

# Hyperbolsk geometri

Aksiomatikk og modeller

**Eivind R. Hillesund**

Masteroppgave for graden Lektorprogrammet med  
masterspesialisering i matematikk,  
MAT5930L, Mai 2016





# Innhold

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>1</b> | <b>Introduksjon</b>  | <b>1</b>   |
| <b>2</b> | <b>Aksiomatisk tilnærming til geometri</b>                       | <b>2</b>   |
| 2.1      | Aksiomatisk tilnærming. Hvordan og hvorfor? . . . . .            | 2          |
| 2.2      | Euklids postulater . . . . .                                     | 4          |
| 2.3      | Hilberts aksiomsystem . . . . .                                  | 6          |
| <b>3</b> | <b>Ulike geometrier</b>  | <b>14</b>  |
| 3.1      | Kontrovers rundt parallellpostulatet . . . . .                   | 14         |
| 3.2      | Sfærisk geometri . . . . .                                       | 15         |
| 3.3      | Nøytral geometri . . . . .                                       | 27         |
| 3.3.1    | Kriterier for kongruente trekanter . . . . .                     | 35         |
| 3.3.2    | Sentrale resultater . . . . .                                    | 42         |
| 3.4      | Oppdagelse av hyperbolsk geometri . . . . .                      | 50         |
| <b>4</b> | <b>Modeller for hyperbolsk geometri</b>                          | <b>55</b>  |
| 4.1      | Beltrami–Klein-modellen . . . . .                                | 55         |
| 4.2      | Poincarés diskmodell . . . . .                                   | 56         |
| 4.3      | Poincarés halvplanmodell . . . . .                               | 57         |
| 4.4      | Hyperboloidmodellen . . . . .                                    | 58         |
| 4.5      | Möbius-transformasjoner . . . . .                                | 60         |
| 4.6      | Isometrier mellom modellene . . . . .                            | 70         |
| 4.7      | Bevis for at modellene er konsistente . . . . .                  | 79         |
| <b>5</b> | <b>Resultater i hyperbolsk geometri</b>                          | <b>82</b>  |
| 5.1      | Ekvivalente aksiomer . . . . .                                   | 82         |
| 5.2      | Et absolutt avstandsmål . . . . .                                | 84         |
| 5.3      | Assymptotisk parallelle og divergent-parallelle linjer . . . . . | 87         |
| 5.4      | Lengdemål i PHP og PDM . . . . .                                 | 95         |
| 5.5      | Areal av hyperbolske trekanter . . . . .                         | 100        |
| <b>6</b> | <b>Sammenlikning mellom de klassiske geometriene</b>             | <b>105</b> |
| 6.1      | Aksiomatikk . . . . .  | 105        |
| 6.2      | Kriterier for kongruente trekanter . . . . .                     | 106        |
| 6.3      | Lengde, areal og vinkelsum . . . . .                             | 107        |
| <b>7</b> | <b>Oppsummering</b>  | <b>109</b> |
| <b>8</b> | <b>Bibliografi</b>   | <b>110</b> |
| <b>9</b> | <b>Forklaring</b>  | <b>110</b> |
| 9.1      | Forkortelser . . . . .   | 110        |
| 9.2      | Oversikt over notasjon . . . . .                                 | 110        |

# 1 Introduksjon

Hyperbolsk geometri oppstod som følge av studier av parallellitet og forsøk på å vise at et parallellaksiom var unødvendig for å definere euklidisk geometri. Hyperbolsk geometri har senere vist seg å ha mange viktige applikasjoner i moderne matematikk. Den er aktuell i moderne fysikk fordi tidrommet kan modelleres til en hyperboloide der hyperbolsk geometri vil være gjeldende. I en tekst der det argumenteres for at hyperbolsk geometri er underliggende i komplekse nettverksproblemer, skriver Dmitri Krioukov med flere:

*Although difficult to visualize, hyperbolic geometry, briefly reviewed in Sec. II, is by no means anything exotic. In fact it is the geometry of the world we live in. Indeed, the relativistic Minkowski spacetime is hyperbolic, and so is the anti-de Sitter space.* [Kri+10]

Hyperbolsk geometri er veldig relevant for overflater med negativ Gaussisk krumning. Ethvert punkt på en Riemannsk overflate med konstant negativ Gaussisk krumning  $-k$  vil være lokalt isometrisk med et hyperbolsk plan med skaleringsfaktor  $\sqrt{\frac{1}{k}}$ . [Jah11].

I denne oppgaven vil vi ha hovedfokus på å vise hvordan hyperbolsk geometri skiller seg fra euklidisk og sfærisk geometri rent aksiomatisk, samt øvrige resultater som skiller geometriene eller som de har til felles. Vårt sekundære fokus vil være å presentere de vanligste modellene for hyperbolsk geometri. Den historiske konteksten bak hyperbolsk geometri vil ha en langt mindre plass i oppgaven. Vi vil hele tiden studere plan geometri, men romgeometri er i en viss grad nødvendig, for eksempel når vi studerer hyperboloidmodellen.

På sett og vis vil denne oppgaven være tredelt. I første del vil det være strengt fokus på aksiomatisk bevisførsel. Alle resultater som er relevante for hyperbolsk geometri vil utledes fra aksiomene eller fra resultater som allerede er bevist. Resultater som kun er relevante for de andre geometriene vil nevnes, men ikke nødvendigvis bevises.

Når vi begynner å studere modellene vil vi begynne å bruke resultater som ikke er vist tidligere i oppgaven, som Pytagoras' teorem og kompleks teori. I den tredje delen vil vi studere resultater i hyperbolsk teori med modellene i bakhånd og bruke noen av prinsippene fra hver av tilnærmingene i første og andre del.

## 2 Aksiomatisk tilnærming til geometri

### 2.1 Aksiomatisk tilnærming. Hvordan og hvorfor?

En aksiomatisk tilnærming til geometri går ut på at resultater skal utledes gjennom logiske argumenter. Motstykket er en empirisk tilnærming, der man forsøker å utlede resultater gjennom gjentatte målinger, slik man for eksempel opererer i fysikk. En aksiomatisk tilnærming har flere fordeler. For det første kan man være fullstendig sikker på at et resultat som er logisk bevist stemmer. Empirisk kan man kun bevise at et resultat gjelder eller ikke gjelder i det spesifikke tilfellet som blir målt. At et resultat skal være universelt gjeldende kan motbevise empirisk, men aldri bevises. Et godt eksempel på det er resultatene i klassisk fysikk som viste seg å ikke være universelle, men spesialtilfeller av relativitetsteori.

En annen fordel er at en logisk tilnærming gir større presisjon. Dette kan illustreres ved å se på forskjellen i beregning av pi mellom de gamle sivilisasjonene i Egypt, Mesopotamia og Hellas. Mens Egypt og Mesopotamia ikke ga størrelsesforholdet mellom en sirkels diameter og omkrets et eget navn, så gjorde de utregninger som brukte dette størrelsesforholdet, samt størrelsesforholdet mellom en sirkels areal og kvadratet til diameteren. I Mesopotamia brukte man størrelsesforholdet 3 for omkrets og  $\frac{3}{4}$  for areal, som i begge tilfeller ville tilsi at pi var 3. I egypt regnet man arealet til en sirkel ved å kvadrere  $\frac{8}{9}$  av diameteren. Det tilsvarer at pi skulle vært  $\frac{256}{81}$ , som er litt over 3.16. [Kat04]

Når Arkimedes skulle finne en verdi av pi, brukte han følgende resonnement: Anta at man har en sirkel med en innskrevet regulær  $n$ -kant og en omskrevet regulær  $n$ -kant. Omkretsen til sirkelen er større enn summen av sidene til den innskrevne  $n$ -kanten og mindre enn summen av sidene til den omskrevne  $n$ -kanten. Om man så lar  $n$  gå mot uendelig vil den omskrevne  $n$ -kantens omkrets gå mot sirkelens omkrets ovenfra, og den innskrevne  $n$ -kantens omkrets gå mot sirkelens omkrets nedenfra.

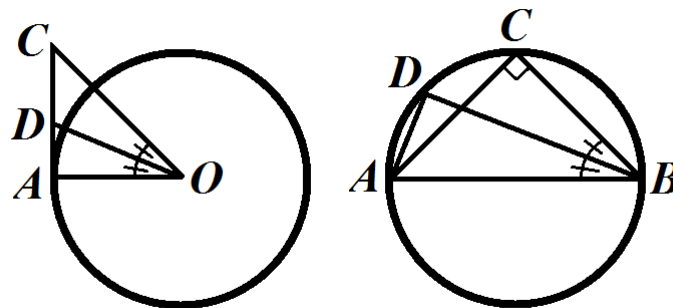


Figur 1: En sirkel med omskrevne og innskrevne regulære  $n$ -kanter. Her med henholdsvis 6-kanter, 12-kanter og 24-kanter.

Arkimedes utledet følgende formler for å regne omkretsen til en omskrevet og en innskrevet regulær 2n-kant når omkretsen til tilsvarende omskrevne og innskrevne regulære n-kant er kjent:

**Lemma 2.1.1** ([Kat04, Lemma 1, s. 68]). *Anta at  $OA$  er radius til en sirkel og  $CA$  er tangenten til sirkelen i  $A$ . La  $DO$  halvere  $\angle COA$  og skjære tangenten i  $D$ . Da er  $DA/OA = CA/(CO + OA)$  og  $DO^2 = OA^2 + DA^2$*

**Lemma 2.1.2** ([Kat04, Lemma 2, s. 69]). *La  $AB$  være diameteren til en sirkel og  $ACB$  en rett trekant innskrevet i halvsirkelen. La  $AD$  halvere  $\angle CAB$  og møte sirkelen i  $D$ . Konstruer  $DB$ . Da er  $\frac{AB^2}{BD^2} = 1 + \frac{(AB+AC)^2}{BC^2}$  og  $AD^2 = AB^2 - BD^2$ .*



Figur 2: Til venstre: Illustrasjon av lemma 2.1.1 som brukes til å finne halvparten av en side i en omskrevet regulær 2n-kant ( $AD$ ) når halve siden til n-kanten ( $AC$ ) er kjent. Til høyre: Illustrasjon av lemma 2.1.2 som brukes til å finne lengden av en side i en innskrevet regulær 2n-kant ( $AD$ ) når siden i n-kanten ( $AC$ ) er kjent. Her skal man finne omkretsen til regulære åttekanter når omkretsen til kvadratene er kjent.

Med utgangspunkt i sekskanter regnet han ut omkretsene til 12-kanter, 24-kanter, 48-kanter og tilslutt 96-kanter. Ved hjelp av sistnevnte konkluderte Arkimedes med at pi var mindre enn  $3\frac{1}{7}$  (ca 3.14286) og større enn  $3\frac{10}{71}$  (ca 3.14085) [Kat04, Proposition 3, s. 68], men metoden hans kan brukes til å få så nøyaktig tilnærming som man måtte ønske.

Logiske bevis krever at man har enkelte grunnsetninger. Et logisk bevis vil være på formen “dersom påstand A og påstand B stemmer, så vil påstand C stemme”. Dette krever at man må ha enkelte grunnsetninger som man bare går ut ifra at stemmer. Disse aksiomene vil på sett og vis fungere som definisjoner på geometrien de legger grunnlaget for. Da det første aksiomatiske system ble laget, trengte man aksiomer som definerte en geometri mest mulig lik den man erfarte i den praktiske geometrien man allerede bedrev, med linjer og sirkler som man kunne konstruere ved hjelp av linjal og passer.

## 2.2 Euklids postulater

Det første aksiomsystemet ble lagt frem av Euklid. Han la til grunn fem aksiomer - som han kalte postulater:

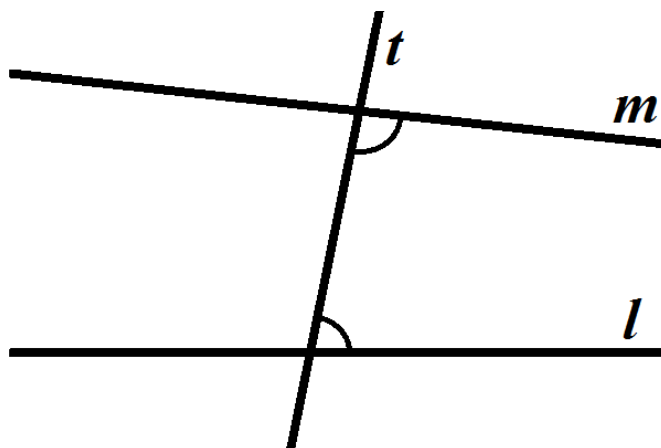
**Euklids postulat 1** ([Ros00, Postulate I, s. 2]). *For ethvert par av distinkte punkter finnes en unik linje som går gjennom begge punktene.*

**Euklids postulat 2** ([Ros00, Postulate II, s. 2]). *Ethvert segment kan forlenges i det uendelige.*

**Euklids postulat 3** ([Ros00, Postulate III, s. 2]). *En kan konstruere en sirkel med ethvert sentrum og enhver radius.*

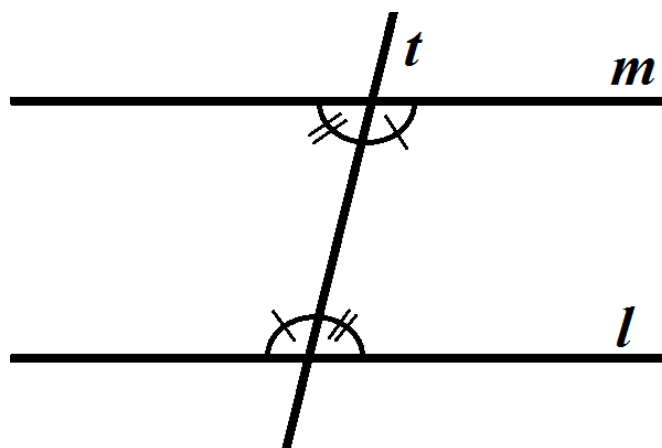
**Euklids postulat 4** ([Ros00, Postulate IV, s. 2]). *Alle rette vinkler er kongruente.*

**Euklids postulat 5** ([Ros00, Postulate V, s. 2]). *Om en linje krysser to andre linjer slik at summen av de indre vinklene på en side er mindre enn summen av to rette vinkler, vil forlengelsen av de to linjene møtes på samme side av den kryssende linjen som de to vinklene.*



Figur 3: Siden summen av vinklene på høyre side av linje  $t$  er mindre enn summen av to rette vinkler sier Euklids femte postulat at  $l$  og  $m$  vil skjære hverandre på høyre side av  $t$ .

Euklids femte postulat kalles gjerne parallellpostulatet, siden den impliserer at den eneste måten to linjer kan være parallelle på er ved at summen av vinklene på hver side av en linje som skjærer dem begge, er lik summen av to rette vinkler.



Figur 4: Summen av vinklene på hver side av  $t$  er lik summen av to rette vinkler. Ifølge Euklids femte postulat er linjene parallelle.

Euklids system har stor historisk betydning, men er ikke et komplett aksiomsystem. Et ideal for aksiomsystemer er at alle uttrykk som inngår skal ha nøyaktige definisjoner og at intuisjon ikke skal spille inn. Oppsumert av David Hilbert [Gre93, s. 72] “One must be able to say at all times –instead of points, lines and planes – tables, chairs and beer mugs.” Tanken er at geometrien skal gi mening selv for en person som aldri har sett en geometrisk illustrasjon, og som kun har studert aksiomene og definisjonene av de aktuelle begrepene.

Definisjonen på et komplett aksiomsystem for en geometri er at enhver påstand som involverer de definerte begrepene innen geometrien, skal kunne bevises eller motbevises. Har man for eksempel definert uttrykkene “sirkel” og “skjæring”, må påstanden at to sirkler alltid skjærer hverandre kunne bevises eller (i dette tilfellet) motbevises.

Blant grunnene til at Euklids system ikke er komplett kan vi nevne mangelen på definisjoner av hva det vil si å ligge på, å ligge mellom og å være kongruent. Så strengt er kravet om at alt man kommer til å bruke skal inngå i en definisjon eller et aksiom, at selv antakelsen om at alle linjer må inneholde minst to punkter må være nevnt. Derimot trenger man et par udefinerte begrep. Vi kommer ikke til å definere hva et punkt er. En linje kan vagt defineres som en mengde punkter. Aksiomene vil i stor grad beskrive deres rolle i geometriene.



## 2.3 Hilberts aksiomsystem

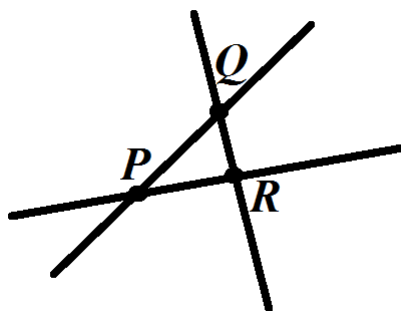
Når vi skal studere hyperbolsk geometri, trenger vi et komplett aksiomatisk system for denne geometrien. Aller først trenger vi et komplett aksiomatisk system for euklidsk geometri, som vi kan sammenlikne det med. David Hilbert la frem et system med kategorisk inndeling, som vi vil benytte oss av i denne oppgaven [Gre93].

Første kategori er insidensaksiomene:

**Insidensaksiom 1 (I-1).** *For alle distinkte punkter  $P$  og  $Q$  finnes en unik linje som  $P$  og  $Q$  ligger på.*

**Insidensaksiom 2 (I-2).** *For enhver linje  $l$  finnes minst to punkter som ligger på  $l$ .*

**Insidensaksiom 3 (I-3).** *Det finnes tre distinkte punkter slik at det ikke finnes en linje som alle tre punktene ligger på.*



Figur 5: Tre punkter  $P$ ,  $Q$  og  $R$  som ikke ligger på en felles linje. Slike punkter må finnes ifølge insidensaksiom 3.

Notasjon: Om et punkt  $P$  ligger på en linje  $l$  vil vi skrive det som  $P \in l$ , og om  $P$  ikke ligger på  $l$ , vil vi skrive det som  $P \notin l$ . Den unike linjen som inneholder to punkter  $P$  og  $Q$  vil skrives  $\overleftrightarrow{PQ}$ .

Neste kategori i Hilberts aksiomsystem handler om å definere det å ligge mellom to punkter på en linje. Vi vil bruke notasjonen  $A * B * C$  for å si at punkt  $B$  ligger mellom punkt  $A$  og  $C$ . Dette er Hilberts mellomliggenhetsaksiomer:

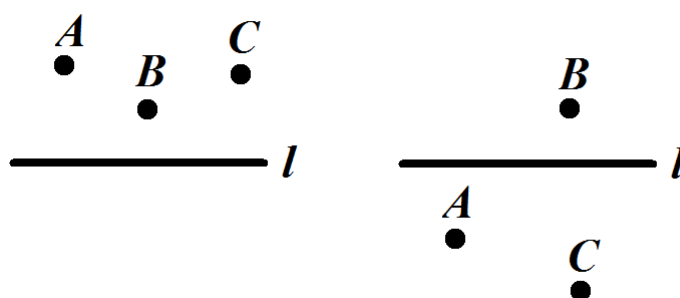
**Mellomliggenhetsaksiom 1 (M-1).**  *$A * B * C$  impliserer  $C * B * A$  og at de tre punktene er distinkte og kolineære.*

**Mellomliggenhetsaksiom 2 (M-2).** *Gitt to distinkte punkter  $B$  og  $D$  finnes det punkter  $A, C, E \in \overleftrightarrow{BD}$  slik at  $A * B * D$ ,  $B * C * D$  og  $B * D * E$ .*

**Mellomliggenhetsaksiom 3 (M-3).** Gitt tre distinkte, kolineære punkter, vil nøyaktig ett punkt ligge mellom de andre to.

**Mellomliggenhetsaksiom 4 (M-4).** Gitt enhver linje  $l$  og tre distinkte punkter  $A, B, C \notin l$ :

- a) Om  $A$  og  $B$  er på samme side av  $l$  og  $B$  og  $C$  er på samme side av  $l$  så er  $A$  og  $C$  på samme side av  $l$ .
- b) Om  $A$  og  $B$  er på motsatt side av  $l$  og  $B$  og  $C$  er på motsatt side av  $l$  så er  $A$  og  $C$  på samme side av  $l$ .



Figur 6: Til venstre: M-4a.  $A, B$  og  $C$  er alle på samme side av  $l$ . Til høyre: M-4b.  $A$  og  $C$  er på samme side av  $l$  mens  $B$  er på motsatt side.

Disse aksiomene krever et par definisjoner.

**Definisjon 2.3.1.** At en mengde punkter er kolineære, vil si at det finnes en linje som inneholder alle punktene i mengden.

**Definisjon 2.3.2.** To punkter  $P$  og  $Q$  ligger på motsatt side av en linje  $l$  hvis og bare hvis  $\overleftrightarrow{PQ}$  skjærer  $l$  i et punkt  $R$  slik at  $P * R * Q$ . Punkter som ikke ligger på motsatt side, ligger på samme side.

Notasjon: Vi vil bruke notasjonen  $l|\{P, Q\}$  for å si at  $P$  og  $Q$  ligger på samme side av  $l$ , og notasjonen  $P|l|Q$  for å si at de ligger på motsatt side.

Aksiom M-4 kan oppsummeres med at, relasjonen å være på samme side av en linje, er en ekvivalensrelasjon for punkter som ikke ligger på  $l$ , med to ekvivalensklasser.

**Definisjon 2.3.3.** En relasjon  $\sim$  mellom to elementer er en ekvivalensrelasjon dersom den oppfyller:

- (i) Vi har at  $P \sim P$ .
- (ii) Vi har at  $P \sim Q$  hvis og bare hvis  $Q \sim P$ .

(iii) Dersom  $P \sim Q$  og  $Q \sim R$  så er  $P \sim R$ .

**Definisjon 2.3.4.** En ekvivalensklasse til en bestemt ekvivalensrelasjon inneholder et element  $P$  og alle elementer som er ekvivalente med  $P$ .

**Påstand 2.3.5.** Relasjonen å være på samme side av en linje er en ekvivalensrelasjon med to ekvivalensklasser.

Aksiom M-4a sier at det tredje kravet for å være ekvivalensrelasjon er oppfylt. Resten må bevises.

*Bevis.* At  $l \setminus \{P, Q\}$  følger av definisjonen på samme side, altså at  $\overleftrightarrow{PQ}$  ikke skal skjære  $l$  i  $R$  slik at  $P * R * Q$ . Dette ville ifølge M-1 implisere at  $P$  og  $Q$  er distinkte punkter, noe som er absurd.  $\overleftrightarrow{PQ}$  og  $\overleftrightarrow{QP}$  er samme linje, så om ikke  $\overleftrightarrow{PQ}$  skjærer  $l$  i et punkt  $R$  som beskrevet i definisjonen av å være på motsatt side, så gjør ikke  $\overleftrightarrow{QP}$  det heller. Anta at aksiomene M-4b og M-2 stemmer. Anta først at antallet ekvivalensklasser er tre eller flere. Da finnes  $A, B$  og  $C$  slik at  $A|l|B$ ,  $B|l|C$  og  $A|l|C$ , men det strider mot antakelsen at aksiom M-4b holder. Anta så at det kun finnes én ekvivalensklasse. Ifølge M-2 kan vi ved å gå ut ifra to punkter  $A \notin l$  og  $B \in l$ , finne et punkt  $C$  slik at  $A * B * C$ . Det tilsier at  $A$  og  $C$  er på motsatte sider av  $l$  og dermed ikke er i samme ekvivalensklasse.  $\square$

Fra denne påstanden følger det at.

**Korollar 2.3.6.** Anta en linje  $l$  og tre punkter  $A, B, C \notin l$ . Dersom  $A|l|B$  og  $l \setminus \{B, C\}$  så er  $A|l|C$ .

**Definisjon 2.3.7.** En ekvivalensklasse til relasjonen å ligge på samme side av en linje kalles et halvplan.

Når vi har definert mellomliggenhet kan vi også definere andre begreper som kommer til å bli nyttige:

**Definisjon 2.3.8.** Gitt distinkte punkter  $P$  og  $Q$  består segmentet  $PQ$  av  $P, Q$  og alle punkter  $R$  slik at  $P * R * Q$ .

**Definisjon 2.3.9.** Gitt distinkte punkter  $P$  og  $Q$ , består strålen  $\overrightarrow{PQ}$  av  $P, Q$  og alle punkter  $R$  slik at  $P * R * Q$  eller  $P * Q * R$ . Punkt  $P$  kalles strålens toppunkt.

**Definisjon 2.3.10.** To stråler  $\overrightarrow{AB}$  og  $\overrightarrow{AC}$  er motsatte hvis og bare hvis  $B * A * C$ .

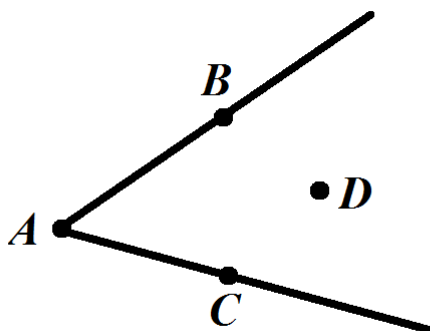
Merk at to stråler uten samme toppunkt umulig kan være motsatte.

**Definisjon 2.3.11.** En vinkel er et punkt  $A$  (vinkelens toppunkt) sammen med strålene  $\overrightarrow{AB}$  og  $\overrightarrow{AC}$  (vinkelbenene), der  $\overrightarrow{AB}$  og  $\overrightarrow{AC}$  ikke er motsatte eller like.

Notasjon: Vinkelen beskrevet i definisjonen kan kalles  $\angle BAC$ ,  $\angle CAB$  eller, dersom det kun er en vinkel med A som toppunkt,  $\angle A$ .

**Definisjon 2.3.12.** *To vinkler er toppvinkler om de har samme toppunkt og den ene vinkelens vinkelben er parvis motsatte stråler av den andre vinkelens vinkelben.*

**Definisjon 2.3.13.** *Gitt en vinkel  $\angle BAC$  og et punkt  $D$  er  $D$  i vinkelens indre dersom  $\overrightarrow{AC} \mid \{D, B\}$  og  $\overrightarrow{AB} \mid \{C, D\}$ .*



Figur 7: Punktene  $B$  og  $D$  ligger på samme side av strålen gjennom  $C$ . Punktene  $C$  og  $D$  ligger på samme side av strålen gjennom  $B$ . Dermed er  $D$  i vinkelens indre.

**Definisjon 2.3.14.** *Gitt tre punkter  $A, B, C$  er trekant  $\triangle ABC$  unionen av segmentene  $AB, BC$  og  $CA$ . Segmentene kalles sidene eller kantene til trekanten. Punktene  $A, B$  og  $C$  kalles hjørnene.*

**Definisjon 2.3.15.** *Gitt en trekant  $\triangle ABC$  og et punkt  $D$  er  $D$  i trekantens indre dersom  $D$  er et indre punkt for  $\angle BAC, \angle ABC$  og  $\angle ACB$ .*

**Definisjon 2.3.16.** *Strålen  $\overrightarrow{AD}$  ligger mellom strålene  $\overrightarrow{AB}$  og  $\overrightarrow{AC}$  dersom  $D$  er et indre punkt for vinkelen  $\angle CAB$ .*

Notasjon: At  $\overrightarrow{AD}$  ligger mellom  $\overrightarrow{AB}$  og  $\overrightarrow{AC}$  vil skrives  $\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AD} \mid \overrightarrow{AC}$ .

**Definisjon 2.3.17.** *To vinkler  $\angle A$  og  $\angle B$  er supplementvinkler dersom de har et ben til felles og det andre benet til  $\angle A$  er motsatt av det andre benet til  $\angle B$ .*

**Definisjon 2.3.18.** *En rett vinkel er kongruent med sine supplementer.*

Den siste definisjonen bruker uttrykket kongruens, som i Hilberts system blir definert av en egen kategori av aksiomer. Kongruens har som formål å si noe om lengden til segmenter og størrelsen til vinkler. Det skiller seg fra å være like ved at likhet impliserer

at de er identiske. Det vil si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$  dersom  $\overrightarrow{AB}$  og  $\overrightarrow{AC}$  er samme stråle, altså inneholder alle de samme punktene. Tolkningen av kongruens for praktisk geometri er at dersom to segmenter er kongruente kan vi “legge det ene oppå det andre” slik at de blir like.

Vi vil bruke  $AB \cong CD$  og  $\angle BAC \cong \angle EDF$  som notasjon for at henholdsvis to segmenter og to vinkler er kongruente. Her er Hilberts kongruensaksiomer:

**Kongruensaksiom 1 (K-1).** *Gitt to distinkte punkter  $A, B$  og ethvert punkt  $A'$ , samt en stråle  $r$  med  $A'$  som toppunkt, finnes en unik  $B' \in r$  slik at  $B' \neq A'$  og  $AB \cong A'B'$ .*

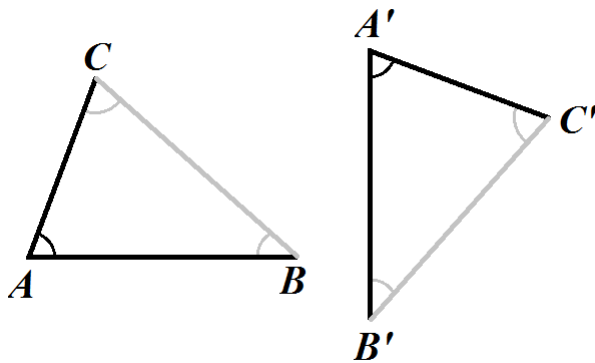
**Kongruensaksiom 2 (K-2).** *Segmentkongruens er en ekvivalensrelasjon.*

**Kongruensaksiom 3 (K-3).** *Om  $A * B * C$ ,  $A' * B' * C'$ ,  $AB \cong A'B'$  og  $BC \cong B'C'$  så er  $AC \cong A'C'$ .*

**Kongruensaksiom 4 (K-4).** *Gitt en vinkel  $\angle BAC$  og en stråle  $\overrightarrow{A'B'}$  finnes unike stråler  $\overrightarrow{A'C'}$  og  $\overrightarrow{A'D'}$  slik at  $\overrightarrow{A'C'} \mid \overrightarrow{A'B'} \mid \overrightarrow{A'D'}$ ,  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$  og  $\angle BAC \cong \angle D'A'C'$ .*

**Kongruensaksiom 5 (K-5).** *Vinkelkongruens er en ekvivalensrelasjon.*

**Kongruensaksiom 6 (K-6).** *Vi har to trekanter  $\triangle ABC$  og  $\triangle A'B'C'$ . Om  $AB \cong A'B'$ ,  $AC \cong A'C'$  og  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ , så følger det at  $BC \cong B'C'$ ,  $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$  og  $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$  og vi sier at  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .*



Figur 8: SAS-kriteriet for kongruens. Vinkelen og sidene hvis kongruens er kjent er sorte, mens vinklene og sidene hvis kongruens er utledet fra det sjette kongruensaksiomet er grå.  $AB \cong A'B'$  osv.

Det siste aksiomet kalles også SAS-kongruens, siden vinkelen hvis kongruens er kjent (“angle“ på engelsk) ligger mellom sidene hvis kongruens er kjent. Vi kan også snakke om SSS-kongruens der alle sidene er parvis kongruente, AAA-kongruens der alle vinklene

er kongruente, SSA-kongruens der vinkelen med kjent kongruens kun grenser til en av sidene med kjent kongruens. ASA-kongruens med kjent side mellom kjente vinkler og AAS-kongruens med kjent side som grenser til en av to kjente vinkler. Vi kommer senere inn på hvilke av disse som impliserer kongruens mellom trekantene i de ulike geometriene.

Videre kommer vi til å få bruk for ideen om at et segment kan være større enn et annet og en vinkel kan være større enn en annen.

**Definisjon 2.3.19.** At  $AB < CD$  vil si at det finnes et punkt  $E$  slik at  $C * E * D$  og  $AB \cong CE$ .

**Definisjon 2.3.20.** At  $\angle BAC < \angle EDF$  vil si at det finnes en stråle  $\overrightarrow{EG}$  slik at  $\overrightarrow{DE} | \overrightarrow{DG} | \overrightarrow{DF}$  og  $\angle BAC \cong \angle EDG$ .

**Definisjon 2.3.21.** En sirkel med sentrum i  $O$  og radius  $OR$  består av mengden av punkter  $P$  slik at  $OR \cong OP$ .

**Definisjon 2.3.22.** Gitt en sirkel med sentrum i  $O$  og der segmentet  $OR$  er en radius, er  $P$  et indre punkt hvis og bare hvis  $OP < OR$ .

Vi kommer også til å få bruk for uttrykk som normal, midtnormal og ortogonalitet.

**Definisjon 2.3.23.** La  $l$  og  $m$  begge være en linje, en stråle eller et segment. Anta at  $l$  og  $m$  skjærer hverandre i punkt  $P$ . Vi sier at  $l$  og  $m$  er ortogonale dersom det finnes punkter  $Q \in l$  og  $R \in m$  slik at  $\angle QPR$  er en rett vinkel. Vi kan også si at  $l$  og  $m$  står normalt eller vinkelrett på hverandre.

Notasjon:  $l \perp m$  vil bety at  $l$  og  $m$  står normalt på hverandre.

**Definisjon 2.3.24.** Gitt en sirkel  $S$  og en linje  $t$  som kun skjærer sirkelen i ett punkt  $P$ , vil vi kalle  $t$  tangenten til  $S$  i  $P$ .

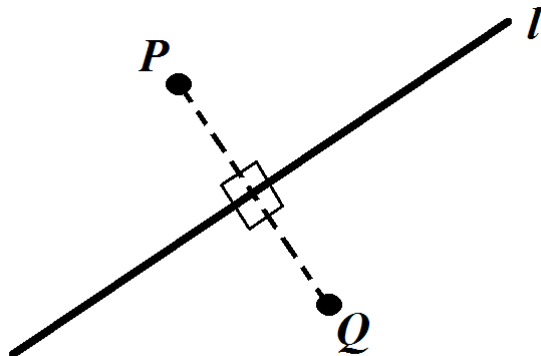
**Definisjon 2.3.25.** Vi har en linje, en stråle eller et segment  $l$  og en sirkel  $S$ , som skjærer  $l$  i punkt  $P$ . La  $t$  være tangenten til  $S$  i  $P$ . Vi sier at  $l$  og  $S$  er ortogonale dersom  $l$  og  $t$  er ortogonale.

**Definisjon 2.3.26.** Gitt en linje  $l$  og et punkt  $P \notin l$  er segmentet  $PQ$  en normal fra  $P$  på  $l$  dersom  $Q \in l$  og  $PQ \perp l$ . Punkt  $Q$  er foten av normalen.

**Definisjon 2.3.27.** Gitt to distinkte punkter  $P$  og  $Q$ , er midtpunktet mellom dem punktet  $R$  slik at  $P * R * Q$  og  $PR \cong RQ$ .

**Definisjon 2.3.28.** Gitt to distinkte punkter  $P$  og  $Q$ , er linjen  $l$  midtnormalen mellom  $P$  og  $Q$  dersom midtpunktet mellom  $P$  og  $Q$  ligger på  $l$  og  $PQ \perp l$ .

**Påstand 2.3.29.** La  $l$  være midtnormalen mellom  $P$  og  $Q$ . For ethvert punkt  $A \in l$  så er avstanden til  $P$  lik avstanden til  $Q$ , det vil si  $PA \cong QA$ .



Figur 9: Linje  $l$  er ortogonal med  $PQ$  og passerer gjennom midtpunktet mellom  $P$  og  $Q$ . Alle punkter på  $l$  er like langt fra  $P$  som fra  $Q$ .

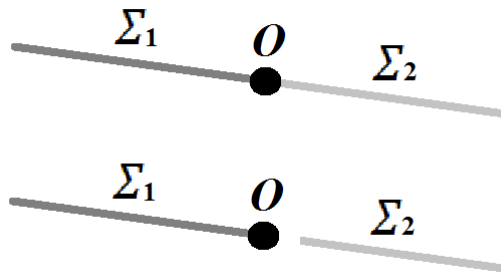
*Bevis.* La  $R$  være midtpunktet mellom  $P$  og  $Q$ , og studer trekantene  $\triangle PRA$  og  $\triangle RQA$ . De har side  $RA$  til felles, per definisjon er  $PR \cong RQ$  og  $\angle PRA \cong \angle QRA$  siden de er supplementvinkler og begge per definisjon er rette. Ifølge aksiom K-6 er trekantene kongruente og  $PA \cong QA$ .  $\square$

Merk at den omvendte påstanden her ikke er bevist. Vi vil på et senere punkt vise at dersom et punkt er like langt fra  $P$  som fra  $Q$ , så må det ligge på midtnormalen mellom  $P$  og  $Q$ .

For at aksiomsystemet skal være komplett og representere euklidsk geometri slik vi kjenner den fra praktisk geometri, får vi behov for to siste aksiomer. Et kontinuitetsaksiom er blant annet nødvendig for å kunne fastslå at to sirkler skjærer hverandre dersom det er kjent at det finnes punkter som er i begge sirklenes indre. Et parallellaksiom er nødvendig for å skille euklidsk geometri fra andre geometrier.

**Dedekinds aksiom.** Anta at mengden av punkter på en linje er en disjunkt union  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  av to ikke-tomme mengder, slik at ingen punkter fra en av mengdene er mellom to punkter fra den andre mengden. Da finnes et punkt  $O \in l$  slik at den ene mengden er lik en stråle av  $l$  med  $O$  som toppunkt, og den andre mengden er den motsatte strålen med toppunktet ekskludert.

**Definisjon 2.3.30.** En inndeling av punkter i to mengder slik som i Dedekinds aksiom er kalt et Dedekind-kutt.



Figur 10: Øverst: Et Dedekind-kutt av en kontinuerlig linje. Nederst: En ikke-kontinuerlig linje. Dedekinds aksiom er ikke oppfylt siden strålen som inneholder  $\Sigma_2$  ikke har samme toppunkt som strålen som inneholder  $\Sigma_1$ . De er dermed ikke motsatte stråler.

**Hilberts Parallellaksiom.** *For enhver linje  $l$  og ethvert punkt  $P \notin l$  finnes det maksimalt én linje  $m$  gjennom  $P$  slik at  $m$  og  $l$  er parallelle.*

**Definisjon 2.3.31.** *To linjer er parallelle hvis og bare hvis det ikke finnes et punkt som ligger på begge linjene.*

Notasjon:  $l \parallel m$  betyr at  $l$  er parallell med  $m$ .

Merk at definisjonen av å være parallelle ikke sier at avstanden til den andre linjen er konstant når man beveger seg kontinuerlig langs en linje. Merk også at Hilberts parallellaksiom sier at det maksimalt finnes én parallell linje gjennom punktet, ikke at det finnes nøyaktig én parallell linje. Vi vil senere komme inn på at det kan utledes fra de øvrige aksiomene at antallet parallelle linjer er minst én, så kombinert med Hilberts parallellaksiom blir konklusjonen at det er nøyaktig én parallell linje i euklidisk geometri.



### 3 Ulike geometrier

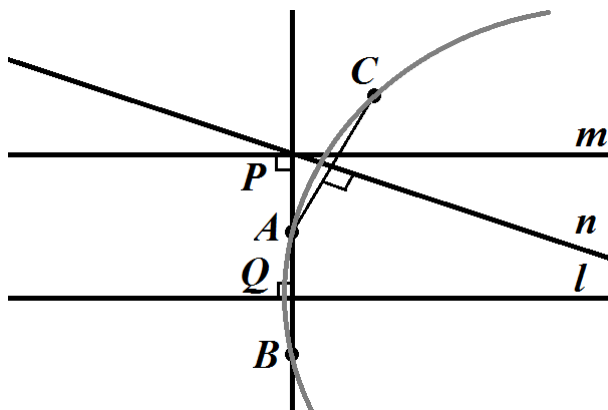
#### 3.1 Kontrovers rundt parallellpostulatet

Det er tydelig fra Euklids elementer at han ikke var fornøyd med parallellpostulatet. Mens han introduserte de øvrige fire postulatene før han gikk i gang med å utlede resultater, ventet han med å introdusere parallellpostulatet til etter at han hadde bevist 28 resultater. På det tidspunktet var det ikke mer han kunne bevise uten å anta et postulat om skjæring og parallellitet. Det spekuleres i om Euklid hadde håpet å kunne utlede parallellpostulatet fra de øvrige fire. [Ros00]

Andre matematikere viste stor skepsis til parallellpostulatet. Mange mente det måtte være mulig å bevise parallellpostulatet, for det virket ikke opplagt nok til å være et postulat. Mange ga seg i kast med oppgaven å utlede parallellpostulatet. Ulike bevis ble lagt frem, men ingen av dem var gyldige. Bevisene inneholdt alltid minst én antakelse som virket grafisk intuitiv, men som ikke kunne utledes fra aksiomene.

La oss for eksempel se på et bevis lagt frem av Wolfgang Bolyai (oversatt med visse friheter fra [Ros00, s. 5]):

*Vi har en linje  $l$ , punkt  $P \notin l$ , en normal  $PQ$  fra  $P$  på  $l$  og en linje  $m$  gjennom  $P$  ortogonalt på  $PQ$ . La  $n$  være en linje gjennom  $P$  distinkt fra  $m$ . Vi må vise at  $n$  møter  $l$ . La  $A$  være et vilkårlig punkt på  $PQ$ . La  $B$  være det unike punktet på  $\overline{PQ}$  slik at  $l$  er midtnormalen mellom  $A$  og  $B$  og  $C$  være det unike punktet slik at  $n$  er midtnormalen mellom  $A$  og  $C$ . Punktene  $A$ ,  $B$  og  $C$  er ikke kolineære, så det finnes en unik sirkel som inneholder  $A$ ,  $B$  og  $C$ . Sentrum i sirkelen vil ligge på begge midtnormalene  $l$  og  $n$ , altså må de to linjene skjære hverandre.*



Figur 11: Linje  $l$  må ifølge Bolyai skjære linje  $n$  i sentrum til sirkelen som inneholder punktene  $A$ ,  $B$  og  $C$ .

