den geometriske situasjonen den samme i disse to tilfellene. Forskjellen er at vi er interessert i ulike resultater. Grunnen til at *Faktor 8* ikke nevner at dette også blir en likesidet trekant, er nok fordi de ikke ønsker å snakke om for mange ting på en gang, slik at det skal bli enklere for elevene. Men dette fører jo dessverre også til at de kan miste en interessant sammenheng.

Noe som går igjen i konstruksjonene av figurer, er at det er viktig å bruke hjelpefigur. Så igjen ser vi tydelig en relasjon til Euklid, som i stor grad bruker figurer til å tydeliggjøre, og av og til vise, hvordan en situasjon er.

I *Faktor 9* er mangekanter det første som blir introdusert. Igjen ligger fokuset på å vise frem forskjellige egenskaper, fremfor å definere selve figurene. Det første som blir tatt opp er vinkelsum. Igjen blir regel 6.1.13 og regel 6.1.18 introdusert, men nå blir elevene også gjort oppmerksom på at man kan finne ut vinkelsummen i andre figurer ved å undersøke hvor mange trekanter man kan dele den opp i.

Regel 6.1.25 ([HP14b, s. 69])**.** *Når du skal finne vinkelsummen i andre mangekanter, kan du dele opp mangekantene i trekanter ved å trekke diagonaler fra ett hjørne. I en sjukant vil du få fem trekanter, og vinkelsummen blir da* $5 \cdot 180° = 900°$.

Til denne regelen er det ikke noen figur, men like før har det blitt forklart hvorfor vinkelsummen i en firkant er $360°$ på samme måte. Vi ser også at i regelen har *Faktor 9* med et eksempel.

Dette kan ligne litt på metodene Euklid bruker til å finne informasjon. Han bruker ofte trekanter for å komme fram til noe om vinkler, lengder og areal. Trekanter er relativt enkle figurer sammenlignet med andre mangekanter, så det kan være derfor de blir brukt for å vise noe om en mer avansert figur. Vi ser i alle fall at både Euklid og skolematematikken bruker denne metoden.

Faktor 9 forklarer hva en regulær figur er ved å si at en likesidet trekant og et kvadrat er regulære figurer. Deretter gir de en regel.

Regel 6.1.26 ([HP14b, s. 70])**.** *I regulære mangekanter er sidene like lange og vinklene like store.*

Igjen er det egenskapene som er i fokus. Men siden det å definere objekter kan være mer komplisert, er det forståelig at læreboken fokuserer på egenskapene. Vi ser også at denne regelen like gjerne kunne blitt kalt en definisjon. Vi ser altså at begrepene regel og definisjon blir brukt om hverandre.

Begrepet regulær er ikke et som Euklid bruker. I stedet sier han at en figur er likesidet og likevinklet. Betydningen er åpenbart den samme. En av fordelene med å bruke begrepet *regulær*, er at man bare trenger ett begrep, men ulempen er at betydningen av begrepet ikke er fullt så intuitiv som begrepene Euklid bruker. Altså er en av fordelene med å bruke *likesidet* og *likevinklet* at disse er lette å forstå uten store matematikkunnskaper.

Begrepene *omkrets* og *areal* ble allerede nevnt i *Faktor 8*, hvor omkrets blir beskrevet som lengden rundt en figur, og areal som størrelsen av en flate [HP14a]. Men først i *Faktor 9* at de gir en formel for areal, og begynner å regne på arealet av andre figurer enn rektangler.

Her kommer vi bare til å se på areal, siden det er dette Euklid snakker om.

