Musikk
og
Matematikk

Hvordan kan matematikk integreres i musikkfagene på musikklinja i den videregående skolen?

Forsidebildet er et fotografi av et maleri malt av Kristine Bonstad som jeg har på veggen hjemme i min stue. Det symboliserer tre av mine lidenskaper: Matematikk, musikk og trening.

Forord

Når startet egentlig prosessen som nå har resultert i denne masteroppgaven? Kanskje kan det være naturlig å se helt tilbake til mitt siste år på videregående. Jeg hadde alt da funnet interesse for musikk og matematikk, og skrev en oppgave der jeg prøvde å forstå hva som mentes med at den tempererte skalaen ikke var helt ren. Denne oppgaven lærte meg mye om musikk og matematikk, men jeg satt også igjen med erfaringen at hvis jeg skal ha noen mulighet for å forstå fenomenet godt må jeg lære meg mer matematikk. I årene som fulgte tok jeg 2mx og 3mx på kveldsgym, en bachelor i musikkvitenskap og en årsenhet i matematikk. Før jeg bega meg ut på denne oppgaven hadde jeg studert både musikk og matematikk på deres egne premisser.

Dette masterprosjektet har gått over tre år. De to første årene har jeg studert master halvtid og tatt PPU (praktisk pedagogisk utdanning) ved siden av. I denne perioden har jeg unnagjort alle støttefagene i masteren min, samt brukt tiden på å lese meg opp på musikkmatematisk litteratur. Jeg har vært gjennom et variert utvalg. Mye har blitt forkastet, men en del har blitt med meg videre. Av de bøkene jeg har lest vil jeg trekke frem noen. Den første er boka «Music and Mathematics from Pytagoras to Fractals» redigert av John Fauvel, Raymond Flood og Robin Wilson. Denne boken gir mange varierte innfallsvinkler til musikk og matematikk og er i hovedsak relativt lettlest. En fordel er at de forskjellige kapitlene har ulike forfattere noe som gjør at man får en mer variert innfallsvinkel. Hvis man imidlertid ønsker en grundigere innføring i musikk og matematikk anbefaler jeg Garreth Loys bøker «Musimatics». Jeg har ikke brukt volum 2 i denne oppgaven, da den i stor grad tar for seg musikk og matematikk knyttet til data, men Volum 1 har vært uvurderlig. Disse bøkene er noe tyngre. Ikke fordi han tyr til veldig avansert matematikk, men fordi det er så mye og grundig informasjon. For den som er interessert i musikkfilosofi anbefaler jeg Ove Kristian Sundbergs bøker om musikktenkningens historie på det varmeste. De gir en god oversikt over tenkere fra antikken til barokken og forøvrig mange innfallsvinkler til musikk og matematikk.

I denne perioden har jeg altså i større grad brukt tiden på å finne ut hva jeg ønsker å ta med inn i masteroppgaven enn faktisk å skrive den. Det jeg har gjort av skriving i denne perioden har vært i form av semesteroppgaver jeg har prøvd å vinkle inn mot masteren. Det siste året har jeg vært fulltids masterstudent. Nå har stort sett alt forarbeidet vært gjort og jeg har i hovedsak visst hva masteren skulle inneholde før jeg begynte å skrive. Imidlertid har jeg også i

denne perioden kommet over noen nye bøker og innfallsvinkler jeg har trengt å inkludere, men det er vel litt av sjarmen.

Det er mange personer som har hjulpet meg i prosessen med denne oppgaven, og jeg vil takke dere alle. Noen ønsker jeg å nevne ved navn. Først må jeg trekke frem mine to veiledere. Arnfinn Bø-Rygg har veiledet meg i det meste av masteroppgaveskrivingen, og pekt meg i riktig retning de gangene jeg er på vei ut av sporet. Asbjørn Ø. Eriksen har ledet meg i den avsluttende prosessen med å få oppgaven min trygt i havn. Jeg har også fått mange gode råd og tips av Geir Vang, som deler min interesse for musikk og matematikk. Jeg kom over hans navn via en fotnote i en av Sundbergs bøker om musikktenkningens historie, og det viste seg at vi begge jobbet for samme kulturskole. Hans hovedoppgave om Kepler fra 2003 refererer jeg til flere steder i denne oppgaven. Jeg vil også nevne Beate Sollie Horn, som har tatt seg tid til å lese korrektur på denne oppgaven. Sist vil jeg nevne Eline Kristiansen som gikk ut fra musikklinja sommeren 2013. Hun har vært behjelpelig med å svare på diverse spørsmål jeg har hatt underveis da jeg har hatt behov for et oppdatert blikk fra en elevs synspunkt. Dette har hjulpet meg med å forhåpentligvis ikke bare la dette bli en teoretisk refleksjon, men også ta utgangspunkt i den praktiske skolehverdagen.

Erik Andreas Stensholt
Nøtterøy 2014

Innhold

Forord ... 3

Innledning ... 7

1. Argumenter for problemstilling. Hva er musikk? Hva er matematikk og hva er regning? ... 10

1.1 Grunnleggende ferdigheter ... 10

1.2 Hva er musikk? ... 11

1.3 Matematikk eller regning? ... 12

2. Et historisk tilbakeblikk ... 15

2.1 Pytagoras ... 16

2.2 Veien videre fra antikken. Aristoxenos og Boethius ... 21

2.3 Musikken som fri kunst ... 23

2.4 Gioseffo Zarlino (1517-1590) ... 25

2.5 Johannes Kepler (1571-1630) ... 26

2.6 1700-tallet til 1800-tallet ... 29

2.7 1900-tallet til i dag ... 30

3. Overtonerekka. Naturens egen orden ... 32

3.1 Frekvens og tonehøyde ... 33

3.2 Overtonerekka. Hva er den? ... 35

3.3 Overtonenes praktiske betydning ... 37

Klangfarge ... 37

Messinginstrumenter ... 38

Differansetoner. Virtuell grunntone ... 40

4. Stemming av skalaen ... 43

4.1 Hva er en skala, og hva er dens grunnelementer? ... 43

4.2 Skalaens opprinnelse. Sir James Jeans' tanker ... 45

4.3 Pytagoreisk skala ... 46

4.4 Den renstemte skalaen ... 48

4.5 Likesvevende temperering ... 50

4.6 Kvintsirkelen ... 54

5. Matematiske komposisjonsteknikker ... 59

5.1 Guidos Metode ... 60

5.2 Avbildninger i musikken ... 61
5.3 1900-tallets komposisjonsformer ... 66
5.4 Tilfeldighetsprinsippet i komposisjon. Motsetningen til total kontroll ... 70
5.5 Matematikken kjenner ingen grenser ... 74
6. Analyse av John Taveners *The Lamb* ... 76
6.1 Presentasjon av *The Lamb* ... 76
6.2 Analyse ... 77
6.3 Noen refleksjoner ... 83
7. Konsonans ... 88
8. Rytme. Musikkens tidsdimensjon ... 95
8.1 Noteverdier ... 95
8.2 Taktarter ... 100
8.3 Når flere rytmemønster møtes ... 106
8.4 Tonehøyde og rytme. To dimensjoner med samme parameter ... 110
8.5 Tallet 2. En kuriositet ... 114
9. Avsluttende tanker ... 115
9.1 Musikk og matematikk. Ja eller nei? ... 115
9.2 Musikk og matematikk i teori og praksis ... 117
9.3 Min filosofi ... 118
9.4 Mitt budskap ... 120
Kilder: ... 123

Innledning

Før jeg begynte på min masterstudie visste jeg at jeg ville skrive om musikk og matematikk. Jeg hadde fått et inntrykk av at mye av litteraturen skrevet om musikk og matematikk i stor grad ble på et matematisk nivå som gjorde det vanskelig for folk uten spesialkompetanse å forstå. Jeg satt også igjen med inntrykket at mye av litteraturen er skrevet av matematikere med en interesse for musikk. Jeg ønsket derfor at min masteroppgave skulle være for musikere med en interesse for matematikk, og på et matematisk nivå de fleste kan forstå. Jeg ønsket også at oppgaven min skal dekke et bredt omfang av innfallsvinkler. Det er mye spennende å ta tak i, og for meg ville det være lite inspirerende bare å fokusere på et lite tema.

Samtidig måtte jeg finne en rød tråd som kunne holde oppgaven sammen slik at dette ikke bare blir en oppramsing av tilfeldig valgte musikkmatematiske temaer. Min problemstilling er påvirket av at jeg i forberedelsesfasen av oppgaven studerte PPU, og dermed underviste en del i skolen. Der ble jeg var at musikkfagene på videregående, studieretning musikk (heretter referert til som «musikklinja») gir mange innfallsvinkler til musikk og matematikk. Dessuten er bruk av matematikk blitt noe som skal inn i alle fag gjennom den grunnleggende ferdigheten regning (se kapittel 1.3). Jeg har valgt følgende problemstilling: «Hvilke naturlige innfallsvinkler finner vi til musikk og matematikk i musikkfagene på musikklinja?»

Før jeg går videre må jeg forklare hva jeg legger i begrepet «naturlige» her. Betyr det at innfallsvinklene er naturskapt og ikke menneskeskapt? Har det noe referanse til naturtoner, eller naturlige tall? Svaret er nei til begge. Med naturlig mener jeg i denne sammenhengen at innfallsvinklene ikke vil være på bekostning av fagets egenart, og dermed ikke være til hinder i en undervisningssammenheng. Problemstillingen kan likevel misoppfattes. Den kan bety at jeg vil sette en grense som sier «disse innfallsvinklene er naturlige», og følgelig er alle andre innfallsvinkler unaturlige. Det er så klart ikke dette som er min intensjon. Det jeg derimot ønsker å vise i denne oppgaven er hvordan man ved å se på læreplanene kan finne naturlige innfallsvinkler, og presenterer en del av dem. Dette er i hovedsak ingen pedagogisk oppgave. Det jeg presenterer er det jeg mener en lærer vil ha nytte av å kunne om de forskjellige temaene, hvis han/hun skal bruke dem i undervisningssammenheng. Det betyr at mye jeg skriver ikke nødvendigvis bør presenteres for elever i det hele tatt, men forstås av den som underviser. Det betyr også at jeg ikke bruker mye tid på å reflektere rundt hvordan dette best kan inkluderes i en undervisningssammenheng. Imidlertid er dette en refleksjon jeg i stor grad har gjort i en annen oppgave, nemlig min fordypningsoppgave i musikkdidaktikk som jeg skrev våren 2013 (Stensholt 2013). Denne kan leses i sammenheng med min masteroppgave hvis man ønsker flere pedagogiske refleksjoner rundt musikk og matematikk.

Et annet angrep man kan gjøre på min problemstilling er at jeg på forhånd tar det for gitt at det faktisk finnes naturlige innfallsvinkler til musikk og matematikk. Denne friheten tar jeg meg. Jeg baserer det i stor grad på egen undervisningserfaring, men også på det faktum at regning er en grunnleggende ferdighet.

Jeg vil i de neste kapitlene se på innfallsvinkler knyttet til forskjellige musikkfag. Blant annet vil jeg se på musikk og matematikk gjennom historien. Noen av innfallsvinklene mine er det skrevet veldig mye om, som overtonerekka og stemming av skalaen. Det er heller ikke vanskelig å finne litteratur om matematikk brukt i komposisjoner. Noe som derimot overrasket meg var at det er skrevet lite om matematikk og rytme. Av de større verkene jeg har lest om musikk og matematikk har jeg til gode å finne et kapittel spesifikt viet til rytmen.

En svakhet med at jeg har så mange innfallsvinkler til musikk og matematikk er at jeg ikke har hatt kapasitet til å gå til primærkildene i mange av temaene. Hadde jeg f.eks. skrevet en oppgave om Zarlinos musikksyn ville det vært naturlig å gå gjennom hans originaltekster, men skulle jeg lagt så mye forarbeid i hvert avsnitt ville min masteroppgave tatt 10 år isteden for tre. For å kompensere for dette har jeg prøvd å bruke et variert utvalg av kilder. Det meste jeg presenterer i denne oppgaven har jeg lest minst to steder. Hvilken kilde jeg velger å referere til har ofte en sammenheng med hvem jeg syns skriver best om temaet. Jeg har også i stor grad prøvd å bruke relativt nye kilder. Det finnes noen unntak, som Grønvolds artikkel om Kepler fra 1980 eller Sir James Jeans bok som opprinnelig kom ut i 1937. Disse har jeg inkludert fordi jeg syns det er veldig godt skrevet, og jeg har bekreftet kildematerialet også andre steder. Utover det er den viktigste litteraturen min fra år 2000 eller nyere.

Selv om jeg har mange innfallsvinkler vil det være mye jeg utelater. Noen temaer har jeg kanskje rett og slett ikke tenkt på. I redigeringsprosessen har jeg måttet tilføye flere nye ideer jeg har hatt, i tillegg måtte jeg droppe noen ideer på grunn av oppgavens omfang. Noen temaer har jeg derimot bevisst valgt bort. Jeg har sett lite på matematikken knyttet til akustikk og oppbygningen av en tone som summen av sinusfunksjoner. Disse temaene mener jeg absolutt er interessante og viktige for en som vil studere musikk og matematikk, men jeg ser på det mer som lydteori enn som musikkteori, og føler det ikke er naturlig å knytte til undervisning på videregående. Et annet tema jeg har valgt å styre unna er musikk og matematikk knyttet til data og elektronisk musikk. Dette forsvarer jeg enkelt og greit med min manglende interesse og kunnskap om temaet. Jeg velger å overlate dette til mer datakyndige mennesker.

Før jeg går i gang med de forskjellige temaene vil jeg se litt på noen grunnbegreper i oppgaven min, samt forsvare hvorfor jeg mener dette er et viktig tema å skrive om.

1. Argumenter for problemstilling. Hva er musikk? Hva er matematikk og hva er regning?

1.1 Grunnleggende ferdigheter

At musikk og matematikk henger sammen er for meg hevet over en hver tvil. Jeg vil påstå at de fleste (muligens alle) musikkutdannede jeg kjenner deler dette synet. Hvor dypt denne sammenhengen er forankret, og hvor omfattende den er, vil jeg tro det råder mer uenighet om. Ikke desto mindre har alle musikkutdannede jeg har diskutert min oppgave med kommet med noen syn på hva «musikk og matematikk er for dem».

Jeg vil derimot ikke påstå at man må utforske denne siden av musikken aktivt for å ha en forståelse og glede av musikk. Jeg vil ikke engang påstå at du må utforske dette for å kunne leve av musikk. Følgelig er det kanskje ikke noen selvfølge at man bør utsette musikkelever på videregående for dette, med tanke på at størsteparten av dem kun vil ha musikk som hobby?

Imidlertid finner vi i Kunnskapsløftet (LK06) et sterkt argument for at man som lærer bør ha en noe dypere forståelse av musikk og matematikk. Der ble nemlig de såkalte «grunnleggende ferdighetene» innført. Vi kan lese følgende om grunnleggende ferdigheter på udir.no:

> «Noen grunnleggende ferdigheter er nødvendige forutsetninger for læring og utvikling i skole, arbeid og samfunnsliv. I Kunnskapsløftet er disse definert som å kunne lese, regne, uttrykke seg muntlig og skriftlig, og bruke digitale verktøy (Utdanningsdirektoratet 2013a)»

Hilde Traavik (2009:19) påpeker at med grunnleggende ferdigheter menes ikke ferdigheter på et grunnleggende nivå, men ferdigheter som er grunnleggende for læring i alle fag, og på mange livsområder. Det heter seg også at de grunnleggende ferdighetene skal innføres på fagets egne premisser (Salvesen 2013, Å kunne regne 2013: 2). Altså skal de helst berike faget, og ikke være et hinder for dets egenart. Den pedagogiske diskusjonen om viktigheten av grunnleggende ferdigheter går utenfor denne oppgaven, men det er naturlig å ta en titt på hvorfor de ble innført siden de danner grunnlaget av min argumentasjon for hvorfor det er så viktig at lærere har forståelse for musikk/matematikk.

En viktig faktor var Norges resultater i PISA-undersøkelsene på starten av 2000-tallet. Blant annet som et tiltak for å styrke norske elevers ferdigheter i lesing, skriving, regning og data ble de grunnleggende ferdighetene innført (Traavik 2009: 20). Vygotskijs tanker om at tankene ble til gjennom språket har nok også vært medvirkende. «Skal vi utvikle tanker og forstå ulike fag- og livsområder, trenger vi å beherske ord, begreper, termer og faguttrykk som brukes på de enkelte områdene (Ibid: 21).» Hvis vi aksepterer Vygotskijs mening, vil jeg si dette hvert fall er et sterkt argument for de muntlige og de skriftlige ferdighetene. Traavik (2009:22) viser også til forskning som viser at evnen til abstrakt tenkning i stor grad henger sammen med lese- og skriveferdigheter. Hun siterer også Ludwig Wittgenstein: «Mitt språks grenser er min verdens grenser.» Når det gjelder regning, er jeg litt mer usikker på hvor nødvendig grunnleggende matematiske begreper er for allmenne fag, men at matematikken finnes i dagliglivet er for meg utvilsomt. Alt som handler om størrelser, lengder og dessuten økonomi har sitt grunnlag i matematikken. Traavik (2009: 21) påpeker at ordet diskurs, altså spesifikke måter å uttrykke seg innen forskjellige fagområder, ofte knyttes til grunnleggende ferdigheter. Fordelen med en viss «allmenn diskurs», altså noen faguttrykk vi kan forstå selv om vi ikke er spesialutdannet i det enkelte feltet, synes for meg veldig klar. Det er ikke nødvendig å forstå hva som menes med transponering for å kunne snakke om musikk. Derimot hvis du ikke har noe forståelse av hva som menes med tonehøyde, eller at plutselig blir sangen en halv tone (eller litt) lysere, vil du kunne ha vanskelig for å snakke om musikk. Følgelig mister du muligheten for å delta i samfunnet på dette feltet.

Det som er viktig å trekke frem her er at i følge Kunnskapsløftet, som alle lærere er pålagt å forholde seg til, skal regning integreres i alle fag. Følgelig er det nødvendig å forstå hva regning i musikkfag betyr, for alle som skal undervise i musikk. Like viktig er at det at disse vet hvordan regning kan berike musikkfaget. Jeg håper med denne oppgaven å vise flere naturlige innfallsvinkler til dette fenomenet, med utgangspunkt i musikkfagene på musikklinja. Jeg vil derfor forsvare hvert kapittel med en referanse til læreplanen for minst et musikkfag. Før vi begir oss ut på denne ferden er det noen grunnleggende begreper som må tydeliggjøres: Hva mener jeg med musikk, matematikk og regning?