Dette beviset står og faller på antakelsen at det for tre punkter som ikke er kolineære må finnes en sirkel som inneholder punktene. Denne påstanden kan ikke utledes av de fire første aksiomene og heller ikke fra Hilberts aksiomsystem med parallellaksiomet fjernet. Det Bolyai får bevist er i stedet at antakelsen om sirkelens eksistens er logisk ekvivalent med Euklids eller Hilberts parallellaksiom.

Grunnen til at ingen var i stand til å utlede parallellpostulatet var ikke manglene i Euklids system, for også i Hilberts system er et parallellpostulat nødvendig for at aksiomsystemet skal være komplett. Parallellpostulatet kunne ikke bevises fordi det var nødvendig for å definere euklidisk geometri. Ved å endre kun parallellpostulatet kan man definere en helt annen geometri, nemlig hyperbolsk geometri. I hyperbolsk geometri vil man ikke alltid kunne konstruere en sirkel som inneholder tre bestemte ikke-kolineære punkt slik som Bolyai antok.

Det er tre geometrier som kalles de klassiske geometriene. Hilberts Parallellpostulat illustrerer godt forskjellene mellom dem. Gitt en linje  $l$  og et punkt  $P$  som ikke ligger på  $l$ , hvor mange linjer gjennom  $P$  vil være parallelle med  $l$ ? I euklidisk geometri er svaret én. I hyperbolsk geometri er svaret uendelig. I elliptisk geometri som også kalles sfærisk geometri er svaret 0, og at det ikke finnes noen parallelle linjer. Hyperbolsk geometri og euklidisk geometri har alle aksiomene i Hilberts system til felles, med unntak av parallellpostulatet. Sfærisk geometri skiller seg litt mer ut.

Videre i teksten vil vi ofte bruke uttrykkene S-punkt, E-punkt og H-punkt for å referere til henholdsvis sfæriske, euklidiske og hyperbolske punkt.

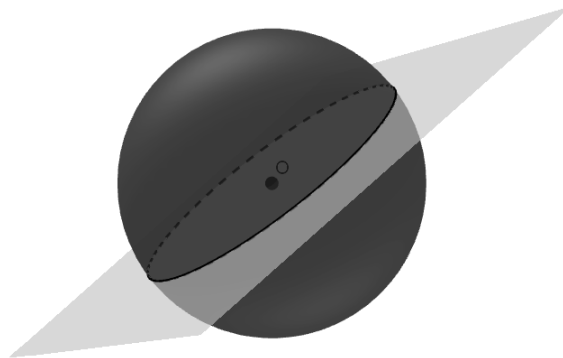
### 3.2 Sfærisk geometri

I denne seksjonen vil vi droppe bevis av noen resultater, og spesielt når vi kommer inn på sfærisk trigonometri. Sfærisk geometri er et stort tema, men er ikke en stor del av denne oppgaven. Seksjonens formål er først og fremst å nevne de viktigste egenskapene ved sfærisk geometri for senere å sammenlikne med euklidisk og hyperbolsk geometri.

Grunnen til at man bruker uttrykket sfærisk geometri til å beskrive geometrien der ingen to linjer er parallelle er at dens viktigste bruksområde i praksis er for geometrisk å analysere overflaten av en kule. For at en kuleoverflate i et euklidisk rom skal kunne brukes som modell for elliptisk geometri må vi ha følgende tolkning av punkt og linjer: Et S-punkt tolkes som paret av antipodale E-punkter  $P$  og  $P'$ . En S-linje tolkes som en E-storsirkel.

**Definisjon 3.2.1.** *Gitt en kuleoverflate  $S$  er en storsirkel en sirkel inneholdt i  $S$  med samme radius som kulen.*

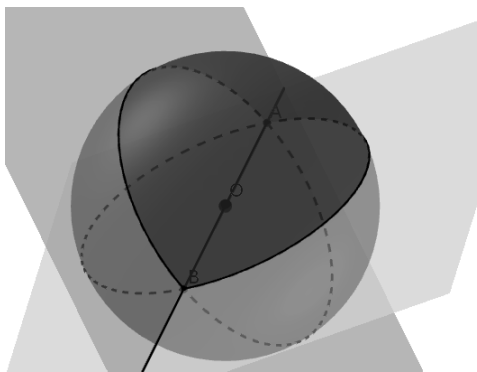
Årsaken til tolkningen av linje som storsirkel er at den er en avstandsminimerende når vi ser på euklidisk lengde, og storsirkelen to punkter har til felles er unik med mindre punktene er antipodale. Tolkningen av S-punkt som et par av anti-podale E-punkt blir



Figur 12: En storsirkel på en kuleoverflate er snittet mellom kuleoverflaten og et plan som inneholder kulens sentrum.

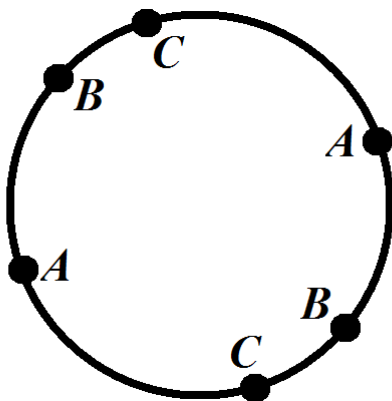
nødvendig, for vi ønsker at sfærisk geometri skal ha insidensaksiomene til felles med euklidsk og hyperbolsk geometri. Om alle E-punkter på kuleoverflaten var S-punkter ville det vært uendelig mange linjer som  $P$  og  $Q$  har til felles når  $P$  og  $Q$  er antipodale, som strider med aksiom I-1 om at linjen mellom to punkter er unik. Ved at antipodale E-punkter kun er ett S-punkt er I-1 overholdt.

Tolkningen av punkter og linjer i sfærisk geometri gir oss en indikasjon på hvorfor ingen linjer er parallelle. Alle storsirkler må ha kulens sentrum som sitt sentrum. Om vi kaller kulens sentrum  $O$ , så kan vi se på enhver storsirkel som snittet mellom et plan gjennom  $O$  og kuleoverflaten. Gitt to distinkte storsirkler vil de skjære hverandre i snittet mellom to slike plan og kuleoverflaten. De to planene skjærer hverandre i en linje gjennom  $O$ , og denne linjen skjærer kuleoverflaten i to antipodale punkter, altså ett S-punkt.



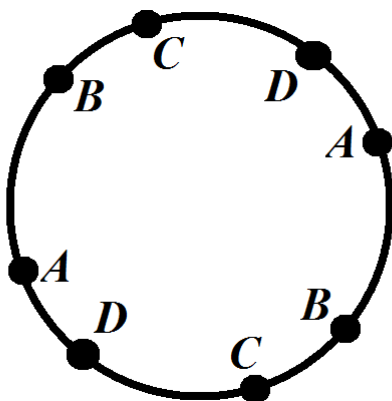
Figur 13: To storsirkler er skjæringene mellom to plan og kuleoverflaten. Snittet mellom de to planene er en linje. Snittet mellom storsirklene er lik snittet mellom linjen og kuleoverflaten som blir to antipodale punkter  $A$  og  $B$ . I sfærisk geometri definerer vi paret av E-punkter  $A$  og  $B$  som ett S-punkt.

Tolkningen av S-punkter og S-linjer gir oss også en intuitiv forståelse av hvorfor sfærisk geometri må være ulik euklidsk og hyperbolsk av andre grunner enn mangelen på parallelitet. Mellomliggenhet gir ingen mening i sfærisk geometri. Gitt tre kolineære punkter vil deres linje være en E-sirkel der hvert punkt er representert to ganger (se figur 14). Det gir like mye mening å si at  $A$  ligger mellom de to andre, som at  $B$  ligger mellom de to andre, eller at  $C$  ligger mellom de to andre. Vi kan ikke definere mellomliggenhet slik at alle tre påstandene stemmer, for da vil ikke aksiom M-3 være oppfylt.



Figur 14: Tre punkter på en S-linje. I sfærisk geometri kan man ikke si at et punkt ligger mellom de to andre.

Uten konseptet mellomliggenhet forsvinner konseptene stråle og å være på samme og motsatt side av en linje. Mangelen av inndeling i halvplan kalles ikke-orienterbarhet. Konseptene vinkel og segment må redefineres, noe vi kommer tilbake til. Man får behov for et konsept som likner på mellomliggenhet. Tenk deg et fjerde punkt på en linje.



Figur 15: Fire kolineære S-punkter, det vil si fire par av antipodale E-punkter på en felles storsirkel.

Nå har vi behov for en måte å beskrive hvordan punktene ligger i forhold til hverandre, og da spesielt at man ikke kan gå fra  $A$  til  $C$  langs linjen uten å passere  $B$  eller  $D$ . Vi kan si at  $A$  og  $C$  separeres av  $B$  og  $D$ , og skrive det som  $(A, C|B, D)$ . Ved å erstatte mellomliggenhet med separasjon får vi bruk for egne separasjonsaksiomer. Aksiomsystemet blir komplett om vi tar med følgende separasjonsaksiomer [Gre93]:

**Separasjonsaksiom 1 (S-1).** At  $(A, B|C, D)$  impliserer at  $A, B, C$  og  $D$  er distinkte, kolineære punkter.

**Separasjonsaksiom 2 (S-2).** At  $(A, B|C, D)$  impliserer  $(C, D|A, B)$  og  $(B, A|C, D)$ .

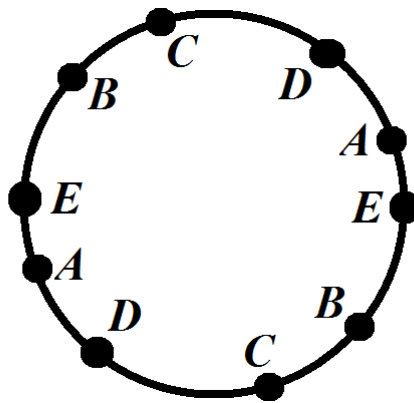
**Separasjonsaksiom 3 (S-3).** Om  $(A, B|C, D)$  kan ikke  $(A, C|B, D)$

**Separasjonsaksiom 4 (S-4).** Om  $A, B, C$  og  $D$  er distinkte og kolineære er enten  $(A, B|C, D)$ ,  $(A, C|B, D)$  eller  $(A, D|B, C)$ .

**Separasjonsaksiom 5 (S-5).** Gitt distinkte, kolineære  $A, B$  og  $C$  finnes et punkt  $D$  slik at  $(A, B|C, D)$ .

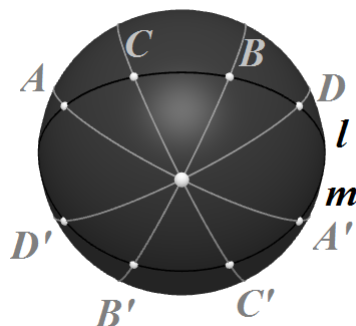
**Separasjonsaksiom 6 (S-6).** For alle distinkte, kolineære punkter  $A, B, C, D$  og  $E$ , om  $(A, B|D, E)$  så er enten  $(A, B|C, D)$  eller  $(A, B|C, E)$ .

**Separasjonsaksiom 7 (S-7).** Om  $(A, B|C, D)$  der  $A, B, C, D \in l$  og  $A', B', C'$  og  $D'$  er punktene på en linje  $m$  som svarer til henholdsvis  $A, B, C$  og  $D$  ved en perspektivitet så er  $(A', B'|C', D')$ .



Figur 16: Gitt  $(A, B|D, E)$  må et femte distinkt punkt  $C$  være slik at enten  $(A, B|C, D)$  eller  $(A, B|C, E)$  ifølge det sjette separasjonsaksiomet. På figuren er  $(A, B|C, E)$ .

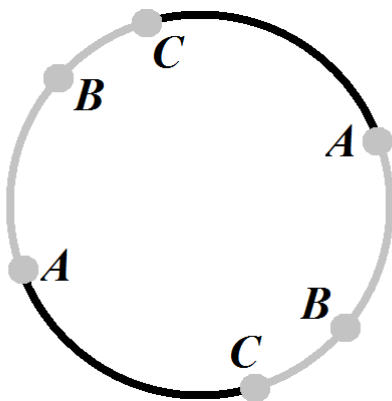
**Definisjon 3.2.2.** En perspektivitet mellom to linjer  $l$  og  $m$  i et plan med et punkt  $O$  som sentrum (der  $O$  ikke ligger på  $m$  eller  $l$ ), er en sammenheng der  $A \in l$  svarer til  $A' \in m$  hvis og bare hvis,  $O, A$  og  $A'$  er kolineære.



Figur 17: At  $(A, B|C, D)$  medfører at etter en perspektivitet der  $A \in l$  tas til  $A' \in m$ ,  $B \in l$  tas til  $B' \in m$  osv, vil  $(A', B'|C', D')$  ifølge det syvende separasjonsaksiomet.

For å få et komplett aksiomsystem for sfærisk geometri må segment og vinkel defineres, og av mangel på konseptet stråle og motsatte sider, må et par av kongruensaksiomene omtolkes litt.

**Definisjon 3.2.3.** Et segment  $ABC$  i sfærisk geometri er mengden av alle punkter  $D$ , kolineære med  $A, B$  og  $C$  slik at  $(B, D|A, C)$  ikke er oppfylt.



Figur 18: Et sfærisk segment (grått) er definert av tre punkter og er her alle punkter  $D$  slik at ikke  $(A, C|B, D)$ .

**Påstand 3.2.4.** For alle punkter  $A$  og  $B$  finnes det nøyaktig to segmenter på  $\overleftrightarrow{AB}$  med  $A$  og  $B$  som endepunkt. Disse utgjør tilsammen hele linjen.

*Bevis.* Anta kun ett segment og anta et punkt  $C$  på segmentet. Per definisjon av segment finnes det da ingen punkter  $D$  slik at  $(A, B|C, D)$ . Men i så fall er ikke aksiom S-5 oppfylt, så vi har en motsigelse. Anta deretter to segmenter  $ACB$ ,  $ADB$  og et kolineært punkt  $E$ . Vil vise at  $E$  må ligge på ett av segmentene. Siden segmentene er ulike må  $D \notin ACB$ , så  $(A, B|C, D)$ . Ifølge S-6 impliserer  $(A, B|C, D)$  at enten  $(A, B|C, E)$  eller  $(A, B|D, E)$ . Om  $E$  ikke skulle ligget på noen av segmenten, skulle det tilsi at både  $(A, B|C, E)$  og  $(A, B|D, E)$ . Siden kun en av påstandene skal stemme må  $E$  ligge på enten  $ACB$  eller  $ADB$ .  $\square$

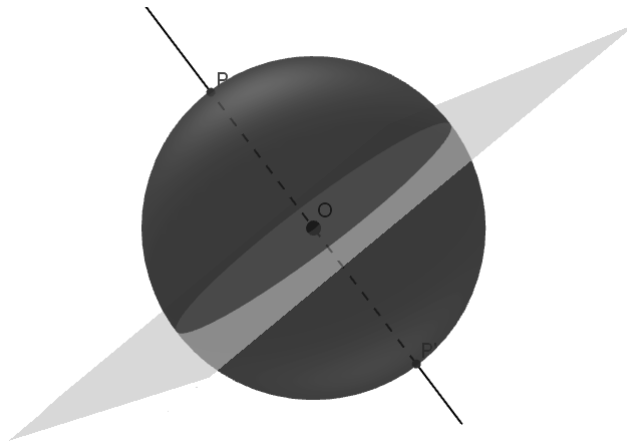
Et sentralt trekk ved sfærisk geometri er at hver linje har en pol, definert på følgende måte:

**Definisjon 3.2.5.** *Gitt en linje  $l$  og et punkt  $P \notin l$  så er  $P$  en pol for  $l$  dersom  $\overleftrightarrow{PQ} \perp l$  for alle  $Q$  på  $l$ .*

Merk at vi også kjenner fra det sfæriske parallellaksiomet at alle linjer gjennom  $P$  skjærer  $l$ , så alle linjer gjennom en linje  $l$  sin pol står ortogonalt på  $l$ . I kulemodellen finner man polen til en linje ved å ta snittet mellom kuleoverflaten og linjen gjennom  $O$  som står vinkelrett på planet hvis snitt med kuleoverflaten definerer linjen. Snittet blir to E-punkter, altså ett S-punkt.

**Påstand 3.2.6** ([TL14, 6., s. 2]). *Alle punkter på en linje  $l$  er like langt fra linjens pol  $P$ .*

I den sfæriske modellen er avstanden en fjerdedel av omkretsen til en linje. Et bevis ville kreve at man først viser påstanden at om to vinkler i en sfærisk trekant er kongruente så er de to sidene som er motstående til vinklene også kongruente, noe vi ser på senere.



Figur 19: Polen til en linje har samme avstand til alle punkter på linjen.

La oss omformulere kongruensaksiomene som omhandler segmentkongruens for sfærisk geometri:

**Sfærisk kongruensaksiom 1 (K-1).** *Gitt ett segment  $ABC$  og en linje  $l$  med et punkt  $P$  så finnes nøyaktig to segmenter  $PQR$  og  $PQ'R'$  på  $l$  slik at  $ABC \cong PQR$  og  $ABC \cong PQ'R'$ .*

**Sfærisk kongruensaksiom 2 (K-2).** *Segmentkongruens er en ekvivalensrelasjon.*

**Sfærisk kongruensaksiom 3 (K-3).** *Om  $ABC \cong A'B'C'$ ,  $CDE \cong C'D'E'$ ,  $ABC$  og  $CDE$  kun har punkt  $C$  til felles og  $A'B'C'$  og  $C'D'E'$  kun har punkt  $C'$  til felles så er  $ACE \cong A'C'E'$ .*

Med dette i bakhånd går vi videre med noen resultater.

**Teorem 3.2.7.** *Enhver linje har endelig lengde.*

Dette følger av at en linje er summen av to segmenter og segmenter har endelig lengde.

**Teorem 3.2.8.** *Alle linjer har samme lengde.*

*Bevis.* Anta  $l > m$ . Linje  $m$  kan ifølge påstand 3.2.4 skrives som unionen av to segmenter  $ACB$  og  $ADB$  som kun har  $A$  og  $B$  som felles punkt. Ifølge K-1 finnes punkter  $A', C', B', D', E \in l$  slik at  $A'C'B' \cong ACB$  og  $B'D'E \cong ADB$ . Ifølge K-3 blir  $A'B'E \cong m$ . Ifølge S-5 finnes et punkt  $F$  slik at  $(A', E|B', F)$ . Dermed har vi et segment  $A'EF > A'B'E$ . Ifølge K-1 skal det finnes to segmenter på  $m$  som er kongruent med  $A'EF$ , men dette er umulig siden  $A'EF$  er lengre enn  $m$ , så vi har en selvmotsigelse.  $\square$

Det interessante med dette resultatet er at det innfører en skaleringskonstant for geometrien, nemlig lengden til en linje, eller i praktisk bruk radiusen til kulen. Dette er en viktig likhet med hyperbolsk geometri, der vi vil komme inn på at det også finnes en faktor som ikke kan bestemmes a priori og som fungerer som en skaleringsfaktor for geometrien.

**Definisjon 3.2.9.** *Anta to  $S$ -linjer  $l$  og  $m$  møtes i punktet  $P$  som er pol for linjen  $n$ . La  $A$  og  $B$  være henholdsvis  $l \cap n$  og  $m \cap n$ . Det finnes nøyaktig to segmenter av  $n$  med  $A$  og  $B$  som endepunkt. Vinkelmålet mellom  $l$  og  $m$  er definert å være lik lengden til det korteste av disse segmentene.*

Notasjon: Vinkelen mellom to linjer  $l$  og  $m$  vil skrives  $\angle lm$ .

Merk at vi også kunne definert vinkelen lik lengden ganget med en konstant  $R$ , for det eneste vi kan utlede apriori er at lengden og vinkelen må være proporsjonal. Ved å velge at lengden er ganget med 1 får vi Gaussisk krumning 1. Et annet valg av  $R$  ville gitt oss Gaussisk krumning  $\frac{1}{R^2}$ .

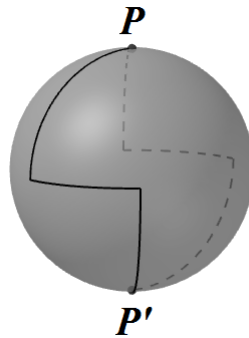


**Definisjon 3.2.10.** Kortsegmentet  $AB$  er det korteste av de to segmentene på  $\overleftrightarrow{AB}$  med  $A$  og  $B$  som endepunkt. Om de to segmentene er like, regnes begge som kortsegmenter.

**Definisjon 3.2.11.** En trekant i sfærisk geometri er unionen av tre segmenter med parvis felles endepunkter. To segmenter  $ABC, CDE$  kan ikke være kolineære, det vil si  $A, B, C, D$  og  $E$  må ikke være kolineære. En lukket trekant har indre og ytre punkter.

Notasjon:  $\triangle ABCDEF$  er unionen av segmentene  $ABC, CDE$  og  $AFE$ .

Merk at med denne definisjonen vil en sfærisk trekant i kulemodellen ikke nødvendig stemme overens med vår intuitive forståelse av en trekant på en kuleoverflate. Ettersom to anti-polare punkter identifiseres kan to av segmentene “møte” hverandre ved at den ene har et punkt  $P$  som endepunkt og den andre  $P$  sitt anti-polare punkt som endepunkt. En slik trekant vil ikke ha indre og ytre punkter og er derfor ikke lukket. I euklidisk forstand deler den kuleoverflaten i to adskilte deler, men disse identifiseres siden et punkt og dens antipodale punkt befinner seg i hver sin del.



Figur 20: En spesiell sfærisk trekant. Hvert vinkelsegment på forsiden av kulen er identifisert med et stiptet vinkelsegment på baksiden bestående av de antipodale punktene til punktene på segmentet.

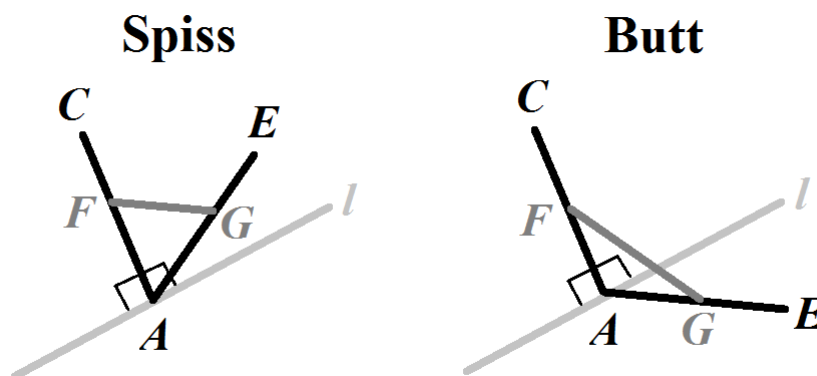
For praktisk bruk er det mest gunstig å se på lukkede trekanter, som er det vi intuitivt tenker på som trekanter på en kuleoverflate. Når vi diskuterer vinkelsummene og arealene til trekanter vil det være underforstått at vi snakker om lukkede trekanter. For slike trekanter sidesummen nødvendigvis vært mindre enn to linjer [TL14, 30., s. 13].

Det hadde også vært mulig å endre definisjonen for trekant slik at de er unikt bestemt av hjørnene sine. I utgangspunktet er det for hvert par av hjørner to segmenter som kan være en sidekant, noe som gir åtte mulige kombinasjoner. Av dem vil halvparten av alternativene være lukket. En kan definere dem slik at alle segmentene må være kortsegmenter. I så fall ville summen av sidene vært mindre enn eller lik en og en halv linje. Om vi vil definere lukkede trekanter slik at de er unikt bestemt kan vi definere at alternativet med minst vinkelsum skal være gjeldende. I begge tilfeller vil disse definisjonene ikke gi en unik trekant hvis alle alternativene er kongruente. Derimot vil i det minste trekantens

mål være unikt bestemt.

Når vi skal studere trekanter får vi behov for et vinkelmål mellom to segmenter. Dette er noe krevende. Vi vil introdusere en metode for å identifisere om vinkelen mellom to segmenter er rett, spiss eller butt. Om den er spiss blir den lik kortsegmentet og om den er butt blir den lik det andre segmentet.

**Teorem 3.2.12.** *Anta to segmenter  $ABC$  og  $ADE$ . Konstruer en linje  $l$  gjennom  $A$  som står vinkelrett på  $\overleftrightarrow{AC}$ . Dersom  $ADE$  ligger på  $l$  så er vinkelen mellom  $ABC$  og  $ADE$  rett. Velg et punkt  $F$  slik at  $AF$  er inneholdt i  $ABC$  og lengden til  $AF$  er mindre enn en fjerdedels linje. Velg punkt  $G$  slik at  $AG$  er inneholdt i  $ADE$  og lengden til  $AF$  er mindre enn en fjerdedels linje. Dersom kortsegmentet  $FG$  skjærer  $l$  så er vinkelen mellom  $ABC$  og  $ADE$  butt. Hvis vinkelen hverken er butt eller rett så er den spiss.*



Figur 21: Når kortsegmentet  $FG$  krysser linjen  $l$  som til høyre er segmentvinkelen butt. Når kortsegmentet ikke krysser linjen så er segmentvinkelen spiss.

Notasjon:  $\angle ABCDE$  er vinkelen mellom segmentene  $ABC$  og  $CDE$ . Eventuelt kan den kalles  $\angle C$  om det ikke er noen andre aktuelle segmenter med  $C$  som endepunkt.

La oss gå videre med noen av de viktigste resultatene i sfærisk trigonometri, for senere å kunne sammenlikne dem med hyperbolsk geometri.

**Teorem 3.2.13** ([TL14, 32., s. 14]). *Summen av vinklene i en lukket trekant er større enn summen av to rette vinkler og mindre enn summen av seks rette vinkler.*

Som et spesialtilfelle finnes trekanter med kun rette vinkler. De kan konstrueres ved å ta to linjer som er ortogonale og konstruere en tredje linje som går gjennom polene til de to første linjene. Alle trekantene bestående av ett segment fra hver av de tre linjene vil ha kun rette vinkler. Om vi definerer at trekanter må være minste lukkede alternativ kan de i meste fall ha vinkelsum lik tre rette vinkler.

**Definisjon 3.2.14.** *Vinkeloverskuddet til en sfærisk trekant er dens vinkelsum minus to rette vinkler.*

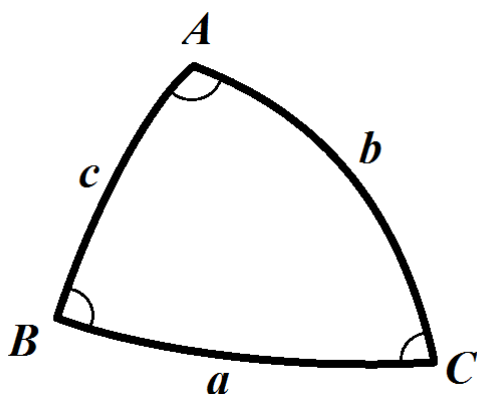
Det kan vises at følgende resultat stemmer:

**Teorem 3.2.15** (AAA-kriteriet). *Vi har to trekanter  $\triangle ABC$  og  $\triangle DEF$ . Dersom  $\angle A \cong \angle D$ ,  $\angle B \cong \angle E$  og  $\angle C \cong \angle F$ , så er  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .*

Ettersom to trekanter med parvis like vinkler er kongruente, må en trekants areal være unikt bestemt av vinklene dens, og det viser seg at arealet mer spesifikt er bestemt av vinkelsummen.

**Teorem 3.2.16.** *Arealet til en sfærisk trekant i et sfærisk plan med Gaussisk krumning 1 er lik dens vinkeloverskudd.*

Merk for eksempel at en trekant med kun rette vinkler dekker en åttendedel av den euklidiske kuleoverflaten, så på en enhetskule der arealet til overflaten er  $4\pi$ , som er åtte rette vinkler, vil både trekantens areal og vinkeloverskudd være én rett vinkel. Dette resultatet tilsier også at det finnes en øvre grense for arealet til en sfærisk trekant. Dette er kanskje ikke spesielt overaskende siden en kuleoverflate har endelig areal. Grensen er avhengig av definisjonen av en trekant.



Figur 22: En sfærisk trekant der  $\angle A$  er motsatt side  $a$ ,  $\angle B$  er motsatt side  $b$  og  $\angle C$  er motsatt side  $c$ .

**Teorem 3.2.17** ([TL14, 33., s. 14 & 34., s. 15]). *Vi har en trekant med sider  $a$ ,  $b$  og  $c$  og med vinkler  $\angle A$ ,  $\angle B$  og  $\angle C$ , slik at  $\angle A$  er vinkelen mellom  $b$  og  $c$  og  $\angle B$  er vinkelen mellom  $a$  og  $c$ . Da er  $a \cong b$  hvis og bare hvis  $\angle A \cong \angle B$ .*

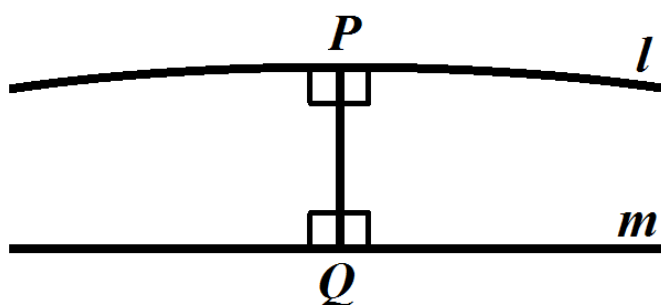
**Teorem 3.2.18** ([TL14, 35., s. 15 & 36., s. 16]). *Vi har en trekant med sider  $a$ ,  $b$  og  $c$  og med vinkler  $\angle A$ ,  $\angle B$  og  $\angle C$ , slik at  $\angle A$  er vinkelen mellom  $b$  og  $c$  og  $\angle B$  er vinkelen mellom  $a$  og  $c$ . Da er  $a > b$  hvis og bare hvis  $\angle A > \angle B$ .*

Et av de viktigste resultatene for å illustrere forskjellen mellom sfærisk og hyperbolsk geometri følger etter neste definisjon.

**Definisjon 3.2.19.** Gitt tre linjer  $l$ ,  $m$  og  $t$  så er  $t$  en fellesnormal for  $l$  og  $m$  dersom  $t$  står normalt både på  $l$  og  $m$ .

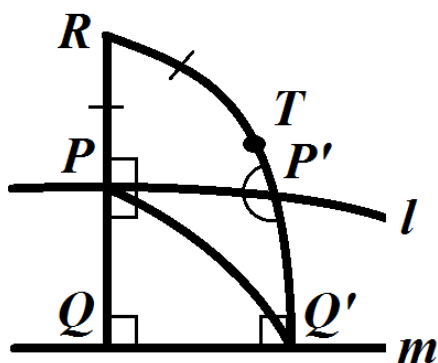
Notasjon:  $l \perp t \perp m$  betyr at  $t$  er en fellesnormal for  $l$  og  $m$ .

**Teorem 3.2.20.** Anta to linjer  $l$  og  $m$  og punkter  $P \in l$ ,  $Q \in m$  slik at  $l \perp \overleftrightarrow{PQ} \perp m$ . Si at man begynner å bevege  $P$  langs  $l$  og  $Q$  fortsetter å være foten til en normal fra  $P$  ned på  $m$ . Da vil avstanden mellom  $l$  og  $m$  langs  $\overleftrightarrow{PQ}$  være avtakende.



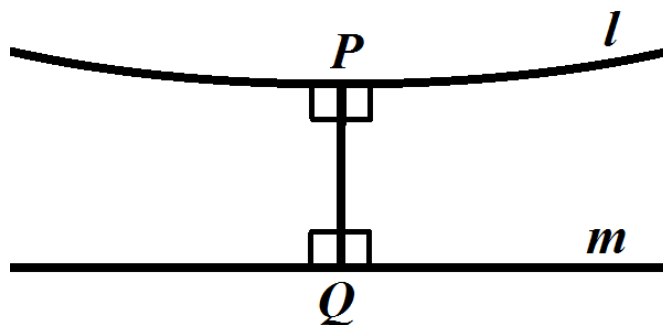
Figur 23: Vi tar utgangspunkt i en situasjon der  $\overleftrightarrow{PQ}$  er en fellesnormal for  $l$  og  $m$ . I sfærisk geometri vil avstanden mellom  $P$  og  $Q$  være avtakende om vi beveger  $P$  langs  $l$  og  $Q$  fortsetter å være foten til en normal fra  $P$  på  $m$ .

*Bevis.* Avstand måles i kortsegmenter og når vi har valget mellom to segmenter velger vi kortsegmentet. La  $P'$  og  $Q'$  være to andre punkter på henholdsvis  $l$  og  $m$  slik at  $\overleftrightarrow{P'Q'} \perp m$ . Trekk en linje gjennom  $P$  og  $Q'$ . Vinklene  $\angle QPQ'$  og  $\angle QQ'P$  deler rette vinkler og er derfor mindre enn rette vinkler. Summen av  $\angle QPQ'$  og  $\angle QQ'P$  er ifølge teorem 3.2.13 større enn en rett vinkel. Vinklene  $\angle P'PQ'$  og  $\angle P'Q'P$  er rette vinkler minus henholdsvis  $\angle QPQ'$  og  $\angle QQ'P$ , så summen av  $\angle P'PQ'$  og  $\angle P'Q'P$  er mindre enn en rett vinkel. For at vinkelsummen i  $\triangle PP'Q'$  skal være større enn to rette vinkler må  $\angle PP'Q$  være butt. La  $R$  være polen til linje  $m$ .  $\angle RP'P$  er spiss siden den er nabovinkel til  $\triangle PP'Q'$  mens  $\angle RPP'$  er rett siden den er nabovinkel til  $\angle QPP'$ . Ifølge teorem 3.2.18 er  $RP' > RP$ . Per definisjon finnes et punkt  $T \in \overleftrightarrow{RP'}$  slik at  $RT \cong RP$ . Vi har at  $TQ' > P'Q'$ , og siden avstanden til en linjes pol er konstant for punkter på linja, så er  $PQ \cong TQ'$  så  $PQ > P'Q'$ .  $\square$



Figur 24: Illustrasjon av beviset for teorem 3.2.20. Siden  $\angle RP'P$  er spiss mens  $\angle RPP'$  er rett så er  $RP' > RP$  og  $P'Q' < PQ$ .

Det siste teoremet er grunnen til at geometrien også kalles elliptisk geometri. Det stammer fra det greske ordet elleipein som betyr å komme til kort. Til forskjell vil avstanden øke i hyperbolsk geometri. Navnet hyperbolsk geometri kommer ifra det greske ordet hyperballein som betyr å overstige.



Figur 25: Vi tar utgangspunkt i en situasjon der  $\overleftrightarrow{PQ}$  står normalt på både  $l$  og  $m$ . I hyperbolsk geometri vil avstanden mellom  $P$  og  $Q$  være økende om vi beveger  $P$  langs  $l$  og  $Q$  fortsetter å være foten til en normal fra  $P$  på  $m$ .

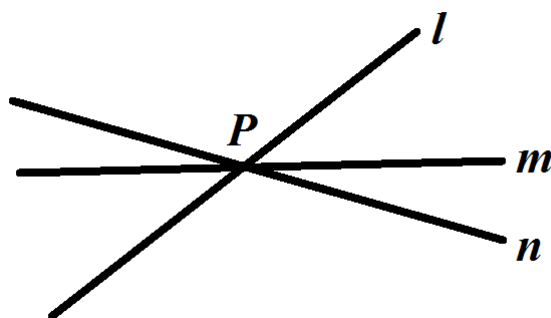
### 3.3 Nøytral geometri

Nøytral geometri går ut på å utforske alle resultatene som kan utledes med utgangspunkt i Hilberts aksiomer for insidens, mellomliggenhet, kongruens og kontinuitet, men uten parallellaksiomet. Med dette utgangspunktet vil nøytral geometri inneholde resultater som euklidsk og hyperbolsk geometri har til felles. Resultater som kan utledes uten aksiomene for mellomliggenhet og der ulik tolkning av kongruensaksiomene ikke medfører avgjørende forskjeller, vil også gjelde for sfærisk geometri. La oss begynne med resultater som kan utledes fra kun insidensaksiomene, og som vil stemme i alle de tre klassiske geometriene.

**Påstand 3.3.1.** *Dersom to distinkte linjer ikke er parallelle, så vil de ha et unikt felles punkt.*

*Bevis.* Om de hadde hatt 0 punkter til felles ville de vært parallelle, som strider med antakelsene. Om de hadde hatt minst to punkter til felles  $P$  og  $Q$  ville ikke aksiom I-1 være oppfylt for  $\overleftrightarrow{PQ}$  ville ikke vært unik, ettersom begge linjene kunne vært  $\overleftrightarrow{PQ}$ .  $\square$

**Definisjon 3.3.2.** *En mengde av minst tre distinkte linjer er konkurrente om det finnes et punkt  $P$  som ligger på alle linjene.*



Figur 26: Punktet  $P$  ligger på alle de tre linjene  $l$ ,  $m$  og  $n$ . Dermed er de tre linjene konkurrente.

**Påstand 3.3.3.** *Det finnes minst tre distinkte linjer som ikke er konkurrente.*

*Bevis.* Fra aksiom I-3 vet vi at det finnes tre distinkte punkter  $P$ ,  $Q$  og  $R$  som ikke er kolineære. Linjene  $\overleftrightarrow{PQ}$ ,  $\overleftrightarrow{PR}$  og  $\overleftrightarrow{QR}$  kan ikke være konkurrente.  $\overleftrightarrow{PQ}$  og  $\overleftrightarrow{PR}$  skjærer hverandre i  $P$ ,  $\overleftrightarrow{PQ}$  og  $\overleftrightarrow{QR}$  i  $Q$  og  $\overleftrightarrow{PR}$  og  $\overleftrightarrow{QR}$  i  $R$ . Vi har allerede antatt at  $P$ ,  $Q$  og  $R$  er distinkte punkter. Om det finnes et fjerde punkt  $S$  som ligger på alle linjene vil hvert par av linjer ha mer enn ett felles punkt, noe som strider med påstand 3.3.1.  $\square$

**Påstand 3.3.4.** For hver linje finnes et punkt som ikke ligger på den.

*Bevis.* Per aksiom I-3 finnes distinkte punkter  $P$ ,  $Q$  og  $R$  som ikke er kolineære. Enhver linje  $l$  kan maksimalt inneholde to av punktene  $P$ ,  $Q$  og  $R$  for ikke å stride med I-3, dermed må det finnes et punkt som ikke ligger på  $l$ .  $\square$

**Påstand 3.3.5.** For hvert punkt finnes minst én linje som den ikke ligger på.

*Bevis.* Det finnes minst tre linjer  $l$ ,  $m$  og  $n$  som ikke er konkurrente. Ethvert punkt  $P$  kan derfor maksimalt ligge på to av disse linjene, så det må finnes en linje som  $P$  ikke ligger på.  $\square$

**Påstand 3.3.6.** For hvert punkt  $P$  finnes minst to distinkte linjer som  $P$  ligger på.

*Bevis.* Anta  $P \in l$ . Per påstand 3.3.4 finnes et punkt  $Q$  som ikke ligger på  $l$ . Per aksiom I-1 finnes en unik linje som inneholder  $P$  og  $Q$ . Linje  $\overleftrightarrow{PQ}$  kan ikke være  $l$  siden  $Q$  ikke ligger på  $l$ , ergo er  $l$  og  $\overleftrightarrow{PQ}$  to distinkte linjer som  $P$  ligger på.  $\square$

Heretter vil resultatene ikke nødvendigvis stemme for sfærisk geometri. Vi går videre til resultater som kan utledes med insidens og mellomliggenhet.

**Påstand 3.3.7.** At  $C \in \overrightarrow{AB}$  og  $C \neq A$  impliserer  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$ .

*Bevis.* Anta et fjerde punkt  $D$ , kolineært med  $A$ ,  $B$  og  $C$ . Anta et punkt  $E$  utenfor  $\overleftrightarrow{AB}$ . Et slikt punkt eksisterer ifølge påstand 3.3.4. Siden  $C \in \overrightarrow{AB}$  er per definisjon ikke  $B * A * C$ , og siden  $\overleftrightarrow{BC}$  og  $\overleftrightarrow{AE}$  kun krysset hverandre i et punkt, her  $A$ , betyr det at  $\overleftrightarrow{AE}$  ikke skjærer  $BC$ . Dermed er  $\overleftrightarrow{AE} | \{B, C\}$  ifølge definisjon 2.3.2. At  $D \in \overrightarrow{AB}$  er ekvivalent med at  $\overleftrightarrow{AE} | \{B, D\}$ , som siden  $\overleftrightarrow{AE} | \{B, C\}$  gir  $\overleftrightarrow{AE} | \{C, D\}$  ifølge aksiom M-4a. Igjen har vi at  $\overleftrightarrow{AE} | \{C, D\}$  er ekvivalent med at  $D \in \overrightarrow{AC}$ .  $\square$

**Påstand 3.3.8.** Om  $A * B * C$  og  $A * C * D$ , må  $B * C * D$  og  $A * B * D$ .

Vi tar her kun beviset for  $B * C * D$ . Metoden for å vise  $A * B * D$  er helt tilsvarende. Viser til definisjonene av stråle og av motsatte stråler.

