

Første og andre ordens krefter virkende på porøse
plater i et fluid med en fri overflate, med
applikasjoner til fiskemerder i norske fjorder

av

Sindre Sogge Heggen

MASTEROPPGAVE

for graden

Master i Anvendt matematikk og mekanikk, lang oppgave

(Master of Science)



*Det matematisk- naturvitenskapelige fakultet
Universitetet i Oslo*

Mai 2015

*Faculty of Mathematics and Natural Sciences
University of Oslo*

Takk til min veileder John Grue, som med sitt smittende engasjement har vært til stor støtte. Takk også til alle i 9. etasje i N.H. Abels hus for deres bidrag til å skape et godt læringsmiljø. Spesielt takk til (i alfabetisk rekkefølge) Per Thomas Haga, Trygve Halsne, Solveig Masvie og Trond Svandal for gode diskusjoner og gemyttelig stemning unnerveis i masterløpet. Og takk til Anne Jordal Myrset for ferdige middager og et lettende smil i innspurten.

– *Sannheten er skrevet i vann*
Aksel Sandemose

Sammendrag

Tynne, porøse plater, oskillede eller holdt fast under påvirkning av en innkommende bølge, er studert. Bølgen vandrer på et fluid som er antatt inkompressibelt og irrotasjonelt, og lineær potensialteori anvendes. Uttrykk for en første ordens horisontalkraft og en andre ordens driftkraft presenteres. Det tas høyde for en konstant strømhastighet i fluidet, og numeriske resultater blir presentert både med og uten strøm. Når strømmen er fraværende vises det til samsvarende resultater med Evans (1969) og An & Faltinsen (2012).

Innhold

Introduksjon	6
1 Matematisk formulering	9
1.1 Randbetingelser på overflaten og i grensene	9
1.1.1 Bølge uten strøm	9
1.1.2 Bølge på strøm	10
1.1.3 Betingelse på bunnen og i fjernfeltet	11
1.2 Kravet på plata	11
1.2.1 Lineær trykkdifferanse	12
1.2.2 Kvadratisk trykkdifferanse	12
1.3 Linearisering i tidsrommet	13
1.3.1 Fourierutvikling	14
1.3.2 Periodisk funksjon uten konstantledd	14
1.3.3 Periodisk funksjon med konstantledd	15
1.3.4 Fourierrekken på kompleks form	17
2 Egenfunksjon-utvikling	19
2.1 Generell løsning	19
2.2 Chwangs porøse bølgemaker	20
2.2.1 Problemet	20
2.2.2 Løsningsmetode	21
2.2.3 Resultater	21
2.3 Bølge mot vegg	23
2.3.1 Problemet	23
2.3.2 Løsningsmetode	24
2.3.3 Resultater	24
3 Vertikal plate med endelig lengde i uendelig dypt fluid	27
3.1 Plate i uendelig fluid	27
3.1.1 γ -funksjonen	28
3.2 Horisontal plate i uendelig dypt fluid med fri overflate	29
3.3 Vertikal plate i uendelig dypt fluid med fri overflate	31
3.3.1 Hastighetsfeltet	32
3.3.2 Kravet på veggen	34
3.3.3 Kraften på plata	35
3.3.4 Resultater	36

4	Bølge på strøm	39
4.1	Vertikal plate	40
4.1.1	Green-funksjonen	40
4.1.2	Hastighetsfeltet	41
4.1.3	Kravet på plata	42
4.2	Fjernfeltsanalyse	43
4.2.1	Fjernfeltsamplitudene	43
4.2.2	Driftkraften	44
4.2.3	Energiligningen	47
4.2.4	Resultater	48
	Diskusjon	55
A	Chwangs bølgemaker	57
B	Bølge mot vegg fra bunn til overflate	63
C	γ-funksjonen	67
D	I_2 og I_4	71
E	Numeriske metoder	75
	Referanser	79

Introduksjon

Introduksjon

Vi tar i denne oppgaven sikte på å studere kreftene som virker på en porøs plate som utfører en oskillerende bevegelse i et fluid, eller som holdes fast under påvirkning av en harmonisk gravitasjonsbølge som vandrer i fluidet. Analysen foretas i 2D, og ordet porøsitet innebærer da at en prosentandel av platas lengde består av åpne spalter som fluidet kan passere igjennom. Innledningvis presenteres en matematisk formulering hvor lineær potensialteori legger selve grunnlaget for studiet. Det blir vist til to relasjoner som knytter gjennomstrømhastigheten på veggen til trykkforskjellen på hver side av plata – den ene lineær, den andre kvadratisk .

Som en introduksjon vil publikasjoner av Chwang (1983) og Molin (1992.) gjennomgås. En utvikling av egenfunksjoner blir da brukt for å løse to gitte randverdiproblemer i et fluid av endelig dybde. For å beskrive en vertikal plate av endelig utstrekning i et uendelig dypt fluid brukes en metode foreslått av An & Faltinsen (2012) , der en kontinuerlig fordeling av en Green-funksjon langs platas lengde anvendes i uttrykket for hastighetspotensialet. Teorien utvides deretter til å gjelde også for bølger på strøm.

For alle studerte tilfeller blir den tidsvarierende, horisontale kraften funnet ved direkte integrasjon på plata til første orden i amplitude, mens denne kraftens tidsmidlede bidrag gis korrekt til andre orden i amplitude ved hjelp av fjernfeltsanalyse. Fra fjernfeltsanalysen brukes også et uttrykk for energifluksen til å studere dissipasjonen på grunn av porøsiteten. For en vertikal plate holdt fast under påvirkning av en bølge i et fluid med strøm, presenteres resultater hvor typiske parametere for en fiskemerd og norske fjorder er brukt i utregningene.

Applikasjoner og tidligere arbeider

Effekten av porøse plater som bølgebrytere har tidligere blitt undersøkt av Jarlan (1961), som betrakter en spaltet, vertikal vegg utenfor en havn. Molin (1990) undersøker en porøs struktur som fungerer som en stabilisator for et oljetårn, stående i vann. Strukturen bidrar til en lokalt forhøyet addert masse, som påvirker tårnets egenfrekvens. Stabilisatoren plasseres så med hensyn til de innkommende bølgene for å minske tårnets vibrasjoner. En lignende anvendelse som nylig er viet mye oppmerksomhet er såkalte Tuned Liquid Dampers (TLD), som har som hensikt å minske vibrasjonene til slanke bygninger, utsatt for vind eller jordskjelv. Disse konstruksjonene består av en regulær tank, delvis fylt med vann, og med én eller flere porøse plater plassert innvendig. Tanken settes på toppen av bygningen, og er konstruert slik at de porøse veggene bidrar til en demping av bygnigens egenfrekvens. For mer om dette, se for eksempel Faltinsen (2011), Crowley & Porter (2012) og Molin & Remy (2013).

Fiskenæringen, med sine gitter- og nettingstrukturer, er et annet åpenbart nedslagsfelt for analysen av porøse plater, og det er denne anvendelsen vi vil ha størst fokus på i denne oppgaven. En oversikt over mange tidligere publikasjoner innenfor feltet er gitt av Klebert (2013). Krefter på nettingstrukturer er tidligere studert av blant andre Loeland (1993), Kristiansen & Faltinsen (2012), Lader & Fredheim (2006) og Lee et al. (2008). De to førstnevnte ser på kreftene fra en strøm alene, mens sistnevnte ser på effekten av både bølger og strøm – men ikke kombinert. Alle deler nettingstrukturen inn i små elementer, og summerer så lokale krefter for å finne de globale. Ved å anvende potensialteori vil vi derimot beskrive de globale kreftene direkte, med fokus på bølgeeffektene. Bølger vandrende på en strøm over et porøst legeme er, så vidt vi kan se, ikke tidligere studert med en slik tilnærming.

Kapittel 1

Matematisk formulering

Vi skal i all hovedsak studere to tilfeller. I det første betraktes bølger som vandrer på en fri overflate i et ellers rolig fluid, mens vi i det andre tilfellet også skal legge til en konstant strøm i fluidet. Vi lar horisontale koordinater være beskrevet ved x , vertikale ved y og tiden ved t . Origo plasseres i den uforstyrrede overflaten. Vi antar så at fluidet er inkompressibelt og at hastighetsfeltet er irrotasjonelt, og dermed kan beskrives av et potensial Φ som oppfyller Laplace-ligningen:

$$\nabla^2 \Phi(x, y, t) = 0 \quad (1.1)$$

Under overflaten plasseres en porøs plate som enten holdes fast eller utfører en oskillerende bevegelse. For alle tilfeller skal vi anta at en karakteristisk bølgeamplitudene ξ er liten i forhold til både platas lengde L og bølgenelengden λ . Dette impliserer at vi kan uttrykke den tidsvarierende komponenten til Φ som en pertubasjonsrekke av amplituden (Logan (2013)). Randbetingelser blir først beskrevet for det fulle potensialet, og vil deretter lineariseres under antakelsen av at $\frac{\xi}{L}$ og $\frac{\xi}{\lambda}$ er tilstrekkelig små.

Det går også ut ifra at alle bevegelser vi skal studere har pågått over så lang tid at tidssavhengigheten til systemet har nådd en stabil fase. Til ledende orden i amplitude antas det derfor at alle tidsvarierende hastigheter kan uttrykkes ved den komplekse funksjonen $e^{j\omega t}$, hvor $j = \sqrt{-1}$, mens ω betegner frekvensen.

1.1 Randbetingelser på overflaten og i grensene

1.1.1 Bølge uten strøm

For at ingen væske skal strømme gjennom overflaten må den kinematiske grenseflatebetingelsen oppfylles:

$$\frac{D\eta}{dt} = \Phi_y \quad \text{for } y = \eta \quad (1.2)$$

hvor (Gjevik & Fagerland (2014)):

$$\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \quad (1.3)$$

og $\mathbf{u} = (u, v) = \nabla \Phi$.

Av Eulers trykkligning (Gjevik & Fagerland (2014)) finner man trykket $p(x, y, t)$ i væsken:

$$\Phi_t + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + gy + f(t) = -\frac{p}{\rho} \quad (1.4)$$

$f(t)$ er her en tidsvarierende funksjon. Når man ser bort ifra overflatespenning må trykket på overflaten være det samme som atmosfæretrykket, som vi uten tap av generalitet kan gi verdien null. Skal dette gjelde i det uforstyrrede feltet langt unna bølgene må også f være null. Den dynamiske grenseflatebetingelsen blir dermed:

$$\Phi_t + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + g\eta = 0 \quad \text{for } y = \eta \quad (1.5)$$

Ved partikkelderivasjon kan (1.2) og (1.4) kombineres til én ligning:

$$\frac{D}{Dt} \left(\Phi_t + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) + g \frac{D\eta}{dt} = 0 \quad \text{for } y = \eta \quad (1.6)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\Phi_t + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) + g\Phi_y = 0 \quad \text{for } y = \eta \quad (1.7)$$

En linearisert grensebetingelse fremkommer av først å neglisjere uttrykk av høyere orden i amplitude:

$$\Phi_{tt} + g\Phi_y = 0 \quad \text{for } y = \eta \quad (1.8)$$

for deretter å Taylorutvikler alle y -avhengige ledd om punktet $y = 0$:

$$\Phi_{tt} + g\Phi_y = 0 \quad \text{for } y = 0 \quad (1.9)$$

Merk at Φ i de to uttrykkene over nå bare betegner det fulle potensialet til første orden av amplitude.

1.1.2 Bølge på strøm

Det skal også tas høyde for at fluidets partikler beveger seg med en konstant, horisontal, strøm med en hastigheten U gående i negativ x -retning. La nå u være gitt ved:

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi - U\mathbf{e}_x \quad (1.10)$$

Den kinematiske grensebetingelsen fra delseksjonen over forblir uendret, mens den dynamiske nå blir:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + g\eta - \frac{1}{2}U^2 = 0 \quad \text{for } y = \eta \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u - U)^2 + \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}U^2 + g\eta = 0 \quad \text{for } y = \eta \quad (1.12)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) + g\eta = 0 \quad \text{for } y = \eta \quad (1.13)$$

Konstanten i (1.11) kan identifiseres som $f(t)$ funnet fra det uforstyrrede feltet langt unna bølgen.

I likhet med Zhao & Faltinsen (1988) antar vi at Φ kan dekomponeres i et tidsuavhengig (Φ_S) og et tidsavhengig (Φ_T) potensial:

$$\Phi = \Phi_S + \Phi_T \quad (1.14)$$

Som en første approksimasjon vil vi her neglisjere bidraget fra Φ_S – en tilnærming vi skal komme tilbake til i kapittel 4. Når potenser av høyere grad enn én av amplituden antas å være små, kan vi skrive:

$$\frac{D\phi_T}{Dt} \approx \left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi_T \quad (1.15)$$

Om vi så partikkelderiverer (1.13), neglisjerer potensleddene og bruker tilnærmingen over, får vi:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Phi_T + g \frac{\partial \Phi_T}{\partial y} = 0 \quad \text{for } y = \eta \quad (1.16)$$

Ved også her å Taylor-utvikle om $y = 0$, ender vi med:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Phi_T + g \frac{\partial \Phi_T}{\partial y} = 0 \quad \text{for } y = 0 \quad (1.17)$$

1.1.3 Betingelse på bunnen og i fjernfeltet

Vi antar at bunnen er impermeabel, og dermed at:

$$\Phi_y = 0 \quad \text{for } y = -h \quad (1.18)$$

I tillegg må vi kreve at alle andre bølger enn den innkommende vandrer ut fra plata i fjernfeltet. Dette kalles gjerne radiasjonsbetingelsen.

1.2 Kravet på plata

Dersom plata er solid får vi at:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{n} \quad (1.19)$$

hvor \mathbf{n} er enhetsvektoren pekende ut fra legemet, og \mathbf{V}_p er en vektor som beskriver platas hastighet. En viktig merknad er at for bølger på strøm, gjelder uttrykket over bare når man neglisjerer det stasjonære potensialet (Prins (1995)).

I denne oppgaven tas det sikte på studere en porøse plate som er omgitt av et fluid med en fri overflate. Når plata er i bevegelse vil noe av vannet føres rundt og forbi legemet, og på grunn av porositeten vil det i tillegg oppstå en strømning gjennom veggen. Denne gjennomstrømhastigheten er knyttet til trykkforskjellen som oppstår mellom lo- og lesiden. For å beskrive denne trykkforskjellen er spesielt to relasjoner mye brukt i tidligere undersøkelser.

1.2.1 Lineær trykkdifferanse

I tidlige studier av porøse legemers interaksjon med bølger (se Chwang (1998) for en oversikt), har Darcys lov vært benyttet for å beskrive endringen i trykket. For en tynn, porøs vegg, er følgende semi-empiriske relasjon foreslått av Taylor (1956):

$$\frac{b}{\mu}\Delta p = V_n \quad (1.20)$$

hvor Δp er trykkforskjellen mellom hver side, V_n er normalhastigheten på veggen, μ er den dynamiske viskositetskoeffisienten og b er en konstant av enhet lengde som indikerer porøsiteten til materialet. For $b = 0$ er veggen solid, mens for $b \rightarrow \infty$ er veggen uendelig porøs og dermed fraværende. Som vi skal se, bruker Chwang (1983) ligning (1.20) i sin beskrivelse av en porøs bølgemaker.

En ulempe med å beskrive gjennomstrømmingen ved hjelp av Darcys lov er at den ikke tar hensyn til virvelavløsningen som gjerne oppstår på veggen. En lineær relasjon er derfor bare gyldig dersom normalhastigheten eller porøsiteten er veldig liten.

1.2.2 Kvadratisk trykkdifferanse

For å ta hensyn nettopp til virvelavløsning foreslår (Molin, 2011) en kvadratisk relasjon mellom trykket og hastigheten på veggen. Siden dette er relasjonen vi kommer til å bruke i egne utregninger, vil vi her gjengi utledingen presentert av Molin.

Som grunnlag for analysen gjøres det tre antakelser:

- (i) Veggen til legemet er av neglisjerbar tykkelse
- (ii) Veggen består av uendelig mange elementer som er delvis lekk
- (iii) Virvelavløsning vil oppstå i åpningene

Av (ii) er det underforstått at porøsiteten er abstrakt tolket. Fra (i) og (ii) kan det vises at lokale treghetseffekter ikke finner sted (Molin (2011)), og at vi dermed bare får bidrag fra viskøse effekter. For å finne disse ser vi for oss en uendelig lang kanal med høyde h , fylt av et fluid med en strøm parallell med kanalens vegger. I denne kanalen finnes en vertikal plate med lengde $(1 - \tau)h$ og en åpning τh . τ angir her åpningens prosentandel av platens lengde og fungerer derfor som en porositetsparameter. Den midlere hastigheten uendelig langt unna plata på venstre og høyre side betegnes ved v , den midlere hastigheten gjennom åpningen skriver vi som v_0 . Da massefluksen er bevart må vi ha at $vh = v_0\tau h$, som gir $v_0 = \frac{v}{\tau}$. Molin skriver så trykkdifferansen som virker på plata som:

$$\Delta P = \frac{1}{2\mu}|v_0|v_0 \quad (1.21)$$

$$= \frac{1}{2\mu\tau^2}|v|v \quad (1.22)$$

Hvor μ her er en variabel som vi skal komme tilbake til. Ligningen over kan ses i sammenheng med antakelse (iii), og kan relateres til en kombinert Borda-Carnot ligning for trykkendringen

ved plutselig innsnevring og plutselig ekspansjon av en kanal (Massey & Ward-Smith (1998)). En ekvivalent trykkforskjell over hele platas høyde blir:

$$\Delta p = \frac{(1 - \tau)h}{h} \Delta P \quad (1.23)$$

$$= \frac{1 - \tau}{2\mu\tau^2} |v|v \quad (1.24)$$

Dersom vi antar at vår geometri består av uendelig mange slike kanaler kan vi generalisere uttrykket over til:

$$\Delta p = \frac{1 - \tau}{2\mu\tau^2} |V_n|V_n \quad (1.25)$$

Hvor $V_n = (\mathbf{V}_{\mathbf{v},\mathbf{h}} - \mathbf{V}_{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{n}$, der $\mathbf{V}_{\mathbf{v},\mathbf{h}}$ er væskens hastighet på venstre\høyre side av veggen. Fra konservering av masse følger at $\mathbf{V}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}_{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{n}$. Når åpningene er antatt uendelig små kan vi anta at effekten av virvelavløsning er neglisjerbar umiddelbart utenfor plata. Vi kan dermed bruke potensialteori for å beskrive den ytre bevegelsen og, som vi senere skal se, relatere 1.25 til Eulers trykklikning. Legg merke til at V_n nå er hastigheten på begge sider av, og umiddelbart utenfor veggen, og dermed kan tolkes som hastigheten til gjennomstrømningen. Viktig å nevne er også at 1.25 gir opphav til globale treghetseffekter, som i motsetning til de lokale, er forskjellige fra null.

Massetransport gjennom porøse vegger i et uendelig eller delvis uendelig fluid er behandlet av flere forfattere, se for eksempel Klebert (2013) for noen. Alle bruker imidlertid en relasjon mellom trykkfallet og hastigheten på formen:

$$\Delta p = \rho K(\tau, Re, \beta) \frac{1}{2} V_v^2 \quad (1.26)$$

Hvor K bestemmes ut ifra τ , Reynolds-tallet (Re) og geometrien (β) til åpningene. Lar man istedenfor μ bestemmes ut ifra disse tre variablene, kan man, som poengtert av Molin, alltid skrive $K = \frac{1-\tau}{\mu\tau^2}$. I denne oppgaven tar vi sikte på å studere et utvalg grunnleggende oppførsler for blant annet varierende τ . Da μ er forventet å ligge i regionen $[0.3, 1]$ (Molin, 2011), An & Faltinsen (2012)), antas det her at å fikse denne variabelen ikke vil hindre oss i å finne en god tilnærming for det vi søker. Så lenge ikke annet nevnes, vil derfor $\mu = 0.5$ brukes i kommende utregninger.

1.3 Linearisering i tidsrommet

I seksjonen over ble en trykkdifferansen på veggen relatert til en kvadratisk funksjon av hastigheten, som vi kan skrive som:

$$g(y, t) = |V_n(y, t)|V_n(y, t) \quad (1.27)$$

Man ser fort at g gir en ikke-lineær tidsavhengighet. Det er ønskelig å linearisere denne til ledende orden, for senere å kunne studere problemer i frekvensrommet alene.

Siden vi antar en lik tidsavhengighet for alle hastigheter, søker vi V_n på formen:

$$V_n(y, t) = \Re_j u_0(y) + \Re_j u_1(y) e^{j\omega t} \quad (1.28)$$

u_0 betegner en konstant hastighet, mens u_1 beskriver den oskilleende hastigheten. Det siste leddet kan omskrives til:

$$\Re_j u_1 e^{j\omega t} = r(y) \cos(\omega t + \theta) \quad (1.29)$$

hvor $r = |u_1|$ og $\theta = \arctan \frac{a}{b}$ for $u_1 = a(y) + jb(y)$. Dersom vi innfører variabelen $\hat{t} = \omega t + \theta$ kan vi skrive:

$$g(y, \hat{t}) = |\Re_j u_0 + r \cos(\hat{t})| (\Re_j u_0 + r \cos(\hat{t})) \quad (1.30)$$

For å tilnærme g til ledende orden kan en fourierutvikling anvendes.

1.3.1 Fourierutvikling

Vi uttrykker en fourierrekke som:

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \quad (1.31)$$

Ved hjelp av de tre første leddene i rekken over ønsker vi å tilnærme en funksjon g , gitt ved:

$$g(x) = F(x)f(x) \quad (1.32)$$

$$\sim \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x \quad (1.33)$$

hvor $F(x)$ og $f(x)$ er to funksjoner beskrevet som fourierrekker, henholdsvis ved konstantene A_n, B_n og a_n, b_n . Vi har da at (Tolstov (1976)):

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)F(x) dx = \frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n A_n + b_n B_n) \quad (1.34)$$

$$\alpha_1 = \frac{a_0 A_1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [a_m (A_{m+1} + A_{m-1}) + b_m (B_{m+1} + B_{m-1})] \quad (1.35)$$

$$\beta_1 = \frac{b_0 B_1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [a_m (B_{m+1} + B_{m-1}) - b_m (A_{m+1} + A_{m-1})] \quad (1.36)$$

hvor $A_{-m} = A_m$ og $B_{-m} = B_m$.