1.2 Hva er musikk?

Å diskutere hva musikk er kan synes banalt i en masteroppgave i musikkvitenskap. Jeg antar at alle lesere av denne oppgaven har en god forståelse av hva musikk er, og ikke minst respekt for at det kan være vanskelig å sette en klar grense for hva som er musikk og hva som ikke er musikk. Leif Bjørn Skorpen (2003: 5) trekker frem to forslag for å si hva musikk er, som jeg syns er passende å vise til med tanke på oppgavens tema. Det ene går slik:

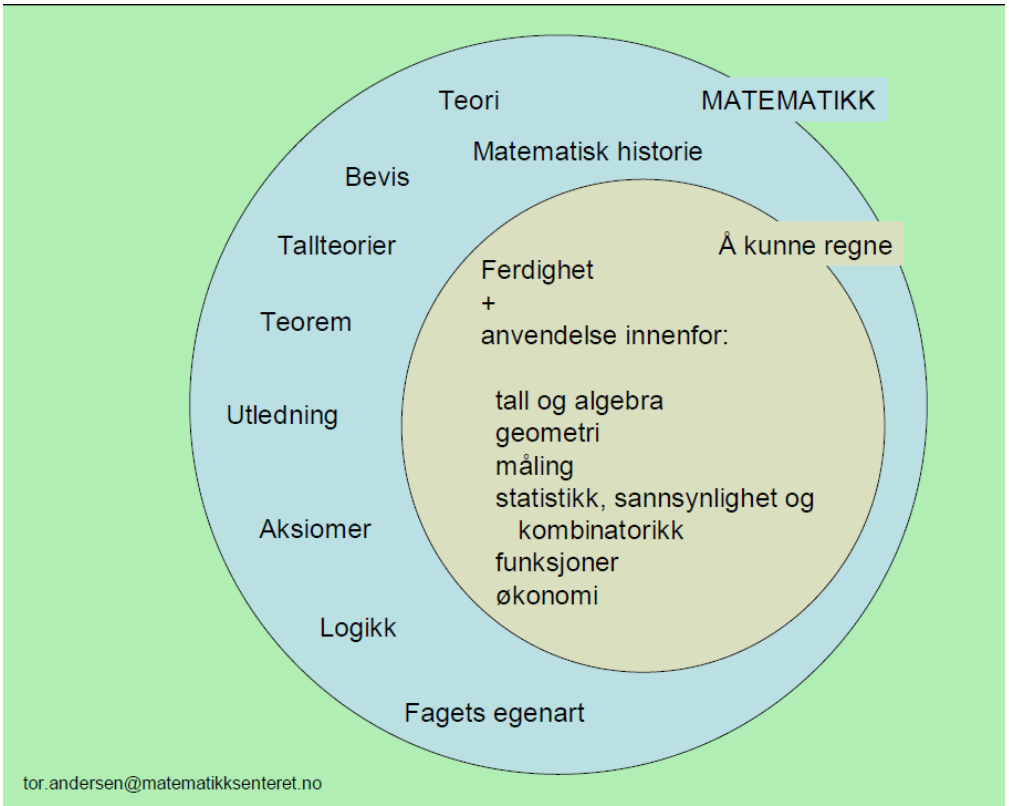
«Musikk=Matematikk+følelser.» Den andre er Skorpens oversettelse av Harry Parch: «Eit system av musikk er ei organisering av tonar i forhold til kvarandre, og desse forholda er uunngåeleg forhold mellom tal (Ibid: 5).» Disse forslagene for å forklare hva musikk er viser nettopp til den grunnleggende sammenhengen mellom musikk og matematikk, som jeg skal se nærmere på senere i oppgaven. Det viktigste for meg i denne sammenheng er imidlertid ikke å diskutere hva musikk er og kan være, men hvordan jeg hovedsakelig kommer til å forholde meg til det i denne oppgaven.

De siste 100 årene har grensene for hva musikk er blitt utfordret. Jeg vil påstå at mye musikk av f.eks. Stockhausen ikke ville vært «godkjent som musikk» 100 år tidligere, følgelig er det et mye større omfang av lyder som faller inn under kategorien musikk i dag enn tidligere. Dette er noe jeg anerkjenner til det fulle. Imidlertid vil jeg i denne oppgaven når jeg snakker om musikk/matematikk hovedsakelig forholde meg til fenomener som også omfatter de mer tradisjonelle synene på musikk. Følgelig vil ikke algoritmer som brukes til å lage musikk på data bli drøftet. Jeg heller ikke til å fokusere på fenomener som faller inn under kategorien lydteori, da dette for meg blir mer snakk om lyd/matematikk enn musikk/matematikk. Kort sagt vil jeg med musikk i denne oppgaven først og fremst forholde meg til det «alle» oppfatter som musikk.

1.3 Matematikk eller regning?

Matematikk er noe alle vet hva er, men de færreste (om noen) kan definere. Geir Botten (2009: 11-18) viser til forskjellige leksika beskrivelser av matematikk for å understreke at det ikke finnes noe entydig svar på hva matematikk er. Denne påstanden finner jeg også støtte for på wikipedia, der det står at «Det fins ingen allment anerkjent definisjon av *matematikk*, og i dag blir den vanligvis beskrevet som en vitenskap som dreier seg om å undersøke abstrakte strukturer, deres egenskaper og mønstre (Matematikk 2013).» Med tanke på hvor vidt matematikkbegrepet egentlig er, kan det virke søkt å si noe om musikk og matematikk på generelt grunnlag.

Den grunnleggende ferdigheten, som jeg tar utgangspunkt i, heter ikke matematikk men «regning». Hva er da regning i forhold til matematikk? Et etterutdanningskurs, gir dette bildet for å illustrere forskjellen (Å kunne regne 2013):



Figur 1.1: Forholdet mellom matematikk og regning.

Ved første øyekast, kan det synes som regning er den matematikken man finner i skolens matematikkfag +«ferdighet». Noen av feltene som her ikke er inkludert i regning, møter man riktignok i matematikkfaget. Selv om kanskje ikke ordet brukes, opererer man med teoremer (matematiske regler) og fører bevis for diverse formler. Det vi kan ta med oss herfra, er at den matematikken som går inn i kategorien «regning», tar utgangspunkt i den matematikken elevene alt har vært borti gjennom matematikkfaget.

Kunnskapsdepartementet (2012: 12) skriver følgende om det å kunne regne:

> «Å kunne regne er å bruke matematikk på en rekke livsområder. Å kunne regne innebærer å resonnere og bruke matematiske begreper, fremgangsmåter, fakta og verktøy for å løse problemer og for å beskrive, forklare og forutse hva som skjer. Det innebærer å gjenkjenne regning i ulike kontekster, stille spørsmål av matematisk karakter, velge holdbare metoder når problemene skal løses, være i stand til å gjennomføre dem og tolke gyldigheten og rekkevidden av resultatene. Videre innebærer det å kunne gå tilbake i prosessen for å gjøre nye valg. Å kunne regne innebærer å kommunisere og argumentere for valg som er foretatt ved å tolke konteksten og arbeide med problemstillingen fram til en ferdig løsning.»

Jeg føler ikke det kommer tydelig frem hvilken matematikk som ikke er regning utfra denne beskrivelsen. Det jeg derimot sitter igjen med, er at regning handler om bruk av matematikk i praktiske sammenhenger. Ikke minst handler regning om å utvikle og bruke matematisk tenkning i praktiske sammenhenger. Mitt inntrykk er at dette er noe vi alle gjør, og ofte uten å tenke over at det faktisk er matematikk. Som eksempel kan jeg vise til en PPU-samling 22/03/13, der jeg la frem litt om musikk og matematikk, og jeg fikk kommentarer av typen: «men da driver vi med regning i musikkundervisningen jo.»

Jeg vil derfor påstå at regning ikke bør begrenses til å omhandle visse deler av matematikken. Det vil ikke si at matematikk=regning, men at regning ikke har noen entydig avgrensning. Dette er min forståelse av regning: *Regning er den matematikken som naturlig lar seg integrere i det enkelte fag, og som elevene har vært borti gjennom matematikkfaget, eller har forutsetning for å forstå.* Med dette mener jeg at regning i de enkelte fag ikke handler om å lære elevene ny ukjent matematikk, men å bruke den matematikken de allerede har lært. Det vil følgelig si at den matematikken jeg vil forholde meg til i denne oppgaven er matematikk som en person med generell studiekompetanse bør ha grunnlag for å forstå. Jeg vil igjen påpeke at regnebegrepet ikke bør begrenses. Hvis fagets egenart innbyr til matematisk tenkning, er det irrelevant om det er snakk om «regning» eller «matematikk». Er det på fagets egne premisser, er det regning. Dette gjør seg kanskje spesielt gjeldende i musikkfaget. Jeg kommer til å bruke begrepet *matematikk* videre i denne oppgaven, med samme forståelse av fenomenet som min egen definisjon av *regning*.

2. Et historisk tilbakeblikk

> «And so they have handed down to us clear knowledge of the speed of the heavently bodies and their rising and settings, of geometry, numbers and, not lest, of the science of music. For these sciences seem to be related» ARCHYTAS OF TARENTUM, ca. 400 f.kr. (sitert i Fauvel, Flood and Wilson 2003)

Denne oppgaven tar utgangspunkt i læreplanen for videregående, og følgelig er det naturlig å ta en kikk på hvilke tanker det er gjort om musikk og matematikk gjennom historien. Dette ser jeg to gode argumenter for. For det første vil flere av temaene jeg tar opp senere i oppgaven være knyttet til personer jeg kommer til å omtale her, og følgelig vil en historisk bakgrunn gi en dypere forståelse. Det andre argumentet er at det største enkeltstående musikkfaget på videregående heter musikk i perspektiv (MIP). Fagets hovedområder er musikkhistorie og lyttetrening (Utdanningsdirektoratet 2013b: Hovedområder), noe som i praksis vil si at elevene skal gjennom dette faget lære seg musikkhistorien å kjenne, samt analysere en god del musikk. I fagets grunnleggende ferdigheter kan vi lese følgende om regning:

> «*Å kunne regne* i musikk i perspektiv innebærer å forholde seg til aritmetiske grunnforhold, som todeling og tredeling. Det inngår også som grunnlag for å forstå komponeringsteknikker, harmoniske strukturer og transponering (Utdanningsdirektoratet 2013b: Grunnleggende ferdigheter).»

At elevene skal forholde seg til aritmetiske grunnforhold i musikkhistorien, føler jeg gjør det naturlig som lærer å presentere noen musikkmatematiske skikkelser fra tidligere tider, da musikken gjerne ble knyttet til aritmetikken (Sundberg 2002a: 40). Aritmetiske grunnforhold, i forståelsen forholdet mellom tall, er noe som er gjennomgående i denne oppgaven. Det gjør seg kanskje særlig gjeldende når det kommer til å stemme en skala, som jeg skal se på i kapittel 4, og i form av hvordan noteverdiene våre er bygd opp som jeg ser på i kapittel 8.

Under fagets kompetansemål kan vi i MIP-1 og MIP-2 blant annet lese at eleven skal beskrive hovedlinjene i musikkhistorien fra middelalderen og fram til i dag, med vekt på norsk og europeisk kunstmusikk… (Utdanningsdirektoratet 2013b: Kompetansemål). De skal også kunne dokumentere kunnskap om sentrale komponister, stilskapere, utøvere og et utvalg verk i samme periode (Ibid). Med utgangspunkt i dette føler jeg det er naturlig å prøve å trekke noen hovedlinjer frem mot vår tid, men fokusere på noen sentrale utvalgte personer. Følgelig er det andre som ikke får så mye oppmerksomhet. Mine valg er gjort delvis på bakgrunn av den litteraturen jeg har tilgjengelig, og delvis på bakgrunn av de andre temaene jeg tar opp senere i oppgaven.

Selv om MIP-faget starter med middelalderen føler jeg det er både naturlig og nødvendig å starte min historiske gjennomgang i den greske antikken. Dette fordi mye av middelalderens og nyere tids tenkning har sterke røtter her. Jeg tror dessuten at hovedgrunnen til at musikkhistoriefaget starter med middelalderen og ikke antikken, ligger i at vi ikke har nok kilder til å si noe sikkert om antikkens musikalske egenart (Sundberg 2000: 7). Det gjelder derimot ikke antikkens tanker om musikk. Når det gjelder musikk og matematikk i antikken er det særlig et navn som peker seg ut, nemlig Pytagoras.

2.1 Pytagoras

Ove Kristian Sundberg (2002b: 9) skriver at «Musikken og det musiske utgjør et dynamisk sentrum i gresk livsfølelse og virkelighetsforståelse.» Sundberg åpner sin bok *Pytagoras og de tonede tall* med myten om Musenes fødsel slik den berettes av Pindar:

> «Zeus hadde latt verden ordne, og gudene betraktet i stum undring den herlighet som frembød seg for deres øyne. Mon det dog fremdeles manglet noe, var Zeus' spørsmål. Og gudene svarte at det manglet èn ting. Tilværelsen manglet en stemme, den forløsende stemme som i ord og toner kunne utsi og lovprise all denne herlighet. For at en slik stemme skulle kunne lyde, behøvdes en ny type guddommelige vesener. Og dermed fremstod Musene som barn av Zeus og minnets Mnemosyne (Sitert i Sundberg 2002b: 9).»

Som også Sundberg påpeker, sier dette noe om hvor viktig musikken var for grekernes virkelighetssyn. Ikke bare var det musiske en guddommelig gave til menneskene, men den «har rot i tilværelsens egen orden og hører med til skaperverkets fullendelse (Ibid: 9).» Altså vil det være nærmest umulig å snakke om gresk livsforståelse uten å berøre musikken og det musiske. Det er i mine øyne nærmest umulig å overvurdere musikkens betydning i antikken. Musikken var så dypt forankret at man ikke bare måtte nærme seg musikkens vesen gjennom den generelle virkelighetsforståelse. Man måtte også nærme seg virkeligheten som helhet gjennom musikken (Ibid: 10). Et sentralt punkt som jeg tror gav musikken en slik høy status ligger i at vi i musikken både finner det lidenskapelige og emosjonelle (pathos), men også det rasjonelle (logos). I musikken forenes disse, noe vi skal se gjennom Pytagoras. Jeg vil understreke dette med et siste sitat:

> «Ikke uten grunn blir musikken siden kulturens begynnelse feiret som den høyeste kunstart. På klareste måte fremviser den strukturer og symmetrier. Den står i næreste forbindelse med diktekunsten, men overskrider dog matematisk sprogets område. Dens rasjonelle harmonikk og rytme representerer i sannhet den prestabilerte kosmiske harmoni, og det med en dybdevirkning ingen annen kunstart viser maken til (Sundberg 2002b: 11).»

En av tingene jeg finner så interessant med matematikken er at den for meg har en form for «objektiv og absolutt sannhet». Matematikken kan beskrive figurer mer «perfekte» og størrelser større enn hva vi kan finne og begripe i vår fysiske virkelighet. For eksempel beskriver matematikken figurer hvor alle sidene er nøyaktig like store, eller tall som overgår alt av størrelser vi finner i verden, inkludert størrelsen på det synlige universet. Tallet Googolplex $10^{(10^{100})}$ er blant annet så stort at hvis man hadde skrevet ut et siffer for hver partikkel i universet, ville vi ikke hatt nok partikler til å skrive dette som vanlig tall (Youtube.com 2013). At denne absolutheten også er dypt forankret i musikken gjør at jeg har forståelse for hvor høyt den ble satt hos grekerne. Liknende holdninger til musikken finner vi forøvrig også i det gamle Kina og det gamle India (Sundberg 2002b: 14).

Når det gjelder personen Pytagoras, er det knyttet mye usikkerhet til hvilke oppdagelser som tilhører Pytagoras selv, og hva som knyttes til hans elever. I matematikkens historie kan vi lese at han er omspunnet av legender og myter, og det er ikke alltid lett å skille mellom legender og sannhet (Holme 2001: 164). Sundberg (2002b: 23-36) drøfter dette og viser til hvordan forskjellige forskere er uenige i hva som er sant og usant, samt hva som bør tilskrives Pytagoras selv. I vår sammenheng er ikke denne diskusjonen like viktig. Jeg ønsker å trekke frem noen grunnleggende trekk ved pytagoreisk musikktenkning, og knytter disse til Pytagoras selv for enkelhets skyld.

For Pytagoras og pytagoreerne sto tallet som en grunnpilar i deres virkelighetsforståelse. Tallets betydning sto så dypt at Sundberg påstår det ikke bare var slik at tallene er ting, men «tallene betraktes som det egentlige og realitetsbærende i alt som er (tingene er tall) (Sundberg 2002b: 54).» Av dette kommer påstanden «Alt er tall» (Ibid: 54). Eirik Grønvold (1980: 131) skriver at den pytagoreiske opplevelse av tallet er at det er noe vesens-aktig med en kvalitetsdybde. Et slikt syn på tall kan for oss virke ganske fjernt. I dag er tall først og fremst til å beskrive størrelser/mengder (kardinaltall), eller en plassering i en rekkefølge (ordinaltall). Sundberg (2002b: 54-60) beskriver pytagoreernes forhold til tallet godt, og for en mer nøye gjennomgang av hva som legges i dette fenomenet må jeg vise til han. En måte og forsvare en slik kvalitativ opphøying av tallet finner vi nettopp i musikken (Ibid: 57). At vi i musikken, et så følelsesladet og irrasjonelt fenomen, finner grunnleggende strukturer basert på tallets lov, må ha gjort dypt inntrykk på pytagoreerne. Jeg vil anta at for dem beriket musikken og tallet hverandre gjensidig. Tallet gav musikken en orden, og musikken gav tallet en videre og mer dyptgripende funksjon.

Den konkrete oppdagelsen jeg særlig forbinder med pytagoreerne er forholdet mellom tonehøyde og strengelengde. Ved hjelp av et monokord fant Pytagoras, etter tradisjonen, ut av at de «best klingende» intervallene var de som lot seg uttrykke med de enkleste brøkene (Sundberg 2002b: 75-76). Pytagoras fant ut at hvis vi halverer strengens lengde klinger oktaven over. Dobler vi lengden klinger oktaven under. Følgelig kan oktaven uttrykkes som forholdet 1:2. Oktaven er det reneste av alle intervaller. Så symfont klinger den at tonene nærmest smelter sammen. En interessant side ved saken er at for at oktaven skal klinge må vi være nøyaktige. Bommer vi litt vil resultatet bli et meget dissonerende intervall (både stor septim og liten none, intervallene tettest til oktaven, er meget dissonerende) og perfeksjonen er følgelig brutt. Fra tallets side vil dette også kunne forsvares da et intervall som «nesten har forholdet 1:2» ikke kan uttrykkes med en enkel brøk. For eksempel er 487:1000 ganske nært 1:2, men en mye større og tyngre brøk. Selv om pytagoreerne ikke kunne måle frekvenser slik vi kan i dag, har Pytagoras i praksis oppdaget det omvendt proporsjonale forholdet mellom frekvens og strengelengde her. Dobles strengelengden halveres frekvensen og motsatt.

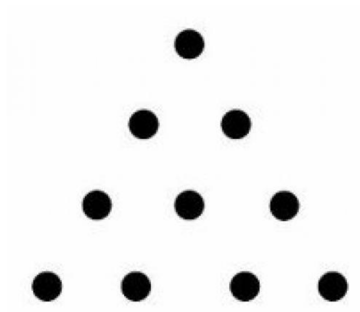
Videre oppdaget Pytagoras at kvinten kunne uttrykkes ved tallforholdet 2:3 og kvarten 3:4 (Sundberg 2000: 25). Disse tre intervallene ble stående som konsonerende intervaller, og som vi ser i musikkhistorien var det først godt ut i middelalderen, eller kanskje først renessansen at terser og sekster ble brukt som konsonanser i musikken. Oktaven, kvinten og kvarten var også de faste tonene i den pytagoreiske stemming av skalaen (Sundberg 2000: 27).
Jeg har selv fått konstruert meg et monokord for å teste ut Pytagoras' eksperimentering. I det følgende ser vi tre stemminger av monokordet:

Figur 2.1a: Oktavforhold.

Figur 2.1b: Kvintforhold.

Figur 2.1c: Kvartforhold.

En viktig side med pytagoreernes tallbehandling finner vi i grupperingen av tall slik at de danner figurer (figurtall). Det kanskje mest kjente eksempelet på figurtall er kvadrattallene. For pytagoreerne er det derimot en annen tallfigur som er den mest betydningsfulle. Nemlig det dekadiske tetraktys (Sundberg 2002b: 63):



Figur 2.2: Det detkadiske tetraktys.

