Relasjonell og instrumentell forståelse etter Kunnskapsløftet

En analyse av eksamenssett fra programfagene Matematikk R1 og R2

Julian Folkman Rossnes

RDID 4190 - Masteroppgave i matematikkdidaktikk

Institutt for lærerutdanning og skoleforskning

Det utdanningsvitenskapelige fakultet

UNIVERSITETET I OSLO

Våren 2015

Sammendrag

Denne oppgaven tar for seg begrepet «forståelse» i matematikken på videregående skole etter innføringen av Kunnskapsløftet i 2006. Formålet med oppgaven var å undersøke om matematisk forståelse er noe som prioriteres til eksamen, da dette kan gi en pekepinn på om det også prioriteres i faget generelt. I problemstillingen for oppgaven ble dette operasjonalisert til spørsmålet: *«I hvilken grad vektlegger Utdanningsdirektoratet relasjonell og instrumentell forståelse av matematikk?»*

Problemstillingen bruker to begreper som har en sentral plass i oppgavens teorigrunnlag: relasjonell og instrumentell forståelse. Selv om definisjonene av disse er hentet fra Ragnar Solvang, benytter oppgaven seg også av arbeidet til andre som har jobbet med teorier rundt forståelsestyper, blant annet Hiebert, Mellin-Olsen, Sfard og Lithner.

For å finne svar på problemstillingen ble fokusområdet for oppgaven snevret inn til de to programfagene Matematikk R1 og Matematikk R2, og oppgavens datagrunnlag ble de eksamenssettene som hadde blitt gitt fra Kunnskapsløftets innføring i 2006 og frem til og med tidspunktet denne oppgaven ble påbegynt, høsten 2014. Datasettet består dermed av 14 eksamenssett fra Matematikk R1 og 12 eksamenssett fra Matematikk R2.

Arbeidet med eksamenssettene startet med en verbanalyse, en registrering av hvilke verb som oppgavetekstene benytter seg av, og hvor mange forekomster det er av hvert enkelt verb. Etter dette ble det foretatt en mer dyptgående analyse, der oppgavene ble forsøkt knyttet opp til de to ulike forståelsestypene denne oppgaven benytter seg av.

Analysen avdekket at mange oppgaver ikke hadde en entydig plassering under én enkel forståelsestypetype, mens andre hadde en klarere profil. Sluttresultatet er at blant de oppgavene som lot seg knytte til kun én forståelsestype, var det et flertall som ble plassert under instrumentell forståelse.

Oppgavens sluttkonklusjon er derfor at Utdanningsdirektoratet heller mot å vektlegge instrumentell forståelse i større grad enn relasjonsforståelse i sine eksamensoppgaver. Videre forskning vil ha mulighet til å ta for seg en liknende problemstilling, anvendt på den nye eksamensformen som ble innført fra og med våren 2015.

Forord

Etter fem år på det nye og oppdaterte Lektorprogrammet jeg startet på i 2010 står jeg omsider ved veis ende, noe denne masteroppgaven symboliserer. Underveis har jeg opparbeidet meg mye kunnskap, blitt kjent med medstudenter som kommer til å bli flotte lærere og hatt en generelt fin studietid.

Det er selvsagt mange som bør takkes for hjelpen jeg har fått på veien mot ferdig utdannet lektor, både professorer, lærere, medstudenter og andre. Jeg vil her først trekke frem Karl Erik Sandvoll, matematikklæreren som først satte meg på tanken på å bli lærer, da jeg fortsatt gikk på videregående, helt tilbake i 2008. Fokuset for dette forordet er likevel selve oppgaven, og den største takken må derfor rettes til mine to veiledere: Inger Christin Borge og Torgeir Onstad. Uten deres råd og gode diskusjoner oss imellom hadde arbeidet med denne oppgaven vært betydelig tyngre. En takk må også rettes til familien for hjelp med korrekturlesing og tilbud om søndagsmiddager etter harde arbeidsøkter.

Til sist sender jeg en hilsen inn i fremtiden til alle fremtidige lærere som eventuelt ender opp med å lese denne oppgaven. Selv om studiene kan være krevende, venter det en utrolig givende jobb i enden av utdanningsløpet. Nå ved veis ende gjør jeg ikke annet enn å glede meg til å ta fatt på læreryrket, og jeg håper enda flere lærerstudenter vil få føle dette i årene som kommer.

Oslo, mai 2015

Julian Folkman Rossnes

Innhold

Sammendrag 3
Forord 5
1. Innledning 9
2. Teori 12
  2.1 Tekstanalyse 12
  2.2 Kunnskap, forståelse og annen utdanningsvitenskapelig teori 14
3. Metode 21
  3.1 Utvalg av og bakgrunn for datamaterialet 21
  3.2 Analysemetode 27
4. Analyse 31
  4.1 Viktige momenter til diskusjonen 31
  4.2 Matematikk R1 32
    4.2.1 Verbanalyse 32
    4.2.2 Gjennomgang av «eksamenssett» 38
  4.3 Matematikk R2 52
    4.3.1 Verbanalyse 52
    4.3.2 Gjennomgang av «eksamenssett» 53
  4.4 Matematikk R1 og Matematikk R2 sett under ett 66
5. Avslutning 70
  5.1 Oppsummering 70
  5.2 Konklusjon 71
  5.3 Videre forskning 72
Litteraturliste 73
Vedlegg 77
  Rådata for verbanalyse Matematikk R1 77
  Rådata for verbanalyse Matematikk R2 78

1. Innledning

Å velge tema for en masteroppgave kan være vanskelig, men som en del av barnekullet født i 1990 er det noe som skiller seg ut for meg: reformene har kommet på rekke og rad. Begynnelsen av skolegangen med Reform 97 gikk over til en start på videregående som første kull med Kunnskapsløftet. Etter videregående ventet førstegangstjenesten, som en del av første kontingent utstyrt med det nye våpenet HK416. Da jeg omsider startet på lektorstudiet på UiO var det som en del av det første kullet på det oppdaterte lektorprogrammet. Reformer er altså noe som har fulgt meg gjennom livet, så det føltes naturlig å benytte masteroppgaven til å skrive om noe knyttet til dette. Siden jeg alltid har ønsket å undervise i videregående skole, og mitt studieløp har mest matematikk, bestemte jeg meg for å skrive om noe knyttet til matematikken i videregående skole etter Kunnskapsløftet. Valget falt på de to realfaglige programfagene Matematikk R1 og Matematikk R2, som elever normalt har i henholdsvis andre- og tredjeklasse. Hvorfor jeg valgte meg ut disse fagene er beskrevet nøyere i utvalgsdelen av metodekapittelet, men to viktige faktorer er at dette er fag som jeg selv hadde under min egen skolegang, og at de representerer den høyeste spesialiseringen mot videre studier innen realfag som finnes i norsk skole.

Videre ønsket jeg å skrive om noe som ville gi meg et godt datagrunnlag, samtidig med at resultatene ville angå mange. Å se på eksamenssettene som har blitt gitt i disse fagene siden Kunnskapsløftet ble innført var noe som dekket begge disse kriteriene. Jeg har også alltid syntes at det er interessant hvordan matematikk kan fremstå som et av de mest polariserende fagene i skolen, hvordan det splitter elevgruppen mye hardere i «de som skjønner / får til» og «de som ikke gjør det» enn det, for eksempel, norskfaget gjør. Dette kan skyldes mange ulike grunner, men noe som ofte nevnes av elever som strever, er at de ikke forstår. Mange elever kan få til, dvs. følge algoritmer, men kan likevel klage over at de ikke skjønner. Forståelse er noe som kan læres, men det krever at det settes fokus på det. Mitt ønske for masteroppgaven var derfor å undersøke om dette gjøres i praksis. Lærere har noe frihet i hva de underviser, men er først og fremst bundet av læreplanen og eksamen. Dette koblet jeg sammen med valget om å se på tidligere gitte eksamenssett fra Kunnskapsløftet, ved å se om det var mulig å si noe om i hvilken grad «forståelse» er en vesentlig del av det Kunnskapsdepartementet ønsker å teste på eksamen. Sagt med andre ord: er «forståelse» noe Kunnskapsdepartementet vektlegger som en viktig del av utdanningsløpet for norske elever?

For å få svar på dette foretok jeg en analyse av alle eksamenssettene som hadde blitt gitt i Matematikk R1 og Matematikk R2, helt fra Kunnskapsløftet ble innført og frem til tidspunktet da denne oppgaven ble påbegynt, høsten 2014. Første del av denne prosessen var å finne én eller flere definisjoner av begrepet «forståelse». Denne oppgaven benytter seg i stor grad av begrepene relasjonsforståelse og instrumentell forståelse, to termer som blir nøyere definert og diskutert i teorikapittelet, og som benyttes av blant andre Solvang (1992). Veldig overfladisk kan man si at relasjonsforståelse, også kjent som relasjonell forståelse, er «skjønne»-delen av matematikk, mens instrumentell forståelse ofte omhandler «gjøre»-delen. Uavhengig av om én av disse forståelsestypene prioriteres av Kunnskapsdepartementet eller ikke, så delegeres arbeidet videre til Utdanningsdirektoratet, som i denne oppgaven blir stående som manifestasjonen av staten og dens vilje. Problemstillingen for denne oppgaven er derfor

«I hvilken grad vektlegger Utdanningsdirektoratet relasjonell og instrumentell forståelse av matematikk?»

Ved å foregripe deler av teorikapittelet, mener jeg med dette: I hvor stor grad gir Utdanningsdirektoratet føringer for at elever skal utvikle en relasjonell matematisk forståelse, i forhold til rene regnetekniske ferdigheter ved bruk av algoritmer og prosedyrer? Dette mener jeg er et interessant spørsmål siden Utdanningsdirektoratets intensjoner, representert gjennom kompetansemålene i læreplanen, og faktiske grep, representert gjennom hva som testes på eksamen, kan vise seg å være ulike. I tillegg vil dette ha mulighet til å påvirke hvordan jeg som lærer legger opp egen undervisning, avhengig av hvordan funnene samsvarer med hva jeg som matematikklærer mener er viktig at elever skal kunne.

Selve oppgaven består av fem kapittel. Etter denne innledningen kommer først et kapittel om relevant teori for begrepet forståelsestyper, men også teori knyttet til det å foreta tekstanalyse. Sammen danner dette bakteppet for oppgaven, og viser hvilke perspektiver og tanker jeg henter med meg fra tidligere forskning. I det tredje kapittelet beskrives metoden, hva jeg gjorde og hvordan jeg jobbet med datamaterialet. Etter disse innledende kapitlene kommer oppgavens hoveddel, kapittel 4, der resultatene presenteres og drøftes. Dette kapittelet inneholder en egen diskusjon for eksamenssettene i hvert av fagene Matematikk R1 og Matematikk R2, før begge fag knyttes sammen og ses under ett mot slutten av kapittelet. Til sist i oppgaven oppsummeres de konklusjoner jeg trakk fra drøftingen, og avslutningen brukes også til å peke ut mulige veier for videre forskning.

2. Teori

2.1 Tekstanalyse

Jevnt over er teorien som finnes om tekstanalyse innen høyere akademisk forskning ikke dekkende eller lite passende for mitt bruk i denne oppgaven, så denne korte teoretiske introduksjonen er ment å presentere utvalgte punkter om hva som kjennetegner en *tekst*, slik jeg benytter meg av begrepet i denne oppgaven.

Problemstillingen denne masteroppgaven ønsket å finne svar på, kunne blitt undersøkt ved hjelp av mange ulike fremgangsmåter. Metoden jeg valgte, tekstanalyse, har særegne styrker og svakheter. Noen av disse blir trukket frem her, mens andre blir nøyere diskutert andre steder i oppgaven, spesielt i metodekapittelet. Hos Cohen, Manion og Morrison (2011, s. 248-249) kan vi lese at «…in educational research, as in other forms of social research, the use of documents has tended to appear less significant than interviews, questionnaires and techniques of direct observation». Kan hende dette har å gjøre med en overbevisning om at utdanningsfeltet handler om interaksjoner mellom mennesker, og at det derfor er nødvendig å hente data direkte fra disse aktørene? På tross av dette valgte jeg å jobbe med eksamenssett, statiske dokumenter som ikke har mulighet til å oppgi annen informasjon utover teksten de inneholder.

Eksamenssett er en egen, spesiell type tekst, som man møter i spesialiserte kontekster, oftest i forbindelse med en evaluering av et individs kunnskaper og ferdigheter. Oppgavene er laget av en forfatter eller forfattergruppe, og retter seg mot én eller flere mottakere. Ved å følge Cohen et al. (2011) vil jeg argumentere for at eksamenssett føyer seg innunder kategorien «primærkilder». Eksamenssettene er den uendrede, bevarte kommunikasjonen som gikk fra Utdanningsdirektoratet til elevene i løpet av eksamenssituasjonen. Som med de aller fleste andre skriftlige kilder går man inn uten innsikt i prosessen som ligger bak skapelsen av dokumentet. Som mottaker av tekstens budskap er man også i en spesiell situasjon som forsker. Teksten er gjerne skrevet med et formål, forfatteren har et ønske eller en motivasjon for hvordan teksten skal virke på leseren, eller hvordan leseren skal respondere på teksten. Som forsker går man ofte utenom dette, spesielt hvis man skal studere eksamenssett, min oppgave var ikke å løse oppgavene som ble gitt meg gjennom teksten. Eksamenssettene stiller spørsmål etter spørsmål, men der en elev nødvendigvis må avgi et svar, var min rolle å studere selve spørsmålet og avgjøre hvor mye informasjon jeg kunne trekke ut av teksten slik den ble presentert.

Som tekst kunne man muligens klassifisert eksamenssett som en egen sjanger, men tekstbegrepet er allerede velutviklet, og jeg velger derfor heller å trekke på allerede etablerte begreper. Utdanningsdirektoratet (2015b) har en egen nettressurs for ungdomstrinnet, der blant annet lesing i matematikk tas opp. Et relevant sitat herfra er at

> Den matematiske teksten er en sammensatt tekst med mye informasjon på liten plass, bruk av matematiske symboler og presist språk. Ord og begreper som de [elevene] kjenner fra hverdagslivets domene får ofte en annen betydning i det matematiske domene. Det kan derfor være utfordrende å lese matematisk tekst, og det trengs opplæring i hvordan en kan møte slike tekster.

Selv om dette sitatet først og fremst fremhever viktige sider av opplæringen rundt det å lese matematiske tekster, gir det oss noen viktige kjennetegn på en matematisk tekst. En annen klassifikasjon man kan bruke på eksamenssettene er begrepet *sammensatt tekst*. Dette viser til at teksten er satt sammen av flere komponenter, og i denne sammenhengen er komponentene skrift, symboler og grafikk eller bilder. En matematisk oppgave blir meningsløs om man forstår det som står skrevet, men ikke kan lese og tolke meningen bak en graf eller et diagram. Det blir derfor i en tekstanalyse som denne nødvendig å ta hensyn til all den grafikken som presenteres underveis, både hvordan og hvorfor den presenteres slik den gjøres.

Arbeidet med en sammensatt tekst kan deles i to hovedområder, innhold og utforming. I en sammensatt tekst må alle elementer analyseres, og utformingen man i enkelte situasjoner ville sett bort fra og klassifisert som design, bør også tas med. For denne oppgavens del er eksamenssettenes grafiske profil, rent utformingsmessig, mindre interessant, og jeg valgte derfor å ikke fokusere på dette aspektet av tekstanalysen. For mitt bruk var tekstanalysens hovedformål å belyse innholdsdelen av tekstene. Når innholdet først er brakt frem i lyset, finnes det mye utdanningsvitenskapelig teori rundt dette som kan benyttes. Dette er tema for neste kapittel.

2.2 Kunnskap, forståelse og annen utdanningsvitenskapelig teori

Som nevnt i innledningen, er formålet med denne masteroppgaven å kunne si noe om i hvor stor grad «forståelse» vektlegges i skolen, ut fra hvor stor vekt det legges på «forståelse» til eksamen. Selv om de fleste vil si at de vet hva det vil si å forstå en ting, er «forståelse» et sammensatt begrep, og det er derfor jeg innledningsvis skriver dette i hermetegn, for å symbolisere at dette begrepet enda ikke er avklart for sitt bruk i denne oppgaven. Begrepene *relasjonsforståelse* og *instrumentell forståelse* er én måte å bryte «forståelse» opp i flere biter, selv om disse begrepene også er sammensatte. Ved å bryte ned «forståelse» på denne måten, likner disse begrepene matematikken selv, der man ofte må skrelle vekk ytterlagene i et problem for å kunne nå inn til en kjerne man kan jobbe videre med. På tilsvarende vis handler denne delen av oppgaven om å nå inn til kjernen av hva «forståelse» er, ikke som en absolutt sannhet, men hva dette begrepet representerer i denne oppgaven.

Definisjonene jeg valgte å ta utgangspunkt i er hentet fra Solvang (1992), og lyder som følger:

> Vi sier at en elev viser instrumentell forståelse dersom hun på en utfordring bare svarer med en konkretisering. (Solvang, 1992, s. 96)

og

> Vi sier at en elev viser relasjonsforståelse dersom hun når hun løser en passende utfordring, kan forklare sammenhengen mellom premissene i utfordringen og den endelige løsningen. (Solvang, 1992, s. 97)

Allerede her må man stoppe opp og spørre seg om disse tilsynelatende fornuftige definisjonene inneholder begrensninger for denne oppgaven, og svaret er ja. Som vi kan se av disse definisjonene, inneholder de begge en løsning av en oppgave, eller i det minste et avgitt svar, men hvorvidt eksamensoppgavene ber om eller krever forklaring av sammenhengene, slik det bør gjøres for å vise relasjonsforståelse, er problematisk. Definisjonen av relasjonsforståelse krever kun at eleven *kan* forklare, ikke at hun må det, og på denne måten oppstår det et dilemma. Hvordan er det mulig å avgjøre hvorvidt en elev kan forklare den avgitte løsningen eller ikke, hvis man ikke ber om en slik forklaring? Dette er et viktig spørsmål som gjentatte ganger måtte overveies og ble hentet opp igjen under arbeidet med eksamenssettene.

For å problematisere den andre av Solvangs definisjoner vil jeg trekke frem Mellin-Olsens (1981) artikkel om instrumentalisme. Her utvides begrepet instrumentell forståelse til noe mer, der elevens forståelse av *hva* som må gjøres ikke er en laverestående eller underutviklet form for forståelse av *hvorfor* det må gjøres, men heller en alternativ, mer pragmatisk tilnærming til det å løse matematiske problemer. Med dette som grunnlag kan man derfor hevde at det vil være problematisk å se på en elevs besvarelse som kun består av riktige svar, uten forklaringer. Kan man hevde at en slik elev har relasjonell forståelse? Og hvis ikke, kan man hevde at en slik elev bare har instrumentell forståelse? Slike spørsmål gjør at arbeidet med eksamenssettene ble tvunget til å ta for seg to litt ulike perspektiver, der det første omhandler forfatterens intensjon med oppgaven i forhold til selve oppgaven og det andre omhandler selve oppgaven i forhold til elevens tolking og løsning av denne. I og med at denne oppgaven kun ser på eksamenssettene i seg selv, vil disse perspektivene nødvendigvis ikke være i forgrunnen av analysen, men vil heller være med på å gi diskusjonen rundt eksamenssettene størst mulig bredde.