1.3.2 Periodisk funksjon uten konstantledd

Vi ser først på tilfellet hvor $F(x) = |\cos x|$ og $f(x) = \cos x$. Vi observerer at både F og f er jevne funksjoner. Dette innebærer at de respektive fourierrekke bare inneholder cosinus-ledd, følgelig gjelder dette også for fourierrekka til funksjonen g . En konsekvens av dette er at det holder å integrere over intervallet $[0, \pi]$ for å finne fourierkoeffisientene, og at alle B_n og b_n er lik null. Først ser vi direkte at:

$$a_0 = 0 \quad (1.37)$$

$$a_1 = 1 \quad (1.38)$$

mens øvrige $a_n = 0$. Av (1.36) blir $\alpha_0 = 0$ og $a_n = 0$ for $n > 1$. Nå gjenstår bare å finne A_0 og A_2 . Funksjonen F kan vi skrive som:

$$F(x) = \begin{cases} \cos x & \text{for } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\cos x & \text{for } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} \quad (1.39)$$

Integrasjonen må derfor splittes opp i to intervaller. Under blir dette vist for utregningen av A_0 , men utelatt for A_1 da inndelingen er identisk:

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) dx \quad (1.40)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx \right] \quad (1.41)$$

$$= \frac{4}{\pi} \quad (1.42)$$

$$(1.43)$$

$$A_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \cos(2x) dx \quad (1.44)$$

$$= -\frac{4}{3\pi} \quad (1.45)$$

Dette gir:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} [a_0 A_1 + a_1 (A_2 + A_0)] \quad (1.46)$$

$$= \frac{8}{3\pi} \quad (1.47)$$

Og dermed har vi at:

$$g(x) \sim \frac{8}{3\pi} \cos x \quad (1.48)$$

1.3.3 Periodisk funksjon med konstantledd

Vi ønsker nå å studere tilfellet $g(x) = F(x)f(x)$, hvor $F(x) = |a+b \cos x|$ og $f(x) = (a+b \cos x)$ og der b er et positivt tall. Argumentet om jevne funksjoner holder også her. I enkleste tilfelle er $|a| \geq b$. Da vil F ha samme fortegn over hele perioden og vi kan g direkte som:

$$g(x) = \pm(a + b \cos x)^2 \quad (1.49)$$

$$= \pm \left(a^2 + \frac{b^2}{2} + 2ab \cos(x) + \frac{b^2}{2} \cos(2x) \right) \quad (1.50)$$

Hvor $+$ må brukes når $a > 0$ og $-$ når $a < 0$.

Hvis $|a| < |b|$ blir oppgaven noe mer omstendelig, da $F(x)$ vil anta både positive og negative verdier. Vi observerer at $f(x) \geq 0$ når $x \leq c = \cos^{-1}(-\frac{a}{b})$ og at $F(x) < 0$ for $x > c$. Vi innser dermed at:

$$F(x) = \begin{cases} (a + b \cos x) & \text{for } x \in [0, c] \\ -(a + b \cos x) & \text{for } x \in [c, \pi] \end{cases} \quad (1.51)$$

Fourierkoeffisientene til $F(x)$ kan nå finnes ved integrasjon. Som i forrige seksjon viser vi inndelingen av intervallet i første utregning, men utelater den i de påfølgende:

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^c (a + b \cos x) dx + \int_c^{\pi} (-b \cos x - a) dx \right] \quad (1.52)$$

$$= \frac{2}{\pi} ([ax + b \sin x]_0^c + [-ax - \sin x]_c^{\pi}) \quad (1.53)$$

$$= \frac{2}{\pi} (2(ac + b \sin(c)) - a\pi) \quad (1.54)$$

$$(1.55)$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \cos x dx \quad (1.56)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(2a \sin c + bc + b \sin c \cos c - \frac{\pi b}{2} \right) \quad (1.57)$$

$$(1.58)$$

$$A_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \cos(2x) dx \quad (1.59)$$

$$= \frac{2}{3\pi} (3b \sin c + 3a \sin(2c) + b \sin(3c)) \quad (1.60)$$

f er gitt ved:

$$a_0 = 2a \quad (1.61)$$

$$a_1 = b \quad (1.62)$$

Koeffisientene til $g(x)$ blir nå:

$$\alpha_0 = \frac{a_0 A_0}{2} + a_1 A_1 \quad (1.63)$$

$$= \frac{a}{\pi} (2(ac + b \sin(c)) - a\pi) + \frac{2b}{\pi} \left(2a \sin(c) + bc + b \sin(c) \cos(c) - \frac{\pi b}{2} \right) \quad (1.64)$$

$$\alpha_1 = \frac{a_0 A_1}{2} + \frac{a_1 (A_2 + A_0)}{2} \quad (1.65)$$

$$= \frac{2a \left(2a \sin c + bc + b \sin c \cos c - \frac{\pi b}{2} \right)}{\pi} + \frac{b \left(\frac{2}{3\pi} (3b \sin c + 3a \sin(2c) + b \sin(3c)) + \frac{2}{\pi} (2(ac + b \sin(c)) - a\pi) \right)}{2} \quad (1.66)$$

$$= \frac{4a^2 \sin c}{\pi} + \frac{2ab \left(c + \sin c \cos c - \frac{\pi}{2} \right)}{\pi} + \frac{ab(2c - \pi + \sin(2c))}{\pi} + \frac{b^2(9 \sin(c) + \sin(3c))}{3\pi} \quad (1.67)$$

1.3.4 Fourierrekken på kompleks form

Hastighetspotensialet blir uttrykt ved hjelp av en kompleks tidsavhengighet $e^{i\omega t}$, det er derfor ønskelig å uttrykke også fourierrekken ved denne størrelsen.

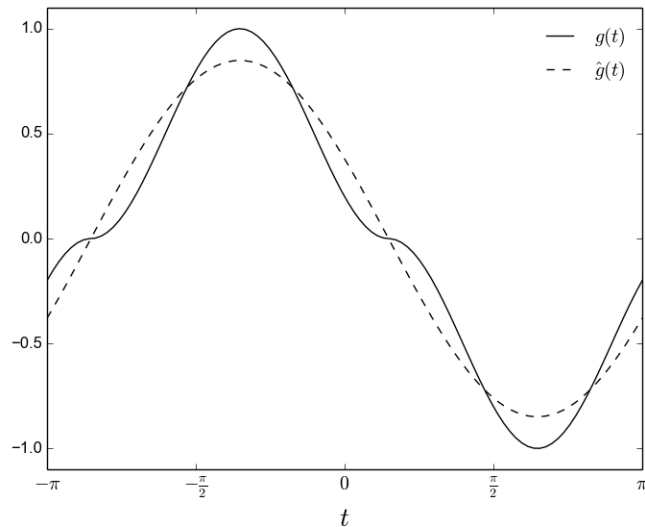
For $g(y, \hat{t})$ definert innledningsvis av seksjonen, med u_0 satt til null, kan vi skrive:

$$g(y, \hat{t}) = r^2 \frac{8}{3\pi} \cos \hat{t}$$

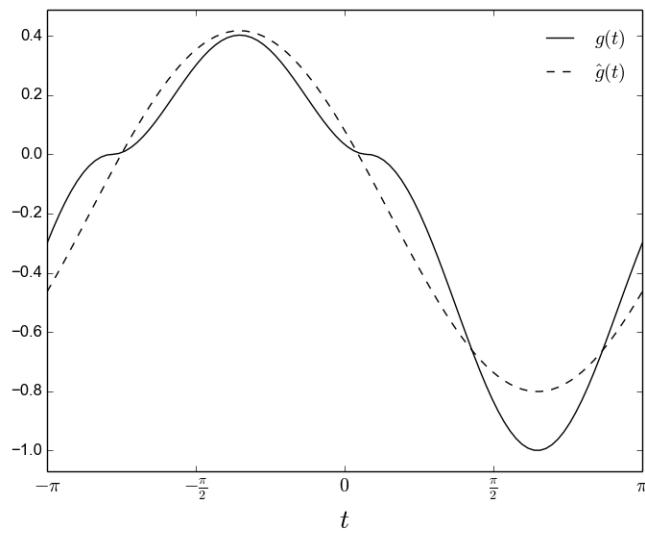
Av diskusjonen innledningsvis i denne seksjonen, innser vi at:

$$g(y, t) = r \frac{8}{3\pi} \Re_j u_1 e^{i\omega t}$$

I figur 1.1 vises to eksempler hvor en funksjon $g(t) = |\Re_j f(t)| \Re_j f(t)$ tilnærmes til første orden med funksjonen $\hat{g}(t)$, ved hjelp av resultatene i delseksjonene over.



(a)



(b)

Figur 1.1: g og \hat{g} over en periode for (a) $f = (1 + 2j) e^{j\omega t}$ og (b) $f = -\frac{1}{2} (1 + 2j) e^{j\omega t}$.

Kapittel 2

Egenfunksjon-utvikling

Randverdiproblemet fra seksjon 1.1.1 og 1.1.3 kan løses ved å bruke generelle løsninger av Laplace-ligningen. En metode vi her skal se nærmere på er egenfunksjon-metoden. Vi skal først finne den generelle løsningen for bølger uten strøm, før vi betrakter publikasjoner hvor en slik løsning blir brukt. Siden begge forfatterene benytter seg av et koordinatsystem hvor bunnen er i punktet $y = 0$ og den uforstyrrede overflaten i $y = h$, vil denne konvensjonen brukes i dette kapitlet. Dette innebærer at alle betingelser på overflaten fra kapittel 1 her gjelder for $y = h$, og alle på bunnen for $y = 0$

2.1 Generell løsning

Vi skriver potensialet vi søker som:

$$\Phi = \Re_j \phi(x, y) e^{j\omega t}$$

Vi innser at det tidsuavhengige potensialet ϕ også må oppfylle Laplace-ligningen, og vi antar at en løsning kan finnes ved separasjon av variable.. Ansatzten $\phi = X(x)Y(y)$ gir:

$$X_{xx}Y + Y_{yy}X = 0 \quad (2.1)$$

$$-\frac{X_{xx}}{X} = \frac{Y_{yy}}{Y} = k^2 \quad (2.2)$$

hvor k er en konstant. Vi finner X og Y som løsninger av differensialligningen

$$X_{xx} + k^2 X = 0 \quad (2.3)$$

$$X = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (2.4)$$

og

$$Y_{yy} - k^2 Y = 0 \quad (2.5)$$

$$Y = Ce^{ky} + De^{-ky} \quad (2.6)$$

Fra kravet på bunnen får vi:

$$X(x)(kC - kD) e^{i\omega t} = 0 \quad (2.7)$$

Som gir at $C = D$ og:

$$Y = Ce^{ky} + Ce^{-ky} \quad (2.8)$$

$$= 2C \cosh k(y + h) \quad (2.9)$$

Fra overflatebestingelsen finner vi disperasjonsrelasjonen:

$$\omega^2 \cosh kh + gk \sinh kh = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\omega^2}{g} = k \tanh kh \quad (2.11)$$

Det kan vises (Mei (1983)) at ligning (2.11) har ett reelt løsningspar $\pm k_0$ og uendelig mange imaginære løsningspar $\pm ik_n$ for $n \in [1, 2, \dots, \infty]$. Den generelle løsningen for ϕ blir dermed:

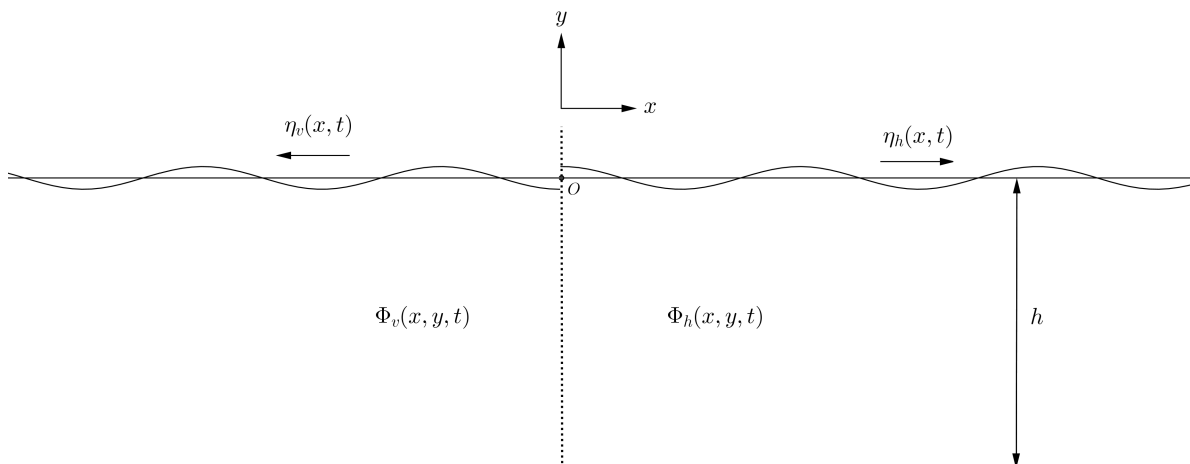
$$\phi(x, y) = \left(A_0 e^{ik_0 x} + B_0 e^{-ik_0 x} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{k_n x} + B_n e^{-k_n x} \right) \cos k_n y \quad (2.12)$$

hvor A_n og B_n for $n \in [0, 1, \dots, \infty]$ er ukjente konstanter.

2.2 Chwangs porøse bølgemaker

2.2.1 Problemet

Med hjelp av lineær potensialteori betrakter Chwang (1983) en tynn, porøs plate som utfører en periodisk svingebevegelse i et fluid med en fri overflate. Plata strekker seg fra bunnen og over overflaten (se figur 2.1), og genererer bølger som vandrer i horisontalretningen.



Figur 2.1: Chwangs bølgemaker

2.2.2 Løsningsmetode

På grunn av proplemets antisymmetri betrakter Chwang bare siden hvor $x \geq 0$, hvor den generelle løsningen gitt i (2.12) blir brukt for å uttrykke et potensial Φ . Sentralt i analysen står hastigheten til plata $V_p(x, t)$, trykket $p(x, y, t)$ og gjennomstrøms hastigheten $V_n(y, t)$ normalt på veggen. For å beskrive denne hastigheten anvendes den lineære trykkrelasjonen vist i seksjon 1.2.1 på veggen:

$$V_n = \frac{b}{\mu} [p_+ - p_-] \quad \text{for } x = 0 \quad (2.13)$$

hvor p_+ og p_- betegner trykket på henholdsvis høyre og venstre av veggen. Fluidets hastighet på veggen beskrives som platas hastighet, fratrukt gjennomstrøms hastigheten:

$$\Phi_x = V_p - V_n \quad \text{for } x = 0 \quad (2.14)$$

Videre kan man fra antisymmetri skrive:

$$V_n = \frac{2b}{\mu} p_+ \quad \text{for } x = 0 \quad (2.15)$$

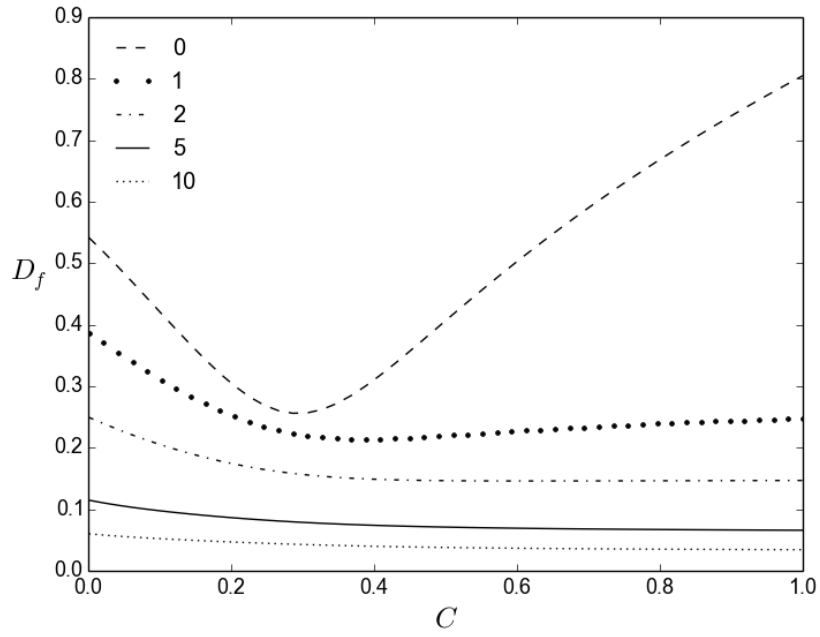
Fra de to ligningene over, kombinert med Eulers trykklikning, får man et lineært ligningssett for V_p , P og V_r . Analytiske løsninger for koeffisientene til Φ kan nå finnes ved å utnytte ortogonalitetsegenskapene til egenfunksjonene. En grundig gjengivelse av Chwangs metode er gjengitt i appendiks A.

2.2.3 Resultater

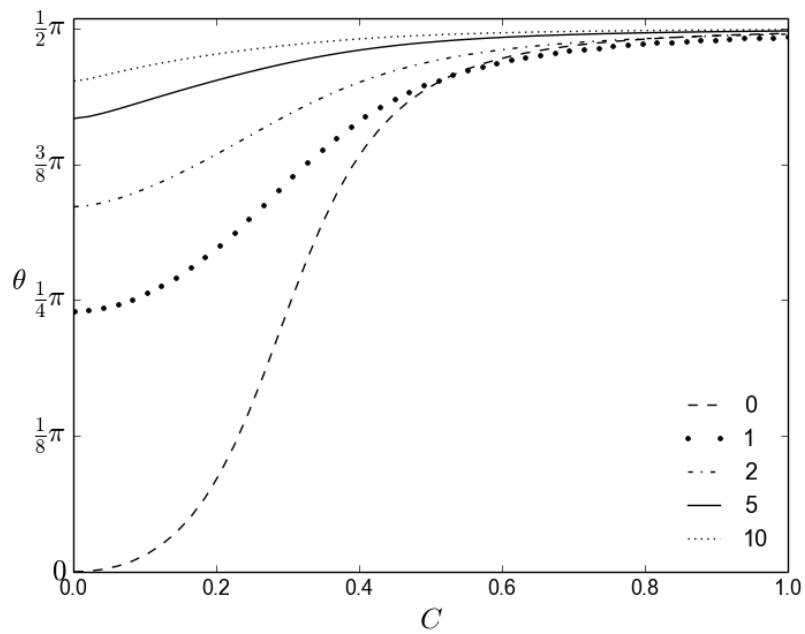
Vi vil nå se på et par resultater fra løsningen. Av størst interesse er koeffisientene D_f og θ_f samt E_0 . D_f er amplituden til den totale kraften som virker på veggen, θ_f er dens faseforskyvning i forhold til svingebevegelsen, mens E_0 er amplituden til de utgående bølgerne i fjernfeltet. Alle størrelser vises som en funksjon av $C = \frac{g}{\omega^2 h}$, som først ble innført av Chwang (1981) som et forholdstall mellom gravitasjons- og treghetseffektene.

I figur 2.2 er D_f skissert som en funksjon av C for forskjellige verdier av G , som kan tolkes som et Reynoldstall for hastigheten på veggen. Jo større G , jo mer vann vandrer gjennom bølgermakeren. Vi ser at en ugjennomtrengelig bølgermaker for alle C vil oppleve en større kraft enn de porøse. Når C går fra ca 0.3 til 1 øker D_f betraktelig for $G = 0$, mens for andre verdier av G vil kraften såvidt øke, eller faktisk avta.

Figur 2.3 viser den totale kraftens faseforskyvning når C endres. For alle $G \neq 0$ er kraften faseforskjøvet allerede for $C = 0$, mens fasen for alle G går mot $\frac{\pi}{2}$ når C går mot 1.



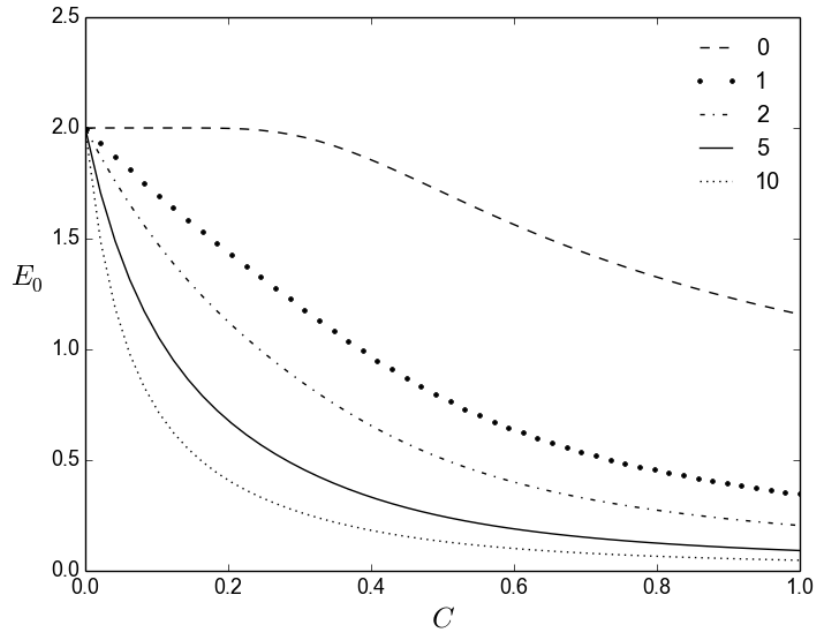
Figur 2.2: Figur 1: D_f vs C



Figur 2.3: Den totale kraftens faseforskyvning θ_f vs bølgeeffekt-parameteren C

Til slutt vises i figur 2.4 fjernfeltsamplitudene som en funksjon av C . For alle grader av

porøsitet genererer bølgemakeren en bølge med amplitude 2 når $C \rightarrow 0$, mens det for økende verdier av C , som ventet, er bølgemakere med minst porøsitet som lager de høyeste bølgene.



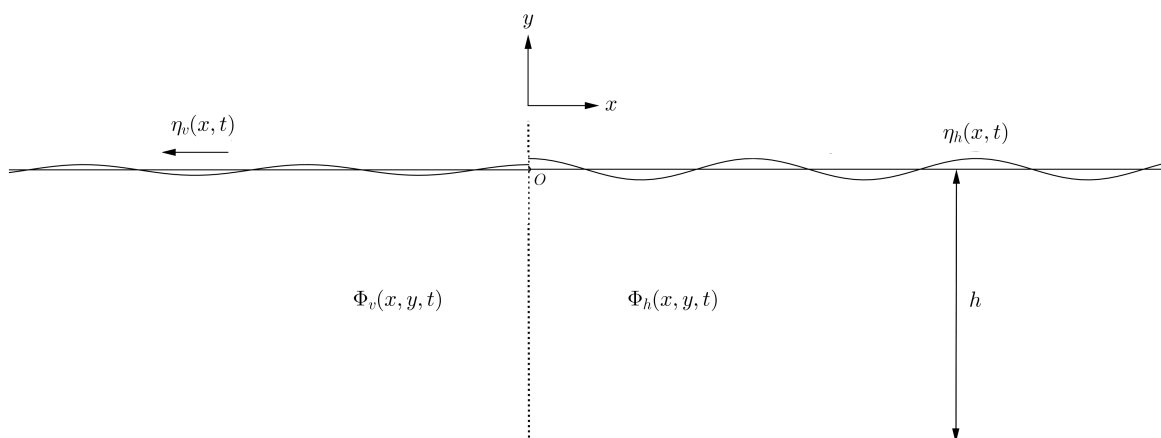
Figur 2.4: Figur 1: Steady state

2.3 Bølge mot vegg

Et annet problem løst med egengfunksjoner er presentert av Molin&Fourest (M&F). De ser på tilfellet hvor en innkommende bølge kommer inn mot én eller flere porøse vegger. Til forskjell fra Chwang, bruker de ligning (1.25) for å beskrive trykkforskjellen over veggene. Vi skal her gjengi løsningen for situasjonen hvor bare én vegg er tilstede.

2.3.1 Problemet

En bølge med amplitude ξ og hevning η_1 kommer inn fra høyre mot en vegg med spaltet geometri, som strekker seg fra bunnen og opp til den uforstyrrede overflaten. Noe av bølgen vil reflekteres, men på grunn av at veggene er lekk vil også en transmittert bølge dukke opp på le-siden. Etter en tid er det antatt at systemet når en stabil tilstand. Som vist i figur 2.5 får vi da på høyresiden en bølge med hevning η_h – resulterende av den innkommende og den reflekterte bølgen – mens vi på venstre side får en (fra veggene) utgående bølge med hevning η_v .