Som figurtall er dette snakk om det fjerde trekanttallet. Det er bygd opp av tallene 1+2+3+4=10. Dermed inneholder det potensielt alle tall, siden 10-tallssystemet som vi bruker egentlig bare starter på nytt etter å ha kommet til tallet 10, og tallene 1, 2, 3, 4 er de elementære tallene.

Sundberg (2002b: 63) skriver at «I de fire elementartallene ser den pythagoreiske filosofi en ekspandering av tallets kraft fra eneren (punktet), via to-tallet (linjen) og tre-tallet (flaten), frem til fire-tallet (legemet).» Her refererer han til vår tredimensjonale verden. Et punkt gir oss ingen dimensjoner i det hele tatt. Med to punkter dannes linjen og 1. dimensjon. tre punkter er nok til å danne et plan, og 2. dimensjon, mens først ved fire punkter er det mulig å danne et legeme og bevege seg inn 3. dimensjon. Om man med fem punkter kan bevege seg over i 4. dimensjon er en diskusjon som går utover denne oppgavens omfang, men det er interessant å merke seg at fire punkter er nok til å danne tre dimensjoner som er det vi tilsynelatende lever i. Som Sundberg skriver har vi rommer elementartallene «alle tall», men de har også «grunnleggende geometrisk-stereometriske ekvivalenter (Sundberg 2002b: 63-64).» Altså finner vi her både en link til aritmetikken og til geometrien.

Med bakgrunn i dette finner jeg det ikke overraskende at det nettopp var oktaven (1:2), kvinten (2:3) og kvarten (3:4) som ble regnet som de konsonerende intervallene, og som utmerket seg. I disse intervallene finner vi alle elementartallene, og musikkens orden er således forankret i tallets vesen.

Minste felles multiplum for å uttrykke både kvint og kvart og oktav innen samme ramme er med tallene 12:9:8:6. Her finner vi oktaven 12:6, kvinten 12:8 og/eller 9:6 og kvarten 12:9 og/eller 8:6. En annen ting som dukker opp her er tallforholdet 9:8, som er det pytagoreiske heltrinn (se kapittel 4.3), og som sammen med disse faste tonene danner grunnlaget for den pytagoreiske skalaen. Denne tallrekken får meg til å tenke hvordan er det naturlig å dele en oktav i to. Hva er egentlig midten av en oktav? Hvis vi ser på pianoet synes dette spørsmålet fåfengt. Det er lett å se at tritonus+tritonus=oktav, og følgelig er tritonusen en halvering av oktaven. Jeg har ikke tenkt å benekte dette faktum. Hvis man derimot i relativt hurtig tempo skal synge oktavintervallet og gå innom en tone på veien, vil både kvarten og særlig kvinten være et betydelig enklere valg enn tritonusen. Det er hvert fall min egen erfaring. Hvis vi tar utgangspunkt i tallrekken vår 12:9:8:6, og knytter hvert tall til hver sin tone, vil 6 være grunntonen og 12 oktaven. Uavhengig av det vi vet om pianoet, burde vel gjennomsnittet av disse være midt mellom? Det vi bare kaller gjennomsnitt i grunnskolen, er det Sundberg (2002b: 95) referer til som det aritmetiske gjennomsnittet $x = \frac{a+b}{2}$. Følgelig vil gjennomsnittet være 9, $\frac{6+12}{2} = 9$, og kvinten vil være det aritmetiske gjennomsnittet. Dermed kan kvinten sees på som et naturlig midtpunkt i oktaven. Hva så med kvarten? Sundberg (Ibid: 95) viser til det harmoniske gjennomsnittet uttrykt som $y = \frac{2ab}{a+b}$. Med denne formelen vil gjennomsnittet være 8, $\frac{2*6*12}{6+12} = 8$, og kvarten vil være det harmoniske gjennomsnittet. Altså er kvarten også en god kandidat som midtpunkt i oktaven.

Men vi vet strengt talt at tritonusen er en halv oktav. Et tredje gjennomsnitt, det såkalte geometriske gjennomsnittet må i bruk for å få tritonusen som resultat. Det geometriske gjennomsnitt lar seg uttrykke som $z = \sqrt{ab}$. I vårt tilfelle gir det oss svaret $\sqrt{6 * 12} = \sqrt{72} = 6 * \sqrt{2}$ som er et irrasjonelt tall.

Grunnen til at jeg trekker frem dette er at jeg vil vise at selv om vi finner matematisk orden i musikken, finnes det også scenarier der den matematiske enkelheten ikke helt samsvarer med sånn «det burde være». Dette vil vi også se i stemmingen av den tempererte skalaen.

2.2 Veien videre fra antikken. Aristoxenos og Boethius

Veldig mye nyere musikktenkning der matematikken spiller en betydelig rolle har røtter i den pytagoreiske tankegangen, noe vi skal se hos både Zarlino og Kepler, som jeg kommer tilbake til. Etter en gjennomlesning av Sundbergs (2000, 2002a, 2007) bøker om musikktenkningens historie er mitt inntrykk at den pytagoreiske læren lever videre gjennom middelalderen, og i mange sammenhenger blir «kristnet». I en mer omfattende gjennomgang er det mange tenkere som burde vært nevnt, men jeg nøyer meg med å referere til Sundbergs bøker.

Imidlertid er ikke den pytagoreiske musikkforståelsen, med musikken udelelig knyttet til tallet enerådende i antikken. Aristoteles elev Aristoxenos er et eksempel på en motpol til den pytagoreiske tankegangen (Bø-Rygg og Berg Eriksen 2012: 97). Aristoxenos betvilte sammenhengen mellom matematiske proporsjoner og tonens fullkommenhet. For han måtte ørets dom kombinert med tanken være grunnlaget for en vitenskap om musikken, og nøyaktighet er viktig. Aristoxenos skriver at «For en musikkteoretiker er nøyaktighet i sansefornemmelse nærmest et grunnleggende krav, siden en som ikke fornemmer nøyaktig umulig kan gi noen god forklaring på det som han ikke oppfatter korrekt (Aristoxenos, i Bø-Rygg og Berg Eriksen 2012: 100).» Han delte forøvrig også oktaven i 12 like halvtoner, i motsetning til pytagoreisk inndeling av skalaen som er basert på kvinten (Ibid: 98).

Etter å ha lest et utdrag fra Aristoxenos' bok *Harmoniens Elementer* (Norsk oversettelse i Bø-Rygg og Berg Eriksen 2012: 99-105) merker jeg meg at selv om utgangspunktet hans er noe ganske annerledes enn for pytagoreerne er han veldig metodisk i sin fremgangsmåte, og for en matematiker kan det til tider anes en underliggende snev av matematikk. Særlig bet jeg meg merke i denne setningen «Vi ser mange lignende eksempler når det gjelder rytmene: for selv uten noen endring av forholdstallet som de rytmiske artene bestemmes av, … (Aristoxenos, i Bø-Rygg og Berg Eriksen 2012: 100).» Dette gjør at jeg vil ikke tro Aristoxenos fullstendig forkaster ideen om at det finnes matematikk i musikken, men mer at dette ikke er en rett tilnærming for å forklare musikkens grunnelementer. «For det er under sansefornemmelsens oppsyn at hvert instrument etter evne tar del i den vidunderlige orden som tilhører naturen til det harmoniske, og det er sansefornemmelsen både dette og alt øvrig som hører til musikken avhenger av (Aristoxenos, i Bø-Rygg og Berg Eriksen 2012: 104).»

I overgangen fra antikken til middelalderen er det et navn jeg vil trekke frem nemlig Anicius Manlius Severinus Boethius (ca. 480-525 e.Kr.). Grunnen til at jeg akkurat velger meg ut han er hans lansering av et tredelt musikkbegrep, som er relevant for min gjennomgang av Kepler senere i dette kapittelet. Han er dessuten en viderefører av Pytagoreisk tenkning.

Boethius beskriver disse tre formene for musikk i boken *Om musikkens grunnprinsipper* (Bø-Rygg og Berg Eriksen 2012: 185-190). Der skriver han at det finnes tre former for musikk. Verdensaltets musikk (Musica munduna), den menneskelige musikk (Musica humana), og musikk som utøves ved hjelp av instrumenter (Musica instrumentalis) (Ibid: 188). Verdensaltets musikk refererer til himmelens orden, og Boethius skriver at den «kan best observeres i de fenomener som lar seg observere på himmelen selv, i elementenes forening og i årstidenes veksling (Bø-Rygg og Berg Eriksen 2012: 188).» Videre skriver han følgende:

> «Ikke minst stjernenes baner er forenet i en gjensidig avpasning som er så sammenføyd og så sammenvevet at dens like ikke er mulig å forestille seg. Noen beveger seg i høyere baner og andre i lavere, og de alle dreier rundt i en jevn hastighet, slik at en finstilt orden lar seg utlede fra banenes innbyrdes forskjeller. Derfor kan det umuligvis mangle noen finstilt orden i de jevne bevegelser som den himmelske omdreining gjør. For med mindre en viss harmoni forente forskjellene og de kontrære kreftene til de fire elementene, hvordan skulle de kunne virke sammen i ett enkelt legeme eller system? (Boethius sitert i Bø-Rygg og Berg Eriksen 2012: 188)»

Slik jeg forstår verdensaltets musikk menes det altså den matematiske orden som verden naturlig er gjennomsyret av, og dens ekvivalent i musikkens orden. Boethius mente dessuten at selv om vi ikke kunne høre planetenes baner, måtte de lage lyd. Hvordan kunne slike enorme legemer bevege seg så hurtig uten å lage noen form for lyd?[1] (Ibid: 188).

Den menneskelige musikk forstår jeg som menneskets ekvivalent til verdens orden. Altså den musikalske orden som finnes i oss alle. «For hva er det som forener fornuftens kroppsløse livaktighet med kroppen, om ikke en slags harmoni og samordning, lik den som bevirker en samklang av dype og høye toner? (Boethius sitert i Bø-Rygg og Berg Eriksen 2012:188).» Den siste formen for musikk er kanskje det vi i dag forbinder med musikk, nemlig den klingende som utøves på instrumenter.

Senere i samme bok deler han de som befatter seg med musikkunsten i tre kategorier. «Den første befatter seg med instrumenter, den andre komponerer sanger, den tredje foretar en vurdering av instrumentenes utførelse og sangen (Boethius sitert i Bø-Rygg og Berg Eriksen 2012: 190).» Dette tilsvarer utøvere, komponister og musikkvitere/musikkforskere. Det som er verdt å merke seg er at for Boethius er det egentlig bare tredje gruppen som virkelig kan kalles musikere, og følgelig er denne kategorien overlegen de andre. Innledningsvis skriver han;

> «Nå må vi ta i betraktning at enhver kunst og ethvert fag naturlig har et teoretisk grunnlag som er mer ærverdig enn håndverket, som blir utøvet med håndverkerens arbeidende hender. For det er langt mer viktig og opphøyd å ha viten om hva noen gjør, enn selv å utføre det som en annen vet (Ibid: 189).»

Boethius mener utøverne mangler teoretisk innsikt, og kun har en tjenende rolle. Når det gjelder diktere og komponister lar de seg lede til sangen «snarere ved en slags naturlig tilskyndelse enn ved teori og spekulasjon. Av den grunn må også deres kategori begrepsmessig atskilles fra musikk (Boethius sitert i Bø-Rygg og Berg Eriksen 2012: 190).» Kun den tredje kategorien bruker fornuft i sin tilnærmelse til musikk, og «Siden denne kategorien fullt og helt beskjeftiger seg med spekulasjon og teori, regnes den som musikk i egentlig betydning (Ibid: 190).»

Det interessante å ta med seg herfra er ikke om man er enig i Boethius' vurdering, men hvordan dette musikksynet skiller seg fra dagens musikksyn. Musikk er altså ikke først og fremst en kunstform her, men i mye større en matematisk vitenskap.

2.3 Musikken som fri kunst

Selv om jeg ikke vil trekke frem mange navn fra middelalderen, føler jeg det er en ting som er viktig å se på. Nemlig musikkens plassering i *Artes Liberales,* de 7 frie kunster. Dette systemet ble etablert ca. 400 e.Kr. av Martianus Capella (Sundberg 2000: 96). Disse kunstene ble regnet

[1] I dag vet vi at dette ikke er sant siden lyd ikke kan bevege seg i det tomme rom.

som frie i den forstand at de ikke var underlagt et bestemt praktisk forhold (Klempe 2003: 1301), men hadde verdi i seg selv. I motsetning til *Artes Liberales* hadde man *Artes mecanicae* som omfattet håndverk og produksjon som dekket materielle behov. Verdt å merke seg er at musikken var unntaket av dagens former for kunst når det gjaldt plassering. Dette var på grunn av musikkens tilknytning til tallet (Bø-Rygg og Berg Eriksen 2012: 183). De frie kunstene ble delt i språklig treergruppe *trivium*, bestående av grammatikk, logikk og retorikk; og en matematisk firergruppe *quadrivium*, bestående av aritmetikk, geometri, astronomi og musikk (Sundberg 2000: 96). Musikkens plassering innen dette systemet har røtter helt tilbake til Pytagoras (Critchlow i Martineau 2010: 3), og hadde stor betydning for musikktenkningen i over 1000 år. Den siste betydelige musikkteoretiske behandlingen, med utgangspunkt i artes liberales, ble skrevet av Johann Gottfried Walther på begynnelsen av 1700-tallet (Sundberg 2000: 96).

Felles for alle quadrivium-disiplinene er tallet, og følgelig får aritmetikken en basal rolle da den omhandler tallet som seg. Musikken derimot handler om tall i forhold til andre tall, og tall som er i bevegelse. Geometrien omhandler tall uttrykt i størrelser og form, og astronomien legger til bevegelsen som en faktor. Quadrivium-disiplinene kan også deles i to grupper der aritmetikk og musikk omtaler tall som mengde, mens geometri og astronomi omtaler tall som størrelse (Sundberg 2002: 38-40). Det som er interessant å merke seg her er at frem til ca. 1500, var musikk per definisjon en matematisk kunst/vitenskap. Følgelig kan man kanskje påstå at å diskutere link mellom musikk og matematikk før 1500 nærmest er meningsløst, da all musikk var matematikk innen dette systemet. Dette viser også viktigheten av å ha en klar definisjon på hva jeg mener med musikk og matematikk/regning i denne oppgaven. Grener av matematikken som vi i dag finner helt naturlig, som symbolsk algebra og sannsynlighetsregning hadde ikke sin plass i quadrivium, og slik sett kan man påstå at musikk i større grad var en matematisk disiplin enn disse.

Selv om tanken musikk/matematikk ikke døde ut, begynte i renessansen tanken om musikk knyttet til de språklige disiplinene å vokse frem stadig sterkere. Musikken ble flyttet fra å være knyttet til matematikken, til å bli knyttet til retorikken. Musikkens emosjonelle side og tydning av det musikalske uttrykket får økt interesse, og det skapende individ kommer mer i fokus (Sundberg 2002: 72). Denne musikk-retoriske retningen vokste seg enda sterkere inn i barokken, og kom etterhvert til å prege musikkforståelsen (Sundberg 2007: 39). En annen interessant observasjon i denne linjen er at musikken på 1600-tallet i følge Susanne Wollenberg

(2003: 1) beveget seg fra å være en vitenskap til å være en kunstart. I denne sammenheng er det også naturlig å nevne barokkens affektlære, «som ser musikken som bærer av klart formulerte og vel avgrensede emosjonelle momenter (Sundberg 2007: 76).» I motsetning til hos Boethius der det fornuftstyrte og «objektive» var musikkens dypeste vesen, begynner nå musikkens språklige og emosjonelle side å ta over førersetet.

2.4 Gioseffo Zarlino (1517-1590)

Hos Zarlino, 1500tallets største musikkteoretiker, finner vi sterke røtter i antikk tankegang. Ikke minst er Boethius' tredelte musikkbegrep aktuelt. For Zarlino er det derimot den klingende musikken (musica instrumentalis) som er den viktigste (Sundberg 2002a: 80). I vår sammenheng er kanskje den viktigste faktoren med Zarlino innføringen av den renstemte skalaen (se kapittel 4.4). I dette avsnittet skal jeg konsentrere meg om Zarlinos tilnærming til ters-intervallet.

I likhet med pytagoreerne mente Zarlino at musikken var tilgjengelig for rasjonal gjennomlysning gjennom matematikken (Ibid: 81), men i motsetning til pytagoreerne var det ikke nok med tallene 1-4 for å beskrive de konsonerende intervallene. Hans musikalske erfaring tilsa at også terser og sekster var å regne som konsonanser, og derfor utgangspunkt i tallrekken 1-6 (Ibid: 82). Med denne kan også den store (4:5), og den lille tersen (5:6) uttrykkes. Sekstene dukker opp som komplementære intervaller til tersene.

Jeg viste i kapittelet hvordan en man ved bruk av gjennomsnittet av oktaven fikk uttrykk for både kvint og kvart. Zarlino benyttet seg av den samme delingen av kvinten for å uttrykke tersene. I stedet for å ta utgangspunkt i tonehøyder brukte Zarlino strengelengder (Sundberg 2002a: 82). Altså vil det høyeste tallet referere til den dypeste tonen. Den laveste heltallige tallrekken som uttrykker både kvint, stor ters og liten ters er 30:25:24:20, her har vi uttrykk for kvinten (30:20), den store tersen (30:24 og 25:20) og den lille tersen (30:25 og 24:20). Ved å ta utgangspunkt i rammen 30:20 får vi den lille tersen (i forhold til den dypeste tonen) ved å beregne det aritmetiske gjennomsnittet $\frac{20+30}{2} = 25$, og den store tersen ved å beregne det harmoniske gjennomsnittet $\frac{2*30*20}{30+20} = \frac{1200}{50} = 24$. Som en kuriositet kan vi beregne det geometriske gjennomsnittet også $\sqrt{30 * 20} = \sqrt{600} = 10\sqrt{6}$, som er et irrasjonelt tall. Nok en gang ser vi at en halvering av et sterkt konsonerende intervall gir en ufullkommenhet.

2.5 Johannes Kepler (1571-1630)

Kepler har i likhet med Zarlino en sterk link til pytagoreisk tenkning, og antikkens forhold til musikkens nærmest guddommelige status (Grønvold 1980:130). Jeg vil imidlertid presentere en ny link med musikk og matematikk her nemlig verdensharmonien. Ideen om en verdensharmoni er ikke ny med Kepler. Den kan spores tilbake til Pytagoras (Grønvold 1980: 130), og den ligger også naturlig i Boethius' musica munduna. Nytt med Kepler er derimot at han hadde tilgang på gode observasjoner av stjernehimmelen gjennom Tycho Brahe, noe som gjorde at han kunne uttrykke verdensharmonien på en mye mer konkret måte (Ibid: 135).

I matematikkens historie (Holme 2004: 234-236) kan vi lese at Kepler i dag er mest kjent for sine tre lover om planetenes bevegelse. Av disse er i vår sammenheng den første loven som sier at planetene går i ellipsebaner med solen som det ene brennpunktet den mest relevante. Holme skriver derimot ingenting om verdensharmonien her. Kanskje naturlig siden matematikkens historie fokuserer på ren matematikk, men det gir lite innblikk i hvordan Kepler faktisk tenkte. Jeg skal ikke undervurdere disse lovene. Konklusjonen at planetenes baner ikke var sirkler men ellipser var mer radikal enn jeg tror vi kan forstå. Kanskje like tung som å anerkjenne solen som universets sentrum. Kepler skal selv ha uttrykt fortvilet «Hadde banen bare vært en ellipse! (Grønvold 1980: 135)», i det han jobbet med dette og hans beregninger stadig pekte mer og mer vekk fra sirkel-formen, men både Geir Vang (2003: 10), Ove Kristian Sundberg (2007: 14) og Eirik Grønvold (1980: 133) er klare på at Keplers viktigste visjon var å finne bevis for ideen om verdensharmonien. Hans lover var bare verdifulle biprodukter.

