Matematisk Seminar
Universitetet i Oslo

Nr. 12
November 1963

QUELQUES REMARQUES SUR LA COHOMOLOGIE ET L'HOMOLOGIE D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE

Par

Olav Arnfinn Laudal

INTRODUCTION

Dans une suite de traveaux ((3)) , ((4)) , ((5)) Zeeman a démontré des théoremes intéressants sur les sujets suivants

1. Les relations entre différentes théories d'homologie et de cohomologie.
2. La théorie spectrale des applications simpliciales et continues.
3. La dualité de Poincaré des espaces généraux.

Le but de cet exposé est de montrer comment ces résultats peuvent être obtenues par la méthode introduit par l'auteur dans ((2)) . Les résultats qui vont être exposés sont donc pour la plupart dû originalement à Zeeman. Les points clefs de notre exposé sont les lemmes 1. et 2. qui ensemble montrent que la théorie singulière des espaces topologiques entre dans le context des ensembles ordonnés. Le lemme 2. étant abordée vaguement dans ((2)) , a récémment été démontré par Mr. John Johnsen à qui nous exprimons notre gratitude de nous l'avoir communiqué.

Une fois les lemmes 1. et 2. démontrées, le reste suit immediatement de la théorie générale de ((2)) . Ceci explique naturellement la pauvrété des démonstration ci-dessous.

§ 1.

Nous rapplons ici quelques résultats sur les limites projectives et inductives. Pour un exposé détaillé le lecteur pourra consulter ((2)) .

Soit Λ un ensemble ordonné, et soit Λ_o un sous-ensemble de Λ . Par $\hat{\Lambda}_o$ nous noterons le sous-ensemble de Λ des éléments qui sont plus petits qu'un élément de Λ_o .

Par Λ^o nous noterons l'ensemble Λ muni de l'ordre opposé.

On peut considérer tout ensemble ordonné comme une catégorie. Soit donc

L un anneau et Mod_L la catégorie des L-modules et homomorphismes de tels, alors on peut considérer la catégorie des foncteurs sur Λ à valeurs dans Mod_L. Nous noterons cette catégorie par $\mathcal{C}$, et tout objet F de $\mathcal{C}$ sera appellé un système projectif sur Λ à valeurs dans Mod_L.

On sait que $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne possédant suffisemment d'objets projectifs et injectifs.

Pour tout sous-ensemble Λ_o de Λ nous avons défini un foncteur covariant, exact à gauche (resp. à droite)

$$\varprojlim_{\Lambda/\Lambda_o} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Mod}_L$$

$$\left(\text{resp.} \quad \varinjlim_{\Lambda/\Lambda_o} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Mod}_L\right)$$

et un foncteur resolvant (terminologie de Grothendieck, voir Tohôku)

$$\prod_{\Lambda/\Lambda_o}^{\cdot} \qquad \left(\text{resp.} \quad \coprod_{\cdot}^{\Lambda/\Lambda_o}\right)$$

sur la catégorie $\mathcal{C}$ à valeurs dans la catégorie des complexes de cochaînes (resp. de chaînes) sur la catégorie Mod_L ; c'est á dire tel que le foncteur

$$F \rightsquigarrow H^{\circ}\Big(\prod_{\Lambda/\Lambda_o}^{\cdot} F\Big)$$

$$\left(\text{resp.} \quad G \rightsquigarrow H_{\circ}\Big(\coprod_{\cdot}^{\Lambda/\Lambda_o} G\Big)\right)$$

s'identifie avec le foncteur

$$\varprojlim_{\Lambda/\Lambda_o}{}^{(\cdot)} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Mod}_L$$

$$\text{(resp.} \quad \varinjlim_{\Lambda/\Lambda_o}{}_{(\cdot)} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Mod}_L \text{) .}$$

L e m m e 1 . Soit $E = \{En\}$ $n \geqslant 0$ un ensemble semi-simplicial, et soit $E' = \{E'n\}_{n \geqslant 0}$ un sous-ensemble semi-simplicial de E . Supposons que pour tout p et tout $e_p \in E_p$ l'ensemble semi-simplicial $\hat{e}_p$ des faces de e_p est ascyclique.