Regel 6.1.27 ([HP14b, s. 72])**.** *Vi finner arealet A av et rektangel ved å multiplisere lengden (l) med bredden (b).*

$A = l \cdot b.$

Regel 6.1.28 ([HP14b, s. 75])**.** *Vi finner arealet A av et parallellogram ved å multiplisere grunnlinjen med høyden.*

$A = g \cdot h.$

Regel 6.1.29 ([HP14b, s. 78])**.** *Vi finner arealet A av en trekant ved å multiplisere grunnlinjen med høyden og dividere på 2.*

$A = \frac{g \cdot h}{2}.$

Regel 6.1.30 ([HP14b, s. 81])**.** *Arealet A av et trapes er:*

$A = \frac{(a+b) \cdot h}{2}.$

Vi ser her at regelen blir først forklart med bare ord, og deretter gitt med symboler. Elevene blir altså vist hvordan de skal uttale det matematiske uttrykket, så igjen er det tydelig at skolematematikken ikke bare er trening av regneferdigheter og problemforståelse, men også er en innføring i et nytt språk.

Regel 6.1.29 blir vist ved å vise at to like trekanter satt sammen, blir et parallellogram. Altså må arealet av en trekant være halvparten av arealet av et parallellogram. Og regel 6.1.30 blir vist ved at alle trapeser kan deles opp i to trekanter med lik høyde.

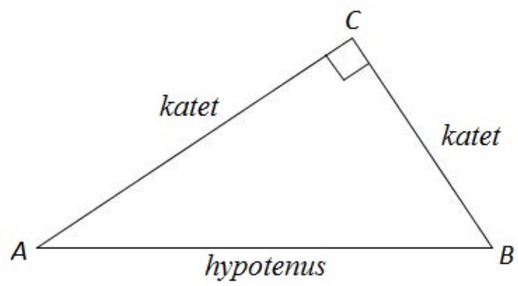
Hvis vi ser på formelen for arealet av et rektangel, regel 6.1.27, så ser vi at det er denne måten Euklid beskriver et rektangel. Rektangler blir beskrevet av det som blir utspent av to linjer, altså lengden (l) og bredden (b). Så selv om Euklid ikke bruker formler, siden dette er algebraisk, ser vi at at elementer av geometrien hans ligner på de algebraiske uttrykkene vi bruker i skolematematikken i dag.

Arealbegrepet som blir brukt her, er som nevnt tidligere det Euklid bruker for å vise at to figurer er like, altså at de har likt areal. Men siden Euklid ikke bruker et lengdemål, og derfor heller ikke et flatemål, så er ikke selve størrelsen det han er interessert i. I skolematematikken derimot, går de fleste oppgavene ut på å regne ut arealet av en figur.

Nå som *Faktor 9* har innført formler for areal, går boken videre til Pytagoras-setningen. I både *Faktor 9* og *Faktor 10* er det store seksjoner der elevene skal bruke Pytagoras-setningen til å løse en oppgave eller finne informasjon slik at de kan løse en oppgave. Vi kan altså ganske trygt si at dette er et tema som er viktig.

Faktor 9 starter med å komme med noen begreper.

Definisjon 6.1.31 ([HP14b, s. 88])**.** *En trekant der én av vinklene er* $90°$*, kaller vi en rettvinklet trekant. Den lengste siden ligger alltid overfor den rette vinkelen. Den kaller vi* hypotenus*. De to andre sidene kaller vi* kateter*.*



Figur 6.14: Definisjon 6.1.31.

Etter å ha introdusert disse begrepene, viser de et eksempel med en trekant som har sidekanter med lengde 3 cm, 4 cm, og 5 cm. Etter å ha sett på arealet av kvadratene som står på disse sidekantene, så kommer de fram til det som de kaller Pytagoras-setningen:

Regel 6.1.32 ([HP14b, s. 90])**.** *Vi finner hypotenusen i en rettvinklet trekant ved hjelp av denne formelen:*

$katet^2 + katet^2 = hypotenus^2$.

Som sagt, blir det bare vist et eksempel på at dette stemmer, og dette eksempelet bruker ikke mye geometri for å komme fram til resultatet. Dette står i motsetning til Euklids proposisjon 5.1.34, som er rent geometrisk.