Før vi kan se på verdensharmonien trenger vi et blikk på Keplers konsonansteori. For en dypere gjennomgang av dette anbefaler jeg Geir Vangs (2003) hovedoppgave om temaet. Kepler mente at gehørets dom talte for at terser og sekster bør regnes som konsonanser, og kritiserer pytagoreerne for å la den rasjonelle argumentasjonen av å begrense seg til oktav, kvint og kvart overskygget gehørets dom (Sundberg 2007: 15). Nå vil jeg imidlertid legge til at Kepler levde i overgangen fra renessanse til barokk, en tid der tersen hadde fått god innpass i datidens musikk. Følgelig er det rimelig å anta at i Keplers ører vil en ters oppleves mer konsonerende enn i Pytagoras'. Kepler er altså enig med Zarlino når det gjelder hvilke intervaller som er konsonerende, men han savner en rasjonell begrunnelse hos Zarlino. Hvorfor begrense seg til en tallrekke på 1-6? (Ibid: 15). Kepler finner sin argumentasjon ved bruk av klassisk geometri. Det viser seg å være samsvar mellom musikalske konsonanser og konstruerbare (ved hjelp av passer og linjal) regulære polygoner innskrevet i en sirkel (Ibid: 15). Med dette ser vi musikken primært knyttet opp mot geometrien, i motsetning til tidligere da den primært blir knyttet til aritmetikken.

Prinsippet tok utgangspunkt i monokordet. Kepler markerte punktene på strengen med tanke på hvor de konsonerende intervallene ble dannet mellom delen av strengen og hele strengen. Han lot så hele strengen danne en sirkel ved å feste endene sammen (Grønvold 1980: 135). Geir Vang (2003: 33-36) viser hvordan de forskjellige intervallene kan knyttes til forskjellige polygoner. Oktaven er det enkleste intervallet, som vi får ved å dele sirkelen i to like deler (tegne opp diameteren): Forholdet mellom halve sirkelen og hele sirkelen gir da uttrykket oktaven. Kvinten er neste, som vi får ved å konstruere en regulær trekant. Forholdet mellom sirkelbuen avgrenset av to av trekantens sider og hele sirkelen gir oss kvinten. Verdt å merke seg er at duodesimen også dukker opp her, som forholdet mellom sirkelbuen avgrenset av en av trekantens sider og hele sirkelen. Kvarten er neste intervall som lar seg uttrykke ved å konstruere et kvadrat og se på forholdet mellom sirkelbuen avgrenset av tre sider, og hele sirkelen. Her dukker forøvrig også oktaven (to sider/hele), og dobbeloktav (en side/hele). Det neste konstruerbare polygonet er femkanten. Her finner vi både den store tersen (4:5) og den store seksten (3:5). Den lille tersen finner vi i den regulære sekskanten (5:6). Det er ikke mulig å konstruere en regulær syvkant, og her finner vi med Keplers øyne en rasjonell forklaring på hvorfor ingen konsonans uttrykkes med et forholdstall til syv. Hvis vi kikker på overtonerekka (se kapittel 3), vil nærmeste kandidater til et intervall innen oktaven være 6:7, som tilsvarer en mellomting mellom heltonen og en liten ters, 5:7 som gir oss en lav tritonus, eller 4:7 som gir oss en lav liten septim. Den regulære åttekanten er derimot konstruerbar, og her finner vi det siste konsonerende intervallet nemlig den lille seksten (5:8). Med dette har Kepler funnet en rasjonell begrunnelse for antall konsonanser.

Det må i etterkant av dette nevnes at det finnes flere konstruerbare regulære polygoner enn de Kepler her opererer med. Den neste er 17-kanten som Carl Friedrich Gauss beviste at var konstruerbar i 1796 (Vang 2003: 39). Jeg syns likevel at Keplers observasjon er interessant, da vi må opp i meget høye tall (intervallmessig) før vi får nye konstruerbare polygoner. Jeg kommer tilbake til konsonansbegrepet i kapittel 7.

Hva så med verdensharmonien? I og med at planetenes buer ikke er sirkulære men elliptiske, vil planetenes avstand til solen variere. I sin søken etter verdensharmonien undersøkte Kepler med solen som midtpunkt, de målte vinklene en planet danner i løpet av 24 timer, når de befinner seg i aphel (lengst vekk fra solen) og perihel (nærmest solen). Forholdet mellom disse vinklene kan uttrykkes som et intervall, og her dukker konsonansene opp. Av 16 intervaller er det bare to som ikke er konsonerende (Grønvold 1980: 137). I tillegg til enkeltplaneters vinkler til solen, sammenlikner også Kepler vinklene mellom to planeter. Kvartintervallet finner Kepler ved å sammenlikne vinklene månen i aphel og perihel danner til jorden pr. time (Ibid: 139). Vedlagt tabell hentet fra Grønvolds artikkel (1980: 138) viser oversikt over de intervaller som dannes av planetene.

			Harmonier for en enkel planet:
♄	SATURN	Apel a Perihel b	a:b = 4:5 (stor ters)
♃	JUPITER	Aphel c Perihel d	c:d = 5:6 (liten ters)
♂	MARS	Aphel e Perihel f	e:f = 2:3 (kvint)
	JORDEN	Aphel g Perihel h	g:h = 15:16 (diaton. halvtone)
♀	VENUS	Aphel i Perihel k	i:k = 24:25 (kromat. halvtone)
☿	MERKUR	Aphel l Perihel m	l:m = 5:12 (oktav + liten ters)

	Harmonier mellom to planeter:
♄ - ♃	a:d = 1:3 (duodecim) b:c = 1:2 (oktav)
♃ - ♂	c:f = 1:8 (tre oktaver) d:e = 5:24 (to oktaver + liten ters)
♂ - JORDEN	e:h = 5:12 (oktav + liten ters) f:g = 2:3 (kvint)
JORDEN - ♀	g:k = 3:5 (stor sekst) h:i = 5:8 (liten sekst)
♀ - ☿	i:m = 1:4 (to oktaver) k:l = 3:5 (stor sekst)

Figur 2.3: Intervaller mellom planetenes bane.

Kepler gjør flere beregninger utfra planetenes bevegelser som går utover denne oppgavens rammer, men jeg vil trekke frem en kuriositet. Kepler klarer med utgangspunkt i planetbanene å konstruere to skalaer nemlig dur- og mollskalaen (Grønvold 1980: 139). Dette er interessant å merke seg med tanke på at musikkhistorisk sett er vi nå i en tid hvor dur- og mollskalaen begynner å ta over rollen som de to dominerende skalaene vi bruker.

Kepler fant i verdensharmonien en forklaring på hvorfor Gud hadde valgt å la planetene bevege seg i ellipseform i stedet for den «perfekte sirkel-formen». Siden sirkelbuer ikke ville hatt noe aphel og perihel kunne de heller ikke dannet noen intervaller. For å bruke Grønvolds ord (1980: 140): «At skaperen i sin oppbygning av verdensaltet har foretrukket ellipsen fremfor den mest fullkomne form, sirkelen, begrunner Kepler med at skaperen dermed har villet oppnå en musikalsk planetharmoni, og at denne harmoni var viktigere for ham enn den geometriske.»

2.6 1700-tallet til 1800-tallet

Over på 1700-tallet får musikken en lavere status enn den har hatt noen gang. Kjerschow (1988: 12-13) skriver: «Enkelte av 1700-tallets lærde omtaler musikken som et overflødig, om enn behagelig tidsfordriv; andre ser den som en uklar tale - eventuelt som et vitnesbyrd om uklar, følelsesladet tenkning - som kan overflødiggjøres ved at den utlegges i klartekst.» I motsetning til den pytagoreiske tankegang vi har fulgt, er altså musikken nå blitt degradert fra noe guddommelig, til en «pyntegjenstand» som på det beste kan være pen å høre på. Forklaringen på dette tror jeg ligger i at musikkens irrasjonelle (følelsesmessige) side og den rasjonelle (matematiske), som i antikken ble sett på som uløselig knyttet sammen (Kjerschow 1993: 17), blir i 1700-tallets dualistiske perspektiv adskilt.

Følgelig mister musikken i stor grad sin rasjonelle forankring fordi det er et så følelsesladet fenomen. Et eksempel på denne gnisningen er striden mellom Rameau (fornuft) og Rosseau (følelse) (Kjerschow 1993: 14-45). En slik uoverensstemmelse vil jeg tro hadde vært ulogisk i antikken, da fornuft og følelse ikke ble sett på som noen motsetning.

Musikken irrasjonelle karakter gjorde at den ble nedvurdert på 1700-tallet i opplysningstidens tidsalder. Derimot var det nettopp denne siden som gjorde at musikken ble sterkt oppvurdert på 1800-tallet (Kjerschow 1993: 16). Musikken fikk i romantikken en enestående status, igjen ble den vurdert omtrent like høyt som i antikken (Kjerschow 1988: 11).

Det var som sagt ikke på grunn av musikkens rasjonelle forankring, men snarere tvert i mot. Musikken sto som et rent kunstnerisk materiale. Musikk var bare musikk (Ibid: 11).

I vår sammenheng er det rimelig å si at forholdet musikk/matematikk var svakere enn i tidligere tider. Ved en mer detaljert gjennomgang ville det sikkert vært mulig å finne noen navn å trekke frem, men i denne sammenheng føler jeg ikke det naturlig. På 1700-tallet ble fornuft og følelse mer adskilt, og musikken var følgelig mindre viktig siden den var så følelsesladet. På 1800-tallet var nettopp dette argumentasjonen for at musikken var den høyeste kunst. Mitt inntrykk er at denne holdningen i stor grad finnes fortsatt i samfunnet. Jeg tror det er grunnen til at musikk og matematikk gjerne blir forbundet med den teoretiske og tørre siden av musikkens verden. Jeg er sikker på at disse fagene naturlig beriker hverandre. Selv om det er mye vi har lært i nyere tider som var fjernt for antikkens tenkere, har de forstått noe vesentlig om musikk og matematikk etter mitt syn.

2.7 1900-tallet til i dag

Jeg vil nå hoppe litt tilbake til starten av dette kapittelet. Der argumenterte jeg med faget MIP-1 og MIP-2 for å bruke et kapittel på musikk og matematikk gjennom historien. MIP-1 tar for seg tiden frem til 1900, og MIP-2 tiden etter 1900. Følgelig bør jeg nå være halvveis, hvis jeg skal fordele denne historiske gjennomgangen 50/50. At jeg ikke velger å bruke mye tid på 1900-tallet er ikke fordi det er blottet fra musikk og matematikk. Et viktig eksempel på matematikk i musikken fra tidlig 1900-tall er Arnold Schönbergs 12-toneteknikk. Når tonaliteten ble brutt fant han her en form for orden som var nødvendig for musikken hans.

Når det gjelder tiden etter 1945 (som markerer et skille i musikkhistorien) er mitt inntrykk at temaet musikk og matematikk er gjeldende, kanskje mer enn noen gang (se Gulbrandsen 2012a, 2012b, 2012c, 2012d). Hvert fall når det kommer til komposisjonsteknikker. Gulbrandsen (2012a: 285) skriver at «komponistene [etter krigen] fant opp stadig nye strukturer og teknikker, gjerne basert på matematiske skjemaer og systemer.» Her ser vi en annen tilnærming til musikk og matematikk, nemlig matematikken brukt som et middel for musikalsk skapning.

Jeg velger likevel ikke å bruke mye plass på dette. Grunnen er at jeg kommer innom mye av det i senere kapitler, særlig gjennom kapittel 5 om matematiske komposisjonsteknikker. Jeg kommer også til å gjøre en analyse John Taveners *The Lamb*, som er skrevet på 1980-tallet. I denne delen har jeg hatt som mål å ikke skrive utdypende om ting jeg uansett vil ta opp i senere kapitler, og det er vanskeligere når det kommer til 1900-tallet.

Likevel vil jeg nevne noen flere temaer fra 1900-tallet for de som ønsker å se videre på denne perioden.

Serialismen er i seg selv et interessant fenomen (Se kapittel 5). Skulle jeg trukket frem en komponist, ville Iannis Xenakis vært god kandidat. Han kritiserte regnemåtene i serialismen for å være primitive, og ville erstatte dem med mer avanserte sannsynlighetsberegninger (Gulbrandsen 2012a: 291). Hans orkesterverk Metastaesis er et verk konstruert etter stokastiske matematiske prinsipper (Ibid: 292). Tilfeldighetsmusikken til John Cage er også et godt alternativ. Eller å se på likheter og forskjeller mellom serialistisk musikk og tilfeldighetsmusikk

En annen retning innen musikken som peker seg ut etter 1945, og som definitivt kunne vært en naturlig innfallsvinkel, er den elektroniske musikken. Som Paul Griffiths (2006: 230) skriver: «A great deal in music since 1945 seems to have been leaning towards cybernetics: the idea of music as sounding numbers, the importance of rules and algorithms in composition, »

3. Overtonerekka. Naturens egen orden

Overtonerekka er kanskje den koblingen mellom musikk og matematikk jeg finner vakrest av alle. Overtoner finnes i praktisk talt alle naturligskapte toner, og selv om et utrent øre ikke hører dem, vil vi alle merke godt den dagen de forsvinner. Jeg velger å ta for meg overtonerekka såpass tidlig i oppgaven da den har en grunnleggende plass i flere av de andre kapitlene. Den er for eksempel relevant for stemming av skalaen og konsonans/dissonans.

Jeg lærte selv først om overtoner/overtonerekka i det daværende musikkfaget musikklære/hørelære/lytting på videregående, og har selv undervist overtonerekka i det nåværende faget lytting. Lyttefaget er et førsteklassefag, og det ikke et stort fag. Totalt består det av 56 klokketimer (Utdanningsdirektoratet 2013c: timetall). Med kunnskapsløftet finnes det strengt talt ikke noe som heter pensum lenger, bare kompetansemål. Lærere står friere enn tidligere til å velge hva faget skal inneholde, og følgelig vil jeg ikke finne noe sted i læreplanen hvor det står at elevene skal lære overtoner. Så jeg må finne noe som tilsier at dette er naturlig å lære dem.

Fagets hovedelementer er musikkforståelse og musikkens elementer (Utdanningsdirektoratet 2013c: hovedområder), og det er særlig i musikkens elementer vi kan forsvare overtonene. Om musikkens elementer står det at «Hovedområdet dreier seg om gjenkjennelse og beskrivelse av musikkens grunnelementer, med utgangspunkt i aktiv lytting og noteforståelse (Ibid: hovedområder).» Kompetansemålet knyttet til musikkens elementer er følgende: «…gjenkjenne og beskrive musikkens grunnleggende elementer med utgangspunkt i klingende musikk og enkle notebilder (Utdanningsdirektoratet 2013c: kompetansemål).»

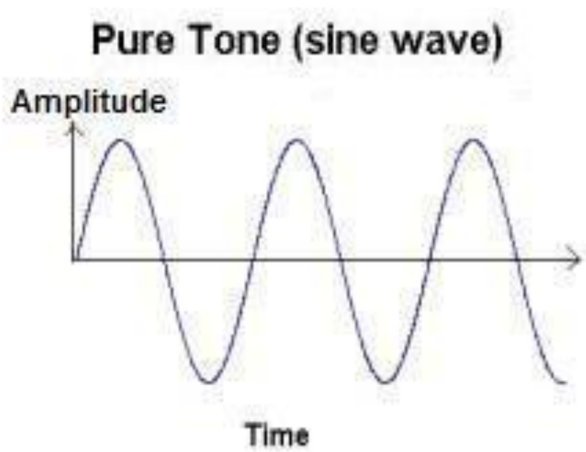
At overtonerekka er et grunnelement i musikken er for meg hevet over en hver tvil. Den finnes i de aller fleste naturskapte toner, finnes den også i den aller meste musikken vi hører. Spørsmålet om det er naturlig å undervise det her er derimot kanskje ikke så entydig. Det kan argumenteres for at elementer som melodi, rytme, form og instrumentkunnskap er viktigere, da dette er ting elevene kanskje får mer bruk for i det daglige. Imidlertid mener jeg at det ikke er unaturlig å gi overtonene sin avdeling. Som jeg skal vise i dette kapittelet finnes det musikk som er komponert med overtoner som utgangspunkt og de er helt grunnleggende for alle messingblåsere.

Mye av stoffet jeg presenterer i dette kapittelet vil jeg tro alt er kjent for leseren. At jeg velger å bruke litt plass på grunnleggende oppbygning av en tone, samt hva overtonerekken på et basalt plan er fordi det er helt nødvendig at leseren ikke er usikker på dette for å forstå helheten i kapittelet.

3.1 Frekvens og tonehøyde

Før jeg tar for meg overtonerekka, vil det være nødvendig med et lite blikk på oppbygning av hva en tone er, og hvordan vi oppfatter den. For en grundigere gjennomgang av dette anbefaler jeg f.eks. Garreth Loys (2006) bok Musimathics, eller Sir James Jeans' (1968) bok Science & Music. Jeg kommer ikke til å gjøre en komplett gjennomgang av lydens oppbygning, men fokusere på det jeg mener er nødvendig med tanke på overtonerekka.

Rent fysisk er lyd trykkvariasjoner som sprer seg gjennom materie, for eksempel luft, og som registreres og oppfattes av øret. Vi snakker gjerne om lydbølger som disse variasjonene, og disse lydbølgene blir ofte fremstilt på denne måten:



Figur 3.1: Lydbølgen til en sinustone. [2]

Dette bildet viser grafen til en sinustone med en stabil frekvens. Med en sinustone menes en tone som er fri for overtoner, og som består kun av en frekvens. Toner i denne enkleste formen finner vi ikke i naturen, men kan skapes kunstig elektronisk. Stemmegaffelen er imidlertid et eksempel på en naturlig tone med veldig lite overtoner. Naturlige toner har overtoner, og kalles komplekse toner siden de er satt sammen av flere frekvenser. Grafens høydepunkt viser det høyeste trykket, grafens bunnpunkt det laveste og den vannrette linja i midten er normaltrykket. Hvor stort utslag

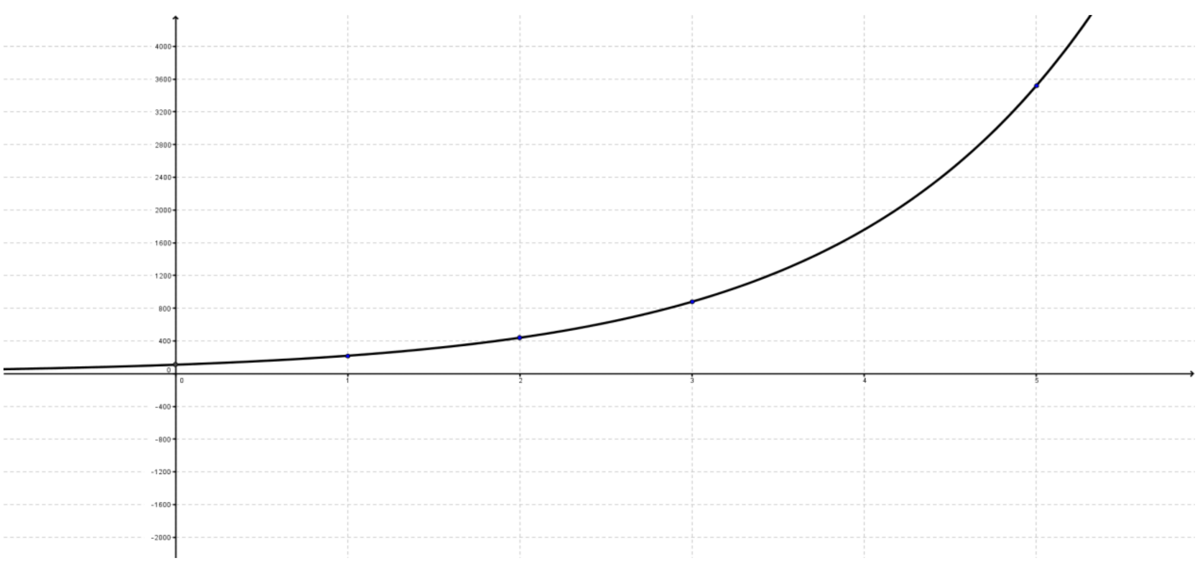
[2] Bildet er hentet herfra: http://www.acoustics.salford.ac.uk/acoustics_info/sound_synthesis/soundsynthesis_files/image004.jpg

bølgene har kalles amplitude, og oppfattes som variasjon i lydens styrkegrad. Bølgenes hyppighet kalles frekvens, og oppfattes som variasjon i lydens tonehøyde. Hvis frekvensen er uregelmessig (uregelmessige svingninger), vil lyden bare oppleves som «lyd». Når frekvensen blir regelmessig (regelmessige svingninger), oppleves lyden som en tone.