Figur 2.5: Bølge mot vegg

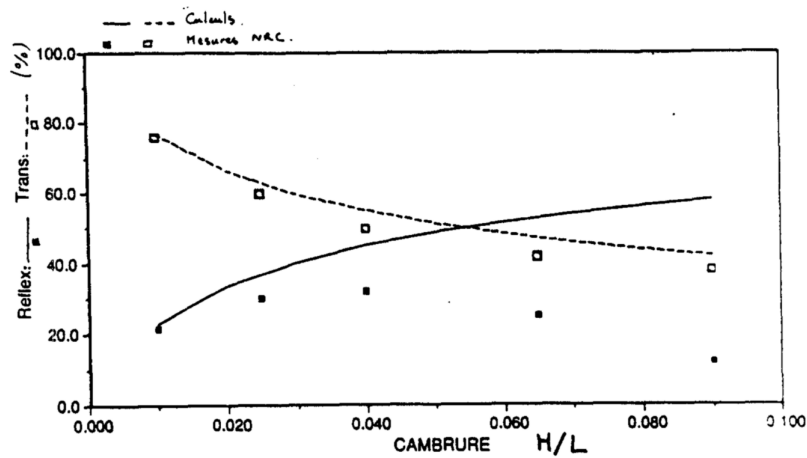
2.3.2 Løsningsmetode

Problemet angripes ved å dele høyre og venstre side inn i hvert sitt domene, med den generelle løsningen fra (2.12). Fra konservering av masse og trykkrelasjonen på veggen dannes et ikke-lineært ligningssett som kan løses numerisk ved iterasjon. En gjennomgang av metoden er gitt i appendiks B.

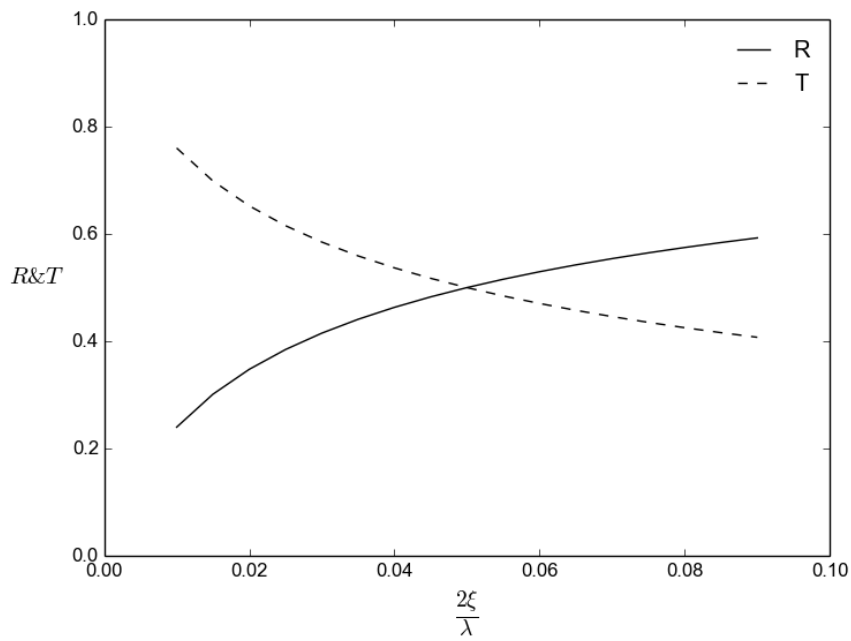
2.3.3 Resultater

For innkommende bølger med forskjellige bølgebrattheter sammenligner M&F analytiske resultater med eksperimentelle. Alle bølgene har perioden $T_0 = 1.52\text{s}$, vanndybden er $h = 1\text{m}$, porositeten blir beskrevet ved $\tau = 0.1$ og $\mu = 1$. Bølgebrattheten er definert som $\frac{H}{\lambda}$, hvor $H = 2\xi$. Den reflekterte bølgen og den transmitterte bølgen uttrykkes gjennom forholdet mellom amplituden og den innkommende bølgens amplitude.

I figur 2.6 er resultatet presentert av M&F, vist sammen med en implementering av løsningen fra appendiks B. Vi ser vi at det er en god overensstemmelse mellom teori og praksis for bølgebrattheter rundt 0.02, mens store avvik inntreer når $\frac{H}{\lambda} > 0.04$. Se diskusjonen avslutningsvis for mulige årsaker til dette.



(a)



(b)

Figur 2.6: Refleksjons- og transmisjonskoeffisient R og T vs bølgebratthet. (a) Figur 2 fra M&F

. (b) Løsningen fra appendiks B implementert i python.

Kapittel 3

Vertikal plate med endelig lengde i uendelig dypt fluid

I forrige seksjon så vi på tilfeller hvor geometrien strakte seg fra overflaten til en endelig dybde. Vi ønsker nå å beskrive et legeme av mer generell utstrekning. Dette kan gjøres ved å la plata være representert av en kontinuerlig fordeling av en Green-funksjon, og på den måten oppfylle randbetingelsene fra seksjon kapittel 1. For å illustrere hvorfor nettopp en virvelfordeling vil bli brukt, starter vi med å se på det enkleste tilfellet hvor legemet er omgitt av et uendelig fluid, før vi deretter ser nærmere på tilfeller hvor fluidet har en fri overflate. For alle tilfeller skal vi anta at sirkulasjonen om plata er null.

Både her og i neste kapittel vil mye handle om funksjoners verdier i grensen på plata. Vi vil da bruke a^\pm som en indikasjon på at en verdi a nærmes fra positiv eller negativ side av koordinat-aksen. En funksjon ψ evaluert i en slik grense vil skrives som ψ^\pm .

3.1 Plate i uendelig fluid

Vi ønsker å studere en vertikal plate med lengde L som beveger seg i horisontal retning. For enkelhetsskyld skal vi her velge $L = 2$, men analysen kan generaliseres til å gjelde for alle valg av L . Vi plasserer origo slik at plata er å finne i punktene (x, y) , hvor $x = 0$ og $y \in [-1, 1]$. Vi antar at legemet hele tiden er omsluttet av fluidet, herav følger det at væskens horisontale hastighet må være den samme på begge sider. Vi lar ϕ være gitt som:

$$\phi = \Re_i f(z) \tag{3.1}$$

hvor

$$f(z) = \int_{-1}^1 [q(b) - i\gamma(b)] G(z, c) db \tag{3.2}$$

og

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln(z - c) \tag{3.3}$$

der $i = \sqrt{-1}$, $z = x + iy$, $z = a + ib$ og Green-funksjonen G er analytisk for både z og c . q og γ er reelle funksjoner og vi innser at qG representerer en kilde og $i\gamma G$ en virvel i punktet $c = a + ib$. Fra relasjonen $\frac{df}{dz} = u + iv$ finner vi det komplekse hastighetsfeltet:

$$u - iv = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 [q(c) - i\gamma(c)] \frac{1}{(z - c)} db \quad (3.4)$$

Når $z \rightarrow 0^\pm + iy$ kan vi bruke Plemelj's formel (Henrici (1986))

$$u_\pm - iv_\pm = -\frac{1}{2\pi} PV \int_{-1}^1 \frac{iq(b) + \gamma(b)}{(b - y)} db \pm \frac{1}{2} i[iq(y) + \gamma(y)] \quad (3.5)$$

hvor PV indikerer at integralet er et prinspalverdi-integral – integranden evalueres altså bare uendelig nært det singulære punktet. Dette gir følgende hastighetsbidrag fra kildefordelingen:

$$u_\pm^q - iv_\pm^q = -\frac{i}{2\pi} PV \int_{-1}^1 \frac{q(b)}{(b - y)} \pm \frac{1}{2} q(y) \quad (3.6)$$

$$u_\pm^q(y) = \mp \frac{1}{2} q(y) \quad (3.7)$$

$$v_\pm^q(y) = \frac{1}{2\pi} PV \int_{-1}^1 \frac{q(b)}{(b - y)} db \quad (3.8)$$

Og videre for virvelfordelingen:

$$u_\pm^\gamma - iv_\pm^\gamma = -\frac{1}{2\pi} PV \int_{-1}^1 \frac{\gamma(b)}{(b - y)} db \pm \frac{1}{2} i\gamma(y) \quad (3.9)$$

$$u_\pm^\gamma(y) = -\frac{1}{2\pi} PV \int_{-1}^1 \frac{\gamma(b)}{(b - y)} db \quad (3.10)$$

$$v_\pm^\gamma(y) = \mp \frac{1}{2} \gamma(y) \quad (3.11)$$

Siden $u_-^\gamma(y) = u_+^\gamma(y)$ og $u_-^q(y) \neq u_+^q(y)$ innser vi at virvelfordelingen alene er funksjonen som søkes for å beskrive problemet. Kildefordelingen er imidlertid tatt med, siden vi skal bruke denne i vår søken etter γ .

3.1.1 γ -funksjonen

Vi lar u og v være hastighetene gitt av en virvelfordeling lik den vi fant over. Vi går nå frem på lignende vis som Newman, og innfører pseudo-funksjonen:

$$\tilde{u} - i\tilde{v} = (u - iv)(1 + z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

På plata vil $(1 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ være enten et reelt tall eller et rent imaginært tall. siden $v = 0$ langs x -aksen utenfor plata, får vi på den positive siden:

$$\tilde{u} = u_+(1 - y^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } |y| < 1 \quad (3.13)$$

$$\tilde{u} = 0 \quad \text{for } |y| > 1 \quad (3.14)$$

Dette er et problem som kan beskrives av en kildefordeling analog til den vi fant over. Fra (3.7) får vi:

$$\tilde{q} = -2\tilde{u}(y) = -2u_+(y)(1 - y^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.15)$$

Av (3.4) kan hastighetsfeltet, for $x \geq 0$ skrives som:

$$\tilde{u}(z) - i\tilde{v}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_+(b)(1 - b^2)^{\frac{1}{2}}}{(ib - z)} db \quad (3.16)$$

For virvelfordelingen får vi dermed:

$$u - iv = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-1}^1 \frac{u_+(b)(1 - b^2)^{\frac{1}{2}}}{(ib - z)} db \quad (3.17)$$

$$v_+ = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 - y^2)^{\frac{1}{2}}} PV \int_{-1}^1 \frac{u_+(b)(1 - b^2)^{\frac{1}{2}}}{(b - y)} db \quad (3.18)$$

Fra (3.11) og (3.18) har vi nå funnet en partiklærøsning for γ . Ved å legge til homogenløsningen $C/(1 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$ fremkommer en komplett løsning:

$$\gamma(y) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{(1 - y^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ PV \int_{-1}^1 \frac{u(b)(1 - b^2)^{\frac{1}{2}}}{b - y} db + C \right\} \quad (3.19)$$

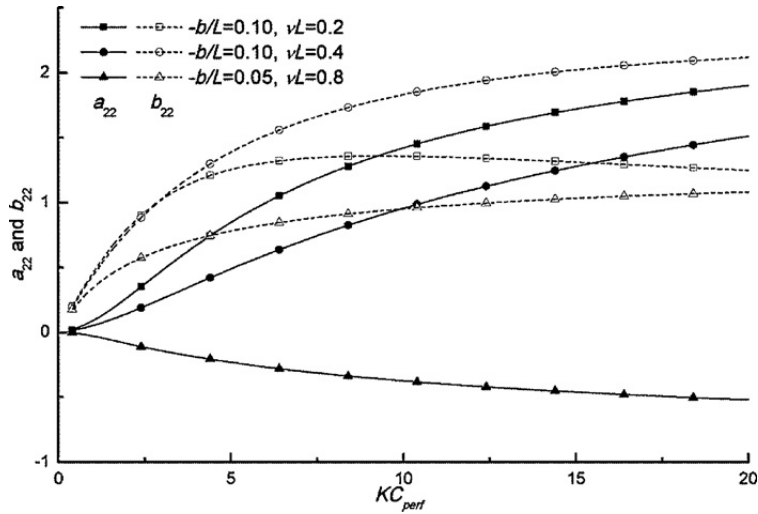
Ved å innføre variablene $y = \cos \theta$, $b = \cos \alpha$ vises det i appendiks C at:

$$\gamma(\theta) = 2 \left(A_0 \cot \theta + A_1 \frac{\cos(2\theta)}{\sin \theta} + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \right) \quad (3.20)$$

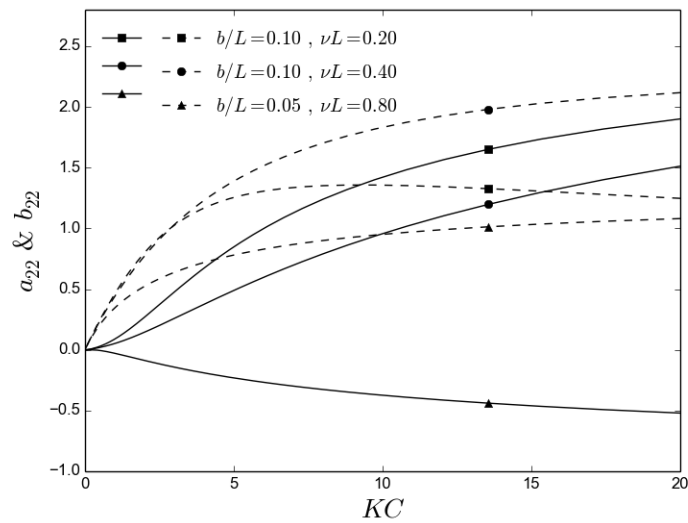
3.2 Horisontal plate i uendelig dypt fluid med fri overflate

An & Faltinsen (2012) (A&F) betrakter en horisontal, tynn plate av endelig utstrekning i et uendelig dypt fluid med en fri overflate. Ved å anvende blant annet den kvadratiske trykkrelasjonene fra seksjon 1.2, tas det høyde for at plata kan være porøs, og dens tilstedeværelse representeres av en Green-funksjon. Vi skal følge samme prosedyre for en vertikal plate. Siden

fremgangsmåtene for en horisontal og vertikal plate er veldig like, utsettes en grundig analyse til neste seksjon, siden det tilfellet ikke tidligere er undersøkt med denne metoden. Løsningen presentert av A&F er imidlertid implementert i python, og en gjengivelse av figur 5 i deres publikasjon er vist i figur 3.1. Definisjonene av a_{22} , b_{22} og KC skal vi også komme tilbake til i neste seksjon.



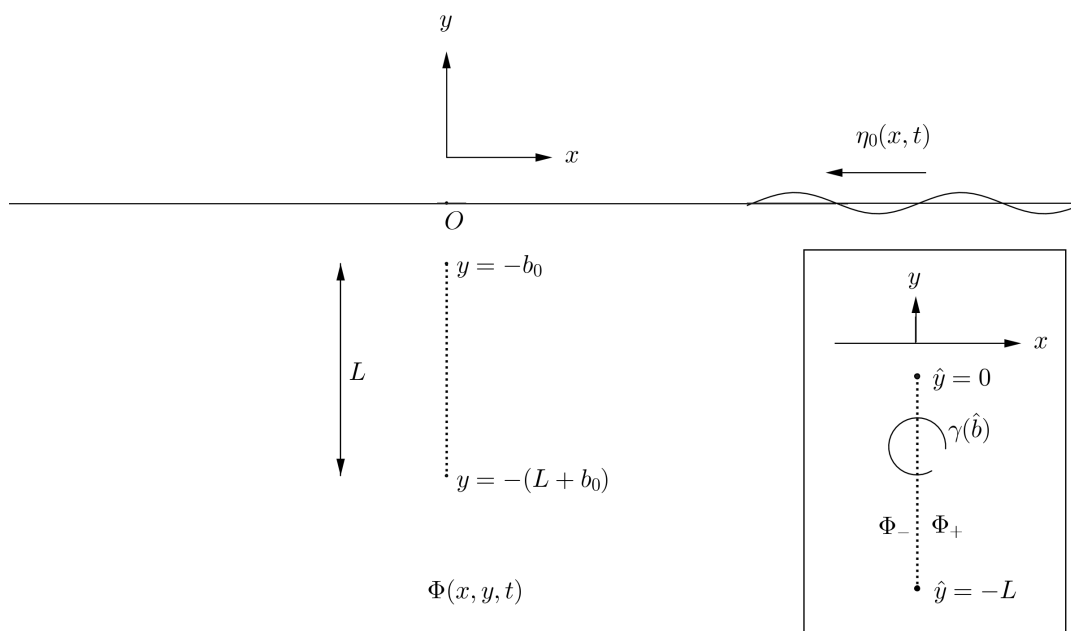
a)



b)

Figur 3.1: Skalert addert masse og dempingskoeffisient vs KC for forskjellige grader av relativ nedsenking og forskjellige bølgetall (skalert). a) Figur 5 fra A&F. b) Løsningen fra A&F implementert i python.

3.3 Vertikal plate i uendelig dypt fluid med fri overflate



Figur 3.2

La oss nå betrakte en tynn, vertikal plate med endelig utstrekning som oskillerer i et uendelig dypt fluid med en fri overflate. Plata kan skjære overflaten eller være nedsunken, og har gjerne spaltet geometri. Origo plasseres på den frie, uforstyrrede, overflaten, høyden b_0 over platas øverste kant. Vi søker et potensial på formen:

$$\phi(x, y, t) = \Re_j \Re_i f(z) e^{i\omega t} \quad (3.21)$$

der i og j betegner det komplekse tallet $\sqrt{-1}$ for henholdsvis rom- og tidsvariabler, og hvor $z = x + iy$. Videre skriver vi:

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) \quad (3.22)$$

hvor f_0 er det kjente potensialet til en innkommende bølge og f_1 representerer potensialet grunnet platas tilstedeværelse. Som nevnt uttrykkes f_1 ved hjelp av en Green-funksjon G :

$$f_1(z) = \int_{-(L+b_0)}^{-b_0} \gamma(b+b_0) G(z, c) db \quad (3.23)$$

γ er fortsatt er en reel funksjon med hensyn på i , men kan godt være kompleks i j -rommet. Som An&Faltinsen anvender vi en Green-funksjon presentert av Wehausen & Laitone (1960)

$$G(z, c) = \left[\frac{1}{2\pi i} \ln(z - c) + \frac{1}{2\pi i} \ln(z - \bar{c}) + \frac{1}{\pi i} PV \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{c})}}{k - \nu} dk + ije^{-i\nu(z-\bar{c})} \right] \quad (3.24)$$

og videre:

$$G_z(z, c) = \left[\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(z - c)} - \frac{1}{2\pi} PV \int_0^\infty \left(\frac{2\nu}{k - \nu} + 1 \right) e^{-ik(z - \bar{c})} dk + j\nu e^{-i\nu(z - \bar{c})} \right] \quad (3.25)$$

Hvor $b < 0$, mens $\nu = \frac{\omega^2}{g}$ gjenkjennes som bølgetallet. Ved dette valget av G er grensebetingelsene fra seksjon 1.1.1 og 1.1.3 oppfylt. Vi identifiserer det første leddet i G som en enhets punktvirvel i et uendelig felt, mens øvrige ledd er knyttet til den frie overflaten og generering av bølger på den.

3.3.1 Hastighetsfeltet

Ved å innføre variabelen $\hat{b} = b + b_0$ kan man skrive:

$$f_1(z) = \int_{-L}^0 \gamma(\hat{b}) G(z, i(\hat{b} - b_0)) d\hat{b} \quad (3.26)$$

Gjennom relasjonen $u - iv = \frac{df}{dz}$ kan vi uttrykke hastighetsfeltet på plata. Vi lar da $z = 0^\mp + iy$, $y \in [-L + b_0, b_0]$. Plemeljs formel gir:

$$u_\pm - iv_\pm = \frac{df_0}{dz} + PV \int_{-L}^0 \gamma(\hat{b}) \frac{\partial G(z, i(\hat{b} - b_0))}{\partial z} d\hat{b} \pm \frac{i}{2} \gamma(y + b_0) \quad (3.27)$$

Vi begynner med å se på hastigheten i x -retningen. Det første leddet i G_z løser vi ved også å innføre variabelen $\hat{y} = y + b_0$. Vi kan da skrive:

$$\Re_i \frac{1}{2\pi i} PV \int_{-L}^0 \frac{\gamma(\hat{b})}{i(y - b)} d\hat{b} = \Re_i \frac{1}{2\pi i} PV \int_{-L}^0 \frac{\gamma(\hat{b})}{i(\hat{y} - \hat{b})} d\hat{b} \quad (3.28)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} PV \int_{-L}^0 \frac{\gamma(\hat{b})}{(\hat{y} - \hat{b})} d\hat{b} \quad (3.29)$$

Vi foretar så følgende substitusjon:

$$\hat{b} = -\frac{L}{2}(1 - \cos \alpha) \quad (3.30a)$$

$$d\hat{b} = -\frac{L}{2} \sin \alpha \quad (3.30b)$$

$$\hat{y} = -\frac{L}{2}(1 - \cos \theta) \quad (3.30c)$$

Det kan vises at vi også med en slik substitusjon (Glauert (1983)) kan skrive $\gamma(\hat{b}) = \gamma(\alpha)$, hvor:

$$\gamma(\alpha) = 2 \left(A_0 \cot \alpha + A_1 \frac{\cos(2\alpha)}{\sin \alpha} + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin(n\alpha) \right) \quad (3.31)$$

Og vi får dermed:

$$-\frac{1}{2\pi}PV \int_{-L}^0 \frac{\gamma(\hat{b})}{(\hat{y} - \hat{b})} d\hat{b} = \frac{1}{2\pi}PV \int_0^\pi \frac{\gamma(\alpha) \sin \alpha}{\cos \theta - \cos \alpha} d\alpha \quad (3.32)$$

$$= A_0 + 2A_1 - \sum_{n=2}^{\infty} \cos n\theta \quad (3.33)$$

Glauertintegralene fra (C.7) og (C.8) er brukt for å komme frem til resultatet over.