*Bevis.* Antar et punkt  $E$  utenfor linjen. Dette punktet eksisterer ifølge påstand 3.3.4. Informasjonen som er gitt og definisjonen på å være på samme side gir oss  $\overleftrightarrow{CE} | \{A, B\}$  og  $A | \overleftrightarrow{CE} | D$ , som ifølge påstand 2.3.5 gir  $B | \overleftrightarrow{CE} | D$ . Det følger at er  $B * C * D$ . Dermed er  $\overleftrightarrow{BE} | \{C, D\}$ , og siden  $A | \overleftrightarrow{BE} | C$  følger fra  $A * B * C$ , så er  $A | \overleftrightarrow{BE} | D$ . Dermed er  $A * B * D$ .  $\square$

**Korollar 3.3.9.** Om  $A * B * C$  og  $A * D * B$ , så er  $A * D * C$  og  $C * B * D$ .

*Bevis.* Ifølge aksiom M-3 så er én av påstandene  $C * B * D$ ,  $B * C * D$  og  $B * D * C$  riktige og én av påstandene  $C * A * D$ ,  $A * C * D$  og  $A * D * C$  er riktige. Med gjentatt bruk av påstand 3.3.8 og aksiom M-1 kan de uønskede mulighetene motbevise. Anta  $B * C * D$ . At  $B * C * D$  og  $B * D * A$  impliserer  $B * C * A$ , som strider med antakelsene. Anta  $B * D * C$ . At  $C * D * B$  og  $C * B * A$  impliserer  $D * B * A$ , som strider med antakelsene. Anta  $C * A * D$ . At  $C * B * A$  og  $C * A * D$  impliserer  $B * A * D$ , som strider med antakelsene. Anta  $A * C * D$ . At  $A * C * D$  og  $A * D * B$  impliserer  $A * C * B$ , som strider med antakelsene.  $\square$

**Korollar 3.3.10.** *Om  $A * B * C$  og  $B * C * D$ , må  $A * C * D$  og  $A * B * D$ .*

*Bevis.* Ifølge aksiom M-3 så er én av påstandene  $C * A * D$ ,  $A * C * D$  og  $A * D * C$  riktige og én av påstandene  $B * A * D$ ,  $A * B * D$  og  $A * D * B$  er riktige. Med gjentatt bruk av påstand 3.3.8 eller korollar 3.3.9 og aksiom M-1 kan de uønskede mulighetene motbevise. Anta  $C * A * D$ . At  $D * A * C$  og  $D * C * B$  impliserer  $A * C * B$ , som strider med antakelsene. Anta  $A * D * C$ . At  $A * D * C$  og  $D * C * B$  impliserer  $A * C * B$ , som strider med antakelsene. Anta  $B * A * D$ . At  $D * A * B$  og  $A * B * C$  impliserer  $D * B * C$ , som strider med antakelsene. Anta  $A * D * B$ . At  $A * D * B$  og  $A * B * C$  impliserer  $D * B * C$ , som strider med antakelsene.  $\square$

**Påstand 3.3.11.** *Anta  $A * B * C$ . Da er  $AC$  unionen av segmentene  $AB$  og  $BC$  ( $AC = AB \cup BC$ ), og  $B$  er det eneste punktet  $AB$  og  $BC$  har til felles.*

*Bevis.* Per definisjon består  $AC$  av alle punkter  $D$  slik at  $D = A$ ,  $D = C$  eller  $A * D * C$ . Ifølge korollar 3.3.9 vil alle punkter  $D$  slik at  $A * D * B$  eller  $B * D * C$ , også være slik at  $A * D * C$ . Unionen  $AB \cup BC$  inneholder også endepunktene  $A$  og  $C$  som er med i  $AC$ , samt  $B$  som er med i  $AC$ . Så  $D \in AB \cup BC$  impliserer  $D \in AC$ . Vil så vise at  $D \in AC$  impliserer  $D \in AB \cup BC$ . Om  $D = A$  eller  $D = C$  er  $D$  henholdsvis med i  $AB$  eller  $BC$ . Anta for motsigelse at  $A * D * C$ , men hverken  $A * D * B$ ,  $B * D * C$  eller  $D = B$ . Ifølge aksiom M-3 må enten  $A * B * D$  eller  $B * A * D$  stemme og enten  $C * B * D$  eller  $B * C * D$  stemme. At  $B * A * D$  og  $A * D * C$  impliserer ifølge korollar 3.3.10  $B * A * C$  som strider med antakelsene. At  $A * B * C$  og  $B * C * D$  impliserer ifølge korollar 3.3.10 at  $A * C * D$  som strider med antakelsene. Anta at både  $A * B * D$  og  $C * B * D$  stemmer. Ifølge påstand 3.3.8 vil  $A * B * D$  og  $A * D * C$  implisere  $B * D * C$  som strider med antakelsene. Dermed vil  $D \in AC$  implisere  $D \in AB \cup BC$ . Trenger tilslutt å vise at  $B$  er eneste punkt  $AB$  og  $BC$  har til felles. At de har  $B$  til felles er gitt fra definisjonene. Vet fra  $A * B * C$  at  $A \notin BC$  og  $B \notin AC$ . Anta for motsigelse  $D \neq B$ ,  $A * D * B$  og  $B * D * C$ . At  $A * D * B$  og  $A * B * C$  impliserer ifølge påstand 3.3.8 at  $D * B * C$  som strider med antakelsene.  $\square$

**Påstand 3.3.12.** *Om  $A * B * C$ ,  $D * E * F$ ,  $AC \cong DE$  og  $AC \cong DF$ , så er  $BC \cong EF$ .*



*Bevis.* Ifølge aksiom K-1 finnes et punkt  $G$  på  $\overrightarrow{EF}$  slik at  $BC \cong EG$ . Siden  $D * E * G$  er ifølge aksiom K-3  $AC \cong DG$  det følger at  $G = F$ , så  $BC \cong EF$ .  $\square$

**Påstand 3.3.13.** *Om  $AC \cong DF$  vil det for ethvert punkt  $B$  mellom  $A$  og  $C$  finnes et punkt  $E$  mellom  $D$  og  $F$  slik at  $AB \cong DE$ .*

*Bevis.* Ifølge aksiom K-1 finnes et unikt punkt  $E$  på  $\overrightarrow{DF}$  slik at  $AB \cong DE$ . Anta at ikke  $D * E * F$ . Siden  $E \in \overrightarrow{DF}$  må i så fall  $DE \cong F$  eller  $DF > DE$ . Derimot vil ved kongruens disse mulighetene medføre henholdsvis  $B = C$  eller  $A * C * B$ , som strider med antakelsen om at  $A * B * C$ .  $\square$

**Påstand 3.3.14.** a) *Om  $AB < CD$  og  $CD \cong EF$ , så er  $AB < EF$ .*

b) *Om  $AB > CD$  og  $CD \cong EF$ , så er  $AB > EF$ .*

c) *Om  $AB < CD$  og  $CD < EF$ , så er  $AB < EF$ .*

d) *Én av påstandene  $AB < CD$ ,  $AB \cong CD$  og  $AB > CD$  stemmer.*

*Bevis.* a) Om  $AB < CD$  så finnes et punkt  $G$  mellom  $C$  og  $D$  slik at  $AB \cong DG$ . Ifølge aksiom K-1 finnes et punkt  $H \in \overrightarrow{EF}$  slik at  $AB \cong EH$ . Om  $H = F$  er  $AB \cong EF$  som ifølge aksiom K-2 medfører at  $AB \cong CD$ , som strider med antakelsene. Anta  $E * F * H$ . Siden  $E * F * H$ ,  $EH \cong CG$  sier påstand 3.3.13 at det må finnes en  $I$  mellom  $C$  og  $G$  slik at  $CI \cong EF$ . Men ifølge aksiom K-2 er  $CI \cong CD$  og ifølge korollar 3.3.9 medfører  $C * G * D$  og  $C * I * G$  at  $C * I * D$  og disse påstandene kan ikke begge stemme. Eneste mulighet er at  $E * H * F$  så  $AB < EF$ .

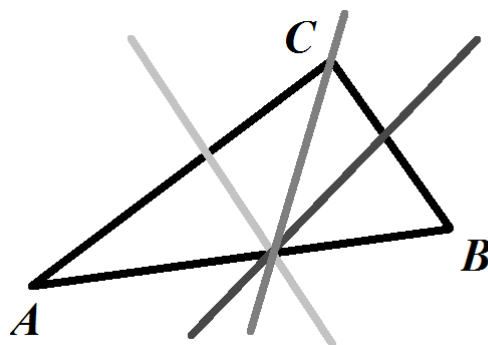
b) Tilsvarende bevis som for a).

c) Det finnes et punkt  $G$  mellom  $C$  og  $D$  slik at  $AB \cong CG$  og et punkt  $H$  mellom  $E$  og  $F$  slik at  $CD \cong EH$ . Ifølge påstand 3.3.13 finnes et punkt  $I$  mellom  $E$  og  $H$  slik at  $EI \cong CG \cong AB$ . Ifølge korollar 3.3.9 er  $E * I * F$ . Dermed er per definisjon  $AB < EF$ .

d) Ifølge K-1 finnes et punkt  $E \in \overrightarrow{CD}$  slik at  $DE \cong AB$ . Hvis  $C * E * D$  er per definisjon  $AB < CD$ . Hvis  $E = D$  er  $AB \cong CD$  og hvis  $C * D * E$  så er  $CE > CD$  som ifølge b) medfører at  $AB > CD$ . Dermed må en av påstandene stemme, og siden umulig mer enn én av påstandene  $C * D * E$ ,  $C = E$  og  $C * E * D$  kan stemme, vil nøyaktig én av påstandene stemme.  $\square$

**Teorem 3.3.15** ([Gre93, Pasch's theorem, s. 80]). *Om  $A$ ,  $B$  og  $C$  er distinkte, ikke-kolineære punkter, og  $l$  er en linje som skjærer  $AB$  mellom  $A$  og  $B$ , så må  $l$  skjære  $AC$  eller  $BC$ . Linje  $l$  vil ikke skjære både  $AC$  og  $BC$  med mindre  $C \in l$ .*

*Bevis.* Siden  $l$  skjærer  $AB$  i et punkt  $P$  slik at  $A * P * B$ , er per definisjon  $A|l|B$ . Siden det kun er to halvplan, har vi tre alternativer for  $C$  sin plassering, nemlig  $C \in l$ ,  $l|\{A, C\}$  og  $l|\{B, C\}$ . Antar vi  $C \in l$  så skjærer  $l$  både  $AB$  og  $AC$ . Antar vi  $l|\{A, C\}$  så er det per definisjon ikke et punkt  $Q \in l$  slik at  $A * Q * C$ , og  $l$  skjærer ikke  $AC$  i  $C$  eller  $A$ . Derimot vil  $A|l|B$  og  $l|\{A, C\}$  implisere  $B|l|C$ , så det finnes et punkt  $R \in l$  slik at  $B * R * C$ . Dermed vil  $l$  skjære  $BC$ . Med tilsvarende argumenter vil  $l|\{B, C\}$  medføre at  $l$  skjærer  $AC$  og ikke  $BC$ .  $\square$



Figur 27: En linje som skjærer segment  $AB$  i  $\triangle ABC$  må også skjære segment  $AC$  (lysest grå),  $BC$  (mørkest grå) eller begge dersom den inneholder punkt  $C$ .

**Påstand 3.3.16.** Gitt en vinkel  $\angle BAC$  og et punkt  $D \in \overleftrightarrow{BC}$  som er ulik  $B$  og  $C$ , så er  $D$  et indre punkt hvis og bare hvis  $B * D * C$

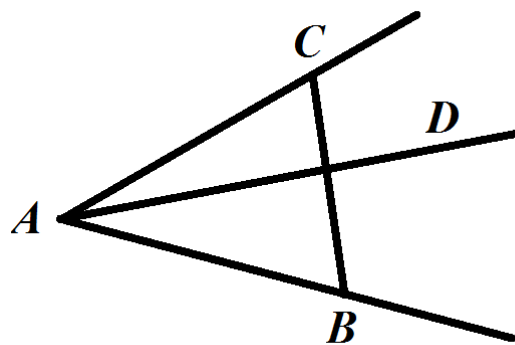
*Bevis.* Å være et indre punkt er ekvivalent med  $\overleftrightarrow{AC}|\{B, D\}$  og  $\overleftrightarrow{AB}|\{C, D\}$ . Siden  $B, C$  og  $D$  er kolineære, medfører dette at hverken  $B * C * D$  eller  $C * B * D$ , så ifølge aksiom M-3 blir det ekvivalent med at  $B * D * C$ .  $\square$

**Påstand 3.3.17.** Gitt en vinkel  $\angle BAC$  og et indre punkt  $D$ , så er alle punkter på  $\overrightarrow{AD}$  utenom  $A$  selv indre punkter.

*Bevis.* Vi har et punkt  $E \in \overrightarrow{AD}$ , der  $E \neq A$ . Anta for motsigelse at  $E|\overleftrightarrow{AB}|C$ . Siden  $\overleftrightarrow{AB}|\{C, D\}$  er ifølge korollar 2.3.6  $D|\overleftrightarrow{AB}|E$ . Dermed må det finnes et punkt  $F \in \overleftrightarrow{AB}$  slik at  $D * F * E$ . I så fall må  $F$  være kolinear med  $A, D$  og  $E$ , og linjene  $\overleftrightarrow{AB}$  og  $\overleftrightarrow{AD}$  vil skjære hverandre både i  $A$  og  $F$ , noe som strider med påstand 3.3.1. Med samme argumentasjon kan ikke  $E|\overleftrightarrow{AB}|B$ , så  $E$  må være et indre punkt.  $\square$

**Teorem 3.3.18** ([Gre93, Crossbar theorem, s. 82]). Dersom  $\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AD}|\overrightarrow{AC}$ , så vil  $\overrightarrow{AD}$  skjære segmentet  $BD$  i et punkt mellom  $B$  og  $D$ .

*Bevis.* Ifølge påstand 3.3.17 er alle punkter på  $\overrightarrow{AD}$  indre punkter for  $\angle BAC$ , og ifølge påstand 3.3.16 er et punkt på  $\overleftrightarrow{BC}$  kun et indre punkt dersom det er mellom  $B$  og  $C$ , så dersom linjene  $\overleftrightarrow{BC}$  og  $\overleftrightarrow{AD}$  skjærer hverandre, så er det på segment  $BC$ . Anta at de er parallelle. I så fall vil alle punkter på  $\overrightarrow{AD}$  utenom  $A$  også være indre punkter for  $\triangle ABC$ , for om det fantes indre og ytre punkter uten et punkt på randen, ville ikke Dedekinds aksiom vært oppfylt. At det kun er indre punkter vil motsi aksiom K-1, for gitt et segment  $A'B'$  større enn den største siden i trekanten, vil det ikke finnes noe segment på strålen  $\overrightarrow{AD}$  som er kongruent med segmentet  $A'B'$ . At et slik segment finnes kan vises ved å bruke aksiom M-2 på linjen som inneholder den største siden.  $\square$

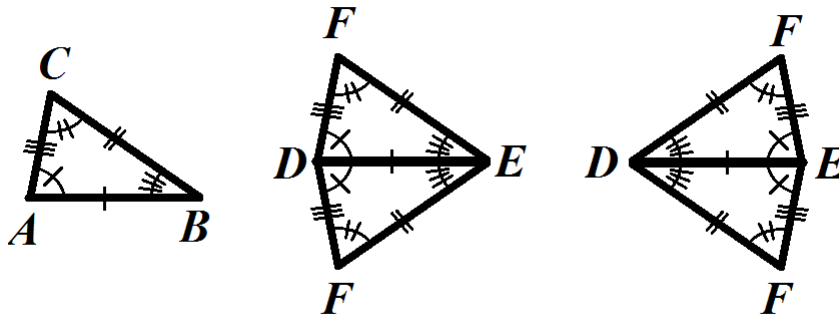


Figur 28: En stråle som ligger mellom to andre stråler, må skjære segmentet mellom et punkt fra hver av de to strålene.

**Påstand 3.3.19.** Gitt en trekant  $\triangle ABC$  og et segment  $DE \cong AB$ , finnes det på hver side av  $\overleftrightarrow{DE}$  et unikt punkt  $F$  slik at  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

*Bevis.* Ifølge aksiom K-4 finnes det på hver side av  $\overleftrightarrow{DE}$  en unik stråle med  $D$  som toppunkt som danner en vinkel kongruent med  $\angle BAC$ . Ifølge aksiom K-1 finnes det på hver av disse strålene et unikt punkt  $F$  slik at  $DF \cong AC$ . Dermed har vi SAS-kongruens, og ifølge aksiom K-6 er  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .  $\square$

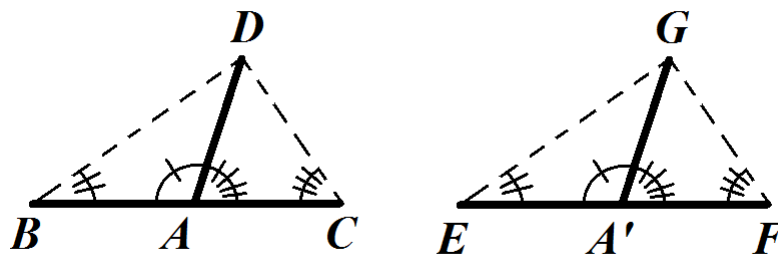
Merk at når vi skriver  $\triangle ABC \cong DEF$  impliserer rekkefølgene til bokstavene hvilke segment og vinkler som er kongruente. Det vil si at  $AB \cong DE$ ,  $AC \cong DF$ ,  $\angle BAC \cong \angle EDF$  osv. Det er som regel to punkter som danner trekanten kongruent med  $ABC$ , men for den andre vil  $\angle BAC \cong \angle DEF$  og  $AC \cong EF$ , så med vår skrivemåte ville denne trekantens kongruens skrives  $\triangle ABC \cong \triangle EDF$ .



Figur 29: I midten: Punktene F slik at  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ . Til høyre: Punktene F slik at  $\triangle ABC \cong \triangle EDF$ .

**Påstand 3.3.20.** Om to vinkler er kongruente, så er deres supplementvinkler kongruente.

*Bevis.* Vi har kongruente vinkler  $\angle BAD$  og  $\angle B'A'D'$ , med supplementvinkler henholdsvis  $\angle CAD$  og  $\angle C'A'D'$ . Per definisjon av supplementvinkler er  $B * A * C$  og  $B' * A' * C'$ . Finn punktene  $E \in \overrightarrow{A'B'}$ ,  $F \in \overrightarrow{A'C'}$  og  $G \in \overrightarrow{A'D'}$  slik at  $AB \cong A'E$ ,  $AC \cong A'F$  og  $AD \cong A'G$  (se figur 30). Disse punktene finnes ifølge aksiom K-1. Ved bruk av aksiom K-6 er  $\triangle BAD \cong \triangle EA'G$ , som blant annet medfører  $\angle B \cong \angle E$  og  $BD \cong EG$ . Dermed kan vi bruke K-6 igjen og se at  $\triangle BCD \cong \triangle EFG$ ,  $CD \cong FG$  og  $\angle C \cong \angle F$ . Bruker K-6 en tredje gang for å finne at  $\triangle ACD \cong \triangle A'FG$  og  $\angle CAD \cong \angle FA'G$ . Siden strålene  $\overrightarrow{A'F}$  og  $\overrightarrow{A'G}$  ifølge påstand 3.3.7 er henholdsvis like  $\overrightarrow{A'C'}$  og  $\overrightarrow{A'D'}$ , så er beviset fullført.  $\square$



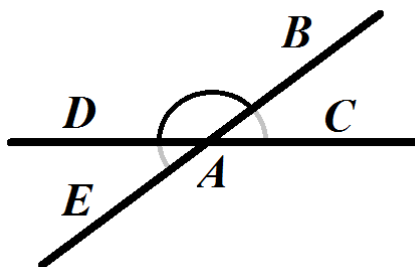
Figur 30: Med gjentatt bruk av SAS-kongruens kan det vises at det at  $\angle BAD \cong \angle EA'G$  medfører at  $\angle CAD \cong \angle FA'G$ .

**Korollar 3.3.21.** Om en vinkel er kongruent med en rett vinkel, så er den selv en rett vinkel.

*Bevis.* Anta en rett vinkel  $\angle BAD$  med supplement  $\angle CAD$ , og en vinkel  $\angle B'A'D'$  som er kongruent med  $\angle BAD$  og har supplementvinkel  $\angle C'A'D'$ . Per antakelse er  $\angle B'A'D' \cong \angle BAD$ , per definisjon er  $\angle BAD \cong \angle CAD$ , og ifølge påstand 3.3.20 er  $\angle CAD \cong \angle C'A'D'$ . Ifølge aksiom K-5 er vinkelkongruens en ekvivalensrelasjon, så det følger at  $\angle B'A'D' \cong \angle C'A'D'$ .  $\square$

**Korollar 3.3.22.** *Om to vinkler er toppvinkler, så er de kongruente.*

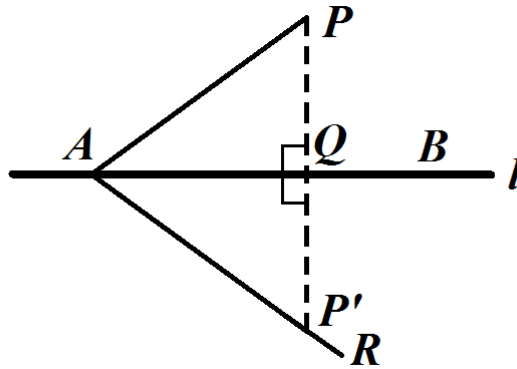
*Bevis.* To toppvinkler  $\angle BAC$  og  $\angle DAE$  er begge supplementvinkler til  $\angle BAD$ . Vinkel  $\angle BAD$  er selvfølgelig kongruent med seg selv, og ifølge påstand 3.3.20 er dens supplementer kongruente med hverandre.  $\square$



Figur 31: To toppvinkler  $\angle BAC$  og  $\angle DAE$  (grå) er begge supplementvinkler til  $\angle BAD$  og derfor kongruente med hverandre.

**Påstand 3.3.23.** *For enhver linje  $l$  og ethvert punkt  $P$ , finnes en linje gjennom  $P$  som står normalt på  $l$ .*

*Bevis.* Anta først  $P \notin l$  og finn to punkter  $A, B \in l$ . Disse finnes ifølge aksiom I-2. La  $\overrightarrow{AR}$  være strålen på andre siden av  $l$  slik at  $\angle BAP \cong \angle BAR$ , og  $P'$  være punktet på denne strålen slik at  $AP \cong AP'$  (ved bruk av aksiomene K-4 og K-1). La  $Q$  være skjæringspunktet mellom  $l$  og  $\overleftrightarrow{PP'}$ . Vil vise at  $l \perp \overleftrightarrow{PP'}$ . Anta  $Q = A$ . Da har vi to motsatte stråler og  $\angle PQB$  og  $\angle P'QB$  er kongruente supplementvinkler og dermed rette. Anta  $Q \neq A$ . Ifølge aksiom K-6 er  $\triangle AQP \cong \triangle AQP'$  og  $\angle PQA \cong \angle P'QA$ . Igjen har vi kongruente nabovinkler, og dermed rette vinkler mellom  $l$  og  $\overleftrightarrow{PP'}$ . Anta til slutt  $P \in l$ . La  $R$  være et punkt utenfor  $l$  og  $T$  være foten til dens normal, konstruert som tidligere i beviset. Da har vi rette vinkler. Ifølge aksiom K-4 kan vi konstruere en kongruent vinkel på hver side av  $l$  med  $P$  som toppunkt. Ifølge korollar 3.3.21 er en vinkel kongruent med en rett vinkel selv rett. De to strålene blir motstående og danner en linje gjennom  $P$  som står normalt på  $l$ .  $\square$



Figur 32: For et punkt  $P \notin l$  finner vi punktet  $P'$  på andre siden av  $l$  og argumenterer for at linjen mellom de to punktene danner rette vinkler med linje  $l$ .

Av dette resultatet følger flere resultater:

- Korollar 3.3.24.** a) For enhver linje  $l$  og ethvert punkt  $P \notin l$  finnes en normal fra  $P$  på  $l$ .
- b) For enhver linje  $l$  og ethvert punkt  $P \notin l$  finnes et punkt  $P'$  slik at  $l$  er midtnormalen mellom  $P$  og  $P'$ .
- c) For ethvert par av distinkte punkter  $P$  og  $P'$  finnes en linje  $l$  som er midtnormalen mellom dem.

*Bevis.* Normalen kan konstrueres som vist i beviset for påstand 3.3.23. Fra situasjonen i beviset for påstand 3.3.23 (se figur 32), kan vi vise med SAS-kongruens at  $PQ \cong P'Q$ , så  $l$  er midtnormalen mellom  $P$  og  $P'$ . Dermed er a) og b) bevist. For å vise c) må det kun vises at det finnes et midtpunkt  $M$ , for ifølge påstand 3.3.23 vil det i så fall finnes en linje  $l$  gjennom  $M$  som står normalt på  $\overleftrightarrow{PP'}$ . Midtpunktets eksistens vil vises etter at vi i neste seksjon går inn på SSA-kriteriet for kongruens.  $\square$

### 3.3.1 Kriterier for kongruente trekanter

Vi skal nå studere nærmere hvilke kriterier for parvis kongruens mellom segmenter og vinkler som tilsier at to trekanter er kongruente i nøytral geometri, slik at resten av segmentene og vinklene også er parvis kongruente.

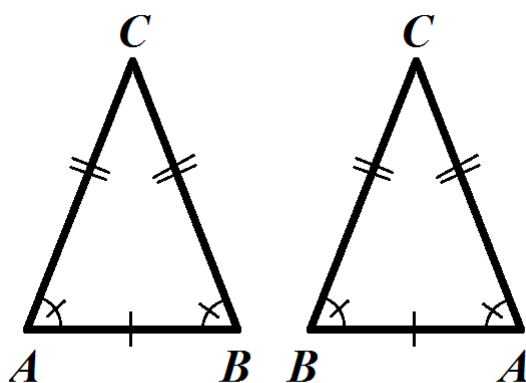
**Teorem 3.3.25** (ASA-kriteriet). Gitt trekanter  $\triangle ABC$  og  $\triangle DEF$ , der  $\angle A \cong \angle D$ ,  $\angle C \cong \angle F$  og  $AC \cong DF$ , så er  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

*Bevis.* Ifølge aksiom K-1 finnes et punkt  $G \in \overrightarrow{DE}$  slik at  $AB \cong DG$ . Ifølge aksiom K-6

er  $\triangle ABC \cong \triangle DGF$  og  $\angle ACB \cong \angle DFG$ , men  $\angle ACB \cong \angle DFE$  så ifølge aksiom K-5 er  $\angle DFE \cong \angle DFG$ . Siden  $E$  og  $G$  er på samme side av  $\overleftrightarrow{DF}$  er vinklene ikke bare kongruente, men like. Dermed må  $\overrightarrow{FE}$  være lik  $\overrightarrow{FG}$ . Punkt  $E$  og  $G$  ligger begge både på  $\overrightarrow{FE}$  og  $\overrightarrow{DE}$ , og ifølge påstand 3.3.1 har linjene kun ett skjæringspunkt, så  $G = E$  og beviset er fullført.  $\square$

**Påstand 3.3.26.** *Gitt en trekant  $\triangle ABC$  er  $\angle A \cong \angle B$  hvis og bare hvis  $AC \cong BC$ .*

*Bevis.* Anta først at  $\angle A \cong \angle B$ . Ifølge teorem 3.3.25 blir  $\triangle ABC \cong \triangle BAC$  så  $BC \cong AC$ . Anta så at  $BC \cong AC$ . Ifølge aksiom K-6 er  $\triangle ACB \cong \triangle BCA$  så  $\angle A \cong \angle B$ .  $\square$



Figur 33: Hvis  $\angle A \cong \angle B$  så har trekantene  $\triangle ABC$  og  $\triangle BAC$  to kongruente vinkler. Siden  $AB = BA$  er også sidene mellom vinklene kongruente, så ifølge ASA-kriteriet er trekantene kongruente.

**Påstand 3.3.27.** *Vi har punkter  $A, P$  og  $Q$  slik at  $AP \cong AQ$ . Da ligger  $A$  på midtnormalen mellom  $P$  og  $Q$ .*

*Bevis.* La  $l$  være midtnormalen mellom  $P$  og  $Q$  og  $R$  midtpunktet. I  $\triangle APQ$  er  $AP \cong AQ$ , så ifølge påstand 3.3.26 er  $\angle QPA \cong \angle PQA$ . Per definisjon er  $PR \cong QR$ , så ifølge aksiom K-6 er  $\triangle APR \cong \triangle AQR$  og  $\angle PRA \cong \angle QRA$ . Per definisjon er de rette vinkler. Dermed ligger  $A$  på en linje gjennom midtpunktet som står normalt på  $\overleftrightarrow{PQ}$ , og per definisjon er linjen midtnormalen mellom  $P$  og  $Q$ .  $\square$

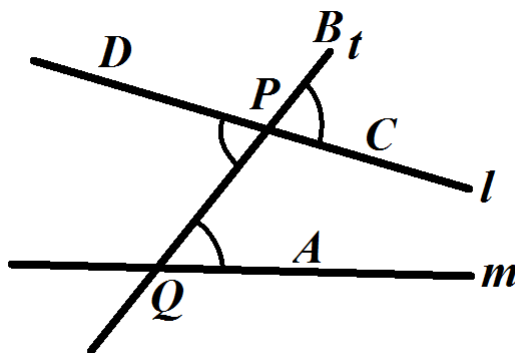
**Teorem 3.3.28** (SSS-kriteriet). *Gitt trekanter  $\triangle ABC$  og  $\triangle DEF$  der  $AB \cong DE$ ,  $AC \cong DF$  og  $BC \cong EF$ , så er  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .*

*Bevis.* Ifølge aksiom K-4 kan vi på samme side av  $\overleftrightarrow{DE}$  som  $F$  konstruere stråler  $\overrightarrow{DG}$  og  $\overrightarrow{EH}$  slik at  $\angle BAC \cong \angle EDG$  og  $\angle ABC \cong \angle DEH$ . La punkt  $I$  være skjæringspunktet mellom strålene. Ifølge teorem 3.3.25 er  $\triangle ABC \cong \triangle DEI$ . Anta for motsigelse  $F \neq I$ . Siden både  $D$  og  $E$  er like langt fra  $F$  som  $I$  så er de to distinkte punkter på midtnormalen mellom  $F$  og  $I$  og  $\overleftrightarrow{DE}$  må være midtnormalen mellom  $F$  og  $I$ , men i så fall må  $F$  og  $I$  være på motsatt side av  $\overleftrightarrow{DE}$ , noe som strider med antakelsene. Dermed må  $F = I$ , så  $\triangle DEF = \triangle DEI \cong \triangle ABC$ .  $\square$

Også AAS-kriteriet kan brukes for å vise at to trekanter er kongruente, men for å bevise dette trenger vi et resultat for eksterne vinkler (som vi også må definere). Før det igjen trenger vi å bevise deler av Euklids parallellspostulat utifra Hilberts aksiomsystem.

**Definisjon 3.3.29.** Anta at en linje  $t$  skjærer to andre linjer  $l$  og  $m$  i henholdsvis punktene  $P$  og  $Q$ . Det finnes to typer sammenfallende vinkler:

- Vinkler  $\angle PQA$  og  $\angle BPC$  der  $A \in m$ ,  $C \in l$ ,  $Q * P * B$  og  $t \setminus \{A, C\}$ .
- Vinkler  $\angle PQA$  og  $\angle QPD$  der  $A \in m$ ,  $D \in l$  og  $A|t|D$ .



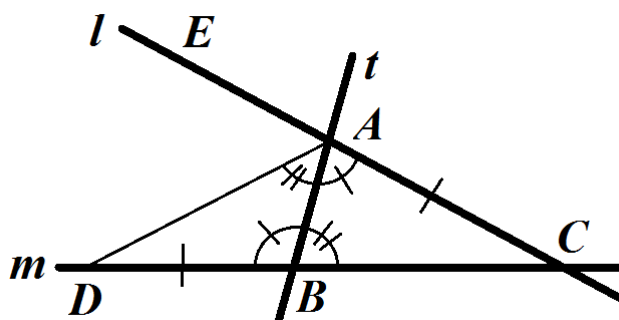
Figur 34: Vinklene  $\angle PQA$  og  $\angle BPC$  er sammenfallende vinkler av type a, mens  $\angle PQA$  og  $\angle QPD$  er sammenfallende vinkler av type b.

**Påstand 3.3.30.** Vi har to distinkte linjer  $l$  og  $m$ . Hvis det finnes en tredje linje  $t$  som skjærer dem begge slik at to sammenfallende vinkler er kongruente, så er  $l$  og  $m$  parallelle.

*Bevis.* La skjæringspunktet mellom  $l$  og  $t$  være  $A$  og skjæringspunktet mellom  $m$  og  $t$  være  $B$ . Anta for motsigelse at  $l$  og  $m$  skjærer hverandre i et punkt  $C$ . Ifølge aksiom K-1 finnes et punkt  $D$  på den motsatte strålen av  $\overrightarrow{BC}$  slik at  $AC \cong BD$ . La  $E$  være et punkt slik at  $\overrightarrow{AC}$  og  $\overrightarrow{AE}$  er motstående. Hvis det kongruente paret av sammenfallende vinkler er av type a, så er også den ene kongruent med den andres toppvinkel, og den er



sammenfallende av type b med denne toppvinkelen. Vinklene  $\angle BAC$  og  $\angle ABD$  er sammenfallende av type b og dermed kongruente, så ifølge aksiom K-6 er  $\triangle BAC \cong \triangle ABD$ . Det gir oss at  $\angle BAD \cong \angle ABC$ , men  $\angle ABC \cong \angle BAE$  siden de er sammenfallende. Dermed er ifølge påstand 3.3.7  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$ , så  $D \in l$ . Dette strider med påstand 3.3.1, så vi må konkludere med at  $l$  og  $m$  ikke kan skjære hverandre.  $\square$



Figur 35: Om vi antar at  $l$  og  $m$  ikke er parallelle når sammenfallende vinkler er kongruente, men skjærer hverandre i  $C$ , ender vi opp med at de også skjærer hverandre i  $D$ , og dermed har ett skjæringspunkt på hver side av  $t$ .

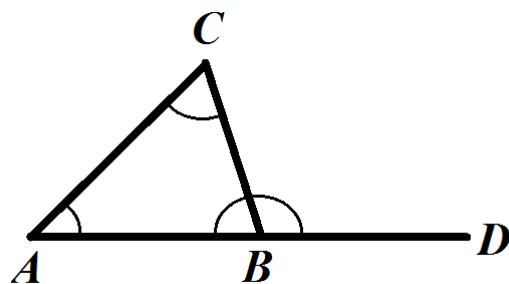
Merk at dette resultatet ikke holder i sfærisk geometri, der en linje ikke deler planet i to halvplan. AAS-kriteriet som bygger på dette resultatet holder heller ikke i sfærisk geometri. Som er spesialtilfelle til påstanden har vi følgende korollar:

**Korollar 3.3.31.** *Anta to distinkte linjer  $l$  og  $m$ . Om de har en fellesnormal  $t$  så er  $l$  og  $m$  parallelle.*

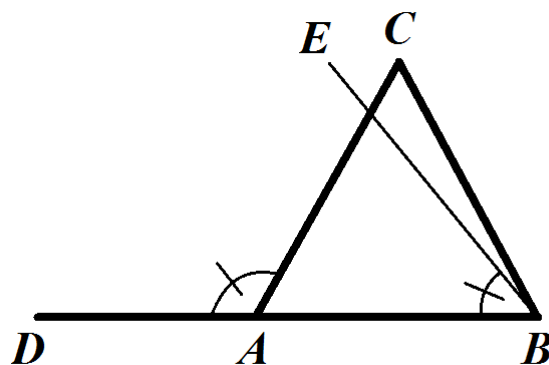
**Definisjon 3.3.32.** *En ekstern vinkel til en trekant er supplementvinkelen til en av vinklene i trekanten. De fjerne vinklene til en ekstern vinkel, er vinklene i trekanten som ikke er den eksterne vinkelens supplementvinkel.*

**Påstand 3.3.33.** *En ekstern vinkel til en trekant er større enn hver av sine fjerne vinkler.*

*Bevis.* Vi har  $\triangle ABC$  med en ekstern vinkel  $\angle CAD$ . Anta først at  $\angle ABC \cong \angle CAD$ . I så fall er  $\angle ABC$  og  $\angle CAD$  kongruente, sammenfallende vinkler, og  $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{BC}$ , som strider med antakelsene. Anta så at  $\angle ABC > \angle CAD$ . I så fall finnes et punkt  $E$  slik at  $\angle ABE \cong \angle CAD$ , og  $\overrightarrow{BA} | \overrightarrow{BE} | \overrightarrow{BC}$ . Igjen får vi kongruente, sammenfallende vinkler. Ifølge påstand 3.3.30 er  $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{BE}$ , men ifølge teorem 3.3.18 skjærer  $\overrightarrow{BE}$  segmentet  $AC$  mellom  $A$  og  $C$ , så vi har en motsigelse. Bevis for at  $\angle ACB$  ikke er kongruent med eller større enn  $\angle CAD$  blir tilsvarende.  $\square$



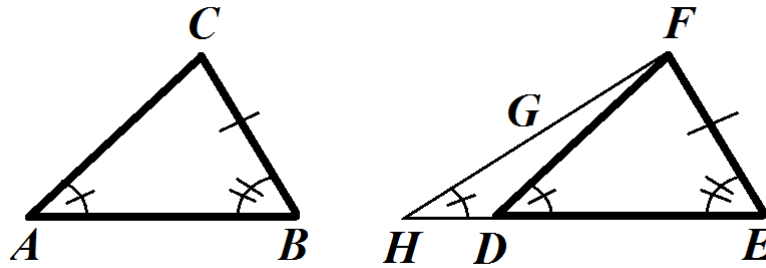
Figur 36: Vinkel  $\angle CBD$  er en ekstern vinkel, med  $\angle ABC$  som supplementvinkel og  $\angle BAC$  og  $\angle ACB$  som fjerne vinkler.



Figur 37: Hvis en fjern vinkel er større enn den eksterne vinkelen, får vi en stråle som på den ene side må skjære  $AC$  og på den andre side være parallell med  $\overleftrightarrow{AC}$ .

**Påstand 3.3.34 (AAS).** Gitt trekanter  $\triangle ABC$  og  $\triangle DEF$  der  $\angle A \cong \angle D$ ,  $\angle B \cong \angle E$  og  $BC \cong EF$ , så er  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

*Bevis.* Ifølge aksiom K-4 kan det konstrueres en stråle på samme side av  $\overleftrightarrow{EF}$  som  $D$  slik at  $\angle BCA \cong \angle EFG$ . La  $H$  være skjæringspunktet mellom  $\overleftrightarrow{DE}$  og  $\overleftrightarrow{FG}$ . Ifølge teorem 3.3.25 er  $\triangle ABC \cong \triangle HEF$  og  $\angle EHF \cong \angle BAC$ . Anta for motsigelse  $H \neq D$ . I så fall er ifølge aksiom M-3 enten  $D * H * E$  eller  $H * D * E$ . I så fall finnes en trekant  $\triangle DHF$  som enten har  $\angle EDF$  som ekstern vinkel og  $\angle EHF$  som fjern vinkel til  $\angle EDF$  eller omvendt. Ifølge aksiom K-5 er de to vinklene kongruente siden begge er kongruente med  $\angle BAC$ , men ifølge påstand 3.3.33 kan de ikke være kongruente. Dermed har vi en motsigelse, og må konkludere med at  $D = H$  og  $\triangle DEF = \triangle HEF \cong \triangle ABC$ .  $\square$



Figur 38: Hvis vi antar at to trekanter ikke er kongruente når to par vinkler er kongruente og en av sidene som ikke ligger mellom disse vinklene er kongruente, får vi at det må finnes en trekant der en ekstern vinkel og en av dens fjerne vinkler er kongruente.

SSA-kriteriet for kongruens vil ikke generelt stemme, men kombinert med noen ekstra betingelser kan vi komme frem til en påstand som stemmer.

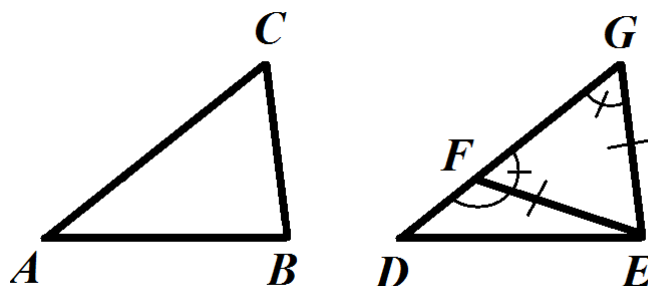
**Påstand 3.3.35.** For enhver trekant  $\triangle ABC$ , er  $\angle A > \angle B$  hvis og bare hvis  $BC > AC$ .