Å dele matematisk forståelse i to på denne måten er åpenbart en inndeling som er nyttig for enkelte deler av denne oppgaven, men det er viktig å huske på at matematikk er en sammenknyttet enhet, man kan aldri skille noe fullt og helt fra resten. Det er med dette i bakhodet at jeg trekker frem *prosess-objekt-dualiteten* beskrevet av Sfard (1991). Kort oppsummert handler denne dualiteten om hvordan matematisk kunnskap formes. Et område innen skolematematikken vil ofte starte som en prosess utført på kjente objekter, noe man gjør, før det skjer et skifte til at prosessen ses på som et objekt i seg selv. Et eksempel på dette er skiftet fra en brøk som et heltall delt på et annet, til en brøk som et eget, separat matematisk objekt. Noe som kjennetegner matematisk forståelse er evnen til å veksle mellom disse to perspektivene avhengig av hva situasjonen krever. For å knytte dette til relasjonsforståelse og instrumentell forståelse vil jeg si at en elev med relasjonsforståelse vil kunne utføre en algoritmisk prosess uten nødvendigvis å tenke så nøye over den, det vil si behandle oppgaven instrumentelt, men vil senere i møte med samme prosess skifte perspektiv og tenke mer sammensatt i møte med en mer utfordrende oppgave. I kontrast til dette vil en elev med en instrumentell forståelse mest sannsynlig holde seg til én type oppfatning, og på denne måten hemme sin egen evne til å løse eller forklare et gitt problem. Dette perspektivet var, i likhet med Solvangs definisjoner, noe som tidlig skilte seg ut som en del av kjernen til teorien denne oppgaven benytter seg av. Dette viser seg i resultatdelen av oppgaven.

Teorien om relasjonsforståelse og instrumentell forståelse presentert så langt stammer fra 70- og 80-tallet. To av de som stod for utviklingen av disse begrepene var tidligere nevnte Mellin-Olsen, og Skemp (1987). Senere på 80-tallet ble det utviklet et liknende, alternativt begrepspar av Hiebert (1986), *konseptuell kunnskap* og *prosedural kunnskap*. Definisjonene av disse er som følger:

> Conceptual knowledge is characterized most clearly as knowledge that is rich in relationships. It can be thought of as a connected web of knowledge, a network in which the linking relationships are as prominent as the discrete pieces of information. Relationships pervade the individual facts and propositions so that all pieces of information are linked to some network. In fact; a unit of conceptual knowledge cannot be an isolated piece of information; by definition it is part of conceptual knowledge only if the holder recognizes its relationship to other pieces of information. (Hiebert, 1986, s. 3-4)

og

> Procedural knowledge, as we define it here, is made up of two distinct parts. One part is composed of the formal language, or symbol representation system, of mathematics. The other part consists of the algorithms, or rules, for completing mathematical tasks. The first part is sometimes called the “form” of mathematics […]. It includes a familiarity with the symbols used to represent mathematical ideas and an awareness of the syntactic rules for writing symbols in an acceptable form. […] At more advanced levels of mathematics, knowledge of form includes knowledge of the syntactic configurations of formal proofs. This does not include the content or logic of proofs, only the style in which proof statements are written. […] The second part of procedural knowledge consists of rules, algorithms or procedures used to solve mathematical tasks. They are step-by-step instructions that prescribe how to complete a task. A key feature of procedures is that they are executed in a

predetermined linear sequence. It is the clearly sequential nature of procedures that probably sets them most apart from other forms of knowledge. (Hiebert, 1986, s. 6)

Disse definisjonene er mer eksplisitte enn Solvangs, men det er likevel lett å peke på viktige forskjeller. Det første jeg velger å trekke frem her, er forskjellen i utførelse. Mens begge av Solvangs definisjoner inneholder en «utfordring», et problem som skal løses, gjør ikke Hieberts det. Kun i definisjonen av prosedural kunnskap beskrives det hvordan kunnskapstypen forholder seg til det å løse et problem. Av den grunn virker konseptuell kunnskap mer distansert fra selve aktiviteten matematikk enn det relasjonsforståelse gjør. Dette er selvsagt et problem når man studerer eksamensoppgaver, hvordan skal man knytte et slikt «kunnskapsnettverk» til det å løse oppgaver? Jeg mener at svaret på dette ligger i assosiasjon og memorering. Gitt en matematisk oppgave vil man enten velge seg et startpunkt, eller legge merke til en opplysning i oppgaven og gå videre derfra. Ofte vil man komme på nettopp en slik «kobling» i kunnskapsnettet som linker en videre til neste punkt, og så videre. På denne måten vil jeg si at Solvang og Hiebert har ulike perspektiver på samme prosess. «Forståelse» er når man kommer seg fra utfordring til løsning via et slikt kunnskapsnett, og da finnes det ofte mange alternative veier å velge. Forskjellen mellom Solvang og Hiebert blir da at Hiebert fokuserer på formen kunnskapen må være bygget opp på hos en elev, mens Solvang prioriterer at eleven selv må klare å peke på alle «koblingshoppene» hun gjør før hun når løsningen.

For prosedural kunnskap, som omhandler prosedyrer slik navnet antyder, er det også klare forskjeller mellom denne kunnskapsformen og instrumentell kunnskap, spesielt hvis man støtter seg mest til instrumentalismebegrepet til Mellin-Olsen. Kanskje den viktigste forskjellen er at en matematiker som blir bedt om å løse en oppgave som krever «forståelse» vil bruke konseptuell kunnskap, men vil også ha prosedural kunnskap. Det samme er ikke sant for Solvangs definisjoner, en matematiker som bes om å forklare løsningen sin vil ikke kun svare med et eksempel. På denne måten er det en sterkere deling mellom forståelsestypene hos Solvang enn hos Hiebert. Den største måten prosedural kunnskap skiller seg fra instrumentalismebegrepet på vil jeg si er at prosedural kunnskap utelukkende beskriver gjennomføringen av selve løsningsprosessen, mens instrumentalismebegrepet også favner om den kunnskapen, den gjenkjennelsesprosessen, som skal til for å implementere riktig løsningsprosess i en gitt situasjon. For begge kunnskapstyper er det ingen krav om å forstå hvorfor løsningsprosessen virker, men instrumentalismebegrepet blir likevel bredere siden implementeringsdimensjonen av problemløsing tas med.

For videre å problematisere teorien bak kunnskapstyper, viser jeg til Star (2000, 2005, 2007), som peker på vansker med konseptuell- og prosedural-begrepet, spesielt at det kan oppstå problemer i kommunikasjonen når man bruker disse begrepene, da ulike forskere har ulike oppfatninger av hva et begrep inneholder eller betyr. For denne oppgavens del er de finere punktene av teorien av mindre betydning, men det er fortsatt viktig å være bevisst på at teorien blir mindre entydig når man beveger seg bort fra kjernen. Det er av denne grunn jeg har valgt å la oppgaven ta utgangspunkt i Solvangs relativt ordknappe, enkle definisjoner, mens Hieberts definisjoner tilbyr et annet perspektiv og hjelper til å berike teorien, og drøftingen rundt eksamenssettene som presenteres senere.

Det at ulike forskere kan ha ulik oppfatning av hva begreper innebærer, speiler det jeg skrev innledningsvis i dette kapittelet: de fleste vil føle at de vet hva det vil si å forstå noe, mens hvis man går nærmere inn på hva dette vil si, blir det mer komplekst. Det er på samme måte med teoriene rundt kunnskap og forståelse, de er lette å forstå overflatisk, mens hvis man virkelig skal sette seg inn i dem, avdekker man fort at de er vesentlig mer komplekse enn de først fremstår som. Heldigvis er arbeidet denne oppgaven tar for seg av en praktisk natur, ikke en videreføring eller utdyping av allerede eksisterende teori. All teorien som er gått gjennom så langt danner bakteppet for det som kan forenkles til forskningsspørsmålet:

«Må eleven resonnere, eller er det tilstrekkelig å huske, for å løse denne oppgaven?»

Svaret på dette spørsmålet blir presentert i kapittel 5, men relevant teori danner bare et utgangspunkt for å svare på et slikt spørsmål. På veien mot dette svaret trengs også et metodisk rammeverk, noe som er tema for neste kapittel. I løpet av arbeidet med metoden jeg brukte under analysearbeidet fikk jeg bruk for forskningen til Lithner (2003, 2008), og jeg presenterer derfor denne i det følgende.

Noe av det Lithner beskriver i sin artikkel fra 2003 er spesielt relevant for analysen av eksamenssettenes del 2, den delen der elevene kan bruke alle hjelpemidler utenom kommunikasjon. I artikkelen ser Lithner på hvordan studenter jobber med oppgaver i en matematisk lærebok, og beskriver og klassifiserer tre hovedmåter dette skjer på: *plausibel resonnering* (Lithner, 2003, s. 32-33), *etablert erfaring* (ibid., s. 34-35) og *identifisere likheter* (ibid., s. 35). Kort forklart er den første arbeidsmåten hva mange vil assosiere med matematikk, bruk av matematiske egenskaper og logikk for å gradvis bevege seg i retning av løsningen. Den andre er å huske tilbake til tidligere, liknende oppgaver man har løst før og bruke dette til å prøve å løse oppgaven, mens den tredje er å lete gjennom læreboken for å finne en eller flere oppgaver som har likheter med oppgaven man jobber med, for så å prøve å kopiere fremgangsmåten over i den aktuelle oppgaven man jobber med. Likheten mellom situasjonen Lithner tar utgangspunkt i: en student som jobber med en oppgave i læreboken, og situasjonen for en elev som sitter med en eksamensoppgave og alle hjelpemidler tilgjengelig, blant annet læreboken eleven har brukt gjennom skoleåret, er slående. Likevel må man også bedømme om disse ulike arbeidsformene kan være like tilstedeværende i del 1 av eksamen, den delen som er fri for hjelpemidler.

Plausibel resonnering er åpenbart en arbeidsmåte som man alltid vil ha mulighet til å bruke, og er nok det mange matematikere vil tenke på som grunnmuren, det man kan bygge på hvis man ikke har annet. Når det kommer til etablert erfaring, er det øyeblikkelig ett moment som springer frem og krever oppmerksomhet under analysen av eksamenssettene. Hvis eksamenssettene er relativt like fra år til år, vil det ikke være umulig å tenke seg at mange elever regner gjennom eksamenssett fra tidligere år som trening mot sin egen eksamen, og på denne måten bygger seg opp en solid erfaring av hva de kan komme til å møte. Videreføringen av dette blir naturlig nok å identifisere likheter, for på del 2 av eksamen er det ingenting som hindrer elevene i å ta med tidligere gitte eksamener og løsningsforslag på disse. På bakgrunn av dette var det å etablere graden av likhet mellom eksamenssettene et viktig moment i analysen, det å se på hva slags forståelsestype som kreves for å løse en gitt oppgave var ikke tilstrekkelig i seg selv.

Lithner (2008) beskriver hvordan arbeidsformen resonnering kan deles i *kreativ resonnering* og *imitativ resonnering*. Som den tidligere beskrevne teorien rundt instrumentalisme, stiller Lithners inndeling algoritmebruk i et bedre lys. Under et slikt arbeid som denne oppgaven bygger på, er det lett å falle i den fellen å gjøre skillet mellom relasjonsforståelse og instrumentell forståelse synonymt med det å tenke og å ikke tenke, mens det i realiteten kreves en god del kognitive prosesser i det å velge, implementere og utføre en algoritme eller løsningsmetode. Selv om mange av resonneringsbegrepene Lithner bruker omhandler implementering av strategier for å løse en oppgave som kunne klassifiseres som instrumentelle, springer likevel disse begrepene ut fra en tenkeprosess (ibid., s. 267). Selv om ordbruken her muligens går litt på tvers av resten av kapittelet, er resonnering i denne betydningen likevel noe som må tas opp. Under arbeidet med eksamenssettene var det nemlig ikke bare viktig å identifisere hvilke oppgaver som kunne løses med algoritmebruk, men også hvor enkelt eller hvor vanskelig det var å nå punktet for implementering av algoritmen. I den situasjonen at en oppgave kan løses rent algoritmisk, men at eleven først må dekode oppgaveteksten for å forstå at dette lar seg gjøre, var disse begrepene svært nyttige.

Denne oppgaven bruker altså Solvangs definisjoner som en grunnmur for analysen av eksamenssettene, mens Hiebert og Sfard står for viktige, nært beslektede områder som styrker analysen. Lithners teori benyttes også i analysen, og sørger for en mer praktisk rettet dimensjon av teorien.

3. Metode

3.1 Utvalg av og bakgrunn for datamaterialet

Etter at denne oppgavens problemstilling var formulert, ble det fort klart at det måtte gjøres begrensninger i hva oppgaven skulle ta utgangspunkt i. Cohen et al. (2011, s.143-164) beskriver forskjellige utvalgsmetoder for datainnsamling, og hva man må ta hensyn til med hver enkelt metode. Da Kunnskapsløftet per dags dato fortsatt er under 10 år gammelt, ville det være rimelig å anta at et bredt utvalg muligens ville kunne mangle dybde, med mindre man tar utgangspunkt i et veldig stort datamateriale. Mitt valg ble derfor å begrense meg til én av de faglige retningene innenfor matematikken i videregående skole. På denne måten kunne oppgaven, ved hjelp av et lite fokusskifte fra helhet til del, ta utgangspunkt i et komplett datasett, og spørsmål om representativiteten for resultatene ville også bli enklere å besvare.

Mitt valg falt på Matematikk R1 og Matematikk R2. Dette er programfag som normalt tas i Vg2 og Vg3, med mindre eleven har fulgt et forsert løp. Matematikk R2 bygger i stor grad på og er ment som en videreføring av Matematikk R1. Med utgangspunkt i Utdanningsdirektoratet (2014a, s.57-58), kan man se at Matematikk R1 og Matematikk R2 ikke representerer hva flertallet velger av matematikk. Det er «litt under en tredel» (ibid.) av elevmassen som velger Matematikk R1 i Vg2, og rundt 70 % av disse går videre med Matematikk R2. Valget falt likevel på disse fagene, da de representerer den største spesialiseringen mot høyere utdanning innen realfag. Jeg vil argumentere for at det er i en slik gruppe man burde forvente å finne det høyeste antall elever med «forståelse», en gruppe som i Norge består av ca. 14 000 -15 000 elever hvert skoleår, fordelt på Matematikk R1 og Matematikk R2 slik det vises i tabell 3.1.

Med fokusområdet valgt vil det si at analysesettet vil bestå av 14 eksamener fra Matematikk R1, gitt i perioden 2008-2014, og 12 eksamener fra Matematikk R2, gitt i perioden 2009-2014. Det blir altså gitt to eksamener hvert år, en på høsten og en på våren. Bildet de fleste har av eksamen gjennom egen skolegang er at våreksamenen er den som avholdes for å avslutte skoleåret og programfaget, mens høsteksamenen er beregnet på de som ikke fikk tatt ordinær eksamen eller må gå opp til ny eksamen. Privatister fordeler seg på begge eksamenstidspunktene. Den fulle og hele sannheten er litt mer sammensatt, og finnes i opplæringsloven, som jeg derfor har valgt å presentere her.

Tabell 3.1: Antall elever på de ulike programfagene i matematikk på studieforberedende utdanningsprogrammer fra skoleåret 2007/2008 til 2013/2014 (Utdanningsdirektoratet, 2014a, s.57).

	2007–2008	2008–2009	2009–2010	2010–2011	2011–2012	2012–2013	2013–2014
R1	8 451	8 698	8 210	7 718	8 525	9 002	9 593
R2	62	6 930	6 400	6 081	5 532	6 032	6 413
S1	3 780	5 957	6 436	6 872	7 488	7 830	8 078
S2	0	2 996	4 145	4 778	5 180	5 400	5 610
X	479	309	380	218	227	223	–

Forskrift til opplæringslova (Lovdata, 2014) beskriver ulike situasjoner som fører til at en elev må gå opp til eksamen, eventuelt avlegge eksamen på nytt, og presenteres i tabell 3.2.

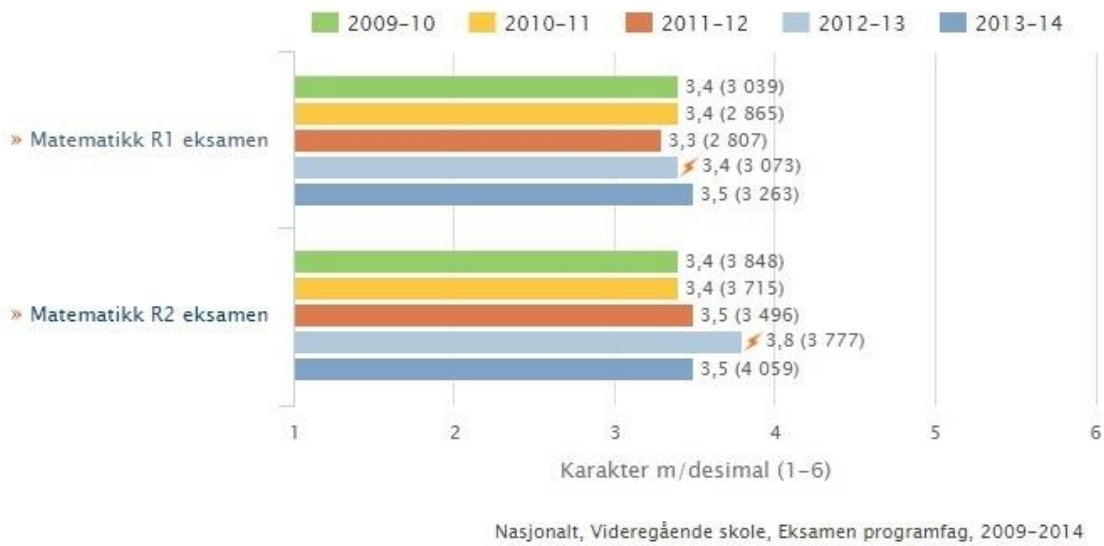
Tabell 3.2: Paragrafer som omhandler oppgang til eksamen (Lovdata, 2014).

§ 3-33.*Særskild eksamen for elevar i vidaregåande opplæring*	Ein elev som får karakteren 1 i standpunktkarakter i eit fag, har rett til særskild eksamen i faget dersom han eller ho ikkje er trekt ut til eksamen i faget. Det gjeld òg for fag der det ikkje blir halde eksamen ordinært. Særskild eksamen blir normalt halden samtidig med utsett og ny eksamen.
§ 3-34.*Ny eksamen for elevar i vidaregåande opplæring*	Ein elev som får karakteren 1 ved ordinær eksamen, har rett til ny eksamen i faget ved første etterfølgjande eksamen. Eleven beheld då standpunktkarakteren i faget. Dersom eleven ikkje går opp til første etterfølgjande eksamen, må han eller ho ta

	faget som privatist, og standpunktvurderinga i faget fell bort.
§ 3-35.*Utsett eksamen for elevar og privatistar i vidaregåande opplæring*	Ein elev eller privatist som har dokumentert fråvær ved ordinær eksamen og særskild eksamen, eller ein elev som har dokumentert fråvær ved ny eksamen, har rett til å framstille seg til første etterfølgjande eksamen. Eleven beheld standpunktkarakteren i faget. Dersom eleven ikkje går opp til første etterfølgjande eksamen, må han eller ho ta faget som privatist, og eventuell standpunktvurdering i faget fell bort. Fråvær frå eksamen blir rekna som dokumentert når eleven eller privatisten er hindra frå å møte til eksamen, hindringa er uføreseieleg og han eller ho elles ikkje kan lastast for hindringa. Eleven eller privatisten må leggje fram dokumentasjon på dette. Dersom ein elev har rett til utsett eksamen i trekkfag, skal trekkinga av fag gjerast på ny.

Jeg siterer forskriften til opplæringsloven også av den grunn at disse tre eksamensformene spiller en liten rolle i figur 3.1 og 3.2. Som det opplyses om fra Utdanningsdirektoratet (2014b):

> Fra og med 2012/13 er ikke elever som har tatt ny, utsatt eller særskilt eksamen med i beregningsgrunnlaget for karakterstatistikken. Disse elevene, som tar eksamen på høsten, gjennomfører en annen eksamen enn de som tar eksamen på våren.