For ledd nummer to i (3.25) omskriver vi brøkuttrykket til:

$$2\nu PV \int_0^\infty \frac{1}{k - \nu} e^{k(y+b)} dk = 2\nu e^{\nu(y+b)}(y+b)PV \int_0^\infty \frac{e^{k(y+b) - \nu(y+b)}}{(k - \nu)(y+b)} dk \quad (3.34)$$

for deretter å substituere:

$$w = -[k(y+b) - \nu(y+b)] \quad (3.35a)$$

$$dw = -(y+b) \quad (3.35b)$$

$$w_0 = \nu(y+b) \quad (3.35c)$$

$$w_\infty = \infty \quad (3.35d)$$

Dette er et integral som kan uttrykkes ved eksponensialfunksjonen $Ei(x)$ (Abramowitz. & Stegun (1964)):

$$2\nu e^{w_0} PV \int_{w_0}^\infty \frac{e^{-w}}{w} dw = -2\nu e^{w_0} Ei(-w_0) \quad (3.36)$$

Videre har vi at:

$$\int_0^\infty e^{k(y+b)} dk = \left[\frac{1}{y+b} e^{k(y+b)} \right]_0^\infty \quad (3.37)$$

$$= -\frac{1}{y+b} \quad (3.38)$$

Både ligning (3.35d) og (3.38) følger av at $y+b < 0$. Vi har nå:

$$u_{\mp} = \Re_i f_z \quad (3.39)$$

$$= \Re_i \frac{df_0}{dz} + A_0 + 2A_1 \cos \theta - \sum_{n=2}^{\infty} A_n \cos n\theta$$

$$- PV \int_{-L}^0 \left[-\frac{\gamma(\hat{b})}{2\pi} 2\nu e^{w_0} \left(Ei(-w_0) + \frac{1}{y + \hat{b} - b_0} \right) + -j\nu e^{-i\nu(y+\hat{b}-b_0)} \right] d\hat{b} \quad (3.40)$$

$$(3.41)$$

Når det kommer til vertikalhastigheten er vi mest interessert i å finne differansen mellom potensialet på hver side av plata. På lignende vis som A&F kan vi skrive:

$$\phi_{\pm} = \int_{-(L+b_0)}^y v_{\pm} dy' \quad (3.42)$$

Siden bare siste ledd i (3.27) gir opphav til ulikheter mellom v_- og v_+ får vi:

$$\phi_-(0^-, y) - \phi_+(0^+, y) = \int_{-(L+b_0)}^y \frac{1}{2}\gamma(y' + b_0) dy' - \int_{-(L+b_0)}^{\hat{y}} -\frac{1}{2}\gamma(y' + b_0) dy' \quad (3.43)$$

$$= \int_{-(L+b_0)}^y \gamma(y' + b_0) dy' \quad (3.44)$$

$$= \int_{-L}^{\hat{y}} \gamma(y') dy' \quad (3.45)$$

Vi bruker nå variabelskiftet fra (3.30c) for å forenkle integrasjonen av γ :

$$\int \gamma(\hat{y}) d\hat{y} = -\frac{L}{2} \int \gamma(\theta) \sin \theta d\theta \quad \text{for } \hat{y} \in [-L, 0] \quad (3.46)$$

For henholdsvis nullte, første og nte ledd får vi:

$$-A_0 L \int \cot \theta \sin \theta d\theta = -L A_0 \sin \theta \quad (3.47)$$

$$-A_1 L \int \frac{\cos(2\theta)}{\sin \theta} \sin \theta d\theta = -\frac{L A_1}{2} \sin(2\theta) \quad (3.48)$$

$$-L \int \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \sin \theta d\theta = -L \sum_{n=2}^{\infty} A_n \frac{\sin \theta \sin(n\theta) - n \sin \theta \cos(n\theta)}{(n^2 - 1)} \quad (3.49)$$

Siden alle integralene er 0 for $\theta = \pi$ (svarende til $\hat{y} = -L$), er konstantledd utelatt fra resultatene over. Spranget i ϕ på tvers av plata blir dermed:

$$\phi_-(0, \theta) - \phi_+(0, \theta) = -L \left[A_0 \sin \theta + \frac{A_1}{2} \sin(2\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \frac{\sin \theta \sin(n\theta) - n \sin \theta \cos(n\theta)}{(n^2 - 1)} \right] \quad (3.50)$$

3.3.2 Kravet på veggen

Vi tenker oss nå at plata kan svinge med en hastighet V_p gitt som:

$$V_p = \Re_j v_p e^{j\omega t} \quad (3.51)$$

Dersom plata er solid er det ingen massetransport gjennom veggen og det må derfor kreves at:

$$u = v_p \quad (3.52)$$

Dersom vi skriver det horisontale hastighetsbidraget forbundet med f_0 og f_1 respektivt som u_0 og u_1 , får vi:

$$u_1 = v_p - u_0 \quad (3.53)$$

Er plata derimot lekk kan gjennomstrøms hastigheten beskrives ved relasjonen gitt i (1.25). Trykkforskjellen på veggen Δp kan også uttrykkes gjennom Eulers (lineariserte) trykkligning:

$$\Delta p = -\rho \Re_j i \omega (\phi_- - \phi_+) e^{j\omega t} \quad (3.54)$$

Ved å linearisere den kvadratiske trykkrelasjonen i tidsrommet, for deretter å kombinere å kombinere den med (3.54), får vi:

$$\frac{\Delta \phi}{L} = -iK (u - v_p) |u - v_p| \quad (3.55)$$

hvor $\Delta \phi = \phi^- - \phi^+$ og $K = \frac{4}{3} \frac{(1-\tau)}{\omega L \mu \tau^2}$. For små τ foreslår Molin (1992.) den inverse ligningen:

$$u_1 = i \frac{\frac{\Delta \phi}{L}}{\left(K \left|\frac{\Delta \phi}{L}\right|\right)^{\frac{1}{2}}} + v_p - u_0 \quad (3.56)$$

Hvordan disse ligningene kan løses numerisk er forklart i appendiks E.

3.3.3 Kraften på plata

Den horisontale kraften på plata F_2 finner vi ved å integrere trykkforskjellen over platas lengde:

$$F_2 = \Re_j - \left\{ j\rho\omega \frac{L^2}{2} \int_0^\pi \left[A_0 \sin \theta + \frac{A_1}{2} \sin(2\theta) + \sum_{n=2}^\infty A_n \frac{\sin \theta \sin(n\theta) - n \sin \theta \cos(n\theta)}{(n^2 - 1)} \right] \sin(\theta) d\theta \right\} \quad (3.57)$$

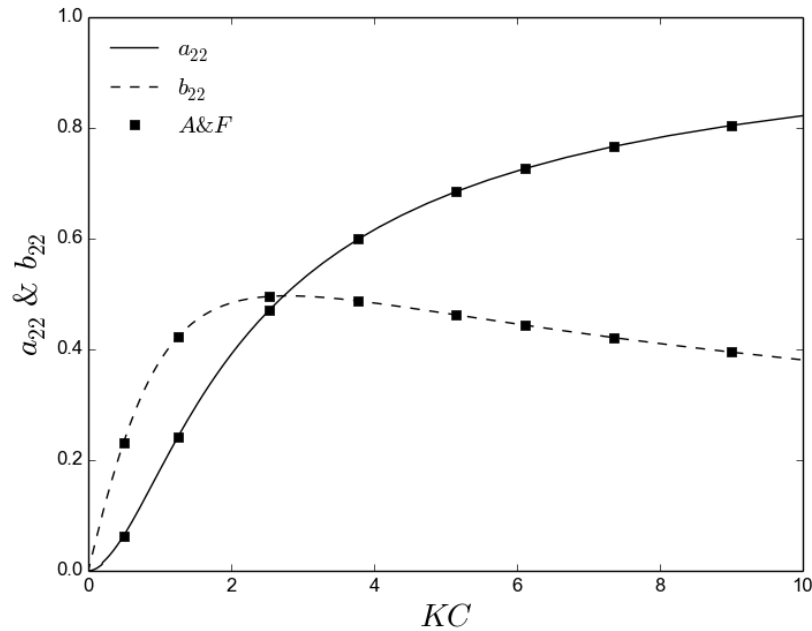
$$= \Re_j - \left\{ j\rho\omega\pi \frac{L^2}{4} \left[A_0 + \frac{1}{2}A_2 \right] \right\} \quad (3.58)$$

Dersom plata utfører en tvungen bevegelse med hastighet V_p , kan vi identifisere den adderte massen A_{22} og dempingskoeffisienten B_{22} ved:

$$F_2 = -A_{22} \frac{dV_p}{dt} - B_{22} V_p \quad (3.59)$$

3.3.4 Resultater

La oss først studere tilfellet hvor plata utfører en svingebevegelse med normalhastighet $v_p = \omega x_0$ i et ellers rolig fluid. Frekvensen ω og utslaget x_0 er kjente størrelser. I et uendelig fluid blir helningen til plata uvesentlig, og vi forventer dermed å få samme resultater som (A&F) finner for en horisontal plate. Fra figur 2.1 ser vi at dette også stemmer. $KC = \frac{x_0}{L} \frac{(1-tau)}{\mu\tau^2}$ er en dimensjonsløs størrelse som kombinerer Keulegan-Carpenter tallet $\frac{x_0}{L}$, porøsitetsparameteren τ og mu -koeffisienten. Den adderte massen skales ved $\frac{A_{22}}{\rho\pi(L^2/4)}$, mens dempingskoeffisienten skales ved $\frac{B_{22}}{\rho\pi\omega(L^2/4)}$



Figur 3.3: Addert masse a_{22} og dempingskoeffisient b_{22} vs KC . Firkant indikerer tall hentet fra implementeringen fra seksjon 3.2.

Ved å bruke singularintegral-teori løser Evans (1969) problemet som her beskrevet for en ugjennomtrengelig plate. For en sammenligning kan vi se på tilfellet hvor plata holdes fast når en bølge kommer vandrende fra høyre. Som Grue & Palm (1987) kan man for en inkommende bølge fra høyre skrive:

$$\Phi_0 = \Re_j \Re_i f(z) e^{j\omega t}$$

hvor:

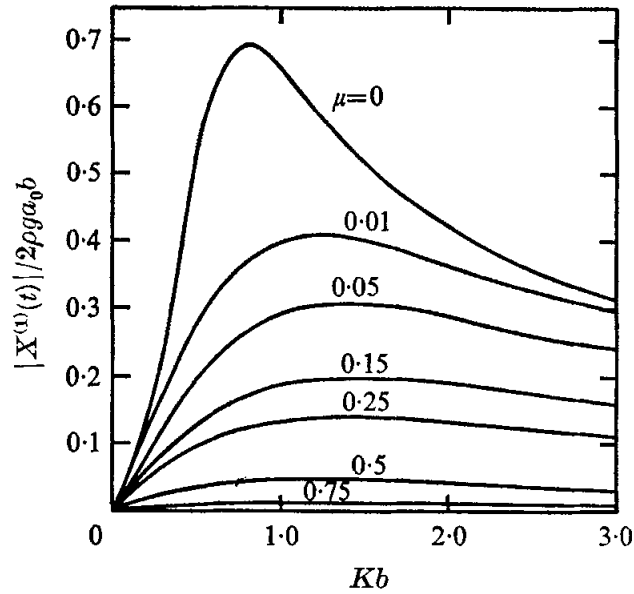
$$f_0 = \xi \left(\frac{g}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + ij) e^{-i\nu z} \quad (3.60)$$

der ξ er bølgens amplitude. u_0 blir dermed:

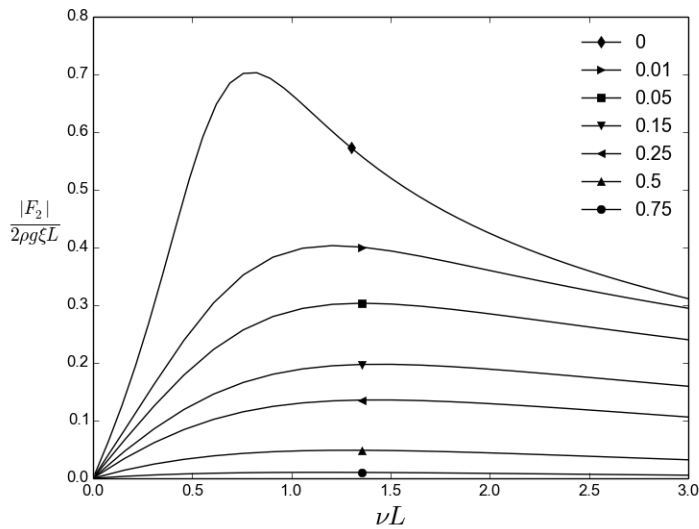
$$u_0 = \Re_i \frac{df_0}{dz} \quad (3.61)$$

$$= j\xi (g\nu)^{\frac{1}{2}} e^{\nu y} \quad (3.62)$$

u_1 kan nå finnes ved å løse (3.53) med $v_p = 0$. I figur 3.4 vises den horisontale kraften for forskjellige bølgetall og grader av nedseking. Nedsekingen er gitt ved $d' = \frac{b_0}{L+b_0}$. Det kommer tydelig frem at vår metode gir akkurat samme resultater som Evans'.



a)

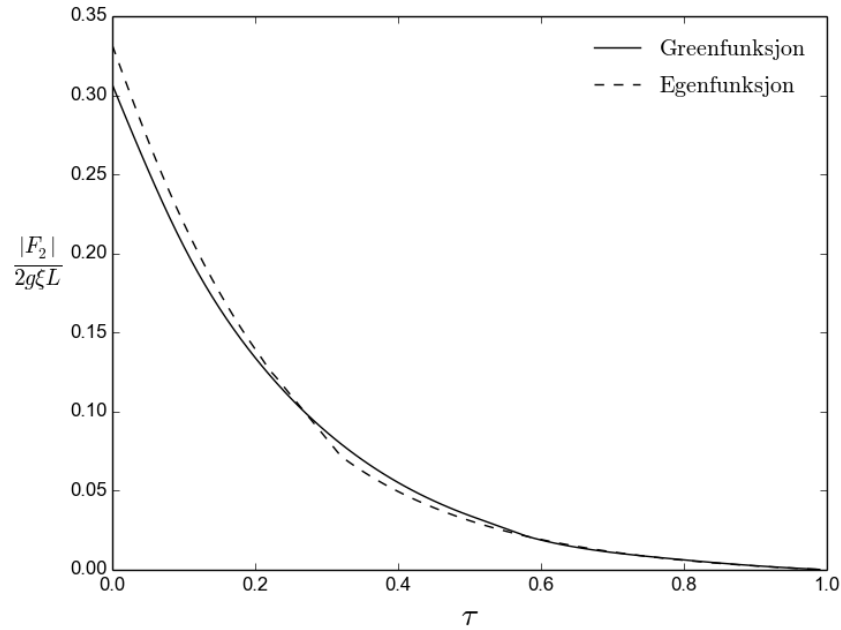


b)

Figur 3.4: Skalert horisontal kraft F_x vs skalert bølgetall

Når kL er stor forventer vi at kraften på plata skal være tilnærmet lik kraften på en vegg

som strekker seg fra en endelig bunn og opp til overflaten. Figur 3.5 viser kraften funnet ved egenfunksjonmetoden presentert i seksjon 2.3, samt metoden her presentert, som en funksjon av τ for $kL = 3$



Figur 3.5: Horisontal kraft vs τ funnet ved en egenfunksjonutvikling og en τ -fordeling av en Green-funksjon

Kapittel 4

Bølge på strøm

Vi ønsker nå å studere tilfellet hvor en konstant, horisontal strøm i fluidet gir et hastighetsbidrag $-U\hat{i}$. Vi beholder kordinatsystemet fra seksjon 3.3, men skriver nå:

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi - U\hat{i} \quad (4.1)$$

Φ er det kombinerte potensialet for den innkommende bølgen og plata og må her oppfylle randbetingelsen fra delseksjon 1.1.2 og 1.1.3, igjen sørges dette for ved å uttrykke Φ som en kontinuerlig fordeling av en Green-funksjon.

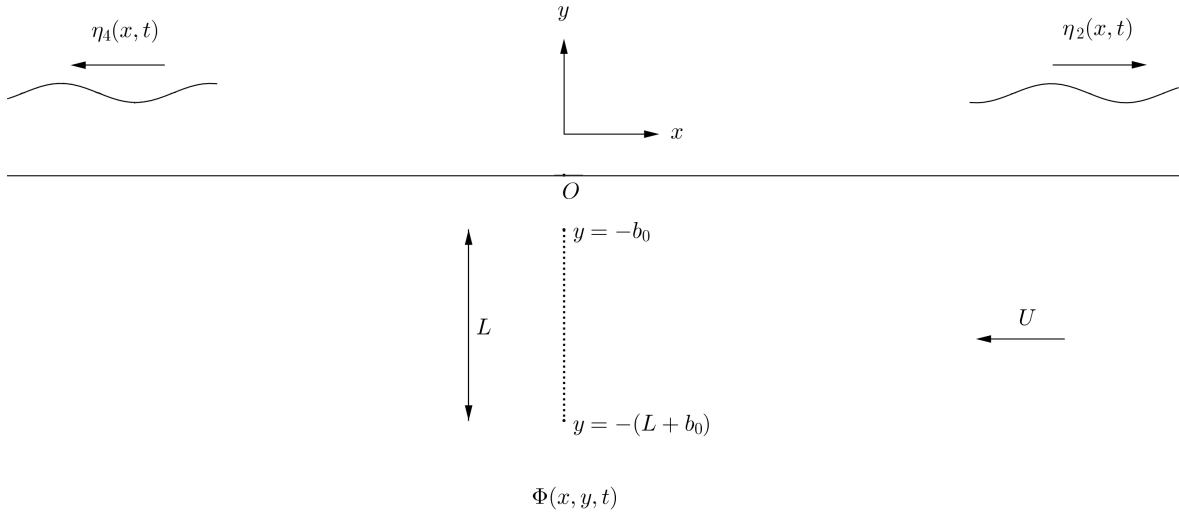
Som nevnt i seksjon 1.1.2 neglisjeres bidraget fra det stasjonære potensialet. Én av årsakene er at det oppstår et problem dersom vi prøver å anvende (1.25) for det stasjonære bidraget alene. For å illustrere dette kan vi først betrakte en plate i et uendelig fluid. Dersom vi nå lar plata være representert av en kontinuerlig fordeling av virvler langs lengden, får vi en horisontalhastighet $u = u_0(\gamma) - U$ på begge sider av plata. Vertikalhastigheten blir derimot $v_{\pm} = \mp\frac{1}{2}\gamma(y)$ på henholdsvis høyre og venstre side. Siden vi nå ikke har et antatt dominerende, tidsavhengig bidrag, må vi ha med de kvadratiske leddene i Eulers trykkligning:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + gy + f(t) \quad (4.2)$$

Dersom vi har en fri overflate, er det for små Froude-tall vanlig å tilnærme det stødige potensialet ved en dobbeltkropp (Huijsmans (1996)) - i vårt tilfelle platen og dens bilde om $y = 0$. Om fluidet er uendelig eller har en fri overflate blir hastighetsfeltet uansett antisymmetrisk når vi bruker tilnærmingen nevnt over, og vi innser dermed at den forventede trykkdifferansen må komme fra et sprang i konstanten C , et sprang vi ikke kan beskrive ved de lineariserte ligningene fra seksjon kapittel 1.

En annen utfordring med å ta hensyn til et stasjonært potensial, er at overflatebetingelsen fra (1.17) blir modifisert i nærheten av plata. Skulle vi derfor fortsatt med en direkte integrasjon, som i (3.23), for å beskrive potensialet, måtte vi ha funnet en annen Green-funksjon enn den vi skal bruke i kommende seksjon.

Av diskusjonen over forstår vi at approksimasjonen er best for store verider av τ og grad av nedsenking.



Figur 4.1: Bølge på strøm.

4.1 Vertikal plate

Vi skal nå undersøke et lignende problem som i seksjon 3.3, med den tillagte strømmen som eneste forskjell, siden det stasjonære bidraget neglisjeres. Igjen søkes et potensial på formen:

$$\Phi(x, y, t) = \Re_i \Re_j f e^{j\sigma t} \quad (4.3)$$

$$= \Re_i \Re_j \{ f_0 e^{j\sigma t} + f_1 e^{j\sigma t} \} \quad (4.4)$$

hvor f_0 er potensialet knyttet til den innkommende bølgen, og f_1 platas tilstedeværelse. Vi lar her σ betegne frekvensen til bevegelsen for å indikere relasjonen mellom to koordinatsystemer – koordinatsystemet introdusert i innledningen av kapitlet, og et relativt koordinatsystem fiksert på en partikkel i fluidet. Dersom en bølgemaker, sett fra det relative koordinatsystemet, genererer bølger som vandrer mot venstre med frekvens ω , vil disse ha en fasehastighet $c = -\frac{g}{\omega}$. Når bølgene når en observatør som står i ro i fluidet, vil han telle at bølgetoppene passerer med frekvensen $\sigma = \omega + \frac{\omega^2}{g}U$ (Faltinsen (1990)). σ blir derfor ofte kalt observert frekvens.

4.1.1 Green-funksjonen

Som i forrige kapittel søker vi en kontinuerlig fordeling av en Green-funksjon G :

$$f_1(z) = \int_{-L}^0 \gamma(b + b_0) G(z, i(\hat{b} + b_0)) d\hat{b} \quad (4.5)$$

En G som, med formuleringen over, sikrer at Φ oppfyller randbetingelsene fra seksjon 1.1.2 og 1.1.3, er presentert av Grue & Palm (1987):

$$G(z, c) = \frac{1}{2\pi i} [\ln(z - c) - g(z, c)], \quad (4.6)$$

hvor

$$g(z, c) = \ln(z - \bar{c}) - \frac{1 - ij}{(1 - 4\tau)^{\frac{1}{2}}} [F_1(z, c) - F_2(z, c)] - \frac{1 + ij}{(1 + 4\tau)^{\frac{1}{2}}} [F_3(z, c) - F_4(z, c)] \quad (4.7)$$

og der F_n er gitt som:

$$F_n(z, c) = e^{-ik_n z} \int_C \frac{e^{ik_n u}}{u - \bar{c}} du \quad n = (1, 2, 3, 4) \quad (4.8)$$

$$C_n = \infty \quad n = (1, 3, 4), \quad C_2 = -\infty \quad \text{for } \tau < \frac{1}{4} \quad (4.9)$$

$$C_n = \frac{i\infty}{k_n} \quad n = (1, 2), \quad C_n = \infty \quad n = (3, 4) \quad (4.10)$$

Videre er:

$$k_{1,2} = \frac{\nu}{2\tau^2} \left[1 - 2\tau \pm (1 - 4\tau)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (4.11)$$

$$k_{3,4} = \frac{\nu}{2\tau^2} \left[1 + 2\tau \pm (1 + 4\tau)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (4.12)$$

hvor:

$$\nu = \frac{\sigma^2}{g}, \quad \tau = \frac{U\sigma}{g} \quad (4.13)$$

Vi skal i denne oppgaven se på tilfeller der $\tau \ll \frac{1}{4}$, siden $(1 + x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$ kan vi for små τ skrive:

$$k_{1,2} \approx \frac{\nu}{2\tau^2} \left[1 - 2\tau \pm (1 - 2\tau - \tau^2) \right] \quad (4.14)$$

$$k_{3,4} \approx \frac{\nu}{2\tau^2} \left[1 + 2\tau \pm (1 + 2\tau - \tau^2) \right] \quad (4.15)$$

Vi ser her at k_1 og k_3 vokser mot uendelig når $\tau \rightarrow 0$, som Grue & Palm (1986) antar vi derfor at k_1 - og k_3 -bølgene bærer liten energi i forhold til k_2 - og k_4 - bølgene, og dermed kan neglisjeres. k_2 bølgen er en bølge vandrende motstrøms, mens k_4 -bølgen vandrer nedstrøms. De har henholdsvis positiv og negativ fase- og gruppehastighet, sett fra det relative koordinatsystemet. For en utdypende diskusjon av alle fire bølger, se for eksempel Grue & Palm (1985).

