ISBN 82–553–0855–5
Pure Mathematics

No.24
August 1993

Une inégalité d'interpolation sur l'espace de Wiener

by

Laurent DECREUSEFOND, Yaozhong HU
et Ali Süleyman ÜSTÜNEL

PREPRINT SERIES – Matematisk institutt, Universitetet i Oslo

Une inégalité d'interpolation sur l'espace de Wiener

Laurent DECREUSEFOND, Yaozhong HU et Ali Süleyman ÜSTÜNEL

Abstract

In this note we prove an interpolation inequality in L^p-norm between the Sobolev spaces of order 0 and 2 on the Wiener space.

Résumé

Dans cette note nous démontrons une inégalité d'interpolation pour les normes L^p entre les espaces de Sobolev d'ordre 0 et 2 sur l'espace de Wiener.

Préliminaires- Soit (W, H, μ) l'espace de Wiener classique, c'est à dire $W = C_0([0,1])$, H est sous espace de W qui consiste de fonctions ayant des des dérivées de carré intégrables sur $[0,1]$ et μ la mesure de Wiener sous laquelle l'application $(t,w) \mapsto w(t)$ de $[0,1] \times W$ dans $I\!R$, est un mouvement brownien standard. On notera par P_t le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur W, défini sur les polynômes par la formule de Mehler:

$$P_t\phi(w) = \int_W \phi(e^{-t}w + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\mu(dy).$$

Si on écrit ϕ suivant son développement en chaos de Wiener

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(\phi_n),$$

alors $P_t\phi$ s'écrit comme

$$P_t\phi = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} I_n(\phi_n).$$

On note par $-L$ le générateur infinitésimal de (P_t) et nous avons

$$(I+L)^\alpha\phi = \sum_{n=0}^{\infty}(1+n)^\alpha I_n(\phi_n).$$

Dans la suite nous allons noter par Q_t le semigroupe sousmarkovien défini par

$$Q_t\phi = e^{-t}P_t\phi = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(1+n)t} I_n(\phi_n),$$

dont le générateur est $-(I+L)$, i.e.,

$$dQ_t/dt = -(I+L)Q_t \tag{1}$$

et

$$\|Q_t\phi\|_p \le \|\phi\|_p e^{-t} \tag{2}$$

Inégalités d'interpolation : Le résultat essentiel de cette note est le théorème ci-dessous, qui réponds à une question de D. Stroock:

Théorème 1 *Pour tout $p > 1$, il existe une constante $C_p > 0$ telle que l'inégalité suivante soit verifiée:*

$$\|\nabla\phi\|_p \le C_p(\|\phi\|_p + \|\phi\|_p^{1/2}\|\nabla^2\phi\|_p^{1/2}),$$

pour toute fonctionnelle ϕ sur W.

Remarque 1 *L'inégalité ci-dessus signifie qu'elle est vraie pour toutes les fonctionelles de Wiener régulières, par exemples les polynômes ou les fonctions test au sens de Meyer-Watanabe; elle s'étend ensuite par fermeture aux domaines appropriés.*

Un corollaire immédiat est

Corollaire 1 *Si $(\phi_n, n \in \mathbb{N})$ converge vers 0 dans L_p et $\sup_n \|\nabla^2\phi\|_p < \infty$, alors $(\nabla\phi_n, n \in \mathbb{N})$ converge vers 0 dans $L_p(\mu, H)$.*

Le théorème 1 résulte aussitot des inégalités de Meyer et du théoréme suivant, pour lequel (P_t) pourrait être n'importe quel semi-groupe sousmarkovien symétrique (en fait on n'utilise même pas la symétrie, mais elle permet de ne pas redéfinir les opérateurs).

Théorème 2 *Soit $1 \le p \le \infty$. Alors nous avons*

$$\|(I+L)^{1/2}\phi\|_p \le \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(1/2)}\|\phi\|_p^{1/2}\|(I+L)\phi\|_p^{1/2}. \tag{3}$$

Preuve: (a). Posons $\psi = (I+L)\phi$, comme l'opérateur $(I+L)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ est borné sur les espaces L^p, $p \geq 1$, nous avons $\phi = (I+L)^{-1}\psi$. Remplaçant ϕ dans la formule (3), nous voyons qu'il suffit de démontrer

$$\|(I+L)^{-1/2}\psi\|_p \leq \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(1/2)}\|\psi\|_p^{1/2}\|(I+L)^{-1}\psi\|_p^{1/2} \tag{4}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}(I+L)^{-1/2}\psi &= \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}P_t\psi dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^\infty t^{-1/2}Q_t\psi dt.\end{aligned}$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}(I+L)^{-1/2}\psi &= \frac{1}{\Gamma(1/2)}[\int_0^\varepsilon t^{-1/2}Q_t\psi dt \\ &+ \int_\varepsilon^\infty t^{-1/2}Q_t\psi dt].\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\|(I+L)^{-1/2}\psi\|_p &\leq \frac{1}{\Gamma(1/2)}[\|\int_0^\varepsilon t^{-1/2}Q_t\psi dt\|_p \\ &+ \|\int_\varepsilon^\infty t^{-1/2}Q_t\psi dt\|_p].\end{aligned}$$