*Bevis.* Anta for motsigelse  $\angle A > \angle B$  og  $AC > BC$ . Merk at vi ikke trenger å se på antakelsene der enten sidene eller vinklene er kongruente siden påstand 3.3.26 sier at den kun stemmer om  $\angle A \cong \angle B$ . Per definisjon finnes et punkt  $D$  mellom  $C$  og  $A$  slik at  $CD \cong CB$ . Siden  $\overrightarrow{BA} | \overrightarrow{BD} | \overrightarrow{BC}$  er per definisjon  $\angle CBD < \angle CBA$ , og per antakelse er  $\angle CBA < \angle BAC$ , så  $\angle CBD < \angle BAC = \angle BAD$ . Ifølge påstand 3.3.26 er  $\angle BDC \cong \angle DBC$ , så  $\angle BDC < \angle BAD$ . Derimot er  $\angle BDC$  en ekstern vinkel for  $\triangle ABD$  og  $\angle BAD$  er en av dens fjerne vinkler, så ifølge påstand 3.3.33 er  $\angle BDC > \angle BAD$ . Dermed kan ikke  $\angle A > \angle B$  og  $AC > BC$  begge stemme.  $\square$

**Teorem 3.3.36** (SSA-kriteriet). Om vi har trekanter  $\triangle ABC$  og  $\triangle DEF$  slik at  $\angle A \cong \angle D$ ,  $AB \cong DE$ ,  $BC \cong EF$  og  $AB$  er mindre enn eller kongruent med  $BC$ , så er  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

*Bevis.* Ifølge aksiom K-1 kan vi finne et punkt  $G \in \overrightarrow{DF}$  slik at  $AC \cong DG$ . Ifølge aksiom K-6 er  $\triangle ABC \cong \triangle DEG$ . Anta for motsigelse at  $F \neq G$ . Studer  $\triangle EFG$ . Ifølge påstand 3.3.26 er  $\angle EFG \cong \angle FEG$ . Vi vil nå bruke resultater som skal bevises senere, nemlig at summen av to vinkler i en trekant er mindre enn summen av to rette vinkler og at summen av vinklene i en trekant er mindre eller lik to rette vinkler. Siden  $\angle EFG \cong \angle FEG$  må begge vinklene være mindre enn rette vinkler og supplementvinkler deres må være større enn rette vinkler. Anta  $D * F * G$  (antakelsen  $D * G * F$  gir helt tilsvarende utledning). Siden  $\angle EFD$  er større enn en rett vinkel må den være største vinkel i  $\triangle EFD$ , for ellers ville vinkelsummen til  $\triangle EFD$  være større enn to rette vinkler. Etersom  $\angle EFD > \angle D$  sier

påstand 3.3.35 at  $DE > EF$ , der  $EF \cong EG$ , så  $DE > EG$ . Dette medfører at  $AB > BC$  som strider med antakelsene. Dermed må  $F = G$  og  $\triangle DEF = \triangle DEG \cong \triangle ABC$ .  $\square$



Figur 39: For at  $\triangle ABC$  og  $\triangle DEF$  ikke skal være kongruente når  $AB \cong DE$ ,  $BC \cong EF$  og  $\angle A \cong \angle D$  så må  $AB > BC$ .

Om  $AB > BC$  og  $DE > EF$  var en mulighet ville vi ikke kommet frem til noen motsigelse i beviset, for som vi ser fra figur 39 er det fullt mulig at  $\triangle ABC \not\cong \triangle DEF$ . Fra SSA-kriteriet kan vi også utlede et ASSA-kriterie:

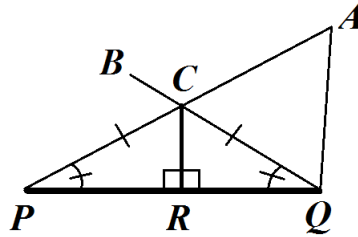
**Korollar 3.3.37** (ASSA-kriteriet). *Anta trekanter  $\triangle ABC$  og  $\triangle DEF$  slik at  $\angle A \cong \angle D$ ,  $AB \cong DE$ ,  $BC \cong EF$  og  $\angle C \cong \angle F$ . I så fall er  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .*

*Bevis.* Om vi antar  $AB < BC$  kan vi vise kongruens ved SSA-kriteriet med utgangspunkt i  $\angle A$ . Hvis  $AB > BC$  kan vi gjøre det samme, men med utgangspunkt i  $\angle C$  og om  $AB \cong BC$  spiller det ingen rolle hvilken vinkel vi tar utgangspunkt i.  $\square$

Merk at dette kriteriet ikke vanligvis vil brukes, ettersom det er en svakere versjon av AAS-kriteriet. Det er derimot nødvendig for å bevise resultatet vi brukte til å bevise AAS-kriteriet, nemlig at det for alle punkter finnes et midtpunkt mellom dem.

**Påstand 3.3.38.** *Gitt to distinkte punkter  $P$  og  $Q$  finnes et tredje punkt  $R$  slik at  $PR \cong QR$  og  $P$ ,  $Q$  og  $R$  er kolineære.*

*Bevis.* La  $A$  være et punkt utenfor  $\overleftrightarrow{PQ}$ . Dersom  $\angle PQA$  og  $\angle QPA$  ikke er kongruente, kreves en konstruksjon før vi går videre. Om  $\angle QPA < \angle PQA$ , konstruer en stråle  $\overrightarrow{QB}$  i det indre av  $\angle PQA$  slik at  $\angle QPA \cong \angle PQB$ . Ifølge teorem 3.3.18 vil strålen skjære  $PA$  i et punkt  $C$  mellom  $P$  og  $A$ . Nedfell en normal fra  $C$  på  $\overleftrightarrow{PQ}$  og kall foten  $R$ . Trekantene  $\triangle RPC$  og  $\triangle RQC$  har siden  $CR$  til felles, per definisjon av normal er  $\angle CRP$  og  $\angle CRQ$  rette, og dermed kongruente. I tillegg er  $\angle QPC \cong \angle PQC$ , som ifølge påstand 3.3.26 medfører at  $PC \cong QC$ . Ved ASSA-kriteriet er trekantene kongruente, så  $PR \cong QR$  og  $R$  er midtpunktet mellom  $Q$  og  $P$ .  $\square$



Figur 40: Vi finner midtpunktet mellom to punkter ved å konstruere trekkanter som er kongruente ifølge ASSA-kriteriet.

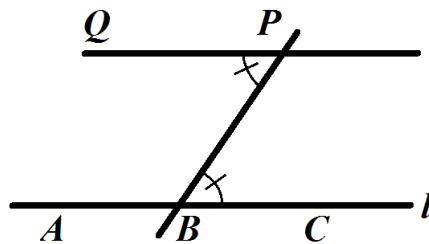
AAA-kriteriet for kongruente trekkanter gjelder ikke i nøytral geometri, for man kan lett finne euklidiske trekkanter med parvis kongruente vinkler, men uten kongruente sider, og alle resultater i nøytral geometri gjelder både i euklidisk og hyperbolsk geometri.

### 3.3.2 Sentrale resultater

Påstand 3.3.30 er ikke bare viktig for å bevise at to trekkanter er kongruente om AAS-kriteriet er oppfylt. Den medfører et av de viktigste teoremene i nøytral geometri:

**Teorem 3.3.39.** *For enhver linje  $l$  og ethvert punkt  $P \notin l$ , finnes minst én linje som  $P$  ligger på og som ikke skjærer  $l$ .*

*Bevis.* Ifølge aksiom I-2 finnes to punkter  $A, C \in l$ . Ifølge aksiom M-2 finnes et punkt  $B$  mellom dem. En parallell linje kan konstrueres på følgende måte: Trekk linjen gjennom  $P$  og  $B$  (aksiom I-1). Ifølge aksiom K-5 kan du på samme side av  $\overleftrightarrow{BP}$  som  $A$  konstruere en stråle  $\overrightarrow{AQ}$  slik at  $\angle CBP \cong \angle BPQ$ . Linjen bestående av  $\overrightarrow{PQ}$  og dens motstående stråle med toppunktet ekskludert, utgjør tilsammen en linje som ifølge påstand 3.3.30 er parallell med  $l$ .  $\square$



Figur 41: For enhver linje  $l$  og ethvert punkt  $P \notin l$ , kan vi konstruere kongruente, sammenfallende vinkler og få en linje gjennom  $P$  som er parallell med  $l$ .

Videre vil vi undersøke hva vinkelsummen i en trekant kan være ifølge nøytral geometri. Når vi snakker om vinkelsummen i en trekant impliserer vi at vinkler kan legges en tallverdi. Dermed vil vi si at summen av to vinkler er lik summen av to andre vinkler, i stedet for at den er kongruent med summen av to vinkler. Grunnen til dette er at summen av to vinkler som regel ikke selv er en vinkel. For eksempel kan man snakke om summen av to vinkler som ikke har samme toppunkt. Summen av to rette vinkler med samme toppunkt er ikke en vinkel siden dens vinkelben er motsatte stråler. Vi vil bruke notasjonen  $|\angle A|$  for verdien til  $\angle A$ , samt  $|\triangle ABC|$  for summen av vinkelverdiene til vinklene i  $\triangle ABC$ .

**Definisjon 3.3.40.** *Vinkelverdien (eller vinkelmålet) til en vinkel er et tall som representerer dens størrelse, slik at:*

- a) *Vi har  $|\angle A| < |\angle B|$  hvis og bare hvis  $\angle A < \angle B$ .*
- b) *Vi har  $|\angle A| = |\angle B|$  hvis og bare hvis  $\angle A \cong \angle B$ .*
- c) *Dersom  $\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AD}$ , så er  $|\angle BAD| = |\angle BAC| + |\angle CAD|$ .*

Mens det er mulig å gi tallverdier til vinklene, vil vi fortsette å sammenlikne vinkler med størrelsen til rette vinkler, for som vist tidligere er alle rette vinkler kongruente med hverandre. La oss vise at bruken av addisjon i definisjonen er veldefinert.

**Lemma 3.3.41.** *Anta  $\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{A'B'}|\overrightarrow{A'C'}|\overrightarrow{A'D'}$ ,  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$  og  $\angle CAD \cong \angle C'A'D'$ . Da er  $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ .*

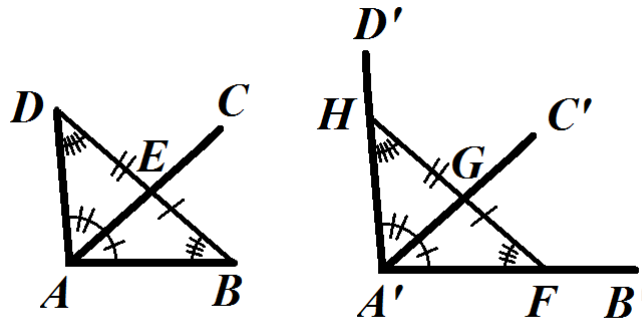
*Bevis.* Ifølge teorem 3.3.18 finnes  $E \in \overrightarrow{AC}$  slik at  $B * E * D$  og  $B' * E' * D'$ . Ved gjentatt bruk av aksiom K-1 kan vi finne punkter  $F \in \overrightarrow{A'B'}$ ,  $G \in \overrightarrow{A'C'}$  og  $H \in \overrightarrow{A'D'}$  slik at  $AB \cong A'F$ ,  $AE \cong A'G$  og  $AD \cong A'H$  (se figur 42). Ved aksiom K-6 er  $\triangle ABE \cong \triangle A'FG$  og  $\triangle AED \cong \triangle A'GH$ , så  $\angle ABE \cong \angle A'FG$ ,  $BE \cong FG$ ,  $\angle ADE \cong \angle A'HG$  og  $DE \cong HG$ . Ifølge aksiom K-3 er  $BD \cong FH$ . Dermed blir  $\triangle ABD \cong \triangle A'FH$  ifølge teorem 3.3.25, som tilsier at  $\angle BAD \cong \angle FA'H$  der  $\angle FA'H = \angle B'A'D'$  ifølge påstand 3.3.7.  $\square$

**Lemma 3.3.42.** *Summen av to supplementvinkler er lik summen av to rette vinkler.*

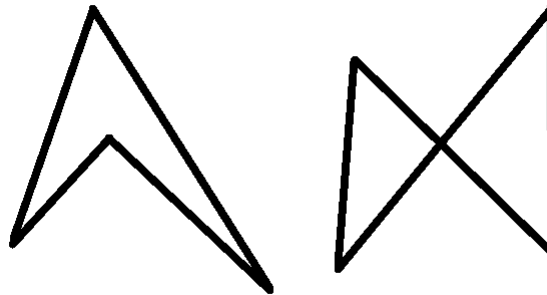
*Bevis.* Summen av to supplementvinkler og summen av to rette vinkler blir begge lik "vinkelen" mellom to motstående stråler. For enhver stråle er dens motstående stråle unik, så summen av to supplementvinkler og summen av to rette vinkler blir like.  $\square$

Når vi går videre inn på vinkelsummer får vi spesielt bruk for to lemma, der det andre krever at vi definerer firkanter.

**Definisjon 3.3.43.** *En firkant består av fire segmenter med parvis felles endepunkt og uten skjæring mellom segmentene. Endepunktene kalles hjørner og segmentene sider.*



Figur 42: Hvis  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$  og  $\angle CAD \cong \angle C'A'D'$  kan man bruke SAS-kriteriet to ganger og ASA-kriteriet en gang, for å vise at  $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ .



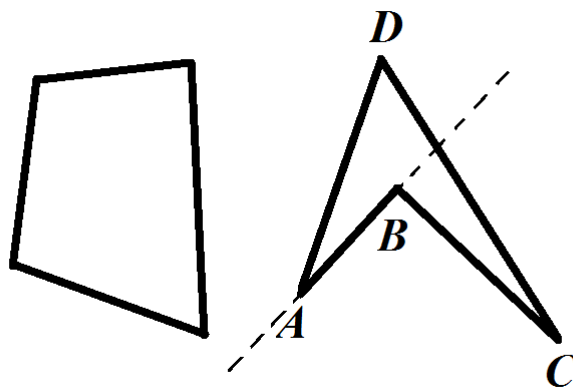
Figur 43: Figuren til venstre er en firkant. Figuren til høyre ikke er en firkant selv om den kan beskrives som bestående av fire segmenter med parvis felles endepunkter.

**Definisjon 3.3.44.** *Et rektangel er en firkant der alle vinklene er rette.*

**Definisjon 3.3.45.** *En firkant er konvekks om, for enhver side, de to andre hjørnene er på samme side av linjen som siden ligger på.*

**Lemma 3.3.46.** *Vi har en trekant  $\triangle ABC$ , og velger et punkt  $D$  mellom  $A$  og  $B$ . Da er  $|\triangle ABC|$  lik  $|\triangle ADC|$  pluss  $|\triangle BDC|$  minus to rette vinkler.*

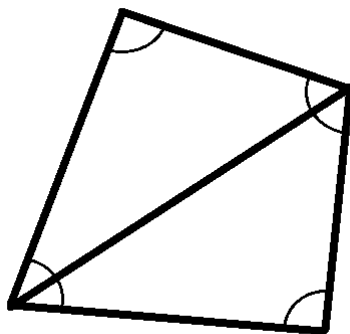
*Bevis.* Summen av  $|\triangle ADC|$  og  $|\triangle BDC|$  er lik summen av seks vinkler. To av dem er vinkler i  $\triangle ABC$ , to av dem utgjør tilsammen den siste vinkelen i  $\triangle ABC$  (se lemma 3.3.41) og de to siste er supplementvinkler, så summen av dem er lik to rette vinkler. Altså er  $|\triangle ADC|$  pluss  $|\triangle BDC|$  lik  $|\triangle ABC|$  pluss to rette vinkler, så  $|\triangle ABC|$  er lik  $|\triangle ADC|$  pluss  $|\triangle BDC|$  minus to rette vinkler.  $\square$



Figur 44: Firkanten til venstre er konveks. Firkanten til høyre er ikke konveks siden  $C$  og  $D$  ligger på motsatt side av  $\overleftrightarrow{AB}$ .

**Lemma 3.3.47.** *Enhver konveks firkant  $\square ABCD$  kan deles inn i to trekanter  $\triangle ABC$  og  $\triangle ACD$  slik at  $|\square ABCD| = |\triangle ABC| + |\triangle ACD|$ .*

*Bevis.* Firkanten kan deles opp slik siden  $C$  er i det indre av  $\angle BAD$  (se definisjoner av indre punkt og konvergent firkant). Summen  $|\triangle ABC| + |\triangle ACD|$  er summen av seks vinkler der to av dem er vinkler i  $\square ABCD$  og de fire andre parvis utgjør de to siste vinklene i  $\square ABCD$  (se lemma 3.3.41).  $\square$



Figur 45: Når vi deler en firkant inn i to trekanter, ser vi at dens vinkelsum er lik summen av trekantenes vinkelsummer.

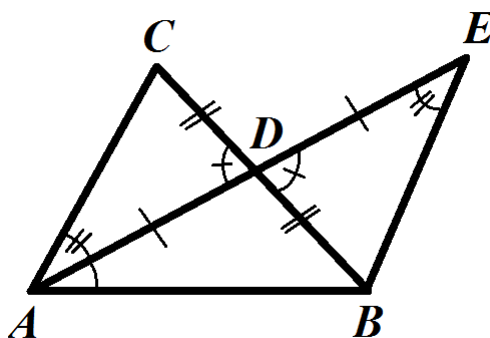
**Påstand 3.3.48.** *Summen av to vinkler i en trekant er mindre enn summen av to rette vinkler.*



*Bevis.* Anta at  $\angle A$  og  $\angle B$  i en trekant har vinkelsum lik to rette vinkler. Da er ifølge lemma 3.3.42  $\angle A$  kongruent med  $\angle B$  sitt supplement. Dette strider mot påstand 3.3.33, siden  $\angle B$  sitt supplement er en ekstern vinkel med  $\angle A$  som en av sine fjerne vinkler. Om vi antar at summen av  $\angle A$  og  $\angle B$  er større enn to rette vinkler blir  $\angle B$  sitt supplement mindre enn  $\angle A$ , som også strider med påstand 3.3.33.  $\square$

**Teorem 3.3.49** ([Ros00, Theorem 2.8 (Saccheri-Legendre), s. 16]). *Summen av vinklene i en trekant er mindre enn eller lik summen av to rette vinkler.*

*Bevis.* Bevis av Max Dehn [Ros00]: Anta at  $\triangle ABC$  har vinkelsum to rette vinkler pluss  $|\angle p|$ . La  $D$  være midtpunktet på  $BC$  og  $E$  være punktet på den motsatte strålen av  $\overrightarrow{DA}$  slik at  $AD \cong DE$ . Siden de er toppvinkler er  $\angle ADC \cong \angle BDE$ , så ifølge aksiom K-6 er  $\triangle ADC \cong \triangle EDB$ . Vi har  $|\triangle ABC|$  lik  $|\triangle ADC|$  pluss  $|\triangle ABD|$  minus to rette vinkler og  $|\triangle AEC|$  lik  $|\triangle EDB|$  pluss  $|\triangle ABD|$  minus to rette vinkler. Grunnet kongruens er  $|\triangle ADC| = |\triangle BDE|$  så  $|\triangle ABC| = |\triangle ABE|$ .  $|\angle BAC|$  er summen av  $|\angle BAE|$  og  $|\angle EAC|$  der  $\angle EAC \cong \angle AEB$ . Dermed finnes to vinkler i  $\triangle ABE$  hvis sum er lik  $|\angle BAC|$ , og den minste av dem må være mindre enn eller lik halvparten av  $|\angle BAC|$ . Dermed kan man for enhver trekant og enhver vinkel i den konstruere en annen trekant med samme vinkelsum og en vinkel med vinkelmål mindre eller eller lik halvparten av vinkelens mål. Ved gjentatt bruk kan man få en trekant med samme vinkelsum som  $\triangle ABC$ , altså to rette vinkler pluss  $|\angle p|$ , men med en vinkel som er mindre enn  $\angle p$ . I så fall må summen av de to andre vinklene være større enn to rette vinkler, noe som strider med lemma 3.3.48.  $\square$



Figur 46: Konstruksjon av en trekant med samme vinkelsum som  $\triangle ABC$  og minst en vinkel med verdi mindre enn eller lik halvparten av  $\angle BAC$ .

Dette viktige resultatet medfører to korollar:

**Korollar 3.3.50.** *En ekstern vinkels verdi er større enn eller lik summen av de to fjerne vinklene.*

*Bevis.* Summen av den eksterne vinkelen og dens supplementvinkel er lik summen av to rette vinkler mens summen av dens supplementvinkel og fjerne vinkler (vinkelsummen i trekanten) er mindre enn eller lik to rette vinkler.  $\square$

**Korollar 3.3.51.** *Vinkelsummen i en konveks firkant er mindre enn eller lik summen av fire rette vinkler.*

*Bevis.* Følger av at enhver konveks firkant har vinkelsum lik summen av to trekanters vinkelsummer.  $\square$

En generalisering til ikke-konvekse firkanter ville kreve at vi omdefinerer vinkler slik at vi kan ha en vinkel større enn to rette vinkler (se  $\angle ABC$  på figur 44), så vi dropper det her.

**Teorem 3.3.52.** *Hvis én trekant har vinkelsum lik to rette vinkler må alle trekanten ha vinkelsum lik to rette vinkler.*

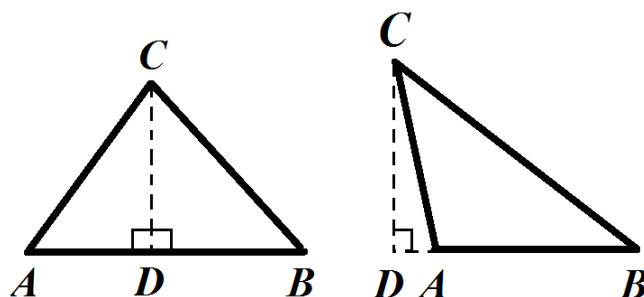
Dette er et viktig resultat med et langt bevis. Beviset vil skje i flere trinn ved å vise følgende påstander:

- a) Om det finnes en trekant med vinkelsum lik to rette vinkler, så finnes en rettvinklet trekant med vinkelsum lik to rette vinkler.
- b) Om det finnes en rettvinklet trekant med vinkelsum lik to rette vinkler, så finnes et rektangel.
- c) Om det finnes et rektangel, vil enhver rettvinklet trekant ha vinkelsum lik to rette vinkler.
- d) Om enhver rettvinklet trekant har vinkelsum lik to rette vinkler, så har alle trekanten vinkelsum lik to rette vinkler.

**Lemma 3.3.53.** *Om det finnes en trekant med vinkelsum lik to rette vinkler, så finnes en rettvinklet trekant med vinkelsum lik to rette vinkler.*

*Bevis.* Vi har  $\triangle ABC$  der  $\angle C$  er den største vinkelen og vinkelsummen er lik summen av to rette vinkler. Nedfell en normal fra  $C$  på  $\overleftrightarrow{AB}$  og kall foten av normalen for  $D$ . Anta  $A * D * B$ . Summen  $|\triangle ADC|$  pluss  $|\triangle BCD|$  er lik  $|\triangle ABC|$  pluss to rette vinkler er lik fire rette vinkler. Ifølge teorem 3.3.49 har  $\triangle ADC$  og  $\triangle BCD$  begge vinkelsum mindre eller lik to rette vinkler, så eneste mulighet er at begge har vinkelsum to rette vinkler. Anta for motsigelse  $D * A * B$ . Siden  $\angle ADC$  er rett og summen av to vinkler i en trekant er mindre enn to rette vinkler, så er  $\angle DAC$  mindre enn en rett vinkel og dens supplement  $\angle BAC$  er større enn en rett vinkel. Men siden  $\angle C$  er den største vinkelen i  $\triangle ABC$  må  $\angle C$  også være større enn en rett vinkel, så  $|\triangle ABC|$  overstiger to rette vinkler, noe som strider med teorem 3.3.49. Antakelsen  $A * B * D$  gir samme problem.

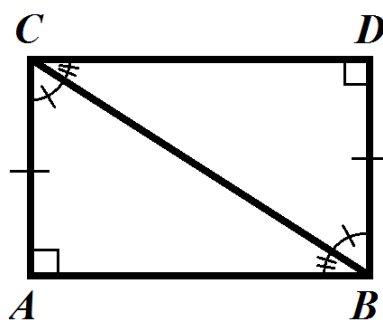
Antakelsene  $D = A$  og  $D = B$  gjør  $\triangle ABC$  til en trekant med to rette vinkler og strider med påstand 3.3.48.  $\square$



Figur 47: Venstre: Summen av vinkelsummene til  $\triangle ADC$  og  $\triangle BDC$  blir summen av fire rette vinkler. Høyre: Antakelsen  $D * A * B$ , som leder til en selvmotsigelse.

**Lemma 3.3.54.** *Om det finnes en rettvinklet trekant med vinkelsum lik to rette vinkler, så finnes et rektangel.*

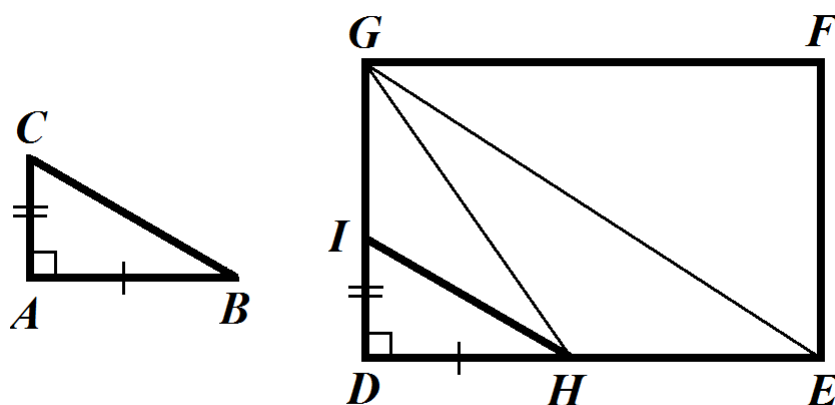
*Bevis.* Vi har  $\triangle ABC$  der  $\angle A$  er rett og vinkelsummen er lik to rette vinkler. Ifølge aksiom K-4 kan en konstruere  $\angle CBE$  på motsatte side av  $\overleftrightarrow{BC}$  i forhold til  $A$  slik at  $\angle ACB \cong \angle CBE$ . Ifølge aksiom K-1 finnes et punkt på  $D \in \overleftrightarrow{BE}$  slik at  $AC \cong BD$ . Ifølge aksiom K-6 er  $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ , så  $\angle D$  er også rett og  $\angle ABC \cong \angle BCD$ . Vinklene  $\angle ABD$  og  $\angle ACD$  er begge summen av to vinkler som er parvis kongruente med  $\angle B$  og  $\angle C$  i  $\triangle ABC$ , og siden  $\angle A$  er rett og  $|\triangle ABC|$  er to rette vinkler, er summen  $|\angle B|$  pluss  $|\angle C|$  lik en rett vinkel. Dermed har vi en firkant med fire rette vinkler.  $\square$



Figur 48: Konstruksjon av en firkant med fire rette vinkler gitt en rettvinklet trekant med vinkelsum lik to rette vinkler.

**Lemma 3.3.55.** *Om det finnes et rektangel, vil enhver rettvinklet trekant ha vinkelsum lik to rette vinkler.*

*Bevis.* Fra et rektangel konstruert med utgangspunkt i en rettvinklet trekant kan man, ved å konstruere flere kongruente trekanter, åpenbart konstruere gradvis større rektangler, så gitt en hvilken som helst annen rettvinklet trekant  $\triangle ABC$  der  $\angle A$  er den rette vinkelen kan vi anta at det finnes et rektangel  $\square DEFG$  der  $DE > AB$  og  $DG > AC$ . La  $H$  og  $I$  være punktene slik at  $AB \cong DH$ ,  $AC \cong DI$  og dermed  $\triangle ABC \cong \triangle DHI$  ifølge aksiom K-6. I rektangelet konstruerer vi segmentet  $EG$  slik at vi har to trekanter  $\triangle DEG$  og  $\triangle DEF$  hvis vinkelsum er lik rektangelets vinkelsum på fire rette vinkler og som dermed ifølge teorem 3.3.48 begge må ha vinkelsum lik to rette vinkler. Konstruer så segment  $GH$ . Summen  $|\triangle DHG|$  pluss  $|\triangle HEG|$  er lik  $|\triangle DEG|$  pluss to rette vinkler er lik fire rette vinkler, så ifølge teorem 3.3.48 har begge vinkelsum lik to rette vinkler. Med samme argument må både  $|\triangle DHI|$  og  $|\triangle HIG|$  være lik to rette vinkler. Siden  $\triangle DHI \cong \triangle ABC$  er beviset fullført.  $\square$



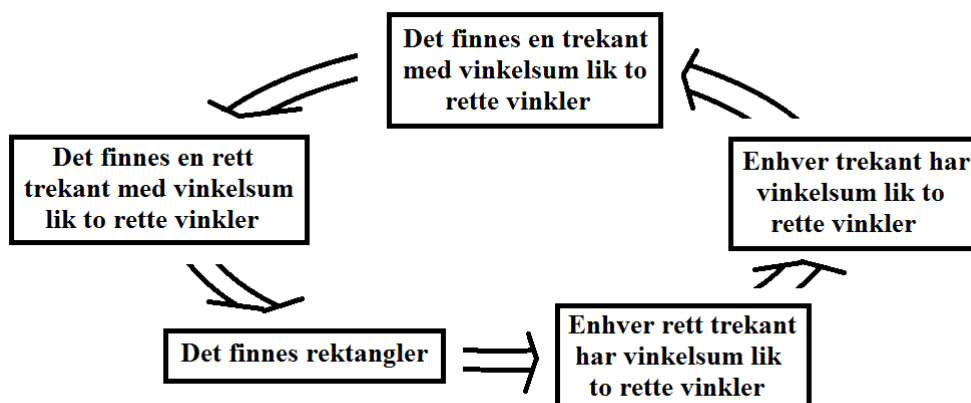
Figur 49: Fra et rektangel viser man at vinkelsummene i henholdsvis  $\triangle DEG$ ,  $\triangle DHG$  og  $\triangle DHI$  har vinkelsum lik to rette vinkler.

**Lemma 3.3.56.** *Om enhver rettvinklet trekant har vinkelsum lik to rette vinkler, så har alle trekanter vinkelsum lik to rette vinkler.*

*Bevis.* Enhver trekant kan deles opp i to rette trekanter som til venstre på figur 47. Trekantens vinkelsum blir summen av de rette trekantenes vinkelsum minus to rette vinkler, så om hver av de rette trekantene har vinkelsum lik to rette vinkler blir også den opprinnelige trekantens vinkelsum lik to rette vinkler.  $\square$

Merk at om alle trekanter har vinkelsum lik to rette vinkler så finnes selvfølgelig en

trekant med vinkelsum lik to rette vinkler. Det at det må finnes en trekant kan utledes av aksiom I-3. Dermed har vi en logisk sirkel. Vi har hverken bevist at rektangler eksisterer eller at alle trekanter har vinkelsum lik to rette vinkler, men om vi skulle bevise en av påstandene, vil automatisk alle de andre stemme.



Figur 50: Dersom ett av resultatene stemmer, så er ifølge nøytral geometri alle resultatene nødt til å stemme.

### 3.4 Oppdagelse av hyperbolsk geometri

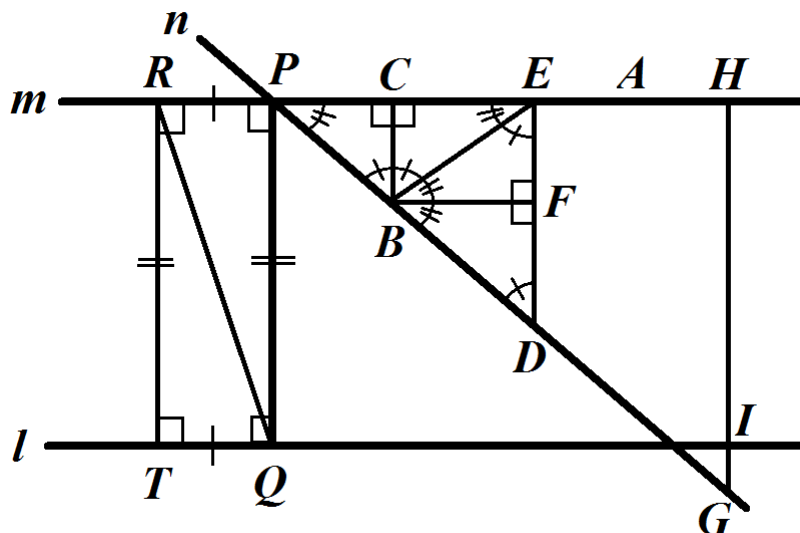
Studier av firkanter spilte en viktig rolle i jakten på et bevis for at parallellpostulatet, for det kan vises at dersom det stemmer at rektangler eksisterer og vinkelsummen i enhver trekant er lik summen av to rette vinkler, så impliserer det et parallellpostulat som definerer euklidisk geometri. La oss først bevise dette.

**Påstand 3.4.1.** *Dersom enhver rettvinklet trekant har vinkelsum lik to rette vinkler, så finnes det for enhver linje  $l$  og ethvert punkt  $P \notin l$  en unik linje  $m$  slik at  $P \in m$  og  $l \parallel m$ .*

*Bevis.* Nedfell en normal fra  $P$  på  $l$  og kall foten for  $Q$ . Konstruer linjen  $m$  slik at den inneholder  $P$  og står normalt på  $\overrightarrow{PQ}$ . Ifølge korollar 3.3.31 er  $m$  parallell med  $l$ . Anta for motsigelse at det finnes en annen linje  $n$  som inneholder  $P$  og er parallell med  $l$ . La  $\angle APB$  være vinkelen mellom  $m$  og  $n$  slik at  $A \in m$ ,  $m \perp \{B, Q\}$  og  $\overrightarrow{PQ} \perp \{A, B\}$ . Nedfell en normal fra  $B$  på  $m$  og kall foten  $C$  for å få en rett trekant  $\triangle PBC$ . Ved gjentatt bruk av aksiomene K-1, K-4 og K-6, konstruer tre trekanter kongruente med  $\triangle PBC$  som vist på figur 51. Vi har nå konstruert en trekant  $\triangle PDE$  slik at segment  $DE$  er dobbelt så stort som segment  $BC$ . Ved gjentatt bruk av konstruksjonen kan vi få en trekant med et punkt hvis avstand til  $m$  langs en normal er større enn  $PQ$ .

Derimot kan vi vise at avstanden fra ethvert punkt  $R \in m$  til  $l$  langs en normal er konstant. Utifra  $\triangle PQR$ , konstruer et rektangel  $\square PQRT$ . Punkt  $T$  må ligge på  $l$  siden  $\angle PQT$  er rett. Grunnet kongruens mellom trekantene må  $PQ \cong RT$ .

Det eneste som gjenstår å vise er at  $\triangle PDE$  faktisk er en trekant. Om ikke punktene  $P, B$  og  $D$  er kolineære, eller ikke  $D, E$  og  $F$  er kolineære så er det ikke en trekant. Punkt  $B$  er toppunkt for to vinkler kongruente med  $\angle BPC$  og to vinkler kongruente med  $\angle PBC$ . Siden vinkelsummen i en rettvinklet trekant er to rette vinkler og  $\angle BCP$  er rett, så er summen av  $\angle BPC$  og  $\angle PBC$  en rett vinkel, og summen av vinklene med  $B$  som toppunkt er to rette vinkler. Dermed er  $\overrightarrow{BP}$  og  $\overrightarrow{BD}$  motsatte stråler og  $P, B$  og  $D$  er kolineære. Siden  $F$  er toppunkt for to rette vinkler er  $D, E$  og  $F$  også kolineære. Konklusjonen blir at det finnes et punkt  $G \in n$  med en normal på  $m$ , hvis fot er  $H$ , slik at  $GH > PQ$ . La  $I$  være punktet på  $\overrightarrow{HG}$  slik at  $HI \cong PQ$ . Punkt  $I$  må ligge på  $l$  så  $n$  inneholder punkter på begge sider av  $l$  og er nødt til å skjære  $l$ . Beviset er fullført.  $\square$



Figur 51: Avstanden mellom  $m$  og  $l$  er konstant, mens man kan doble avstanden mellom  $m$  og  $n$  så mange ganger en måtte ønske gjennom konstruksjon av kongruente trekanter.

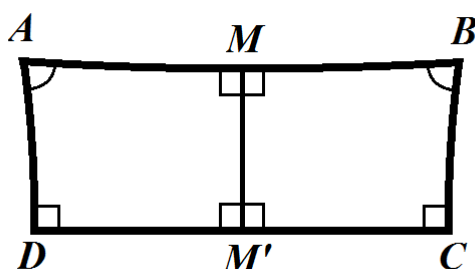
Ettersom rektangelets eksistens og en trekants vinkelsum på to rette vinkler impliserer euklidsk geometri, var det flere som prøvde å anta for motsigelse at det ikke finnes rektangler, eller at det finnes en trekant uten vinkelsum lik to rette vinkler, i håp om at antakelsen ville lede til en selvmotsigelse.

Girolamo Saccheri studerte på 1700-tallet en type firkant som har fått navn etter ham, til tross for at det har vist seg at andre hadde studert den lenge før ham [Gre93, s. 155].

Firkanten består av en grunnlinje som grenser til to rette vinkler  $\angle C$  og  $\angle D$ . Sidene  $BC$  og  $AD$  er kongruente. Det kan lett vises at vinklene  $\angle A$  og  $\angle B$  er kongruente.

**Påstand 3.4.2.** *De ukjente vinklene i en Saccheri-firkant er kongruente.*

*Bevis.* Se figur 52. Med aksiom K-6 kan det vises at  $AC \cong BD$  og  $\angle ACD \cong \angle BDC$ . Vinklene  $\angle ACB$  og  $\angle BDA$  blir også kongruente siden de er lik en rett vinkel minus henholdsvis  $\angle ACD$  og  $\angle BDC$ . Ved bruk av aksiom K-6 igjen kan det vises at  $\angle BAD \cong \angle ABC$ .  $\square$



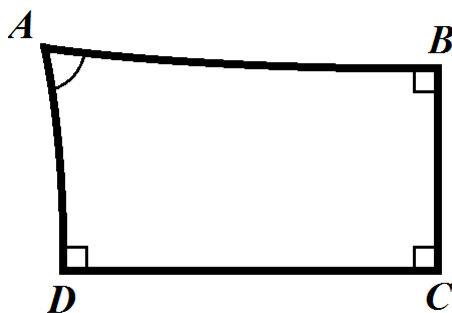
Figur 52: I Saccheri-firkanten er  $\angle D$  og  $\angle C$  rette og linjen mellom midtpunkt  $M$  på  $AB$  og  $M'$  på  $CD$  står vinkelrett på både  $\overleftrightarrow{AB}$  og  $\overleftrightarrow{CD}$ . I euklidsk geometri er  $\angle A$  og  $\angle B$  rette, mens de i hyperbolsk geometri er spisse.

Det kan også utledes at om  $M$  er midtpunktet på  $AB$  og  $M'$  midtpunktet på  $CD$  så er  $MM'$  en fellesnormal for segmentene  $AB$  og  $CD$ . Fremgangsmåten ville være å vise ved aksiom K-6 at  $\triangle ADM' \cong \triangle BCM'$  og  $\triangle AMM' \cong \triangle BMM'$ .

Deretter gjenstår de tre mulighetene at de ukjente vinklene begge er spisse, begge er rette eller begge er butte. Saccheri klarte å finne en selvmotsigelse om han antok at de var butte. Med resultatene vi har vist er det spesielt lett. Summen av to rette og to butte vinkler er større enn summen av fire rette vinkler, og vi har vist at i nøytral geometri er vinkelsummen i en firkant mindre enn eller lik fire rette vinkler.

Saccheris søken etter en selvmotsigelse når han antok at de ukjente vinklene var spisse, førte ikke frem. Han kom frem til flere interessante og overraskende resultater som antakelsen impliserte, men ingen av dem kunne motbevises uten noe parallellpostulat. Saccheri var ikke klarsynt nok til å innse at resultatene han viste kunne definere en ny geometri. I stede økte hans frustrasjon over at han ikke kunne finne en selvmotsigelse.

Også Johann Heinrich Lambert prøvde å bevise Euklids parallellpostulat ved å studere firkanter. I likhet med Saccheri fikk han en type firkanter oppkalt etter seg, selv om det har vist seg at han ikke var den første til å studere dem. Hans firkant har tre rette vinkler (se figur 53).



Figur 53: I Lamberts firkant er tre av vinklene rette. I euklidsk geometri er den siste vinkelen rett, mens den i hyperbolsk geometri er spiss.

Det er lett å se fra figur 52 at firkantene  $\square AMM'D$  og  $\square BMM'C$  i Saccheri-firkanten er Lambert-firkanter, så Lambert tok utgangspunkt i en situasjon som var meget lik Saccheri sin. Dermed møtte han mange av de samme problemstillingene. Den siste vinkelen i trekanten måtte være rett, butt eller spiss, og han klarte å vise at den ikke kunne være butt, men ikke at den ikke kunne være spiss.

Derimot kunne han vise at antakelsen om at den siste vinkelen var spiss impliserte et AAA-kriterie for kongruens, og at arealet til en trekant ville være proporsjonal med differensen mellom to rette vinkler og dens vinkelsum [Gre93, s. 160]. Lambert så likheter mellom resultatene hans og sfærisk geometri, og spekulerte i om den spisse vinkelen impliserte geometrien til en kule med imaginær radius.

Mens flere resultater i hyperbolsk geometri allerede var utledet fra forsøk på å bevise Euklids parallellpostulat, var det først på 1800-tallet at tre matematikere uavhengige av hverandre kom frem til konklusjonen at en kunne utlede en konsistent geometri ved å anta et annet parallellpostulat, og at Euklids parallellpostulat dermed ikke lot seg bevise, men var nødvendig som et aksiom.

János Bolyai var sønn av Farkas Bolyai, som selv hadde prøvd uten hell å bevise Euklids femte postulat, og anbefalte sin sønn på det sterkeste å vie sitt liv til noe annet. Farkas Bolyai skrev i et brev *"It seems to me that I have been in these regions; that I have traveled past all reefs of this infernal Dead Sea and have always come back with broken mast and torn sail."* [Gre93, s. 162]. Derimot var János overbevist om at antakelsen at Euklids femte postulat ikke stemte, ikke var så absurd som andre matematikere trodde, så han ga seg i kast med å utforme den nye geometrien.

Russiske Nikolai Ivanovich Lobachevskij publiserte i 1829 en artikkel om det han kalte imaginær geometri, og ble refset av russiske akademikere, men fortsatte sitt arbeid. Han uttrykte i 1835 at de utallige forsøkene på bevis av Euklids femte postulat uten hell, hadde fått ham til å mistenke at et bevis ikke var mulig [Gre93, s. 184]. Han mente det ikke var gitt at universet fulgte en euklidsk geometri.