4.1.2 Hastighetsfeltet

For å finne hastigheten på plata må vi finne G_z :

$$G_z = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{(z - c)} + \frac{1}{(z - \bar{c})} - \frac{1 - ij}{(1 - 4\tau)^{\frac{1}{2}}} F_2' - \frac{1 + ij}{(1 + 4\tau)^{\frac{1}{2}}} F_4' \right] \quad (4.16)$$

hvor:

$$F'_n = \frac{\partial F_n}{\partial z} \quad (4.17)$$

$$= e^{-ik_n z} \int_{C_n}^z \frac{e^{ik_n z}}{u - \bar{c}} du \quad (4.18)$$

$$= -ik_n e^{ik_n z} \int_{C_n}^z \frac{e^{ik_n z}}{u - \bar{c}} du + \frac{1}{z - \bar{c}} \quad (4.19)$$

for $n = 2, 4$. I appendiks D gis en utledning for integralet ovenfor, som fører til at vi på plata får:

$$F'_2 = ik_n e^{w_0} [-i\pi - Ei(-w_0)] - \frac{i}{y + b} \quad (4.20)$$

$$F'_4 = ik_n e^{w_0} [i\pi - Ei(-w_0)] - \frac{i}{y + b} \quad (4.21)$$

På samme måte som i forrige kapittel kan vi skrive:

$$u_{\pm} - iv_{\pm} = \frac{df_0}{dz} + PV \int_{-L}^0 \gamma(\hat{b}) \frac{\partial G(z, i(\hat{b} - b_0))}{\partial z} d\hat{b} \pm \frac{i}{2} \gamma(y + b_0) \quad (4.22)$$

og vi finner at:

$$u = \Re_i \frac{df}{dz} \quad (4.23)$$

$$= \frac{df_0}{dz} + PV \int_{-L}^0 \frac{\gamma(\hat{b})}{2\pi} \left[-\frac{1}{y + b} + \frac{-j\Im_i F'_2 - \Re_i F'_2}{(1 - 4\tau)^{\frac{1}{2}}} + \frac{j\Im_i F'_4 - \Re_i F'_4}{(1 + 4\tau)^{\frac{1}{2}}} \right] d\hat{b} \quad (4.24)$$

I tillegg har vi også her at $\Delta\phi = \int_{-L}^0 \frac{1}{2} \gamma(y') dy'$.

4.1.3 Kravet på plata

For en solid plate kan kravet fra (1.19) brukes for å finne en løsning. Dersom plata er porøs, og en strøm er tilstede, skal vi nøye oss med å studere tilfeller hvor $\tau \geq 0.70$. Vi tilnærmer da den konstante hastigheten på veggen til å være strømhastigheten selv, vi kan dermed skrive V_n fra (1.25) som:

$$V_n = -U + v_n e^{j\sigma} \quad (4.25)$$

hvor $v_n = u - v_p$. Siden vi søker en rent tidsvarierende trykkdifferanse, er vi bare interessert i α_1 -koeffisienten fra seksjon 1.3. Det ble der vist at (1.48) må brukes når $U \geq |v_n|$ og (1.67)

må brukes når $U \leq |v_n|$. Ved å skrive disse uttrykkene på kompleks form, kombinert med (1.25) og Eulers trykklikning, finner vi at:

$$\frac{\Delta\phi}{L} = -jK2Uv_n \quad \text{for } U \geq |v_n| \quad (4.26a)$$

$$\frac{\Delta\phi}{L} = -jKv_n \left[\frac{4U^2 \sin c}{|v_n|\pi} - \frac{2U \left(c + \sin c \cos c - \frac{\pi}{2} \right)}{\pi} - \frac{U(2c - \pi + \sin(2c))}{\pi} + |v_n| \frac{(9 \sin(c) + \sin(3c))}{3\pi} \right] \quad \text{for } |U| < v_n \quad (4.26b)$$

hvor $K = \frac{(1-\tau)}{\sigma L \mu \tau^2}$, og $c = \frac{U}{v_n}$. Forklaringen av en numerisk løsning er igjen å finne i appendiks E.

4.2 Fjernfeltsanalyse

Når vi befinner oss langt unna plata, altså når $|x| \rightarrow \infty$, kan man foreta en fjernfeltsanalyse av løsningen presentert i seksjonen over. En slik analyse gir oss tre viktige størrelser: Fjernfeltsamplitudene, drifkraften og total energifluks.

4.2.1 Fjernfeltsamplitudene

La oss for enkelhets skyld betrakte bølgene som vandrer ut fra plata alene. Det tidsuavhengige potensialet f for en bølge med bølgetall k_q kan skrives (Grue & Palm (1987)) som:

$$f = \delta \hat{\xi}_q \left(\frac{g}{k_q} \right)^{\frac{1}{2}} (1 \pm ij) e^{i-k_q z} \quad (4.27)$$

hvor $\delta = 1$ for $q = 4$ og $\delta = -1$ for $q = 2$, mens $\hat{\xi}_q$ er den (i j-rommet) komplekse amplituden. La oss nå betrakte fjernfeltet hvor $x \rightarrow -\infty$. De tre funksjonene som bestemmer potensialet f_1 fra seksjon 4.1, blir i denne grensen:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_4 = 2\pi i e^{-ik_4(z-\bar{c})} \quad (4.28)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_2 = 0 \quad (4.29)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{z-c} + \frac{1}{z-\bar{c}} \right] = 0 \quad (4.30)$$

Vi står derfor igjen med:

$$f_1 = \frac{1+ij}{2\pi i (1+4\tau)^{\frac{1}{2}}} \int_{-L}^0 \gamma(\hat{b}) F_4 d\hat{b} \quad (4.31)$$

$$= \frac{1+ij}{(1+4\tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-i-k_4 z} \hat{C}_4 \quad (4.32)$$

hvor:

$$\hat{C}_4 = \int_{-L}^0 \gamma(\hat{b}) e^{k_4(\hat{b}-b_0)} d\hat{b} \quad (4.33)$$

Av (4.27) ser vi derfor at:

$$\hat{\xi}_4 = \frac{\hat{C}_4}{\left([1 + 4\tau] \frac{g}{k_4}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.34)$$

Med tilsvarende analyse for $x \rightarrow \infty$ finner man at:

$$\hat{\xi}_2 = \frac{\hat{C}_2}{\left([1 - 4\tau] \frac{g}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.35)$$

hvor:

$$\hat{C}_2 = \int_{-L}^0 \gamma(\hat{b}) e^{k_2(\hat{b}-b_0)} d\hat{b} \quad (4.36)$$

La nå indeks \tilde{q} betegne “motsatt” bølgetall, for eksempel er $\tilde{q} = 2$ hvis $q = 4$. Ved å nå ta hensyn til en innkommende bølge med bølgetall q og kompleks amplitude $\hat{\xi}_0$, så innser vi at amplituden til den reflekterte (\hat{R}) og den transmitterte (\hat{T}) bølgen er gitt som:

$$\hat{T} = \xi_q + \xi_0 \quad (4.37)$$

$$\hat{R} = \xi_{\tilde{q}} \quad (4.38)$$

Det er vanlig å skalere disse to amplitudene med $\hat{\xi}_0$:

$$T = \frac{|\hat{T}|}{|\hat{\xi}_0|} \quad (4.39)$$

$$R = \frac{|\hat{R}|}{|\hat{\xi}_0|} \quad (4.40)$$

4.2.2 Driftkraften

Den lineære kraften F_x , som er beskrevet i seksjon 3.3, utfører like mye arbeid i hver horisontalretning over en periode $T_0 = \frac{2\pi}{\sigma}$. Ved å ta med andre ordens ledd i Eulers trykklikning, kan man imidlertid finne en kraft som over en periode utfører mer arbeid i én av retningene. Horisontalkomponenten til denne kraften, midlet over en periode, skal vi her kalle for driftkraften og betegne som \overline{F}_x . Det kan vises at et første ordens potensial, som vi har funnet i seksjon 4.4, er det eneste vi må kjenne for å finne driftkraften opp til andre orden.

Ved å studere den tidsmidlede endringen i momentum per tidsenhet i et lukket volum, kan man i 2D-tilfellet finne at (Faltinsen (1990)):

$$\overline{F}_x = - \overline{\int_S [\rho(u - U)^2 + p] n_x dS} \quad (4.41)$$

hvor S består av to vertikale kontrollvegger på hver side av plata, n_x er horisontalkomponenten til enetsvektoren \mathbf{n} , pekende vekk fra plata og en overstreket betegner tidsmidling over en periode. I vårt tilfelle vil vi bruke uttrykkene vi fant i seksjonen over, og dermed velge to kontrollvegger som befinner seg uendelig langt ut til høyre og venstre:

$$\overline{F_x} = \left(\int_{-\infty}^{\eta_2} - \int_{-\infty}^{\eta_4} \right) [\rho(u - U)^2 + p] dy \quad (4.42)$$

η_2 og η_4 betegner bølgehevningene forbundet med k_2 - og k_4 -bølgene.

Vi setter inn for trykket:

$$p = -\rho(\phi_t - Uu + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + gy) \quad (4.43)$$

og får:

$$\overline{F_x} = -\rho \left(\int_{-\infty}^{\eta_2} - \int_{-\infty}^{\eta_4} \right) \left[(u - U)u - (u - U)U - (\phi_t - Uu + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + gy) \right] dy \quad (4.44)$$

$$= -\rho \left(\int_{-\infty}^{\eta_2} - \int_{-\infty}^{\eta_4} \right) \left[\phi_t + gy + (u - U)U - \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \right] dy \quad (4.45)$$

Vi gjenkjenner tredje ledd i uttrykket over som $\overline{\int_{S_\infty} U\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl}$. Fra konservering av masse får vi $\overline{\int_{S_\infty} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl} = 0$. Det siste leddet gir bidrag av tredje orden på overflaten og 0 på integrasjonsintervallet $[-\infty, 0]$, siden eneste forskjellen mellom u og v er en faseforskyvning på $\frac{\pi}{2}$ i tidsavhengigheten (se (4.49) og (4.50)). Eventuelle bidrag får vi dermed bare fra første og andre ledd.

Siden $\overline{\int_{-\infty}^0 \phi_t dt} = 0$ trenger vi i første ledd bare å utføre integrasjonen på overflaten, hvor vi gjør tilnærmingen $\phi_t(x, t, y = \eta) \approx \phi_t(x, t, y = 0) = \phi_t^0$:

$$\int_0^{\eta_q} \phi_t^0 dy = \eta_q \phi_t^0 \quad (4.46)$$

$$= (Uu - g\eta_q)\eta_q \quad (4.47)$$

I uttrykket over har vi brukt relasjonen fra (1.13) på linearisert form. Fra (4.27) kan det vises at:

$$\phi = \Re_j f_0 e^{j\sigma t} \quad (4.48)$$

$$= \delta\xi_q \left(\frac{g}{k_0} \right)^{\frac{1}{2}} e^{ky} \cos(kx \pm \sigma t + \beta) \quad (4.49)$$

og at:

$$\phi_x(x, y = 0, t) = -\delta \xi_q k \left(\frac{g}{k_0} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(kx \pm \sigma t + \beta) \quad (4.50)$$

hvor $\xi_q = |\hat{\xi}_q|$. Dette gir

$$\overline{Uu\eta} = -\delta \frac{U a_q k g}{2g} \left(\frac{g}{k_q} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.51)$$

$$= \frac{Ug}{2c_q} a_q \quad (4.52)$$

hvor $c_q = -\delta \left(\frac{g}{k_q} \right)^{\frac{1}{2}}$. Videre har vi at:

$$-\overline{g\eta_q^2} = -\frac{1}{2} g \xi_q^2 \quad (4.53)$$

I andre ledd av (4.45) kansellerer integralene fra $-\infty$ til 0, og vi får dermed bare bidraget:

$$\int_{-\infty}^{\eta_q} gy dt = 0 \quad (4.54)$$

$$= \frac{1}{2} g \overline{\eta_q^2} \quad (4.55)$$

$$= \frac{1}{4} g \xi_q^2 \quad (4.56)$$

Dersom vi nå samler bidragene fra (4.52), (4.53) og (4.56), får vi:

$$\frac{Ug}{2c_q} \xi_q - \frac{1}{2} g \xi_q^2 + \frac{1}{4} g \xi_q^2 = \rho \left(\frac{Ug}{2c} \delta \xi_q^2 - \frac{1}{4} g \xi_q^2 \right) \quad (4.57)$$

$$= \left(\frac{U}{c} - \frac{1}{2} \right) E_q \quad (4.58)$$

$$= (U - c_q^g) \frac{E_q}{c_q} \quad (4.59)$$

hvor $E_q = \frac{1}{2} \rho g \xi_q^2$ og $c_q^g = \frac{1}{2} c_q$. Samles nå bidragene fra k_2 - og k_4 -bølgene ender vi opp med:

$$\overline{F_x} = -(U - c_2^g) \frac{E_2}{c_2} + (U - c_4^g) \frac{E_4}{c_4} \quad (4.60)$$

Når vi i tillegg har en innkommende bølge kan vi, som Grue & Palm (1985), simpelthen trekke ifra bidraget fra denne.

$$\overline{F_x} = -(U - c_2^g) \frac{E_2}{c_2} + (U - c_4^g) \frac{E_4}{c_4} - \delta (U - c_q^g) \frac{E_0}{c_q} \quad (4.61)$$

hvor $E_0 = \frac{1}{2} \rho g \xi_0^2$. Verdt å merke seg er at ξ_2 og ξ_4 i ligningen over er amplitudene til en reflektert/transmittert bølge, og må ikke forveksles med amplitudene fra radiasjonsproblemet alene.

4.2.3 Energiligningen

Når vi kjenner fjernfeltsamplitudene kan vi også beskrive den midlede energien (per tidsenhet) W til systemet. Vi nøyer oss med å gjengi formelen utledet av Grue for bølger på en konstant strøm, her med k_1 - og k_3 -bølgene neglisjert:

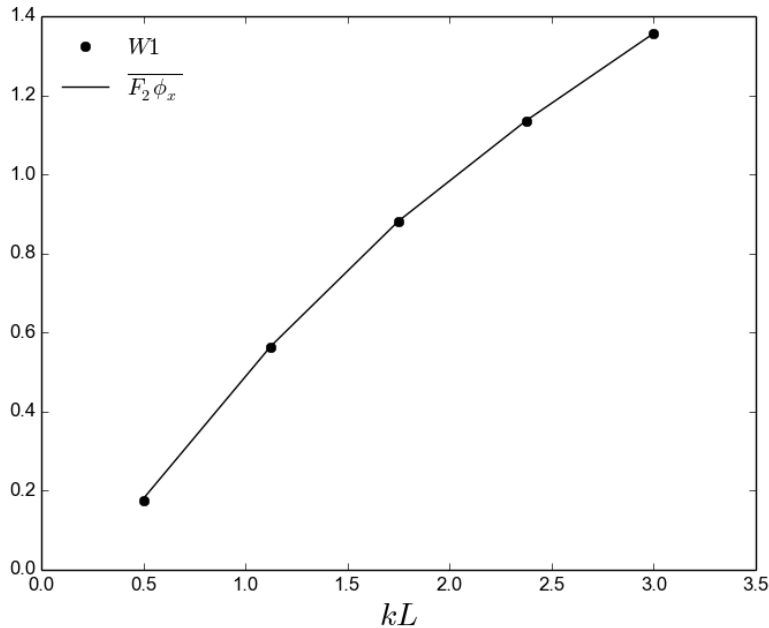
$$W = E'_2(c_2^g - U) - E'_4(c_4^g - U) + \delta E'_q(c_q^g - U) \quad (4.62)$$

For en solid plate er energien bevart, og vi må dermed ha at arbeidet utført av plata W_1 må være like stort som, og motsatt rettet av, arbeidet utført av den innkommende bølgen W_0 . Når plata derimot er porøs vil de viskøse effektene føre til et energitap, og dermed $|W_0| > |W_1|$.

Når en innkommende bølge passerer plata, vil det som nevnt oppstå en transmittert og en reflektert bølge. Rent teoretisk kan vi da tolke f_1 som potensialet for en bølgemaker med varierende hastighet langs y -aksen på veggen. De radierte bølgene med amplitude ξ_2 og ξ_4 kan vi derfor se på som løsninger for et radiasjonsproblem hvor $u = \Re_1 \frac{df_0}{dz}$. Det radierte arbeidet W_r , må da være det samme som arbeidet utført på plata:

$$W_r = \int_L p(x=0, y, t) \Phi_x^r(x=0, y, t) dl \quad (4.63)$$

Som en sjekk for at implementeringen fra seksjon 4.2 er riktig, har vi derfor funnet arbeidet i 5 diskrete punkter for $Fr = 0.05$ og $\tau = 0.7$. Hastigheten på veggen er gitt som hastigheten fra en innkommende k_4 -bølge med $\xi = 0.1L$, men problemet betraktes ellers som et radiasjonsproblem. W_r er funnet fra fjerfeltanalysen, mens $\overline{F\phi_x}$ er funnet ved direkte integrasjon av (4.63). Fra 4.2 ser vi at det er god overensstemmelse mellom de to uttrykkene for arbeidet.

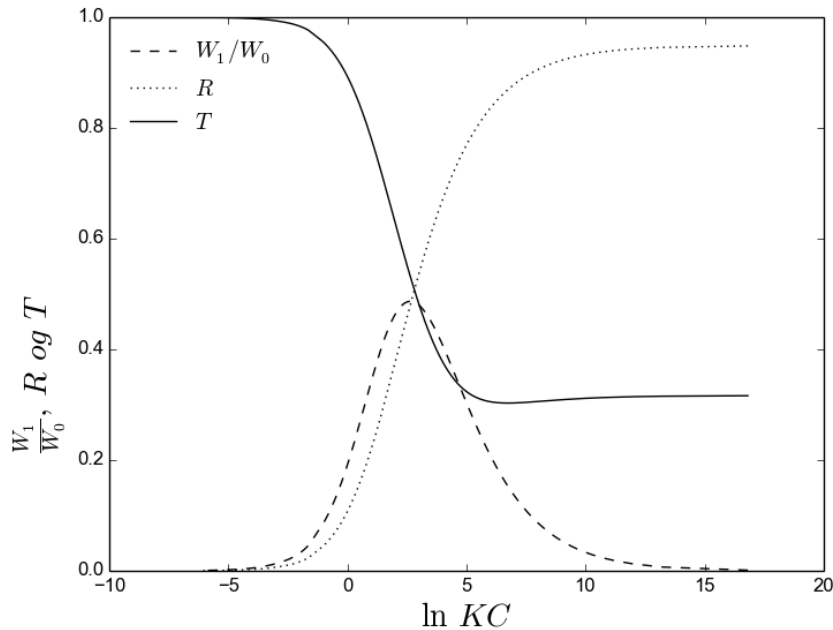


Figur 4.2: Arbeidet vs bølgetallet k_4L

4.2.4 Resultater

Ved å finne de ukjente koeffisientene til γ fra seksjon 4.1, kan vi nå finne både den tidsvarierende, horisontale kraften, driftkraften, fjernfeltsamplituder og den totale energifluksen.

La oss først undersøke energifluksen for tilfellet hvor $\nu L = 1$, der ν er bølgetallet for en bølge vandrende på et fluid uten strøm, og som treffer en porøs plate som skjærer overflaten. Figur 4.3 viser forholdet mellom energifluksen tilført av en innkommende bølge W_0 og energifluksen W_1 ut av de to vertikale veggene $x = |\infty|$, i tillegg til transmittert og reflektert bølge, som funksjon av den naturlige logaritmen til $KC = \frac{\xi(1-\tau)}{L\mu\tau^2}$.



Figur 4.3: Forholdet mellom tilført og utvandrende energifluks $\frac{W_1}{W_0}$, reflektert bølge R og transmittert bølge T vs den naturlige logaritmen til perforeringseffekt-tallet KC

For negative verdier av $\ln KC$ er τ veldig stor og den transmitterte bølgen er bare den innkommende bølgen selv, samlet energifluks ut gjennom veggene blir dermed lik null. Når $\ln KC$ derimot har verdier rundt 2.64 (hvor $\tau = 0.11$) er det en betraktelig mindre energifluks gjennom veggene enn den som ble tilført av den innkommende bølgen – dissipasjonseffekter grunnet platas porositet har dermed ført til et energitap. Når $\ln KC$ blir stor går τ mot 0, R og T går mot løsningen for en solid plate og energiligningen går, som forventet, mot 0.

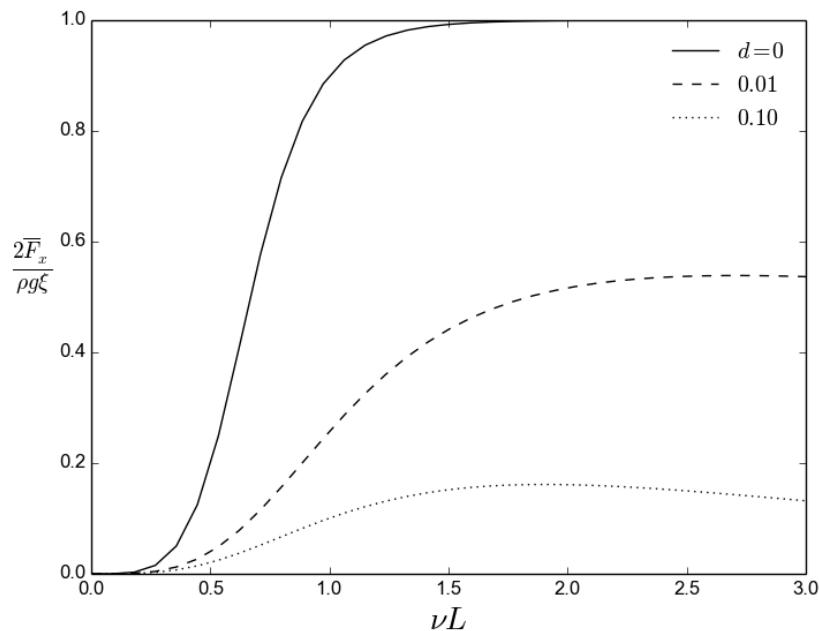
Vi skal heretter konsentrere oss om de horisontale kreftene som virker for forskjellige verdier av U , uttrykt ved det dimensjonsløse Froude-tallet $Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$. Dette forholdstallet indikerer det stasjonære bølgeomsterets virkning på legemet – jo lavere Fr , jo bedre er tilnærmingen ved å se bort ifra det stasjonære bidraget (Zhao & Faltinsen (1988)). I norske fjorder har vannstrømmen normalt en hastighet mellom 0.1 - 0.3 m/s, under spesielle omstendigheter kan strømmen komme opp i 1 m/s (Havforskningsinstituttets hjemmesider). Vi skal derfor under-

søke tilfeller hvor $Fr \in [0, 0.1, 0.2, 0.05]$, som respektivt svarer til $U \in [0.17, 0.34, 0.86]$.