I vår sammenheng er det frekvens som er mest interessant. Garreth Loy (2006: 13) beskriver frekvens som en fysisk måleenhet av vibrasjoner per sekund, mens «pitch» eller tonehøyde er den tilsvarende sanseerfaringen av vibrasjonene. Altså er det her snakk om to sider av samme sak. På den ene siden har vi de rent fysiske lydbølgene og en måleenhet for antall svingninger per sekund. På den andre siden har vi vår opplevelse av disse svingningene. For eksempel oppleves 440 svingninger per sekund (440hz) som a_1 for oss.

Pytagoreerne viste at avstanden mellom to toner kan uttrykkes ved et tallforhold. Vi opplever f.eks. kvint-intervallet som en konstant størrelse. Enten det er mellom to dype toner, eller to lyse toner vil vi oppleve avstanden som lik. Dette forteller oss derimot ikke noe som helst om frekvensdifferansen mellom disse to tonene. Hvis jeg f.eks. sier at jeg har to toner som ligger med en avstand på 220hz, kan dette oppleves som en oktav (mellom a og a_1), en kvint (a_1 og e_2) eller en stor ters (a_2 og $c\#_3$) bare for å nevne noen eksempler. Hadde jeg derimot sagt at den lyseste tonen har en frekvens 1,5 ganger så høy som den laveste tonen, altså har forholdet 3:2, ville tonene klingt som en kvint uavhengig av hvor lys/mørk tonen er lagt.

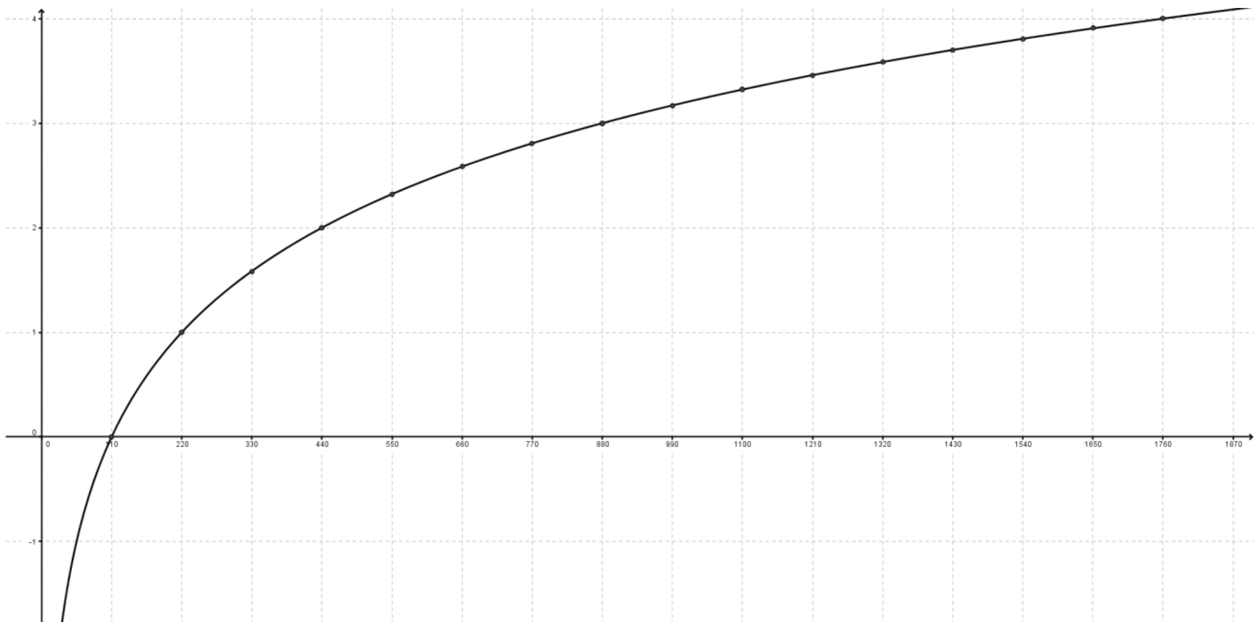
Dette forholdet mellom frekvens og tonehøyde er viktig å være seg bevisst når man blant annet jobber med overtonerekka.



Figur 3.2a: Frekvensens økning om tonehøyden stiger jevnt.

Denne grafen viser hvordan frekvensen øker, hvis opplevd tonehøyde stiger jevnt. Et skritt på x-aksen tilsvarer en opplevd tonehøydeøkning på en oktav, mens y-aksen viser tilhørende frekvens. Grunntonen jeg har tatt utgangspunkt i her er A (110hz), og formelen for å beskrive denne grafen er $y = 110 * 2^x$. Frekvensen vil altså øke eksponentielt hvis opplevd tonehøyde skal stige jevnt.

Hvis vi snur rundt på denne grafen kan vi se hvordan opplevd tonehøyde forandrer seg hvis frekvensen stiger jevnt:



Figur 3.2b: Tonehøydens økning hvis frekvensen stiger jevnt.

Jeg har tatt utgangspunkt i samme formel som i forrige bilde, men omformet den slik at x-aksen og y-aksen i praksis har byttet plass. Formelen som beskriver denne er $y = \frac{\ln\left(\frac{x}{110}\right)}{\ln 2}$.

Her øker frekvensen med 110 per merket enhet på x-aksen, mens opplevd tonehøyde øker med en oktav for hver enhet på y-aksen. Som vi ser stiger opplevd tonehøyde saktere og saktere. Denne grafen kan tolkes som en grafisk fremstilling av overtonerekka. Hvert markert punkt på grafen tilsvarer en overtone i overtonerekka til A (110hz).

3.2 Overtonerekka. Hva er den?

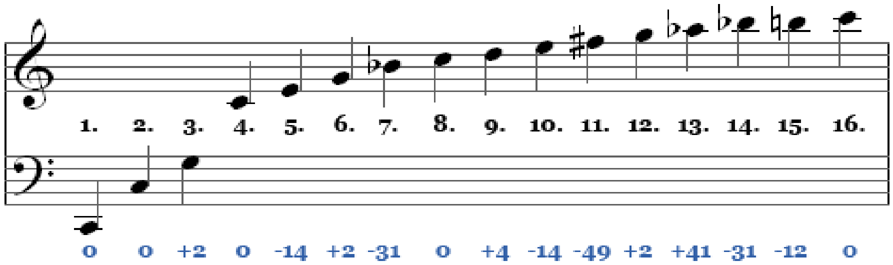
Siden overtonene finnes i alle naturligskapte toner medfører dette at overtonerekka er tilstede i det meste av den musikken vi hører. Enten det er snakk om en korkonsert, eller topp 20 på radioen vil overtonerekka være representert. Det vi opplever som en naturligskapt tone består i virkeligheten av mange toner/svingninger som klinger sammen. Disse medklingende tonene ligger lysere enn den grunnfrekvensen vi oppfatter og kalles overtoner. Tonene er ikke tilfeldig plassert, men matematisk organisert i det vi kaller for overtonerekka. Andre begreper som beskriver det samme er partialtoner og naturtoner. Selv om de beskriver det samme, sier hvert av ordene noe essensielt. Overtoner forteller oss at disse ekstra tonene klinger over (lysere enn) grunnfrekvensen. Partialtoner forteller oss at disse tonene er en del (part) av en helhet. I matematikken snakker man om sammensatte tall og primtall. F.eks. kan tallet 100 faktoriseres til $2 * 2 * 5 * 5$. 100 er et sammensatt tall som består av faktorene (delene) $2 * 2 * 5 * 5$. På samme måte er hver partialtone en del av den tonen vi hører, selv om vi ikke nødvendigvis er disse delene bevisst. I ordet ligger naturtoner det at disse tonene finnes naturlig, og ikke er «menneskeskapte». I en hver naturskapte tone klinger disse med om så i forskjellig styrkegrad. Overtonerekka har eksistert fra tidenes morgen, men ble først oppdaget på 1500-tallet av Marin Mersenne(1588-1648). Fenomenets matematiske lovmessighet ble først klarlagt i 1701 av Joseph Sauveur (1653-1716) (Sundberg 2007: 24-27).

Garreth Loy (2006: 29), skiller mellom instrumenter med «harmonic partials» og «inharmonic partials». I første gruppe har vi instrumenter som fløyte, fiolin. Kort sagt har alle melodiske instrumenter. Instrumenter som trommer og bjeller har uharmoniske overtoner (Ibid: 29) og har følgelig heller ikke klart definert tonehøyde. Selv om vi hører en tydelig frekvensforskjell, mellom en basstromme og en liten tam, er det vanskelig å definere noe tydelig tonehøyde.

Overtonerekka tilhører instrumentene med «harmonic partials». Overtonene til et melodisk instrument er heltallige positive multiplum av grunnfrekvensen (Loy: 2006: 29). Dette betyr at hvis vi har en grunnfrekvens F, vil overtonene ha frekvensene 2F, 3F, 4F, 5F osv. F. eks. kan vi bruke A som eksempel fra forrige delkapittel. A har frekvensen 110hz, og dens overtoner vil følgelig ha frekvensen $2 * 110hz = 220hz,$ $3 * 110h = 330hz$ $4 * 110hz = 440hz$ osv.

Frekvensen øker altså konstant for hver nye overtone i overtonerekka, og som vi så av figur 3.2b, betyr dette at opplevd tonehøyde kommer tettere og tettere.

Følgende bilde viser overtonerekka til C:



Figur 3.3: Overtonerekka.[3]

Som vi ser av overtonerekka kommer overtonene tettere og tettere fordi forholdet mellom to påfølgende overtoner blir likere og likere. F.eks. er det en kvart mellom tredje og fjerde overtone (3:4), mens femte og sjette overtone har avstand på en liten ters (5:6). I teorien har ikke overtonerekka noen begrensning og overtonene vil komme tettere og tettere mot en grenseverdi på 1:1, altså to like toner. I praksis er det vanskelig å notere overtoner over nr. 16 i vårt notesystem fordi de da begynner å ligge tettere enn halvtonen.

En interessant observasjon er at de intervallene som pytagoreerne regnet som de konsonerende, er de tre første intervallene vi finner i overtonerekka og de eneste intervallene som finnes i løpet av de to første oktavene. Man kan argumentere med at det var pytagoreernes subjektive oppfatning at disse intervallene låt renest, men at de er de første intervallene i overtonerekka er et faktum. En objektiv sannhet som kan forsvare pytagoreernes observasjon.

En annen ting jeg syns er interessant å observere er at for hver nye oktav i overtonerekka dobles antall overtoner. Første oktav inneholder kun grunnfrekvensen, mens andre oktav inneholder oktaven og kvinten over osv.

3.3 Overtonenes praktiske betydning

Overtonerekka er som seg interessant å studere, men hvis den ikke hadde hatt noen praktisk betydning ville det virke fjern å undervise om den på videregående. Jeg vil i dette delkapittelet se på noen av de praktiske sidene ved overtonerekka.

Klangfarge

Klangfargen (timbre) til en tone er et av de feltene overtonenes eksistens kan oppleves i praksis. Å definere klangfarge kan være vanskelig. Garreth Loy (2006: 28) skriver blant annet at klangfarge brukes «in a general sense to describe an instrument's sound quality as sharp, dull,

[3] Bildet er hentet fra http://www2.siba.fi/akustiikka/img/osaaanet.gif tallene i blått viser hvor mange cent tonene i overtonerekka avviker fra en temperert skala (se kapittel 4.5).

shrill and so forth.» Han skriver videre at en lett måte å forklare klangfarge er å si noe om hva det ikke er. «…timbre is everything about a tone that is *not* its pich, *not* its duriation, and *not* its loudness (Ibid: 28).» Som Loyd påpeker er slike negative definisjoner ikke uten problemer. Imidlertid føler jeg at det får frem et viktig poeng. Hvis vi hører en fiolin og et piano spille samme tone, med samme styrkegrad og samme lengde hører vi fortsatt en tydelig forskjell. Hvordan man beskriver denne forskjellen er kanskje individuell, men at det er noe mer til en tone enn lengde, styrke og tonehøyde er tydelig.

Årsaken til denne forskjellen ligger i overtonene. Hadde man fjernet alle overtonene fra pianoets og fiolinens tone hadde forskjellen mellom dem vært borte, og ingen av dem hadde hatt sin karakter. Overtonerekka er i utgangspunktet den samme for alle melodiske instrumenter, men det er ulikt fra instrument til instrument hvilke overtoner som klinger med, og styrkeforholdet mellom dem. Blant annet har blåseinstrumenter med rør som er tett i en ende, kun «oddetallsovertoner» (1F, 3F, 5F osv..). (Loy 2006: 264-265). Klarinetten er et eksempel på dette (Ibid: 264-265). Styrkeforholdet mellom overtonene er det som gir instrumenter forskjellig klangfarge (Raude 2000: Kap 2.3). Dette gjelder forøvrig ikke bare fra instrument til instrument, men også samme instrument utfra hvordan spiller på det (Ibid). Et hardt anslag på piano vil gi en annen klang enn et mykt anslag og hvilken munnstilling man har vil påvirke klangfargen i en saksofon.

Messinginstrumenter

Et spørsmål jeg stilte meg på videregående var, «hvordan kan en trompet spille kromatisk over mer tre oktaver med bare tre knotter?» Med enkel kombinatorikk kan vi regne ut at tre knotter gir totalt åtte mulige kombinasjoner for hvordan disse knottene kan være trykket ned eller ikke. Logisk sett må det da være slik at det kan spilles flere toner per kombinasjon. Knottene til en trompet fungerer på følgende måte. Den ene senker grunntonen med et halvt trinn, den andre med et helt trinn og den tredje med halvannet trinn. Totalt sett kan man altså senke tonen kromatisk fra null til tre hele trinn (tritonus), og vi har i praksis syv forskjellige grunnfrekvenser en trompet kan operere med. Hver av disse grunnfrekvensene har sin tilhørende overtonerekke, og disse overtonene kan man ved hjelp av hvordan man blåser frembringe. Altså kan man få en av overtonene til å klinge i stedet for grunnfrekvensen. Den dypeste normale tonen for en Bb-trompet er c_1 (bb natura) på instrumentet. Dette er imidlertid den første overtonen i overtonerekka til c (Bb natura). Neste tonen man får med åpent grep er følgelig g_1, så c_2 osv. Følgende bilde viser de første overtonene til de forskjellige grepene på Bb-trompeten:

Figur 3.4: Overtonerekkene til trompetens ulike grep.

Alle disse tonene kan en trompet spille ved de forskjellige grepene. Vi ser at summen blir en kromatisk skala. Det er også verdt å merke seg at de dypeste tonene finner vi bare i en av rekkene. Første tone jeg finner minst to steder er f#$_1$. Dette forteller at for å kunne få en kromatisk rekke helt fra starten av trenger vi minst tre ventiler, og muligheten til å variere grunnfrekvensen innen en tritonus. La oss anta for moroskyld at trompeten kun har to ventiler, og mulighet til å senke grunnfrekvensen med opptil halvannet trinn. I så fall faller de tre nederste rekkene bort, og vi har bare intervallet a-c_1 å operere med. Nå vil det være først fra tonen a, at instrumentet kan spille kromatisk. Sett fra en annen side: Jo lysere vi kommer, jo flere kombinasjoner finnes det for hver enkelt tone. I gammel tid hadde ikke messinginstrumentene ventiler og var begrenset til en enkel overtonerekke. Det finnes fortsatt instrumenter som er begrenset av overtonerekka. Seljefløyte er et eksempel på dette.

Differansetoner. Virtuell grunntone

Differansetoner ble i følge Sir James Jeans (1968: 237) oppdaget i 1745 av den tyske organisten Sorge, og uavhengig av Tartini i 1754. Dette fenomenet er kanskje det som i sterkest grad viser overtonenes betydning i vår hverdag. Albregtsen og Skagestein (2007: 125) skriver følgende: «Hvis hjernen synes at det 'burde være' en grunntone på en viss frekvens, vil vi kunne oppfatte en grunntone selv om det ikke finnes noen.» Dette betyr i praksis at hvis vi tar opp en (sammensatt) tone og digitalt fjerner grunnfrekvensen, men lar overtonene klinge, vil vi fortsatt oppfatte grunnfrekvensen. Albregtsen og Skagestein (2007:125) viser som eksempel at hvis man lar tre toner med frekvensen 200hz, 300hz og 400hz klinge sammen, vil vi oppfatte en virtuell grunntone på 100hz. Rent generelt kan vi si at om flere frekvenser klinger sammen, kan vi oppfatte en grunnfrekvens som ligger på disse frekvensenes største felles divisor. I vårt eksempel er 100 det største tallet som både 200, 300 og 400 kan deles på for å få et heltallig svar. Musikalsk sett betyr hvis flere toner klinger sammen, vil den lyseste tonen som har alle disse tonene i sin overtonerekke klinge med. Hvis for eksempel tonene a_1(440hz), c#$_2$(550hz) og e_2 (660hz) klinger sammen, vil vi kunne de skape grunnfrekvensen A (110hz), siden det er den lyseste tonen som har alle disse tonene i sin overtonerekke.

En ting er hvordan dette kan gjøres eksperimentelt ved å manipulere lyd. Et annet spørsmål er hvor stor betydning dette har i praktisk musikkbruk. Selv skal jeg innrømme at jeg ikke oppfatter disse differansetonene til vanlig når jeg synger og spiller, men jeg tenker heller ikke noe større over overtonenes eksistens. I følge Sir James Jeans (1968:237) kan de høres ganske tydelig hvis man spiller to tilfeldige toner i Kvintavstand. Førsteinntrykket er kanskje at differansetoner er en forstyrrende for oss. Imidlertid har jeg til gode å høre folk klage på dette fenomenet, og det er noen praktiske fordeler med dette også.