Arbeidene til Bolyai og Lobachevskij ble begge sendt til datidens fremste matematiker Carl Friedrich Gauss. Farkas Bolyai sendte sin sønns publisering fra 1831, mens Lobachevskij publiserte en artikkel på tysk i 1840 som han sendte til Gauss. De fikk vite at Gauss selv hadde tenkt på problemstillingen og nådd frem til mange av de samme resultatene, men uten å publisere noen artikkel om det.

Gauss argumenterte for at få ville forstå resultatene og færre akseptere dem. Han var blant annet urolig for Immanuel Kants følgere, siden Kant var en stor tilhenger av euklidsk geometri og mente at den ikke var empirisk basert, men et uungåelig produkt av tanken [Gre93, s. 182]. Han uttrykte derimot sin støtte til Lobachevskij som utfordret Kants syn.

Historiske kilder viser at Gauss hadde kommet frem til mange av resultatene før Bolyai og Lobachevskij, men kun delt dem med andre matematikere via brev. Gauss hadde derimot ikke kommet like langt som Bolyai og Lobachevskij i utforskningen av hyperbolsk geometri.

## 4 Modeller for hyperbolsk geometri

Herifra kommer vi gradvis til å gå bort ifra en ren aksiomatisk tilnærming fordi aksiomatiske bevis kan være langdrøye. Vi vil bruke kjente resultater som Pytagoras' teorem uten noen introduksjon og gå utifra at leseren er kjent med vanlig notasjon for avbildninger og komposisjoner av avbildninger.

Aksiomatisk geometri skal være uavhengig av grafiske fremstillinger og kunne utledes kun ved hjelp av ordene som inngår, deres definisjoner og geometriens aksiomer. Derimot kan grafiske fremstillinger være et nyttig pedagogisk hjelpemiddel som hjelper oss å konkretisere geometrien. Modeller kan også være nyttig for å vise at et aksiomsystem er konsistent. Man skal være forsiktig med å stole for mye på at noe som ser ut til å stemme fra grafiske fremstillinger faktisk stemmer. Man bør alltid legge et matematisk bevis til grunn før man konkluderer med at et resultat er sant. Grafisk intuisjon kan derimot lede en frem til hypoteser som en deretter kan bevise eller motbevise.

Ettersom praktisk geometri i all hovedsak foregår på flatt underlag og vi har mest erfaring og intuisjon knyttet til euklidsk geometri vil modellene våre for hyperbolsk geometri "befinne seg" i euklidske plan eller rom.

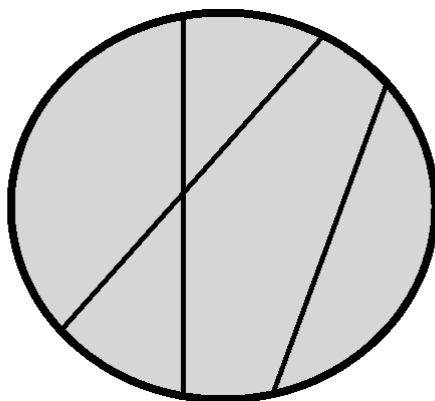
### 4.1 Beltrami–Klein-modellen

I Beltrami–Klein-modellen går vi ut ifra en E-sirkel  $\gamma$  som gjerne kan være en enhetssirkel med sentrum i origo dersom vi introduserer et koordinatsystem og et euklidsk lengdemål. I denne modellen er mengden av H-punkt representert av mengden av E-punkter som befinner seg i sirkelens indre. Merk at punkter på selve  $\gamma$  ikke representerer H-punkt. Mengden av H-linjer representerer mengden av E-segmenter med endepunkt på randen, med endepunktene ekskludert siden punktene på  $\gamma$  ikke er H-punkter.

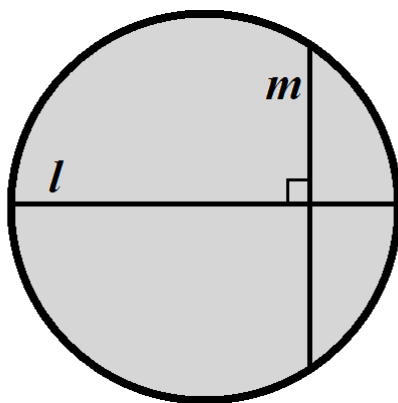
Mellomliggenhet for hyperbolske punkter blir definert som at  $A*B*C$  dersom E-punktet som representerer  $B$  ligger mellom E-punktene som representerer  $A$  og  $C$  i euklidsk forstand.

Derimot kan vi ikke utlede hyperbolsk kongruens fra euklidsk kongruens. I de aller fleste tilfellene der to H-segmenter er kongruente vil ikke E-segmentene de representeres av være kongruente. Det samme er tilfellet for vinkler. For eksempel kan det nevnes at rette H-vinkler kun representeres av rette E-vinkler dersom minst ett av E-segmentene som representerer linjene som H-vinkelens sider ligger på er en diameter for  $\gamma$ . Dette kommer vi tilbake til senere.

For korthet vil vi ofte referere til denne modellen som BKM.



Figur 54: Beltrami–Klein-modellen. H-punkter representeres av indre punkter til en E-sirkel (lysegrå). H-linjer representeres av E-segmenter. Her er det to linjer som skjærer hverandre og begge er parallelle med den tredje linjen.

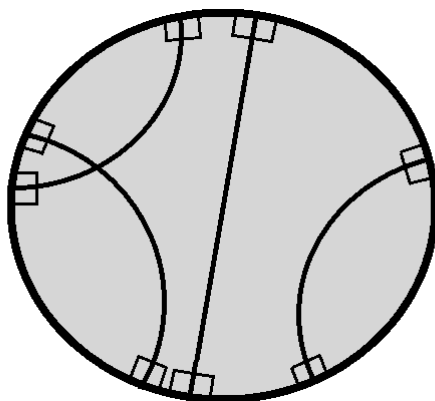


Figur 55: To linjer  $l$  og  $m$  representert i Beltrami–Klein-modellen slik at minst én av dem er en diameter, er ortogonale dersom E-vinkelen mellom dem er rett.

## 4.2 Poincarés diskmodell

Poincarés diskmodell tar i likhet med Beltrami–Klein-modellen utgangspunkt i en sirkel  $\gamma$ , og tolkningen av et H-punkt er også den samme. Derimot blir mengden av H-linjer representert av mengden av E-sirkelstykker mellom to punkter på  $\gamma$  som står vinkelrett på  $\gamma$  i begge skjæringspunktene og mengden av diametere. Merk at vi igjen må ekskludere punktene på  $\gamma$  fordi de ikke er H-punkter.

Mellomliggenhet for hyperbolske punkter i denne modellen kan defineres som at  $A*B*C$  dersom E-sirkelsegmentene som representerer strålene  $\overrightarrow{BA}$  og  $\overrightarrow{BC}$  er motstående, som her vil si at de ikke er like, men er sirkelsegmenter til samme sirkel.



Figur 56: Poincarés diskmodell. H-punkter representeres av indre punkter til en E-sirkel (lysegrå). H-linjer representeres av E-diametere eller E-sirkelsegmenter som står vinkelrett på den ytre sirkelen. Her er alle linjene parvis parallelle utenom ett par.

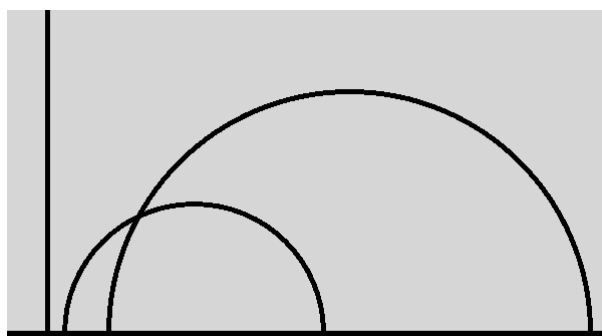
Mens man ikke kan konkludere med at H-segmenter er kongruente hvis og bare hvis E-sirkelstykkene de representeres av er kongruente så kan man i Poincarés diskmodell konkludere med kongruens mellom H-vinkler hvis og bare hvis det er kongruens mellom tilhørende E-vinkel. Med tilhørende E-vinkel mener vi vinkelen mellom tangentene til de to sirkelstykkene som definerer vinkelen. Som følge av dette kan vi gi samme vinkelmål til E-vinklene og H-vinklene. Vi sier at modellen er konform.

For korthet vil vi ofte referere til denne modellen som PDM.

### 4.3 Poincarés halvplanmodell

I Poincarés halvplan går man ut ifra en linje  $l$  som deler det euklidske plan i to halvplan. Mengden av H-punkter blir representert av mengden av E-punkter som ligger på samme side av  $l$ . Når man introduserer koordinatsystem bruker man gjerne x-aksen som linje  $l$  og H-punkt er mengden av E-punkter med positiv y-koordinat. En H-linje representeres i denne modellen enten av en E-stråle fra et punkt på  $l$  som står vinkelrett på  $l$  (med punktet på  $l$  ekskludert), eller med en E-halvsirkel med sentrum og endepunkter på  $l$ , der endepunktene er ekskludert. Strålene og halvsirklene ligger på samme side av  $l$  som H-punktene.

Når det gjelder mellomliggenhet kan vi bruke samme definisjon som for Poincares halvplan, men en definisjon som er mer nyttig når man opererer i et koordinatsystem er følgende: Vi har  $A, B, C \in m$  der  $A, B$  og  $C$  er H-punkter og  $m$  en H-linje. Dersom  $m$  er en E-stråle er  $A * B * C$  hyperbolsk hvis og bare hvis  $A * B * C$  euklidsk. Hvis  $m$  er en E-halvsirkel er  $A * B * C$  hvis og bare hvis  $A' * B' * C'$  der  $A', B'$  og  $C'$  er punkter vi får ved å projisere henholdsvis  $A, B$  og  $C$  normalt ned på  $l$ . Om  $l$  er x-aksen i et koor-



Figur 57: Poincarés halvplanmodell. H-punkter representeres av E-punkter i et halvplan (lysegrå). H-linjer representeres av E-halvsirkler med sentrum på linjen som halvplanet defineres av, eller stråler som står vinkelrett på linjen og har toppunkt på linjen. Her skjærer to linjer hverandre, mens den tredje linjen er parallell med dem begge.

dinatsystem betyr den siste delen at  $x$ -koordinaten til  $B$  ligger mellom  $x$ -koordinatene til  $A$  og  $C$ .

Insidens kan igjen lett utledes fra euklidisk insidens. I likhet med Poincares diskmodell er halvplanmodellen konform, mens det ikke er sammenheng mellom hvor vidt to H-segmenter er kongruente og hvor vidt E-sirkelstykkene eller linjestykkene de representeres av er kongruente.

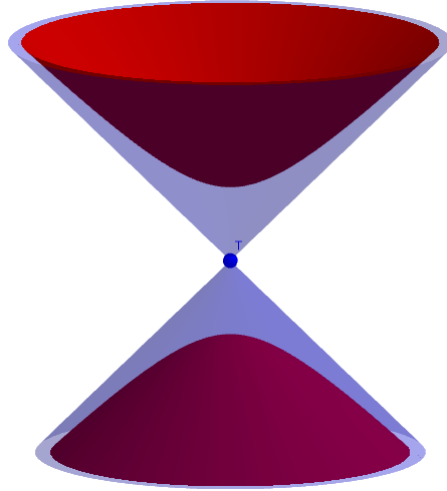
For korthet vil vi ofte referere til denne modellen som PHP.

#### 4.4 Hyperboloidmodellen

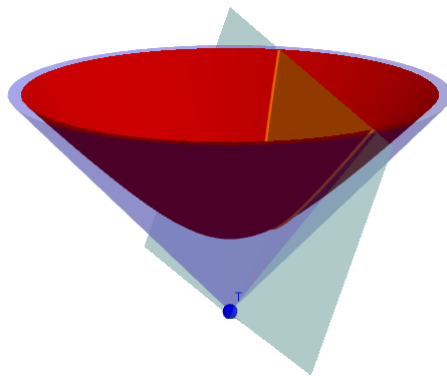
La oss hoppe over presise geometriske definisjoner av en hyperbel. En hyperboloide er resultatet av å rotere en hyperbel rundt aksene gjennom toppunktene. Rotasjon av de tilhørende asymptotene gir oss en asymptotisk kjegle rundt hyperboloiden.

I hyperboloidmodellen ser vi på en av hyperboloidegrenene. Et H-punkt blir definert som et E-punkt (i dette tilfellet i et tredimensjonalt rom) som befinner seg på hyperboloidegrenen. Tolkningen av en H-linje er skjæringen mellom hyperboloidegrenen og et E-plan som inneholder toppunktet til den asymptotiske kjeglen, heretter kalt  $T$ . Disse H-linjene blir E-hyperbelgrener på overflaten av hyperboloidegrenen.

For hyperboloidmodellen kan vi definere mellomliggenhet ved at for tre kolineære punkter  $A$ ,  $B$  og  $C$  så er  $A * B * C$  hvis og bare hvis  $\overrightarrow{TA} | \overrightarrow{TB} | \overrightarrow{TC}$  i euklidisk forstand. Denne relasjonen er veldefinert siden de tre strålene ligger i et felles E-plan, nemlig planet hvis skjæring med hyperboloidegrenen utgjør H-linjen som  $A$ ,  $B$  og  $C$  ligger på. Igjen er



Figur 58: En hyperboloide er resultatet av å rotere en hyperbel om en akse gjennom dens topppunkter. Dens asymptotiske kjegle er resultatet av å rotere dens asymptoter om samme akse.



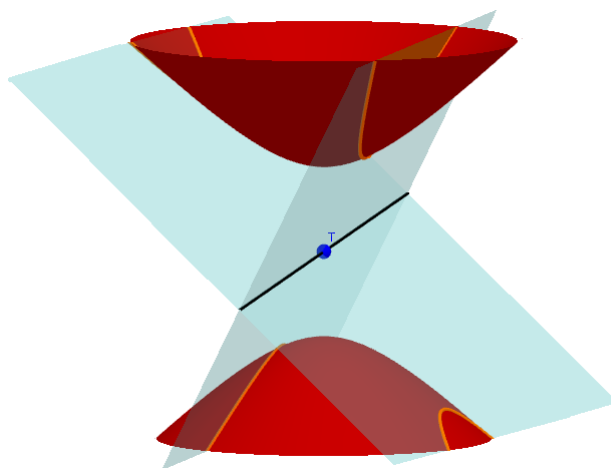
Figur 59: Hyperboloidemodellen. En H-linje representeres av skjæringen mellom hyperboloiden og et E-plan som går gjennom toppunktet til den asymptotiske kjeglen.

definisjonen av insidens greit utledet av euklidsk insidens. Hverken segmentkongruens eller vinkelkongruens kan utledes fra euklidsk geometri.

**Definisjon 4.4.1.** *Vi har at  $O$  er toppunktet til en hyperboloidegren,  $T$  er toppunktet til den asymptotiske kjeglen og  $P$  er et punkt på den asymptotiske kjeglen forskjellig fra  $T$ . Da vil vi kalle  $\angle OTP$  den asymptotiske vinkelen.*

Definisjonen for parallelle linjer i hyperboloidemodellen er den generelle definisjonen at to linjer ikke inneholder noen felles punkt. Dette henger sammen med skjæringen

mellom E-planene som produserer H-linjene. Ettersom E-planene er distinkte og de ikke er parallelle siden de møtes i  $T$ , så skjærer de hverandre i en E-linje. Det at de to H-linjene ikke skjærer hverandre, er ekvivalent med at E-linjen som er snittet mellom E-planene, ikke skjærer hyperboloiden. Enhver stråle gjennom  $T$  i det indre av den asymptotiske kjeglen vil skjære hyperboloidegrenen. For at E-linjen ikke skal skjære hyperboloiden må vinkelen mellom E-linjen og  $\overleftrightarrow{OT}$  være kongruent med eller større enn den asymptotiske vinkelen.



Figur 60: To linjer representert i hyperboloidmodellen er parallelle dersom E-planene, hvis skjæring med hyperboloiden definerer linjene, skjærer hverandre i en E-linje som ikke skjærer hyperboloiden.

For korthet vil vi ofte referere til denne modellen som HYP.

## 4.5 Möbius-transformasjoner

Möbius-transformasjoner er isometrier i de konforme modellene våre for hyperbolsk geometri, altså Poincarés diskmodell og Poincarés halvplan. De er nært knyttet til rasjonale lineærtransformasjoner (RLT-er). Isometriene vi vil bruke mellom Poincarés diskmodell og Poincarés halvplan er en RLT så la oss begynne med å studere dem.

**Definisjon 4.5.1.** *En rasjonal lineærtransformasjon (eller RLT) er en avbildning fra det utvidete komplekse planet  $\overline{\mathbb{C}}$  på seg selv på formen*

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

der  $a, b, c$  og  $d$  er komplekse tall og  $ad - bc \neq 0$ .

Før vi går inn på de viktigste egenskapene får vi bruk for noen hjelpesetninger:

**Lemma 4.5.2.** a) Gitt en rasjonal lineærtransformasjon  $f$ , så er dens inverse funksjon også en RLT.

b) Gitt to rasjonale lineærtransformasjoner  $f$  og  $g$ , så er komposisjonen  $h = f \circ g$  også en RLT.

*Bevis.* La  $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Vi løser for  $z$  for å finne den inverse funksjonen.

$$cwz + wd = az + b.$$

$$z(cw - a) = b - dw.$$

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}.$$

Vi ser at  $ad - bc$  er lik for funksjonen og dens invers. Ser så også på en RLT  $g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  og finner komposisjonen  $h = f \circ g$ :

$$h(z) = \frac{\alpha \frac{az+b}{cz+d} + \beta}{\gamma \frac{az+b}{cz+d} + \delta}.$$

$$h(z) = \frac{\alpha(az + b) + \beta(cz + d)}{\gamma(az + b) + \delta(cz + d)}.$$

$$h(z) = \frac{(\alpha a + \beta c)z + \alpha b + \beta d}{(\gamma a + \delta c)z + \gamma b + \delta d}.$$

Det gjenstår kun å undersøke at  $ad - bc$  er ikke-null.

$$\begin{aligned} (\alpha a + \beta c)(\gamma b + \delta d) - (\alpha b + \beta d)(\gamma a + \delta c) &= \alpha\gamma(ab - ab) + \alpha\delta(ad - bc) + \beta\gamma(bc - ad) + \beta\delta(cd - cd) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)(ad - bc). \end{aligned}$$

Begge faktorene er ikke-null siden per antakelsen at  $f$  og  $g$  er RLT-er. □

Merk for det første at fra formlene for koeffisientene til den inverse funksjonen til en RLT og komposisjonen av to RLT-er, er det tydelig at følgende korollar stemmer:

**Korollar 4.5.3.** a) Gitt en rasjonal lineærtransformasjon  $f$  med reelle koeffisienter har også  $f^{-1}$  reelle koeffisienter.

b) Gitt to rasjonale lineærtransformasjoner  $f$  og  $g$  med reelle koeffisienter har også  $h = f \circ g$  reelle koeffisienter.



Merk også at hvis vi representerer koeffisientene til RLT-ene  $f$  og  $g$  fra beviset for påstand 4.5.2 med matrisene

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

så får vi at koeffisientmatrisene til  $f^{-1}$  og  $h$  er henholdsvis  $(bc - ad)A^{-1}$  og  $AB$ . Merk at om du ganger koeffisientmatrisen til en RLT med en konstant så blir konstanten ganget inn både i teller og nevner til RLT-en, så matrisene  $A$  og  $kA$  representerer samme RLT så lenge  $k \neq 0$ . Dermed er  $(bc - ad)A^{-1}$  og  $A^{-1}$  begge koeffisientmatriser som representerer  $f^{-1}$ . Vi kan altså bruke invertering av koeffisientmatriser til å finne den inverse funksjonen av en RLT og matrisemultiplikasjon til å finne komposisjonen av to RLT-er.

Med det, la oss gå inn på noen viktige resultater.

**Påstand 4.5.4** ([Jah11, Lemma 2.2.1, s. 20]). *1. En RLT avbilder sirkler i  $\overline{\mathbb{C}}$  til sirkler i  $\overline{\mathbb{C}}$ .*

*2. En RLT bevarer vinkelen mellom  $\overline{\mathbb{C}}$ -sirkler.*

*Bevis.* En slik sirkel kan skrives på formen

$$\lambda x^2 + \lambda y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

der  $\lambda, \alpha, \beta$  og  $\gamma$  er reelle tall,  $x = \operatorname{Re}(z)$  og  $y = \operatorname{Im}(z)$ . At sirkelen må ha positiv radius, medfører  $4\lambda\gamma < \alpha^2 + \beta^2$ . Dersom  $\overline{\mathbb{C}}$ -sirkelen er en linje er  $\lambda = 0$ . Siden  $x^2 + y^2 = z\bar{z}$ ,  $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$  og  $y = i\frac{\bar{z}-z}{2}$  kan uttrykket skrives som

$$\lambda z\bar{z} + \mu z + \bar{\mu}\bar{z} + \gamma = 0$$

der  $\mu = \frac{\alpha}{2} - i\frac{\beta}{2}$ . At sirkelen må ha positiv radius, medfører da at  $\lambda\gamma < \mu\bar{\mu}$ . Den inverse til en RLT er selv en RLT, så om vi antar  $w = \phi(z)$  kan vi sette inn  $z = \phi^{-1}(w) = \frac{aw+b}{cw+d}$  og få

$$\lambda \frac{aw+b}{cw+d} \frac{\overline{aw+b}}{\overline{cw+d}} + \mu \frac{aw+b}{cw+d} + \bar{\mu} \frac{\overline{aw+b}}{\overline{cw+d}} + \gamma = 0.$$

Multipliserer med  $(cw+d)\overline{(cw+d)}$  på begge sider og får

$$\begin{aligned} w\bar{w}(\lambda a\bar{a} + \mu a\bar{c} + \bar{\mu} \bar{a}c + c\bar{c}\gamma) + w(\lambda a\bar{b} + \mu a\bar{d} + \bar{\mu} \bar{b}c + c\bar{d}\gamma) \\ + \bar{w}(\lambda \bar{a}b + \mu b\bar{c} + \bar{\mu} \bar{a}d + c\bar{d}\gamma) + \lambda b\bar{b} + \mu b\bar{d} + \bar{\mu} \bar{b}d + d\bar{d}\gamma = 0. \end{aligned}$$

Dette kan skrives som  $\rho w\bar{w} + \eta w + \bar{\eta}\bar{w} + \kappa = 0$  der  $\rho = \lambda a\bar{a} + \mu a\bar{c} + \bar{\mu}a\bar{c} + c\bar{c}\gamma$ ,  $\eta = \lambda a\bar{b} + \mu a\bar{d} + \bar{\mu}b\bar{c} + c\bar{d}\gamma$  og  $\kappa = \lambda b\bar{b} + \mu b\bar{d} + \bar{\mu}b\bar{d} + d\bar{d}\gamma$ . Merk at både  $\rho$  og  $\kappa$  er reelle siden  $\bar{\rho} = \rho$  og  $\bar{\kappa} = \kappa$  (som følge av at  $\lambda$  og  $\gamma$  er reelle tall). Dermed har vi uttrykket på formen vi ønsket for å vise at avbildningen blir en  $\mathbb{C}$ -sirkel så lenge  $\rho\kappa < \eta\bar{\eta}$ , det vil si  $\rho\kappa - \eta\bar{\eta} < 0$ . Vil her hoppe over utregningen, men den gir

$$\rho\kappa - \eta\bar{\eta} = (\lambda\gamma - \mu\bar{\mu})(ad - \bar{b}c)(\bar{a}d - bc).$$

Den første parentesen er negativ per antakelse og de to andre parentesene er hverandres komplekskonjugerte, så produktet av dem er positivt.

En kompleks funksjon er konform rundt ethvert punkt der dens deriverte er ikke-null. Den deriverte av det generelle uttrykket for en RLT blir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left( \frac{az + b}{cz + d} \right) &= \frac{(cz + d) \frac{d}{dz}(az + b) - (az + b) \frac{d}{dz}(cz + d)}{(cz + d)^2} = \frac{acz + ad - acz - bc}{(cz + d)^2} \\ &= \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}. \end{aligned}$$

Vi ser at enhver RLT alltid er ikke-null siden per definisjon av RLT  $ad - bc \neq 0$ .  $\square$

Neste resultat er veldig viktig når vi skal inn på Möbius-transformasjoner:

**Påstand 4.5.5** ([Jah11, Lemma 2.2.3, s. 22]). *For enhver trio av distinkte punkter  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  finnes en unik RLT  $f$  slik at  $f(z_1) = 1$ ,  $f(z_2) = 0$  og  $f(z_3) = \infty$ .*

*Bevis.* Anta først at  $z_1 = \infty$ . Ved innsetning er det lett å se at funksjonen

$$f(z) = \frac{z - z_2}{z - z_3}$$

avbilder punktene korrekt. Siden  $ad - bc = 1 \cdot z_3 - z_2 \cdot 1 = z_3 - z_2 \neq 0$  er formelen en RLT. Om  $z_2 = \infty$  eller  $z_3 = \infty$  er henholdsvis

$$f(z) = \frac{z_1 - z_3}{z - z_3}$$

og

$$f(z) = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}$$

rasjonale lineærtransformasjoner som oppfyller kravene ( $ad - bc$  er henholdsvis  $z_3 - z_1$  og  $z_1 - z_2$ ). Siste mulighet er at ingen av punktene er uendelig. I så fall fungerer funksjonen

$$f(z) = \frac{z - z_2}{z - z_3} \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2},$$

med  $ad - bc = (z_2 - z_3)(z_1 - z_3)(z_1 - z_2)$ , der ingen av faktorene kan være 0. Det finnes dermed alltid en RLT som avbilder  $z_1, z_2$  og  $z_3$  til henholdsvis 1, 0 og  $\infty$ . Anta for motsigelse at det finnes to funksjoner  $f$  og  $g$  som avbilder punktene slik. Ønsker å vise at i så fall er  $h = g \circ f^{-1}$  identitetsfunksjonen, så  $f = g$ . Funksjon  $h$  fikserer  $\infty$  så den må være på formen  $az + b$ . Den fikserer også 0 så den er på formen  $az$ , og siden den fikserer 1, er  $a = 1$  og  $h(z) = z$ .  $\square$

**Korollar 4.5.6.** *Gitt en trio av distinkte punkter  $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$  og en annen trio av distinkte punkter  $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ , så finnes en unik RLT  $f$  slik at  $f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2$  og  $f(z_3) = w_3$ . Om alle punktene er i  $\overline{\mathbb{R}}$  har RLT-en reelle koeffisienter.*

*Bevis.* La  $g$  være RLT-en som avbilder  $z_1, z_2$  og  $z_3$  til henholdsvis 1, 0 og  $\infty$  og la  $h$  være RLT-en som avbilder  $w_1, w_2$  og  $w_3$  på samme måte. Komposisjonen  $f = h^{-1} \circ g$  avbilder som beskrevet i korollaret. Den er unik siden  $h$  og  $g$  er unike og den er en RLT ifølge påstand 4.5.2. Om alle tallene er i  $\overline{\mathbb{R}}$  har  $g$  og  $h$  reelle koeffisienter og ifølge korollar 4.5.3 har  $f$  reelle koeffisienter.  $\square$

La oss nå gå inn på Möbius-transformasjoner. Det som gjør dem nyttige, er at vi kan bruke dem til til å definere kongruens. I euklidisk geometri har vi isometriene translasjon, rotasjon, speiling og glidespeiling. To segmenter  $AB$  og  $CD$  er kongruente hvis og bare hvis det finnes en isometri som avbilder  $AB$  på  $CD$ . Denne isometrien vil være lik komposisjonen av en translasjon  $t$  som tar  $A$  på  $C$  og en rotasjon med  $C$  som sentrum som tar  $t(B)$  på  $D$ . Möbius-transformasjoner kan spille samme rolle for modellene for hyperbolsk geometri. For nå, la oss kun kalle dem automorfier, siden de er bijektive avbildninger fra mengden av punkter i en modell på seg selv, men de kun blir isometrier når vi senere definerer at de bevarer hyperbolsk lengde.

Siden hyperbolske linjer i PHP og PDM er deler av  $\overline{\mathbb{C}}$ -sirkler har vi allerede at RLT-er tar linjer på linjer. Derimot må det flere restriksjoner til for at en funksjon nødvendigvis avbilder et punkt i en modell til et punkt i modellen. For eksempel er funksjonen  $f(z) = -z$  en RLT som tar alle punkter i Poincarés halvplan til punkter i det andre halvplanet. Dermed er den ikke en potensiell isometri for PHP.

**Påstand 4.5.7** ([Jah11, Lemma 2.2.8, s. 24]). *En RLT tar øvre halvplan på seg selv hvis og bare hvis den kan skrives på formen*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

*der koeffisientene er reelle og  $ad - bc > 0$ .*

*Bevis.* En RLT som tar øvre halvplan på seg selv må ta  $\overline{\mathbb{R}}$  på  $\overline{\mathbb{R}}$ , så ifølge korollar 4.5.6 har den reelle koeffisienter. Vi har  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  der koeffisientene er reelle. La oss se hva som skal til for at enhver punkt med positiv imaginærdel blir avbildet til et punkt med positiv imaginærdel. Vi begynner med å utvide brøken med den konjugerte av nevneren for å få en reell nevner:

$$f(z) = \frac{(az+b)(c\bar{z}+c)}{(cz+d)(c\bar{z}+d)} = \frac{acz\bar{z} + (ad+bc)\operatorname{Re}(z) + bd + i(ad-bc)\operatorname{Im}(z)}{(cz+d)(c\bar{z}+d)}.$$

Vi ser at om imaginærdelen er positiv før avbildning må  $ad - bc > 0$  for at også avbildningen har positiv imaginærdel.  $\square$

For Poincarés diskmodell ønsker vi RLT-er som tar ethvert punkt på enhetssirkelen til et punkt på enhetssirkelen og ethvert punkt innenfor enhetssirkelen til et punkt innenfor enhetssirkelen. La oss begynne å bruke at modulus til et komplekst tall  $z$ , det vil si avstanden fra  $z$  til 0 er roten av  $z\bar{z}$  og bruke notasjonen  $|z|$  for modulus til  $z$ .

**Påstand 4.5.8.** *En rasjonal lineærtransformasjon avbilder randen på enhetssirkelen på seg selv og det indre av enhetssirkelen på seg selv hvis og bare hvis den kan skrives på formen*

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}}$$

der  $|a|^2 - |b|^2 > 0$ .

*Bevis.* La oss anta  $|z|^2 = 1$  og se hva som skal til for at  $|f(z)|^2$  blir lik 1.

$$\frac{az+b}{cz+d} \frac{\overline{az+b}}{\overline{cz+d}} = 1$$

$$(az+b)(\overline{az+b}) = (cz+d)(\overline{cz+d})$$

$$|a|^2|z|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(a\bar{b}z) = |c|^2|z|^2 + |d|^2 + 2\operatorname{Re}(c\bar{d}z)$$

$$|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 = 2(\operatorname{Re}(c\bar{d}z) - \operatorname{Re}(a\bar{b}z))$$

Siden likheten kun skal være avhengig av lengden til  $z$  og ikke dens realdel og imaginærdel hver for seg, må koeffisientene være slik at  $(\operatorname{Re}(c\bar{d}z) - \operatorname{Re}(a\bar{b}z))$  automatisk blir 0, som er tilfellet dersom  $a\bar{b} = c\bar{d}$ . Å sette  $c = ka$  og  $d = kb$  er ikke et alternativ, for da blir  $ad - bc = abk - abk = 0$ , så vi har ikke lenger en RLT. Setter i stedet  $\bar{d} = ka$  og  $\bar{b} = kc$ . I så fall får vi

$$|a|^2 + |kc|^2 - |c|^2 - |ka|^2 = 0,$$

som stemmer dersom  $|k| = 1$  (eller  $a=c$ , men det ville medført problemer). Dermed er  $k$  en rotasjon om origo og den generelle formen er

$$f(z) = \frac{az + \overline{kc}}{cz + \overline{ka}}.$$

Merk at om vi utvider brøken med et tall  $m$ , som er en rotasjon med en vinkel som er halvparten av vinkelen  $k$  er en rotasjon med, så er

$$f(z) = \frac{maz + m\overline{kc}}{m cz + m\overline{ka}} = \frac{maz + \overline{m\overline{kc}}}{m cz + \overline{ma}}.$$

Om vi innfører  $\alpha = ma$  og  $\beta = \overline{m\overline{kc}}$ , så blir den generelle formen

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}}$$

Undersøker så hva som må til for at indre punkter avbildes til indre punkter.

$$\frac{\alpha z + \beta \overline{\alpha z} + \overline{\beta}}{\overline{\alpha} z + \overline{\beta} \alpha z + \overline{\beta}} < 1$$

$$(|\alpha|^2 - |\beta|^2)|z|^2 < |\alpha|^2 - |\beta|^2$$

Om  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 < 0$  får vi  $|z|^2 > 1$  når vi deler på  $(|\alpha|^2 - |\beta|^2)$  på begge sider, som strider med antakelsene. Om  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 > 0$  får vi  $|z|^2 < 1$  sånn som vi skal. Dermed må begrensningene på  $\alpha$  og  $\beta$  være at  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 > 0$ .  $\square$

Notasjon: Vil bruke  $\text{Möb}^+(\text{PHP})$  som notasjon for mengden av RLT-er som er automorfier for Poincarés halvplan og  $\text{Möb}^+(\text{PDM})$  for mengden av RLT-er som er automorfier for Poincarés diskmodell. Disse er orienteringsbevarende. Det finnes dertimot en gruppe automorfier for PHP og en gruppe automorfier for PDM som ikke er RLT-er og som er orienteringsreverserende.

**Påstand 4.5.9.** a) Hvis  $f = g \circ h$  der  $h(z) = -\overline{z}$  og  $g \in \text{Möb}^+(\text{PHP})$  så er  $f$  en automorfi i Poincarés halvplan

b) Hvis  $f = g \circ h$  der  $h(z) = \overline{z}$  og  $g \in \text{Möb}^+(\text{PDM})$  så er  $f$  en automorfi i Poincarés diskmodell.

*Bevis.* Komposisjonen av to automorfier er selv en automorfi, så trenger kun å vise at  $h_1(z) = -\overline{z}$  er en automorfi for PHP og  $h_2(z) = \overline{z}$  er en isometri for PDM. Funksjonen  $h_1$  er en komposisjon av  $h_2$  og multiplikasjon med  $(-1)$ . Om vi skriver  $z = x + iy$  blir  $h_2(z) = x - iy$  og  $h_1(z) = -x + iy$ . Geometrisk blir  $h_1$  og  $h_2$  henholdsvis en speiling om den imaginære og om den reelle akse. At disse er orienteringsreverserende isometrier i euklidisk geometri er kjent. At  $h_2$  tar et punkt i PHP på et punkt i PHP er opplagt siden  $z$  og  $h_2(z)$  har samme imaginærdel. At et tall og dets komplekskonjugerte har samme

modulus er også kjent, og kan bevises med kongruente trekkanter, så  $h_1$  tar et punkt i PDM på et punkt i PDM.  $\square$

Notasjon: Kaller mengden av slike automorfier henholdsvis  $\text{Möb}^-(\text{PHP})$  og  $\text{Möb}^-(\text{PDM})$ . Merk at gitt en  $g \in \text{Möb}^+(\text{PHP})$  på formen

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

der  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  og  $ad - bc > 0$  blir

$$f(z) = g(z) \circ (-\bar{z}) = \frac{-a\bar{z} + b}{-c\bar{z} + d}$$

og  $(-a)d - b(-c) = -(ad - bc) < 0$ , så den generelle formen for en automorfi i  $\text{Möb}^-(\text{PHP})$  blir

$$f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

der  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  og  $ad - bc < 0$ . For et element i  $\text{Möb}^-(\text{PDM})$  blir den generelle formen

$$f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{\bar{b}\bar{z} + \bar{a}}$$

der  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  og  $|a|^2 - |b|^2 > 0$ .

Vi sløyfer her beviset for at de to gruppene automorfier av henholdsvis PHP og PDM er de eneste automorfierne. Mengden av automorfier i PHP kaller vi  $\text{Möb}(\text{PHP})$  (med  $\text{Möb}^+(\text{PHP})$  og  $\text{Möb}^-(\text{PHP})$  som delmengder), og mengden av automorfier i PDM kaller vi  $\text{Möb}(\text{PDM})$  (med  $\text{Möb}^+(\text{PDM})$  og  $\text{Möb}^-(\text{PDM})$  som delmengder). Merk at i begge tilfellene er de to delmengdene disjunkte, for en  $f \in \text{Möb}^-(\text{PHP})$  er en komposisjon av en automorfi som er med i og en som ikke er med i  $\text{Möb}^+(\text{PHP})$  og tilsvarende argument kan brukes for at en RLT i  $\text{Möb}^-(\text{PDM})$  ikke også kan være med i  $\text{Möb}^+(\text{PDM})$ .

**Definisjon 4.5.10.** *En invertering  $f$  i en  $H$ -linje  $l$  er en automorfi som fikserer  $l$ , men for alle  $P \notin l$  er  $f(P) \notin l$ .*

**Påstand 4.5.11.** *For hver linje  $l$  i Poincarés halvplanmodell finnes en unik  $f \in \text{Möb}^-(\text{PHP})$  som er en invertering i  $l$ .*

*Bevis.* La oss undersøke fikspunktene til en generell automorfi i  $\text{Möb}^-(\text{PHP})$ :

$$z = f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

$$c|z|^2 + dz - a\bar{z} - b = 0.$$

Alle PHP-linjer er enten del av en sirkel med sentrum på den reelle aksene, eller en vertikal linje. Anta først en sirkel med sentrum  $x$  og radius  $r$  der begge tallene er reelle konstanter. Dens formel blir:

$$\begin{aligned} |z - x|^2 - r^2 &= 0 \\ |z|^2 - xz - x\bar{z} + x^2 - r^2 &= 0. \end{aligned}$$

Om det finnes en  $f \in \text{Möb}^- (\text{PHP})$  som fikserer sirkelen må formelen for fikspunktene til  $f$  bli lik formelen til fikspunktene. Det blir den hvis  $d = -a = x$ ,  $-b = x^2 - r^2$  og  $c = 1$ . Dette gir

$$ad - bc = -x^2 + x^2 - r^2 = -r^2 < 0.$$

Dermed vil det for hver verdi av  $x$  og  $r$  finnes en  $f \in \text{Möb}^- (\text{PHP})$  som fikserer linjen, nemlig

$$f(z) = \frac{-x\bar{z} + r^2 - x^2}{\bar{z} + x}.$$

Anta så en vertikal linje gjennom punktet  $x$  på den reelle aksene. Dens formel blir  $\text{Re}(z) = x$  så

$$\frac{z + \bar{z}}{2} - x = 0.$$

Dette er fikspunktene til en  $f \in \text{Möb}^- (\text{PHP})$  om dens koeffisienter er  $c = 0$ ,  $d = -a = \frac{1}{2}$  og  $b = x$ , der vi kan gange alle koeffisientene med 2 for å unngå brøker. I så fall blir

$$ad - bc = -1 \cdot 1 - 2x \cdot 0 = -1 < 0.$$

Dermed finnes det for hver vertikal linje en  $f \in \text{Möb}^- (\text{PHP})$  som fikserer den, nemlig

$$f(z) = -\bar{z} + 2x.$$

Anta for motsigelse at en  $f \in \text{Möb}^- (\text{PHP})$  fikserer en PHP-linje  $l$ , men  $l \nmid \{P, Q\}$  der  $Q = f(P)$  og  $P \notin l$ . Anta  $A, B \in l$ . Siden Möbius-transformasjoner er konforme må  $\angle BAP \cong \angle BAQ$  og  $\angle ABP \cong \angle ABQ$ . Siden  $A$  og  $B$  er fiksert og  $P$  og  $Q$  er på samme side av  $l$  må  $\angle BAP = \angle BAQ$  og  $\angle ABP = \angle ABQ$ . Men i så fall er  $Q$  også skjæringspunktet mellom  $\overleftrightarrow{AP}$  og  $\overleftrightarrow{BP}$ , så  $P = Q$ , noe som strider mot at  $P \notin l$  og det kun er punkter på  $l$  som fikseres av  $f$ .  $\square$

Grunnen til at vi bare viser resultatet for Poincarés halvplanmodell er at vi kun trenger å definere kongruens direkte i en modell. Deretter kan kongruens i de andre modellene defineres ved hjelp av isometrier mellom modellene. Før vi er klare for å definere kongruens må vi studere Möbius-transformasjonene i PHP nøyere.

**Påstand 4.5.12.** *La  $z_1$  og  $z_3$  være endepunkter til en linje i Poincarés halvplan som inneholder punkt  $z_2$  og la  $w_1$  og  $w_3$  være endepunkter til en annen PHP-linje som inneholder  $w_2$ . Om  $f$  er den unike RLT-en slik at  $f(z_i) = w_i$  for  $i = 1, 2, 3$  så er  $f \in \text{Möb}^+(\text{PHP})$ .*

*Bevis.* En RLT som tar tre punkter på en sirkel til tre punkter på en annen sirkel, må ta den ene sirkelen på den andre. Enhver RLT bevarer vinkler, så siden  $f$  tar en sirkel som står normalt på den reelle akse i  $z_1$  og  $z_3$  på en sirkel som står normalt på den reelle akse i  $w_1$  og  $w_3$  må den ta den reelle akse på seg selv. I tillegg tar den et punkt i øvre halvplan til et punkt i øvre halvplan, og fra beviset for påstand 4.5.7, ser vi at en RLT som tar den reelle akse på seg selv enten tar alle punkter i øvre halvplan på punkter i øvre halvplan (om  $ad - bc > 0$ ), eller alle punkter i øvre halvplan på punkter i nedre halvplan (om  $ad - bc < 0$ ). Dermed må  $f$  være en automorfi for det øvre halvplanet og  $f \in \text{Möb}^+(\text{PHP})$ .  $\square$

En PHP-linje er unikt bestemt av to punkter på den. Om de har samme realdel er linjen den vertikale strålen som punktene ligger på. Ellers er sentrum til halvsirkelen linjen representeres av skjæringspunktet mellom den reelle akse og punktenes midtnormal. Dermed kan man for fire punkter  $A, B, A'$  og  $B'$ , finne endepunktene til linjen og den unike RLT  $f \in \text{Möb}^+(\text{PHP})$  som avbilder  $\overrightarrow{AB}$  på  $\overrightarrow{A'B'}$ . Det er ikke gitt at denne RLT-en tar  $B$  på  $B'$ , og vår definisjon for kongruens vil være at om den tar  $B$  på  $B'$  er  $AB \cong A'B'$ .