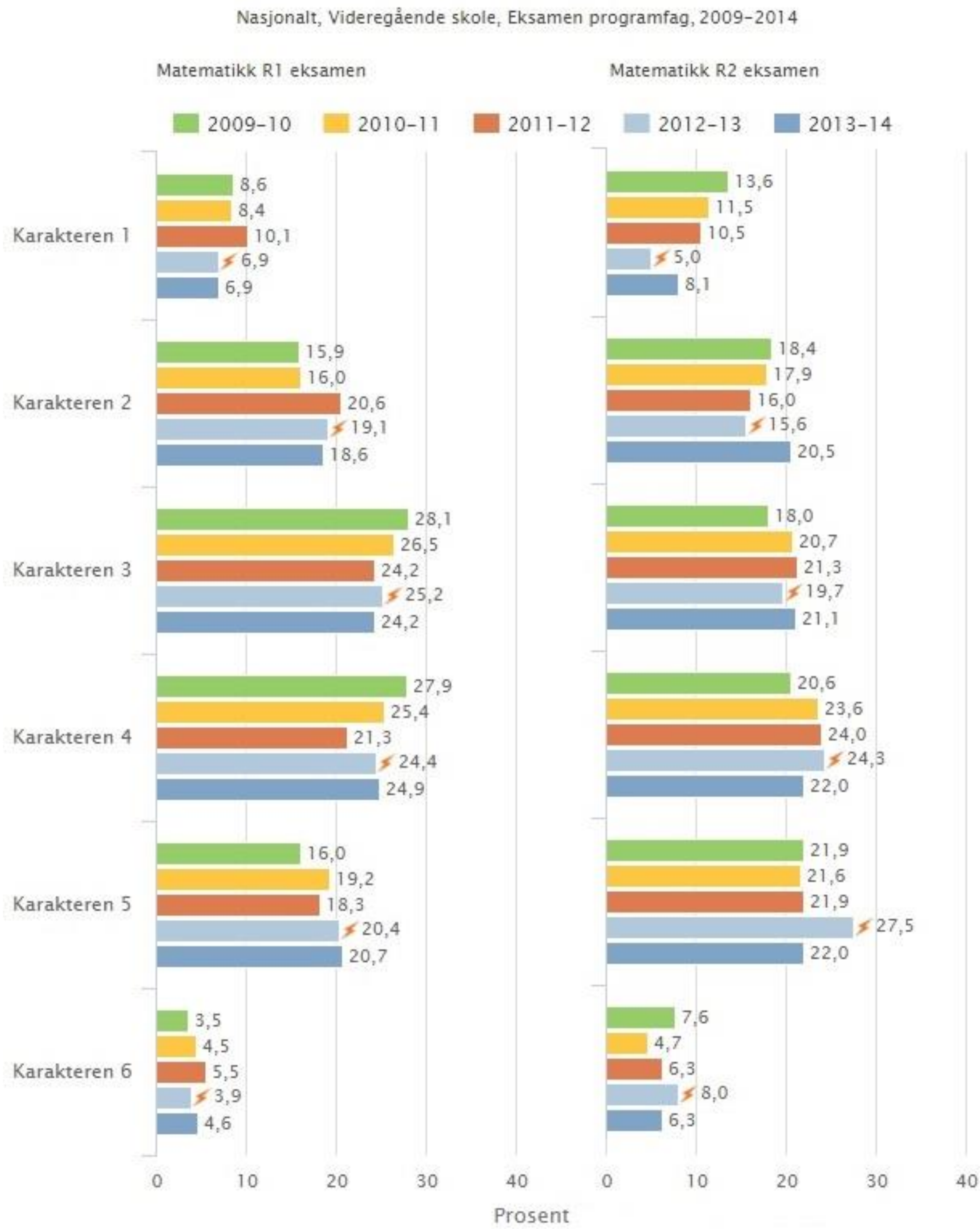
Figur 3.1: Gjennomsnittskarakter og antall elever som avla eksamen i perioden 2009-2014. Grafikk hentet fra Utdanningsdirektoratet (2014b).

Jeg har likevel valgt å presentere data offentliggjort av Utdanningsdirektoratet, da det viser at ca. en tredel av elevene som velger Matematikk R1 går opp til eksamen, mens det for Matematikk R2 er nærmere to tredeler.

Selv om denne oppgaven kun tar for seg eksamenssett, kan det være lurt å vite hvor store elevgruppene som har besvart dem er, og hvordan den faglige prestasjonen deres ble vurdert. Statistikken presentert i tabell 3.1, tabell 3.2, figur 3.1 og figur 3.2 er ment å belyse dette, og spesielt viser tabell 3.3 at det er en liten, men økende, gruppe elever som følger et forsert løp.

Tabell 3.3: Antall elever som tok Matematikk R1 og Matematikk R2 mens de gikk på et lavere trinn enn henholdsvis Vg2 og Vg3. (Utdanningsdirektoratet, 2014a, s.90).

	2007/08	2008/09	2009/10	2010/11	2011/12	2012/13	2013/14
R1	44	241	127	159	241	273	327
R2		73	118	125	138	191	233



Figur 3.2: Karakterfordeling på eksamen i Matematikk R1 og R2 i perioden 2009-2014. Grafikk hentet fra Utdanningsdirektoratet (2014b).

Selv om innholdet i Matematikk R1 og Matematikk R2 blir nøyere diskutert senere i oppgaven, er det også naturlig å si noe om det her, da målene i læreplanen er noe av det som bygger opp under påstanden om at disse fagene representerer den høyeste matematiske spesialiseringen i videregående opplæring, noe som var et av utvalgskriteriene for å jobbe med nettopp disse fagene. Hovedområdene i Matematikk R1 er geometri, algebra, funksjoner og kombinatorikk og sannsynlighet (Utdanningsdirektoratet, 2006a). Eksempler fra kompetansemålene, presentert i tabell 3.4, sier at elevene skal kunne

Tabell 3.4: Eksempler på kompetansemål fra Læreplanen i Matematikk R1 (Utdanningsdirektoratet, 2006a).

Geometri	«gjøre rede for forskjellige bevis for Pytagoras' setning, både matematisk og kulturhistorisk»
Algebra	«gjøre rede for implikasjon og ekvivalens, og gjennomføre direkte og kontrapositive bevis»
Funksjoner	«gjøre rede for begrepene grenseverdi, kontinuitet og deriverbarhet, og gi eksempler på funksjoner som ikke er kontinuerlige eller deriverbare»
Kombinatorikk og sannsynlighet	«gjøre rede for begrepene uavhengighet og betinget sannsynlighet, og utlede og anvende Bayes' setning på to hendelser»

Verbbruken i alle disse kompetansemålene sier at eleven skal kunne gjøre rede for, det vil si forklare, et matematisk tema eller en idé. Med teorikapittelet (Solvang, 1992) friskt i minne ser vi med en gang at dette dreier seg om at eleven må vise relasjonsforståelse.

For Matematikk R2 er hovedområdene geometri, algebra, funksjoner og differensiallikninger. Som for Matematikk R1 finner vi også her kompetansemål som krever relasjonsforståelse (Utdanningsdirektoratet, 2006b). Eksempler fra Matematikk R2 presenteres i tabell 3.5.

Tabell 3.5: Eksempler på kompetansemål fra Læreplanen i Matematikk R2 (Utdanningsdirektoratet, 2006b).

Geometri	«beregne lengder, vinkler og arealer i legemer avgrenset av plan og kuleflater»
Algebra	«gjennomføre og gjøre rede for induksjonsbevis»
Funksjoner	«gjøre rede for definisjonen av bestemt integral som grense for en sum og ubestemt integral som antiderivert»
Differensiallikninger	«modellere praktiske situasjoner ved å omforme problemstillingen til en differensiallikning, løse den og tolke resultatet»

Felles for Matematikk R1 og Matematikk R2, som eksemplene er ment å vise, er ikke bare at de krever relasjonsforståelse, men også at de matematiske temaene er relativt avanserte, og det er dette som er en av hovedgrunnene til at denne oppgaven baserer seg på disse to programfagene. Man kan finne liknende kompetansemålsformuleringer i andre programfag, det kreves relasjonsforståelse i andre programfag også, men det er kravet om relasjonsforståelse på et såpass avansert matematisk nivå som skiller seg ut for Matematikk R1 og Matematikk R2. Etter denne gjennomgangen av hvilket datamateriale jeg valgte ut, og hvorfor jeg valgte det, er det nå på tide å gå videre til selve analysemetodene jeg brukte i arbeidet med eksamenssettene.

3.2 Analysemetode

I beskrivelsen av analysemetoden som ble brukt under arbeidet med eksamenssettene, velger jeg å presentere hva som ble gjort, i den rekkefølgen det ble utført. Et naturlig startpunkt når man skal analysere data fra flere år, er å avklare hvordan man skal gruppere dem. Med utgangspunkt i eksamenssettene var det to klare måter å gjøre dette på: enten å se på hvert programfag for seg, eller å holde et mer skiftende fokus og se på progresjonen en elev ville opplevd, dvs. analysere eksamenssettet fra Matematikk R1 for et gitt år, deretter eksamenssettet fra Matematikk R2 det påfølgende året. Jeg valgte å splitte analysen i programfag, for å lettere avgjøre om det kunne dokumenteres en endring i hvert enkelt programfag opp gjennom årene. En eventuell sammenheng mellom Matematikk R1 og Matematikk R2 vurderte jeg til å være mindre sannsynlig, og vanskeligere, å finne, da det ikke er nødvendig å velge Matematikk R2 selv om man har hatt Matematikk R1.

Jeg valgte å starte analysearbeidet av eksamenssettene med å utføre en verbanalyse. Med dette mener jeg en opptelling av de operasjonelle verbene som brukes i oppgavene, hva er det elevene blir bedt om å gjøre? Denne metoden er godt egnet som et utgangspunkt for videre analyse av to grunner: at eksamenssettene er offisielle dokumenter som deles ut på faste tidspunkt og at læreplanene i Matematikk R1 og Matematikk R2 ikke har gjennomgått store endringer i tidsperioden. Med andre ord kan man ikke bare forvente en relativt lik utforming av eksamenssettene, men også et relativt likt innhold når det kommer til oppgavenes ordlyd og hva elevene skal gjøre. I dette arbeidet var det naturlig å benytte meg av eksamensveiledningen publisert av Utdanningsdirektoratet (2014c), som blant annet forklarer deler av ordbruken i eksamenssettene.

Etter den innledende verbanalysen trengtes det en dypere og mer klassifiserende analyse. I arbeidet med dette var det naturlig å se til Fossums (2009) masteroppgave, med undertittelen «fra 2MX til R1: endret eksamensoppgavene seg med eksamensformen?». Hensikten med denne masteroppgaven var å se om Kunnskapsløftet hadde endret på hva eksamensoppgavene krevde, kreativitet eller algoritmebruk. Tema for Fossums oppgave er altså nært beslektet med denne oppgaven. Fossum tok utgangspunkt i seks eksamenssett, tre fra 2MX og tre fra Matematikk R1, altså et mye lavere antall enn det denne oppgaven gjør. Med en såpass større arbeidsmengde var det ikke mulig å følge samme fremgangsmåte i min oppgave, så jeg foretok en alternativ analyse som likevel bygget på mange av de samme momentene, som i stor grad er hentet fra forskningen til Lithner (2003, 2008) beskrevet i teorikapittelet.

Jeg hentet også inspirasjon fra det oppdaterte rammeverket til TIMSS Advanced (Grønmo, Lindquist & Arora, 2014), mer spesifikt fra klassifiseringen av kognitive domener (ibid., s.14-15). Ved å bestemme hvilke prosesser og hvilke kognitive domener en elev oftest må ta i bruk for å løse en bestemt oppgave, kunne den klassifiseres under en av de tre kategoriene som benyttes i TIMSS-rammeverket: vite, anvende og resonnere. Disse beskrives på følgende måte:

Vite:

> Knowing refers to students' knowledge of mathematical facts, concepts, and procedures. Mathematical facts and procedures form the foundation for mathematical thought. (ibid., s. 14)

Anvende:

> The applying domain involves the application of mathematics in a range of contexts. In this domain, students need to apply mathematical knowledge of facts, skills, and procedures or understanding of mathematical concepts to create representations and solve problems. The problems in this domain typically reflect standard types of problems expected to be familiar to students. Problems may be set in real-life situations, or may be purely mathematical in nature involving, for example, numeric or algebraic expressions, functions, equations, or geometric figures. (ibid., s. 14)

Resonnere:

> Reasoning mathematically involves logical, systematic thinking. Problems requiring reasoning may do so in different ways, because of the novelty of the context or the complexity of the situation, the number of decisions and steps, and may draw on knowledge and understanding from different areas of mathematics. Reasoning involves formulating conjectures, making logical deductions based on specific assumptions and rules, and justifying results. (ibid., s. 14-15)

For å knytte disse til forståelsestype, valgte jeg å gruppere vite og anvende under instrumentell forståelse, selv om anvende også har relasjonelle aspekter ved seg, mens resonnere ble plassert under relasjonsforståelse.

Satt sammen til ett utgjorde Lithner i tandem med rammeverket til TIMSS Advanced en god basis for den videre analysen jeg foretok av eksamenssettene. Under denne hovedanalysen sørget jeg også for å være på utkikk etter oppgaver som kunne eksemplifisere trender eller utliggere, da dette var noe jeg ønsket å prioritere å presentere blant resultatene.

Som nevnt innledningsvis delte jeg analysearbeidet i to, og jobbet først med eksamenssettene fra Matematikk R1, deretter eksamenssettene fra Matematikk R2. Da denne fasen av analysen var ferdigstilt, gikk jeg over til å se om det var noe som stakk seg ut som eventuelle fellesnevnere blant disse to fagene. Det er på denne måten, først hvert programfag for seg, etterfulgt av en fellesdel, jeg presenterer funnene fra analysen i oppgavens neste del.

4. Analyse

4.1 Viktige momenter til diskusjonen

Før jeg starter å presentere selve resultatene fra analysen av eksamenssettene, tar jeg her opp noen innledende fellestrekk og betraktninger rundt arbeidet.

Jeg velger å starte med å påpeke kompletttheten av datamaterialet mitt. Datasettet starter med Kunnskapsløftets første gitte eksamener og avsluttes med eksamenssettene fra høstsemesteret 2014, og selv om disse har noen mindre ulikheter seg imellom, kan de betraktes som tilnærmet identiske i form. Jeg velger å påpeke dette med tanke på videre forskning, da Utdanningsdirektoratet (2015a) våren 2015, etter et forslag som ble lagt frem i 2013, endret tidsfordelingen og kravene om digital kompetanse på eksamen. Eksamenssettene jeg har analysert har en del 1 som skal gjennomføres uten hjelpemidler, og en del 2 der alle hjelpemidler utenom kommunikasjon kan benyttes, og tidsfordelingen mellom disse delene er på henholdsvis to og tre timer. I den nye eksamensformen, som ble gjennomført for første gang våren 2015, samme semester som denne oppgaven ble forfattet, er tidsfordelingen gjort om til tre timer på del 1 og to timer på del 2. I tillegg til dette er det nå også et krav om tilgang på graftegner og CAS, computer algebra system, på elevens datamaskin. Det har altså blitt et fokusskifte over på elevenes kunnskaper og ferdigheter uten hjelpemidler, men elevene må samtidig vise en økt kompetanse i bruken av digitale hjelpemidler.

Som nevnt er eksamenssettene jeg har jobbet med tilnærmet like i utforming og oppsett, men det er en viktig forskjell som må påpekes. I eksamenssettene frem til og med høstsemesteret 2010 inneholder del 2 en oppgave der eleven står fritt til å velge mellom to alternativer, der «De to alternativene teller like mye ved vurderingen.» Det opplyses også om at «Dersom besvarelsen din inneholder deler av begge alternativene, vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.» Denne type oppgave forsvinner så helt fra eksamen. Fra vårsemesteret 2011 og ut er elevens rute gjennom eksamensoppgavene helt lineær og uten valgmuligheter. Videre tanker om hvorfor valgoppgaven ble fjernet, og hva som kjennetegnet den, blir presentert i kapittel 4.4.

En annen, mindre forskjell er nummereringen av oppgavene. Frem til og med vårsemesteret 2012 starter nummereringen av oppgavene på 1, og fortsetter gjennom hele eksamenssettet. Fra høsten 2012 og videre startet nummereringen på 1, men startes på nytt når man kommer til del 2 av eksamen. Før høsten 2012 kunne man altså entydig referere til oppgave 2 i et gitt eksamenssett, mens man etter dette må spesifisere om det er del 1 eller del 2 av eksamen man diskuterer. Videre har denne omnummereringen ført til at eksamenssettenes del 1 har gått fra å ha 1-3 oppgaver til 7-8 oppgaver. Dette har størst innvirkning på oppgavenes undernummerering: en oppgave fra før høsten 2012 kunne ha undernummerering a-h, mens oppgaver etter høsten 2012 oftest har en nummerering a-c. Dette blir også nærmere diskutert i 4.4.

Det siste jeg vil fokusere på før presentasjonen av resultatene, er graden av likhet mellom eksamenssettene, som også ble diskutert i kapittel 3.2. Jeg siterer Utdanningsdirektoratet (2014a, s. 86):

> Hva som vurderes, og hvordan det blir vurdert, påvirker imidlertid opplæringen. Dette omtales gjerne som washback-effekten. Denne effekten kan være både positiv og negativ. Vi vet at eksamen er viktig for norske lærere og elever, og det er derfor rimelig å anta at de sentralgitte skriftlige eksamenene har sterk washback-effekt.

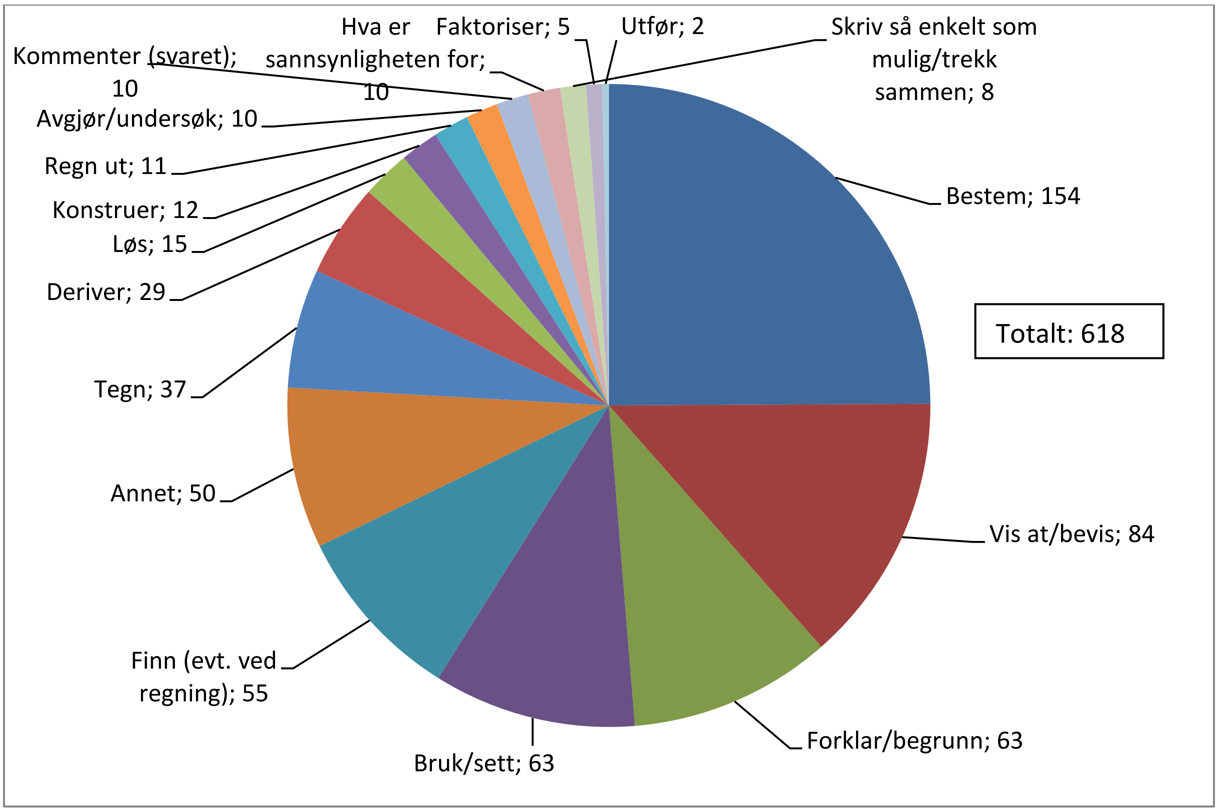
En positiv effekt er for eksempel at «Dersom eksamen makter å teste store deler av elevenes kompetanse, vil den påvirke undervisningen på en god måte.» (ibid., s. 87), mens «Begrepet *teach to the test* viser til den negative siden ved washback-effekten. I verste fall blir kun det som blir testet på eksamen undervist i.» (ibid., s. 87). Washback-effekten, i likhet med valgoppgaven i del 2 av eksamen, blir nærmere diskutert i kapittel 4.4, men nevnes her da det er viktig å ha den i minne når man leser resultatene som presenteres videre.