Videre ser *Faktor 9* på det gylne snitt og det gylne rektangel. Disse begrepene blir introdusert og definert i et eksempel som tar for seg Nidarosdomen.

Definisjon 6.1.33 ([HP14b, s. 107])**.** *Forholdet mellom lengden og høyden på Nidarosdomen i Trondheim er ca.* $1,618$*. Dette forholdet kalles* det gylne snitt*. Et rektangel som har dette forholdet mellom sidene, kalles et* gyllent rektangel*.*

Vi finner forholdet mellom to sider i et rektangel ved å dividere den lengste siden med den korteste.

Et linjestykke kan også være delt i et gyllent snitt ved at den lengste delen dividert på den korteste delen er $1,618$*.*

Det er ikke tydelig at de to siste avsnittene er med i definisjonen av det gylne snitt, men uten disse ville definisjonen kun bli funnet på Nidarosdomen, og matematikere fra hele verden måtte kommet til Trondheim for å undersøke eller bekrefte forholdstallet. Her ser vi en av svakhetene ved å ikke tydelig sette opp hva som er definisjoner.

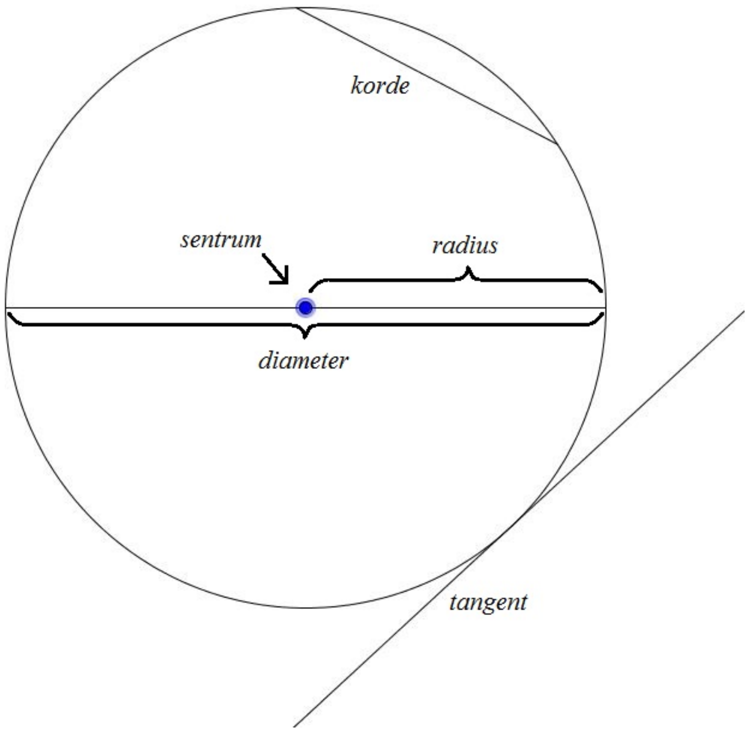
Oppgavene i denne seksjonen går kun ut på å måle forskjellige gjenstander, og se om man finner det gylne snitt i disse. Gjenstandene som brukes er for eksempel en kniv, et flagg, en bok eller en bygning. Felles for objektene er at de er gjenstander som elevene har et forhold til i hverdagen. Så det er tydelig at dette forholdet er noe vi kan finne rundt oss til daglig.

Til slutt i seksjonen ser boken på regulære femkanter. I bok IV i *Elementer* viser Euklid hvordan man kan konstruere regulære femkanter ved hjelp av det gylne snitt [Fit08].

I *Faktor 10* blir en sirkel beskrevet som en mengde punkter som ligger like langt fra sentrum [HP15]. Begrepene *diameter* og *radius* har blitt definert tidligere når man har snakket om areal og omkrets. Men her blir to nye linjer definert.