Dette kravet kan formuleres til dersom  $AB \cong A'B'$ , så finnes en unik  $f \in \text{Möb}^+(\text{PHP})$  slik at  $f(A) = A'$  og  $f(B) = B'$ , for mens det alltid finnes RLT-er som tar  $A$  på  $A'$  og  $B$  på  $B'$  kan kun én av dem være i  $\text{Möb}^+(\text{PHP})$ , og kun dersom den tar  $\overrightarrow{AB}$  på  $\overrightarrow{A'B'}$ . Andre RLT-er som tar  $A$  på  $A'$  og  $B$  på  $B'$  vil avbilde sirkelen de ligger på på en sirkel som ikke står normalt på den reelle akse.

Merk at det også finnes en unik  $g \in \text{Möb}^-(\text{PHP})$  slik at  $g(A) = A'$  og  $g(B) = B'$ , nemlig komposisjonen  $g = h \circ f$ , der  $f$  er den unike RLT-en i  $\text{Möb}^+(\text{PHP})$  slik at  $f(A) = A'$  og  $f(B) = B'$ , og  $h \in \text{Möb}^-(\text{PHP})$  er den unike Möbius-transformasjonen som er en invertering i  $\overrightarrow{A'B'}$ . At komposisjonen oppfyller  $g(A) = A'$  og  $g(B) = B'$  er opplagt. Siden den er en automorfi er den i  $\text{Möb}(\text{PHP})$  og siden en komposisjon av to automorfier der kun én er en RLT, ikke selv er en RLT, så kan den ikke være i  $\text{Möb}^+(\text{PHP})$ .

Definisjonen på vinkelkongruens i Poincarés halvplan må bli at dersom  $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ , så vil det finnes en  $f \in \text{Möb}(\text{PHP})$ , slik at både  $f(\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{B'A'}$  og  $f(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{B'C'}$ . La  $f$  være den unike RLT-en i  $\text{Möb}^+(\text{PHP})$  som tar  $\overrightarrow{BA}$  på  $\overrightarrow{B'A'}$ . En RLT er konform, så



sirkelen  $\overrightarrow{BC}$  ligger på, avbildes til en sirkel som danner en vinkel med  $\overrightarrow{B'A'}$  med samme euklidiske vinkelmål som  $\angle ABC$ . Siden vi definerer det hyperbolske vinkelmålet i modellene lik det euklidiske er definisjonen av kongruens veldefinert.

Ettersom det ikke er sikkert at den unike  $f \in \text{Möb}^+(\text{PHP})$ , tar sirkelen  $\overrightarrow{BC}$  ligger på til en sirkel som danner en vinkel med samme euklidisk vinkelmål på samme side av  $\overrightarrow{A'B'}$  som  $C'$ , kan det hende at Möbius-transformasjonen for kongruensen mellom to vinkler, i stedet er lik den unike  $g \in \text{Möb}^-(\text{PHP})$  som tar  $\overrightarrow{BA}$  på  $\overrightarrow{B'A'}$ . Dermed er det en unik  $f \in \text{Möb}(\text{PHP})$  som tar en vinkel på en kongruent vinkel.

**Definisjon 4.5.13.** a) Vi har to hyperbolske segmenter representert i Poincarés halvplanmodell som  $AB$  og  $A'B'$ . Hvis det finnes en unik  $f \in \text{Möb}^+(\text{PHP})$  slik at  $f(A) = A'$  og  $f(B) = B'$  så er segmentene kongruente.

b) Vi har to hyperbolske vinkler representert i Poincarés halvplanmodell som  $\angle ABC$  og  $\angle A'B'C'$ . Hvis det finnes en unik  $f \in \text{Möb}(\text{PHP})$  slik at  $f(\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{B'A'}$  og  $f(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{B'C'}$  så er vinklene kongruente.

c) La  $\phi_1$  være en bijeksjon fra Poincarés diskmodell til Poincarés halvplanmodell som tar PDM-linjer på PHP-linjer. For to segmenter  $AB$  og  $A'B'$  representert i PDM er  $AB \cong A'B'$  dersom  $\phi_1(AB) \cong \phi_1(A'B')$  i PHP.

d) For to vinkler  $\angle ABC$  og  $\angle A'B'C'$  representert i Poincarés diskmodellen er  $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$  dersom  $\phi_1(\angle ABC) \cong \phi_1(\angle A'B'C')$  i Poincarés halvplanmodell.

e) La  $\phi_2$  være en bijeksjon fra Beltrami–Klein-modellen til Poincarés diskmodell som tar BKM-linjer på PDM-linjer. For to segmenter  $AB$  og  $A'B'$  representert i BKM er  $AB \cong A'B'$  dersom  $\phi_2(AB) \cong \phi_2(A'B')$  i PDM.

f) For to vinkler  $\angle ABC$  og  $\angle A'B'C'$  representert i Beltrami–Klein-modellen er  $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$  dersom  $\phi_2(\angle ABC) \cong \phi_2(\angle A'B'C')$  i Poincarés diskmodell.

g) La  $\phi_3$  være en bijeksjon fra hyperboloidmodellen til Beltrami–Klein-modellen som tar HYP-linjer på BKM-linjer. For to segmenter  $AB$  og  $A'B'$  representert i HYP er  $AB \cong A'B'$  dersom  $\phi_3(AB) \cong \phi_3(A'B')$  i BKM.

h) For to vinkler  $\angle ABC$  og  $\angle A'B'C'$  representert i hyperboloidmodellen er  $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$  dersom  $\phi_3(\angle ABC) \cong \phi_3(\angle A'B'C')$  i Beltrami–Klein-modellen.

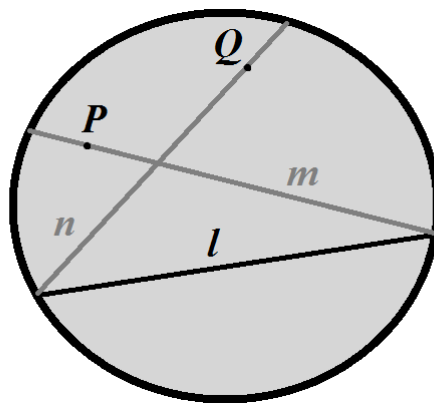
## 4.6 Isometrier mellom modellene

Som forrige avsnitt viser er isometrier nyttige når en studerer ulike hyperbolske modeller, for de hjelper oss å overføre konseptet kongruens fra modellene der de er lettest å studere til de øvrige modellene. Isometrier skal bevare de viktigste egenskapene til hver modell. At kongruens bevares følger fra definisjonen vår av kongruens, men isometrien må også

bevare insidens ved å ta tolkningen av en H-linje i en modell på tolkningen av en H-linje i en annen modell, og den må bevare mellomligheten.

**Lemma 4.6.1.** *Gitt en linje  $l$  i hyperbolsk geometri og to punkter  $P$  og  $Q$  på samme side av  $l$ , så finnes det linjer  $m$  og  $n$  slik at  $P \in m$ ,  $Q \in n$ ,  $m$  og  $n$  begge er parallelle med  $l$  og  $m$  og  $n$  ikke er parallelle med hverandre.*

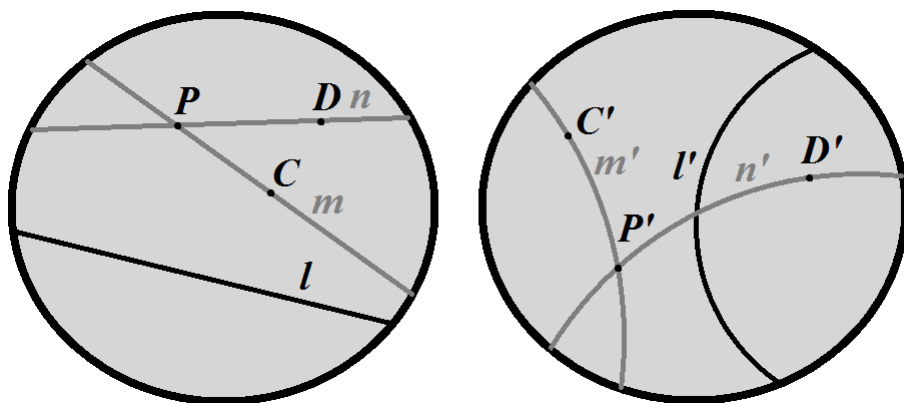
Hjelpesetningen er enklest å bevise med assymptotisk parallelle linjer som vi kommer inn på senere. Vil her sløyfe beviset, men ha med en illustrasjon av hvordan setningen kan bevises.



Figur 61: For ethvert par av punkter  $P$  og  $Q$  på samme side av en linje  $l$ , kan man finne en  $m$  som inneholder  $P$  og er assymptotisk parallell med  $l$ , og en  $n$  som inneholder  $Q$  og er assymptotisk parallell med  $l$  slik at  $m$  og  $n$  skjærer hverandre.

**Påstand 4.6.2.** *Om  $A * B * C$  i én modell for hyperbolsk geometri, vil enhver insidensbevarende bijeksjon  $\phi$  fra modellen til en annen modell være slik at  $\phi(A) * \phi(B) * \phi(C)$  i den andre modellen.*

*Bevis.* La  $A * B * C$  i modell  $X$  og la  $l$  være en linje som inneholder  $B$  og som ikke er  $\overleftrightarrow{AC}$ . La  $A' = \phi(A)$ ,  $B' = \phi(B)$  osv. La  $D \in \overleftrightarrow{AC}$  være et hvilket som helst punkt på samme side av  $l$  som  $C$ . La  $P$  være skjæringen mellom linjene  $m$  og  $n$  som inneholder henholdsvis  $C$  og  $D$  og begge er parallelle med  $l$ , men ikke med hverandre. En insidensbevarende bijeksjon må ta parallelle linjer på parallelle linjer, men om  $C'|l|D'$  må enten  $m'$  eller  $n'$  skjære  $l'$ , avhengig av hvilken side  $P'$  ender på. Dermed må  $l'|\{C', D'\}$  og med samme argument må alle punkter på samme side av  $l$  som  $A$  avbildes til punkter på samme side av  $l'$  som  $A'$ . Om  $l'|\{A', C'\}$  så avbildes alle punkter på  $\overleftrightarrow{AC}$  til strålen  $\overrightarrow{B'A'}$  som strider med at  $\phi$  er insidensbevarende. Dermed må  $A'|l|C'$  og  $A' * B' * C'$ .  $\square$



Figur 62: Dersom et punkt på samme side av  $l$  som  $C$  avbildes til et punkt på motsatt side av  $l'$  sammenliknet med  $C'$ , må  $\phi$  avbilde to parallelle linjer på to linjer som skjærer hverandre.

At to modeller er isometriske er en ekvivalensrelasjon. Dersom  $\phi_1$  er en isometri fra modell  $A$  til modell  $B$ , og  $\phi_2$  er en isometri fra modell  $B$  til modell  $C$ , så er komposisjonen  $\phi_3 = \phi_2 \circ \phi_1$  en isometri fra modell  $A$  til modell  $C$ . Når vi skal bevise at de fire modellene for hyperbolsk geometri er isometriske, er det dermed ikke nødvendig å finne parvise isometrier for alle de seks mulige parene. Om vi finner isometrier mellom modeller  $A$  og  $B$ ,  $B$  og  $C$  og  $C$  og  $D$ , er det nok til å bevise at også  $A$  og  $C$ ,  $B$  og  $D$  og  $A$  og  $D$  er isometriske.

**Definisjon 4.6.3.** En stereografisk projeksjon i et tredimensjonalt, euklidisk rom, er en bijektiv avbildning fra et geometrisk legeme  $A$  til et annet legeme  $B$  der man tar utgangspunkt i et punkt kalt projeksjonssentrum  $S$ . Hvert punkt  $P$  på  $A$  blir avbildet til punktet  $Q$  på  $B$  som er slik at  $P$ ,  $Q$  og  $S$  er kolineære.

**Definisjon 4.6.4.** Vertikal projeksjon i et tredimensjonalt, euklidisk rom er en avbildning fra et legeme  $A$  til et legeme  $B$  der man tar utgangspunkt i en linje  $l$  kalt projeksjonsvertikalen. Punkt  $P$  på  $A$  blir avbildet til punktet  $Q$  på  $B$  som er slik at  $\overleftrightarrow{AP}$  er parallell med  $l$ .

Vi kan tenke på en vertikal projeksjon som en stereografisk projeksjon med uendelig som projeksjonssentrum.

**Teorem 4.6.5.** La Poincarés diskmodell og Poincarés halvplanmodell være representert av et utvidet komplekst plan, der  $\gamma$  i PDM er enhets sirkelen  $|z| = 1$ , og halvplanet punktene i PHP befinner seg i, er mengden av punkter med positiv imaginærdel. I så fall er

$$\phi_1(z) = \frac{1 - iz}{z - i}$$

en isometri fra PDM til PHP.

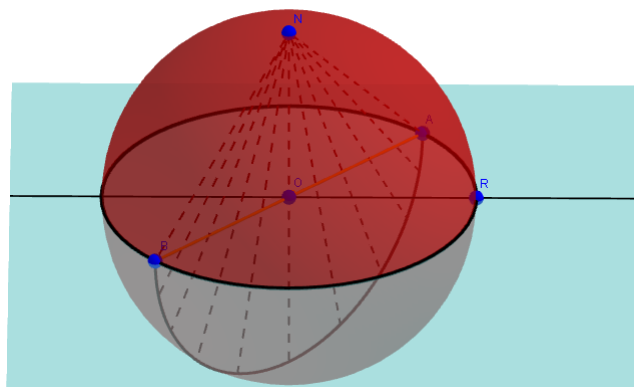
*Bevis.* Etersom  $\phi_1$  er en RLT avbilder den  $\overline{\mathbb{C}}$ -sirkler til  $\overline{\mathbb{C}}$ -sirkler. Vi vil vise at den tar enhetssirkelen på den reelle akse og et indre punkt for enhetssirkelen på øvre halvplan. Når det er bevist vil, siden den er konform, enhver  $\overline{\mathbb{C}}$ -sirkel som står normalt på enhets-sirkelen (tolkningen av en linje i Poincarés diskmodell) avbildes til en  $\overline{\mathbb{C}}$ -sirkel som står normalt på den reelle akse (tolkningen av en linje i Poincarés halvplanmodell).

$$\begin{aligned}\phi_1(z) &= \frac{1-iz}{z-i} = \frac{1-ix+y}{x+iy-i} \\ &= \frac{(1-ix+y)(x-iy+i)}{(x+iy-i)(x-iy+i)} = \frac{x-iy+i-ix^2-xy+x+xy-iy^2+iy}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{2x+i(1-x^2-y^2)}{x^2+y^2+1-2y} = \frac{2\operatorname{Re}(z)+i(1-|z|^2)}{1+|z|^2-2\operatorname{Im}(z)}.\end{aligned}$$

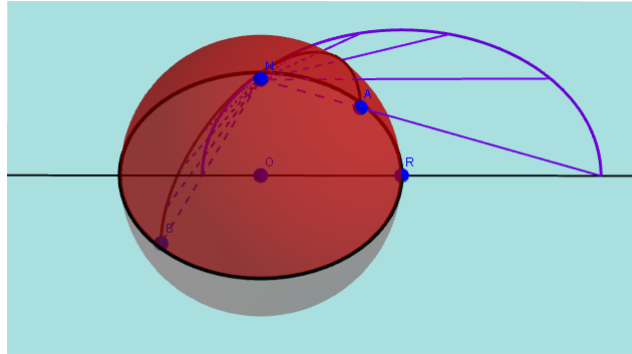
Vi ser at når  $|z|^2 < 1$  er nevneren reell og positiv, og imaginærdelen i telleren er positiv, så et indre punkt i  $\gamma$  avbildes til øvre halvplan. Om  $|z|^2 = 1$  blir imaginærdelen 0, så  $\gamma$  avbildes til den reelle akse (inkludert at  $i$  avbildes til  $\infty$ ).  $\square$

Geometrisk tolkning av  $\phi_1$  er at den er en komposisjon av:

1. Stereografisk projeksjon fra  $A$  til  $B$  med  $N$  som projeksjonssentrum.
2. Rotasjon av  $S$  om akse  $\overrightarrow{OR}$  slik at  $B$  blir avbildet til  $C$ , der  $C$  er halvkulen med positiv  $y$ -verdi ( $N$  fikseres).
3. Stereografisk projeksjon fra  $C$  til  $A$  med  $N$  som projeksjonssentrum.

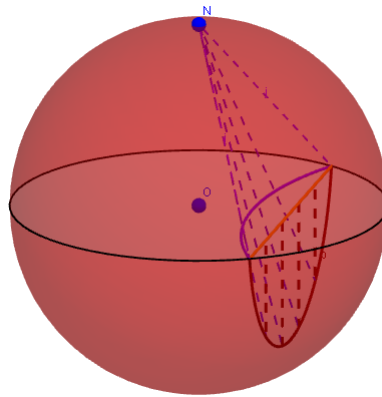


Figur 63: Trinn 1: En linje representert i Poincarés diskmodell (oransje), blir projisert stereografisk (brunt) ut til overflaten av en E-kule som har  $\gamma$  som en storsirkel.



Figur 64: Trinn 3: Stereografisk projeksjon (lilla) fra kuleoverflaten ut til linjens representasjon i Poincarés halvplanmodell.

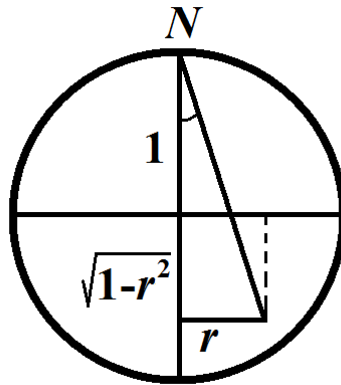
**Teorem 4.6.6.** *Vi har et plan  $A$  i et tredimensjonalt rom der  $\gamma$  er en sirkel i planet med sentrum  $O$  der  $OR$  er en radius. Både BKM-punkter og PDM-punkter tolkes som indre punkter for  $\gamma$ . Anta også en kule  $S$  med sentrum i  $O$  og  $OR$  som en radius. La  $N$  være et punkt på  $B$  slik at  $\overrightarrow{ON}$  står normalt på plan  $A$ . La  $B$  være halvkulen avgrenset av  $\gamma$  som ikke inneholder punkt  $N$ . La  $\phi_2$  være komposisjonen av vertikal projeksjon fra  $A$  til  $B$  med  $\overrightarrow{ON}$  som projeksjonsvertikal og stereografisk projeksjon fra  $B$  til  $A$  med  $N$  som projeksjonssentrum. Da er  $\phi_2$  en isometri fra Beltrami–Klein-modellen til Poincares diskmodell.*



Figur 65: En H-linjes representasjon i Beltrami–Klein-modellen (oransje) blir avbildet til dens representasjon i Poincarés diskmodell ved en komposisjon av vertikal projeksjon (brun) og stereografisk projeksjon (lilla).

*Bevis.* Innfør et koordinatsystem der  $O$  er origo,  $A$  er  $xy$ -planet,  $R = (1, 0, 0)$  og  $N = (0, 0, 1)$ . I så fall blir  $\gamma$  enhetssirkelen i  $xy$ -planet,  $S$  enhetskulen og  $B$  halvsirkelen bestående av punkter på  $S$  med negativ  $z$ -verdi. La oss bruke polarkoordinater i

xy-planet. Begge projeksjonene bevarer vinkelen, så la oss fokusere på radius. Vertikal projeksjon av et punkt med radius  $r$  gir det z-koordinat  $-\sqrt{1-r^2}$ . Den stereografiske projeksjonen gir oss formlike trekkanter. Radiusen til punktet i Poincarés diskmodell blir  $\frac{r}{1+\sqrt{1-r^2}}$ .



Figur 66: Den stereografiske projeksjonen som etterfølger den vertikale gir oss to rette trekkanter med en felles vinkel.

Merk at om  $r$  er mindre enn 1 blir teller mindre enn 1 og nevner større enn 1, så radiusen blir mindre enn 1. Om  $r$  er 1 blir  $\frac{r}{1+\sqrt{1-r^2}}$  også 1. Dermed vil  $\phi_2$  avbilde et punkt i BKM til et unikt punkt i PDM og punktene på  $\gamma$  fikseres. La oss finne den inverse avbildningen. La  $r_X$  være radien til et punkt  $P$  i BKM og  $r_Y$  radien til  $\phi_2(P)$  i PDM.

$$r_Y = \frac{r_X}{1 + \sqrt{1 - r_X^2}}.$$

$$r_Y + r_Y \sqrt{1 - r_X^2} = r_X.$$

$$r_Y \sqrt{1 - r_X^2} = r_X - r_Y.$$

$$r_Y^2 (1 - r_X^2) = r_X^2 - 2r_Y r_X + r_Y^2.$$

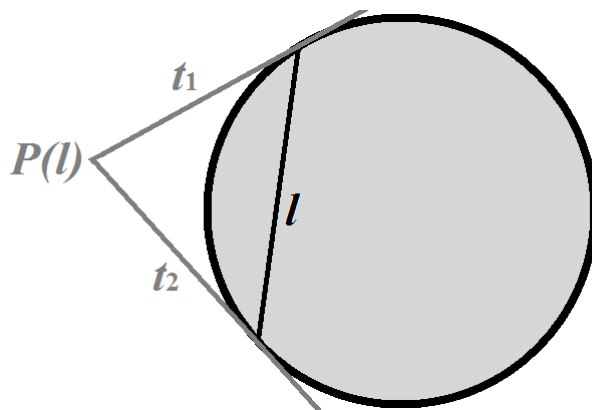
$$r_X^2 (1 + r_Y^2) = 2r_Y r_X.$$

$$r_X = \frac{2r_Y}{1 + r_Y^2}$$

Også  $\phi_2^{-1}$  tar et punkt med radius mindre enn 1 til et unikt punkt med radius mindre enn 1.

Før vi tar beviset for at en linje i BKM avbildes til en linje i PDM, la oss definere polen til en linje i Beltrami–Klein-modellen og Poincarés diskmodell.

**Definisjon 4.6.7.** Anta en hyperbolsk linje representert i Beltrami–Klein-modellen eller Poincarés diskmodell. La  $P$  og  $Q$  være endepunktene på sirkel  $\gamma$ . Linjens pol  $P(l)$  er E-punktet der tangentene til  $\gamma$  i punktene  $P$  og  $Q$  skjærer hverandre.



Figur 67: Polen til en linje er skjæringspunktet mellom  $\gamma$  sine tangenter i linjens endepunkter.

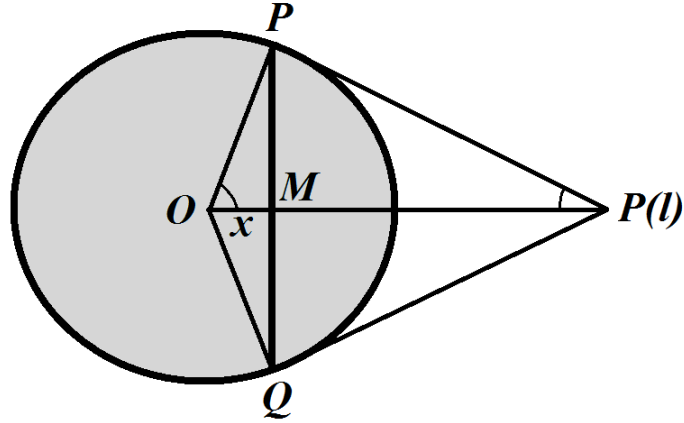
Merk at sirkelen hvis sirkelsegment representerer en H-linje i PDM må ha sentrum i linjens pol, for kun da står linjen vinkelrett på  $\gamma$  i begge endepunktene. La oss bruke et komplekst koordinatsystem der  $\gamma$  er enhetssirkelen. Gitt en hvilken som helst H-linje, kan vi velge retningen til den reelle aksens slik at alle E-punktene har samme realdel  $x$ , der  $x$  er ikke-negativ. Den reelle aksens blir midtnormalen mellom endepunktene, og grunnet symmetri må linjens pol ligge på den reelle aksens. Trekant  $\triangle POP(l)$  er rettvinklet og  $\text{Re}(P(l))$  er lik lengden til hypotenusen, det vil si (siden  $PO$  har lengde 1),  $\frac{1}{\cos(\angle POP(l))}$ . På den andre side er  $x = \cos(\angle POP(l))$  så polen er punktet  $\frac{1}{x}$ . Vi parametriserer H-linjen til  $x + it$ , der  $-\sqrt{1-x^2} < t < \sqrt{1-x^2}$ .

Vi går ut ifra et punkt på linjen. Finner avbildningen  $\phi_2(x + it)$  ved å dele på faktoren  $1 + \sqrt{1-x^2-t^2} = 1 + \sqrt{1-x^2-t^2}$  og får  $\frac{x + it}{1 + \sqrt{1-x^2-t^2}} + i \frac{t}{1 + \sqrt{1-x^2-t^2}}$ . Utvider deretter med  $1 - \sqrt{1-x^2-t^2}$  og får

$$\frac{x + it}{x^2 + t^2} (1 - \sqrt{1-x^2-t^2}).$$

Vil så finne kvadratet til avstanden i polen og vise at det er uavhengig av parameteren  $t$ . Vil for korthet definere  $s = \sqrt{1-x^2-t^2}$ .

$$\left( \frac{x - x\sqrt{1-x^2-t^2}}{x^2 + t^2} - \frac{1}{x} \right)^2 + \left( \frac{t - t\sqrt{1-x^2-t^2}}{x^2 + t^2} \right)^2$$



Figur 68: Vi går ut ifra en koordinatsystem der H-linjen representeres av et vertikalt E-segment som kan parametriseres til  $x + it$ .

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x^2 - x^2s - x^2 - t^2)^2 + (xt - xts)^2}{x^2(x^2 + t^2)^2} \\
 &= \frac{x^4s^2 + t^4 + 2x^2t^2s + x^2t^2 - 2x^2t^2s + x^2t^2s^2}{x^2(x^2 + t^2)^2} \\
 &= \frac{x^4s^2 + t^4 + x^2t^2 + x^2t^2s^2}{x^2(x^2 + t^2)^2}.
 \end{aligned}$$

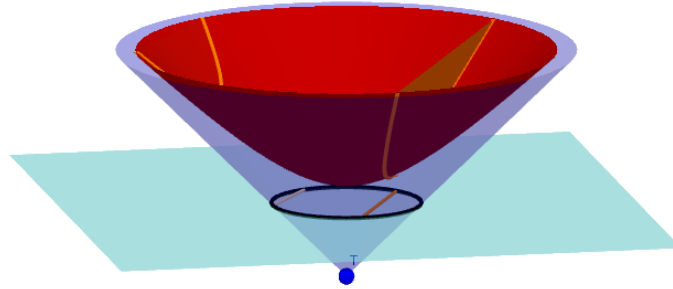
Setter inn for  $s^2$  og får:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^4 - x^6 - x^4t^2 + t^4 + x^2t^2 + x^2t^2 - x^4t^2 - x^2t^4}{x^2(x^2 + t^2)^2} \\
 &= \frac{(1 - x^2)(x^2 + t^2)^2}{x^2(x^2 + t^2)^2} = \frac{1 - x^2}{x^2}.
 \end{aligned}$$

Merk at dersom BKM-linjen er en diameter, vil  $x$  være 0, så vi får deling på 0 når vi skal finne polen. Derimot kan det lett vises at for en diameter vil den vertikale og den stereografiske projeksjonen skje i samme plan, så diameteren blir avbildet til seg selv (til tross for at origo er det eneste enkeltpunktet som fikseres).  $\square$

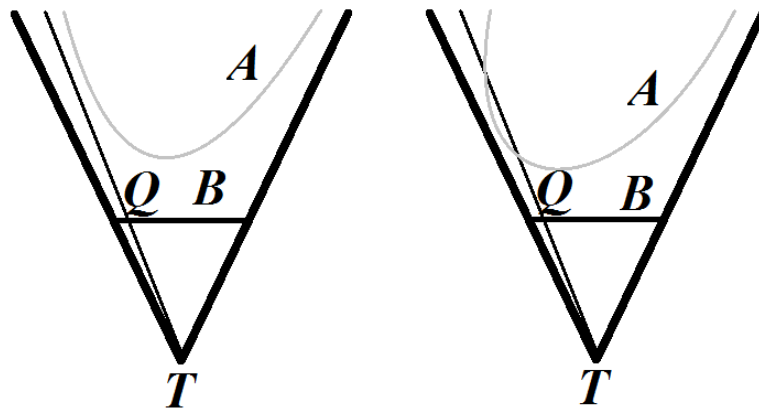
**Teorem 4.6.8.** *Vi har en hyperboloidegren  $A$  med toppunkt  $O$  hvis asymptotiske kjegle har toppunkt  $T$ . La  $B$  være et plan som står normalt på  $\overrightarrow{OT}$ , og la  $P$  være skjæringen mellom  $B$  og  $\overrightarrow{OT}$  ( $P$  kan være  $O$ , men ikke  $T$ ). La  $\gamma$  være sirkelen som er snittet mellom den asymptotiske kjeglen og  $B$ . La  $\phi_3$  være stereografisk projeksjon fra  $A$  til  $B$  med  $T$  som projeksjonssentrum. Da vil  $\phi_3$  være en isometri fra hyperboloidemodellen til Beltrami-Klein metoden.*





Figur 69: To H-linjer sine representasjoner i hyperboloidmodellen avbildes til deres representasjon i Beltrami–Klein-modellen ved stereografisk projeksjon.

*Bevis.* Ethvert punkt  $Q \in A$  avbildes til snittet mellom  $B$  og  $\overrightarrow{TQ}$ . Beltrami–Kleinmodellen består av alle indre punkter for  $\gamma$ , som er alle punkter i plan  $B$  som er indre punkter for den asymptotiske kjeglen. Om vi antar at det ikke finnes en skjæring mellom  $B$  og  $\overrightarrow{TQ}$  i den asymptotiske kjeglen indre kommer vi på kant med kontinuitetsaksiomet. Om vi antar at det finnes to distinkte slike punkter  $Q'$  og  $Q''$  så må  $T \in \overleftrightarrow{Q'Q''}$  så  $T \in B$  som strider med antakelsene. Går så ut ifra et punkt  $Q$  i det indre av  $\gamma$ . Om vi antar at antall punkter på  $A$  kolineært med  $T$  og  $Q$  er entern 0 eller 2 får vi i begge tilfeller at i planet som inneholder punktene  $P$ ,  $Q$  og  $T$  vil "hyperbelen" ikke nærme seg en av asymptotene sine siden  $\overrightarrow{TQ}$  ligger mellom asymptoten og "hyperbelen" (i hvert fall etter et bestemt punkt). Dette strider med antakelsene.



Figur 70: Til venstre: Situasjonen vi får om vi antar at det ikke finnes punkter på  $A$  som er kolineære med  $T$  og  $Q$ . Til høyre: Situasjonen vi får om vi antar at det finnes to.

En linje i HYP er snittet mellom  $A$  og et plan gjennom  $T$ . Stereografiske projeksjoner til  $B$  vil foregå i dette planet, så avbildningen vil inneholde punkter som ligger i begge planene, og snittet mellom to plan er en linje. At avbildningen kun består av punktene på linjen som ligger mellom skjæringspunktene mellom linjen og  $\gamma$ , følger av at  $\gamma$  er skjæringen mellom  $B$  og den assymptotiske kjeglen.  $\square$

## 4.7 Bevis for at modellene er konsistente

For å bevise at modellene våre er konsistente med egenskapene til hyperbolsk geometri, må vi vise at med tolkningene av linjer, insidens, mellomliggenhet og kongruens oppfyller modellene alle de hyperbolske aksiomene. For hvert aksiom trenger vi kun å vise det i én modell ettersom modellene er isometriske.

**Påstand 4.7.1.** *Aksiomene for insidens gjelder i Beltrami–Klein-modellen.*

*Bevis.* I-1) Vi har to punkter i BKM. Det finnes en unik E-linje gjennom punktene siden aksiom I-1 gjelder for euklidisk geometri. BKM-linjen som inneholder punktene er linjestykket mellom de to skjæringspunktene mellom E-linjen og sirkelen  $\gamma$ . Den er unik siden E-linjen er unik.

I-2) Vi har en BKM-linje med endepunkter  $A$  og  $B$ . La  $l$  være E-linjen som inneholder  $A$  og  $B$ . At aksiom M-2 gjelder for euklidisk geometri gir oss at det finnes et punkt  $C$  mellom  $A$  og  $B$ . Bruker vi M-2 en gang til finner vi  $D \in l$  mellom  $A$  og  $C$  og vi har at  $C$  og  $D$  begge er punktet på BKM-linjen.

I-3) Vi har en BKM-linje som inneholder punktet  $P$ . La  $l$  være E-linjen som BKM-linjen er en del av. La  $m$  være en E-linje som står normalt på  $l$  i  $P$ . La  $A$  være et skjæringspunkt mellom  $l$  og  $\gamma$  og  $B$  et skjæringspunkt mellom  $m$  og  $\gamma$ . Bruker at M-2 gjelder i euklidisk geometri til å finne  $Q$  mellom  $A$  og  $P$  og  $R$  mellom  $B$  og  $P$ . Punktene  $P$ ,  $Q$  og  $R$  er ikke-kolineære BKM-punkter.  $\square$

**Påstand 4.7.2.** *Aksiomene for mellomliggenhet gjelder i Beltrami–Klein-modellen.*

*Bevis.* Alle aksiomene utenom M-2 blir trivielle siden mellomliggenhet i BKM er direkte knyttet til mellomliggenhet i euklidisk geometri. Vi har to punkter  $B$  og  $D$  på en BKM-linje  $l$  med  $P$  og  $Q$  som endepunkter. La  $P*B*D$  i euklidisk forstand. Ved gjentatt bruk av aksiom M-2 i euklidisk geometri, finner vi punkter  $A, C, E \in l$  slik at  $P*A*B$ ,  $B*C*D$  og  $D*E*Q$  i euklidisk forstand. Ifølge påstand 3.3.8 er  $A*B*D$  og  $B*D*E$  i euklidisk forstand. Dermed er også  $A*B*D$ ,  $B*C*D$  og  $B*D*E$  i Beltrami–Klein-modellen.  $\square$

**Påstand 4.7.3.** *Aksiomene for kongruens gjelder i Poincarés halvplanmodell.*

*Bevis.* K-1) La  $f$  være den unike RLT-en i  $\text{Möb}^+(\text{PHP})$  som tar  $A$  på  $A'$  og  $\overrightarrow{AB}$  på  $r$ . Da er  $B' = f(B)$  på  $r$  og  $AB \cong A'B'$ .

K-2)

- (i) Vi har  $AB \cong AB$  siden identitetsavbildningen  $f(z) = z$  er med i  $\text{Möb}^+(\text{PHP})$ .
- (ii) Vi har at  $AB \cong A'B'$  impliserer  $A'B' \cong AB$ , for hvis  $f \in \text{Möb}^+(\text{PHP})$  er isometrien slik at  $f(A) = A'$  og  $f(B) = B'$ , så er  $g = f^{-1}$  en RLT i  $\text{Möb}^+(\text{PHP})$  slik at  $g(A') = A$  og  $g(B') = B$ .
- (iii) Vi har  $AB \cong CD$  og  $CD \cong EF$  impliserer  $AB \cong EF$ , for hvis  $f \in \text{Möb}^+(\text{PHP})$  tar  $A$  på  $C$  og  $B$  på  $D$ , mens  $g \in \text{Möb}^+(\text{PHP})$  tar  $C$  på  $E$  og  $D$  på  $F$ , vil  $h = g \circ f$  være en RLT i  $\text{Möb}^+(\text{PHP})$  som tar  $A$  på  $E$  og  $B$  på  $F$ .

K-3) Kall linjene de to trioene ligger på for  $l$  og  $l'$ . Den unike  $f \in \text{Möb}^+(\text{PHP})$  som tar  $A$  på  $A'$  og  $B$  på  $B'$  vil avbilde hele  $l$  på  $l'$ . Det samme kan sies om den unike  $g \in \text{Möb}^+(\text{PHP})$  som tar  $B$  på  $B'$  og  $C$  på  $C'$ . Etersom det er en unik RLT som tar  $B$  på  $B'$  og  $\overrightarrow{BC}$  på  $\overrightarrow{B'C'}$ , må  $f = g$ , og siden  $f$  tar  $A$  på  $A'$  og  $C$  på  $C'$  er  $AC \cong A'C'$ .

K-4) En RLT er konform, så gitt en vinkel  $\angle BAC$  og en stråle  $\overrightarrow{A'B'}$ , vil den unike  $f \in \text{Möb}^+(\text{PHP})$  som tar  $A$  på  $A'$  og  $\overrightarrow{AB}$  på  $\overrightarrow{A'B'}$ , ta  $\overrightarrow{AC}$  på en stråle  $\overrightarrow{A'C'}$  slik at  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ . I tillegg vil den unike  $g \in \text{Möb}^-(\text{PHP})$  som tar  $A$  på  $A'$  og  $\overrightarrow{AB}$  på  $\overrightarrow{A'B'}$ , ta  $\overrightarrow{AC}$  på en stråle  $\overrightarrow{A'D'}$  slik at  $\angle BAC \cong \angle B'A'D'$ . Anta for motsigelse at  $C'$  og  $D'$  ikke er på motsatt side av  $\overrightarrow{A'B'}$ . I så fall må  $f$  og  $g$  være like, noe som er umulig siden  $\text{Möb}^+(\text{PHP})$  og  $\text{Möb}^-(\text{PHP})$  er disjunkte.

K-5)

- (i) Vi har  $\angle BAC \cong B'A'C'$  siden identitetsavbildningen  $f(z) = z$  er med i  $\text{Möb}(\text{PHP})$ .
- (ii) Vi har at  $\angle BAC \cong B'A'C'$  impliserer  $\angle B'A'C' \cong BAC$ , for hvis  $f \in \text{Möb}(\text{PHP})$  er isometrien slik at  $f(A) = A'$ ,  $f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$  og  $f(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}$ , så er  $g = f^{-1}$  en RLT i  $\text{Möb}(\text{PHP})$  slik at  $g(A') = A$ ,  $g(\overrightarrow{A'B'}) = \overrightarrow{AB}$  og  $g(\overrightarrow{A'C'}) = \overrightarrow{AC}$ .
- (iii) Vi har  $\angle BAC \cong \angle EDF$  og  $\angle EDF \cong \angle HGI$  impliserer  $\angle BAC \cong \angle HGI$ , for hvis  $f \in \text{Möb}(\text{PHP})$  tar  $\overrightarrow{AB}$  på  $\overrightarrow{DE}$  og  $\overrightarrow{AC}$  på  $\overrightarrow{DF}$ , mens  $g \in \text{Möb}(\text{PHP})$  tar  $\overrightarrow{DE}$  på  $\overrightarrow{GH}$  og  $\overrightarrow{DF}$  på  $\overrightarrow{GI}$ , vil  $h = g \circ f$  være en RLT i  $\text{Möb}(\text{PHP})$  som tar  $\overrightarrow{AB}$  på  $\overrightarrow{GH}$  og  $\overrightarrow{AC}$  på  $\overrightarrow{GI}$ .

K-6) La  $f \in \text{Möb}(\text{PHP})$  være den unike Möbius-transformasjonen som tar  $A$  på  $A'$ ,  $\overrightarrow{AB}$  på  $\overrightarrow{A'B'}$  og  $C$  på  $D$  der  $D$  er på samme side av  $\overrightarrow{A'B'}$  som  $C'$ . Siden RLT-er er konforme er  $\angle B'A'D \cong \angle BAC$ , og siden  $\overrightarrow{A'B'} \setminus \{C', D\}$  må  $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'D}$ . Siden  $AB \cong A'B'$  finnes en unik RLT i  $\text{Möb}^+(\text{PHP})$  og en unik RLT i  $\text{Möb}^-(\text{PHP})$  som tar  $A$  på  $A'$  og  $B$  på  $B'$ , og siden  $f$  tar  $A$  på  $A'$  og  $\overrightarrow{AB}$  på  $\overrightarrow{A'B'}$  må  $f$  være en av de to RLT-ene. Med samme argument må  $f$  også være en av RLT-ene som tar  $A$  på  $A'$  og  $C$  på  $C'$ . Siden  $f$  tar  $B$  på

$B'$  og  $C$  på  $C'$  er  $BC \cong B'C'$ . Siden  $f$  også tar  $\overrightarrow{BC}$  på  $\overrightarrow{B'C'}$ ,  $\overrightarrow{BA}$  på  $\overrightarrow{B'A'}$  og er konform, er  $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ , og med samme argument er  $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$ .  $\square$

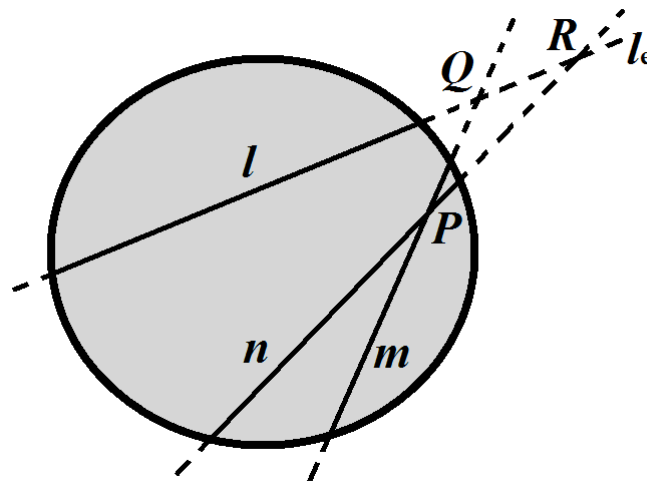
**Påstand 4.7.4.** *Dedekinds aksiom gjelder i Beltrami–Klein-modellen*

Følger direkte fra at Dedekinds aksiom gjelder i euklidsk geometri.