4.2 Matematikk R1

4.2.1 Verbanalyse

Som tidligere nevnt, startet analysearbeidet av eksamenssettene med en kategorisering og opptelling av verbene som ble brukt i eksamensoppgavene. Resultatet for Matematikk R1 er oppsummert i figur 4.1, et diagram som bygger på data fra de totalt 14 eksamenssettene.

Noen av verbene som blir brukt er selvforklarende, mens andre må kontekstualiseres for å gi mening. Jeg starter med å forklare i hva slags oppgaver verbene typisk dukker opp, samt gjøre en grovinndeling i instrumentell og relasjonell der det er mulig. Trender og endringer i verbbruken kan ikke leses direkte ut fra figur 4.1, men bygger på rådataene som finnes i vedleggene.



Figur 4.1: Opptelling av verb fra eksamenssettene i Matematikk R1

Som man kan se av figuren, er rundt en fjerdedel av verbbruken rettet mot at eleven skal «bestemme» et eller annet, og kobler man dette sammen med verbet «finn» blir andelen enda høyere. «Bestem» og «finn» er nært i slekt med tanke på hva eleven skal gjøre. I «bestem»-oppgaver står eleven fri til å velge fremgangsmåte selv, og det å «bestemme» svaret ved hjelp av et logisk resonnement ville nok blitt godtatt (Utdanningsdirektoratet, 2014c, s.7). «Finn» er litt mer spesifikt, og dukker ofte opp som «finn ved regning». Bruken av «bestem» i oppgaveformuleringen har økt med årene, ikke bare i seg selv, men på bekostning av andre verb og formuleringer. «Finn» har hatt en markant nedgang, bare 5 av de 55 tilfellene er fra etter våren 2011. «Bestem» har også tatt over i oppgaver som har med sannsynlighetsregning å gjøre. Frem til 2011 kunne man finne oppgaver med formuleringen «Hva er sannsynligheten for…», mens dette senere ble endret til «Bestem sannsynligheten for…». Det jeg trekker ut fra dette er at språkdrakten i eksamenssettene er blitt mer ensrettet. Dette er noe jeg kommer tilbake til senere, men min hypotese er at ved å maskere oppgavens faglige innhold bak en nøytral språkdrakt, får man en mindre direkte styring av eleven. Når man konstruerer en eksamensoppgave, er man ute etter at eleven skal løse et problem, noe som ofte krever en spesifikk fremgangsmåte. Eksamensoppgaven er ment å teste et eller flere spesifikke kompetansemål, men hvordan man skal formidle *hva* eleven skal gjøre, uten å formidle *hvordan* eleven skal gjøre det, er en utfordring. Selvfølgelig kreves det en viss styring eller hint for å sette eleven på riktig spor, men dette diskuteres senere i forbindelse med verbet «bruk». «Bestem» fremstår derfor for meg som en nøytral språklig grunnenhet, som verken er instrumentell eller relasjonell i seg selv. Det er først når oppgaven blir supplert med andre, mer spesifikke verb, eller når man ser på oppgavens faglige innhold at oppgaven kan klassifiseres som enten instrumentell eller relasjonell.

To andre verbgrupper som brukes ofte i oppgavetekstene er «vis at», eller «bevis», og «forklar», eller «begrunn». «Forklar»/«begrunn»-formuleringer plasserer oppgaven trygt blant de som tester relasjonsforståelse, verbene brukes i selve definisjonen av denne forståelsestypen (Solvang, 1992, s.97). På samme måte er det med den relativt lille gruppen oppgaver som bruker «kommenter». «Kommenter»-oppgavene er ute etter samme resultat, at eleven forklarer ett eller flere matematiske elementer ved oppgaven, med den viktige forskjellen at eleven ikke blir eksplisitt fortalt *hva* som skal forklares. Det legges altså på et ekstra lag med relasjonsforståelse, eleven må forstå hva som skal forklares så vel som selve forklaringen. «Vis at»/«bevis»-oppgaver er mer komplekse, overraskende nok. «Bevis» brukes ytterst sjeldent, mens «vis at» forekommer hyppigere. I de fleste tilfeller er oppgavepremisset at eleven blir gitt en påstand hun skal vise er sann. Dette er et viktig skille mellom oppgaver av denne typen, og oppgaver som bruker «bestem»-formuleringen. «Bestem»-oppgaver gir ofte et premiss, og eleven må deretter lete seg frem til et ukjent svar. I «vis at»-oppgaver, og til dels «bevis»-oppgaver, blir eleven ofte gitt et premiss og en konklusjon, og elevens oppgave blir da å etablere de nødvendige implikasjonene mellom disse.

En annen relativt stor gruppe oppgaver inneholder enten «bruk» eller «sett». Dette er verb som ikke er del av selve problemstillingen i oppgaven eleven skal løse, men som kommer i forkant av spørsmålet som en instruksjon. Disse verbene kan ha to ulike effekter, den første er nok den tilsiktede fra oppgaveforfatternes side, at eleven blir gitt et startpunkt for løsningsstrategien som bør benyttes i oppgaven, eller instrueres i et verktøy som må brukes underveis i oppgaven. Den andre effekten slike verb kan ha er begrensende, det kan tenkes at en oppgave kunne blitt løst på flere måter, og ved å instruere eleven i å bruke én spesifikk løsningsstrategi kan man hemme en elev som naturlig ville brukt en annen metode. Denne situasjonen er mer teoretisk, men kan nok forekomme i helt spesielle tilfeller. Denne instrueringen av elevene vil nødvendigvis gi opphav til situasjonene Lithner (2003) beskriver, spesielt i del 2 av eksamen. En interessant ting å merke seg ved «bruk»/«sett»-gruppen er at den er nøyaktig like stor som «forklar»/«begrunn»-gruppen. Det er altså like mange oppgaver som ber eleven om å bruke en bestemt metode som det er oppgaver der eleven må forklare hvorfor den valgte fremgangsmåten fører frem til et korrekt svar. I og med at denne verbbruken er ment å gi eleven en starthjelp, kan ikke denne gruppen klassifiseres som instrumentell eller relasjonell i seg selv, det avhenger fullt og helt av den resterende delen av oppgaven, og hvordan den er formulert.

Den siste store verbgruppen, som sammen med de tidligere diskuterte gruppene utgjør rundt 75 % av alle brukte verb i eksamenssettene, er «annet»-gruppen. Denne gruppen er spesiell på flere måter. På én måte er det en oppsamlingsgruppe i selve verbanalysen, bestående av formuleringer og ordbruk som kun forekommer i enkelttilfeller, samtidig er det en gruppe som stikker seg ut som interessant på andre måter. Mange av oppgavene som havner i denne gruppen er oppgaver med spørsmålsformuleringer som er spesialiserte og ikke kunne blitt gitt i en oppgave med et annet innhold. Eksempler på dette er «Hvilken setning fra geometrien er dette et eksempel på?», som kommer etter at eleven har løst en tidligere oppgave. Her møter altså eleven en oppgave med et veldig bestemt svar, og om hun kan svare eller ikke avhenger altså av to faktorer: at eleven fikk riktig resultat i den foregående oppgaven og at hun klarer å gjenkjenne den spesifikke matematiske kunnskapen oppgaven er på jakt etter. En annen oppgave som finnes i denne gruppen er at eleven skal, etter å bli gitt et premiss, besvare spørsmålet «hvor mange mulige korthender finnes det?» Dette er en oppgave som skiller seg fra den tidligere ved at den kun krever at eleven er kjent med en fremgangsmåte og forstår hva premissene i oppgaven innebærer. I tillegg til disse to typer spørsmål finnes det en tredje viktig undergruppe i «annet»-gruppen: oppgaver med kjent innhold og ny formulering. Med dette mener jeg oppgaver som kunne blitt skrevet om til å bruke verb og vendinger fra de store gruppene, uten å endre hva oppgaven ber eleven om å gjøre. Det er snakk om å utføre algoritmer, metoder eller strategier eleven mest sannsynlig ville kjent igjen øyeblikkelig med en annen, mer direkte ordlyd, men som oppgaven skjuler bak en alternativ måte å formulere spørsmålet på. Her blir altså elevens første utfordring å avkode spørsmålet for å hente ut den mer skjulte instruksjonen om hva oppgaven ønsker svar på. Det er vanskelig å klassifisere denne gruppen som helhet under instrumentell- eller relasjonsforståelse, men mange av oppgavene har et klart preg av relasjonsforståelse ved at de presenterer problemstillingen i et annet lys enn eleven muligens er vant med å se den. På denne måten vil en elev som er frigjort fra vane ha en fordel, det å forstå oppgaven uansett hvordan den er formulert, er noe jeg vil klassifisere som relasjonsforståelse.

Blant de resterende gruppene verb er det flere som helt klart er instrumentelle. «Deriver», «løs», «konstruer», «regn ut», «faktoriser» og «utfør» er alle verbgrupper der eleven blir presentert en helt klar oppgave som skal løses uten å foreta tilpasninger før hun implementerer løsningsstrategien. Verbene som brukes er spesialiserte i den forstand at de ikke kan byttes ut. Disse oppgavene kjennetegnes også ved at de er ordknappe, for eksempel vil en «deriver»-oppgave kun være det operasjonelle verbet fulgt av et matematisk uttrykk. Dette er oppgaver som raskt og effektivt søker svar på om eleven oppfyller de relevante kompetansemålene. Det finnes selvfølgelig oppgaver der eleven må bruke derivasjon uten at dette nevnes eksplisitt, men det er da ikke selve derivasjonsprosessen som er fokus for oppgaven. På denne måten symboliserer denne gruppen et minimumsnivå, der det kun kreves instrumentell forståelse og det ikke gis rom for å vise relasjonsforståelse. Gruppen representerer likevel ikke et underordnet nivå, i tråd med tankene til Mellin-Olsen (1981).

«Tegn» og «konstruer» er to verb som skiller seg ut fra de andre, og som jeg har valgt å beskrive som én gruppe. Disse verbene er en instruksjon til eleven om hvilken prosess som må utføres, men står litt på siden av de andre verbgruppene ved at de representerer en visuell presentasjon eller forståelse. «Tegn» brukes ofte i forbindelse med oppgaver der eleven skal undersøke en bestemt funksjon, og som ledd i den prosessen kommer ofte et trinn der eleven må vise at hun forstår hvordan funksjonsgrafen vil se ut med utgangspunkt i funksjonsformelen. «Konstruer» brukes, ikke overraskende, i konstruksjonsoppgaver, der eleven må vise at hun innehar den algoritmiske kunnskapen som skal til for å gjennomføre alle de nødvendige trinnene i konstruksjonen. Denne verbgruppen kjennetegnes altså ved at eleven først må hente frem matematisk kunnskap i flere deler, for så å sette delene sammen for å få utført oppgaven. Samtidig representerer denne klart instrumentelle prosessen også en situasjon der relasjonsforståelse virkelig står frem som en klar fordel. Hvis en elev innehar relasjonsforståelsen som er relevant for oppgaven, forvandles oppgaven fra en trinnvis prosess til en mer helhetlig prosess. Hva jeg mener med dette vil jeg forklare med et eksempel. I en oppgave som ber en elev forenkle et ikke-trivielt algebraisk uttrykk, vil svært få se direkte hva svaret skal være. Både elever med instrumentell forståelse og elever med relasjonsforståelse vil gå gjennom en serie trinn der uttrykket gradvis forenkles og nærmer seg svaret. Ofte vil en elev med relasjonsforståelse bruke færre trinn enn en elev med kun instrumentell forståelse, men denne eleven må fortsatt gå gjennom en rekke steg før hun klarer å se hva svaret skal være. Jeg hevder at motsatsen til dette finnes i «tegn»- og «konstruer»-oppgaver. Her vil en elev med relasjonsforståelse mye tidligere klare å se for seg hvordan den ferdige grafen eller konstruksjonen skal se ut. Ja, eleven har nødvendigvis gått gjennom tidligere trinn i oppgaven som muliggjør dette, for eksempel å finne koordinater for eventuelle topp-, bunn-, null- og vendepunkter, men en elev med relasjonsforståelse vil mye mer direkte kunne bruke denne informasjonen til å forestille seg hvordan funksjonsgrafen kommer til å se ut ferdig opptegnet. Til sammenlikning vil en elev med en instrumentell forståelse av dette helt mekanisk tegne inn punkter og tegne opp funksjonsgrafen, ikke ulikt prosessen en datamaskin eller en grafisk kalkulator ville brukt. Disse to verbene er kanskje de som mest direkte eksemplifiserer objekt-prosess-dualiteten beskrevet av Sfard (1991), som jeg drøftet i kapittel 2.2.

Den siste gruppen jeg vil diskutere her er «avgjør/undersøk»-gruppen, en gruppe som sporadisk dukker opp blant eksamensoppgavene. Dette er oppgaver der eleven blir gitt et premiss eller en påstand, og må teste hva dette innebærer. Slike oppgaver har et utforskende preg, og er enda et eksempel på oppgaver der elevens første handling må være å avkode oppgaven. Disse oppgavene har altså visse likheter med enkelte av «annet»-oppgavene, ved at eleven ut fra informasjonen gitt i oppgaven må bestemme hva slags teknikk og løsningsstrategi som må tas i bruk for å komme frem til svaret oppgaven er ute etter.

Samlet sett ser man etter en slik verbanalyse at man ikke kan trekke noen direkte konklusjoner om hva slags forståelsestype som vektlegges på eksamen uten en mer omfattende analyse. Enkelte verbgrupper skiller seg ut som klart instrumentelle eller med et sterkt relasjonsforståelsesfokus, mens svært mange av verbene som brukes er kraftig kontekstavhengige og kan ikke isoleres fra oppgaven de opptrer i. Neste del blir derfor en gjennomgang av et «typisk» eksamenssett, der jeg vil hente frem eksempler fra ulike år for å poengtere trender eller eksemplifisere hva slags type oppgaver elevene møter i eksamenssituasjonen. Gjennom en slik drøfting får man et klarere bilde av eksamenenes oppbygning, med tanke på forståelsestyper.

4.2.2 Gjennomgang av «eksamenssett»

Denne delen av oppgaven er en syntese av alle eksamenssettene, og jeg gir eksempler fra de ulike eksamenssettene for å poengtere og diskutere resultatene. Samlet vil disse eksemplene representere et helt eksamenssett, størrelses- og innholdsmessig. Jeg må også presisere at i denne delen, selve hovedanalysen, er det ikke alltid like naturlig å referere til forfatterne bak teorien presentert i kapittel 2.2. Kapittel 2.2 presenterte teori for å utforske begrepene instrumentell forståelse og relasjonsforståelse, og disse begrepene brukes derfor i det etterfølgende mer som en syntese av teorien og betraktningene rundt dette som ble presentert i kapittel 2.2, ikke som direkte referanser til Solvang (1992). Enkelte steder refererer jeg likevel til en bestemt teori, oftest da for å poengtere eller understreke et perspektiv.

Eksamenssettene starter med en klar fellesnevner, da de alle, uten unntak, begynner med en derivasjonsoppgave av typen vi kan se i eksempel 4.1. Dette er en klar instrumentell oppgave, der eleven kun skal vise at hun behersker de relevante derivasjonsreglene. Jeg vil også påstå at denne typen oppgave er relativt lavterskel, og gis først for at eleven skal «få gjort litt matte», dvs. settes i riktig mental modus.

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = \ln(x^2 + x)$

b) $g(x) = x \cdot e^x$

c) $h(x) = (x^2 + 3)^4$

Eksempel 4.1: Derivasjonsoppgaver fra del 1 av eksamen i Matematikk R1 våren 2014.

Denne likhetstrenden holdes også i neste oppgave eleven møter, som nesten alltid dreier seg om polynomdivisjon. Kun tre av de 14 settene har ikke polynomdivisjon som sin oppgave nummer 2, og alle disse settene gir en slik oppgave på et senere tidspunkt i del 1. Selv om disse oppgavene kan fremstå som liknende derivasjonsoppgavene, vil jeg likevel klassifisere dem som mer komplekse enn oppgavene eleven først møter, av den grunn av at eleven her ofte må bruke svaret videre i løsningen av en ulikhet. Disse oppgavene er algoritmefokusert, og representerer prosedural kunnskap, hvis man følger Hiebert (1986). Dette vil da gå innunder instrumentell forståelse i denne oppgaven.

c) Vi har gitt polynomfunksjonen $f(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$

1) Vis at $f(1) = 0$. Bruk polynomdivisjon til å faktorisere $f(x)$ i førstegradsfaktorer.

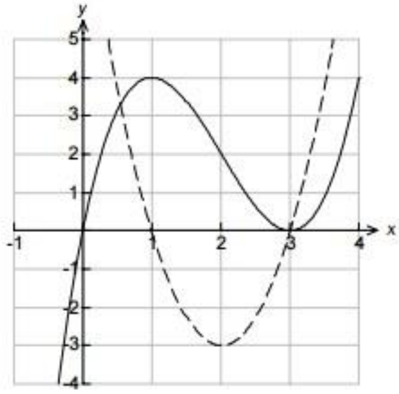
2) Løs ulikheten $f(x) \leq 0$

Eksempel 4.2: Polynomdivisjonsoppgave fra del 1 av eksamen i Matematikk R1 våren 2011.

Så langt fremstår eksamen som uniform, med en gradvis oppbygning mot oppgaver med flere lag der det er mer å gjøre. Dette endres etter den andre oppgaven eleven møter, og selv om temaene for oppgavene i del 1 stort sett er de samme når man sammenlikner eksamenssettene, så er rekkefølgen de presenteres i svært skiftende. I det følgende er derfor rekkefølgen eksemplene presenteres i valgt av meg.

Jeg velger å gå videre med å se på en type oppgave som er svært vanlig, og beslektet med den instrumentelle derivasjonen eleven møter først i eksamen. Denne oppgavetypen kan kalles «funksjons- og derivasjonsforståelse», og opptrer i to ulike former. Den vanligste er som den presentert sist i eksempel 4.3, men hvis en slik oppgave ikke er representert på eksamen finnes det oftest en oppgave der eleven blir gitt en graf og må si noe om grafens kritiske punkter. Oppgaver av disse typene bygger videre på den rent instrumentelle derivasjonen eleven først møter. I disse mer avanserte oppgavene er det større rom for forklaringer og relasjonsforståelse, selv om hovedtyngden av oppgavene fortsatt kan løses instrumentelt. Det er den mer sjeldne typen, der eleven må kommentere en graf, som viser størst potensiale for svar bygget på relasjonsforståelse. Til forskjell fra de tidligste oppgavene er det her altså et større fokus på konseptuell kunnskap (Hiebert, 1986), som havner innunder relasjonsforståelse.

e)



Figuren viser grafen til en funksjon f og grafen til den deriverte av funksjonen.

1) Forklar hvilken graf som er grafen til funksjonen f og hvilken som er grafen til den deriverte.

2) Bruk figuren til å tegne fortegnslinjene for $f(x)$, den førstederiverte og den andrederiverte.

c) Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^3 - 3x$

1) Bestem nullpunktene til f.

2) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter til grafen til f.

3) Tegn grafen til f.

Eksempel 4.3: Oppgaver om derivasjons- og funksjonsforståelse fra del 1 av eksamen i Matematikk R1, henholdsvis fra høsten 2008 og våren 2012.