Definisjon 6.1.34 ([HP15, s. 60])**.** *Linjestykkene fra ett punkt på sirkellinja til et annet, kaller vi en korde. Diameteren er den lengste korden vi kan tegne.*

Definisjon 6.1.35 ([HP15, s. 60])**.** *En linje som berører (tangerer) sirkellinja i ett punkt, kaller vi en tangent. Tangenten står alltid vinkelrett*



Figur 6.15: Definisjoner angående en sirkel.

på radien fra tangeringspunktet.

Vi ser her at begrepet *tangent* blir definert. Hvis vi går tilbake til Euklids proposisjon 5.3.8 begynner han bare å bruke begrepet, men det blir aldri ordentlig definert.

Selv om Euklid ikke bruker begrepet *korde*, så er dette bare et linjestykke som treffer sirkelbuen i to punkter. Det er på den måten Euklid pleier å definere en slik linje.

Eksempel 6.1.36 ([HP15, s. 61])**.** Vi kan finne sentrum i en sirkel ved konstruksjon slik:

1. Tegn en sirkel.
2. Tegn en korde.
3. Konstruer midtnormalen på korden. Forleng midtnormalen slik at den skjærer sirkellinja i to punkter. Den blir da en diameter.
4. Konstruer til slutt midtnormalen til diameteren. Skjæringspunktet

mellom diameteren og denne normalen er sentrum i sirkelen.

Selv om dette er en konstruksjonsoppskrift, er det likevel et bevis. Altså blir det her vist at gitt en sirkel, så kan vi finne sentrum i sirkelen. Det er dette Euklid gjør i proposisjon 5.3.1. Fremgangsmåten i eksempel 6.1.36 og proposisjon 5.3.1 er nesten helt like. Vi ser altså et tydelig spor av *Elementer* her. En av de store forskjellene er at i proposisjon 5.3.1 viser Euklid at det ikke kan være noen andre punkter som kan være sentrum. Dette er noe som skolematematikken velger å ikke legge vekt på.

Regel 6.1.37 ([HP15, s. 65]). *I to formlike figurer er samsvarende vinkler like store, og forholdet mellom samsvarende sider er konstant.*

Regel 6.1.38 ([HP15, s. 69]). *To figurer er kongruente når den ene figuren nøyaktig dekker den andre. Det vil si at figurene er formlike og like store. Vi bruker tegnet $\cong$ for kongruens.*

I tillegg til denne definisjonen blir kongruens beskrevet som at to figurer har samme form og størrelse [HP15].

Euklid bruker ikke begrepet formlikhet. Selv om han ikke bruker kongruens direkte heller, ser vi at når han sier at to figurer er like, så er de av og til kongruente. Fra regel 6.1.38 ser vi at når to figurer sammenfaller, så er de kongruente. I de første proposisjonene i bok I av *Elementer* ser vi at denne formen for likhet kan passe. Det er fremdeles mulig at Euklid kun snakker om areallikhet, siden kongruente figurer også har likt areal, men kongruens er en sterkere form for likhet.

Vi kan altså tydelig se at det er flere store likheter mellom geometrikapitlene i *Faktor 8-10* og Euklids *Elementer*, men det er også store forskjeller, spesielt med tanke på hva som er i fokus.

6.2 Algebra

Selv om Euklid ikke skriver direkte om algebra, siden han bruker ren geometri, kan vi likevel gjenkjenne algebrakomponenter fra skolematematikken i proposisjonene hans. Nå skal vi se på noen tilfeller der algebraen i skolematematikken bruker resultater eller operasjoner som er lignende de som er i Euklids proposisjoner.

I *Faktor 8* er likninger et delkapittel av algebrakapittelet. Her blir det innført to regler som skal hjelpe elevene til å kunne manipulere likninger.