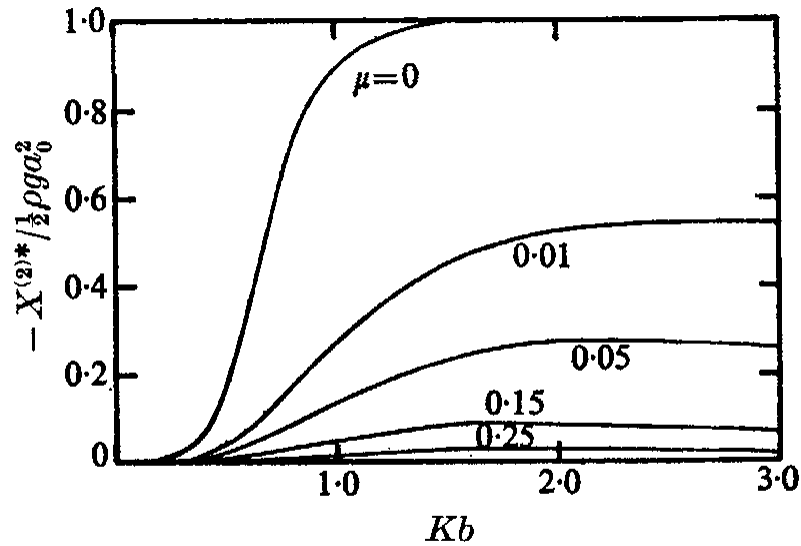
Som nevnt ønsker vi å se på anvedelsen for en fiskemerd. Ifølge Fredheim (2005) vil τ da ligge i regionen $[0.15, 0.3]$. Videre kan høyden til merden være så høy som 30 meter (Faltinsen (2014)). Vi lar nå kraften skaleres ved $\frac{|F_2|}{\rho g L \xi_0}$ og den midlere driftkraften ved $\frac{\bar{F}_x}{\rho g \xi_0^2}$, mens vi lar $d = \frac{b_0}{L}$ indikere nedsenkingsgraden som en prosentandel av platas lengde.

Vi skal se på tilfeller hvor plata holdes fast under påvirkning av en innkommende bølge med amplitude $\xi = 0.1L$, og kreftene vil skisseres mot det dimensjonsløse bølgetallet kL opp til en verdi av 1.2. Amplituden er valgt med tanke på at vi anvender lineærteori, mens kL er valgt med tanke på at det i kapittel 2 ble vist til dårlige overensstemmelser med eksperimenter når $\frac{2\xi}{\lambda} > 0.4$. Den maksimale bølgebrattheten blir her 0.038. Viktig å merke seg er at F og \bar{F}_x (begge skalert) som funksjoner av kL , i motsetning av tilfellet for en solid plate, vil variere med amplituden når plata er porøs. For alle utregninger heretter setter vi $L = 30\text{m}$, som gir en innkommende bølge med amplitude på 3 meter. Siden en bølge som vandrer i strømmens retning forventes å gi høyest kraftbidrag på plata (Molin et al. (1995)), lar vi den innkommende bølgen være en k_4 -bølge.

Som et referansepunkt betrakter vi først en solid plate for nedsenkingsgradene $d \in [0, 0.01, 0.1]$ og $Fr = 0$:



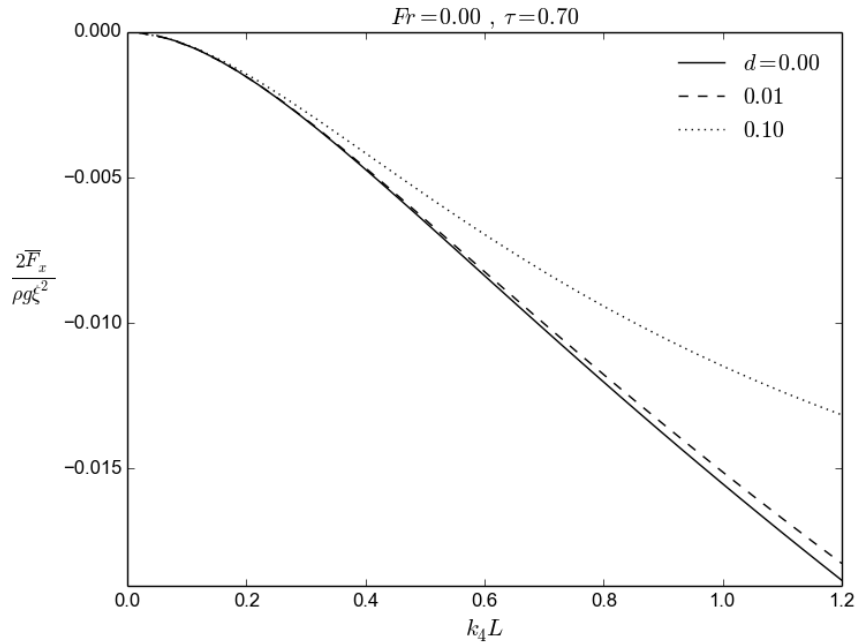
Figur 4.4: Driftkraften \bar{F}_x vs bølgetallet νL .



Figur 4.5: Figur 5 fra [?]: Driftkraften vs bølgetallet.

Figur 4.4 kan sammenlignes med figur 4.5 som viser en lignende utregning av Evans (1969), med en liten forskjell i definisjonen av nedsenkingsgrad og skalering. Ved å bruke Evans' parametere er det imidlertid testet at vår løsning gir identiske resultat. På lignende vis som for den horisontale kraften, ser vi at også den midlede kraften varierer mye med νL og, at bare en liten nedsenkning gir en betratelig mindre driftkraft i forhold til en plate liggende helt i overflaten.

I figur 4.6 ser vi driftkraften for $\tau = 0.7$ under ellers samme forhold som i figur 4.4, bare her for $\nu L \in [0, 1.2]$. Vi ser at porøsiteten har ført til en betraktelig reduksjon av driftkraften, for νL er den nesten bare 2% av driftkraften for en porøs plate. Nedsenkingsgraden har i tillegg en mye mindre betydning.

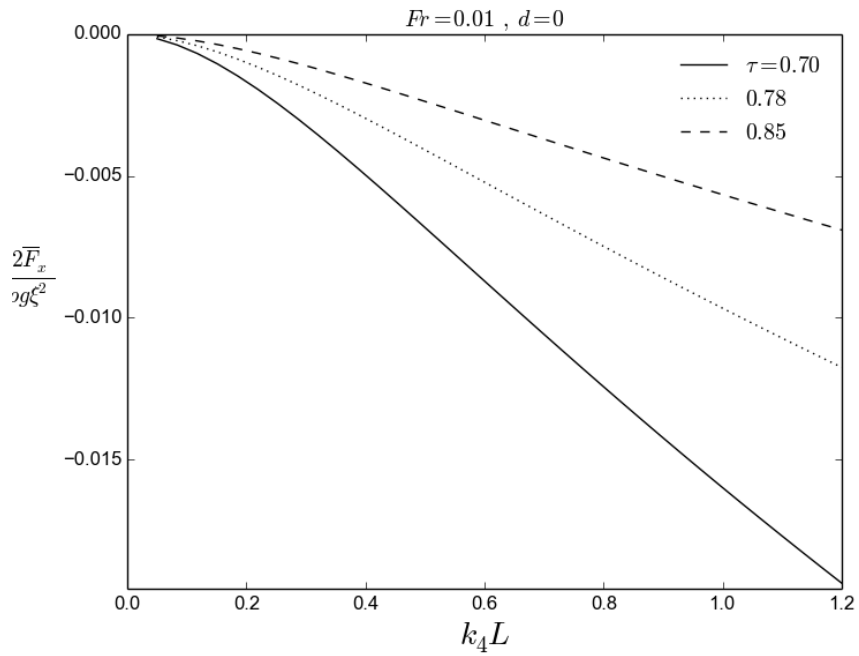
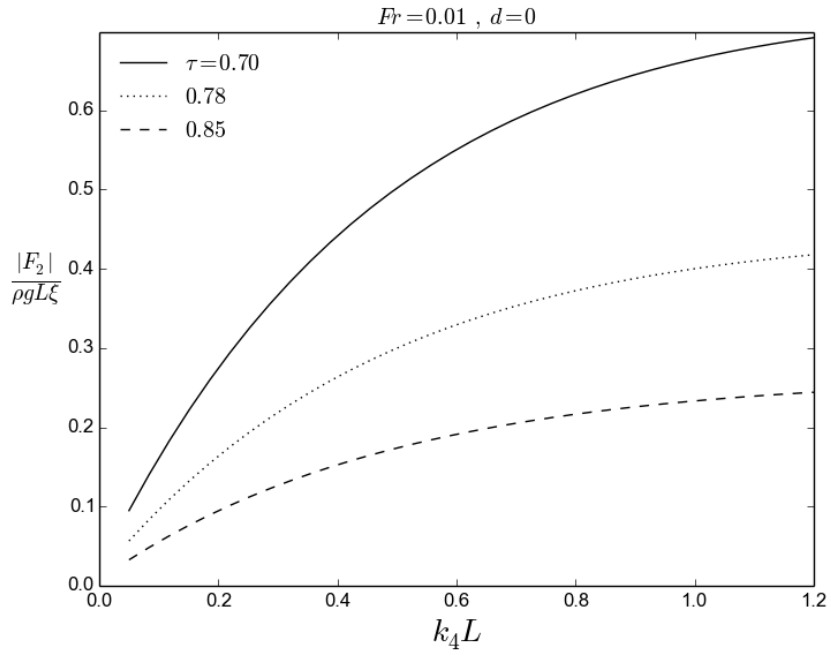


Figur 4.6: Driftkraften \bar{F}_x vs bølgetallet νL for $\tau = 0.70$.

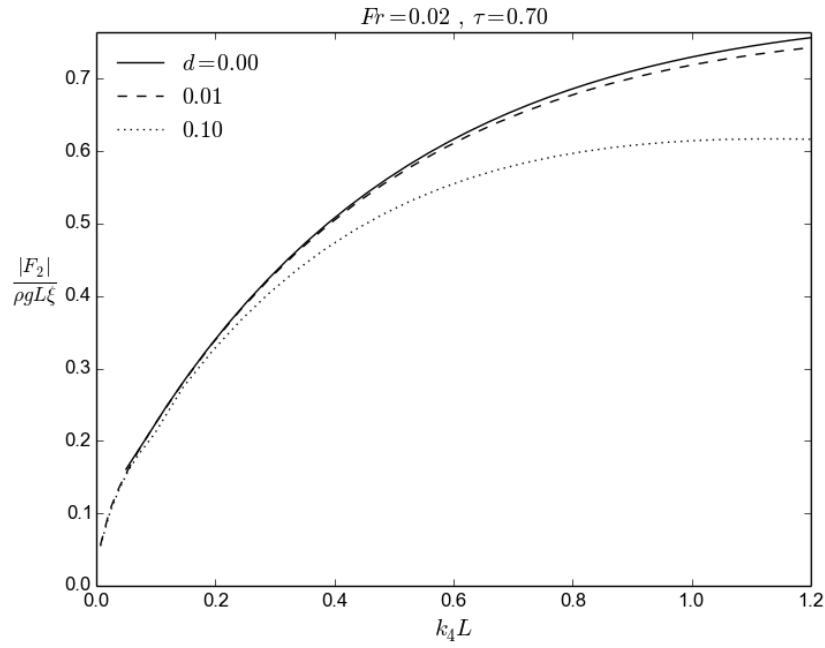
I figur 4.7 ser vi kraften og driftkraften når $d = 0$, for forskjellige verdier av τ og for $Fr = 0.01$. Selv for relativt høye porositeter ser vi en tydelig reduksjon av kreftene når τ senkes. For $kL = 1.2$ reduseres både F_x og F med ca 35% når τ går fra 0.70 til 0.85.

Figur 4.8 viser kraften og driftkraften for varierende d for $\tau = 0.7$ og $Fr = 0.02$. Sammenlignet med tidligere figurer ser vi at kreftene fra en k_4 -bølge, som forventet, blir større når Fr økes.

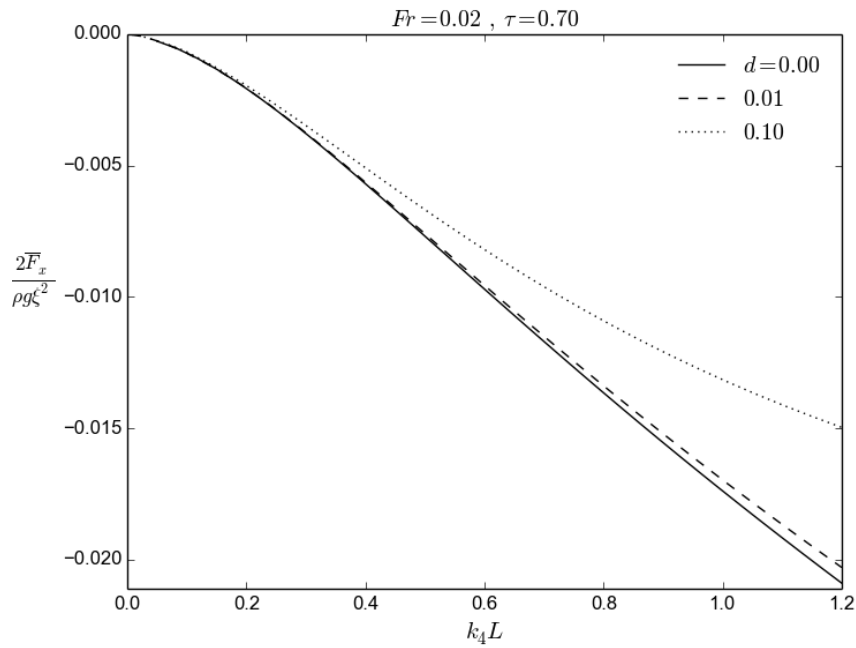
Figur 4.9 viser driftkraften for varierende d når $\tau = 0.70$ og $Fr = 0.05$. Sammenlignet med 4.6 ser vi en betraktelig økning, omlag 70%, av driftkraften for alle verdier av d når Fr går fra 0 til 0.05.



Figur 4.7: (a) Kraften F_2 og (b) driftkraften \bar{F}_x vs bølgetallet $k_4 L$ for varierende τ .

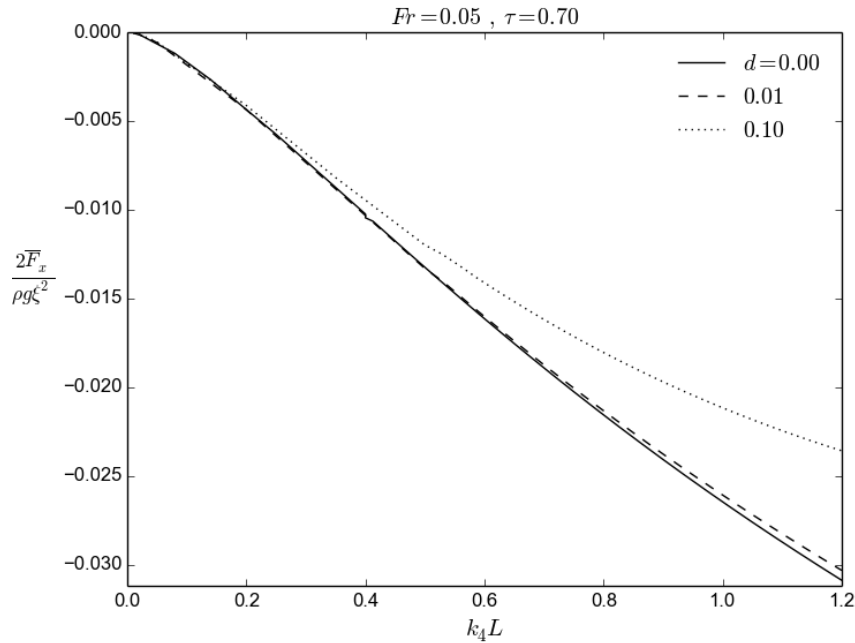


a)



b)

Figur 4.8: (a) Kraften F_2 og (b) driftkraften \bar{F}_x (b) vs bølgetallet $k_4 L$ for varierende d .



Figur 4.9: Driftkraften \bar{F}_x vs bølgetallet $k_4 L$ for varierende τ .

Avslutningsvis kan vi sammenligne driftkraften med en dragkoeffisient foreslått av Tait et al. (2005) for en vertikal vegg stående utsatt for en konstant strøm:

$$C_d = \frac{F}{\rho \frac{1}{2} U_v^2} \quad (4.64)$$

$$C_d^{Tait} = \frac{C_l}{1 - \tau} \quad (4.65)$$

hvor $C_l = \frac{1}{C_c \tau}$ og $C_c = 0.405 e^{-\pi(1-\tau)} + 0.595$, mens U_v er normalhastigheten på veggen. For $\tau = 0.70$ og $U_v = 0.86$ får vi:

$$C_d^{Tait} = 2.69 \quad (4.66)$$

Den korreponderende dragkoeffisienten for driftkraften på en plate skjærende i overflaten ved $Fr = 0.05$ er:

$$C_d^{Drift} = 0.14 \quad (4.67)$$

Vi ser derfor at selv om driftkraften øker betraktelig når en strøm er tilstede, så vil den fortsatt være veldig liten i forhold til det konstante bidraget fra strømmen alene.

Diskusjon

Forskjellige metoder for å studere porøse platers interaksjon med bølger har blitt undersøkt. Spesielt er det presentert en semi-analytisk løsning for en vertikal plate, holdt fast eller oskilleende, under påvirkning av en innkommende bølge i et uendelig fluid. For en solid og en porøs plate er det vist til samsvarende resultater med Evans (1969) og An & Faltinsen (2012). Diffraksjonsproblemet er studert både med og uten strøm. Dissipasjon av energi og amplituder for transmittert og reflektert bølge er undersøkt for en plate skjærende i den uforstyrrende overflaten for froudetall $Fr = 0$. For $kL = 1$ blir det vist til et energitap på hele 50% for $\ln KC = 2.64$. Videre er første ordens horisontalkraft og andre ordens driftkraft fra en bølge vandrende i strømmens retning undersøkt for $Fr \in [0.0, 0.01, 0.02, 0.05]$ for en 30 meter lang plate av høy porøsitet. Det er funnet at å senke plata 10% av dens lengde under overflaten, gir en betraktelig reduksjon i både tidsvarierende kraft og driftkraft, og at disse tilnærmet dobles når Froude-tallet økes fra 0 til 0.05. Driftkraften er imidlertid funnet å være veldig liten i forhold til kraften fra en konstant strøm alene.

En svakhet med løsningen foreslått er neglisjeringen av det stasjonære bidraget som vil oppstå når det er en strøm i fluidet. For vertikale plater og steile geometrier er det nærliggende å tro at den koblede effekten mellom det stasjonære og det tidsavhengige potensialet er av betydning, selv for veldig små verdier av Fr . Et annet ankepunkt er at det i relasjonen mellom trykket og hastigheten på veggen er antatt at fluidet hele tiden omslutter plata. Dette er ikke tilfellet for en plate som befinner seg en høyde over den innkommende bølgens laveste punkt. Vannstanden på den ene siden av veggen vil da være høyere enn på den andre, og vann som vandrer gjennom den vil dermed oppleve et fritt fall. Dette, sammen med brytning av bølgene, vil forårsake dissipasjonseffekter som det ikke er tatt høyde for i denne oppgaven.

Den presenterte løsningen har også et direkte forbedringspotensial siden de numeriske metodene trolig kan gjøres mer effektive og stabile. Instabiliteter oppstår på grunn av iterasjonsprosesser for å løse ikkelineariteter. For $Fr = 0.05$ ble iterasjonen ustabil for lave verdier av kL når antallet ukjente koeffisienter var over seks. Bare Picard-iterasjon har her blitt brukt som verktøy for å beregne ikke-linearitetene.

For applikasjoner til nettingstrukturer er det viktig å observere at det i formuleringen av problemet forutsettes at legemet er rigid, og at løsningen dermed passer bedre for å modellere gitterstrukturer fremfor nettingstruktrrer.

Utvidelser

Når man kjenner det lineære potensialet for en porøs horisontal og vertikal plate, bør disse kunne kombineres til å utgjøre det lineære potensialet for et lukket eller delvis åpent rektangel – og dermed fungere som en geometrisk fullverdig representasjon av en rigid fiskemerd i 2D. En naturlig vei videre er å undersøke problemet i 3D. I tillegg er det gjort få undersøkelser av det stasjonære problemet for en porøs struktur som beveger seg med en konstant hastighet i nærheten av en fri overflate. Trolig må man da uttrykke et kjølvann bak plata, se Koo & James (1973) og Loeland (1993), som må inkorporeres i den matematiske formuleringen.

Appendiks A

Chwangs bølgemaker

Den horisontale bevegelsen beskrives ved:

$$s_0 = x_0 e^{j\omega t} \quad (\text{A.1})$$

Med hastigheten $v_p = j\omega x_0$ Vi søker dermed et komplekst potensial på formen:

$$\Phi(x, y, t) = \phi(x, y) e^{j\omega t} \quad (\text{A.2})$$

Strømhastigheten på veggen V_n relateres til trykket P ved:

$$V_n = \frac{2b}{\mu} p(0, y, t) \quad \text{for } x = 0 \quad (\text{A.3})$$

Videre kan det varierende trykket i væsken P beskrives ved Eulers trykklikning ligning på linearisert form:

$$p = -\rho \Phi_t \quad (\text{A.4})$$

Horisontalt må væskens bevegelse samsvare med platens bevegelse fratrekt strømhastigheten:

$$\Phi_x = u_0 - V_n \quad \text{for } x = 0 \quad (\text{A.5})$$

Av (A.4) og (A.5) ser vi at V_n og P har samme frekvens som Φ , og vi definerer derfor:

$$V_n = v_n(y) e^{j\omega t} \quad (\text{A.6})$$

$$(x = 0, y) = p(y) e^{j\omega t} \quad (\text{A.7})$$

La oss nå uttrykke Φ som en generell løsning av Laplacedigningen som oppyller radiasjonsbetingelsen for $x \rightarrow \infty$. ϕ kan da skrives som:

$$\phi = A_0 e^{-jk_0 x} \cosh k_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k_n x} \cos k_n y \quad (\text{A.8})$$

hvor A_0 og A_n er konstanter. For å finne disse konstantene utnytter vi det faktum at egenvektorene er ortogonale på intervallet $[0, h]$.