Considérons E comme un ensemble ordonné par la relation "face" et considérons tout L -module M comme un système projectif constant sur E . Nous avons alors un isomorphisme de δ -foncteurs (resp. de ∂ -foncteurs)

$$\varprojlim_{E/E'}{}^{(\cdot)} M \simeq H^{\circ}(E,E' ; M)$$

$$\text{(resp.} \quad \varinjlim_{E/E}{}_{(\cdot)} M \simeq H_{\cdot}(E,E' ; M) \text{)}$$

§2.

Soit X un espace topologique. Nous désignons par O_X l'ensemble ordonné, par inclusion, des ouverts non vides de X , par M_X l'ensemble des recouvrements ouverts de X , et si $\mathfrak{U} \in M_X$, par $\hat{\mathfrak{U}}$ l'ensemble des $O \in O_X$ petits d'ordre $\mathfrak{U}$.

De même nous désignons par $E(X)$ l'ensemble semi-simplicial des simplexes singuliers de X. Si $\mathcal{U} \in M_X$ on désigne par $E_{\mathcal{U}}(X)$ le sous-ensemble de $E(X)$ des simplexes singuliers petits d'ordre $\mathcal{U}$.

Il est facile de voir que $E(X)$ ne satisfait pas à la condition du Lemme 1. Pour remedier cette situation on considère le sous-ensemble semi-simplicial $E'(X)$ (resp. $E'_{\mathcal{U}}(X)$) de $E(X)$ (resp. $E_{\mathcal{U}}(X)$) des simplexes singuliers

$$\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$$

tels que σ distingue les sommets du simplexe type Δ_p .

Il est facile de voir que $E'(X)$ (resp. $E'_{\mathcal{U}}(X)$) satisfait aux conditions du Lemme 1. De plus on a le:

L e m m e 2 . (John Johnsen). Pour tout espace topologique T_1 , X , l'injection canonique

$$E'(X) \longrightarrow E(X)$$

$$(\text{resp.} \quad E'_{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow E_{\mathcal{U}}(X) \;)$$

est une equivalence d'homotopie. En particulier elle induit des isomorphisms en homologie et en cohomologie.

La démonstration étant longue et assez technique ne sera pas donnée ici.

Utilisant ce lemme et le théorème (8.5.1) de ((1)) nous constat ons que pour tout $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in M_X$, $\mathcal{U} > \mathcal{V}$, l'injection canonique $E'_{\mathcal{V}}(X) \subset E'_{\mathcal{U}}(X)$ induit des isomorphismes en homologie et en cohomologie.

Etant donné en ensemble S quelconque, notons par $\mathcal{P}\, S$ l'ensemble ordonné des sous-ensembles de S .

§3.

Pour tout $\mathcal{U} \in M_X$ considérons alors l'application:

$$\mathcal{H} : \hat{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{P}\, E'(X)$$

définie par:

$$\mathcal{H}(0) = \{\sigma \mid \sigma \in E'(X) \ , \ \sup(\sigma) \subsetneq 0\}$$

Il est clair que si $0 \subset 0'$ alors

$$\mathcal{H}(0) \subset \mathcal{H}(0')$$

Donc nous avons un homomorphisme de double complexes:

$$\prod^{\cdot}_{E'_{\mathcal{U}}(X)} \longrightarrow \prod^{\cdot}_{\hat{\mathcal{U}}} \prod^{\cdot}_{\mathcal{H}(0)}$$

(1)

$$\text{(resp.} \quad \coprod_{\cdot}^{\hat{\mathcal{U}}^{\circ}} \coprod_{\cdot}^{\mathcal{H}(0)^{\circ}} \longrightarrow \coprod_{\cdot}^{E'_{\mathcal{U}}(X)^{\circ}} \quad)$$

Utilisant le théorème (3.1) de ((2)) nous savons que cet homomorphisme induit des isomorphismes en cohomologie (resp. homologie).

L'homomorphisme (1) induit un homomorphisme:

$$\coprod_{\cdot}^{M_X} \prod^{\cdot}_{E'_{\mathcal{U}}(X)} \longrightarrow \coprod_{\cdot}^{M_X} \prod^{\cdot}_{\hat{\mathcal{U}}} \prod^{\cdot}_{\mathcal{H}(0)}$$

$$\text{(resp.} \quad \prod^{\cdot}_{M_X^{\circ}} \coprod_{\cdot}^{\hat{\mathcal{U}}^{\circ}} \coprod_{\cdot}^{\mathcal{H}(0)^{\circ}} \longrightarrow \prod^{\cdot}_{M_X^{\circ}} \coprod_{\cdot}^{E'_{\mathcal{U}}(X)^{\circ}} \quad)$$