Regel 6.2.1 ([HP14a, s. 195]). *Vi kan løse likninger ved å legge til eller trekke fra det samme tallet på begge sider av likhetstegnet i likningen.*

Regel 6.2.2 ([HP14a, s. 197]). *Vi kan løse en likning ved å multiplisere eller dividere med det samme tallet på begge sider av likhetstegnet i likningen.*

Disse reglene bruker noen av de allmenne slutningsreglene som Euklid har med i *Elementer*. La oss oversette slutningsreglene 4.3.2, 4.3.3 og 5.1.35 til algebraisk notasjon. Selv om Euklid ikke innfører 5.1.35, bruker han den.

Slutningsregel 6.2.3 (Algebraisk version av 4.3.2). *Hvis* $a = b$ *så er* $a + c = b + c$.

Slutningsregel 6.2.4 (Algebraisk version av 4.3.3). *Hvis* $a = b$ *så er* $a - c = b - c$.

Slutningsregel 6.2.5 (Algebraisk version av 5.1.35). *Hvis* $a = b$ *så er* $2 \cdot a = 2 \cdot b$.

Vi ser altså at dette er noe som blir brukt for å manipulere likningsuttrykk. Det er dette Euklid gjør når han viser at vinkler eller arealer er like. Hvis han har en ukjent vinkel han ønsker å finne størrelsen til, viser han at denne er lik noen andre vinkler. Så manipulerer han uttrykket til det bare er den ukjente vinkelen som ikke har en kjent størrelse. Så selv om Euklid ikke bruker algebraisk notasjon, så benytter han seg likevel av algebraens prosesser.

Siden algebrakapittelet er et av de siste i *Faktor 8*, så har geometriske uttrykk og formler allerede blitt presentert. Flere av oppgavene går ut på å finne et uttrykk for omkretsen av en figur, eller sette inn tall for bokstaver i en geometrisk formel. Det blir altså vist at algebraen kan brukes til å regne på geometri. Det samme ser vi i *Faktor 9* og *Faktor 10*, men i disse er det litt mer avanserte oppgaver.

Kvadratsetningene er et tema som blir tatt opp i *Faktor 10*. Boken har allerede snakket som multiplikasjon av parentesuttrykk, så dette er noe som elevene allerede skal kjenne til. Kvadratsetningene blir presentert som multiplikasjon av tre spesielle parentesuttrykk. Først blir hele multiplikasjonen skrevet ut, ledd for ledd, men til slutt blir de skrevet på formen til kvadratsetningene.

Definisjon 6.2.6 ([HP15, Første kvadratsetning, s. 26]). $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Definisjon 6.2.7 ([HP15, Andre kvadratsetning, s. 26])**.** $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Definisjon 6.2.8 ([HP15, Tredje kvadratsetning, s. 197])**.** $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Her kunne vi gjerne kalt kvadratsetningene for regler i stedet for definisjoner.

Euklid viser første kvadratsetning (6.2.6) i proposisjon 5.2.3, men da selvfølgelig rent geometrisk. *Faktor 10* bruker aldri kvadratsetningene i geometrisk sammenheng. Dette kan kanskje være fordi det geometriske objektet *gnomen*, som Euklid definerer i definisjon 4.1.25, ikke blir nevnt i noen av *Faktor*-bøkene. Og når gnomen ikke er forklart, blir det litt mer komplisert å forklare første kvadratsetning geometrisk.

En stor forskjell er at *Faktor 10* bare gir en versjon av første kvadratsetning, siden den er generell. Euklid derimot har med flere forskjellige geometriske situasjoner, som kun tilsvarer en enkel omskrivning av den algebraiske utgaven. Euklid tar heller ikke opp andre og tredje kvadratsetning.

Selv om Euklid skriver rent geometrisk, ser vi altså noen spor av det han har gjort i algebradelen av skolematematikken også. Det er selvfølgelig ikke like mye som i geometridelen, men det er likevel noen elementer som er der.

7 Avslutning

Vi har nå sett på noen av proposisjonene i Euklids *Elementer*, både i den originale formen uten matematiske symboler og i moderne notasjon. Vi har også sett på noen likheter og forskjeller mellom *Elementer* og moderne lærebøker.