Le premier terme ci-dessus est facile à controler par

$$\begin{aligned}\|\int_0^\varepsilon t^{-1/2}Q_t\psi dt\|_p &\leq \int_0^\varepsilon t^{-1/2}\|Q_t\psi\|_p dt \\ &\leq \int_0^\varepsilon t^{-1/2}\|\psi\|_p dt \\ &= \varepsilon^{1/2}\|\psi\|_p.\end{aligned}$$

Pour controler le deuxième terme on utilise

$$\frac{dQ_t}{dt} = (I+L)Q_t = Q_t(I+L). \tag{8}$$

Pour simplifier la notation, notons $f = (I+L)^{-1}\psi$. Alors

$$(9)\quad \int_\varepsilon^\infty t^{-1/2}Q_t\psi dt = \int_\varepsilon^\infty t^{-1/2}Q_t(I+L)(I+L)^{-1}\psi dt$$
$$= \int_\varepsilon^\infty t^{-1/2}Q_t(I+L)f dt$$
$$= \int_\varepsilon^\infty t^{-1/2}\frac{dQ_t}{dt}f dt.$$

Remarquons d'abord que $\|Q_tf\|_p \leq e^{-t}\|f\|_p \to 0$. En appliquant la formule d'intégration par partries (ordinaire) à (9), on obtient

$$(10)\qquad \int_\varepsilon^\infty t^{-1/2}\frac{dQ_tf}{dt}dt = -\varepsilon^{-1/2}Q_\varepsilon f + \frac{1}{2}\int_\varepsilon^\infty t^{-3/2}Q_tf dt.$$

Comme $\|Q_\varepsilon f\|_p \leq \|f\|_p$, $\|Q_tf\|_p \leq \|f\|_p$ on a

$$\begin{aligned}
\|\int_\varepsilon^\infty t^{-1/2}Q_t\psi dt\|_p &\leq \varepsilon^{-1/2}\|Q_\varepsilon f\|_p + \frac{1}{2}\int_\varepsilon^\infty t^{-3/2}\|Q_tf\|_p dt \\
&\leq \varepsilon^{-1/2}\|f\|_p + \frac{1}{2}\int_\varepsilon^\infty t^{-3/2}\|f\|_p dt \\
&= \varepsilon^{-1/2}\|f\|_p + \varepsilon^{-1/2}\|f\|_p \\
&= 2\varepsilon^{-1/2}\|f\|_p \\
&= 2\varepsilon^{-1/2}\|(I+L)^{-1}\psi\|_p.
\end{aligned}$$

Finalement nous avons

$$(12)\qquad \|(I+L)^{-1/2}\psi\|_p \leq \frac{1}{\Gamma(1/2)}[\varepsilon^{1/2}\|\psi\|_p + 2\varepsilon^{-1/2}\|(I+L)^{-1}\psi\|_p].$$

L'inégalité ci-dessus est vraie pour toute $\varepsilon > 0$ et le minimum est atteint en prenant

$$\varepsilon = \frac{2\|(I+L)^{-1}\psi\|_p}{\|\psi\|_p}$$

et nous obtenons finalement

$$(13)\qquad \|(I+L)^{-1/2}\psi\|_p \leq \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(1/2)}\|\psi\|_p^{1/2}\|(I+L)^{-1}\psi\|_p^{1/2}.$$

Ce qui achève la démonstration. $\|$

References

[1] N. Bouleau and F. Hirsch: Dirichlet Forms and Analysis on Wiener Space. De Gruyter Studies in Math., Vol. 14, Berlin-New York, 1991.

[2] P.A. Meyer: "Notes sur les processus d'Ornstein-Uhlenbeck". Séminaire de Proba. XVI, Lect. Notes in Math. Vol.920, p.95-133 (1982).

Y. Z. Hu : Institute of Math. Univ. Oslo, P.O. Box 1053, Blindern, N-0316, Oslo, Norway, détaché de Inst. of Math. Sci., Acad. Sinica, Wuhan, Chine.

L. Decreusefond: ENST, Dépt. Réseaux, 46, rue Barrault, 75013, Paris, France.
A. S. Üstünel : ENST, Dépt. Réseaux, 46, rue Barrault, 75013 Paris, France et Institute of Mathematics, University of Oslo, P.O. Box 1053, Blindern, N-0316, Oslo, Norway.