Uttrykk for de ukjente koeffisientene

Alle ligninger vi heretter skal bruke er evaluert i punktet $x = 0$, og det utelates derfor å opplyse om dette i hver ligning. Fra (A.5) får vi:

$$-jk_0 A_0 e^{-k_0 x} \cosh k_0 y - \sum_{n=1}^{\infty} k_n A_n e^{-k_n x} \cos k_n y = j\omega x_0 - v_n(y) \quad (\text{A.9})$$

Vi multipliserer så alle ledd med $\cosh k_0 y$ og integrerer over intervallet $[0, h]$:

$$-jk_0 A_0 \int_0^h \cosh^2 k_0 y \, dy = j\omega x_0 \int_0^h \cosh k_0 y \, dy - \int_0^h v_n(y) \cosh k_0 y \, dy \quad (\text{A.10})$$

De kjente integralene er gitt ved:

$$\int_0^h \cosh k_0 y \, dy = \frac{1}{k_0} \int_0^{kh} \cosh u \, du = \frac{1}{k_0} \sinh k_0 h = \frac{1}{k_0} P_0 \quad (\text{A.11})$$

$$\int_0^h \cosh^2 k_0 y \, dy = \frac{1}{k_0} \int_0^{kh} \cosh^2 u \, du = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_0} \sinh k_0 h \cosh k_0 h + h \right) \quad (\text{A.12})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma} \sinh^2 k_0 h + h \right) = \frac{h}{2} (CP_0^2 + 1) \quad (\text{A.13})$$

Med dette i hende finner vi at:

$$A_0 = -\frac{2\omega x_0 P_0}{k_0^2 h (CP_0^2 + 1)} - \frac{2j}{k_0 h (CP_0^2 + 1)} \int_0^h v_n(y) \cosh k_0 y \, dy \quad (\text{16}) \quad (\text{A.14})$$

hvor $P_0 = \sinh k_0 h$ og $C = \frac{g}{\omega^2 h}$ er konstanter. Videre har vi fra A.4 at:

$$\mu v_n(y) = -jb\omega\rho \left(A_0 \cosh k_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos k_n y \right) \quad (\text{A.15})$$

Ortogonalitetssegenskapene anvendes igjen og vi får:

$$\int_0^h v_n(y) \cosh k_0 y \, dy = -j\omega\rho A_0 \int_0^h \cosh^2 k_0 y \, dy \quad (\text{A.16})$$

$$= -\frac{j\omega\rho h (CP_0^2 + 1)}{\mu} A_0 \quad (\text{A.17})$$

Ved å kombinere A.15 og A.17 får vi:

$$A_0 = -\frac{2\omega d P_0}{k_0^2 h (C P_0^2 + 1)} - \frac{2}{k_0 h (C P_0^2 + 1)} \frac{b \omega \rho h (C P_0^2 + 1)}{\mu} A_0 \quad (\text{A.18})$$

$$\left(1 + \frac{2b\omega\rho}{k_0\mu}\right) A_0 = -\frac{2\omega d P_0}{k_0^2 h (C P_0^2 + 1)} \quad (\text{A.19})$$

$$A_0 = -\frac{2\omega d P_0}{k_0^2 h (C P_0^2 + 1)(1 + G_0)} \quad (\text{A.20})$$

hvor $G_0 = \frac{k_1}{k_0} G$ og $G = \frac{2b\omega\rho}{\mu k_1}$. Med veldig lignende fremgangsmåte kan man finne at:

$$A_n = -\frac{2\omega d P_0}{k_0^2 h (1 - C P_0^2)(G_n - j)} \quad (\text{A.21})$$

hvor $G_n = \frac{k_1}{k_0} G$. G er en parameter innført av Chwang, og kan tolkes som et Reynoldstall for strømmen gjennom porene.

Trykket, kraften og overflatehevingen

Med potensialet nå fullt ut beskrevet kan vi finne trykket i væsken, hvor vi nå bare interesserer oss for realverdien. Det kan da først være greit å studere strukturen til A_0 og A_n . A_0 består bare av reelle tall, mens den siste dividenden i A_n gjør at dette blir et komplekst tall bestående av både en real- og en imaginærdel.

$$\frac{1}{G_n - j} = \frac{G_n + j}{G_n^2 + 1} \quad (\text{A.22})$$

$$\Re \left\{ \frac{G_n + j}{G_n^2 + 1} \right\} = \frac{G_n}{G_n^2 + 1} = \frac{1}{G_n + G_n^{-1}} \quad (\text{A.23})$$

$$\Im \left\{ \frac{G_n + j}{G_n^2 + 1} \right\} = \frac{1}{G_n^2 + 1} \quad (\text{A.24})$$

Fra A.4 har vi at trykket P er gitt ved:

$$p(0, y, t) = -j\omega\rho\phi(0, y)e^{j\omega t} \quad (\text{A.25})$$

$$= \omega\rho [\phi(0, y)(-j \cos \omega t + \sin \omega t)] \quad (\text{A.26})$$

$$\Re \{p(0, y, t)\} = \omega\rho \left[\cos \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \Im \{A_n\} \cos k_n y + \sin \omega t \left(A_0 \cosh k_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} \Re \{A_n\} \cos k_n y \right) \right] \quad (\text{A.27})$$

Skalert med hensyn på $-\rho\omega^2 x_0 h$ får vi:

$$\frac{p(0, y, t)}{-\rho\omega^2 x_0 h} = C_p \cos \omega t + C_q \sin \omega t \quad (\text{A.28})$$

hvor:

$$C_p = \frac{2}{h^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n \cos(k_n y)}{k_n^2 (1 - CP_n^2)(1 + G_n^2)} \quad (\text{A.29})$$

$$C_q = \frac{2P_0 \cos(k_0 y)}{(hk_0)^2 (1 - CP_0^2)(1 + G_0^2)} + \frac{2}{h^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n \cos(k_n y)}{k_n^2 (1 - CP_n^2)(G_n + G_n^{-1})} \quad (\text{A.30})$$

Vi ser her at vi har én koeffisient C_p i fase med platens bevegelse, og én faseforskjøvet (med $\frac{\pi}{2}$) koeffisient C_q . Ved trigonometriske identiteter kan vi uttrykke disse to som én trykkoeffisient D_p med en fase θ_p :

$$\frac{p(0, y, t)}{-\rho\omega^2 x_0 h} = D_p \cos(\omega t + \theta_p) \quad (\text{A.31})$$

hvor:

$$D_p = (C_p^2 + C_q^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \theta_p = \tan^{-1} \frac{C_q}{C_p} \quad (\text{A.32})$$

Den totale kraften finner vi ved å integrere trykket fra $y = 0$ til $y = h$:

$$\frac{F(x=0, t)}{-\rho h^2 \omega^2 x_0} = \frac{1}{h} \int_0^h (C_p \cos \omega t + C_q \sin \omega t) dy \quad (\text{A.33})$$

$$= C_F \cos \omega t + C_L \sin \omega t \quad (\text{A.34})$$

hvor:

$$C_F = \frac{2}{h^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n^2}{k_n^3 (1 - CP_n^2)(1 + G_n^2)} \quad (\text{A.35})$$

$$C_L = \frac{2P_0^2}{(hk_0)^3 (1 - CP_0^2)(1 + G_0^2)} + \frac{2}{h^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n^2}{k_n^3 (1 - CP_n^2)(G_n + G_n^{-1})} \quad (\text{A.36})$$

På tilsvarende måte som for trykket, kan man beskrive et samlet kraftbidrag D_F med fase θ_F :

$$C_F \cos \omega t + C_L \sin \omega t = D_F \cos(\omega t + \theta_F) \quad (\text{A.37})$$

Overflatehevingen, skalert med x_0 , finner vi ved realdelen til η - som fremkommer av (4):

$$\frac{\eta}{x_0} = -\frac{\omega}{x_0 g} [\phi(x, h)(j \cos \omega t - \sin \omega t)] e^{-\omega t} \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{\Re\{\eta\}}{x_0} = \frac{\omega}{x_0 g} \left[A_0 \cosh k_0 h \sin(k_0 x - \omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} (\Im\{A_n\} \cos k_n h \cos \omega t + \Re\{A_n\} \cos k_n h \sin(\omega t)) e^{-k_n x} \right] \quad (\text{A.39})$$

Vi bruker nå identiteten $-\sin(x) = \sin(-x)$ og definerer E_0 som konstanten i det første leddet ovenfor:

$$-\frac{\omega A_0 \cosh k_0 h}{g x_0} = \frac{2\omega^2 P_0 \cosh kh}{g k_0^2 h (C P_0^2 + 1)(1 - G_0)} \quad (\text{A.40})$$

$$= \frac{2P_0^2}{k_0 h (C P_0^2 + 1)(1 - G_0)} \quad (\text{A.41})$$

$$= E_0 \quad (\text{A.42})$$

Disperasjonsrelasjonen fra ?? er brukt for å forenkle uttrykket.

På lignende vis definerer vi E_n og F_n som:

$$E_n = \frac{2P_n^2}{k_n h (1 - C P_n^2)(1 + G_n^2)} \quad (\text{A.43})$$

$$F_n = \frac{2P_n^2}{k_n h (1 - C P_n^2)(G_n + G_n^{-1})} \quad (\text{A.44})$$

Vi kan nå skrive:

$$\frac{\Re\{\eta\}}{x_0} = E_0 \sin(kx - \omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} (E_n \cos \omega t + F_n \sin \omega t) e^{-k_n x} \quad (\text{A.45})$$

Når $x \rightarrow \infty$ forsvinner summe-leddet, og vi står igjen med en utgående bølge med amplituden E_0 .

Appendiks B

Bølge mot vegg fra bunn til overflate

Vi søker et potensial som oppfyller Laplaced ligningen på henholdsvis høyre og venstre side (merk $-$ tegnet i tidsavhengigheten for samsvar med Molins utledning):

$$\Phi^{h,v} = \Re \left\{ \phi^{h,v}(x, y) e^{-j\omega t} \right\} \quad (\text{B.1})$$

En generell løsningen for det x - og y -avhengige potensialet på hver av sidene kan skrives som:

$$\begin{aligned} \phi^h(x, y) &= \frac{\xi g \cosh k_0 y}{\omega \cosh k_0 h} \left(A_0 e^{jk_0 x} + B_0 e^{-jk_0 x} \right) + \frac{\xi g}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{k_n x} + B_n e^{-k_n x} \right) \cos k_n y \\ \phi^v(x, y) &= \frac{\xi g \cosh k_0 y}{\omega \cosh k_0 h} \left(a_0 e^{jk_0 x} + b_0 e^{-jk_0 x} \right) + \frac{\xi g}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n e^{k_n x} + b_n e^{-k_n x} \right) \cos k_n y \end{aligned}$$

Hvor A_n , B_n , a_n og b_n for $n = [0, 1, \dots, \infty]$ er ukjente koeffisienter.

Vi gjenkjenner det andre leddet i ϕ^h som det tidsuavhengige potensialet for den innkommende bølgen, derav følger det at $B_0 = \xi$. Videre søker vi periodiske funksjoner når $|x| \rightarrow \infty$, kombinert med radiasjonsbetingelsen medfører dette at $A_n = a_n = b_n = 0$:

$$\phi^h(x, y) = \frac{\xi g \cosh k_0 y}{\omega \cosh k_0 h} \left(A_0 e^{jk_0 x} + B_0 e^{-jk_0 x} \right) + \frac{\xi g}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-k_n x} \cos k_n y \quad (\text{B.2})$$

$$\phi^v(x, y) = \frac{\xi g \cosh k_0 y}{\omega \cosh k_0 h} \left(b_0 e^{-jk_0 x} \right) + \frac{\xi g}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{k_n x} \cos k_n y \quad (\text{B.3})$$

Uttrykk for de ukjente koeffisientene

De resterende konstantene finner vi ved anvende krav på plata. Siden vi da hele tiden befinner oss i punktet $x = 0$ er dette utelatt i ligningene, underforstått at alle funksjoner blir evaluert i denne verdien for x . Vi skal også skal heretter betegne B_n og a_n som koeffisientene bare for $n \in [1, 2, \dots, \infty]$.

Massefluksen gjennom veggen må være den samme, vi får derfor at:

$$\frac{\xi g}{\omega} \left[\frac{j k_0 \cosh k_0 y}{\cosh k_0 h} (A_0 - B_0) - \sum_{n=1}^{\infty} k_n B_n \cos k_n y \right] = \frac{\xi g}{\omega} \left[-\frac{j k_0 \cosh k_0 y}{\cosh k_0 h} b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n a_n \cos k_n y \right] \quad (\text{B.4})$$

$$\phi_x^h = \phi_x^v \quad (\text{B.5})$$

Da alle cosh- og cos-ledd er lineært uavhengige må:

$$A_0 - B_0 = -b_0 \quad (\text{B.6})$$

$$-B_n = a_n \quad (\text{B.7})$$

For å få et komplett ligningssystem anvender vi nå ligning () på linearisert form, kombinert med Eulers trykklikning, og får:

$$\phi^v - \phi^h = -\frac{4j}{3\pi\omega} D |\phi_x^h(y)| \phi_x^h(y) \quad (\text{B.8})$$

hvor $D = \frac{1-\tau}{\mu\tau^2}$. For å isolere konstanter på venstresiden utnytter vi ortogonalitetsegenskapene til $\cosh k_0 y$ og $\cos k_0 y$ på intervallet $[0, h]$. Først multipliserer vi begge sider med $\cosh k_0 h$ og integrerer så fra 0 til h . Av $\int_0^h \cos k_n y \cosh k_0 y dy = 0$ følger:

$$\frac{\xi g}{\omega \cosh k_0 h} \left[b_0 \int_0^h \cosh^2 k_0 y dy - (A_0 e^{jk_0 x} + B_0) \int_0^h \cosh^2 k_0 y dy \right] = -\frac{4j}{3\pi\omega} D \int_0^h |\phi_x^h(y)| \phi_x^h(y) \cosh k_0 y dy \quad (\text{B.9})$$

$$b_0 - (A_0 + B_0) = I_0 \quad (\text{B.10})$$

Ider $I_0 = C_0 f_0$, $C_0 = -j \frac{4D \cosh k_0 h}{3\pi\xi g \int_0^h \cosh^2 k_0 y dy}$ og $f_0 = \int_0^h |\phi_x^h(y)| \phi_x^h(y) \cosh k_0 y dy$. Ved å gjenta samme prosedyre med $\cos k_n y$ finner vi at:

$$a_n - B_n = I_n \quad (\text{B.11})$$

hvor $I_n = C_n f_n$, $C_n = -j \frac{4D}{3\pi\xi g \int_0^h \cos^2 k_n y dy}$ og $f_n = \int_0^h |\phi_x^h(y)| \phi_x^h(y) \cos k_n y dy$

Ligning (B.6), (B.7), (B.10), og (B.11) kan nå samles i ett ligningssett, som kan løses numerisk ved iterasjon:

$$\begin{pmatrix} A_0 & b_0 & 0 & 0 & B_0 \\ -A_0 & b_0 & 0 & 0 & I_0 + B_0 \\ 0 & 0 & B_n & a_n & 0 \\ 0 & 0 & -B_n & a_n & I_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}I_0 \\ 0 & b_0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}I_0 + B_0 \\ 0 & 0 & B_n & 0 & -\frac{1}{2}I_n \\ 0 & 0 & 0 & a_n & \frac{1}{2}I_n \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Reversert ligningssett

Dersom τ er liten rapporterer M&F om bedre resultater ved å reversere ligning (B.8) :

$$\phi_x^h = j \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi\omega}{D} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\phi^v - \phi^h}{|\phi^v - \phi^h|^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{B.13})$$

Som i forrige seksjon utnytter vi ortogonalitetsegenskaper:

$$A_0 - B_0 = \hat{I}_0 \quad (\text{B.14})$$

$$\text{Hvor } \hat{I} = C_0 f_0, \hat{C}_0 = \frac{1}{2} \frac{\omega \cosh k_0 h \left(\frac{3\pi\omega}{D} \right)^{\frac{1}{2}}}{k_0 \xi g \int_0^h \cosh^2 k_0 y dy} \text{ og } f_0 = \int_0^h \frac{\phi^v - \phi^h}{|\phi^v - \phi^h|^{\frac{1}{2}}} \cosh k_0 y dy$$

Videre har vi at:

$$B_n = \hat{I}_n \quad (\text{B.15})$$

$$\text{Hvor } \hat{I} = \hat{C}_n \hat{f}_n, \hat{C}_n = j \frac{1}{2} \frac{\omega \left(\frac{3\pi\omega}{D} \right)^{\frac{1}{2}}}{k_0 \xi g \int_0^h \cosh^2 k_0 y dy} \text{ og } \hat{f}_0 = \int_0^h \left[\frac{\phi^v - \phi^h}{|\phi^v - \phi^h|^{\frac{1}{2}}} \right]_{x=0} \cosh k_0 y dy$$

Kombinerer vi nå (B.6) (B.7), (B.14) og (B.15), ender vi opp med et nytt ligningssett:

$$\begin{pmatrix} A_0 & b_0 & 0 & 0 & B_0 \\ A_0 & 0 & 0 & 0 & \hat{I}_0 + B_0 \\ 0 & 0 & B_n & a_n & 0 \\ 0 & 0 & B_n & 0 & I_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0 & \hat{I}_0 + B_0 \\ 0 & b_0 & 0 & 0 & -\hat{I}_0 \\ 0 & 0 & B_n & 0 & \hat{I}_n \\ 0 & 0 & 0 & a_n & -\hat{I}_n \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Appendiks C

γ -funksjonen

Vi har funnet at:

$$\gamma(y) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ PV \int_{-1}^1 \frac{u(b)(1-b^2)^{\frac{1}{2}}}{b-y} db + C \right\} \quad (\text{C.1})$$

Vi antar så at $u(b)$ kan skrives som et polynom $u = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{A}_m b^m$. Dersom vi så skriver $b = \cos \alpha$, kan vi eksakt skrive om u til en fourierrekke bestående utelukkende av $\cos m\alpha$ -ledd, hvor $n \leq m$ for endelige rekker.

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\alpha \quad (\text{C.2})$$

Vi foretar derfor transformasjonen:

$$b = \cos \alpha \quad (\text{C.3})$$

$$y = \cos \theta \quad (\text{C.4})$$

$$db = -\sin \alpha \quad (\text{C.5})$$

Som gjør at PV-integralet kan skrives som:

$$\sum_{n=0}^{\infty} PV \int_0^{\pi} \frac{A_n \cos n\alpha (1 - \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} \sin \alpha}{\cos \alpha - \cos \theta} d\alpha \quad (\text{C.6})$$

Integralet over kan løses ved å anvende Glauert-integralene

$$PV \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos \alpha - \cos \theta} d\alpha = 0 \quad (\text{C.7})$$

og

$$PV \int_0^{\pi} \frac{\cos n\alpha}{\cos \alpha - \cos \theta} d\alpha = \pi \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \quad \text{for } n \geq 1 \quad (\text{C.8})$$

Vi betegner I_n som integralet forbundet med n-te ledd i ligning (C.6), For I_0 får vi:

$$I_0 = \int_0^{\pi} \frac{(1 - \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} \sin \alpha}{\cos \alpha - \cos \theta} d\alpha \quad (\text{C.9})$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(1 - \cos^2 \alpha)}{\cos \alpha - \cos \theta} d\alpha \quad (\text{C.10})$$

$$= - \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha - \cos \theta} d\alpha \quad (\text{C.11})$$

$$= - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\cos(2\alpha)}{\cos \alpha - \cos \theta} d\alpha \quad (\text{C.12})$$

$$= - \frac{1}{2} \pi \frac{\sin(2\alpha)}{\sin \alpha} \quad (\text{C.13})$$

$$= -\pi \cos \alpha \quad (\text{C.14})$$

Mens vi for øvrige I_n finner at:

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\alpha) \sin^2 \alpha}{\cos \alpha - \cos \theta} d\alpha \quad (\text{C.15})$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\alpha) \sin^2 \alpha}{\cos \alpha - \cos \theta} d\alpha \quad (\text{C.16})$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \frac{(2 \cos(n\alpha) - \cos[(2-n)\alpha] - \cos[(2+n)\alpha])}{\cos \alpha - \cos \theta} d\alpha \quad (\text{C.17})$$

$$= \frac{\pi \sin[(2-n)\theta] + 2 \sin(n\theta) - \sin[(2+n)\theta]}{4 \sin \theta} \quad (\text{C.18})$$

$$= \pi \frac{\sin^2 \theta \sin(n\theta)}{\sin \theta} \quad (\text{C.19})$$

Ser vi tilbake til ligning () ender vi nå opp med:

$$\gamma(\theta) = \frac{2}{\pi \sin \theta} \left(-\pi A_0 \cos \theta + \pi \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \theta \sin(n\theta) + C \right) \quad (\text{C.20})$$

$$= 2 \left(A_0 \cot \theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) + \frac{C}{\pi \sin \theta} \right) \quad (\text{C.21})$$

hvor faktoren -1 er trekt inn i A_0

Dersom vi antar at sirkulasjonen rundt plata er null har vi at:

$$\int_0^{\pi} \gamma(\theta) \sin \theta \, d\theta = 0 \quad (\text{C.22})$$

$$\int_0^{\pi} \left(A_1 \sin \theta + \frac{C}{\sin \theta} \right) \sin \theta \, d\theta = 0 \quad (\text{C.23})$$

$$C = -\frac{1}{2} A_1 \quad (\text{C.24})$$

Vi kan nå slå sammen A_1 - og C -leddet fra (C.21):

$$\frac{A_1(\sin^2 \theta - \frac{1}{2})}{\sin \theta} = -\frac{A_1}{2} \frac{\cos(2\theta)}{\sin \theta} \quad (\text{C.25})$$

Og dermed skrive:

$$\gamma(\theta) = 2 \left(A_0 \cos \theta + A_1 \frac{\cos(2\theta)}{\sin \theta} + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \right) \quad (\text{C.26})$$

Hvor faktoren $-\frac{1}{2}$ fra (C.25) er trekt inn i A_1 .

Appendiks D

I_2 og I_4

La oss betegne det komplekse integralet fra () forbundet med k_4 og k_2 henholdsvis som $I_4(z)$ og $I_2(z)$. For generalitetens skyld vil vi her skrive $c = a + ib$, selv om $\Re_i = 0$ i den vertikale platens tilfelle.