Et eksempel er toner som ligger på grensen til hva vi kan høre i dybden. Albregtsen og Skagestein (2007:125) bruker de dypeste tonene på pianoet som et eksempel. Disse ligger i det aller dypeste registeret at hva menneskets øre kan oppfatte, og vi er veldig lite fintfølende på så dype frekvenser. Imidlertid hører vi de dypeste tonene på pianoet godt. Forklaringen ligger i overtonene. Selv om vi ikke hører selve grunntonen godt, ligger overtonene i et register vi hører utmerket og grunntonen oppfattes som sterk (Ibid: 125).

Sir James Jeans (1968: 240-241) viser et annet interessant eksempel, nemlig telefonen. Han skriver at høyttaleren i en god moderne telefon (i 1937)[4] kan dekke frekvensene mellom ca. 300hz og 2400hz. Frekvenser innen dette området høres klart, mens lysere og dypere frekvenser oppfattes nesten ikke. Den vanlige snakkestemmen til både damer og menn ligger dypere enn dette frekvensområdet, og følgelig er det veldig lite grunnfrekvenser som blir formidlet gjennom telefonen. Derimot høres overtonene tydelig, og hjernen «rekonstruerer» det riktige lydbildet utfra disse (Ibid: 241).

Et eksempel hvor differansetoner kan utnyttes i musikalske sammenhenger er ved bygging av orgler. I mailkorrespondanse med orgelbygger J. Ryde (personlig kommunikasjon, 10. april 2014) skriver han følgende:

> «Den dypeste tonen i et større orgel er C= 32''. Dette betyr at pipen da har en lengde på 32'' altså ca. 10 meter. I Stavanger konserthus har vi to stemmer som er 32''.
> Den ene er åpen, den andre er dekket og har da en tonelengde på ca. 5m.
>
> For å spare plass og penger kan man bygge dette akustisk. Spiller man store C i 16'' for eksempel Subbass og samtidig spiller G får man en akustisk 32''s tone. Dette løser man oftest så at C 16'' spiller samtidig som man har aktivert et register som
> er 10 2/3'' altså en kvint opp. Denne løsningen er meget vellykket under forutsetning av pipene er riktig dimensjonert.»

Her ser vi et eksempel på hvordan man ved hjelp av differansetoner kan frembringe orgelets dypeste toner ved piper på halve størrelsen av det man hadde trengt ved å bygge den ut. C 16-tommer og kvinten over er første og andre overtone i overtonerekka til C 32-tommer, og dermed også opplever at C 32-tommer klinger med.

Overtonerekka brukes også aktivt i komposisjoner. *Stimmung* av Karlheinz Stockhausen er et eksempel på dette. I dette vokalstykket tar sangerne utgangspunkt i overtone nr. 2, 3, 4, 5, 7, og 9 til Bb, og bruker disse tonene til å danne nye overtonerekker, med disse respektive tonene som grunntone. En følge av dette er at vi får flere ulike overtonerekker, men som har Bb sin overtonerekke som fellesnevner. Alle tonene finnes der. Et mer generelt eksempel er 1900-tallets spektralmusikk komposisjonen er informert av overtonespekteret til lyder (Griffiths 2010: 339).

---

[4] Jeg refererer til en utgave av denne boken som ble gitt ut i 1968, men det er en reproduksjon. Boken kom opprinnelig ut i 1937, og må følgelig sees med den tids blikk.

Forståelse av overtonene var også avgjørende i den elektroniske musikken. Når f.eks. Stockhausen brukte elektronisk lyd for å lage klanger som aldri hadde eksistert før, var det gjennom å kontrollere hver enkelt deltones tonehøyde og volum (Rudi 2008: 15-16). Midilyder som etterligner akustiske instrumenter, er også basert på akkurat samme prinsippet.

4. Stemming av skalaen

I så og si alle bøker jeg har lest om musikk og matematikk er stemming av skalaen et tema. Med utgangspunkt i læreplanen for videregående kunne det kanskje vært naturlig å trekke frem lyttefaget igjen, siden en skala lett kan tolkes som et grunnelement i musikken. Et annet fag som kanskje er enda mer naturlig å trekke frem er anvendt musikklære, som er et av hovedområdene i det noe mer omfattende faget musikk. Dette er et Vg1-fag, som i tillegg til anvendt musikklære består av hovedområdene hovedinstrument, bi-instrument og samspill (Utdanningsdirektoratet 2013d: hovedområder). Under fagets kompetansemål kan vi lese at eleven skal kunne «gjenkjenne og bruke skalaer og tonearter og spille/synge innenfor dem (Utdanningsdirektoratet 2013d: kompetansemål).» Om det er matnyttig å lære elevene den matematiske oppbygningen av en skala er en pedagogisk diskusjon som går utover denne oppgavens rammer, men jeg vil tro at i mange klasser vil det være nok å lære dem forskjellen på dur og moll. Imidlertid ser jeg på det som veldig nyttig for en lærer å ha et bevisst forhold til dette. På den måten har man mulighet til å gi ordentlige svar på spørsmål som «hva er temperering?», «Hvorfor er det akkurat 12 toner innen oktaven?», og «hvordan ble skalaen til?».

4.1 Hva er en skala, og hva er dens grunnelementer?

Garreth Loy (2006: 16) skriver at en musikalsk skala er et ordnet sett av tonehøyder (fra lysest mot mørkest, eller fra mørkest mot lysest) sammen med en formel for å spesifisere deres frekvenser. Hver tonehøyde i skalaen har sitt navn, og sitt forholdstall til grunntonen. Loy (2006: 41) skriver at for å konstruere en likesvevende temperert skala må vi 1: Knytte den til en referansefrekvens, f.eks. a_1 440hz (vår kammertone), 2: Navngi intervallene i skalaen, 3: Kalkulere frekvensen til intervallene utfra referansefrekvensen. Denne fremgangsmåten gjelder forøvrig alle skalaer, ikke bare den tempererte.

Et poeng jeg vil trekke frem er viktigheten av en referansetone. Siden opplevd tonehøyde handler om forholdene mellom frekvensene, går det fint an å konstruere en teoretisk skala uten å si noe som helst om tonenes faktiske frekvens. F.eks. kan jeg si at en skala består av tonene C, F, G og c, der F ligger en ren kvart over C (4:3), G en ren kvint over C (3:2), og c en oktav over (2:1). Denne oppskriften er entydig når det gjelder avstand mellom tonene, men sier ingenting om hvor lyst eller mørkt skalaen er stemt. Først når jeg definerer en frekvens, f.eks. kan jeg si at C har frekvensen 66hz, blir alle tonehøydene entydig bestemt. Akkurat samme prinsippet gjelder vårt tonesystem. Det vi opplever som en c_2 er en entydig tonehøyde, det forteller ikke annet enn at tonen ligger en liten ters over kammertonen a_1, som vi har definert som 440hz.

I det øyeblikket vi omdefinerer referansetonen, vil alle andre toner tilpasses likeledes. Det alternativet jeg selv er mest vant til er å synge barokkmusikk med a_1 415hz som referansefrekvens. Dette tilsvarer at alle tonene ligger ca. et halvt trinn dypere enn vi er vant til med 440hz som referansefrekvens. Referansefrekvensen har dog variert mer enn en halv tone. Garreth Loy (2006: 42) skriver at frekvensen til a_1 har hatt et omfang fra 312hz, brukt i et 1600-talls kirkeorgel, til 464hz som ble bruk av noen britiske militærkorps ved slutten av 1800-tallet. Dette er et stort omfang. 312:464 kan forkortes til 39:58=0,6724.. som ikke ligger langt unna en kvint. Å standardisere kammertonen a_1=440hz ble forsøkt på en kongress i Stuttgard i 1834, men det var først i 1939 at den ble adoptert som en verdensomspennende kammertone (Loy 2006:42).

Det finnes et stort antall skalaer, og antall toner i en skala varierer mye. Våre vanligste skalaer, dur og moll, er diatoniske, og har syv toner innen en oktav. En skala med syv toner kalles i utgangspunktet en heptaton skala. Diatoniske skalaer er et spesialtilfelle av syvtoneskalaer med fem heltrinn og to halvtrinn, der halvtrinnene har to eller tre hele trinn mellom seg. En vanlig skala som har syv toner men ikke er diatonisk er den harmoniske mollskalaen. Andre eksempler på skalaer er pentatone skalaer med fem toner innen oktaven, og heltoneskalaen som har seks toner innen oktaven. Den kromatiske skalaen har 12 toner og er følgelig en dodekafonisk skala (Loy 2006:46). Likheten med alle eksemplene er imidlertid at de har oktav som rammeintervall. Neil Bibby (2003: 14) skriver at forholdet 2:1, altså to noter i oktavavstand er basisen for konstruksjonen av en hver musikalsk skala. Garreth Loy (2006: 16) er ikke fullt så bastant, og skriver at de fleste musikalske tradisjoner har anerkjent viktigheten av primen og oktaven ved å organisere skalaen rundt disse som ramme. Han skriver videre at man definerer gjerne skalaens tonehøyder kun innen en oktav, med en underliggende forståelse av tonene kan transponeres til hvilken som helst oktav på grunn av det han kaller for «octave equivalence». Loy (2006: 14), skriver at hvis identitet betyr at to tonehøyder klinger likt (prim), betyr ekvivalens at vi kan skille dem, men de tjener samme musikalske formål likeverdig, og i praktisk talt all musikalsk kultur tjener toner som kun skilles med x-antall oktaver samme musikalske funksjon. En banal måte å si dette på er at «toner i oktavavstand er samme toner, bare at de klinger lysere/mørkere». På grunn av dette skriver Loy (2006: 86-87) at praktisk talt alle skalaer er basert på oktaven som referanseramme. Selv med den andre Wienerskolens brudd på tonaliteten, eller med mikrotonaliteten som dekonstruerte halvtonetrinnet forble oktaven hellig (Ibid: 86). Imidlertid er det ingen teoretisk begrensning for å konstruere skalaer med andre rammeintervaller enn oktaven. Loy (2006: 87-93) viser til «The Bohlen-Pierce Scale» som et eksempel på dette. Det som er viktig å ta med seg i en undervisningssammenheng er imidlertid ikke at man teoretisk kan lage skalaer med andre rammeintervaller, men hvorfor oktaven i praksis alltid er rammen for en skala.

4.2 Skalaens opprinnelse. Sir James Jeans' tanker

Sir James Jeans (1968: 160-165), tilnærmer seg hvordan de første organiseringene av tonehøyder kan ha oppstått. Mye av dette er antakelser, og ikke ting man strengt talt kan vite sikkert. Likevel syns jeg det gir et godt bilde på hvordan skalaen kan ha utviklet seg fra tidlige tider. Han viser til at musikk i en eller annen form har eksistert siden menneskehetens barndom, og at for 5000 år siden hadde man allerede gått fra nytelsen av en enkelttone, til flere påfølgende toner (en melodi). Dette er blant annet basert på en utgraving av en 11-strengs lyre og et gammelt egyptisk maleri fra ca. 2750 f. Kr. (Ibid: 160).

Jeans antar at tidlig musikk var unison, men på et eller annet punkt må ideen om å synge flere toner samtidig ha oppstått. Før dette var ikke organisering av tonehøyder like viktig, for de klang aldri sammen. Jeans kan ikke referere til flerstemmighet i komposisjoner her, for i musikkhistorien begynner ikke dette å florere før nærmere år 1000. Elef Nesheim (2004: 18-19) viser til avhandlingen Musica Enchiradis fra slutten av 800-tallet som en tidlig kilde på flerstemmighet, og stemming av skalaen er mye eldre enn dette. Derimot kan dette forstås som utvidelse av faste toner i stemmingen av et strengeinstrument, f.eks. en lyre. Jeans (1968: 162-163) tenker videre at innføring av kvinten er det neste etter oktaven, og som en følge kvarten. Med oktaven som ramme kan vi gå en kvint opp fra grunntonen, og en kvint ned fra oktaven. Med C som grunntone får vi tonene Cfgc. Ideen nå er at kvint-intervallet klinger konsonerende. Med disse 4 tonene har man muligheten til å la C klinge sammen med både f og g, altså to toner. Hvis man tar utgangpunkt i g kan derimot denne bare klinge med en tone, siden C og c er samme tone bare i oktaver. Jeans (1968: 162) tenker seg at «vår pioner vil utvide mulighetene med å introdusere g-ens kvint d». Vi har nå gitt g samme muligheter som c hadde opprinnelig, men nå har tonen d, det samme «problemet» som g hadde i stad. For å løse dette kan man introdusere den nye tonen a, som er kvint til d. Dette systemet kan trekkes til det uendelige med innføring av stadig nye toner, for en summering av rene kvinter vil aldri bli lik en summering av oktaver.

Spørsmålet er med andre ord hvor man skal stoppe i denne tilføyelsen av nye toner. At systemet aldri går rundt kan lett forklares matematisk.

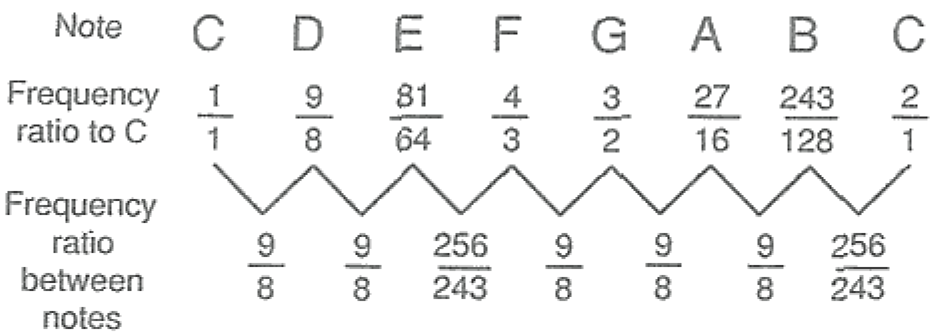
Kvint har forholdet 3:2, mens oktaven har forholdet 2:1. Oktav+kvint, altså duodesimen har forholdet 3:1. Siden det er irrelevant hvilken oktav intervallet er i, kan vi like gjerne se på forholdet duodesim kontra oktav, siden dette involverer enda enklere matematikk. Hvis vi tar utgangspunkt i en felles grunnfrekvens F, vil vi ved å legge til oktaver få frekvenser som kan skrives på formen $F * 2^x$, altså F ganget med 2, x antall ganger. hvis vi legger til duodesimer, vil vi få frekvenser som kan skrives på formen $F * 3^y$, altså F ganget med 3, y antall ganger. x og y er naturlige tall. Hvis disse to funksjonene skulle kunne møtes, vil det si at det må finnes som kan skrives som $2 * 2 * 2 * 2 * 2 \ldots.$ x antall ganger, og dessuten som $3 * 3 * 3 * 3 * 3 \ldots..$ y antall ganger. Dette er en motsetning. Alle tall som skrives på formen 2^x, vil ha 2 som eneste primfaktor. Alle tall som skrives på formen 3^y vil ha 3 som eneste primfaktor. Det er ikke mulig for et tall både å ha 2 som eneste primfaktor, og 3 som eneste primfaktor samtidig. Følgelig kan ikke påstanden $2^x = 3^y$ være sann.

Jeans (1968:163) påpeker at selve tankerekken hans er fiksjonell. Utviklingen har vært mye mindre lineær enn han har fremstilt det. Målet har nok vært det samme, nemlig å velge toner som klinger konsonerende sammen (Se kapittel 7). Han skriver at selv om forskjellige kulturer har voldsom variasjon i klær, språk livsstil osv., er utformingen av skalaen overraskende lik. Den er hvert fall bygd på de samme prinsippene (Ibid: 163-164).

4.3 Pytagoreisk skala

Neil Bibby (2003: 14) skriver at den første skalaen som er beskrevet er den pytagoreiske. Dette systemet for å stemme skalaen er eldre enn Pytagoras, men den teoretiske tilnærmingen knyttes gjerne til han.

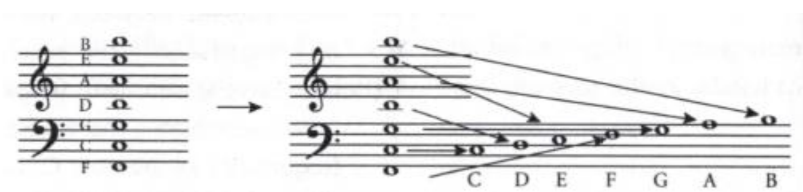
Denne skalaen tar utgangspunkt i de rene konsonerende intervallene oktav, kvint og kvart. Med å gå en kvint opp fra grunntonen, og en kvint ned fra oktaven, får vi skalaens faste toner nemlig grunntone, kvart, kvint og oktav. Dette kan utrykkes med tallforholdene 6:8:9:12, hvis vi tenker tonehøyde. Med denne faste rammen oppstår det et nytt ikke-konsonerende intervall, nemlig tallforholdet 8:9 eller 9:8 som vi finner mellom kvarten og kvinten. Dette intervallet fikk betegnelsen «tonos», som kan oversettes til tonetrinn (Sundberg 2002b: 111). Med våre faste intervaller har vi to tetrakord-rammer, altså to kvart-intervaller med en heltones avstand. Disse rammene ble så fylt med heltonetrinn. Fra grunntonen til kvarten er det plass til to heltoner, pluss en liten rest, og tilsvarende fra kvinten til oktaven (Ibid: 112). Denne resten har tallforholdet 256:243. Hvor halvtonetrinnet ble plassert avgjorde skalaens karakter. I vår sammenheng er det durskalaen, altså hel+hel+halv i begge tetrakorder, som er mest interessant. Den har følgende tallforhold til grunntonen:



Figur 4.1: Den pytagoreiske skalaens tallforhold.[5]

Som vi kan se er alle hele trinn like store, og likeledes alle halve trinn. Imidlertid er det verdt å merke seg at dur-tersen er noe høyere enn den rene tersen vi finner hos Zarlino. Dette er en av grunnene til at den renstemte skalaen etter hvert tok over som den dominerende stemmingen av skalaen.

En annen tilnærming til den pytagoreiske skalaen som vil gi samme resultater å legge sammen kvinter, for så å trekke fra x-antall oktaver for å få alle tonene i samme oktav. Med utgangspunkt i tonen C, finner vi kvarten F med å gå en kvint ned. De resterende tonene finner vi med å gå kvinter opp fra C.



Figur 4.2: Den pytagoreiske skalaen som kvintstablinger. Bildet er hentet fra Bibby (2003: 16).

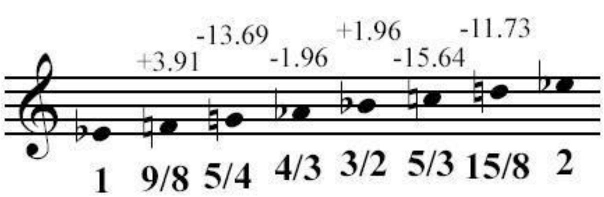
[5] Bildets nettadresse: http://www.feilding.net/sfuad/musi3012-01/images/lectures/pythorean_ratios1.gif

En følge av dette, som er en fordel med pytagoreisk stemming, er at alle de rene intervallene innen skalaen faktisk er rene. Med det mener jeg at alle kvinter har forholdet 3:2, og alle kvarter har forholdet 4:3. Som eksempel kan vi teste forholdet mellom tersen og seksten i skalaen, som skal være en ren kvart. $\frac{27:16}{81:64} = 4:3$. Vi kan også teste kvint-intervallet mellom tersen og septimen i skalaen: $\frac{243:128}{81:64} = 3:2$. Dette har sin forklaring i at skalaen i praksis er bygd opp av en stabling av kvinter. Siden en stabling av kvinter aldri vil være lik en stabling av oktaver vil denne skalaen ikke være transponerbar.