Désignons par $H^{\circ}(X,\star)$ (resp. $H_{\circ}(X,\star)$) la cohomologie (resp. l'homologie) du complexe double:

$$\coprod^{M_X} \cdot \prod_{\hat{\mathcal{U}}}^{\cdot} \star \qquad (\text{resp. } \prod_{M_X^{\circ}}^{\cdot} \coprod^{\hat{\mathcal{U}}^{\circ}}_{\cdot}) ,$$

par: $H_S^{\bullet}(X,\star)$ (resp. $H_{\bullet}^{S}(X,\star)$) la cohomologie (resp. l'homologie) singulier, et par:

$$\mathcal{H}_S^{\bullet}(\star) \qquad (\text{resp. } \mathcal{H}_{\bullet}^{S}(\star))$$

le système projectif sur $\hat{\mathcal{U}}$ (resp. $\hat{\mathcal{U}}^{\circ}$), cohomologie (resp. homologie) du système projectif

$$0 \rightsquigarrow \prod_{\mathcal{H}(0)}^{\cdot} \star \qquad (\text{resp. } 0 \rightsquigarrow \coprod^{\mathcal{H}(0)^{\circ}}_{\cdot}) .$$

Nous avons alors:

T h é o r e m e 1 . Il existe une suite spectrale donnée par le terme:

$$E_2^{p,q} = H^p(X,\mathcal{H}_S^q(\star))$$

$$(\text{resp. } E^2_{p,q} = {}_nH_p(X,\mathcal{H}_q^S(\star)))^{1)}$$

aboutissant toujours (resp. si X est de dimension fini, et s'il existe un N tel que $\mathcal{H}_q^S(\star) = 0$ pour tout $q \geqslant N$) à la cohomologie (resp. l'homologie) singulier de l'espace X .

---

1) voir p. 11.

D é m o n s t r a t i o n . Puisque M_X est filtrant $\coprod^{M_X}$ peut être remplacé par $\varinjlim_{M_X}$ qui est exact. Le reste est une exercise facile de suites spectrales (resp. par un argument de cofinalitude on peut supposer que la deuxième graduation de $\prod_{M_X^o}^{\cdot} \coprod^{\hat{\mathcal{U}}^o} \coprod^{\mathcal{H}(0)^o}$ est borné inférieurement, le reste est facile). Q.E.D.

On remarquera que le "edge-homomorphism" donne un homomorphisme

$$\emptyset^{\cdot} : H^{\cdot}(X,\ast) \longrightarrow H^{\cdot}_S(X,\ast)$$

$$(\text{resp.} \qquad \emptyset_{\cdot} : H^S_{\cdot}(X,\ast) \longrightarrow H_{\cdot}(X,\ast) \;)$$

C o r o l l a i r e 1 . Supposons que X est paracompact et que le faisceau engendré par le préfaisceau $\mathcal{H}^q_s(M)$ est null sauf en dimension 0 où on suppose qu'il est constant égal à M , alors il existe un isomorphisme canonique

$$\emptyset^{\cdot} : H^{\cdot}(X,M) \longrightarrow H^{\cdot}_s(X,M)$$

C o r o l l a i r e 2 . Supposons que X est de dimension fini et HCL alors il existe un isomorphisme canonique

$$\emptyset_{\cdot} : H^S_{\cdot}(X,M) \longrightarrow {}_nH_{\cdot}(X,M)$$

C o r o l l a i r e 3 . Soit $\mathcal{V}$ un recouvrement de X (pas necessairement ouvert) tels que les intérieurs des éléments de $\mathcal{V}$ recouvrent X , alors il existe une suite spectrale donnée par:

$$E_2^{p,q} = \varprojlim_{\tilde{\mathcal{V}}}{}^{(p)} H_s^q(V, *)$$

$$(\text{resp.} \quad E^2_{p,q} = \varinjlim_{\tilde{\mathcal{V}}^\circ}{}_{(p)} H_q^s(V, *) \;)$$

où $\tilde{\mathcal{V}}$ est l'ensemble ordonné par inclusion des intersections non-vides d'éléments de $\mathcal{V}$, aboutissant à la cohomologie (resp. l'homologie) singulier

$$H_s^\bullet(X,*) \qquad (\text{resp.} \quad H_\bullet^s(X,*) \;)$$

C o r o l l a i r e 4 . Sur la catégorie des complexes simpliciaux la cohomologie (resp. l'homologie) singulier s'identifie à la cohomologie (resp. l'homologie) simplicial.