Vi ser at Euklid introduserer de fleste begrepene som definisjoner og beskriver hvilke egenskaper de har. Vi ser også at bevisene for hver proposisjon bygger på tidligere proposisjoner, så *Elementer* er av syntetisk art; man går altså fra noe kjent til noe ukjent, uten hypotetiske forutsetninger [Str93]. Dette betyr at hele *Elementer* er bygget opp fra fem postulater og fem allmenne slutningsregler.

Noen begreper blir brukt uten å ha blitt definert, men da er det som oftest tydelig hva dette begrepet innebærer, og egenskapene følger gjerne fra en proposisjon.

Selv om det som oftest er tydelig hva Euklid mener, er man av og til avhengig av hjelpefiguren for å forstå situasjonen, særlig siden han ikke alltid definerer hvor alle punktene ligger. Av og til blir også noe bevist ut fra at man kan se det fra figuren.

Det er tydelig at matematikk uten bruk av matematiske symboler er fullt mulig. Men i noen tilfeller krever det lange og kompliserte setninger, som ofte kan føre til forvirring. I de fleste tilfellene er også den moderne notasjonen mye kortere, og mer oversiktlig.

Måten matematikk blir introdusert på i skolen, følger Euklids syntetiske form. Det starter med noe kjent, som en definisjon, og deretter beveger bøkene seg inn på mer kompliserte områder. Fra disse områdene kan man komme seg til nye, og gjerne mer kompliserte områder igjen. Flere av definisjonene ligner eller, i noen tilfeller, er like som Euklids.

En av de store forskjellene er at skolematematikken bruker matematiske symboler. Disse blir som oftest introdusert sammen med begrepet de symboliserer. Dette gjelder opplagt i algebraen, som er symboltung, men som vi har sett, også i geometrien. Definisjonene har også et annet fokus. Skolematematikken definerer gjerne ikke selve objektet, noe Euklid gjør, men legger i stedet vekt på å definere hvilke egenskaper objektet har og viser heller hvordan objektet ser ut ved hjelp av en figur.

Selv om vi ser at matematikken har utviklet og forandret seg til en viss grad siden 300 f.Kr., så er det helt tydelig at Euklids *Elementer*, et av de viktigste verkene for matematikken, har hatt en stor innflytelse på hvordan lærebøker legger fram matematikk i dag.

Referanser

[Bjö93] Ole Björkqvist. «Social konstruktivism som grund för matematikundervisning». I: *Nordisk matematikkdidaktikk* 1.1 (1993), s. 8–17.

[Chi12] Silvanos Chirume. «How does the Use of Mathematical Symbols Influence Understanding of Mathematical Concepts by Secondary School Students?» I: *International Journal of Social Sciences & Education* 3.1 (2012).

[Fit08] Richard Fitzpatrick. «Euclid's Elements of Geometry». I: *Richard Fitzpatrick* (2008).

[HP14a] Espen Hjardar og Jan-Erik Pedersen. *Faktor 8 - Grunnbok*. Cappelen Damm, 2014.

[HP14b] Espen Hjardar og Jan-Erik Pedersen. *Faktor 9 - Grunnbok*. Cappelen Damm, 2014.

[HP15] Espen Hjardar og Jan-Erik Pedersen. *Faktor 10 - Grunnbok*. Cappelen Damm, 2015.

[Maz14] Joseph Mazur. *Enlightening Symbols: A Short History of Mathematical Notation and Its Hidden Powers*. Princeton University Press, 2014.

[Sfa91] Anna Sfard. «On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin». I: *Educational studies in mathematics* 22.1 (1991), s. 1–36.

[Str93] Per Strömholm. «Evklid». I: *Vestens Tenkere: Bind 1: Fra Homer til Milton*. Red. av Trond Berg Eriksen. Aschehoug, 1993.

[Öst06] Magnus Österholm. «Kognitiva och metakognitiva perspektiv på läsförståelse inom matematik». I: (2006).