I_4

Vi studerer først I_4 , definert som:

$$I_4(z) = e^{-ik_4 z} \int_C \frac{e^{ik_4 u}}{u - \bar{c}} du \quad (\text{D.1})$$

Ved å trekke $e^{ik_4 \bar{c}}$ ut av integranden kan vi skrive:

$$I_4 = e^{-ik_4(z - \bar{c})} \int_C \frac{e^{ik_4(u - \bar{c})}}{ik_4(u - \bar{c})} ik_4 du \quad (\text{D.2})$$

Ved substitusjonen

$$w = -ik_4(u - \bar{c}) \quad (\text{D.3a})$$

$$dw = -ik_4 du \quad (\text{D.3b})$$

$$w(z) = w_0 = -ik_4(z - \bar{c}) = k_4(y + b) + ik_4(a - x) \quad (\text{D.3c})$$

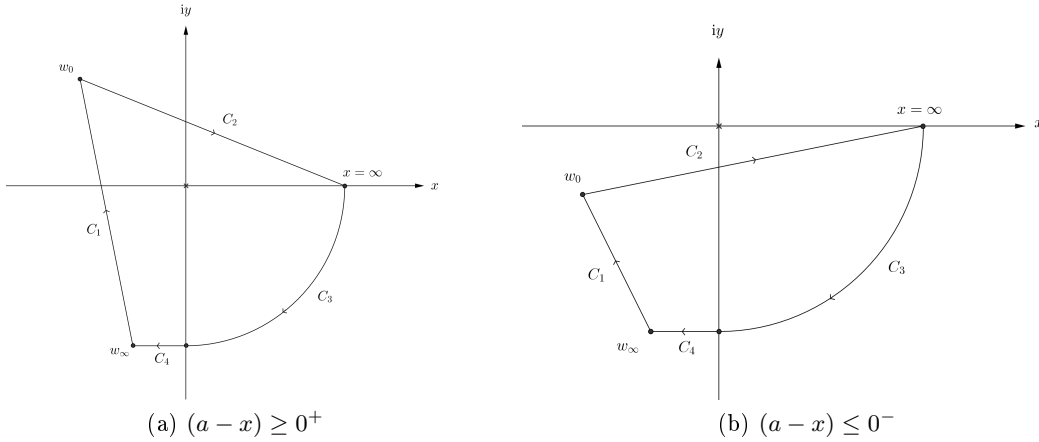
$$w(C) = w_\infty = -ik_4(\infty - \bar{c}) = bk_4 - i\infty \quad (\text{D.3d})$$

får vi:

$$I_4 = e^{w_0} \int_{w_\infty}^{w_0} \frac{e^{-w}}{w} dw \quad (\text{D.4})$$

For å løse dette integralet defineres først integranden som $f(w) = \frac{e^{-w}}{w}$. Deretter integrerer vi f over den lukkede kurven $\Gamma = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ (se figur D.1) og har da fra residueteori (Henrici (1986)) at:

$$\left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} \right) f(w) dw = \begin{cases} -2\pi i & \text{for } (a-x) \geq 0^+ \\ 0 & \text{for } (a-x) \leq 0^- \end{cases} \quad (\text{D.5})$$



Figur D.1: Skisse av Γ

De fire integralene over studerer vi nå hver for seg, gjenkjent som:

$$\hat{I}_n = \int_{C_n} f(w) dw \quad \text{for } n = [1, 2, 3, 4] \quad (\text{D.6})$$

Dersom vi skriver $w = re^{i\theta}$ innser vi at:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{e^{-re^{i\theta}}}{re^{i\theta}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{e^{-re^{i\theta}} e^{-i\theta}}{r} = 0 \quad \text{for } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \quad (\text{D.7})$$

og dermed at $\hat{I}_3 = 0$. Videre er:

$$\hat{I}_4 = \int_{-i\infty}^{-bk_4 - i\infty} \frac{e^{-w}}{w} dw \quad (\text{D.8})$$

Vi benytter oss nå av substitusjonen

$$u(w) = w + i\infty \quad (\text{D.9})$$

$$du = dw \quad (\text{D.10})$$

$$u(-i\infty) = 0 \quad (\text{D.11})$$

$$u(-bk_4 - i\infty) = -bk_4 \quad (\text{D.12})$$

som gir:

$$I_4 = \int_0^{-bk_4} \frac{e^{-(u-i\infty)}}{u-i\infty} du \quad (\text{D.13})$$

$$= \int_0^{-b} \frac{(u+i\infty)e^{-(u-i\infty)}}{u^2 + \infty^2} du \quad (\text{D.14})$$

$$= 0 \quad (\text{D.15})$$

Av de to siste resultatene kan vi skrive:

$$\hat{I}_1 = \begin{cases} -2\pi i - \hat{I}_2 & \text{for } (x-a) \leq 0^- \\ -\hat{I}_2 & \text{for } (x-a) \geq 0^+ \end{cases} \quad (\text{D.16})$$

\hat{I}_1 gjenkjennes som integralet fra ligning (D.1), mens \hat{I}_2 kan skrives som det komplekse eksponentsialintegralet $E_1(z)$ (Abramowitz. & Stegun (1964)):

$$\hat{I}_2 = \int_{w_0}^{\infty} \frac{e^{-w}}{w} dw = E_1(w_0) \quad (\text{D.17})$$

Endelig resultat er derfor:

$$I_4 = \begin{cases} -e^{w_0}(2\pi i + E_1(z)) & \text{for } (x-a) \leq 0^- \\ -e^{w_0} E_1(z) & \text{for } (x-a) \geq 0^+ \end{cases} \quad (\text{D.18})$$

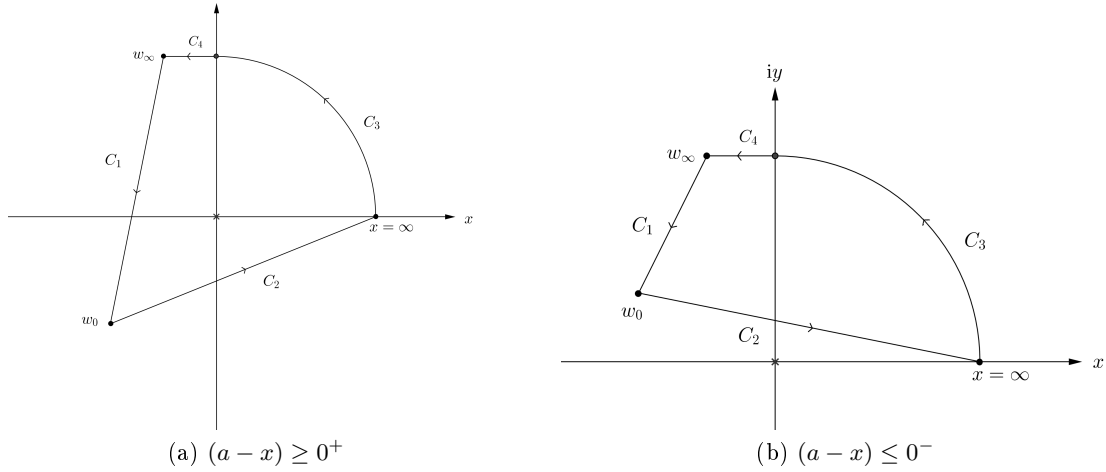
I_2

For k_2 blir problemstillingen nesten identisk. Ved å foreta den samme substitusjonen som i (D.3), bare med $C = -\infty$ og k_4 byttet ut med k_2 , så ender vi opp med:

$$I_2 = e^{w_0} \int_{w_\infty}^{w_0} \frac{e^{-w}}{w} dw \quad (\text{D.19})$$

Argumentasjonen for å finne I_2 blir svært lik som for I_4 . En forskjell er at Γ skifter retning og roteres (se figur 2), noe som fører til at:

$$\int_{\Gamma} f(w) dw = \begin{cases} 0 & \text{for } (a-x) \geq 0^+ \\ -2\pi i & \text{for } (a-x) \leq 0^- \end{cases} \quad (\text{D.20})$$



Figur D.2: Skisse av Γ

Analogt til seksjonen over kan vi beskrive integralet over konturen C_n som \tilde{I}_n , med samme definisjon som i (D.6). Resultatet fra (D.7) gjelder også for \tilde{I}_3 , mens et fortegnsskifte for ∞ -leddene i (D.8) ikke har noen innvirkning på utfallet – dermed blir også $\tilde{I}_4 = 0$. Igjen kan vi skrive $\hat{I}_2 = E_1(w_0)$, mens vi for \hat{I}_1 får:

$$\hat{I}_1 = \begin{cases} -\hat{I}_2 & \text{for } (x - a) \leq 0^- \\ -2\pi i - \hat{I}_2 & \text{for } (x - a) \geq 0^+ \end{cases} \quad (\text{D.21})$$

Edelig resultat blir dermed:

$$I_2 = \begin{cases} -e^{wz} E_1(z) & \text{for } (x - a) \leq 0^- \\ e^{wz} (2\pi i - E_1(z)) & \text{for } (x - a) \geq 0^+ \end{cases} \quad (\text{D.22})$$

På plata

Vi ønsker spesielt   studere I_2 og I_4 på plata, altså hvor $x = a$. For   studere grensene på hver side av plata skriver vi $z_0^\pm = a^\pm + iy$. Ved   bruke identiteten (Abramowitz. & Stegun (1964))

$$E_1(-x \pm i0) = -Ei(x) \mp i\pi \text{ for } x > 0 \quad (\text{D.23})$$

innser vi at $I_4(z_0^+) = I_4(z_0^-)$ og $I_2(z_0^+) = I_2(z_0^-)$, og dermed at:

$$\left. \begin{aligned} I_4 &= e^{w_0^4} [Ei(-w_0^4) - i\pi] \\ I_2 &= e^{w_0^2} [i\pi + Ei(-w_0^2)] \end{aligned} \right\} \text{ for } (x - a) = 0 \quad (\text{D.24})$$

der potens-indeksen angir hvilken $k \in [k_2, k_4]$ som skal brukes i uttrykket for w_0 .

Appendiks E

Numeriske metoder

Alle løsninger presentert i kapittel 2-4 er implementert i Python. For regneoperasjoner utenom elementær numerikk er funksjonene `integrate.quad` og `special.expi` importert fra `scipy`-biblioteket. `quad` tilbyr numerisk integrasjon med samme teknikker som brukt i Fortran-biblioteket `QUADPAK`, mens `expi` gjengir rekken for $Ei(x)$, presentert av Abramowitz. & Stegun (1964). PV-integralet i An&Faltinsens ligning (17b) er integrert direkte ved å gi tilleggsargumentet `wvar=a` (hvor `a` angir det singulære punktet) i `quad`-funksjonen.

Det skal videre konsentreres om utregninger for løsningene fra kapittel 3 og 4. Utfordringen ligger da i å finne de ukjente koeffisientene til γ . Ligning (3.53), (3.55), (3.56) og (4.26) løses alle for en trunkert γ med N ukjente koeffisienter. To forskjellige metoder med hver sine styrker har blitt brukt i utregningene: en kollokasjonsmetode og en integrasjonsmetode.

Kollokasjonsmetoden

Vi observerer at u på plata (se 3.41 og 4.22) er en lineærkombinasjon på formen:

$$u = \sum_{n=0}^N u_n(\theta) A_n \quad (\text{E.1})$$

hvor u_n er lineært uavhengige funksjoner av θ . La oss for et diskret punkt θ_m definere $u_n(\theta_m) = u_{mn}$. Ved å anvende summe-notasjon, kan vi skrive:

$$u(\theta_m) = u_{mn} A_n \quad (\text{E.2})$$

På samme måte introduseres matrisen S , forbundet ved:

$$\frac{\Delta\phi(\theta_m)}{L} = S_{mn} A_n \quad (\text{E.3})$$

Når vi samler diskret punkter, kan vi kan skrive (3.55) som:

$$S_{mn} A_n = -i(u_{mn} A_n - v_p) |u_{mn} A_n - v_p| \quad (\text{E.4})$$

Eller på reversert form som:

$$u_{mn} A_n = i \frac{S_{mn} A_n}{(K |S_{mn} A_n|)^{\frac{1}{2}}} + v_p \quad (\text{E.5})$$

Vi har dermed en matriseligning på formen:

$$M\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{E.6}$$

Når vi lar $m > n$ får vi en minste kvadrats tilnærming som finnes ved:

$$M^T M\mathbf{x} = M^T \mathbf{b} \tag{E.7}$$

Styrken til denne metoden er at den er rett frem å implementere, men et problem (diskutert under) oppstår når plata ligger i overflaten.

Integrasjonsmetoden

Nevnte ligninger kan også løses ved å multiplisere hver av sidene med $\sin([m + 1]\theta)$ for $m \in [0, 1, \dots, N-1]$, og deretter integrere med hensyn på θ fra 0 til π . Man får dermed et $N \times N$ ligningssett som kan løses ved lineær algebra. Årsaken til at sinus-funksjoner brukes fremfor for eksempel cosinus-funksjoner, er at (3.41) og (4.22) inneholder Ei-funksjonen og leddet $\frac{1}{y+b}$, som begge går mot uendelige størrelser når $b = 0$ og $y \rightarrow 0$. Men siden $\lim_{x \rightarrow 0} \text{Ei}(x) \sin nx = 0$ og $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin nx = n$, omgå dette problemet ved et slikt valg av lineært uavhengige funksjoner.

Alle venstresider av ligningene (multiplisert med $\sin([m + 1]\theta)$) integreres ved hjelp av quad-funksjonen. Høyresidene derimot må oppdateres for hver Picard-iterasjon, integrasjonen blir derfor utført med em Simpsons regel algoritme, som er mye mindre CPU-krevende enn quad. Det er funnet at en inndeling i 250 diskret punkter er tilstrekkelig for denne algoritmen. Siden $\Delta\phi(0, 0) = 0$ er en evaluering av u for å uttrykke høyresiden, ikke nødvendig i punktet $y = b_0 = 0$. Ulempen med denne metoden er at den i forhold til kollokasjonsmetoden er veldig tidkrevende.

Picarditerasjon

Når vi bruker den kvadratiske relasjonen mellom trykket og hastigheten på veggen, får vi ligninger som må løses med iterative metoder. For alle utregninger er Picard-iterasjon anvendt, en metode som best lar seg forklare med et eksempel:

Vi ønsker å finne en løsning for den ikke-lineære ligningen:

$$f(x) = x \cos(x) + 1 = 0 \tag{E.8}$$

Vi starter med å gjette en verdi $\hat{x} = x_0$ og lineariserer så (E.8) med denne verdien:

$$x \cos(\hat{x}) + 1 = 0 \tag{E.9}$$

Fra ligningen over finner vi en ny løsning x_1 . Ved å summere x_0 og x_1 finner vi en ny verdi til å bruke i lineariseringen $\hat{x} = (1 - v)x_1 + vx_0$. Relaksjonsparameteren $v \in (0, 1]$ er introdusert for å unngå oskillelige og divergerende løsninger. Prosedyren gjentas frem til et konvergenskrav er nådd. Tabell E.1 Viser den tilnærmede løsningen av (E.8) etter 20 iterasjoner.

n	x_n	$\hat{x} - x_n$	$f(x_n)$
0	-2	n/a	-2.16770632691
1	-3.03643911463	1.04179877703	0.0196672188214
2	-3.03248382366	0.00535966239931	0.0144512628805
...
20	-3.02174239692	1.83048394473e-05	6.60814258922e-05

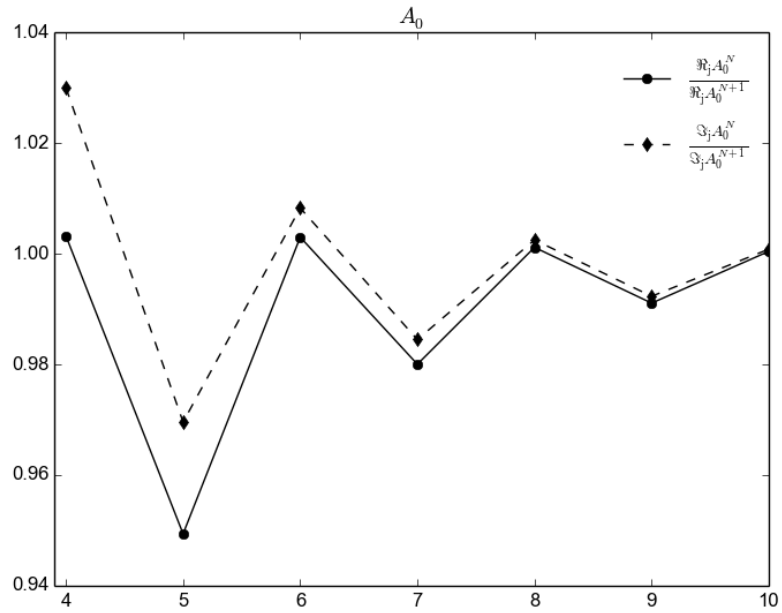
Tabell E.1

Koeffisienter og tester

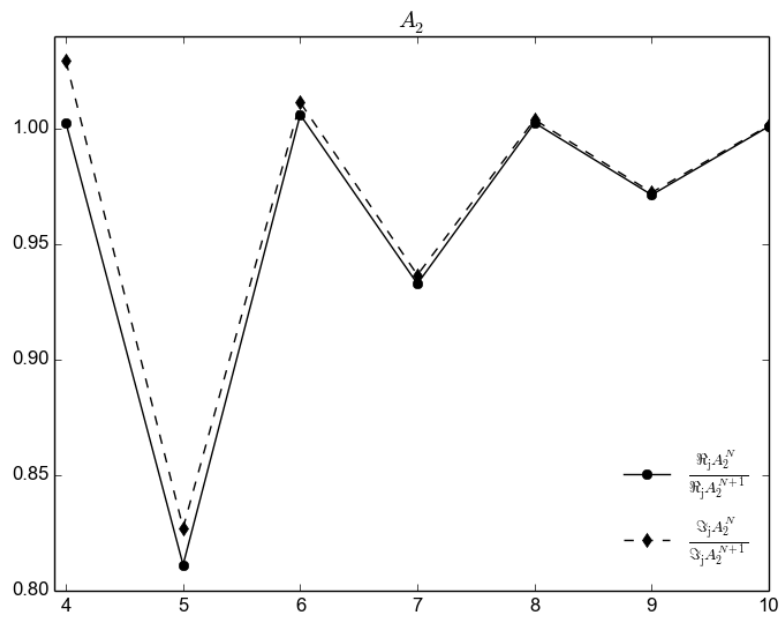
I kapittel 2 er $N = 10$ komponenter brukt i utregningene, grafisk samsvar med originalforfatterne er her brukt som kriterium. I kapittel 3 er $N = 8$ komponenter brukt i utregningene, da An&Faltinsen oppgir tilfredsstillende konvergens for dette antallet.

En konvergenstest er utført for en solid plate skjærende i overflaten for $Fr = 0.05$. Siden A_0 og A_2 er koeffisientene som bestemmer den lineære kraften, er disse antatt som representanter for konvergens. Figur E.1 viser real- og imaginærdelen til A_0 og A_2 funnet ved N koeffisienter, delt på real- og imaginærdelen funnet ved $N + 1$ koeffisienter $N \in [3, 4, \dots, 8]$. Koeffisientene er funnet ved integrasjonsmetoden, som ble viste seg å være mest stabil når $Fr > 0$.

Det er sjekket at løsningen fra seksjon 4.1 gir samme svar som løsningen fra seksjon 3.3 når $U = 0$. Det er også testet for at kollokasjonsmetoden og integrasjonsmetoden gir tilnærmet samme svar for en ikke-lineær løsning. Når $U = 0$ stemte metodene godt overens, men når en strøm ble tilført ble det raskt problemer med konvergens for kollokasjonsmetoden. Dette kan ha med å gjøre at for $Fr > 0$ må to forskjellige ligninger på veggen brukes, avhengige av om U er større eller mindre enn $v_n(y)$ i et punkt. Denne betingelsen ble inkorporert i iterasjonsprosessen for begge metodene.



a)



b)

Figur E.1: Forholdet mellom real- og imaginærdelen for N og $N + 1$ koeffisienter for a) A_0 og b) A_2

Med utgangpunkt i figuren over er $N = 8$ koeffisienter brukt også i kapittel 4. For små kL for $Fr \geq 0.02$ oppstod det imidlertid ustabiliteter, og $N = 6$ ble da brukt for å komplettere grafene.

For alle utregninger gjort i oppgaven er det krevd at absoluttverdien til differansen mellom en funnet koeffisient A_n og den forrige tippede \hat{A}_n skal være mindre enn 10^{-6}

Referanser

- Abramowitz., M. & Stegun, I. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 1964.
- An, Song & Faltinsen, O.M. An linear free-surface effects on a horizontally submerged and perforated 2d thin plate in finite and infinite water depths. *Applied Ocean Research* 37, 2012.
- Chwang, A. Interaction between porous media and wave motion. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1998. 30:53-84, 1998.
- Chwang, A.T. Effect of stratification on hydrodynamic pressures on dams. *Journal of Engineering Mathematics, Volume 15, Issue 1, pp 49-63*, 1981.
- Chwang, A.T. A porous-wavemaker theory. *J. Fluid Mech. (1983), vol. 132, p p . 395-406*, 1983.
- Crowley, S. & Porter, R. An analysis of screen arrangements for a tuned liquid damper. *Journal of Fluids and Structures* 34, 291-309, 2012.
- Evans, D.V. Diffraction of water waves by a submerged vertical plate. *J. Fluid Mech vol. 40, 433-4513*, 1969.
- O.Faltinsen, Firoozkoohi R. Timokha-A.N. Steady-state liquid sloshing in a rectangular tank with a slat-type screen in the middle: quasilinear modal analysis and experiments. *Physics of Fluids* 23, 042101, 2011.
- Faltinsen, O.M. *Sea Loads On Ships And Offshore Structures*. Cambridge University Press, 1990.
- Faltinsen, O.M. Hydrodynamics of marine and offshore structures. *Journal of Hydrodynamics, p. 835-847*, 2014.
- Gjevik, B. & Fagerland, M.W. *Feltteori og vektoranalyse*. 2014.
- Glauert, Hermann. *The elements of aerofoil and airscrew theory*. Cambridge University Press, 1983.
- Grue, J. & Palm, E. Wave radiation and wave diffraction from a submerged body in a uniform current. *J. Fluid Mech, vol 151, pp.257-278*, 1985.

- Grue, J. & Palm, E. The influence of a uniform current on slowly varying forces and displacements. *Applied Ocean Research, Volume 8, Issue 4*, p. 232-239, 1986.
- Grue, J. & Palm, E. The propulsion of a foil moving in water waves. *J. Fluid Mech vol. 186*, 393-417, 1987.
- Henrici, Peter. *Applied and Computational Complex Analysis, vol. 3*. Willey, John & Sons, Inc, 1986.
- Huijsmans, R.M. *Mathematical Modeling of the Mean Wave Drift Force in Current : A Numerical and Experimental Study*. PhD thesis, PhD-thesis, Delft University of Technology, 1996.
- Jarlan, G. A perforated vertical wall breakwater. *Dock Harbor Auth. 41:394- 98*, 1961.
- Klebert, P. Hydrodynamic interactions on net panel and aquaculture fish cages: A review. *Ocean Engineering 58 260-274*, 2013.
- Koo, J.-K & James, D.F. Fluid flow around and through a screen. *J. Fluid Mech. 60*, 513-538., 1973.
- Kristiansen, T. & Faltinsen, O.M. Modeling of current loads on aquaculture net cages. *Journal of Fluids and Structures, 34: 218-235.*, 2012.
- Lader, Pål F. & Fredheim, Arne. Dynamic properties of a flexible net sheet in waves and current—a numerical approach. *Aquacultural Engineering 35 (2006) 228-238*, 2006.
- Lee, C.W.; Kim, Y.B.; Lee, G.H.; Choe, M.Y.; Lee, M.K., & Koo, K.Y. Dynamic simulation of a fish cage system subjected to currents and waves. *Ocean Eng. 35*, 1521-1532, 2008.
- Loeland, G. Current forces on, and water flow through and around, floating fish farms. *Aquacult. Int. 1*, 72-89., 1993.
- Logan, J.D. *Applied Mathematics, 4th Edition*. Willey, John & Sons, Inc, 2013.
- Massey, & Ward-Smith, . *Mechanics of fluids*. CRC Press, 1998.
- Mei, C.C. *The applied dynamics of ocean surface waves*. World Scientific, 1983.
- Molin, B. Hydrodynamique du stabilisateur. *IFP reoprt 38 368*, 1990.
- Molin, B. Hydrodynamic modeling of perforated structures. *Applied Ocean Research 33*, 1-11, 2011.
- Molin, B. & Remy, F. Experimental and numerical study of the sloshing motion in a rectangular tank with a perforated screen. *Journal of Fluids and Structures 43 463-480*, 2013).
- Molin, B.; Clark, F. J., & Malenica, S. Wave and current forces on a vertical cylinder free to surge andsway. *Applied Ocean Research 17 79-90*, 1995.
- Molin, B. & Fourest J-M. Numerical modeling of progressive wave absorbers. *In: Proc. 7th int. workshop water waves & floating bodies.*, 1992.

- Newman, J.N. *Marine Hydrodynamics*. MIT Press, 1977.
- Prins, H. J. Time-domain calculations of drift forces and moments. Master's thesis, TU Delft, 1995.
- Tait, M.J.; Damatty, A. El; Isyumov, N., & Siddique, M.R. Numerical flow models to simulate tuned liquid dampers (tld) with slat screens. *Journal of Fluids and Structures* 20 1007-1023, 2005).
- Taylor, G.I. Fluid flow in regions bounded by porous surfaces. *Proc. R. Soc. London Ser. A* 234:456-75, 1956.
- Tolstov, G.P. *Fourier Series*. Dover Publications Inc., 1976.
- Wehausen, J.V. & Laitone, E.V. *Surface waves*. (Online edition), 1960.
- Zhao, R. & Faltinsen, O.M. Interaction between waves and current on a two-dimensional body in the free surface. 1988.