Zeeman démontre des théoremes plus forts puisqu'il peut affirmer la fonctoralité des suites spectrales. Pour le moment nous n'insisteront pas la-dessus, voir à la fin du §4.

§4.

Soient maintenant K_1 et K_2 des complexes simpliciaux et soit

$$\rho : K_1 \longrightarrow K_2$$

une application simplicial. Considérons l'application

$$\mathcal{H} : K_2 \longrightarrow \mathcal{P} K_1$$

définie par:

$$\mathcal{H}(\sigma_2) = \{\sigma_1 \mid \sigma_1 \in K_1, \rho(\sigma_1) \in \bar{\sigma}_2\}$$

Il est clair que si $\sigma_2' > \sigma_2$ on a

$$\mathcal{H}(\sigma_2') \supset \mathcal{H}(\sigma_2)$$

Il résulte alors trivialement de (3,2) de ((2)) .

T h é o r e m e 2 . Il existe une suite spectrale donnée par:

$$E_2^{p,q} = H^p(K_2, H^q(\mathcal{H}))$$

$$\text{(resp.} \qquad E^2_{p,q} = H_p(K_2, H_q(\mathcal{H}))$$

aboutissant à $H^{\bullet}(K_1)$ (resp. $H_{\bullet}(K_1)$). Ici nous désignons par $H^{\bullet}(\mathcal{H})$ (resp. $H_{\bullet}(\mathcal{H})$) le système projectif sur K_2 (resp. K_2^o)

$$\sigma \rightsquigarrow H^{\bullet}(\mathcal{H}(\sigma))$$

$$\text{(resp.} \qquad \sigma \rightsquigarrow H_{\bullet}(\mathcal{H}(\sigma)) \text{)}$$

Supposons maintenant que

$$f : X \longrightarrow K$$

est une application continue d'un espace topologique dans un complexe simplicial. En considérant le recouvrement $\mathcal{V}$ de K formes des étoiles des simplexes de K on voit que $\mathcal{V} = \bar{\mathcal{V}}$ et on peut definir une application

$$\mathcal{H} : \vec{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathcal{P}\,(E'\,(X))$$

où $\mathcal{U}$ est le recouvrement ouvert de X l'image inverse par f de $\mathcal{V}$
Posons, en effet

$$\mathcal{H}\,(V) \;=\; \{\sigma \mid \sigma \in E'_{\mathcal{U}}(X)\ ,\ f(\sigma) \in E(V)\}$$

il est alors facile de voir que $\mathcal{H}$ satisfait aux conditions de (3,2) de ((2)) . Donc nous avons:

T h é o r e m e : Il existe une suite spectrale donnée par

$$E_2^{P,q} \;=\; \varprojlim_{\mathcal{V}}{}^{(P)}\, H_s^q(V)$$

$$\text{(resp.} \qquad E^2_{P,q} \;=\; \varinjlim_{\mathcal{V}^o}{}_{(P)}\, H_q^s(V)\ )$$

aboutissant à $H_s^{\bullet}(X)$ (resp. $H_{\bullet}^s(X)$).

C o r o l l a i r e . Supposons que f est un espace fibré localement trivial $F \to X \to K$; alors la suite spectrale ci-dessus est donnée par

$$E^2_{P,q} \;=\; H_P(K, H_q^s(F))$$

Dans le cas général, d'une application continue,

$$f : X \longrightarrow Y$$

considérons l'application

$$\mathcal{H} : O_Y \longrightarrow \mathcal{P}\, E'(X)$$

défini par:

$$\mathcal{H}\,(0) = \{\sigma \mid \sup(f\sigma) \subset 0\} = E'(f^{-1}(0))$$

Alors on fabrique une suite spectrale donnée par le terme

$$E_2^{p,q} = H^p(Y\ H^q_s(\mathcal{H}))$$

$$\text{(resp.} \quad E^2_{p,q} = {}_nH_p(Y\ H^s_q(\mathcal{H}))\ )$$

qui aboutit toujours (resp. si Y est de dimension fini et s'il existe un $N \geqslant 0$ tel que pour tout $0 \in O_Y$ on a , $H^s_q(f^{-f}(0)) = 0$ pour tout $q \geqslant N$).