**Det hyperbolske Parallellaksiomet.** *For hver linje  $l$  og hvert punkt  $P \notin l$  finnes det to linjer gjennom  $P$  som er parallelle med  $l$ .*

**Påstand 4.7.5.** *Det hyperbolske parallellaksiomet gjelder i Beltrami–Klein-modellen.*

*Bevis.* Vi har en linje  $l$  og et punkt  $P \notin l$  i BKM. La  $l_e$  være E-linjen som E-segmentet  $l$  ligger på. Ved bruk av aksiom M-2, finn to ulike punkter  $Q$  og  $R$  som ligger på  $l_e$ , men ikke på  $l$ . La  $m$  og  $n$  være segmentet på henholdsvis  $\overrightarrow{PQ}$  og  $\overrightarrow{PR}$  som er BKM-linjer. Siden skjæringspunktet mellom to linjer er unikt finnes ikke noe indre punkt for  $\gamma$  som  $m$  og  $l$  har til felles eller som  $n$  og  $l$  har til felles. Dermed er  $m$  og  $n$  to BKM-linjer som inneholder  $P$  og er parallelle med  $l$ .  $\square$



Figur 71: Man finner to BKM-linjer gjennom  $P$  som ikke skjærer BKM-linje  $l$  ved å trekke E-linjene mellom  $P$  og to punkter på  $l_e$  som er utenfor sirkel  $\gamma$ .

Med samme oppsett som i beviset kan det utledes at det finnes uendelig mange distinkte H-linjer gjennom  $P$  som er parallelle med  $l$ . Det følger av at det finnes uendelig mange punkter på en E-linje med et segment ekskludert.

## 5 Resultater i hyperbolsk geometri

*The assumption that the sum of the three angles is less than 180 degrees leads to a curious geometry, quite different from ours [the Euclidean], but thoroughly consistent, which I have developed to my entire satisfaction, so that I can solve every problem in it with the exception of the determination of a constant, which cannot be designated a priori. The greater one takes this constant, the nearer one comes to Euclidean geometry, and when it is chosen infinitely large the two coincide. The theorems of this geometry appear to be paradoxical and, to the uninitiated, absurd; but calm, steady reflection reveals that they contain nothing at all impossible. For example, the three angles of a triangle become as small as one wishes, if only the sides are taken large enough; yet the area of the triangle can never exceed a definite limit, regardless of how great the sides are taken, nor indeed can it ever reach it.*

*Carl Friedrich Gauss, i et brev til F. A. Taurinus i 1824. [Gre93, s. 180-181]*

### 5.1 Ekvivalente aksiomer

Sitatet fra Gauss' brev nevner noen av de mest sentrale trekkene ved hyperbolsk geometri. Mange av dem kommer vi inn på når vi begynner å studere avstand og areal i hyperbolsk geometri. For nå, la oss se på det som underforstått er det hyperbolske aksiomet Gauss bruker i sitt brev, nemlig at vinkelsummen i en trekant er mindre enn to rette vinkler. La oss bevise at dette aksiomet er logisk ekvivalent med parallellaksiomet vi har valgt å bruke.

**Påstand 5.1.1.** *Anta at alle aksiomene som gjelder i nøytral geometri stemmer. I så fall er følgende aksiomer ekvivalente, så det ene vil være oppfylt hvis og bare hvis den andre er oppfylt.*

- A) *For hver linje  $l$  og hvert punkt  $P \notin l$  finnes det to linjer gjennom  $P$  som er parallelle med  $l$ .*
- B) *Gitt en hvilken som helst trekant  $\triangle ABC$  så er  $|\triangle ABC|$  mindre enn summen av to rette vinkler.*

Vi har tidligere sett at vinkelsummen av en trekant enten alltid er lik eller alltid mindre enn to rette vinkler i nøytral geometri. Vi har også sett at det gitt en linje  $l$  og et punkt  $P \notin l$  finnes minst én linje gjennom  $P$  som er parallell med  $l$ . Påstand 3.4.1 sier at om alle trekanter har vinkelsum lik to rette vinkler er linjen gjennom  $P$  parallell med  $l$  unik for alle  $l$  og  $P \notin l$ . Ønsker å vise at A ikke stemmer hvis og bare hvis B ikke stemmer ved å bevise følgende logiske sirkel:

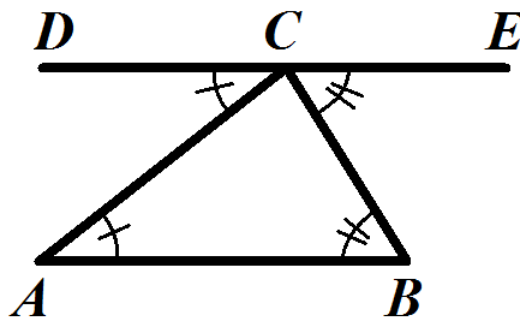
- Dersom det finnes en linje  $l$  og et punkt  $P \notin l$  slik at den parallelle linjen er unik (Aksiom A er ikke oppfylt), så finnes en trekant med vinkelsum lik to rette vinkler (Aksiom B er ikke oppfylt).

- Dersom det finnes en trekant med vinkelsum lik to rette vinkler, har alle trekantar vinkelsum lik to rette vinkler (allerede bevist).
- Dersom alle trekantar har vinkelsum lik to rette vinkler, er den parallelle linjen unik for alle  $l$  og  $P \notin l$  (allerede bevist).
- Dersom den parallelle linjen er unik for alle  $l$  og  $P \notin l$ , finnes det en  $l$  og  $P \notin l$  slik at den parallelle linjen er unik (trivielt).

Det eneste som gjenstår å vise er:

**Lemma 5.1.2.** *Anta at det finnes en linje  $l$  og et punkt  $P \notin l$  slik at det finnes en unik linje gjennom  $P$  som er parallel med  $l$ . I så fall finnes en trekant med vinkelsum lik to rette vinkler.*

*Bevis.* Finn to punkter  $A, B \in l$  og konstruer en trekant  $\triangle ABC$  der  $C = P$ . På motsatt side av  $\overrightarrow{AC}$  enn  $B$  konstruer en vinkel  $\angle ACD$  som er kongruent med  $\angle BAC$ . Dette er mulig ifølge aksiom K-4. På motsatt side av  $\overrightarrow{BC}$  enn  $A$  konstruer en vinkel  $\angle BCE$  som er kongruent med  $\angle ABC$ . Ifølge påstand 3.3.30 er både  $\overrightarrow{CD}$  og  $\overrightarrow{CE}$  parallelle med  $\overrightarrow{AB}$ , og per antakelse er det kun én linje gjennom  $C$  som er parallell med  $\overrightarrow{AB}$ , så  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE}$ , og  $\overrightarrow{CD}$  og  $\overrightarrow{CE}$  er motstående stråler. Ifølge påstand 3.3.42 er  $|\angle DCA| + |\angle ACE|$  lik to rette vinkler, der ved vinkeladdisjon  $|\angle ACE| = |\angle ACB| + |\angle BCE|$ , så  $|\angle DCA| + |\angle ACB| + |\angle BCE|$  er lik to rette vinkler. Dermed er  $|\angle BAC| + |\angle ACB| + |\angle ABC|$  lik to rette vinkler siden  $\angle BAC \cong \angle DCA$  og  $\angle ABC \cong \angle BCE$ .  $\square$



Figur 72: Om det finnes en linje og et punkt utenfor linjen, slik at den parallelle linjen gjennom punktet er unikt, så finnes en trekant med vinkelsum lik to rette vinkler.

## 5.2 Et absolutt avstandsmål

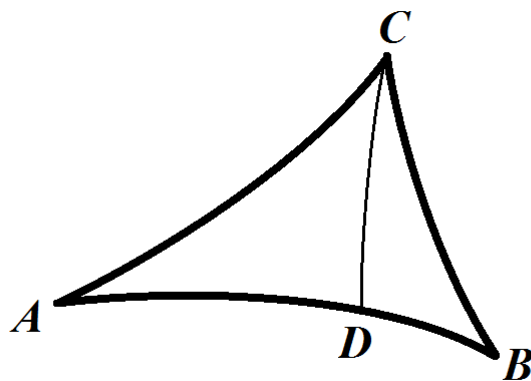
**Definisjon 5.2.1.** Avstanden mellom to punkter  $A$  og  $B$  er lengden til segment  $AB$ , der lengden er et tall som representerer dets størrelse slik at:

- $Vi$  har  $d(A, B) < d(A', B')$  hvis og bare hvis  $AB < A'B'$ .
- $Vi$  har  $d(A, B) = d(A', B')$  hvis og bare hvis  $AB \cong A'B'$ .
- Dersom  $A * B * C$ , så er  $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$ .

I alle de klassiske geometriene har vi et absolutt vinkelmål, nemlig en rett vinkel. Derimot har vi ikke et absolutt mål for avstand i euklidsk geometri, vi må definere et enhetssegment og beregne alle andre avstander sammenliknet med dette segmentet. I hyperbolsk geometri kan vi derimot vise at formlikhet mellom to trekanter er et kriterium for kongruens, og det gir oss en bijeksjon mellom segmenter og vinkler som lar oss definere et absolutt lengdemål utifra det absolutte vinkelmålet. La oss først introdusere et mål på hvor mye mindre enn to rette vinkler vinkelsummen til en hyperbolsk trekant er:

**Definisjon 5.2.2.** Vinkelsvinnnet til en trekant  $\triangle ABC$  er lik to rette vinkler minus  $|\triangle ABC|$ .

**Påstand 5.2.3** ([Ros00, Theorem 2.13, s. 20]). Anta at  $\triangle ABC$  er delt opp i to trekanter  $\triangle ADC$  og  $\triangle BDC$ . I så fall er vinkelsvinnnet til  $\triangle ABC$  lik summen av vinkelsvinnene til  $\triangle ADC$  og  $\triangle BDC$ .



Figur 73: En trekant er delt opp i to mindre trekanter som har et felles hjørne på en av sideflatene til den opprinnelige trekanten.

*Bevis.* Vinkelsummen  $|\triangle ABC|$  blir lik  $|\triangle ADC| + |\triangle BDC|$  minus summen av to supplementvinkler, er lik 4 rette vinkler minus summen av vinkelsvinnene til  $\triangle ADC$  og  $\triangle BDC$  minus to rette vinkler, er lik to rette vinkler minus summen av vinkelsvinnene til  $\triangle ADC$

og  $\triangle BDC$ . Det følger at vinkelsummen til  $\triangle ABC$  er lik summen av vinkelsummene til  $\triangle ADC$  og  $\triangle BDC$ .  $\square$

**Definisjon 5.2.4.** *Vinkelsummen til en firkant  $\square ABCD$  er lik fire rette vinkler minus  $|\square ABCD|$ .*

**Påstand 5.2.5.** *For enhver firkant, bruk en diagonal til å dele den inn i to trekanter. Da er vinkelsummen til firkanten lik summen av vinkelsummene til trekantene.*

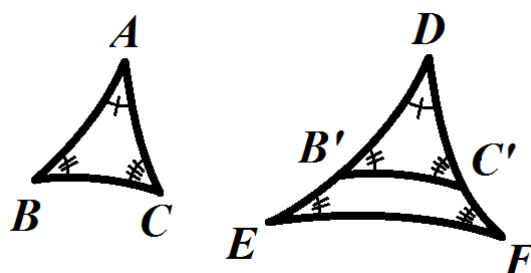
*Bevis.* Siden vinkelsummen til firkanten blir lik summen av vinkelsummene til trekantene blir den lik fire rette vinkler minus summen av vinkelsummene til trekantene, så vinkelsummen til firkanten er lik summen av vinkelsummen til trekantene.  $\square$

**Korollar 5.2.6.** *Vinkelsummen til en hyperbolsk firkant er alltid mindre enn fire rette vinkler.*

Med disse resultatene i bakhånd kan vi bevise det siste kriteriet for kongruente trekanter i hyperbolsk geometri.

**Teorem 5.2.7** ([Ros00, Theorem 2.19 s. 25]). (AAA-kriteriet) *Gitt trekanter  $\triangle ABC$  og  $\triangle DEF$  der  $\angle A \cong \angle D$ ,  $\angle B \cong \angle E$  og  $\angle C \cong \angle F$ , så er  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .*

*Bevis.* Anta for motsigelse at trekantene ikke er kongruente. Merk at om ett av parene  $AB$  og  $DE$ ,  $AC$  og  $DF$  og  $BC$  og  $EF$  er kongruente så er trekantene kongruente ifølge ASA-kriteriet, så vi må anta at ingen av parene er kongruente. I så fall må den ene trekanten ha minst to sider som er større en tilsvarende sider på den andre trekanten. Anta at  $AB < DE$  og  $AC < DF$ . Da finnes ifølge aksiom K-1  $B' \in \overrightarrow{DE}$  og  $C' \in \overrightarrow{DF}$  slik at  $AB \cong DB'$  og  $AC \cong DC'$ . Ifølge SAS-kriteriet er  $\triangle ABC \cong \triangle DB'C'$ . Merk at  $|\triangle DEF|$  er lik  $|\triangle DB'C'| + |\square B'EFC'|$  minus fire rette vinkler (to par supplementvinkler), men siden trekantene har samme vinkelsum må  $|\square B'EFC'|$  være lik fire rette vinkler, noe som strider med korollar 5.2.6.  $\square$

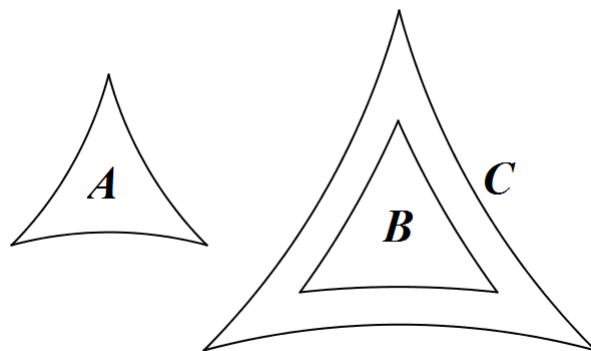


Figur 74: Om det finnes to ikke-kongruente trekanter med parvis kongruente sider må det finnes en firkant med vinkelsum lik fire rette vinkler.



Dette teoremet lar oss definere et absolutt lengdemål. Det kan vises at jo mindre vinkelsummen i en likesidet trekant er, jo større er sidene. Ettersom det, gitt en bestemt vinkelsum mellom 0 og to rette vinkler, kun finnes én likesidet trekant med denne vinkelsummen, kan vi definere at summen av sidene i den unike likesidede trekanten er lik trekantens vinkelsvinn. Dermed blir lengden til ethvert segment  $AB$  lik en tredel av vinkelsvinnet til en trekant der alle sidene er kongruente med  $AB$ . Merk at om alle sidene i en trekant er kongruente, så er alle vinklene også nødvendigvis kongruente, som følge av påstand 3.3.26.

Om man derimot skal sammenlikne lengder i en hyperbolsk geometri med lengder i en euklidsk, kan man ikke apriori utlede lengden til sidene i en likesidet trekant når vinkelsummen er kjent. Om man derimot måler eller definerer lengden til sidene for én vinkelsum, vil lengden til sidene for alle andre vinkelsummer kunne utledes. Dette er konstanten Gauss nevner i brevet til Taurinus. Som nevnt i innledningen, viser konstanten seg å være knyttet til det hyperbolske rommets Gaussiske krumning. Jo mindre konstanten er, jo mer negativ er den Gaussiske krumningen. Vi vil kalle konstanten det hyperbolske planets skaleringskonstant. Tilsvarende har vi i sfærisk geometri at jo mindre radiusen til kulen er, jo større er den Gaussiske krumningen. Se figur 75 for en illustrasjon av to likesidede trekantar med samme vinkler, men i to ulike hyperbolske rom med ulik konstant. Vi ser fra figuren at sideflatene til  $B$  krummer mye mindre enn sideflatene til  $A$ , siden planet  $B$  ligger i har større skaleringsfaktor og mindre Gaussisk krumning.



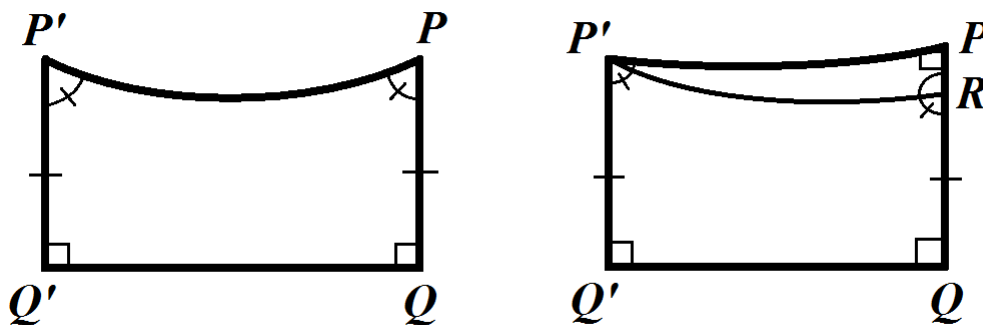
Figur 75: Trekant  $A$  befinner seg i et annet hyperbolsk plan enn trekantene  $B$  og  $C$ . Trekantene  $A$  og  $B$  har lik lengde på sideflatene mens  $A$  og  $C$  har like vinkler. Alle trekantene er likesidet. Planet til  $A$  har mindre skaleringskonstant og større Gaussisk krumning.

### 5.3 Assymptotisk parallelle og divergent-parallelle linjer

Vi har tidligere utledet at for enhver linje  $l$  og ethvert punkt  $P$  i nøytral geometri, vil det finnes en linje  $m$  gjennom  $P$  som er parallell med  $l$ , og slik at normalen fra  $P$  på  $l$  er en fellesnormal for  $l$  og  $m$ . Vi har derimot ikke vist at to hyperbolske linjer som er parallelle nødvendigvis må ha en fellesnormal. Dette skal vi heller ikke bevise, for det stemmer ikke. La oss først studere rollen til fellesnormalene.

**Påstand 5.3.1.** *Vi har at  $l \perp t \perp m$ ,  $P$  er skjæringspunktet mellom  $m$  og  $t$  og  $Q$  skjæringspunktet mellom  $l$  og  $t$ . Da er  $P$  punktet i  $m$  med kortest avstand til  $l$ , så gitt en annen  $P' \in m$  der  $Q'$  er foten til normalen fra  $P'$  på  $l$ , så er  $PQ < P'Q'$ .*

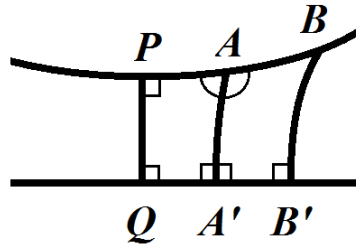
*Bevis.* Anta for motsigelse at  $PQ \cong P'Q'$ . Da blir  $\square QPP'Q'$  en Saccheri-trekant, der  $\angle P$  og  $\angle P'$  er kongruente og må være spisse for at vinkelsummen skal bli mindre enn fire rette vinkler. Dette strider mot antakelsene om at  $\angle P$  er rett. Anta så for motsigelse at  $P'Q' < PQ$ . I så fall finnes et unik punkt  $R$  mellom  $P$  og  $Q$  slik at  $QR \cong P'Q'$ . Da blir  $\square QRP'Q'$  en Saccheri-trekant, der  $\angle QRP'$  og  $\angle Q'P'R$  er kongruente og spisse. I så fall er  $\angle PRP'$  butt, noe som gjør at  $|\triangle PP'R|$  er større enn to rette vinkler, som er en motsigelse.  $\square$



Figur 76: Til venstre: Om  $P'Q' \cong PQ$  må  $\angle P$  både være rett og spiss. Til høyre: Om  $P'Q' < PQ$  må det finnes en trekant med vinkelsum større enn to rette vinkler.

Det kan også lett vises at dersom det finnes en korteste avstand mellom to linjer (langs en normal), så må linjen dette segmentet ligger på være en fellesnormal for de to linjene. Videre vil vi vise at dersom det finnes en fellesnormal vil avstand til den andre linjen være avhengig av avstand til fellesnormalen.

**Teorem 5.3.2.** *Vi har to linjer  $l$  og  $m$  med en fellesnormal som går gjennom punktene  $P \in m$  og  $Q \in l$ . La  $A$  og  $B$  være to punkter på  $m$  på samme side av fellesnormalen. La  $A'$  og  $B'$  være føttene til normalene fra henholdsvis  $A$  og  $B$  på  $l$ . Da vil  $PA < PB$  implisere  $AA' < BB'$ .*

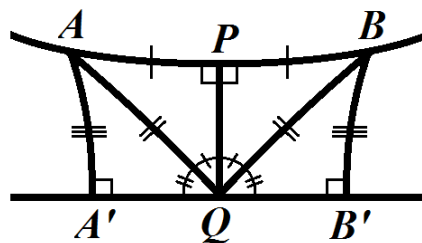


Figur 77: Siden vinkelsummen i enhver firkant er mindre enn fire rette vinkler, og summen av to supplementvinkler er lik to rette vinkler, må  $\angle PAA'$  være spiss og  $\angle A'AB$  være butt.

*Bevis.* Vi har at  $\angle PAA'$  må være spiss for at vinkelsummen i  $\square QA'AP$  skal være mindre enn fire rette vinkler og siden summen av to supplementvinkler er to rette vinkler må  $\angle A'AB$  være butt. Vi kan bruke samme fremgangsmåte som i beviset for påstand 5.3.1, til å vise at om  $AA' \cong BB'$  må  $\angle A'AB$  være spiss, og om  $AA' > BB'$  må det finnes en trekant med to butte vinkler.  $\square$

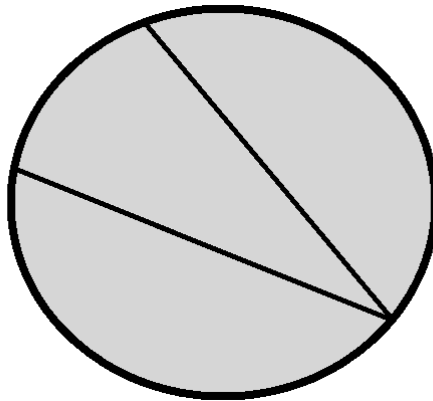
**Påstand 5.3.3.** Vi har to parallelle linjer  $m$  og  $l$  med en fellesnormal gjennom punktene  $P \in m$  og  $Q \in l$ . For hvert punkt  $A \in m$ , der  $A \neq P$ , finnes et punkt  $B$  på andre siden av midtnormalen, slik at  $PA \cong PB$  og  $A$  og  $B$  har samme avstand til  $l$  langs normaler.

*Bevis.* Kall føttene til normalene for henholdsvis  $A'$  og  $B'$ . At det finnes en  $B$  slik at  $PA \cong PB$  følger fra aksiom K-1. Ved SAS-kriteriet for kongruens mellom  $\triangle QPA$  og  $\triangle QPB$ , finner vi at  $AQ \cong BQ$  og  $\angle PQA \cong \angle PQB$ . Siden  $|\angle AQA'|$  er en rett vinkel minus  $|\angle PQA|$  og  $|\angle BQB'|$  er en rett vinkel minus  $|\angle PQB|$ , så er  $\angle AQA' \cong \angle BQB'$ . Ved AAS-kriteriet for kongruens mellom  $\triangle AQA'$  og  $\triangle BQB'$ , finner vi at  $AA' \cong BB'$ .  $\square$



Figur 78: Ved bruk av SAS-kriteriet for kongruente trekanter og deretter AAS-kriteriet, kan vi vise at når  $PA \cong PB$  er nødvendigvis  $AA' \cong BB'$ .

Derimot er det mulig at det ikke finnes en minste avstand mellom to parallelle linjer og ikke finnes noen fellesnormal. De to linjene vil i så fall nærme seg hverandre assymptotisk når begge går mot uendelig i en retning.



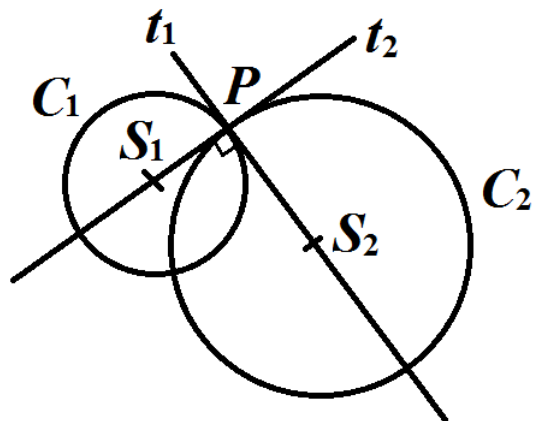
Figur 79: De to linjene representert i Beltrami–Klein-modellen, nærmer seg hverandre når de går mot uendelig, men har ingen felles punkter siden E-punkter på sirkelen  $\gamma$  ikke er BKM-punkter.

**Definisjon 5.3.4.** *To parallelle linjer  $l$  og  $m$  er divergent-parallelle om de har en fellesnormal, og assymptotisk parallelle om de ikke har det.*

La oss studere disse to typene parallelle linjer, ved å studere hvordan man finner fellesnormalen til to linjer i Poincarés diskmodell, og hva som skal til for at man ikke kan bruke metoden for å finne en fellesnormal. Aller først må vi se på hva som skal til for at to linjer er normale i PDM.

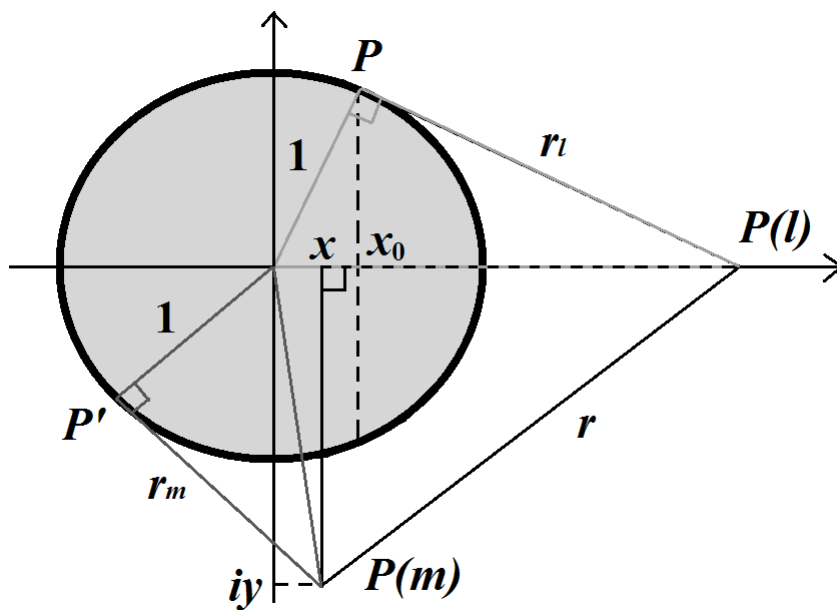
**Lemma 5.3.5.** *Vi har to E-sirkler  $C_1$  og  $C_2$  med sentrum i henholdsvis  $S_1$  og  $S_2$ . De skjærer hverandre i et punkt  $P$ . Kall tangentlinjene til sirklene i  $P$  for henholdsvis  $t_1$  og  $t_2$ . Tangente er vinkelrette hvis og bare hvis  $S_1 \in t_2$  og  $S_2 \in t_1$ .*

*Bevis.* Anta at  $t_1 \perp t_2$ . Vi vet at tangentlinjer i et punkt står vinkelrett på diameteren som inneholder punktet, så  $\overleftrightarrow{S_1P} \perp t_1$  og  $\overleftrightarrow{S_2P} \perp t_2$ . Siden  $\overleftrightarrow{S_1P} \perp t_1$  og  $t_1 \perp t_2$ , er enten  $t_1$  en fellesnormal for  $\overleftrightarrow{S_1P}$  og  $t_2$ , eller de to er like. Siden de har  $P$  som felles punkt, må de være like. Samme argument gir  $\overleftrightarrow{S_2P} = t_1$ . Anta at  $S_1 \in t_2$  og  $S_2 \in t_1$ . Da er  $\overleftrightarrow{S_1P} = t_2$  og  $\overleftrightarrow{S_2P} = t_1$ . Siden vi vet at  $\overleftrightarrow{S_1P} \perp t_1$  og  $\overleftrightarrow{S_1P} = t_2$ , så er  $t_1 \perp t_2$ .  $\square$



Figur 80: Tangentene til to sirkler står vinkelrett på hverandre i et punkt om hver sirkel sin tangent i punktet går gjennom den andre sirkelens sentrum.

**Påstand 5.3.6.** Vi har to PDM-linjer  $l$  og  $m$  med poler  $P(l)$  og  $P(m)$ .  $E$ -linjen gjennom endepunktene til  $l$  går gjennom  $P(m)$  hvis og bare hvis  $l \perp m$ .



Figur 81: Her er  $P$  og  $P'$  endepunkter for henholdsvis linjene  $l$  og  $m$  (ikke avbildet). Det viser seg at  $l \perp m$  hvis og bare hvis  $x = x_0$ .

*Bevis.* Innfør et koordinatsystem der  $\gamma$  er enhetssirkelen og  $P(l)$  ligger på den reelle akse. Endepunktene til  $l$  får samme realdel  $x_0$ . La  $P(m) = x + iy$  og la  $Q$  være skjæringspunktet mellom  $m$  og  $l$ . For at  $l \perp m$ , må E-sirkelene  $l$  og  $m$  er del av stå vinkelrett på hverandre, som ifølge lemma 5.3.5 tilsier at  $\angle P(m)QP(l)$  må være rett. Kall radiusen til E-sirkelen  $m$  ligger på for  $r_m$ , radiusen til  $l$  sin E-sirkel for  $r_l$  og avstanden mellom polene  $P(m)$  og  $P(l)$  for  $r$ . Ved Pytagoras får vi at de er normale hvis og bare hvis  $r^2 = r_l^2 + r_m^2$ . På samme måte som i beviset for at isometrien fra BKM til PDM tar BKM-linjer på PDM-linjer, kan det utledes at  $P(l) = \frac{1}{x}$ . Ved å se på den rettvinklede trekanten med hjørner i origo  $P(m)$  og et endepunkt for  $m$  (mørkegrå trekant i figur 81), får vi  $r_m^2 = x^2 + y^2 - 1$ . Med en tilsvarende trekant for linje  $l$  (lysegrå trekant), får vi at

$$r_l^2 = \frac{1}{x^2} - 1$$

. Vi får også

$$r^2 = \left(\frac{1}{x} - x_0\right)^2 + y^2 = \frac{(1 - xx_0)^2}{x^2} + y^2$$

ved å se på den rettvinklede trekanten med hjørner  $P(l)$ ,  $P(m)$  og  $x_0$  (sort trekant). Undersøker så hva som skal til for at Pythagoras' setning er oppfylt:

$$x_0^2 + y^2 - 1 + \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{(1 - xx_0)^2}{x^2} + y^2.$$

Trekker fra  $y^2$  og multipliserer med  $x^2$  på begge sider for å få

$$x_0^2 x^2 - 2x^2 + 1 = x_0^2 x^2 - 2xx_0 + 1.$$

Derfra trekker vi fra  $x_0^2 x^2 + 1$  og deler på  $2x$  på begge sider for å få

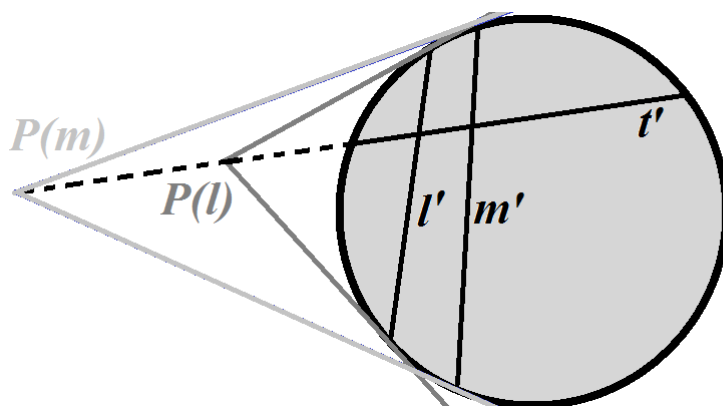
$$x = x_0.$$

Siden  $P(m)$  har samme realdel som endepunktene til  $l$  så er de tre punktene på linje og beviset er fullført.  $\square$

Det er også lett å vise at dersom en av linjene er en diameter og den andre et E-sirkelsegment, må polen til E-sirkelsegmentet ligge på samme E-linje som diameteren, så den ligger fremdeles på linjen gjennom de to endepunktene. Hvis vi opererer i det utvidede komplekse rommet kan vi tenke på en diameter som del av en  $\bar{C}$ -sirkel med sentrum i uendelig. Merk at sammenhengen er symmetrisk og vi vil også ha at  $m$  går gjennom  $P(l)$ .

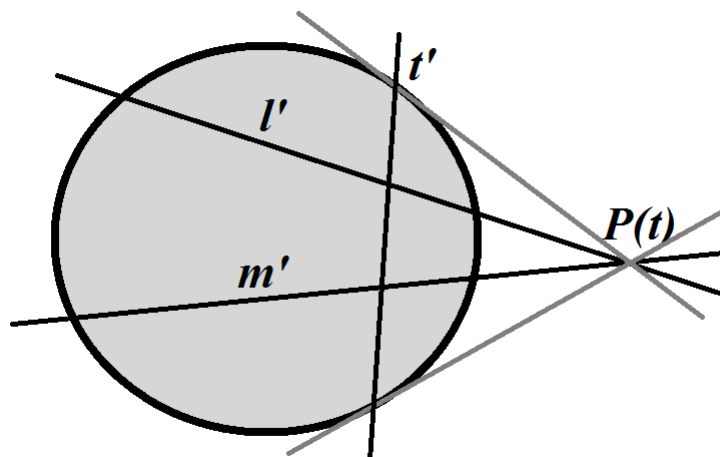
Metoden for å finne fellesnormalen til to parallelle PDM-linjer  $m$  og  $l$  er som følger: Trekk en E-linje  $l'$  gjennom endepunktene til  $l$  og en E-linje  $m'$  gjennom endepunktene til  $m$ . Om  $t$  er en fellesnormal for  $l$  og  $m$  og  $t'$  E-linjen gjennom dens endepunkter, må på den ene side både  $P(m)$  og  $P(l)$  ligge på  $t'$  og på den andre side må  $P(t)$  ligge både på  $l'$  og  $m'$ , så på skjæringspunktet mellom  $l'$  og  $m'$ . Merk at for at en PDM-linje skal være entydig bestemt er det nok å finne enten polen eller endepunktene, så vi har to metoder for å finne  $t$ :

- a) Konstruer E-linjen som inneholder  $P(m)$  og  $P(l)$ . Skjæringspunktene mellom den og  $\gamma$  er endepunktene til  $t$ .



Figur 82: Vi finner endepunktene til  $t$  ved å trekke en linje gjennom polene til  $l$  og  $m$ .

- b) Finn skjæringspunktet mellom  $l'$  og  $m'$ . Dette punktet er polen til  $t$ .



Figur 83: Vi finner Polen til  $t$  ved å finne skjæringen mellom  $l'$  og  $m'$ .

I de fleste situasjoner kan vi operere i  $\mathbb{C}$  og bruke enten a) eller b) eller begge, men hvis  $l' \parallel m'$  og enten  $m$  eller  $l$  er en diameter får vi problemer. Derimot kan vi tenke at om vi opererer i  $\overline{\mathbb{C}}$  skjærer linjene hverandre i det uendelige, så deres fellesnormal blir en rett linje, altså diameteren som står vinkelrett på  $l'$  og  $m'$ .

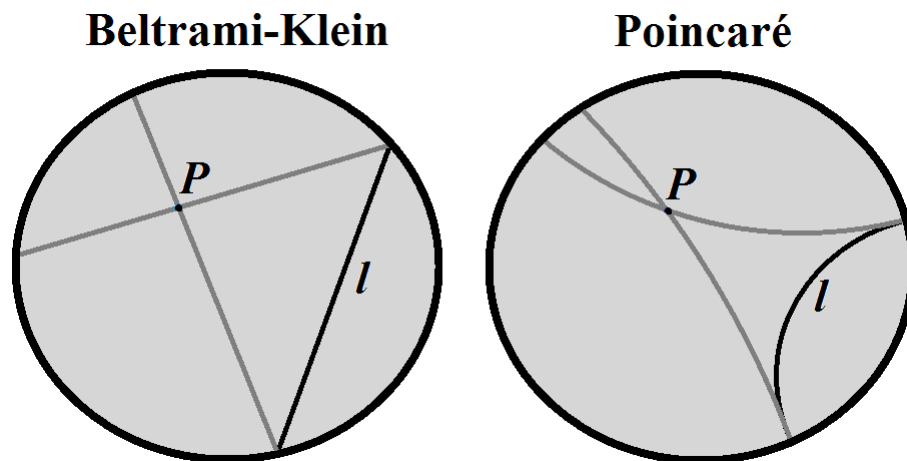
La oss dermed se på når to linjer er parallelle, men uten å ha en fellesnormal. Det skjer kun dersom linjene har et felles endepunkt. Endepunktene er ikke PDM-punkter, så de to linjene er parallelle i modellen. Om vi bruker metode a) får vi at  $\overline{P(l)P(m)}$  kun skjærer

$\gamma$  i ett punkt, og ett endepunkt kan ikke definere en linje. Om vi bruker metode b) er  $l'$  og  $m'$  sitt skjæringspunkt på  $\gamma$ . Derimot kan denne ikke være en pol, for tangentene til to distinkte endepunkter på  $\gamma$  kan ikke skjære hverandre i et punkt på  $\gamma$ , for ifølge definisjonen av tangenten til en sirkel i et punkt, skal ikke tangenten inneholde noe annet punkt på sirkelen.

Denne oppdagelsen gir oss følgende resultat:

**Teorem 5.3.7.** *Gitt enhver linje  $l$  og ethvert punkt  $P \notin l$ , finnes det nøyaktig to linjer gjennom  $P$  som er asymptotisk parallelle med  $l$ .*

I Poincarés diskmodell har linje  $l$  to endepunkter og for hver av dem finnes en linje gjennom  $P$  som har endepunktet til felles. Etersom isometrien mellom PDM og BKM bevarer endepunktene til en linje, får vi også i Beltrami-Klein-modellen at de to linjene gjennom  $P$  som har et endepunkt til felles med  $l$ , er  $l$  sine asymptotisk parallelle linjer.

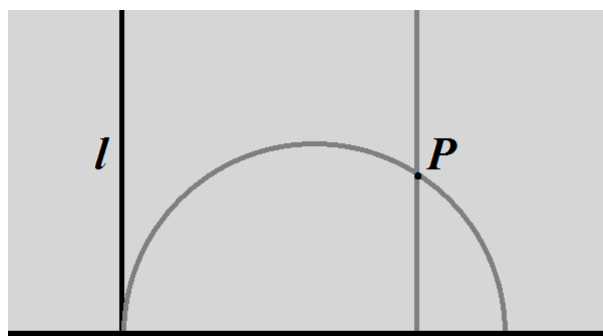


Figur 84: Asymptotisk parallelle linjer (grå) for en linje  $l$  i Beltrami-Klein-modellen og Poincarés diskmodell, er linjene som har et endepunkt til felles med  $l$ .

I Poincarés halvplanmodell får vi en tilsvarende tolkning så lenge  $l$  er en E-halvsirkel. Om  $l$  derimot er en stråle, må vi igjen tenke at vi befinner oss i  $\overline{\mathbb{C}}$ , så  $l$  sitt andre endepunkt er uendelig og dens andre asymptotisk parallelle linje er den vertikale E-strålen som går gjennom  $P$ .

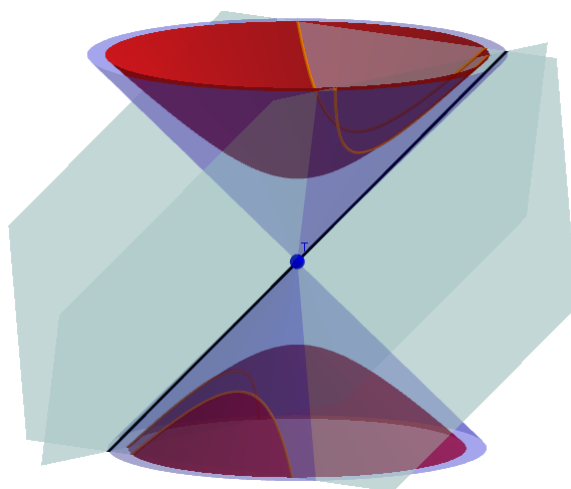
I hyperboloidmodellen er to linjer divergent-parallele om planene hvis skjæring med hyperboloiden de er definert av skjærer hverandre i en linje som ligger utenfor den asymptotiske kjeglens. De er asymptotisk parallelle hvis linjen ligger på den asymptotiske kjeglen. Etersom ethvert plan gjennom kjeglens toppunkt som inneholder indre punkter for kjeglen, vil skjære kjeglen i to linjer, er det tydelig at det gitt en linje  $l$  og et punkt  $P \notin l$ , må finnes to asymptotisk parallelle linjer. En for planet som inneholder  $P$  og





Figur 85: Om en linje  $l$  representeres av en vertikal E-stråle i Poincarés halvplanmodell, vil dens asymptotisk parallelle linjer gjennom et punkt  $P$  (grå) representeres av en vertikal E-stråle gjennom  $P$  og en E-halvsirkel med samme endepunkt som  $l$ .

den ene linjen som er skjæringen mellom kjeglen og  $l$  sitt plan, og en for planet som inneholder  $P$  og den andre linjen.