Oppgaver med vektorregning er en annen type oppgave som befinner seg i grenselandet mellom instrumentell- og relasjonell forståelse, av typen i eksempel 4.4. Her kreves det nok et instrumentelt grunnlag, det er ting som skal regnes ut for å vise aritmetikken bak, men det er også muligheter for at en elev med god visualiseringsevne vil kunne lette arbeidet som må gjøres. For eksempel vil skiftet mellom hva en normalvektor er og hvordan den genereres ofte være nødvendig, i tråd med Sfard (1991).

Oppgave 5 (4 poeng)

Vi har gitt vektorene $\vec{a} = [1, 3]$, $\vec{b} = [3, 2]$ og $\vec{c} = [-1, 2]$.

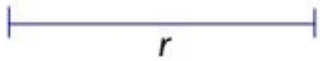
a) Tegn vektorene $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$ og $\vec{v} = \vec{b} - 2\vec{c}$ i et koordinatsystem.

b) Avgjør ved regning om $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Eksempel 4.4: Vektoroppgave fra del 1 av eksamen i Matematikk R1 høst 2013.

En annen type oppgave der det er en fordel med visuell styrke er oppgaver innen geometri. Disse oppgavene er mer varierte, og tar ofte for seg setninger eller resultater som eleven ikke nødvendigvis kjenner til. Disse oppgavene fremstår som mer varierte, da geometri er et såpass stort emne at man kan fokusere på mindre viktige resultater for å lage en oppgave. Selv om det ofte er de samme grunnkunnskapene en elev trenger for å løse geometrioppgavene, kan oppgavene variere mye mer enn for eksempel derivasjon eller vektorregning. Disse oppgavene er i hovedsak instrumentelle, men med relasjonelle trekk.

f) I en sirkel med radius r er det innskrevet en trekant ABC. Lengden til radien er gitt til høyre.
Siden AB i trekanten er $\frac{3}{2}r$, og $\angle ABC = 45°$.
Konstruer trekanten. Forklar konstruksjonen.



Eksempel 4.5: Geometrioppgave fra del 1 av eksamen i Matematikk R1 våren 2010.

Derivasjons- og vektoroppgavene viser et klart fokus på ferdigheter, et fokus på algoritmer og regneregler. Dette fokuset er nok også grunnen til at del 1 også ofte inneholder en oppgave der eleven må vise at hun kjenner til og kan bruke logaritmereglene korrekt. Disse oppgavene varierer i form, i likhet med geometrioppgavene, men er i bunn og grunn de samme. Mer forseggjorte oppgaver tar utgangspunkt i noe praktisk, for eksempel desibel og lydintensitet, men oppgavene kan også handle om å omforme eller trekke sammen et uttrykk, som i eksempel 4.6. Dette er altså stort sett oppgaver av instrumentell natur.

d) Skriv så enkelt som mulig $\quad \lg\left(a^2b\right)-\lg\left(\dfrac{1}{ab}\right)$

Eksempel 4.6: Logaritmeoppgave fra del 1 av eksamen i Matematikk R1 høsten 2009.

Det siste eksempelet jeg velger å presentere fra del 1, eksempel 4.7, tar for seg derivasjon ved hjelp av definisjonen av den deriverte. Å velge ut en siste oppgave som skulle representere del 1 var ikke like lett som for de overnevnte temaene, da det også finnes noe variasjon i hva slags oppgaver som møter elevene som tar eksamen. Den siste gruppen, som eksempel 4.7 er ment å representere, inneholder sannsynlighetsregning, korrekt bruk av implikasjonspiler, definisjonen av den deriverte og tallteori. I og med at dette er en sammensatt gruppe kan den ikke låses fast som enten instrumentell eller relasjonell, men må ses på som en blanding.

f) Funksjonen f er gitt som $f(x) = x^2 + 1$

Bruk at $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ til å vise at $f'(x) = 2x$

Eksempel 4.7: Oppgave med definisjonen av den deriverte fra del 1 av eksamen i Matematikk R1 høsten 2011.

Før jeg går videre til oppgavene fra del 2 av eksamen er det passende å sette fingeren på hva del 1 forteller. Så langt virker eksamen som en stikkprøve, det er for det meste små, korte oppgaver innen varierte tema som tester instrumentell kunnskap, med relativt få muligheter for en elev til å vise at hun innehar relasjonsforståelse. Selv om det er visse tema som fremstår som gjengangere, er det likevel stor sannsynlighet for at en elev som har regnet gjennom tidligere eksamenssett vil møte en oppgavetype de ikke har sett før. Lithners (2003) forskning, spesielt etablert erfaring, er altså ikke like aktuell i del 1 som det man kunne forvente i del 2.

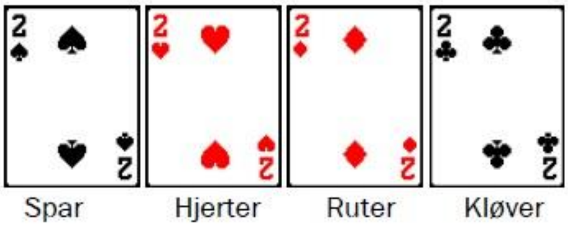
Eksamenssettenes del 2 er ikke like rigide som del 1 når det kommer til hvilket tema eleven møter først. Temaene kan være «nye», i den forstand at de ikke er representert i del 1 av eksamen. Jeg velger derfor å starte med et eksempel på nettopp dette, eksempel 4.8, en sannsynlighetsoppgave.

Sannsynlighet er et tema som kun dukker opp én gang i del 1 av alle eksamenssettene, men som er representert i del 2 i nesten alle. Grunnen til dette vil jeg si er, litt avhengig av oppgaven, at uttrykkene som skal beregnes ved hjelp av binomialkoeffisienter ofte kan være tidkrevende å regne ut for hånd, og at man derfor har valgt å la disse først opptre i del 2. Ved å flytte denne type oppgave til del 2, der eleven har alle hjelpemidler tilgjengelig, kan eleven eliminere denne tidkrevende algoritmiske prosessen ved å benytte seg av kalkulator. Elevens utfordring blir i hovedsak derfor å sette opp uttrykket korrekt, å «oversette» oppgaveformuleringen til matematikk, en oppgave jeg vil klassifisere under relasjonsforståelse. I og med at en slik oversettelse innebærer en grad av forklaring for seg selv, vil en elev nødvendigvis også kunne forklart deler eller hele av tankeprosessen for andre, i tråd med Solvangs (1992) definisjon.

Denne type oppgave representerer også vanskene med å klassifisere en oppgave som instrumentell eller relasjonell, etter at man går over til del 2 av eksamen. Man kunne i utgangspunktet si at sannsynlighetsoppgaver tester relasjonsforståelse, da de krever innsikt i hvilke faktorer man må gange sammen etc., men tilstedeværelsen av hjelpemidler på del 2 gjør at man ikke kan være sikker på at en slik oppgave faktisk får testet en slik forståelse. Det er godt mulig at en elev kan klare seg med å lete etter liknende oppgaver blant hjelpemidlene, slik forskningen til Lithner (2003, 2008) tok for seg i kapittel 2.2. Å avgjøre om oppgavene oppfyller sin bestemte rolle er ikke hensikten med denne masteroppgaven, jeg ønsker kun å undersøke formålet med oppgavene. Disse to, oppgavenes hensikt og hva den ender opp med å teste, er likevel knyttet sterkt sammen, og det er derfor jeg tar opp dette her.

Oppgave 3

En kortstokk består av 52 kort: 13 spar, 13 hjerter, 13 ruter og 13 kløver. Spar og kløver er svarte kort. Hjerter og ruter er røde kort.



Fra en kortstokk trekker vi tilfeldig ut 5 kort. I flere kortspill kalles disse 5 kortene en hånd.

a) Hvor mange mulige korthender er det?

Vi definerer følgende hendelser:

A: Korthånden består av 5 spar.
B: Korthånden består av 5 svarte kort.

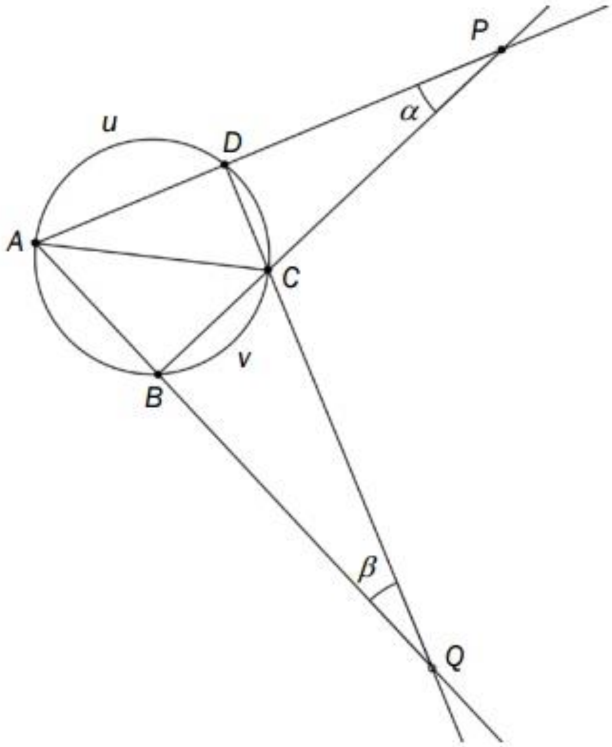
b) Bestem $P(A)$ og $P(B)$.

c) Finn $P(A|B)$. Er hendelsene A og B uavhengige?

Eksempel 4.8: Sannsynlighetsoppgave fra del 2 av eksamen i Matematikk R1 våren 2008.

Geometri er også et tema som behandles i alle eksamenssett, i varierende form. Noen oppgaver behandler geometriske problemstillinger ved hjelp av vektorregning, mens andre er nærmere «klassisk» geometri, der formlikhet, kongruens og diverse setninger har hovedfokus. Eksempel 4.9 representerer den sistnevnte typen. Geometrioppgaver har, som diskutert i 4.2.1, klare punkter det det er en stor fordel med relasjonsforståelse. Det å «se» sammenhengen oppgaven ber eleven vise, gir eleven et ikke ubetydelig forsprang. En ren instrumentell forståelse krever en betydelig større arbeidsmengde for å komme frem til samme konklusjon.

Oppgave 6 (6 poeng)



$\square ABCD$ er innskrevet i en sirkel der AC er diameter. Buen $\overset{\frown}{AD} = u$ og buen $\overset{\frown}{BC} = v$. Forlengelsene av AD og BC skjærer hverandre i P. Vi setter $\angle P = \alpha$. Tilsvarende skjærer forlengelsene av AB og DC hverandre i Q, og vi setter $\angle Q = \beta$.

a) La $u = 120°$ og $v = 90°$. Forklar at da er $\angle BAD = 75°$

b) Vis at $\alpha = \beta = 15°$ i dette tilfellet.

c) Vis at $\alpha = \beta$ for alle verdier av u og v (når $u \neq v$).

Eksempel 4.9: Geometrioppgave fra del 2 av eksamen i Matematikk R1 høsten 2012.

Vektorregning, i likhet med geometri, er noe som presenteres i ulike kontekster. Geometrien i en geometrioppgave har ofte mest med presentasjonen av problemet å gjøre. Den overliggende problemstillingen, selve problemløsningen gjøres til dels med diverse aritmetikk, i tillegg til de geometriske resonnementene. Oppgaver med vektorregning har også en kontekst, problemet som presenteres kan fremstå på ulike måter, men til sist er disse oppgavene for det meste ute etter å sjekke om eleven innehar den algoritmiske kunnskapen som skal til for å løse oppgaven, som i eksempel 4.10. Selv om geometriske fremgangsmåter kan pugges, vil man som regel kreve en viss forklaring av skrittene man tar, i tråd med Solvang (1992), mens vektoroppgavene i mye mindre grad krever slike forklaringer. På denne måten vil jeg si at geometri- og vektoroppgaver sammen danner et slags yin-yang-forhold, og er komplementære i hva slags forståelsestype de er ment å teste.

Oppgave 3 (4 poeng)

Vi har punktene $A(2, 1)$, $B(4, 5)$ og $C(t+3, t)$.

a) Bruk vektorregning til å bestemme t slik at punktene A, B og C ligger på en rett linje.

b) Bruk vektorregning til å bestemme t slik at $\angle ACB = 90°$.

Eksempel 4.10: Vektoroppgave fra del 2 av eksamen i Matematikk R1 høsten 2014.

Et stort tema fra læreplanen er funksjoner, og det er to typer oppgaver med funksjoner som går igjen i eksamenssettene. Selv om de i bunn og grunn ber eleven gjøre mye av det samme, presenteres de ulikt, og representerer derfor to ulike aspekter av hvordan man kan jobbe med og tenke på funksjoner. Den første typen, som den vist i eksempel 4.11, tar for seg den teorirettede funksjonsdrøftingen. Disse oppgavene er oftest kontekstknappe, eleven blir kun presentert for en gitt funksjon, uten at denne representerer en spesifikk prosess. Gjennom bruk av derivasjon skal så eleven bestemme eventuelle topp-, bunn- og vendepunkter på grafen. Dette er oppgaver som i utgangspunktet kan fremstå som instrumentelle, men som også kan kreve forklaringer rundt ekstremalpunktene som fordrer relasjonsforståelse.

Oppgave 3 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = 4x^2 \cdot e^{-x}$

a) Vis ved regning at $f'(x) = 8x \cdot e^{-x} - 4x^2 \cdot e^{-x}$. Tegn grafen til f'.

b) Bruk grafen til f' til å finne eventuelle topp-, bunn- og vendepunkter på grafen til f.

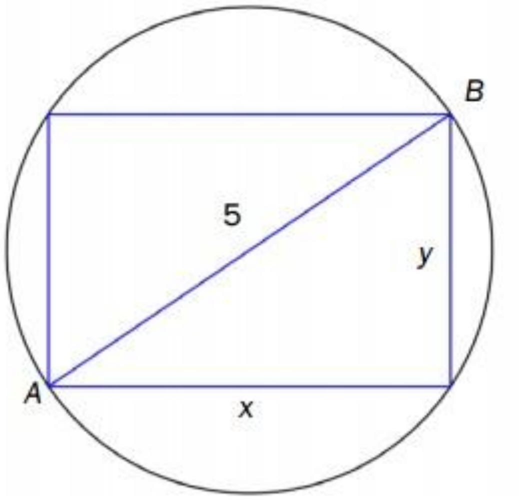
Eksempel 4.11: Funksjonsdrøftingsoppgave fra del 2 av eksamen i Matematikk R1 høsten 2010.

Den andre typen funksjonsoppgave eleven kan møte er mer praktisk rettet, og er maksimum/minimumsproblemer av typen i eksempel 4.12. Disse oppgavene har gjerne en lengre oppgavetekst, som presenterer eleven for en gitt situasjon som kan modelleres eller representeres ved en gitt funksjon. Elevens oppgave er igjen å drøfte et funksjonsuttrykk ved hjelp av derivasjon, men nettopp det at oppgaveteksten er såpass forskjellig, gjør at jeg har valgt å splitte disse funksjonsoppgavene i to. Denne andre typen funksjonsoppgave vil jeg likevel klassifisere som mer rettet mot å teste relasjonsforståelse, av den grunn at eleven ofte må tolke oppgaveteksten, en oversettelse som krever relasjonsforståelse. Begge oppgavetypene vil jeg si inneholder aspekter av konseptuell kunnskap (Hiebert, 1986), da de krever et nettverk mellom kunnskapen om derivasjon, ekstremalpunkter, fremgangsmåter og så videre.

Som for del 1 blir det også her en gruppe med varierte oppgaver som ikke kan representeres helt nøyaktig ved å velge ut bare én. Oppgavene i denne siste gruppen kan ofte klassifiseres under læreplanområdet «algebra», men det finnes også unntak. Tallteori, løsning av likninger og oppgaver med sirkellikningen er eksempler på oppgaver som ikke har en fast plass på eksamen, men som elevene kan risikere å møte. Da denne gruppen er så variert, er det vanskelig å klassifisere disse som tester av enten instrumentell eller relasjonell kunnskap. Eksempel 4.13 representerer denne gruppen.

Oppgave 4 (8 poeng)

Et rektangel med sider x og y er innskrevet i en sirkel med diameter $AB = 5$.



a) Vis at arealet T av rektangelet er gitt ved

$$T(x) = x \cdot \sqrt{25 - x^2}$$

Forklar hvilke verdier x kan ha.

b) Bestem x og y når arealet er størst mulig.
Kommenter svaret.

c) Vis at omkretsen til rektangelet er gitt ved

$$O(x) = 2 \cdot \sqrt{25 - x^2} + 2x$$

Bruk $O'(x)$ og bestem x når omkretsen er størst mulig.
Kommenter svaret.

Eksempel 4.12: Minimum/maksimumsoppgave fra del 2 av eksamen i Matematikk R1 våren 2013.

Oppgave 6 (5 poeng)

Vi skal løse likningen nedenfor med hensyn på x

$$n^n \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{\lg x} = x^n \quad , \qquad x > 0 \ , \ n > 0$$

a) Vis at denne likningen kan omformes til

$$\lg\left(\frac{x}{n}\right)^{\lg x} = \lg\left(\frac{x}{n}\right)^n$$

b) Vis at likningen videre kan skrives

$$(\lg x - n) \cdot (\lg x - \lg n) = 0$$

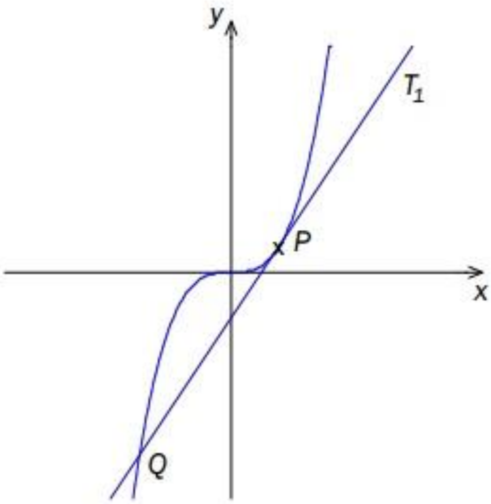
c) Bruk likningen i oppgave b) til å bestemme x uttrykt ved n.

Eksempel 4.13: Algebraoppgave fra del 2 av eksamen i Matematikk R1 våren 2014.

Summen av oppgavene presentert i eksemplene så langt tilsvarer i underkant av den arbeidsmengden en elev møtte på disse eksamenene. Jeg vil avslutte denne gjennomgangen med ett siste eksempel, delt i to. Eksempel 4.14 og eksempel 4.15 er sammen et eksempel på valgoppgaven som ble faset ut av eksamensformen etter høsten 2010, som jeg diskuterte i kapittel 4.1.

Alternativ I

På figuren ser du en skisse av grafen til funksjonen $f(x) = x^3$ og tangenten T_1 til grafen i punktet $P(1, 1)$. På skissen har aksene ulik målestokk.



a) Vis ved regning at likningen til tangenten T_1 er

$$y = 3x - 2$$

Punktet Q på figuren er et annet fellespunkt mellom grafen til f og T_1.

b) Forklar at førstekoordinaten til Q må være en løsning av likningen

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

Bruk polynomdivisjon og løs denne likningen ved regning. Finn koordinatene til Q.

En annen tangent T_2 til grafen er parallell med tangenten T_1.

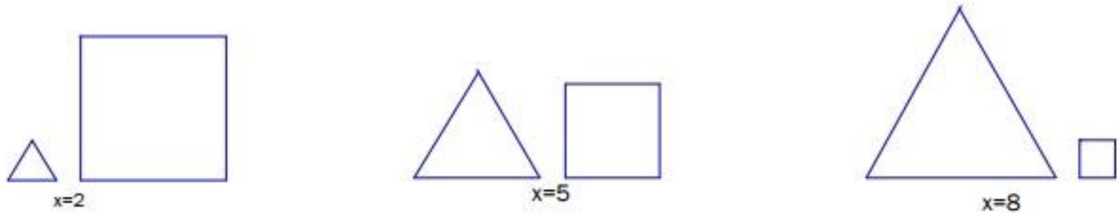
c) Finn tangeringspunktet R mellom grafen til f og T_2 ved regning.

Eksempel 4.14: Valgoppgave, alternativ 1, fra del 2 av eksamen i Matematikk R1 våren 2010.