4.4 Den renstemte skalaen

Den renstemte skalaen ble tatt i bruk i renessansen. Zarlino publiserte i 1558 verket *Institutioni harmoniche* der han foreslo en alternativ stemming av durskalaen (Bibby 2003: 20). Hittil hadde den pytagoreiske stemmingen vært vanlig. En av ulempene med den pytagoreiske skalaen, er som nevnt den noe høye dur-tersen. Tidlig musikk var i stor grad unison, men i renessansen ble musikken mer og mer flerstemt og samklanger med terser og sekster ble vanligere (Ibid: 19-20). Som vi så i den historiske gjennomgangen mente Zarlino at terser og sekster måtte regnes som konsonanser.

Den renstemte skalaen som Zarlino har følgende frekvenser i forhold til grunntonen:



Figur 4.3a: Den renstemte skalaen som noter med tallforhold til grunntonen og avvik fra den tempererte skalaen. [6]

	do	re	mi	fa	so	la	ti	do	re	mi…
ratio to first	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2	9/4	5/2…
step ratio		9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15	9/8	10/9…

Figur 4.3b: Den renstemte skalaen med tallforhold i forhold til grunntonen, og tallforhold mellom skalatrinnene. [7]

[6] Bildets nettadresse: http://static.flickr.com/36/86319153_656287b8b6.jpg

[7] Bildets nettadresse: http://www.phys.unsw.edu.au/jw/graphics/justmajorscale.gif

Det som er verdt å merke seg er at i denne skalaen samsvarer de innbyrdes intervallene med dem vi finner i overtonerekka (Bibby 2003: 21). Det er også verdt å merke seg at alle skalatrinnene lar seg uttrykke med relativt enkle brøker. I hvert fall i forhold til den pytagoreiske skalaen. Leif Bjørn Skorpen (2003: 10) skriver at siden den renstemte skalaen samsvarer med overtonerekka er den «naturens egen skala», og er den som bør klinge best i våre ører. Garreth Loy (2006: 72) skriver at «classical Hundistani and Arabic music is still firmly rooted in small integer ratio scales, and that music scintillates with a pleasurable harmonicity that has touched a deep longing in the western ear.» Han skriver også at dette forklarer hvorfor bruken av slike stemminger har blitt populære i vesten i nyere tid, og at symmetrien mellom overtonene og skalaene er særdeles tilfredsstillende (Ibid: 72).

Garreth Loy (2006: 60) skriver at den renstemte skalaen tar utgangspunktet i durtreklangen som danner det innbyrdes forholdet 4:5:6. Den store tersen har forholdet 4:5, og den lille tersen har forholdet 5:6. Som vi ser har kvinten forholdet 4:6=2:3, så den er fortsatt ren. Videre får vi følgende fremgangsmåte for å finne den renstemte durskalaen (Ibid: 61-62):

Start med å velge grunntonen, her C (og oktaven, hvis frekvens er $2 * C$), og finn den store tersen E, som vil ha frekvensen $(5:4) * C$.

Finn så kvinten G, som vil ha frekvensen $(6:4) * C = (3:2) * C$

Finn kvarten F, ved å gå en kvint ned fra oktaven c. $2 * C * (2:3) = (4:3) * C$.

Finn seksten A, ved å gå en stor ters opp fra kvarten F. $(4:3) * C * (5:4) = (20:12) * C = (5:3) * C$

Finn septimen H, ved å gå en stor ters opp fra kvinten G. $(3:2) * C * (5:4) = (15:8) * C$

Sekunden D, finner Loy ved å finne oktaven over altså d. Dette gjør han ved å gå en liten ters opp fra septimen H. $(15:8) * C * (6:5) = (90:40) * C = (9:4) * C$. For å finne D, går vi en oktav ned fra d, som vil være en halvering i frekvensen. $(9:4) * C * (1:2) = (9:8) * C$.

Vi sitter igjen med den renstemte skalaen, hvor alle hovedtreklangene er rene. Derimot ser vi at dette kommer på bekostning av sekundene. Noen store sekunder har forholdet 9:8, mens andre har 10:9. En følge av dette er at denne skalaen heller ikke har den pytagoreiske skalaens fordel med at alle kvinter og kvarter er rene. Riktignok er de rene i forhold til grunntonen, men forholdet mellom sekunden og seksten som på notebildet ser ut som en kvint er 40:27, som er mindre enn en ren kvint. Dette kan vi lett se. C-G er en ren kvint. D ligger en stor heltone (9:8), over C, mens A ligger bare en liten heltone (10:9) over G. Dette er riktignok eneste urene kvinten. Den renstemte skalaen er, i likhet med den pytagoreiske, ikke transponerbar.

Både den pytagoreiske, og den renstemte skalaen vi har tatt utgangspunkt i tilsvarer vår durskala. Men hva så med en renstemt mollskala? En naturlig tilnærming ville kanskje vært og tatt utgangspunkt i durskalaen vår, men latt 6.trinnet tilsvare 1. trinnet i vår mollskala. Vi vil i så fall med utgangspunkt i vår C-dur ha skapt en A-mollskala. Dette kan virke som en grei løsning, men vi har et problem. Intervallet D-A er ikke en ren kvint, og det tilhører nå en av hovedtreklangene, nemlig subdominanten. Garreth Loy (2006: 62-63) foreslår en annen tilnærming. Den renstemte durskalaen tar utgangspunkt i durtreklangen samt de faste tonene fra den pytagoreiske skalaen; kvinten og kvarten. En naturlig konstruksjon av en renstemt mollskala vil følgelig være å ta utgangspunkt i kvinten og kvarten, men bruke en molltreklang som utgangspunkt isteden for en durtreklang. Ved å konstruere molltreklanger fra grunntonen, kvinten og kvarten får vi en renstemt mollskala. Molltreklangen kan uttrykkes med tallforholdet 10:12:15, og en renstemt mollskala har følgende tallforhold:

A	H	C	D	E	F	G	A	
1/1	9/8	6/5	4/3	3/2	8/5	9/5	2/1	Forhold til grunntonen
9/8	16/15	10/9	9/8	16/15	9/8	10/9		Forhold mellom påfølgende toner

Figur 4.4: Renstemt mollskala

Den renstemte mollskalaen gir oss ikke noen nye intervaller i forhold til den renstemte durskalaen. Liten sekst, liten septim og liten ters er riktignok ikke intervaller vi finner i forhold til grunntonen, men vi finner dem alle i forhold til oktaven i den renstemte skalaen.

4.5 Likesvevende temperering

Som vist har hverken den renstemte skalaen, eller den pytagoreiske skalaen muligheten for transponering uten å stemme om skalaen. Utover i barokken og wienerklassisismen ble behovet for transponering som musikalsk virkemiddel mye viktigere. Derfor trengte man en ny stemming av skalaen; en stemming som gav mulighet for transponering uten at skalaen måtte stemmes på nytt.

Løsningen på transponeringsproblemet ble det vi bruker i dag, som kalles likesvevende temperering. I dette systemet tar vi utgangspunkt i at alle halvtonetrinn skal være like store.

Oktaven inneholder 12 halvtonetrinn, og følgelig må forholdstallet til halvtonen være det tallet som ganget med seg selv 12 ganger gir tallet 2. Dette tallet er $2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$, som er et irrasjonelt tall tilnærmet lik 1,0594631. Siden alle halvtonetrinnene nå er like store, vil alle tonearter ha de samme tallforholdene.

Innføring av likesvevende temperering tok lang tid. Ideen om å definere halvtonen som $2^{\frac{1}{12}}$ ble alt foreslått av Simon Stevin (1548-1620) (Bibby 2003: 25). På tidlig 1700-tall ble dette systemet i større grad utnyttet, men langt utpå 1800-tallet var ikke dette systemet blitt universelt ennå (og det er det strengt talt ikke i dag heller) (Ibid: 27). England er særlig et eksempel på sen innføring der ingen av kirkeorgelene var temperert i 1851 (Ibid: 27).

Likesvevende temperering har den fordelen at alle tonearter har samme forholdstall, og det medfører at dette er en veldig anvendelig stemming. En følge er at vi faktisk bare har 12 halvtoner innen oktaven med dette systemet, C#=Db D#=Eb osv. At skalaen er delt i like store enheter i stedet for å være bygd opp av kvinter eller durtreklanger gjør også at oktaven kan deles i andre like biter. Fire små tempererte terser vil faktisk nøyaktig bli en oktav, og tre store terser blir en oktav. Dette gav muligheter for flere nye komposisjonsteknikker, og ikke minst skalaer. Heltoneskalaen som består av kun hele trinn, eller dimskalaen som består av annen hvert helt trinn og halvt trinn er avhengig av at de hele og halve trinnene faktisk er like store. I musikken til Debussy, der harmoniene i stor grad ikke lenger har noen funksjon, men er mer fristilte klanger ville en stemming der avstanden mellom halvtonene ikke var lik vært lite gunstig. Hvordan kan harmonier være fristilte hvis selve stemmingen definerer en grunntone? Dette er i enda større grad gjeldende for den atonale musikken der alle 12 tonene i den kromatiske skalaen i prinsippet skal være likeverdige.

Selv om den tempererte skalaen har mange fordeler er ikke disse gratis. Med unntak av oktaven er ingen intervaller lenger rene, men riktignok en god tilnærming. Ironien ligger i at for å få en praktisk anvendelig stemming ble det nødvendig å løsne på de grunnleggende prinsippene som var utgangspunktet for skaladanning, nemlig velklingende intervaller med fine tallforhold. Garreth Loy (2006:72) uttrykker dette på følgende måte:

> Now every key sounds as in tune (or out of tune), as every other key, just as we wanted, but at the expense of the pure integer ratios, which have been virtually banished. It is somewhat reminiscent of the modern practice where an oak grove is ripped out to build a shopping center and then the shopping center is named Oak Grove. We are left with the impression of the pure intervals but not with their reality. We get the advantage of the modern conveniences (transposition) but at the expense of the reason we wanted it. Isn't it interesting that not even music is immune to the inevitable downside of technological advance? The moral: nothing is free. (Loy 2006: 72)

I tillegg til at all musikken er litt ustemt kan den tempererte skalaen skape noen utfordringer for instrumenter som er avhengig av overtonerekka. En trombone vil i utgangspunktet forholde seg til overtonerekka utfra forskjellige grunnposisjoner, og disse tonene vil ikke samsvare med en temperert stemming av for eksempel et piano. Jeg diskuterte dette med en trombonist i marinemusikken som fortalte meg at de må kompensere, blant annet med munnstilling, for å intonere disse rene tonene litt opp eller ned for å samsvare den tempererte skalaen. Det er imidlertid ikke bare ulemper med den tempererte skalaen.

Et rimelig spørsmål å stille seg er: Hvorfor dele oktaven i akkurat 12 like toner? Med renstemt og pytagoreisk skala har vi tatt utgangspunkt i et system hvor antall toner kommer naturlig, men her har vi tilsynelatende bare valgt et tilfeldig tall? Hvorfor ikke dele oktaven i 10 like toner? Det burde jo samsvart fint med 10-tallsystemet, og det er ingen teoretisk begrensning for å gjøre dette. Jeg må påpeke her at det finnes masse musikk som deler skalaen i mye mer enn 12 toner. Vi finner bruk av kvarttoner i folkemusikken, og vi finner mikrotonalitet i mye musikk på 1900-tallet. Så mitt spørsmål er ikke hvorfor det bare finnes 12 toner innen oktaven, men hvorfor det er den vanligste inndelingen vi bruker, og som mange instrumenter er begrenset til.

Forklaringen ligger i at selv om man aldri kan få x-antall oktaver ved å summere y-antall kvinter, kan man komme veldig nært. Første tilnærming ligger ved 12 kvinter=7 oktaver, der 12 kvinter er litt større enn 7 oktaver. Dette er første gang vi er «nesten rundt». Følgelig hvis vi beveger oss 12 kvinter oppover og transponerer alle tonene innenfor samme oktav får vi 12 halvtonetrinn som tilsammen utgjør litt over en oktav. Ulikheten mellom 12 kvinter og 7 oktaver er $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{\left(\frac{2}{1}\right)^{7}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} = 1{,}01364$ ... og kalles det pytagoreiske komma (Biiby 2003: 18). Siden 12 kvinter er litt større en 7 oktaver, vil en slik kvinstabling litt for store halvtonetrinn, noe som kompenseres for i den tempererte skalaen. Dette er imidlertid ikke eneste tilnærmingsverdi. Garreth Loy (2006: 73) viser til at 19 kvinter og 11 oktaver ligger veldig nært. En enda bedre tilnærmingsverdi finner vi i 53 kvinter mot 31 oktaver, og Bibby (2003: 27) skriver at dette argumenterer for at vi kanskje burde delt oktaven i 53 like store trinn i stedet, med tanke på at tempereringen i størst mulig grad skal opprettholde rene intervaller. Jeg tror forklaringen på dette ligger i at for lytteren, særlig en uskolert lytter, vil 53 toner innenfor oktaven bli vanskelig å forholde seg til. Det er begrenset hvor liten avstand det kan være mellom to toner før vi som lytter oppfatter det som to distinkte intervaller, og ikke bare samme tone der den ene er litt for lys eller for mørk. En annen praktisk faktor er at for mange instrumenter ville det vært vanskelig å spille 53 toner innen en oktav på grunn av konstruksjonen. På samme måte som man i matematikken velger den laveste fellesnevneren når man adderer brøker, har vi i musikkens verden valg den enkleste tilnærmingsverdien for antall kvinter mot antall oktaver.

Som avslutning av dette kapittelet vil jeg vise til denne tabellen som viser hvor tett de forskjellige intervallene i den tempererte skalaen ligger til henholdsvis den pytagoreiske og den renstemte uttrykt med tallforhold i forhold til grunntonen.

Tone	Pytagoreisk	Renstemt	Temperert
C	1	1	1
D	9/8=1,125	9/8=1,125	1.122462…..
E	81/64=1,265625	5/4=1,25	1,259921….
F	4/3=1,33333...	4/3=1,333333	1,334839…..
G	3/2=1,5	3/2=1,5	1,498307…..
A	27/16=1,6875	5/3=1,66666…..	1,681792…..
H	243/128=1.8984375	15/8=1.875	1.887748…..
C	2	2	2

Figur 4.5a: Ulikheter mellom de ulike stemmingene av skalaen i tallforhold.

Dette bildet viser forholdstallene til de forskjellige skalatrinnene i forhold til skalaens grunntone, og viser oss hvilke intervaller som er like mellom de forskjellige skalaene, og hvilke som skiller seg. Imidlertid kan det være vanskelig å danne seg et godt bilde av hvor stor ulikheten er utfra en slik fremstilling. En mer oversiktlig måte å fremstille det på er å bruke centskalaen. 100 cent er definert som en temperert halvtone. Dvs. at hvis differansen mellom 2 toner er 100 cent ligger de med en halvtones avstand. En slik fremstilling vil gjøre at vi kan se en reell ulikhet mellom opplevd tonehøyde ved å addere/subtrahere. En tabell som viser antall cent (avrundet til nærmeste hele cent) over grunnfrekvensen vil se slik ut:

Tone	Pytagoreisk	Renstemt	Temperert
C	0	0	0
D	204	204	200
E	408	386	400
F	498	498	500
G	702	702	700
A	906	884	900
H	1110	1088	1100
C	1200	1200	1200

Figur 4.5b: Ulikheter mellom de ulike stemmingene av skalaen i cent.

En interessant observasjon her er at der hvor den pytagoreiske og den renstemte skalaen ikke samsvarer, ligger den renstemte skalaen dypere og den pytagoreiske lysere enn den tempererte. Så til en viss grad kan man kanskje se på den tempererte skalaen som et kompromiss mellom den pytagoreiske og den renstemte?

Bevisstgjøring av hvordan en skala er oppbygd og stemt er nyttig på det teoretiske planet, men det har også en praktisk anvendelse. For en trombonist vil en bevisstgjøring på at instrumentet i utgangspunktet ikke er temperert, gjøre det lettere å vite hvordan man kan intonere seg etter tempererte instrumenter. Motsatt vei er det flere instrumenter som kan renstemme intervaller. Det eksempelet jeg selv oftest er borti er kor. Stemmen er ikke begrenset til 12 toner innen oktaven, og i korsammenheng kan man relativt enkelt renstemme enkeltakkorder. En bevisstgjøring på at man bør tenke tonen litt lysere hvis den er kvinten i en akkord, mens en dur-ters kan godt klinge litt mørkere vil koret kunne klinge enda renere. Jeg merker dette spesielt godt hvis jeg synger flere like toner etter hverandre hvor tonene har ulik funksjon. Da bør de tenkes litt lysere eller litt mørkere underveis for å passe best mulig inn i lydbildet.

4.6 Kvintsirkelen

Tett knyttet til ulike skalaer er ulike tonearter. I den sammenheng er kvintsirkelen et oversiktlig og fint verktøy for å vise sammenhengen mellom de forskjellige toneartene og antall fortegn.

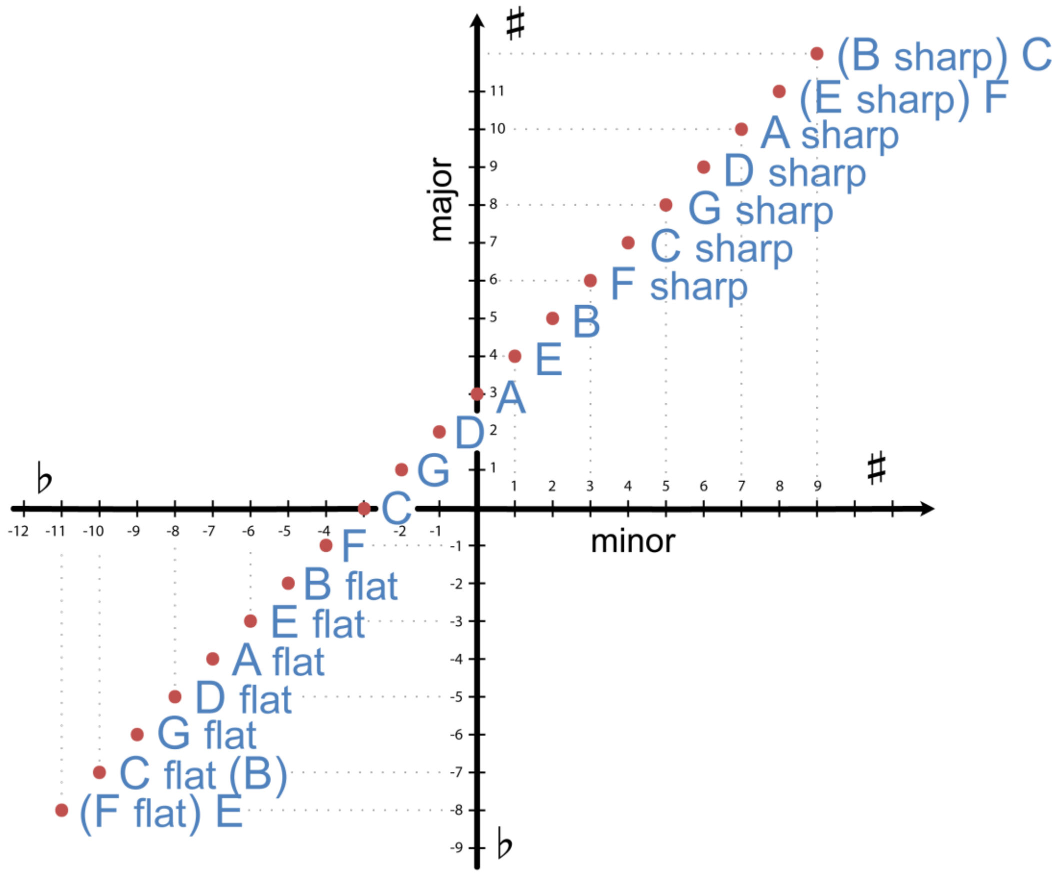
Figur 4.6: Kvintsirkelen [8]

Jeg regner med at dette er kjent stoff for leseren, og jeg vil bare kikke på noen sider av kvintsirkelen fra en matematisk side, samt gi en forklaring på hvorfor den er bygd opp som den er. Først vil jeg tenke på kryss og b som matematiske funksjoner. Kryssfunksjonen hever en gitt note med et halvt trinn, b-funksjonen senker den med et halvt trinn. De fortegnene vi kjenner som kryss, b og oppløsningstegn, samt dobbeltkryss og dobbelt-b er skrivemåter for å vise hva som er gjort med en tone. Hvis vi tenker på kryss og b som funksjoner er det lett å se at de er motsetninger, eller inverser. Med det mener jeg at de opphever hverandre. Hvis vi først hever en note med et halvt trinn, og så senker den er vi tilbake til start. Følgelig vil det å trekke fra et kryss være det samme som å legge til en b. Jeg vil tenke på kryss som + og b som - i denne sammenhengen for enkelhetsskyld.