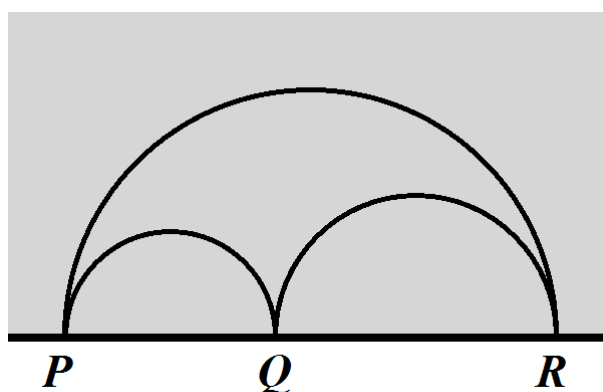


Figur 86: To linjer er asymptotisk parallelle i hyperboloidmodellen dersom E-planene, hvis skjæring med hyperboloiden markerer de to linjene, skjærer hverandre i en linje som ligger på den asymptotiske kjeglen.

Med asymptotisk parallelle linjer kan vi i hyperbolsk geometri introdusere asymptotiske trekkanter. Merk at disse ikke faller under definisjonen av trekkanter, for de består ikke av tre segmenter.

- Definisjon 5.3.8.**
1. En enkelt asymptotisk trekant er unionen av et segment og to asymptotisk parallelle stråler med toppunkt på segmentets endepunkter.
  2. En dobbelt asymptotisk trekant er unionen av en linje og to stråler med felles toppunkt som begge er asymptotisk parallelle med linjen.
  3. En trippelt asymptotisk trekant er unionen av tre linjer som er parvis asymptotisk parallelle med hverandre.

Vi kaller gjerne endepunktene til de asymptotisk parallelle linjene og strålene for ideelle punkter. Disse er E-punkter og ikke H-punkter. Vi kan bruke samme notasjon for en trekant som tidligere, men med ideelle punkter som noen av hjørnene.



Figur 87: En trippelt asymptotisk trekant  $\triangle PQR$  representert i Poincarés halvplanmodell, består av tre PHP-linjer som er parvis asymptotisk parallelle, altså parvis har et endepunkt til felles.

Når vi videre vil studere interessante forskjeller mellom hyperbolsk og euklidsk geometri vil vi studere trekantar. Som sitatet fra Gauss antyder vil arealet til enhver hyperbolsk trekant bli mindre enn en gitt grense. For å kunne regne areal, vil vi først introdusere et mål på lengde i Poincarés halvplanmodell.

## 5.4 Lengdemål i PHP og PDM

Vi trenger kun å definere et lengdemål på én stråle, for ifølge aksiom K-1 finnes det for ethvert segment  $AB$  et segment på strålen som er kongruent med  $AB$ . Vi ønsker å definere lengdemålet vårt på PHP-strålen gjennom punktet  $2i$  med  $i$  som toppunkt. La oss kalle denne strålen  $s$  fra nå av. Aksiomene i hyperbolsk geometri og tolkningene av kongruens legger noen begrensninger på hvordan lengdemålet kan defineres. Det er for eksempel umulig å definere at lengdemålet er lik det euklidske lengdemålet.

**Påstand 5.4.1.** Anta at tallet  $a$  er større enn 1. Avstandene  $d(i, ai)$  og  $d(ai, a^2i)$  er like, og mer generelt er  $d(a^n i, a^{n+1}i) = d(i, ai)$ .

*Bevis.* Beviser bare det mest generelle resultatet. Merk at alle linjene har endepunkter 0 og  $\infty$ . Den unike  $f \in \text{Möb}^+(\text{PHP})$  som fikserer 0 og  $\infty$  og tar  $a^n i$  på  $i$  er

$$f(z) = \frac{z}{a^n},$$

som vil avbilde  $a^{n+1}$  på  $ai$ . Dermed er, per definisjon av kongruens i PHP, segmentene kongruente og nødvendigvis like lange.  $\square$

Dette resultatet impliserer at sammenhengen mellom hyperbolsk og euklidsk lengde langs den imaginære akse er eksponensiell. Det vil si at gitt et punkt på  $s$ , hvis hyperbolske avstand til  $i$  er  $x$ , så er E-punktet  $a^x i$  for et grunntall  $a$ . Motsatt vil den hyperbolske avstanden mellom E-punktene  $i$  og  $yi$  der  $y > 1$ , være  $C \ln y$ , der  $C$  er logaritmen til grunntallet  $a$ . De eneste begrensningene etter det er at  $C$  må være positiv, så grunntallet  $a$  må være større enn 1. For enkelhets skyld vil vi velge  $a = e$  slik at  $C = 1$ .

Konstanten  $C$  er skaleringskonstanten Gauss nevner i brevet. Ved å velge den lik 1, vil avstandene vi ser på videre være avstandene i et hyperbolsk plan med Gaussisk krumning  $-1$ .

**Definisjon 5.4.2.** Gitt et segment  $AB$  i PHP og den unike  $f \in \text{Möb}^+(\text{PHP})$  som tar  $A$  på  $i$ , endepunktet til  $\overrightarrow{AB}$  på  $\infty$  og endepunktet til den motsatte strålen på 0, så er  $d(A, B) = \ln(\text{Im}(f(B)))$ .

Vi vil i videre diskusjon kalle endepunktet til den motsatte strålen  $z_1$ , toppunktet  $z_2$  og endepunktet til strålen  $z_3$ . I PHP må vi ta tre ulike tilfeller med i betraktning, nemlig tilfellene når  $z_1 = \infty$ , når  $z_3 = \infty$  og når ingen av punktene i trioene er  $\infty$ . I PDM vil derimot aldri et endepunkt være uendelig, så la oss videre studere lengder i denne modellen.

Vi har definert at lengden til et PDM-segment er lengden til PHP-segmentet det avbildes til med  $\phi_1$ . For å måle PHP-segmentets lengde avbildes det til stråle  $s$ . Dermed vil komposisjonen avbilde PDM-segmentet til  $s$  og vi vil også for PDM-segmenter se på lengden til segmentet på  $s$  som det avbildes til.

Den unike RLT-en som tar trioene  $z_1, z_2, z_3$  på henholdsvis 1, 0 og  $\infty$  er, siden ingen av punktene kan være  $\infty$ , nødt til å være

$$h(z) = \frac{z - z_2}{z - z_3} \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$$

(se beviset for påstand 4.5.5). Den unike RLT-en som tar 1 på 0, 0 på  $i$  og  $\infty$  på  $\infty$  er

$$g(z) = -iz + i$$

som er lett å vise ved innsetting. Komposisjonen  $f(z) = (g \circ h)(z)$  som tar en PDM-linje på  $s$  blir:

$$\begin{aligned} f(z) &= g\left(\frac{z - z_2}{z - z_3} \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\right) = -i \frac{z - z_2}{z - z_3} \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} + i \\ &= \frac{-i(z - z_2)(z_1 - z_3) + i(z - z_3)(z_1 - z_2)}{(z - z_3)(z_1 - z_2)} \\ &= i \frac{-zz_1 + zz_3 + zz_1 - zz_2 + z_1z_2 - z_2z_3 - z_1z_3 + z_2z_3}{(z - z_3)(z_1 - z_2)}. \\ f(z) &= i \frac{(z - z_1)(z_3 - z_2)}{(z - z_3)(z_1 - z_2)} \end{aligned}$$

Siden avbildningen tar en PDM-linje på en PHP-linje har vi ingen informasjon om koeffisientene. Siden vi er interessert i logaritmen til imaginærdelen blir lengden i PDM

$$d(z_2, z) = \ln \frac{(z - z_1)(z_3 - z_2)}{(z - z_3)(z_1 - z_2)}.$$

Neste resultat hjelper oss på vei mot en avstandsformel som er uavhengig av endepunktene til linjen segmentet ligger på, slik at vi kun trenger å kjenne E-punktene de to hyperbolske punktene representeres av.

**Påstand 5.4.3.** *For ethvert PDM-punkt  $z$  er*

$$|z| = \tanh\left(\frac{d(0, z)}{2}\right).$$

*Bevis.* Det kan vises at en rotasjon om origo med enhver vinkel er en isometri i PDM. Gitt ethvert segment mellom 0 og  $z$  kan det roteres slik at  $z$  går til  $|z|$ . Vi har da at 0 er  $z_2$  og endepunktene er  $z_1 = -1$  og  $z_3 = 1$ .

$$d(0, z) = \ln\left(\frac{(|z| - (-1))(1 - 0)}{(|z| - 1)(-1 - 0)}\right) = \ln\left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|}\right).$$

$$e^{d(0, z)} = \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$

$$(1 - |z|)e^{d(0, z)} = 1 + |z|.$$

$$|z|(1 + e^{d(0, z)}) = e^{d(0, z)} - 1.$$

$$|z| = \frac{e^{d(0, z)} - 1}{e^{d(0, z)} + 1} = \frac{e^{\frac{d(0, z)}{2}} - e^{-\frac{d(0, z)}{2}}}{e^{\frac{d(0, z)}{2}} + e^{-\frac{d(0, z)}{2}}}.$$

$$|z| = \tanh\left(\frac{d(0, z)}{2}\right).$$

□

Neste steg er å finne en Möbius-transformasjon som avbilder et generelt PDM-punkt  $z_2$  til 0 og se hvor stor avstanden til et annet punkt  $z$  blir.

$$\begin{aligned} f(z_2) &= \frac{\alpha z_2 + \beta}{\beta z_2 + \bar{\alpha}} = 0. \\ \alpha z_2 + \beta &= 0. \\ \beta &= -\alpha z_2. \\ f(z) &= \frac{\alpha z - \alpha z_2}{-\alpha z_2 z + \bar{\alpha}}. \end{aligned}$$

Introduserer  $r = |f(z)|$ .

$$r = \frac{|\alpha||z - z_2|}{|\bar{\alpha}||-\bar{z}z_2 + 1|} = \frac{|z - z_2|}{|1 - \bar{z}_2 z|}.$$

Vi har også at

$$r = \tanh\left(\frac{d(z_2, z)}{2}\right)$$

så

$$\frac{|z - z_2|}{|1 - \bar{z}_2 z|} = \tanh\left(\frac{d(z_2, z)}{2}\right).$$

Herifra ønsker vi et tilsvarende uttrykk for to punkter i PHP. Anta at to punkter  $z_2$  og  $z$  i PDM er blitt avbildet til  $w_2 = \phi_1(z_2)$  og  $w = \phi_1(z)$  i PHP. Per definisjon er avstanden  $d(w_2, w)$  i PHP lik avstanden  $d(z_2, z)$  i PDM. Vi kan sette inn i uttrykket for PDM at  $z_2 = \phi_1^{-1}(w_2)$  og  $z = \phi_1^{-1}(w)$  der

$$\phi_1^{-1}(w) = \frac{iw + 1}{w + i}.$$

Derimot blir utregning lettere om vi finner et enklere uttrykk i PDM først. Vi bruker at

$$\sinh^2(z) = \frac{\tanh^2(z)}{1 - \tanh^2(z)}$$

og får at

$$\sinh^2\left(\frac{d(z_2, z)}{2}\right) = \frac{r^2}{1 - r^2} = \frac{\frac{|z_2 - z|^2}{|1 - \bar{z}_2 z|^2}}{1 - \frac{|z - z_2|^2}{|1 - \bar{z}_2 z|^2}}$$

$$= \frac{|z - z_2|^2}{|1 - \bar{z}_2 z|^2 - |z - z_2|^2}.$$

Med litt utregning som vi her hopper over, kan det vises at nevneren blir  $(1 - |z_2|^2)(1 - |z|^2)$ . Ettersom  $\cosh(2z) = \sinh^2(z) + 1$  får vi

$$\cosh(d(z_2, z)) = 1 + \frac{2|z - z_2|^2}{(1 - |z_2|^2)(1 - |z|^2)}.$$

Dermed er det på tide å finne formelen i PHP:

$$\cosh(d(w_2, w)) = 1 + \frac{2\left|\frac{iw+1}{w+i} - \frac{iw_2+1}{w_2+i}\right|^2}{\left(1 - \left|\frac{iw_2+1}{w_2+i}\right|^2\right)\left(1 - \left|\frac{iw+1}{w+i}\right|^2\right)}.$$

Vi har at

$$\begin{aligned} 1 - \left|\frac{iw_2 + 1}{w_2 + i}\right|^2 &= \frac{(w_2 + i)(\bar{w}_2 - i) - (iw_2 + 1)(-i\bar{w}_2 + 1)}{|w_2 + i|^2} \\ &= \frac{|w_2|^2 - w_2i + \bar{w}_2i + 1 - |w_2|^2 - w_2i + \bar{w}_2i - 1}{|w_2 + i|^2} \\ &= \frac{2i\bar{w}_2 - 2iw_2}{|w_2 + i|^2} = 4\frac{\text{Im}(w_2)}{|w_2 + i|^2} \end{aligned}$$

og med tilsvarende utledning

$$1 - \left|\frac{iw + 1}{w + i}\right|^2 = 4\frac{\text{Im}(w)}{|w + i|^2}.$$

Vi får også at

$$\begin{aligned} \left(\frac{iw + 1}{w + i} - \frac{iw_2 + 1}{w_2 + i}\right) &= \frac{(iw + 1)(w_2 + i) - (iw_2 + 1)(w + i)}{(w + i)(w_2 + i)} \\ &= \frac{iw_2w - w + w_2 + i - iw_2w + w_2 - w - i}{(w + i)(w_2 + i)}, \end{aligned}$$

så

$$2\left|\frac{iw + 1}{w + i} - \frac{iw_2 + 1}{w_2 + i}\right|^2 = 8\frac{|w_2 - w|^2}{|w + i|^2|w_2 + i|^2}.$$

Når vi setter inn disse uttrykkene i uttrykket for  $\cosh(d(w_2, w))$  og utvider brøken med  $|w + i|^2|w_2 + i|^2$  får vi

$$\cosh(d(w_2, w)) = 1 + \frac{|w_2 - w|^2}{2\operatorname{Im}(w_2)\operatorname{Im}(w)}.$$

## 5.5 Areal av hyperbolske trekanter

Vi har tidligere sett at jo større sidene i en likesidet trekant er, jo større er vinkelsvinnnet. Dette betyr også at i en hyperbolsk firkant der alle kantene er like lange og alle vinklene like store vil vinkelsummen gå mot fire rette vinkler når sidene går mot 0. Vi kan si at en likesidet hyperbolsk firkant er lik et kvadrat i grensen når sidekantenes lengde går mot 0.

Vi vil finne hyperbolsk areal ved integrasjon i et euklidsk plan, nemlig i Poincarés halvplan. Det euklidske arealet til et område  $\Omega$  er

$$A = \iint_{\Omega} 1 \, dx dy$$

når vi representerer punkter som  $x + iy$ . Det hyperbolske arealet til et område  $\Omega$  er

$$A = \iint_{\Omega} K(x, y) dx dy$$

Der  $K(x, y)$  er en funksjon som defineres lik det hyperbolske arealet delt på det euklidske arealet i et infinitesimale område rundt punktet  $x + iy$ .

**Påstand 5.5.1.** *Størrelsesforholdet mellom E-areal og PHP-areal er*

$$K(x, y) = \frac{1}{y^2}.$$

*Bevis.* La  $\Omega$  være det euklidske kvadratet med sidekanter  $x + iy$ ,  $x + \Delta x + iy$ ,  $x + i(y + \Delta y)$  og  $x + \Delta x + i(y + \Delta y)$ . Ettersom en likesidet hyperbolsk firkant er lik et euklidsk kvadrat i grensen (og mer generelt hyperbolsk geometri er lik euklidsk geometri i grensen), har vi at den hyperbolske arealet blir  $d(x, x + \Delta x)d(iy, i(y + \Delta y))$  og

$$K(x, y) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{d(x, x + \Delta x)d(iy, i(y + \Delta y))}{\Delta x \Delta y}.$$

La oss kalle  $d(x, x + \Delta x)$  for  $d(x)$  og  $d(iy, i(y + \Delta y))$  for  $d(y)$  for korthet. Da kan vi skrive

$$K(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{d(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{d(y)}{\Delta y}.$$

De første leddene i Taylor-polynomet til  $\cosh(x)$  rundt 0 er  $1 + 0 + \frac{x^2}{2}$ , og resten av leddene blir neglisjerbare sammenliknet med  $x^2$ , så vi får

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{d(x)^2}{2} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\Delta x^2}{2y^2} \right).$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} d(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{y}.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{d(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{y\Delta x} = \frac{1}{y}.$$

Med tilsvarende utledning er

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{d(y)}{\Delta y} = \frac{1}{y},$$

så det følger at

$$K(x, y) = \frac{1}{y^2}.$$

□

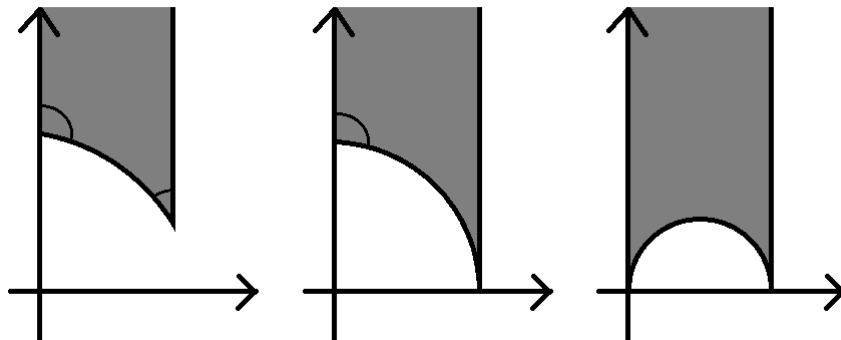
Dermed kan vi konkludere med at vi finner det hyperbolske arealet av et område ved

$$A = \iint_{\Omega} \frac{1}{y^2} dx dy.$$

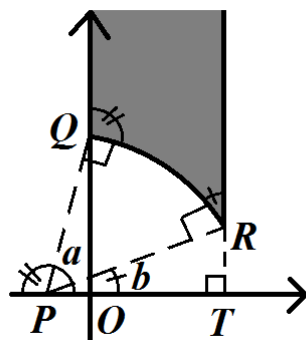
La oss bruke dette til å finne en formel for arealet av hyperbolske trekanter. Det viser seg at det er enklest om vi først utleder en formel for assymptotiske trekanter. Möbius-transformasjoner bevarer avstand og dermed areal. Figur 88 viser situasjonene generelle assymptotiske trekanter kan avbildes til.

I alle tilfellene kan vi parametrisere E-sirkelsegmentet med vinkelen som dens parameter og sentrum og radius som konstanter. Parametriseringen blir  $P + r \cos(t) + ir \sin(t)$  der  $t$  går fra  $a$  til  $b$  (se figur 89). Merk at for en enkelt assymptotisk trekant er  $b$  lik en rett vinkel minus  $|\angle PRT|$  og  $|\angle PRT|$  er lik en rett vinkel minus trekantens ene vinkel, så  $b$  er lik denne vinkelen. Merk også at  $a$  er lik en rett vinkel minus  $|\angle PQB|$  og to rette vinkler pluss  $|\angle PQB|$  er lik en rett vinkel pluss trekantens andre vinkel. Dermed er  $a$  lik to rette vinkler minus den andre vinkelen. For de dobbelt assymptotiske trekantene er  $a$  lik to rette vinkler minus dens vinkel og  $b$  lik 0, og for en trippelt assymptotisk trekant er  $a$  lik to rette vinkler og  $b$  lik 0.





Figur 88: En enkelt asymptotisk trekant kan avbildes til en situasjon der de asymptotiske parallelle strålene er vertikale E-stråler, det ene hjørnet er på den imaginære aksene og det andre har positiv realdel. En dobbelt asymptotisk trekant kan avbildes slik at hjørnet er på den imaginære aksene og et ideelt punkt på den reelle aksene med positiv verdi. En trippelt asymptotisk trekant kan avbildes slik at et ideelt punkt er i origo og et på den reelle aksene med positiv verdi.



Figur 89: Siden en sirkels tangent i et punkt står vinkelrett på en diameter gjennom punktet kan det utledes at  $b$  blir lik den ene vinkelen i den enkelt asymptotiske trekanten og  $a$  blir to rette vinkler minus den andre vinkelen i trekanten.

La  $\Omega$  være området avgrenset av trekantene. Når vi skal integrere får vi bruk for at parametriseringens x-komponent derivert med hensyn på  $t$  er  $-r \sin(t)$ . Integralet blir

$$A_{\Omega} = \iint_{\Omega} \frac{1}{y^2} dx dy = \iint_{\Omega} \frac{1}{y^2} \frac{dx}{dt} dy dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \left[ \int_{r \sin(t)}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy \right] (-r \sin(t)) dt = \int_a^b \left( \frac{1}{r \sin(t)} - \frac{1}{\infty} \right) (-r \sin(t)) dt. \\
&= \int_a^b (-1) dt = a - b.
\end{aligned}$$

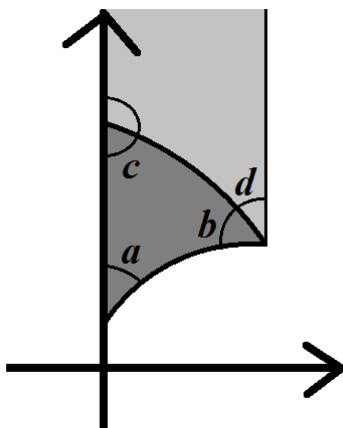
Når vi setter inn hva  $a$  og  $b$  er for de enkelt, dobbelt og trippelt assymptotiske trekantene får vi i alle tilfellene at arealene blir lik to rette vinkler minus trekantenes vinkelsummer (vinkelen mellom assymptotisk parallelle linjer eller stråler er 0). Dermed blir arealene lik trekantenes vinkelsvinn. Det kan vises at dette også gjelder for vanlige, hyperbolske trekanter.

**Teorem 5.5.2.** *Arealet til en trekant i et hyperbolsk plan med Gaussisk krumning  $-1$  er lik dens vinkelsvinn.*

*Bevis.* Enhver hyperbolsk trekant representert i Poincarés halvplanmodell kan avbildes av en Möbius-transformasjon til en kongruent trekant der to av hjørnene er på den imaginære akse og det siste hjørnet har positiv realdel. På figur 90 har vi en trekant med vinkler  $a$ ,  $b$  og  $c$ , samt en vinkel  $d$  utenfor trekanten. Vi ser at arealet blir lik arealet til en enkelt assymptotisk trekant med vinkler  $a$  og  $b + d$ , minus arealet til en enkelt assymptotisk trekant med vinkler  $d$  og to rette vinkler minus  $c$ . Om vi kaller en rett vinkel for  $r$  blir arealet

$$2r - a - (b + d) - (2r - (2r - c) - d) = 2r - a - b - c.$$

□



Figur 90: Arealet til en generell ikke-assymptotisk, hyperbolsk trekant blir differensen mellom arealene til to enkelt assymptotiske trekanter.

Dette resultatet kan generaliseres til hyperbolske plan med annen Gaussisk krumning. Anta at vi ikke hadde valgt konstanten  $C$  lik 1 når vi utledet en formel for hyperbolsk lengde. Ved et annet valg  $R$  ville alle lengder blitt  $R$  ganger så store og dermed ville alle areal blitt  $R^2$  ganger så store. Det kan vises at den Gaussiske krumningen  $k$  til et hyperbolsk plan er

$$k = \frac{1}{R^2}.$$

Dermed blir den generelle formellen at en hyperbolsk trekants areal er lik dens vinkelsvinn delt på absoluttverdien til dens plans Gaussiske krumning.

Etttersom vinkelsvinnet ikke kan overstige to rette vinkler, er det en øvre grense for hvor stort arealet til en trekant i et gitt hyperbolsk plan kan være, nemlig to rette vinkler over absoluttverdien til krumningen. Vi ser at når den Gaussiske krumningen går mot 0, går den øvre grensen for trekantens areal mot uendelig, som stemmer overens med at når den Gaussiske krumningen går mot 0 vil hyperbolsk geometri konvergere mot euklidisk geometri.

## 6 Sammenlikning mellom de klassiske geometriene

Den mest grunnleggende forskjellen mellom de tre klassiske geometriene er at euklidisk geometri ikke er krumt, et sfærisk plan har konstant, positiv Gaussisk krumning mens et hyperbolsk plan har konstant, negativ Gaussisk krumning. På mange områder har sfærisk og hyperbolsk geometri resultater som er tilsvarende, men omvendte, siden begge har krumning, men med motsatt fortegn.

### 6.1 Aksiomatikk

Vi har følgende likheter og forskjeller mellom de klassiske geometriene:

**Sammenlikning 6.1.1.** *Hilberts insidensaksiomer gjelder for euklidisk, sfærisk og hyperbolsk geometri.*

**Sammenlikning 6.1.2.** *Hilberts mellomliggenhetsaksiomer gjelder for euklidisk og hyperbolsk geometri. I sfærisk geometri gjelder separasjonsaksiomene.*

**Sammenlikning 6.1.3.** *Hilberts kongruensaksiomer gjelder for euklidisk og hyperbolsk geometri. I sfærisk geometri gjelder en modifisert versjon av kongruensaksiomene, der man tar høyde for at enkelte begreper er definert annerledes eller ikke eksisterer i sfærisk geometri.*

**Sammenlikning 6.1.4.** *Dedekinds aksiom for kontinuitet gjelder i euklidisk, sfærisk og hyperbolsk geometri.*

**Sammenlikning 6.1.5.** *Anta en linje  $l$  og et punkt  $P \notin l$ .*

- *I euklidisk geometri finnes en unik linje gjennom  $P$  som er parallell med  $l$ .*
- *I sfærisk geometri finnes ingen linjer som er parallelle med  $l$ .*
- *I hyperbolsk geometri finnes uendelig mange linjer gjennom  $P$  som er parallelle med  $l$ .*

Merk at i det euklidske tilfellet er parallellaksiomet egentlig at det maksimalt finnes én parallell linje ettersom det kan utledes fra de øvrige aksiomene at det finnes minst én parallell linje. I hyperbolsk geometri sier parallellaksiomet at det finnes to distinkte linjer gjennom  $P$  som er parallelle med  $l$ . Det kan derifra utledes at det finnes uendelig mange (se kommentarer etter påstand 4.7.5).

Viktige resultater som følger mer eller mindre direkte fra de aksiomatiske forskjellene og likhetene er:

**Sammenlikning 6.1.6.** *I euklidisk og hyperbolsk geometri deler enhver linje et plan i to halvplan. En sfærisk linje deler ikke et sfærisk plan.*

**Sammenlikning 6.1.7.** I euklidsk, sfærisk og hyperbolsk geometri gjelder at for enhver linje  $l$  og ethvert punkt  $P \notin l$  finnes en normal fra  $P$  på  $l$ . I euklidsk og hyperbolsk geometri er normalen unik. I sfærisk geometri er den unik med mindre  $P$  er polen til linje  $l$ .

**Sammenlikning 6.1.8.** Vi har to distinkte linjer  $l$  og  $m$ .

- I euklidsk geometri er antallet fellesnormaler uendelig dersom de er parallelle og null dersom de ikke er parallelle.
- I sfærisk geometri har  $l$  og  $m$  en unik fellesnormal.
- I hyperbolsk geometri har  $l$  og  $m$  en unik fellesnormal om de er divergent-parallelle og ingen fellesnormal om de er asymptotisk parallelle eller ikke er parallelle.

**Sammenlikning 6.1.9.** Anta to distinkte linjer  $l$  og  $m$  med en fellesnormal  $\overleftrightarrow{PQ}$  der  $P \in l$  og  $Q \in m$ . Anta et annet punkt  $P' \in l$  og la  $Q'$  være foten til normalen fra  $P'$  på  $m$ .

- I euklidsk geometri er  $P'Q' \cong PQ$  (og  $\overleftrightarrow{P'Q'}$  er også en fellesnormal).
- I sfærisk geometri er  $P'Q' < PQ$ .
- I hyperbolsk geometri er  $P'Q' > PQ$ .

## 6.2 Kriterier for kongruente trekanter

For alle de tre klassiske geometriene er SAS-kriteriet for kongruens et aksiom, det vil si at om to sider i en trekant er parvis kongruente med to sider i en annen og vinklene mellom sidene også er parallelle så er trekantene parallelle. Tabell 1 viser hvilke kriterier som gjelder i de ulike geometriene.

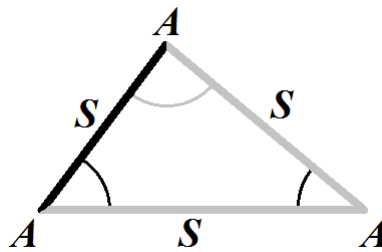
Forklaring: Anta to trekanter  $\triangle ABC$  og  $\triangle A'B'C'$ .

- SAS-kriteriet er når  $AB \cong A'B'$ ,  $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$  og  $BC \cong B'C'$ .
- ASA-kriteriet er når  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ ,  $AB \cong A'B'$  og  $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ .
- SSS-kriteriet er når  $AB \cong A'B'$ ,  $AC \cong A'C'$  og  $BC \cong B'C'$ .
- AAS-kriteriet er når  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ ,  $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$  og  $BC \cong B'C'$ .
- SSA-kriteriet er når  $AB \cong A'B'$ ,  $BC \cong B'C'$  og  $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$ .
- AAA-kriteriet er når  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ ,  $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$  og  $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$ .

| Kriterium | Euklidsk | Sfærisk | Hyperbolsk |
|-----------|----------|---------|------------|
| SAS       | ✓        | ✓       | ✓          |
| ASA       | ✓        | ✓       | ✓          |
| SSS       | ✓        | ✓       | ✓          |
| AAS       | ✓        |         | ✓          |
| SSA       | *        | *       | *          |
| AAA       |          | ✓       | ✓          |

\* Gjelder kun dersom siden hvis kongruent er kjent, og som grenser til vinkelen hvis kongruens er kjent, er større enn eller kongruent med den andre siden hvis kongruens er kjent.

Tabell 1: Kriteriene for kongruente trekanten og hvor vidt de gjelder i hver av de klassiske geometriene.



Figur 91: Kriteriene får navn etter rekkefølgen, sidene og vinklene hvis kongruens er kjent, kommer i når man går rundt trekanten med positiv eller negativ om-løpsretning. Om de sorte sidene og vinklene på bildet er kjent er det snakk om AAS-kongruens.

**Sammenlikning 6.2.1.** For enhver trekant  $\triangle ABC$  i euklidsk, sfærisk eller hyperbolsk geometri gjelder at  $AB > BC$  hvis og bare hvis  $\angle C > \angle A$  og  $AB \cong BC$  hvis og bare hvis  $\angle C \cong \angle A$ .

### 6.3 Lengde, areal og vinkelsum

Viktige likheter og forskjeller mellom de klassiske geometriene som går på lengde og på areal og vinkelsum til trekanten.

**Sammenlikning 6.3.1.** En linje i sfærisk geometri har endelig lengde. Euklidske og hyperbolske linjer har uendelig lengde.

**Sammenlikning 6.3.2.** *I sfærisk og hyperbolsk geometri har man et absolutt lengdemål fordi det er sammenheng mellom lengder og vinkler (AAA-kriteriet for kongruens). I euklidsk geometri har man ikke et absolutt lengdemål.*

**Sammenlikning 6.3.3.** *For enhver trekant er vinkelsummen:*

- *Lik to rette vinkler i euklidsk geometri.*
- *Større enn to rette vinkler og mindre enn seks rette vinkler i sfærisk geometri.*
- *Større enn 0 og mindre enn to rette vinkler i hyperbolsk geometri.*

**Sammenlikning 6.3.4.** *Sammenheng mellom vinkelsummen i en trekant og dens areal:*

- *Ingen sammenheng i euklidsk geometri.*
- *Vinkeloverskuddet delt på den Gaussiske krumningen i sfærisk geometri.*
- *Vinkelsvinnet delt på absoluttverdien til den Gaussiske krumningen i hyperbolsk geometri.*

Ved nærmere inspeksjon av sammenheng 6.3.4 kan vi konkludere med at formelen areal lik vinkeloverskudd delt på Gaussisk krumning gjelder i alle de klassiske geometriene. Det gjelder i hyperbolsk geometri fordi vinkelsvinnet er lik minus vinkeloverskuddet og krumningens absoluttverdi lik minus krumningen. For euklidsk geometri er både vinkeloverskuddet og krumningen 0, så arealet er udefinert, noe som stemmer godt overens med mangelen på sammenheng mellom vinkelsum og areal.

## 7 Oppsummering

Hyperbolsk geometri har alle aksiomene til felles med euklidsk geometri, utenom parallellaksiomet. I hyperbolsk geometri finnes det for hver linje  $l$  og hvert punkt  $P \notin l$ , uendelig mange linjer gjennom  $P$  som er parallelle med  $l$ . Av disse linjene kommer én av dem til å ha en fellesnormal med  $l$  som inneholder  $P$ . Resten vil ha fellesnormaler med  $l$  som ikke inneholder  $P$ , med unntak av to linjer som er assymptotisk parallelle med  $l$ , og vil nærme seg  $l$  assymptotisk når man går mot uendelig i én retning. Til sammenlikning er den parallelle linjen unik i euklidsk geometri, og i sfærisk geometri er ingen linjer parallelle.

Et hyperbolsk plan har konstant, negativ Gaussisk krumning, til forskjell fra et euklidsk plan som ikke har krumning og et sfærisk plan som har konstant, positiv krumning. I likhet med sfærisk geometri, vil to formlike, hyperbolske trekanter være kongruente, altså gjelder AAA-kriteriet for kongruente trekanter i hyperbolsk geometri. Dette medfører at man i hyperbolsk geometri har et absolutt vinkelmål, som man utleder fra planets vinkelmål.

En hyperbolsk trekant har vinkelsum mindre enn ro rette vinkler. I likhet med sfærisk geometri, er det i hyperbolsk geometri en sammenheng mellom vinkelsummen i en trekant og dens areal. Arealet til en trekant er lik dens vinkelsvinn delt på den Gaussiske krumningen til det hyperbolske planet den befinner seg i. Dette medfører også at det finnes en øvre grense for hvor stort areal en trekant i et gitt hyperbolsk plan kan ha. Arealet kan ikke være større enn to rette vinkler delt på planets Gaussiske krumning.

Blant de mest brukte modellene for hyperbolsk geometri, har vi hyperboloidmodellen, Beltrami–Klein-modellen, Poincarés diskmodell og Poincarés halvplanmodell. De to siste modellene er konforme, som vil si at det hyperbolske vinkelmålet mellom to linjer, er lik E-vinkelen mellom E-linjene og E-kurvene H-linjene representeres av. Hyperboloide-modellen befinner seg i et euklidsk rom, mens de øvrige befinner seg i euklidske plan. I modellene som befinner seg i euklidske plan, har linjene endepunkter, som er E-punkter, men ikke H-punkter.

To linjer er assymptotisk parallelle i hyperboloidmodellen om planene hvis skjæring med hyperboloiden utgjør H-linjene, skjærer hverandre i en E-linje i den assymptotiske kjeglen. I de øvrige modellene, er to linjer assymptotisk parallelle om de har et felles endepunkt, eller om de begge er E-stråler i Poincarés halvplanmodell.

Med assymptotisk parallelle linjer og stråler, kan man i hyperbolsk geometri definere assymptotiske trekanter. Assymptotiske trekanter er ikke trekanter etter den vanlige definisjonen, for én eller flere hjørner er byttet ut med ideelle punkter, som er endepunkter som assymptotisk parallelle linjer eller stråler har til felles. Assymptotiske trekanter følger også sammenhengen mellom en trekants vinkelsvinn og areal.



## 8 Bibliografi

### Referanser

- [Gre93] Marvin J Greenberg. *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history*. Macmillan, 1993.
- [Jah11] Bjørn Jahren. *Geometric Structures in Dimension two*. Lecture notes MAT4510. 2011.
- [Kat04] Victor Katz. *A history of mathematics (brief edition)*. Pearson Addison Wesley, 2004.
- [Kri+10] Dmitri Krioukov mfl. «Hyperbolic geometry of complex networks». I: *Physical Review E* 82.3 (2010), s. 036–106.
- [Ros00] Skyler W Ross. «Non-Euclidean Geometry». Ph.d.-avh. University of Maine, 2000.
- [TL14] Isaac Todhunter og John Gaston Leathem. *Spherical trigonometry: for the use of colleges and schools*. Macmillan og Company, 1914.

## 9 Forklaring

### 9.1 Forkortelser

- E-punkter, E-linjer etc. Euklidske punkter og linjer.
- S-punkter, S-linjer etc. Sfæriske punkter og linjer.
- H-punkter, H-linjer etc. Hyperbolske punkter og linjer.
- HYP. Hyperboloidmodellen for hyperbolsk geometri.
- BKM. Beltrami–Klein-modellen for hyperbolsk geometri.
- PDM. Poincarés diskmodell for hyperbolsk geometri.
- PHP. Poincarés halvplanmodell for hyperbolsk geometri.

### 9.2 Oversikt over notasjon

- $P \in l$ . Punkt  $P$  ligger på linje  $l$ .
- $P \notin l$ . Punkt  $P$  ligger ikke på linje  $l$ .
- $\overleftrightarrow{PQ}$ . Den unike linjen som inneholder punktene  $P$  og  $Q$  (Se insidensaksiom 1).
- $A * B * C$ . Punkt  $B$  ligger mellom punktene  $A$  og  $C$  (se aksiomene for mellomliggenhet).

- $l|\{P, Q\}$ . Punktene  $P$  og  $Q$  er på samme side av linje  $l$  (se mellomliggenhetsaksiom 4).
- $P|l|Q$ . Punktene  $P$  og  $Q$  er på motsatt side av linje  $l$  (se mellomliggenhetsaksiom 4).
- $PQ$ . Segmentet med  $P$  og  $Q$  som endepunkt (se definisjon 2.3.8), eller det korteste av segmentene med  $P$  og  $Q$  som endepunkt innen sfærisk geometri (se definisjon 3.2.10).
- $\overrightarrow{PQ}$ . Den unike strålen gjennom punkt  $Q$  med punkt  $P$  som toppunkt (se definisjon 2.3.9).
- $\angle BAC$ . Vinkelen med punkt  $A$  som toppunkt og strålene  $\overrightarrow{AB}$  og  $\overrightarrow{AC}$  som vinkelben (se definisjon 2.3.11).
- $\triangle ABC$ . Trekanten med punktene  $A$ ,  $B$  og  $C$  som hjørner (se definisjon 2.3.14).
- $\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AD}|\overrightarrow{AC}$ . Stråle  $\overrightarrow{AD}$  ligger mellom strålene  $\overrightarrow{AB}$  og  $\overrightarrow{AC}$  (se definisjon 2.3.16).
- $AB = CD$ . Segmentene  $AB$  og  $CD$  er identiske (inneholder alle de samme punktene).
- $AB \cong CD$ . Segmentene  $AB$  og  $CD$  er kongruente (se kongruensaksiomene).
- $AB < CD$ . Segment  $AB$  er mindre enn segment  $CD$  (se definisjon 2.3.19).
- $l \perp m$ . Stråle, segment eller linje  $l$  og stråle, segment eller linje  $m$  står normalt på hverandre (se definisjon 2.3.23).
- $l \parallel m$ . linjene  $l$  og  $m$  er parallelle (se definisjon 2.3.31).
- $(A, C|B, D)$ . De sfæriske punktene  $A$  og  $C$  er separert av de sfæriske punktene  $B$  og  $D$  (se separasjonsaksiomene).
- $ABC$ . Det sfæriske segmentet som inneholder punkt  $B$  og har  $A$  og  $C$  som endepunkter (se definisjon 3.2.3).
- $\angle lm$ . Vinkelen mellom sfæriske linjer  $l$  og  $m$  (se definisjon 3.2.9).
- $\triangle ABCDEF$ . Den sfæriske trekanten med segmentene  $ABC$ ,  $CDE$  og  $EFA$  som sider (se definisjon 3.2.11).
- $\angle ABCDE$ . Den sfæriske vinkelen med  $C$  som toppunkt og segmentene  $ABC$  og  $CDE$  som vinkelben (se teorem 3.2.12 og paragrafen over det).
- $l \perp t \perp m$ . Linje  $t$  er en fellesnormal for linjene  $l$  og  $m$  (se definisjon 3.2.19).
- $AC = AB \cup BC$ . Segment  $AC$  er unionen av segmentene  $AB$  og  $BC$  (mengden av punkter i  $AC$  er unionen av mengden av punkter i  $AB$  og mengden av punkter i  $BC$ ).

- $|\angle A|$ . Vinkelverdien til vinkel  $A$  (se definisjon 3.3.40).
- $|\triangle ABC|$ . Vinkelsummen til trekant  $\triangle ABC$ , det vil si summen av vinkelverdien til vinklene i  $\triangle ABC$  (se definisjon 3.3.40).
- $|\square ABCD|$ . Vinkelsummen til firkant  $\square ABCD$ , det vil si summen av vinkelverdien til vinklene i  $\square ABCD$  (se definisjon 3.3.40).
- $P(l)$ . Polen til linje  $l$  (se definisjon 4.6.7).
- $d(A, B)$ . Avstanden mellom punktene  $A$  og  $B$ , det vil si lengden til segment  $AB$  (se definisjon 5.2.1).