Alternativ II

En ledning er 10 meter lang. Ledningen skal kuttes i to deler. Den ene delen skal formes til sidene i et kvadrat. Den andre delen skal formes til sidene i en likesidet trekant.

Den delen som brukes til å forme trekanten, er x meter lang.



a) Forklar at arealet av kvadratet målt i kvadratmeter kan skrives som

$$F_1(x) = \frac{1}{16}(10 - x)^2$$

b) Forklar at arealet av den likesidete trekanten målt i kvadratmeter kan skrives som

$$F_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot x^2$$

c) Undersøk hvordan ledningen må kuttes for at summen

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

skal få sin minste verdi.

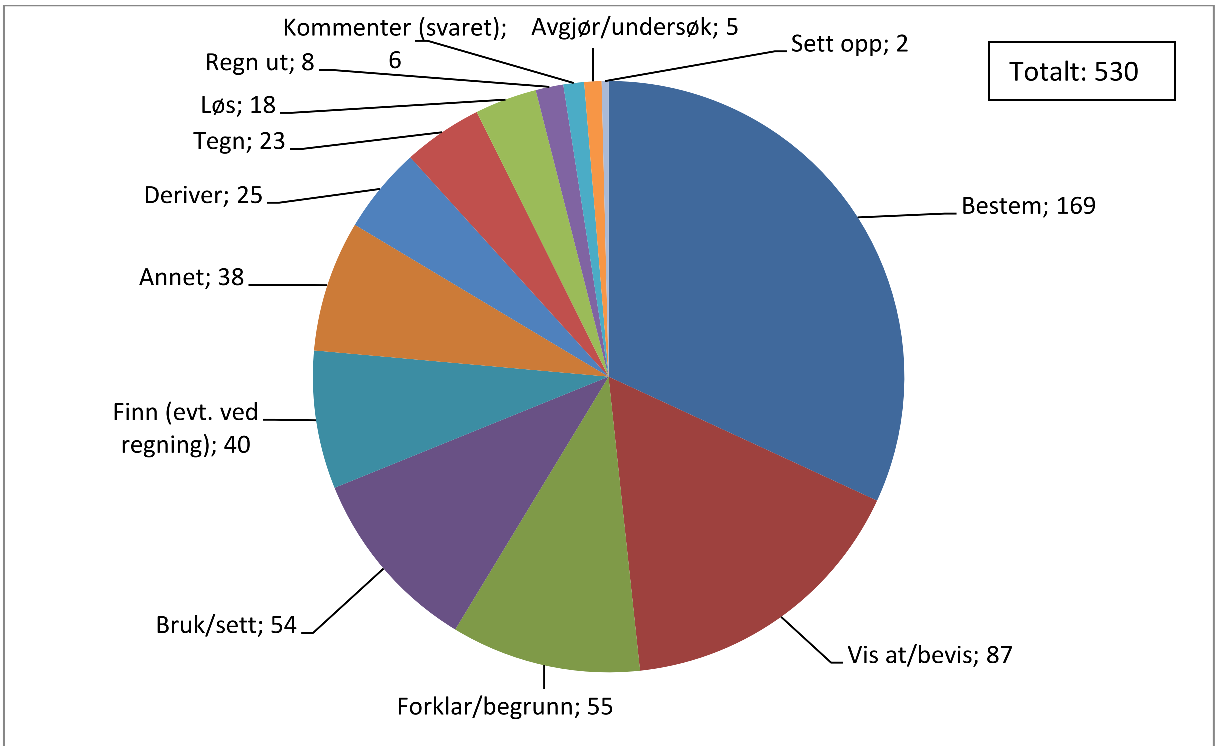
Eksempel 4.15: Valgoppgave, alternativ 2, fra del 2 av eksamen i Matematikk R1 våren 2010.

Eksempel 4.14 og eksempel 4.15 er valgt ut som representanter for valgoppgaven av to grunner. For det første er det den siste valgoppgaven som ble gitt til «ordinær» eksamen, det vil si eksamen i vårsemesteret. For det andre representerer den et skifte, som kan ha sammenheng med hvorfor denne oppgaveformen ble fjernet. Datasettet er ikke stort nok til å si noe med absolutt sikkerhet, men jeg presenterer likevel noen fakta som er interessante. De tre første valgoppgavene som ble gitt skiller seg fra eksemplene gitt her. Disse tre første valgoppgavene presenterte eleven for to valgmuligheter som på mange måter tilsvarer eksempel 4.11 og eksempel 4.12, og det jeg diskuterte rundt dem. De tre siste valgoppgavene derimot, er av typen jeg presenterer her, der de to alternativene ikke deler et underliggende tema. Valgoppgavene gikk altså fra å være en test av et område fra læreplanen, presentert på to ulike måter, til en valgsituasjon, der eleven har mulighet til å velge det temaet eleven føler hun mestrer best. Lithners forskning (2003, 2008) er også interessant her, da man kan tenke seg at en elev vil velge det alternativet som likner mest på eksempler hun kan finne blant hjelpemidlene sine. Videre diskusjon rundt valgoppgaven tas i kapittel 4.4, da det er «valgoppgave» som er interessant å diskutere, ikke «valgoppgave i Matematikk R1». Med gjennomgangen av analysen av eksamenssettene fra Matematikk R1 overstått, presenterer jeg i neste kapittel tilsvarende resultater fra Matematikk R2.

4.3 Matematikk R2

4.3.1 Verbanalyse

I og med at Matematikk R2 bygger på Matematikk R1 er det ikke overraskende at det er en relativt lik verbbruk på tvers av disse to fagenes eksamenssett. Da disse verbgruppene ble nøye diskutert i kapittel 4.2.1 vil jeg derfor her fokusere på forskjellene som dukker opp når man tar skrittet fra Vg2 til Vg3, som særlig manifesterer seg i hvordan frekvensen av bestemte verb endrer seg.



Figur 4.2: Opptelling av verb fra eksamenssettene i Matematikk R2

Det første som stikker seg ut er at «bestem»-gruppen, sammen med «vis at»/«bevis»-gruppen, har økt fra å opptre i rundt 40 % av eksamensoppgavene til nærmere 50 %. Dette skyldes to faktorer, «bestem»-gruppen har økt i størrelse, og det er færre verbgrupper representert, blant annet er «konstruer» ikke til stede i Matematikk R2. «Vis at»/«bevis»-gruppen har et tilnærmet identisk antall i Matematikk R2 som i Matematikk R1, mens «forklar»/«begrunn»-gruppen har minket. Før man trekker den slutningen at den relasjonsforståelige dimensjonen har minket må de resterende gruppene også betraktes, og med tanke på at «bruk»/«sett»-gruppen også har minket i antall vil en slik slutning ikke være dekkende. «Finn»- og «annet»-gruppen er også redusert i forhold til i Matematikk R1.

«Deriver», «tegn» og «løs» er fortsatt de tre største av gruppene med mindre frekvens enn «annet», men «tegn» har minket kraftig. Denne nedgangen i «tegn»-oppgaver kan ha en sammenheng med den totale mangelen på «konstruer»-oppgaver, og sammen markerer de en markant nedgang i oppgaver som krever et visuelt svar. «Løs»-gruppen er den siste gruppen med et tosifret antall opptredener i oppgaver, men eksemplifiserer at det er begrenset hva man kan trekke ut av en verbanalyse: i Matematikk R1 omhandler «løs»-oppgaver ulikheter, mens i Matematikk R2 er det differensiallikninger eleven bes om å løse. Dette er en grunn til at verbanalysene for Matematikk R1 og Matematikk R2 ikke er direkte sammenlignbare. Det at de gjenværende verbgruppene er så små, og at de er kommentert i kapittel 4.2.1, gjør at jeg velger å la være å kommentere disse ytterligere her.

4.3.2 Gjennomgang av «eksamenssett»

Etter gjennomgangen av verbanalysene fra Matematikk R1 og Matematikk R2 burde det være klart at det eksisterer en viss sammenheng mellom fagene. I det følgende kommer en mer omfattende presentasjon av eksamenssettene fra Matematikk R2, tilsvarende den jeg presenterte for Matematikk R1 i forrige kapittel. Brorparten av sammenlikningen mellom Matematikk R1 og Matematikk R2 presenteres i kapittel 4.4, men enkelte likheter vil også tas opp underveis her.

En likhet mellom eksamenssettene er også til stede i Matematikk R2, men med en liten forskjell fra Matematikk R1. Eksamenssettene fra Matematikk R1 starter med to oppgaver innen to tema, uten unntak, mens det i Matematikk R2 er to sett, de to første eksamenssettene fra våren og høsten 2009, som ikke følger en slik trend. Dette styrker det jeg skrev i 4.2.2, dette er mest sannsynligvis et bevisst valg fra forfatterne, denne organiseringen av tema er gjort for å påvirke elevene på en bestemt måte. Dette vil jeg diskutere nærmere i kapittel 4.4.

Med unntak av de to første eksamenssettene starter alle med en derivasjonsoppgave av typen i eksempel 4.16. At det igjen er en fast oppgave som eleven kan regne med å måtte starte med er ikke spesielt overraskende, men at temaet for den første oppgaven igjen er derivasjon synes jeg er mer forbløffende. Går man til læreplanen er det ikke nødvendigvis gitt at man finner et «hovedområde» som skiller seg ut som en kandidat for en slik forutsigbarhet, men at det er derivasjon er underlig med tanke på ordlyden i kompetansemålene for Matematikk R1 og Matematikk R2. Kompetansemålet for Matematikk R1 sier at eleven skal kunne «bruke formler for den deriverte til potens-, eksponential- og logaritmefunksjoner, og derivere summer, differanser, produkter, kvotienter og sammensetninger av disse funksjonene» (Utdanningsdirektoratet, 2006a), mens det for Matematikk R2 sier at eleven skal kunne «derivere sentrale funksjoner og bruke førstederiverte og andrederiverte til å drøfte slike funksjoner» (Utdanningsdirektoratet, 2006b). Det er altså et mye større presisjonsnivå på hva slags derivasjon eleven skal mestre i Matematikk R1, mens det i Matematikk R2 er størst fokus på bruken av den deriverte. Bruken av den deriverte har et eget kompetansemål i Matematikk R1. At eleven først møter en derivasjonsoppgave vil jeg si skyldes mange av de samme grunnene jeg tok opp i kapittel 4.2.2, det er en instrumentell oppgave som skal «sette eleven i gang» uten å kreve forklaringer (Solvang, 1992).

Oppgave 1 (16 poeng)

a) Deriver funksjonene

1) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

2) $g(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$

Eksempel 4.16: Derivasjonsoppgave fra del 1 av eksamen i Matematikk R2 høsten 2010.

Den neste faste oppgavetypen en elev møter, er en integrasjonsoppgave av typen i eksempel 4.17. Dette er med en gang mer tilforlatelig, da integrasjon er et viktig nytt tema i Matematikk R2, men som også har kraftige instrumentelle trekk. Det finnes også eksempler på integrasjonsoppgaver som også krever relasjonsforståelse, der eleven må bestemme et bestemt integral ved hjelp av en oppgitt graf.

b) Bestem integralene

1) $\int x \cdot e^x dx$

2) $\int \frac{5x+3}{x^2-9} dx$

Eksempel 4.17: Integrasjonsoppgave fra del 1 av eksamen i Matematikk R2 våren 2011.

Som for Matematikk R1 er det etter disse to innledende oppgavene mer variasjon i hvilket tema eleven møter. Likevel er det igjen faste temaer som opptrer i varierende rekkefølge fra år til år, ikke overraskende med tanke på at læreplanen ikke har endret innhold i løpet av perioden jeg arbeider med. Det første temaet jeg velger å presentere er rekker, som i eksempel 4.18. Dette er et tema der det er en stor fordel med relasjonsforståelse, men hvor det også kreves en del instrumentell formelkunnskap. Disse oppgavene varierer i hvor mye de krever av den ene eller den andre forståelsestypen, noen oppgaver er helt blottet for «forklar»-formuleringer.

e) Gitt rekken

$$1+e^{-x}+e^{-2x}+\cdots \qquad , \ x>0$$

1) Forklar at rekken er geometrisk, og at den konvergerer.

2) Vis at summen er gitt ved

$$S(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$$

Eksempel 4.18: Rekkeoppgave fra del 1 av eksamen i Matematikk R2 våren 2012.

f) Løs differensiallikningen

$$y' - 3y = 5 \quad \text{når} \quad y(0) = 2$$

Eksempel 4.19: Differensiallikningsoppgave fra del 1 av eksamen i Matematikk R2 høsten 2011.

Eksempel 4.19 viser hvordan de fleste differensiallikningsoppgavene som blir gitt til del 1 av eksamen ser ut. Både første- og annenordens differensiallikninger er en del av læreplanen, men det er kun differensiallikninger av første orden som testes på del 1 av eksamen. Disse oppgavene opptrer nesten alltid i denne kontekstløse, instrumentelle formen, selv om unntak forekommer. Formålet med disse oppgavene er nok mest ment å skulle teste hvorvidt eleven klarer å bruke integrerende faktor eller ikke, uten å teste forståelsen av hvorfor dette fungerer. Dette blir altså stående som en test av prosedural kunnskap (Hiebert, 1986), som går innunder instrumentell forståelse.

Oppgave 3 (5 poeng)

Gitt punktene $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,4)$ og $O(0,0,0)$.

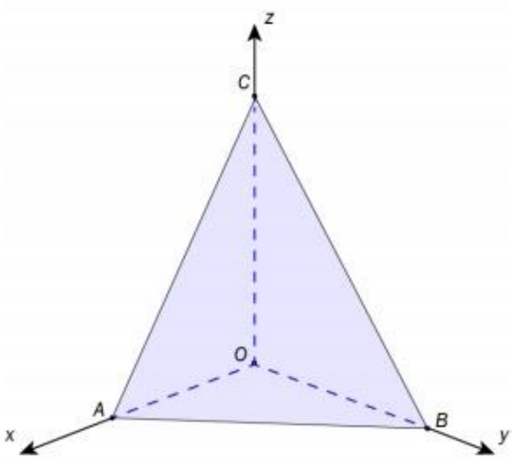
a) Bestem $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

b) Bestem volumet av tetraederet $ABCO$.

c) Punktene A, B og C ligger i planet α.

Vis at likningen til planet α kan skrives

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$$



Eksempel 4.20: Romgeometrioppgave fra del 1 av eksamen i Matematikk R2 høsten 2013.

Vektorregning er et tema Matematikk R2 deler med Matematikk R1, men i Matematikk R2 dreier det seg om vektorregning i rommet, ikke i planet. Selv om vektorregningen ofte kan bli sett på som formeltung er det likevel rom for relasjonsforståelse. Skissering av opplysningene eleven får, kombinert med en viss romforståelse, er en kraftig fordel. Selve fremgangsmåten i oppgaven er grunnleggende instrumentell, men elever med relasjonsforståelse har et fortrinn både i starten og slutten av oppgaven. Relasjonsforståelse kan hjelpe eleven i gang med oppgaven raskere og, viktigst av alt, fungere som et verktøy for å kontrollere svaret. En elev med en instrumentell forståelse vil regne på tilsvarende måte som en elev med relasjonsforståelse, men hvis vi antar at begge elever gjør en regnefeil underveis vil eleven med relasjonsforståelse ha en mye større mulighet til å gjenkjenne at sluttresultatet ikke kan stemme. Vektorregningsoppgaver i Matematikk R2, representert ved eksempel 4.20, skiller seg derfor fra vektorregningsoppgaver i Matematikk R1, de er ikke lenger hovedsakelig instrumentelle, relasjonsforståelse har fått en større plass i oppgaven, uten at dette går på bekostning av elever med en instrumentell forståelse. Formeltyngden i vektorregning, kombinert med hvordan man skal implementere dem i problemet, gjør denne typen oppgave gunstig for elever med en forståelse lik den Mellin-Olsen (1981) beskriver.

Oppgave 6 (2 poeng)

En periodisk funksjon f er gitt på formen

$$f(x) = a\sin(cx + \varphi) + d$$

Grafen til f går gjennom punktet $A(0,5)$, den har bunnpunkt i $B(3,2)$ og toppunkt i $T(5,8)$. Det er ingen andre ekstremalpunkter i intervallet $\langle 3,5 \rangle$.

Bestem verdier for konstantene a, c, φ og d.

Eksempel 4.21: Trigonometrioppgave fra del 1 av eksamen i Matematikk R2 høsten 2012.

Et annet emne der relasjonsforståelse gir en klar fordel, er trigonometriske likninger og funksjoner. Oppgavene elevene møter her, eksemplifisert gjennom eksempel 4.21, går i korthet ut på at eleven skal koble sammen et trigonometrisk funksjonsuttrykk og den tilhørende grafen. Dette presenteres på ulike måter, fra opplysninger om punkter på grafen til medfølgende plot av grafen. Som med vektorregningen er det her en stor fordel med relasjonsforståelse: det å gjenkjenne hva de ulike variablene i funksjonsuttrykket representerer på grafen er unektelig tidsbesparende sammenlignet med en mer rendyrket instrumentell tilnærming. Nettopp det at det finnes oppgaver der relasjonsforståelse har så åpenbare fordeler er grunn til å tenke seg at mange lærere vil prioritere en relasjonsforståelsesmessig tilnærming i undervisningen av disse temaene. Hvis man legger til grunn at relasjonsforståelse er noe man ønsker at elevene skal ha, så vil dette kunne være en positiv washback-effekt, i tråd med det jeg skrev i kapittel 4.1 (Utdanningsdirektoratet, 2014a, s. 86-87).

Oppgave 7 (2 poeng)

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n): \quad a + ak + ak^2 + ak^3 + \ldots + ak^{n-1} = a \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Eksempel 4.22: Induksjonsbevisoppgave fra del 1 av eksamen i Matematikk R2 våren 2013.

En siste type oppgave elevene ofte vil møte i del 1 av eksamen, er en oppgave der eleven må bruke induksjon for å bevise en påstand, av typen i eksempel 4.22. Disse oppgavene kan fremstå som relasjonelle ved første blikk, ved at de inneholder det spesielle ordet «bevis». Til tross for dette vil jeg klassifisere disse oppgavene som i hovedsak instrumentelle. Det er ingen slike oppgaver hvor eleven ikke blir eksplisitt fortalt at hun skal bruke induksjon til å bevise påstanden, og det er heller ingen oppgaver som ber eleven si noe om hvorfor denne teknikken fungerer. Induksjonsbeviset reduseres derfor til en algoritmisk prosess, der riktig oppsett og korrekt bruk av algebra er det som testes og belønnes. I tillegg til oppgavetypene som er representert i eksemplene, kan eleven også bli gitt en funksjonsdrøftingsoppgave, i bunn og grunn av samme type som gis i Matematikk R1. I slike tilfeller faller oftest induksjonsoppgaven bort.

Med del 1 av eksamen representert går jeg videre til del 2, og jeg vil her, på samme måte som for Matematikk R1, avslutte med et eksempel på valgoppgaven som ble faset ut. I arbeidet med del 2 var det vanskeligere å finne trender og faste temaer med et raskt blikk, selv om de underliggende temaene er lette å oppdage: integrasjon, rekker, differensiallikninger, romgeometri, trigonometri og funksjoner. Der eksemplene gitt i resultatene for Matematikk R1 og del 1 av Matematikk R2 er relativt representative for de andre oppgavene innen samme tema fra andre år, er situasjonen ikke nødvendigvis slik i del

2 av Matematikk R2. Det er et mye større mangfold i form, og delvis også i innhold. Dette utdyper jeg nærmere i diskusjonen rundt de forskjellige eksemplene.

Oppgave 3

Du skal studere løsningen til differensiallikningen

$$y'' + \frac{2}{5}y' + \frac{26}{25}y = 0$$

a) Bruk løsningen til den karakteristiske likningen til å vise at den generelle løsningen til differensiallikningen er

$$y = e^{-0,2x} \cdot (C\sin x + D\cos x) \quad , \qquad \text{der } C \text{ og } D \text{ er konstanter.}$$

b) Du får oppgitt at $y(0) = 5$ og $y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$.
Forklar at løsningen av differensiallikningen da kan skrives

$$y = 5e^{-0,2x} \cdot (\sin x + \cos x)$$

(Du kan få bruk for at $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ og $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$)

Eksempel 4.23: Differensiallikningsoppgave fra del 2 av eksamen i Matematikk R2 våren 2010.