<u>Remarque</u>. Pour la définition du ${}_nH_\bullet(X)$ où X est de dimension n , voir ((2)) .

De même, définissons

$$\mathcal{H} : O_Y \qquad \mathcal{P}\, O_X$$

par

$$\mathcal{H}\,(0) = \{V \mid V \subset f^{-1}(0)\}$$

alors on peut fabriquer une suite spectrale donnée par

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, H^q(\mathcal{H}))$$

$$\text{(resp.} \quad E^2_{p,q} = {}_nH_p(Y, {}_mH_q(\mathcal{H}))\ )$$

aboutissant si Y est compact (resp. si Y est compact de dimension finie et si X est de dimension finie)

à $\qquad H^{\bullet}(X) \qquad$ (resp. $\;{}_{m}H_{\bullet}(X)$) .

Pour terminer ce paragraphe considérons l'application $f : X \longrightarrow Y$ comme ci-dessus et supposons que Y est connexe par arcs. On démontre alors facilement que pour tout simplex singulier $\sigma_1 \in E^{\prime}(X)$ il existe un simplex singulier $\sigma_2 \in E^{\prime}(Y)$ tel que $\operatorname{supp}(f\,\sigma_1) \subset \operatorname{supp}(\sigma_2)$. L'application

$$\mathcal{H} \; : \; E^{\prime}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}E^{\prime}(X)$$

sera défini par:

$$\mathcal{H}(\sigma_2) \; = \; \{\sigma_1 \mid \operatorname{supp}(f\,\sigma_1) \subset \operatorname{supp}\sigma_2\}$$

Nous notons par $H^{\bullet}_{s}(\mathcal{H})$ (resp. $H^{s}_{\bullet}(\mathcal{H})$) le système projectif sur $E^{\prime}(Y)$ (resp. $E^{\prime}(Y)^{o}$) défini par:

$$\sigma_2 \rightsquigarrow H^{\bullet}_{s}(f^{-1}(\operatorname{supp}\sigma_2)) \simeq H^{\bullet}(\mathcal{H}(\sigma_2))$$

$$(\text{resp. } \sigma_2 \rightsquigarrow H^{s}_{\bullet}(f^{-1}(\operatorname{supp}\sigma_2)) \simeq H_{\bullet}(\mathcal{H}(\sigma_2)) \;)$$

On peut alors affirmer:

T h é o r è m e 4 . Il existe une suite spectrale donné par

$$E_2^{p,q} \; = \; H^p_s(Y, H^q_s(\mathcal{H}))$$

$$(\text{resp.} \qquad E^2_{p,q} \; = \; H^s_p(Y, H^s_q(\mathcal{H})) \;)$$

aboutissant à $H_s^{\bullet}(X)$ (resp. $H_{\bullet}^{s}(X)$).

Remarque. C'est ici le seul endroit où nous sommes forcés à utiliser le lemme 2, donc il faut supposer que X est T_1. Partout ailleurs nous avons pu utiliser le complexe singulier $C^{\bullet}(X)$ (resp. $C_{\bullet}(X)$) au lieu du complexe $\prod\limits_{E'(X)}^{\bullet}$ (resp. $\coprod\limits_{\bullet}^{E'(X)^{\circ}}$). La raison pour laquelle nous n'avons pas adopté cette dernière méthode est qu'en utilisant le lemme 2 les résultats ci-dessus deviennent des corollaires des résultats géneraux de ((2)).

Cependant, parceque $E'(X)$ n'est pas fonctoriel en X, il faut pour pouvoir affirmer la fonctoralité des suites spectrales ci-dessus, utiliser l'autre méthode. La procedure étant assez triviale nous nous limitons à cette remarque.

§5.

Pour simplifier, et pour assurer la convergence des suites spectrales qui interviennent, nous allons supposer dans la suite que X est un espace topologique de dimension fini.