Jeg velger å starte diskusjonen rundt del 2 med eksempel 4.23, en differensiallikningsoppgave. Etter å ha observert førsteordens differensiallikninger i del 1 var det naturlig å tenke seg at del 2 ville teste de mer avanserte, annenordens differensiallikningene. Det var derfor overraskende for meg at eksempel 4.23 representerer unntaket, ikke regelen. Med veldig få unntak er det en ny førsteordens differensiallikning eleven må løse. Det er heller ikke slik at differensiallikningene av første orden i del 2 er vesentlig forskjellige fra de i del 1, noe som gjør det vanskelig å spekulere i resonneringen bak dette valget fra oppgavemakernes side. Med tanke på at eleven har tilgang på alle hjelpemidler på del 2 kan jeg tenke meg at dette valget er tatt for å gi elever som ikke klarer å løse differensiallikninger av første orden en ny sjanse i del 2. På denne måten vil differensiallikningen i del 1 enda sterkere teste memorering av fremgangsmåten, noe som kommer automatisk med relasjonsforståelse, mens på del 2 vil man i større grad få undersøkt om eleven klarer å følge en oppskrift, i tråd med forskningen til Lithner (2003, 2008) som jeg diskuterte i kapittel 2.2. Med tanke på annenordens differensiallikningers status som et eget kompetansemål er den påfallende mangelen av slike oppgaver noe av det som stikker seg mest ut i analysen av eksamenssettene.

Oppgave 5

Trekanttall kan illustreres som antall golfballer som danner en trekantfigur. Figuren nedenfor viser de tre første trekanttallene a_1, a_2 og a_3.

S_n er summen av de n første trekanttallene.

a) Skriv opp de fem første trekanttallene a_1, a_2, a_3, a_4 og a_5 og de fem første summene S_1, S_2, S_3, S_4 og S_5.

b) Forklar at $a_n = 1+2+3+\cdots+n$. Bruk dette til å vise at $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

c) Bruk regresjon på de fem første summene S_1, S_2, S_3, S_4 og S_5 til å finne et tredjegradsuttrykk for S_n. Vis at tredjegradsuttrykket er en tilnærming av

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Resultatet ovenfor gjelder i prinsippet bare for de fem første summene S_1, S_2, S_3, S_4 og S_5. Vi ønsker å undersøke om formelen gjelder for alle n- verdier. Da må vi gjennomføre et matematisk bevis.

d) Bruk induksjon til å bevise at formelen $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ er riktig.

Eksempel 4.24: Rekkeoppgave fra del 2 av eksamen i Matematikk R2 våren 2009.

Som med differensiallikningene er også rekker et tema som går igjen i del 2, men rekkeoppgavene følger en mye mer forventet utviklingsretning når det kommer til oppgavenes form. Som eksempel 4.24 viser, er rekkeoppgavene i del 2 mye mer teksttunge enn de en elev møter i del 1. Oppgaven er oftest knyttet til et problem, en formel som skal vises, etc. På denne måten har rekkeoppgavene i del 2 «rekkeregningen» som en grunnmur, noe som eleven må beherske for å få innpass i oppgaven. Selve oppgaven derimot handler mer om å forstå problemstillingene og uttrykkene oppgaven presenterer. Rekkeoppgavene i del 2 har altså et sterkt relasjonsforståelsesmessig preg, og viser derfor den utviklingen man kunne forvente å finne innen et tema når man beveger seg fra del 1 til del 2, den utviklingen som mangler for differensiallikningenes del. Rekkeoppgavene er for det meste varierte fra år til år, og belønner derfor elever som har jobbet med relasjonsforståelse. Bruken av «forklar» er noe av det som gjør at disse oppgavene passer godt med Solvangs (1992) definisjon av relasjonsforståelse.

Oppgave 5 (6 poeng)

Et plan α er gitt ved likningen

$$2x + y - 2z + 3 = 0$$

a) Bestem likningen for den kuleflaten som har sentrum i punktet $S(11, 2, -6)$ og som har α som tangentplan.

b) Bestem koordinatene til tangeringspunktet mellom kuleflaten og planet α.

Et plan β er gitt ved

$$2x + y - 2z = 0$$

Dette planet skjærer kuleflaten langs en sirkel.

c) Bestem radien i denne sirkelen.

Eksempel 4.25: Romgeometrioppgave fra del 2 av eksamen i Matematikk R2 høsten 2014.

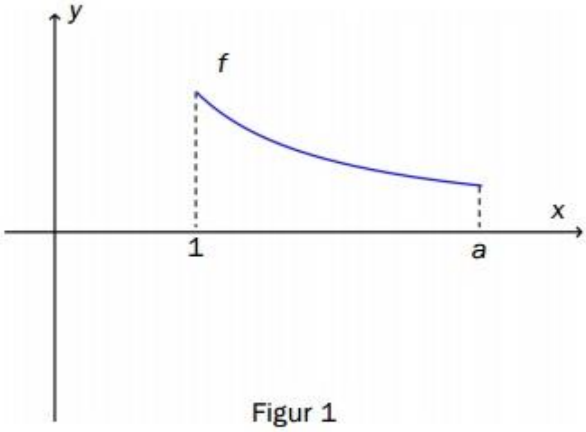
Eksempel 4.25 viser en oppgave innen romgeometri som fremstår forskjellig fra eksempelet innen romgeometri fra del 1, og som er mer kompleks. Den viktigste forskjellen er at eleven her må jobbe med en kuleflate, i tillegg til et plan. Det må likevel presiseres at del 2 viser en del variasjon innen romgeometri spesielt, og geometri generelt. Mange oppgaver dreier seg om plan og kuleflater, andre tar for seg pyramider, og det finnes også et eksempel på en oppgave der eleven kun skal jobbe i planet. Igjen er situasjonen den jeg tidligere har beskrevet for geometri og vektorregning: oppgavene er stort sett instrumentelle, men en elev som kan bruke objekt-prosess-dualiteten til Sfard (1991) vil ha en klar fordel, for eksempel formelen som en prosess og figuren i rommet som et objekt.

Oppgave 6 (6 poeng)

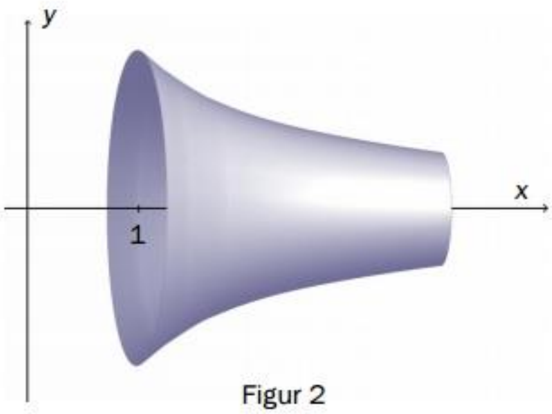
Figur 1 nedenfor viser grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x)=\frac{1}{x} \quad , \quad x\in[1\,,\,a]$$

Vi dreier grafen til f $360°$ om x-aksen. Vi får da fram et omdreiningslegeme som vist på figur 2.



Figur 1



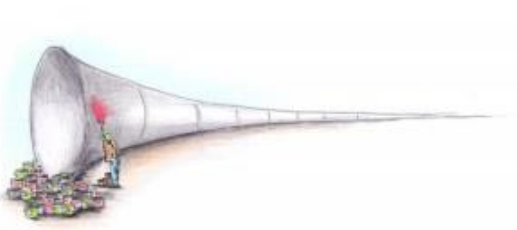
Figur 2

a) Bestem volumet $V(a)$ av omdreiningslegemet.

b) Bestem $\int_1^a f(x)\,dx$. Omdreiningslegemet har overflateareal $O(a)$. Forklar at $O(a)>\int_1^a f(x)\,dx$.

c) Vi lar $a\to\infty$. Det omdreiningslegemet vi da får, kalles *Gabriels horn*.

Bestem $\lim\limits_{a\to\infty} O(a)$ og $\lim\limits_{a\to\infty} V(a)$ dersom grenseverdiene eksisterer. Kommenter svarene.



Å male Gabriels horn ...

Å fylle Gabriels horn ...

Eksempel 4.26: Integrasjonsoppgave fra del 2 av eksamen i Matematikk R2 våren 2014.

Integrasjonsregning i del 2 er også noe som forekommer i forskjellige utgaver. Noen eksamenssett har ikke en egen integrasjonsoppgave, mens de resterende oftest tar for seg arealer avgrenset av funksjoner, formelsammenhenger eller omdreiningslegemer og volumer, som i eksempel 4.26. Integrasjonsoppgavene likner rekkeoppgavene ved at de har den progresjonen man vil forvente fra del 1 til del 2, men også i det at de har et større fokus på relasjonsforståelse. Det er oppgaver, og trinn i oppgavene, som krever instrumentell forståelse, men jevnt over er det å forklare sammenhenger, hva integralet representerer eller det å forstå hvordan man skal bruke integralregning fokuset for oppgaven. I stor grad handler oppgavene altså om å bruke flere punkter i et kunnskapsnett, dvs. konseptuell kunnskap (Hiebert, 1986).

Oppgave 4 (7 poeng)

En automatisk strømbryter for utelys skal programmeres. Lyset skal slås på når det begynner å mørkne. En modell for dette tidspunktet er gitt ved

$$f(t) = 19 - 4\cos\left(\frac{\pi}{180}\cdot t\right)$$

der $f(t)$ er tidspunktet målt i timer etter midnatt og t er antall dager regnet fra nyttår. I denne modellen forutsettes det at alle måneder har 30 dager.

a) Når begynner det å mørkne 25. mars, ifølge modellen?

b) Tegn grafen til f. Bestem likevektslinjen, amplituden og perioden til f. Hva er gjennomsnittlig tidspunkt i løpet av året for når lyset slås på?

c) Bestem når på året lyset slås på klokken 18.00.

d) Bestem når på året dagslyset varer lengst ifølge modellen.

Eksempel 4.27: Trigonometrioppgave fra del 2 av eksamen i Matematikk R2 våren 2012.

På samme måte som integraloppgavene likner rekkeoppgavene, likner trigonometrioppgavene på geometrioppgavene. Eksempel 4.27 viser bare én av de mange ulike formene trigonometrioppgavene tar. Det er oppgaver med periodisitet, oppgaver som dreier seg om å bestemme vinkler og oppgaver med omforming eller bestemming av uttrykk. Trigonometrioppgavene tar oftest også med seg aspekter av funksjonsanalyse, og presenterer eleven for et minimums/maksimumsproblem. Oppgavene elever kan møte på innen trigonometri er varierte, både når det gjelder form, innhold og krav til forståelsestype.

Jevnt over har disse oppgavene en god blanding av krav til instrumentell og relasjonell forståelse, og stikker seg derfor ikke ut som en representant for verken den ene eller den andre forståelsestypen.

Alternativ 1

Den periodiske funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2\sin x + 2\sin x \cdot \cos x\,, \qquad x \in \langle 0,\, 4\pi \rangle$$

a) Tegn grafen til f. Bestem perioden.

b) Finn nullpunktene til f ved regning.

c) Vis ved regning at

$$f'(x) = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2$$

Bruk $f'(x)$ til å bestemme topp- og bunnpunkter på grafen til f.

d) Finn $f''(x)$ ved regning. Bruk $f''(x)$ til å bestemme eventuelle vendepunkter på grafen til f i intervallet $x \in \langle 0,\, 2\pi \rangle$

e) Bestem ved regning arealet av det flatestykket som er avgrenset av grafen til f, førsteaksen og linjene $x = 0$ og $x = \pi$

Eksempel 4.28: Valgoppgave, alternativ 1, fra del 2 av eksamen i Matematikk R2 høsten 2010.

Som tidligere nevnt presenterer jeg til slutt et eksempel på valgoppgaven som elevene møtte på i løpet av Kunnskapsløftets fire første eksamener. I og med at det kun ble avholdt eksamen fire ganger i Matematikk R2 før valgoppgaven ble avviklet, er det vanskeligere å si noe om valgoppgaven her enn i Matematikk R1. De fire valgoppgavene i Matematikk R2 fordeler seg to og to i gruppene «valg av oppgave» og «valg av tema», det vil si en oppgave med to alternativer innen samme tema, eller en oppgave med to alternativer innen ulike tema. Eksempel 4.28 og eksempel 4.29 illustrerer det første. Et interessant punkt når det kommer til valgoppgaven knytter seg til diskusjonen rundt differensiallikninger tidligere i kapittelet. Jeg skrev at annenordens differensiallikninger var svært sjeldne, og et av de få stedene slike likninger er representert er i «valg av tema»-oppgavene. Med andre ord forekommer to av de ytterst sjeldne annenordens differensiallikningsoppgavene i situasjoner der eleven har mulighet til å velge dem bort. Dette synes jeg er interessant, og bygger oppunder tanken om at eksamensforfatterne anser annenordens differensiallikninger som noe få elever skal behøve å hanskes med til eksamen.

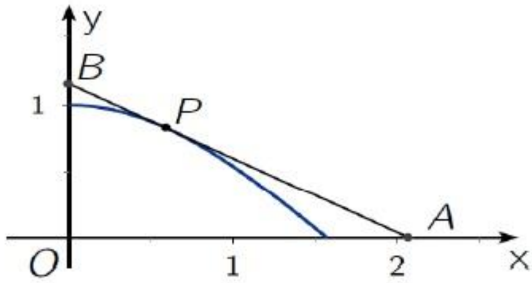
Alternativ 2

Vi har tegnet grafen til

$$f(x) = \cos x$$

og en tangent til denne i punktet $P(a, f(a))$.

Skjæringspunktene mellom tangenten og koordinataksene er A og B. Se skissen til høyre.



a) Vis at likningen for tangenten er

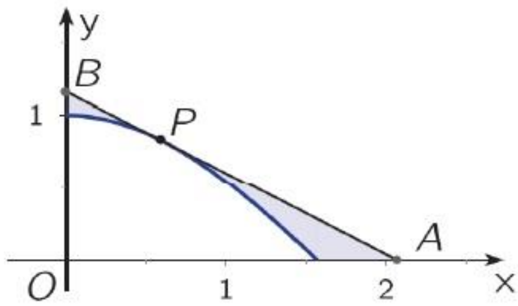
$$y = -(\sin a) \cdot x + a \cdot \sin a + \cos a$$

b) Bestem koordinatene til punktene A og B.
Vis at arealet av $\triangle OAB$ er

$$F_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}(a \cdot \sin a + \cos a) \cdot \left(a + \frac{\cos a}{\sin a}\right)$$

c) Forklar at arealet T av det fargelagte området på skissen til høyre kan skrives

$$T(a) = F_{\triangle OAB} - 1$$



d) Tegn grafen til T når $a \in \left\langle \frac{1}{5}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

e) Bestem T_{min} med tilhørende verdi av a. Finn ut hva som skjer med arealet av det fargelagte området når $a \to \frac{\pi}{2}$

Eksempel 4.29: Valgoppgave, alternativ 2, fra del 2 av eksamen i Matematikk R2 høsten 2010.

Dette avslutter gjennomgangen av de direkte resultatene fra analysearbeidet rundt eksamenssettene. Neste kapittel knytter sammen utvalgte momenter fra Matematikk R1 og Matematikk R2, som tidligere lovet.

4.4 Matematikk R1 og Matematikk R2 sett under ett

Når jeg nå skal knytte sammen og sammenlikne resultatene fra analysen av Matematikk R1 og Matematikk R2, velger jeg å gå tilbake til starten av eksamenssettene. Med tanke på at eksamen har som oppgave å undersøke hvorvidt en elev oppfyller kompetansemålene eller ikke, forventet jeg en grad av likhet mellom settene, med tanke på at kompetansemålene ikke har endret seg i løpet av Kunnskapsløftet. At alle eksamenssettene hadde en fast start, derivasjon og polynomdivisjon for Matematikk R1, derivasjon og integrasjon for Matematikk R2, var mer overraskende. Dette sier noe om det faglige innholdet eksamensforfatterne ønsker, men enda mer om utformingen av eksamenssettene. Det at den formmessige utformingen er viktig kommer jeg tilbake til senere. Det disse innledende oppgavene forteller om eksamen, er at man ønsker at eleven skal møte en trygg, instrumentell start. Man ønsker ikke å kaste eleven inn i kompliserte problemstillinger eller oppgaver innledningsvis. Her vil helt klart Lithners (2003, s. 34-35) begrep «etablert erfaring» gjøre seg gjeldende: enhver elev som har brukt tidligere eksamenssett som forberedelse til egen eksamen, vil ha mulighet til å oppdage denne trenden.

Lithners forskning, som ble drøftet i kapittel 2.2, gjør at det er viktig å være kritisk til de likhetene jeg har presentert mellom eksamenssettene. På et grunnleggende nivå er det kanskje bra at det er såpass mange likheter å finne: eksamensforfatterne ønsker å teste læreplanmål, lærerne vet dette, og elevene blir godt forberedt på hva som kan komme. Det er likevel to momenter som gjør at dette perspektivet ikke er udelt positivt. For det første vil jeg påstå at det i Matematikk R1, og til dels også i Matematikk R2, kan føre til en markant washback-effekt (Utdanningsdirektoratet, 2014a, s. 86-87), som jeg diskuterte i kapittel 4.1. Problemet blir da at usikkerheten rundt ting man ikke tester vokser seg større og større. Tester man et tilfeldig utvalg av kompetansemålene burde man forvente at kunnskapsnivået på de tingene man ikke tester ikke er vesentlig forskjellig fra kunnskapsnivået på det man tester. Hvis man da «låser seg» til et knippe kompetansemål vil nødvendigvis taktiske elever bruke mindre energi på å lære seg de kompetansemålene som ofte ikke blir testet. Det må også nevnes at denne usikkerheten rundt eventuell manglende kunnskap blir på et metanivå, da sensorene kun skal ta utgangspunkt i det eleven presterer. Det andre momentet rundt den observerte forutsigbarheten jeg vil trekke frem er at det muligens vil kunne gi relasjonsforståelse en svekket posisjon. Når elevene vet hva som møter dem, kan det være fristende å pugge disse tingene og fokusere på instrumentelle ferdigheter som vil få dem gjennom eksamen. Det at relasjonsforståelse kan risikere å havne i baksetet er spesielt faretruende for de to programfagene denne oppgaven ser på, da det er disse fagene som spesialiserer mot videre realfagsstudier der relasjonsforståelse er enda mer verdifullt.

Når det kommer til fordelingen av oppgaver i de to forståelsestypene, vil jeg si at Matematikk R1 og Matematikk R2 har en ganske så lik profil. På én måte er dette som forventet, med tanke på at fagene står såpass nær hverandre. På den annen side hadde det ikke vært urimelig å ønske en litt høyere andel relasjonsforståelsesoppgaver i Matematikk R2. Jevnt over har fagene en god blanding av oppgaver av instrumentell og relasjonell natur. Dette skyldes kanskje også at mange av emnene som testes til eksamen inneholder elementer av prosess-objekt-dualiteten til Sfard (1991), beskrevet i kapittel 2.2, for eksempel kan derivasjon og integrasjon ses på både som regneprosesser, men også som stigningen til en tangent og et areal eller volum. Dette gjør at man vil kunne klassifisere enkelte oppgaver både som relasjonelle og instrumentelle, avhengig av elevens tilnærming til det aktuelle emnet oppgaven tar for seg. Begge programfagene har få oppgaver som kan klassifiseres som rent relasjonelle, mens det er et større antall som kan klassifiseres som rent instrumentelle. Mange av oppgavene elevene møter vil ha en blanding av elementer som krever instrumentell og relasjonell forståelse i seg, men relasjonsforståelse vil som regel ikke være et «må ha»-krav for å kunne løse oppgaven.

Temamessig inneholder oppgavene også en grad av likhet mellom fagene. Noe av dette skyldes at de matematiske temaene utvides og videreføres i Matematikk R2, for eksempel vektorregning som flytter seg fra planet til rommet, mens andre kompetansemål ikke endrer seg nevneverdig når man flytter seg fra Matematikk R1 til Matematikk R2, for eksempel funksjonsdrøfting. Eksamenssettene i Matematikk R2 tester både kompetansemålene som skiller Matematikk R1 og Matematikk R2, for eksempel differensiallikninger, og kompetansemålene som binder programfagene sammen, for eksempel funksjonsanalyse.

Kanskje har dette noe å gjøre med at Matematikk R1 og Matematikk R2 spesialiserer og peker videre mot høyere utdanning innen realfag? I så fall vil jeg si det er naturlig å klassifisere fellesnevnerne mellom disse programfagene som «hovedidéene» det er viktigst å ta med seg videre i utdanningen, mens emnene som skiller dem representerer en mer spesialisert kunnskap. Funksjonsanalyse og differensiallikninger er gode representanter for disse to ulike perspektivene. En ekstra tanke rundt dette er: hvorfor skal, for eksempel, annenordens differensiallikninger være en del av pensum, hvis det ikke testes?

I og med at likheter mellom eksamenssettene påvirker elevenes mentale innstilling til eksamen, vil jeg også ta opp et punkt jeg anser som mindre viktig når det kommer til forståelsestyper, men som likevel er interessant: oppsplittingen av og nummereringen av oppgaver. Som nevnt innledningsvis i kapittelet endret nummereringen i eksamenssettene seg fra og med høsten 2012. Dette førte til en økning i antall nummererte oppgaver, avbalansert av en minskning i antall deloppgaver, og en sterkere tematisk identitet for hver enkelt oppgave. Før denne endringen måtte en elev i del 1 av eksamen håndtere rundt 5 ulike matematiske tema innen samme oppgave. Den mentale påvirkningen av lange oppgaver er nok noe eksamensforfatterne har tenkt på med denne endringen, og det er spesielt én ting som støtter oppunder dette: med oppsplittingen av del 1s første oppgave i mange mindre oppgaver ville en nummerering som fortsetter i del 2, fremfor å starte på nytt, føre til at eleven i midten av og på slutten av eksamen jobber med oppgaver med et tosifret oppgavenummer. Å starte oppgavenummereringen på nytt i del 2 sørget for at ingen elev noensinne har møtt på «oppgave 10» eller høyere, selv om alle elevene har regnet seg gjennom et antall oppgaver langt høyere enn ti. Hvis vi antar at en gjennomsnittlig elev ikke blir demotivert av et stort antall oppgaver, og da regner jeg oppgave 1a-1h som et «stort» antall oppgaver, vil disse endringene gi mindre mening, da man mister muligheten til å entydig vise til en oppgave uten å spesifisere hvilken del av eksamen det dreier seg om. Selv om dette ikke direkte knytter seg til forståelsestyper, kan det tyde på at eksamensforfatterne har hatt en viss metatenking rundt elevenes forhold til eksamen. Dette vil igjen gjøre antagelsen om at forståelsestyper er et tema som eksamensforfatterne kan ha diskutert, mer rimelig, selv om dette er mest spekulasjoner fra min side.

Når det gjelder selve oppgavene i eksamenssettene, er det som tidligere nevnt én type som skiller seg ut, nemlig valgoppgaven. Det at valgoppgaven ble faset ut av både Matematikk R1 og Matematikk R2 gjør det rimelig å anta at det var selve oppgaveformen som var problematisk, ikke dens rolle i det enkelte fag. Valgoppgavene som ble gitt plasserte enten eleven i en valgsituasjon mellom to matematiske emner, eller to ulikt utformede alternativer innen samme tema. Det er med en gang klart at i en valgsituasjon vil man ikke få testet om eleven mestrer kompetansemålene som angår det alternativet som ikke blir valgt. I denne sitasjonen har altså valgoppgaven klare svakheter. I den andre situasjonen, der eleven må velge mellom to alternativer innen samme tema, er det igjen uklart hva som rettferdiggjør tilstedeværelsen av en valgoppgave. Man kan tenke seg at en valgoppgave kunne hatt to alternativer som differensierte mellom digitalt og manuelt arbeid, og det finnes eksempel på en slik valgoppgave, men for det meste benyttes ikke denne muligheten i eksamenssettene. I og med at eksamen er sentralstyrt, altså en uniform kunnskaps- og ferdighetstest, er en slik oppgavetype en overflødighet når man først har lagt til grunn at de to alternativene er likeverdige når det kommer til poeng. Jeg vil anta at eksamensforfatterne også trakk disse konklusjonene etter hvert, og valgoppgaven ble avviklet.

Samlet er inntrykket av denne sammenlikningen at Matematikk R1 og Matematikk R2 viser klare likheter som man kunne forvente av to programfag der det ene bygger på det andre, både i form og innhold. Det er likevel en mye større tema- og presentasjonsmessig variasjon i del 2 av eksamenssettene fra Matematikk R2.

5. Avslutning

5.1 Oppsummering

Før jeg avslutter oppgaven og peker ut veier for videre forskning, velger jeg å komme med en oppsummering av oppgaven, både innholds- og resultatmessig, for å poengtere mine mål med oppgaven og se om disse ble nådd eller ikke.

I arbeidet med denne masteroppgaven var målet å undersøke i hvilken grad forståelse, spesielt relasjonell forståelse, var et krav for å løse oppgavene en elev møter til eksamen. For å svare på dette trengte jeg først å utdype hva begrepet forståelse innebærer, og presenterte relevant teori rundt dette. Selv om Solvangs definisjoner dekket mye av mine egne tanker rundt begrepet, sørget også Mellin-Olsen, Skemp, Hiebert og Sfard for å utdype og berike hva som kan legges i og hvordan man kan tolke dette begrepet. Lithner sørget også for en noe mer praktisk rettet tilnærming til begrepet, og hjalp meg å knytte forståelsesbegrepet enda sterkere opp mot eleven og hva eleven kan gjøre under en eksamen.

Med tanke på utvalg av datamateriale var jeg så heldig å ha muligheten til å jobbe med et komplett datasett, så teori rundt utvalgsmetoder og representativitet ble en ikke-faktor. Da jeg først hadde bestemt meg for å jobbe med programfagene Matematikk R1 og Matematikk R2 ble det desto viktigere for meg å begrunne dette valget, og å presentere informasjon om disse fagene. Gjennom å presentere både elevmengden og karakterfordeling i programfagene, hvor mange som gikk opp til de respektive eksamenene og lovverket rundt det å gå opp til eksamen håper jeg å ha fremstilt et mest mulig komplett bilde av eksamenssituasjonen i disse to programfagene. Dette vil forhåpentligvis skape muligheter for å forenkle videre forskning rundt disse programfagene.

For å analysere eksamenssettene startet jeg med en opptelling av de ulike verbene brukt i eksamensoppgavene, før jeg gikk videre til en grundigere analyse av selve oppgavene og hva slags forståelsestyper de kunne representere. I denne andre delen av analysen hentet jeg inspirasjon fra masteroppgaven til Fossum og rammeverket for TIMSS Advanced 2015. Jeg presenterte her også utvalgte sammenlikningspunkter for Matematikk R1 og Matematikk R2.

5.2 Konklusjon

For å nærme meg en konklusjon går jeg tilbake til forskningsspørsmålet jeg fremsatte i kapittel 2.2: «må eleven resonnere, eller er det tilstrekkelig å huske, for å løse denne oppgaven?» Gjennom analysen av eksamenssettene fant jeg eksempler på begge deler, selv om oppgaver som kunne løses med ren hukommelse dukket opp oftest. Selve forskningsspørsmålet endrer seg med konteksten en gitt oppgave befinner seg i, og da tenker jeg mest på om oppgaven er en del av eksamens del 1 eller del 2. Dette spørsmålet hjalp meg til å ha et sterkere fokus på hva som måtte til for å løse oppgaven, men også på hva oppgaven ba om.

Dette hjalp meg videre i klargjøringen av hva som er de faktiske resultatene fra analysen jeg foretok, og som er det som blir stående som svar på oppgavens innledende problemstilling: *«I hvilke grader vektlegger Utdanningsdirektoratet relasjonell og instrumentell forståelse av matematikk?»* Jeg vil si at gjennom min analyse og min tolkning av begrepene instrumentell og relasjonell forståelse, og som resultat av min klassifisering av eksamensoppgavene, er konklusjonen den at Utdanningsdirektoratet plasserer eksamenssettene et sted mellom instrumentell og relasjonell forståelse, men med en grad av preferanse for instrumentalisme.

Jeg trekker denne konklusjonen på bakgrunn av tilstedeværelsen av rent instrumentelle oppgaver sett opp mot den svake representasjonen av rent relasjonelle oppgaver, og at mange oppgaver har en instrumentell grunnlinje, der relasjonsforståelse er en fordel, ikke et krav, for eleven. Hva som er årsaken til denne preferansen for oppgaver som kan klassifiseres som instrumentelle er ikke åpenbar, men jeg vil hevde at det at instrumentelle oppgaver kan være raskere og enklere å sensurere enn oppgaver som tester relasjonsforståelse, kan være en viktig faktor.

Disse konklusjonene vil jeg si gjelder for både Matematikk R1 og Matematikk R2, med tanke på likhetene jeg diskuterte underveis i analysen, spesielt den dedikerte sammenlikningen i kapittel 4.4. Hadde jeg sett på hvert av programfagene for seg hadde jeg trukket de samme konklusjonene.

5.3 Videre forskning

Når jeg skal peke ut mulige veier for videre forskning og hvordan mine resultater kan tas i bruk i fremtiden, er det et par muligheter som skiller seg ut som de mest åpenbare. I og med at denne oppgaven på én måte kan leses i forlengelse av Fossums masteroppgave som jeg benyttet i analysearbeidet, er det ikke urimelig å anta at en fremtidig oppgave kan ta fatt der min sluttet. Jeg sikter da først og fremst til endringen i eksamensformen som trådte i kraft våren 2015. Hvordan påvirker denne nye eksamensformen oppgavene? Vil en lengre del 1 føre til flere eller færre oppgaver som krever relasjonsforståelse? Vil representasjonen av de ulike temaene og/eller læreplanmålene i oppgavene endre seg? Disse og lignende spørsmål kan muligens ikke besvares før etter et par år med den nye eksamensformen, men representerer en mulig vei å ta for videre forskning rundt Kunnskapsløftet. Når den neste store skolereformen en gang implementeres, vil man da ha mulighet til å se tilbake på de ulike utgavene av eksamensformen i Kunnskapsløftet som en hjelp til å fastslå hva man ønsker at eksamensformen skal inneholde.

En ting min oppgave ikke tar for seg, men som har tilknytning til den nye eksamensformen, er et økt fokus på digital kompetanse. Å undersøke i hvilken grad oppgavene i del 2 endrer seg med den nye eksamensformen, både form- og innholdsmessig, er noe som kan være meget interessant. I og med at denne oppgaven ikke har hatt fokus på digital kompetanse, er det også mulighet for å undersøke i hvilken grad de eksamenssettene jeg analyserte la opp til bruk av digitale hjelpemidler i sin del 2.

Litteraturliste

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011) *Research Methods In Education* (7th ed.). New York: Routledge.

Fossum, A. (2009) *Algoritmer og kreativitet til matematikkeksamen: fra 2MX til R1: endret eksamensoppgavene seg med eksamensformen?* Hentet 18. februar 2015 fra https://www.duo.uio.no/bitstream/handle/10852/32356/Master_realfagdidaktikk_A_Fossum.pdf?sequence=1

Grønmo, L. S., Lindquist, M & Arora, A. (2014) *TIMSS Advanced 2015 mathematics framework*. Hentet 3. november 2014 fra http://timssandpirls.bc.edu/timss2015-advanced/downloads/TA15_FW_Chap1.pdf

Hiebert, J. (red.). (1986) *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Routledge

Lithner, J. (2003) Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational studies in mathematics, 52* (1), s. 29-55. DOI: 10.1023/A:1023683716659

Lithner, J. (2008) A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational studies in mathematics, 67* (3), s. 255-276. DOI: 10.1007/s10649-007-9104-2

Lovdata (2014) Kapittel 3. Individuell vurdering i grunnskolen og i vidaregåande opplæring - V. Eksamen. *Forskrift til opplæringslova.* Hentet 16. februar 2015 fra https://lovdata.no/dokument/SF/forskrift/2006-06-23-724/KAPITTEL_4-5#KAPITTEL_4-5

Mellin-Olsen, S. (1981) Instrumentalism as an educational concept. *Educational studies in mathematics, 12* (3), s. 351-367. DOI: 10.1007/BF00311065

Sfard, A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22* (1), s. 1-36. DOI: 10.1007/BF00302715

Skemp, R. R. (1987) *The psychology of learning mathematics* (2nd ed.). Penguin Books Ltd.

Solvang, R. (1992) *Matematikk-didaktikk*. (2. utg.) NKI-forlaget.

Star, J. R. (2000) On the relationship between knowing and doing in procedural learning. I B. J. Fishman & S. F. O'Connor-Divelbiss (red.) *International Conference of the Learning Sciences: Facing the challenges of complex real-world settings*, *Fourth international conference of the learning sciences, ICLS 2000* (s. 80-86). Psychology Press

Star, J. R. (2005) Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for research in mathematics education, 36* (5), s. 404-411. National Council of Teachers of Mathematics.

Star, J. R. (2007) Foregrounding procedural knowledge. *Journal for research in mathematics education, 38* (2), s. 132-135. National Council of Teachers of Mathematics.

Utdanningsdirektoratet (2006a) *Kompetansemål – Matematikk R1*. Hentet 2. mars 2015 fra http://www.udir.no/kl06/MAT3-01/Kompetansemaal/?arst=1858830315&kmsn=-1169861937

Utdanningsdirektoratet (2006b) *Kompetansemål – Matematikk R2*. Hentet 2. mars 2015 fra http://www.udir.no/kl06/MAT3-01/Kompetansemaal/?arst=1858830314&kmsn=-1169861940

Utdanningsdirektoratet (2014a) *Matematikk i norsk skole anno 2014*. Hentet 16. januar 2015 fra http://www.udir.no/PageFiles/89051/Matematikk_norsk_skole_2014_rapport_ekstern_arbeidsgruppe.pdf?epslanguage=no

Utdanningsdirektoratet (2014b) *Læringsresultater – Eksamen programfag*. Hentet 19. februar 2015 fra https://skoleporten.udir.no/rapportvisning.aspx?enhetsid=00&vurderingsomrade=11&underomrade=18&skoletype=1&skoletypemenuid=1

Utdanningsdirektoratet (2014c) *Eksamensveiledning – Om vurdering av eksamensbesvarelser*. Hentet 24. mars 2015 fra http://vagen.vgs.no/attachments/article/43/Matematikk%20Eksamensveiledning_2014_Bokmal.pdf

Utdanningsdirektoratet (2015a) *Revidert eksamensordning i matematikk*. Hentet 06. mars 2015 fra http://www.udir.no/Vurdering/Eksamen-videregaende/Endringer-og-overgangsordninger/Endringer/eksamensordning-skriftlig-eksamen-i-matematikk/

Utdanningsdirektoratet (2015b) *Lesing i matematikk*. Hentet 23. mars 2015 fra http://www.udir.no/Utvikling/Ungdomstrinnet/Lesing/Ressurser/Lesing-i-matematikk1/Strategier-nar-elever-arbeider-med-sammensatt-tekst/

Vedlegg

Rådata for verbanalyse Matematikk R1

Semester eksamen ble gitt	Vår 2008		Høst 2008		Vår 2009		Høst 2009		Vår 2010		Høst 2010	
	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2
Bestem	1	1	1	2	1	4	5	4	2	1	4	5
Vis at/bevis	3	4	3	4	2	3	3	3	1	5	2	5
Forklar/begrunn	1	4	1	5	0	2	2	5	3	6	0	5
Bruk/sett	1	6	1	3	2	5	0	3	2	2	2	4
Finn (evt. ved regning)	3	6	1	3	0	8	2	4	3	3	1	9
Annet	1	2	2	2	0	1	2	3	2	5	0	1
Tegn	0	2	1	0	0	3	1	3	0	1	2	3
Deriver	1	0	1	0	1	0	2	0	2	0	2	0
Løs	0	0	1	0	1	0	0	0	2	1	0	0
Konstruer	0	1	0	1	0	2	0	1	1	0	1	0
Regn ut	1	1	1	0	2	1	0	0	1	0	0	0
Avgjør/undersøk	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
Kommenter (svaret)	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
Hva er sannsynligheten for	0	0	0	4	0	2	0	2	0	1	1	0
Skriv så enkelt som mulig/trekk sammen	1	0	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0
Faktoriser	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Utfør	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Semester eksamen ble gitt	Vår 2011		Høst 2011		Vår 2012		Høst 2012		Vår 2013		Høst 2013		Vår 2014		Høst 2014		Totalt
	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2	
Bestem	0	2	7	9	6	12	6	12	2	14	3	15	8	13	2	12	154
Vis at/bevis	3	7	3	4	2	3	0	3	3	4	1	1	0	3	4	5	84
Forklar/begrunn	2	2	1	4	1	2	2	3	0	3	1	3	2	2	1	0	63
Bruk/sett	1	2	1	3	1	2	1	2	1	2	1	2	2	3	2	6	63
Finn (evt. ved regning)	0	7	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	55
Annet	1	3	2	0	0	3	1	1	0	1	3	1	1	3	3	6	50
Tegn	0	1	1	3	2	1	0	1	0	2	2	2	1	4	0	1	37
Deriver	2	0	3	0	2	0	3	0	2	0	3	0	3	0	2	0	29
Løs	1	0	1	0	0	0	2	0	1	1	1	1	1	0	1	0	15
Konstruer	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	12
Regn ut	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	11
Avgjør/undersøk	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	2	1	0	0	0	0	10
Kommenter (svaret)	0	1	0	0	1	0	1	0	0	3	0	0	0	0	0	0	10
Hva er sannsynligheten for	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
Skriv så enkelt som mulig/trekk sammen	2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	8
Faktoriser	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	5
Utfør	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2

Rådata for verbanalyse Matematikk R2

Semester eksamen ble gitt	Vår 2009		Høst 2009		Vår 2010		Høst 2010		Vår 2011		Høst 2011	
	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2
Bestem	5	4	3	3	6	2	6	9	5	4	8	9
Vis at/bevis	1	5	3	2	2	8	2	5	2	4	1	5
Forklar/begrunn	0	4	1	5	0	6	1	3	3	2	0	3
Bruk/sett	0	6	0	2	4	3	0	3	1	4	1	2
Finn (evt. ved regning)	2	2	4	6	4	3	0	7	2	6	0	1
Annet	2	2	2	6	0	4	0	1	0	3	2	1
Deriver	1	0	1	0	1	0	2	0	3	0	3	0
Tegn	0	1	0	1	0	3	0	2	2	5	0	3
Løs	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
Regn ut	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Kommenter (svaret)	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Avgjør/undersøk	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Sett opp	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Semester eksamen ble gitt	Vår 2012		Høst 2012		Vår 2013		Høst 2013		Vår 2014		Høst 2014		Totalt
	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2	Del 1	Del 2	
Bestem	3	13	7	10	8	13	9	8	5	11	8	10	169
Vis at/bevis	3	5	2	6	1	5	2	8	1	8	1	5	87
Forklar/begrunn	1	2	1	5	1	5	1	4	1	3	1	2	55
Bruk/sett	0	4	0	4	4	2	0	4	0	6	1	3	54
Finn (evt. ved regning)	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	40
Annet	0	2	0	2	1	2	0	3	1	1	2	1	38
Deriver	3	0	2	0	3	0	2	0	2	0	2	0	25
Tegn	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	23
Løs	1	0	0	1	1	0	0	1	2	1	1	1	18
Regn ut	3	1	0	1	0	0	0	0	2	0	0	0	8
Kommenter (svaret)	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	6
Avgjør/undersøk	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	5
Sett opp	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2