Pour tout $\mathcal{U} \in M_X$ nous avons un système projectif sur $\hat{\mathcal{U}}$ (resp. $\hat{\mathcal{U}}^{\circ}$) défini par

$$(1)\qquad \begin{array}{ll} & U \rightsquigarrow C_{\bullet}(X, X - U) \\ \text{(resp.} & U \rightsquigarrow C^{\bullet}(X, X - U)\ ) \end{array}$$

Nous appellons système projectif d'homologie locale (resp. de cohomologie locale) l'homologie (resp. la cohomologie) du système projectif (1). Notons le

$$\mathcal{H}_{\circ}^{s}(\ast) \qquad \text{(resp. } \mathcal{H}_{s}^{\bullet}(\ast)\ )$$

Puisque X est de dimension finie nous pouvons supposer que tout $\mathcal{U} \in M_X$ est de type fini. Il est alors facile de voir que le système projectif (1) est flasque (resp. coflasque) (voir (1.1) de ((2)) chap. II). De plus on voit que le complexe

$$\varprojlim_{\hat{\mathcal{U}}} C_\circ(X, X - U)$$

$$\text{(resp.} \qquad \varinjlim_{\hat{\mathcal{U}}^\circ} C^\circ(X, X - U)\ )$$

s'identifie avec le complexe des chaînes singuliers (resp. cochaînes singuliers) infini, mais fini dans chaque $V \in \mathcal{U}$ (resp. nulles en dehors d'un réunion finie d'éléments de $\mathcal{U}$). C'est pourquoi nous appellons complexe de chaînes localement fini (resp. complexe de cochaînes à support fini) le complexe:

$$\square_\circ(X) = \varinjlim_{M_X} \varprojlim_{\hat{\mathcal{U}}} C_\circ(X, X - U)$$

$$\text{(resp.} \qquad \square^\circ(X) = \varprojlim_{M_X^\circ} \varinjlim_{\hat{\mathcal{U}}^\circ} C^\circ(X, X - U)$$

Considérons alors le triple-complexe

$$\coprod_\cdot^{M_X} \prod_{\hat{\mathcal{U}}}^\cdot C_\cdot(X, X - U)$$

$$\text{(resp.} \qquad \prod_{M_X^\circ}^\cdot \coprod_\cdot^{\hat{\mathcal{U}}^\circ} C^\circ(X, X - U)\ )$$

et calculons les suites spectrales.

T h é o r e m 5 . Il existe une suite spectrale donnée par le terme:

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}^s_{-q}(*))$$

$$(\text{resp.} \quad E^2_{p,q} = {}_n Hp(X, \mathcal{H}^{-q}_s(*)) \;)$$

aboutissant toujours (resp. si X est localement compact) à

$$H_{-\bullet}(\square_\bullet) \quad (\text{resp.} \quad H^{-\bullet}(\square^\bullet) \;) \;.$$

C o r o l l a i r e 1 . Si X est compact et de dimension finie le complex $\square_\bullet$ (resp. $\square^\bullet$) s'identifie à $C_\bullet(X)$ (resp. $C^\bullet(X)$) donc la suite spectrale ci-dessus aboutit à l'homologie (resp. la co-homologie) singulier.

Remarquons aussi qu'on peut démontrer le:

C o r o l l a i r e 2 . Soit p_i , $i = 1, \ldots r$ les valeurs de p pour lesquels on a :

$$H^p(X, \mathcal{H}^s_{k+p}(L)) \neq 0$$

et supposons que l'on a un isomorphisme pour tout $i = 1, \ldots r$

$$H^{p_i}(X, H^s_{k+p_i}(X,L)) \simeq H^{p_i}(X, \mathcal{H}^s_{k+p_i}(L))$$

alors sous les conditions du théorème nous avons une suite exacte:

$$0 \longrightarrow \sum_i H^{p_i}(X) \otimes H^s_{k+p_i}(X,L) \longrightarrow H_k(\square_\bullet L)$$

$$\longrightarrow \sum_i \operatorname{Tor}(H^{p_i}(X), H^s_{k-1+p_i}(X,L)) \longrightarrow 0$$

(on doit bien sûr supposer que L est de dimension globale plus petit que 1).

Bibliographie

((1)) P.J. Hilton et S. Wylie: Homology theory. Cambridge (1960).

((2)) O.A. Laudal: Sur la cohomologie et l'homologie des ensembles ordonnes. Miméographié, Université d'Oslo (janvier 1963).

((3)) E.C. Zeeman: Dihomology I. Relation between homology theories. Proc. London Math. Soc. 12 (1962) pp. 609-638.

((4)) E.C. Zeeman: Dihomology II. ibid. pp. 639-689.

((5)) E.C. Zeeman: Dihomology III. A generalization of the Poincaré duality for manifolds. Proc. London Math. Soc. 13 (1963) pp. 155-183.