---

[8] Bildet er hentet fra **http://www.jargstorff.us/wordpress/wp-content/uploads/2011/06/Circle-of-Fifths-Keys.png**

På kvintsirkelen tilsvarer et skritt mot høyre et kvintsprang opp +et kryss. Et skritt mot venstre tilsvarer et kvintsprang ned -et kryss. Overgangen fra krysstonearter til b-tonearter finner vi nederst på kvintsirkelen, der F# enharmonisk omtydes til Gb og motsatt vei. Denne muligheten har vi siden vi opererer med en temperert skala, der F#=Gb. Hadde vi f.eks. brukt pytagoreisk stemming ville vi ikke sittet igjen med en lukket kvinsirkel, men derimot med en evigvarende spiral (se Bibby 2003: 20). Dette bildet viser mollskalaene på innsiden, og durskalaene på utsiden. Det er verdt å legge merke til at disse egentlig er helt like, bare forskjøvet. Hvis vi ikke bryr oss om dur/moll, men kun grunntone ser vi at durskalaen er forskjøvet tre hakk mot høyre i forhold til mollskalaen. Dette forteller oss at varianttonearten til en gitt durskala vil ha tre kryss færre enn durskalaen.



Figur 4.6: Toneartene som graf. [9]

[9] Bildet er hentet fra
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/71/Circle_of_fifths_in_coordinate_system.png

Dette bildet viser sammenhengen mellom fortegn i moll og durtonearter. Uttrykt som formel vil dette kunne skrives som $y = x + 3$ der x står for antall kryss i en gitt molltoneart, og y antall kryss i tilhørende durtoneart (varianttonearten). En interessant observasjon på denne grafen er at G og D er de eneste to tonene som har faste kryss i dur, og faste b-er i moll. Også verdt å merke seg på dette bildet er at de beveger seg lenger enn til tonearter med seks fortegn. G#-dur har for eksempel åtte fortegn, mens H#-dur som er enharmonisk med C-dur vil ha 12 fortegn. I praksis vil dette medføre en del faste dobbeltkryss. Dette er kanskje mest av teoretisk interesse, men hvis vi tar utgangspunkt i kvintsirkelen, og viderefører krysstoneartene også forbi seks kryss, dukker det opp et interessant fenomen. Summen av antall fortegn i to enharmoniske tonearter vil alltid være 12. F# har seks kryss, og Gb har seks B. 6+6=12. C# har syv kryss og Db har fem b, osv. G# har åtte kryss, og Ab har fire b. Følgelig kan vi vite at hvis vi kjenner antall fortegn i en gitt toneart, kan vi regne oss frem til antall fortegn (av motsatt type) i tilhørende enharmoniske toneart.

Det er ikke bare toneartene som følger et tydelig system. Et skritt mot høyre på kvintsirkelen medfører tilføyelsen av et kryss på den nye toneartens syvende trinn. Et skritt mot venstre medfører fjerning av et kryss på toneartens fjerde trinn. Følgelig lager tilføyelsen av fortegn i seg selv en slags kvintsirkel. I denne sammenheng kan vi se i vår opprinnelige kvintsirkel at tonen F (som får det første krysset) og tonen B (som får den første B-en) står rett overfor hverandre på kvintsirkelen.

At oppbygningen av tonearter er ordnet systematisk som dette er et faktum, men jeg vil tenke litt rundt hvorfor det er akkurat slik. Til dette vil jeg ta utgangspunkt i den pytagoreiske stemmingen av skalaen. Som forklart kan dette gjøres på to måter, hvorav en ene er å stable kvinter oppå hverandre til vi har syv toner, for så å transponere disse til samme oktav. Hvis vi tar utgangspunkt i C-dur uten noen fortegn, må vi starte med å bevege oss en kvint ned fra grunntonen for å få tonen F. Etter det flytter vi oss kvinter oppover og får tonene G, D; A, E, H. Merk at H som er 7. trinn i C-dur er den siste tonen vi får. Generelt kan vi si at for en gitt skala starter vi en kvint under grunntonen (som gir oss skalaens kvart) og klatrer oppover derfra. Med utgangspunkt i C-dur vil vi nå bevege oss til G-dur som ligger en kvint lysere. Følgelig kan vi droppe den nederste kvinten F, fra C-durskalaen, men vi trenger en ny kvint over den øverste kvinten H, og tilfører tonen F#. Hvis vi går tilbake til C-dur og vil finne F-durskalaen gjelder samme prinsipp bare motsatt vei. Vi dropper den øverste kvinten H, og legger på en kvint under den nederste kvinten F, og kvarten i den nye tonearten: Bb.

5. Matematiske komposisjonsteknikker

I L-97 var arrangering og komponering et obligatorisk tredjeklassefag på musikklinja. Med LK-06 er strukturen på musikkfagene forandret. Komponering er nå et av hovedområdene i 5-timersfaget musikkfordypning (Utdanningsdirektoratet 2013e: hovedområder), som elevene har både i andreklasse og tredjeklasse. Musikkfordypning er et valgfag, men jeg kommer til å behandle det på lik linje som de obligatoriske fagene, da jeg av erfaring vet at en stor del av musikkelevene velger dette. I en av musikklassene hvor jeg hadde praksis skoleåret 2012/2013 valgte alle elevene musikkfordypning. Om komposisjon sier læreplanen følgende: «Hovedområdet omfatter teknikker for harmonisering, arrangering og komponering (Utdanningsdirektoratet 2013e: hovedområder).» Et av kompetansemålene for musikkfordypning 2 er å «lage komposisjoner i ulik stil og med ulik karakter (Utdanningsdirektoratet 2013e: kompetanesmål).» Ingen av disse argumentene tilsier at elevene må lære matematiske komposisjonsteknikker, men det utelukkes heller ikke. Det står heller ikke noe om matematikk knyttet til komposisjon under grunnleggende ferdigheter. Imidlertid mener jeg at den grunnleggende ferdigheten regning er mangelfull, og ikke veldig god i faget musikkfordypning (Stensholt 2013: 15-16). Jeg sier ikke at elevene må lære matematiske komposisjonsteknikker, men faget har mange potensielle innfallsvinkler til musikk og matematikk og dette er en av dem.

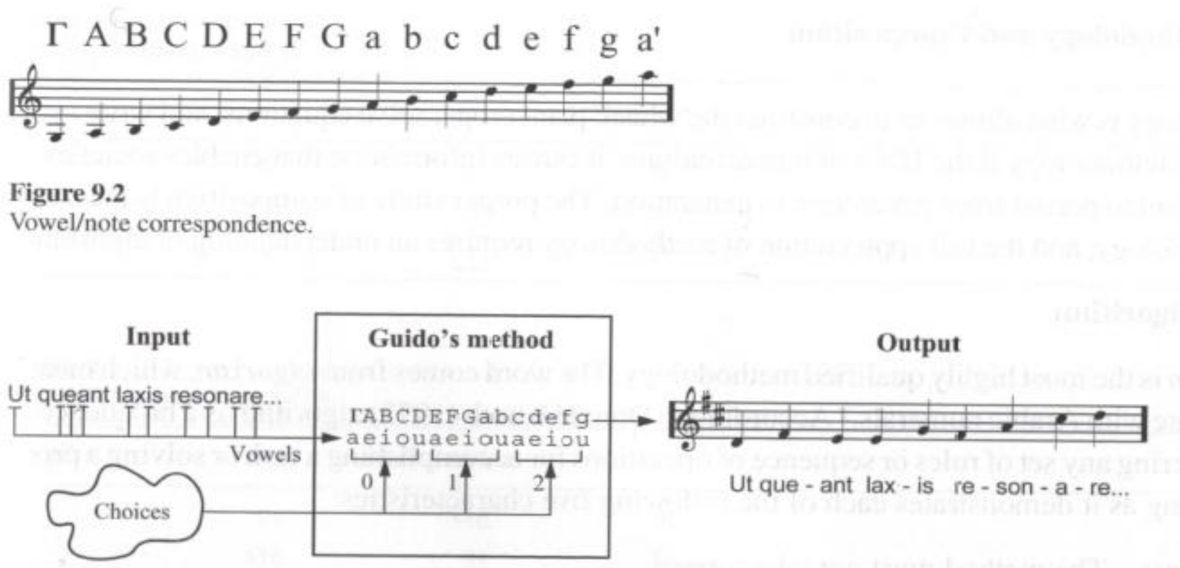
Hittil har jeg sett på matematikk som finnes i musikk uavhengig av komponisters intensjon. Med det mener jeg at musikken har link til matematikken fordi musikkens grunnelementer i sannhet er gjennomsyret av matematikk, og ikke fordi komponisten har valgt å inkludere matematikk. I dette kapittelet vil vi i stor grad se hvordan matematikken kan brukes som et hjelpemiddel og verktøy for å skape musikk. Jeg har tidligere uttrykt at dette er særlig utbredt på 1900-tallet og frem til i dag. Vi kan se det i Schønbergs 12-toneteknikk som ble utviklet videre til full serialisme blant annet. At atonaliteten oppsto på 1900-tallet er ikke overraskende. Hvis vi ser på utviklingen i musikken de siste 1000 årene, er det tydelig at dissonanser og kromatikk stadig fikk større innpass. For Pytagoras var det kun oktav, kvint og kvart som var konsonerende. For Kepler var tersen og seksten også i denne bolken. Jonathan Cross (2003: 132), skriver at tonaliteten hadde utspilt sin rolle, og kunne ikke lenger romme den ekstreme bruken av kromatikk og dissonans som hadde oppstått i senromantikken. Dissonansen måtte bli frigjort.

Cross (Ibid: 132), skriver videre om problemet komponistene på 1900-tallet fikk da tonalitetens ramme ikke lenger var der. Løsningen fant mange i matematikken. Schønberg fant den gjennom sin 12-toneteknikk, og skal selv ha sagt at «In music there is no form without logic, there is no logic without unity (Cross 2003: 132).» Jeg kommer tilbake til dette i slutten av kapittelet, men først vil jeg vise at å ta matematikken til hjelp er ikke noe nytt fenomen.

5.1 Guidos Metode

Kapittel 9 i boka Musimatics Vol. 1 handler om komposisjon. Garreth Loy (2006: 285-288), åpner kapittelet med å presentere det han kaller «Guido's Method». Loy skriver at Guido d'Arezzo utviklet rund år 1026 en måte å lære komponere, som i hans tid betydde å sette melodi til Latinske tekster. Loy skriver at denne metoden la grunnlaget for *objektiv komposisjon.* Med det mener han bruk av en naturvitenskapelig (objektiv) prosess i komponeringen. Loy (2006: 286) skriver også at metoden var en viktig kilde til utviklingen av organumstilen. Om denne metoden var tenkt som faktisk en metode for å komponere musikk, eller om det var et didaktisk hjelpemiddel er usikkert (Ibid: 286). Uansett er metoden interessant, og den fungerer som følgende:

Først setter man opp en liste med tonene i skalaen over 2 oktaver, og setter den opp mot en liste med de latinske vokalene IEAÅO. Så setter man disse opp mot hverandre. Vi har 5 vokaler, som skal knyttes til 15 toner. Følgelig får hver vokal 3 toner knyttet til hverandre:



Figur 5.1: Guidos metode. [10]

[10] Bildet er hentet fra Garreth Loy (2006:287)

Komponisten har nå et objektivt grunnlag, der den latinske teksten avgjør hvilke toner som oppstår. For hver vokal finnes det tre tilhørende toner. Derav har komponisten tre valg. For en tekst med to vokaler, vil vi ha $3 * 3$ mulige melodikombinasjoner. Om teksten har fire vokaler, er det hele $3^4 = 81$ mulige melodier. Med andre ord oppstår det fort mange mulige utfall, selv i et tilsynelatende låst system. Hvis man likevel syns systemet var for begrenset foreslo Guido at man kunne legge til en ekstra linje med vokaler under den opprinnelige, men la de starte et annet sted. Et viktig poeng er uansett at denne metoden skal kun være grunnlaget og et hjelpemiddel. «Guido suggested that by selecting only the best excerpts from several attempts, composers could obtain a composition perfectly adapted to the text and meeting the requirements of good compositional practice (Loy 2006: 287). » Matematikken er altså en vei til målet, ikke selve målet. Dette vil vi se gjenspeilet hos 1900-tallskomponistene.

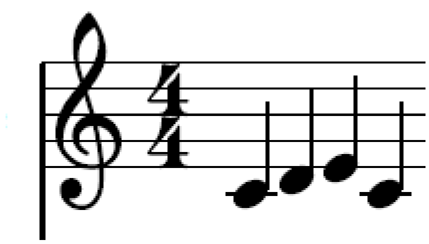
5.2 Avbildninger i musikken

Avbildninger er et virkemiddel som brukes bevisst av flere 1900-tallskomponister, men vi kan finne dem i så og si all musikk. Jeg skal her se på hva avbildninger er rent generelt, for så å oversette det til musikalsk språk. For å forstå denne overgangen er det lurt å tenke seg notesystemet som et todimensjonalt koordinatsystem der y-aksen representerer tonehøyde, og x-aksen representerer tid. Hvis vi tenker oss et normalt koordinatsystem der x er tid og y er tonehøyde, vil hver akse representere en kontinuerlig strøm av punkter. Alle frekvenser vil være mulig å finne på y-aksen, og alle mulige tidsenheter på x-aksen. Likevel er disse rammet inn av konkrete punkter, utfra hvilke parametere vi har satt på aksene. Et skritt på y-aksen kan for eksempel representere en oktav, og et skritt på x-aksen en firedel. Dette kan lett oversettes til et notesystem. Vi har en vertikal akse for tonehøyde, og en horisontal akse for tid. Selv om både tonehøyde og tid er kontinuerlige faktorer, er tonehøydeaksen begrenset til en minsteverdi, halvtonen. Tidsaksen er litt mer fri, men i praksis vil noteverdiene begrense denne til faste punkter, og ikke en kontinuerlig strøm. Notesystemet kan altså sees på som et «begrenset koordinatsystem», men i vår sammenheng kan det behandles likt.

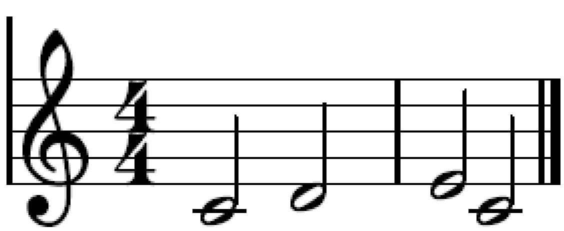
Reinert A. Rinvold (2009:67) beskriver avbildninger som bevegelsens matematikk. Derfor er det kanskje ikke så rart at de dukker opp i musikken, da musikk på mange måter er bevegelseskunst.

«En *avbildning* er en forskrift som til ethvert punkt *P* i planet tilordner et punkt *P'* (Breiteig og Venheim 2005: 299).» Det vil si at en avbildning flytter samtlige punkter i planet til en entydig ny posisjon. Hvis et punkt avbildes på seg selv, altså blir værende der det er før og etter avbildningen, kalles det et *fikspunkt* (Ibid: 305). En avbildning kan for eksempel være at alle punkter dobler eller halverer x- og y-verdiene til et gitt punkt. I dette tilfellet vil origo være et fikspunkt. Et annet kan være at vi ignorerer alle y-koordinatene (altså y=0), og kun beholder x-koordinatene. Dette vil medføre at alle punkter med samme x-koordinat vil avbildes på samme punkt, og alle punktene på x-aksen vil være fikspunkter. Musikalsk sett kan en slik avbildning tolkes som at man ignorerer tonehøydene men bare leser rytmen; en vanlig teknikk i øvingssammenheng.

I praksis betyr dette at vi bruker en matematisk regel til å gjøre en forandring med en figur, i vår sammenheng en musikalsk figur. Et eksempel kan for eksempel å doble tidsfaktoren. I praksis vil dette si at alle noteverdiene av et tema blir augmentert/forlenget:



Figur 5.2a: Originalfigur



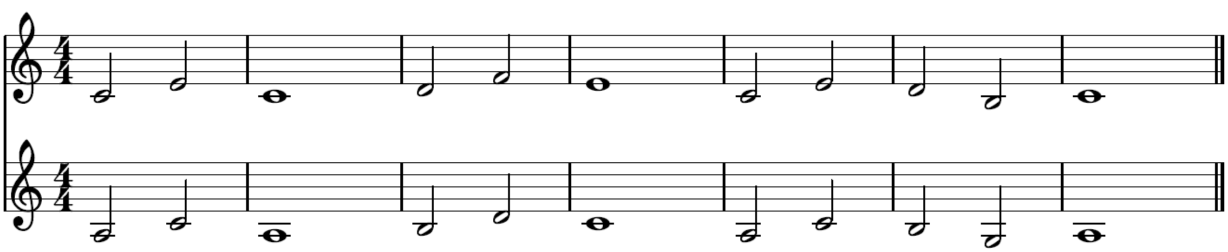
Figur 5.2b: Augmentert figur

En spesiell form for avbildninger, som kanskje er det folk flest forbinder med fenomenet, er *isometrier* eller *kongruensavbildninger*. Disse avbildningene beholder alle avstandene i innad i figuren som avbildes (Breiteig og Venheim 2005: 299). I planet har vi 4 isometrier. Som Breiteig og Venheim definerer på følgende måte:

> **a** En *speiling* om ei linje *l* er slik at et vilkårlig punkt *P* avbildes på *P'* slik at *P'* kommer like langt som *P* fra *l*, men på motsatt side. Dessuten står linja *PP'* vinkelrett på *l*. En speiling er bestemt ved ei linje - speilingslinja.
> **b** En *rotasjon* en vinkel *v* om et punkt *O* er slik at et vilkårlig punkt *P* avbildes på *P'* slik at *PO = P'O* og *vinkel-POP'=v*. En rotasjon er bestemt ved et punkt - rotasjonssenteret - og en vinkel - rotasjonsvinkelen.
> **c** En *parallellforskyvning* avbilder et vilkårlig punkt *P* på *P'* slik at *PP'* er parallell med og like lang som et gitt linjestykke *UV*. Dessuten har *PP'* og *UV* samme retning. En parallellforskyvning er bestemt ved en vektor - ei pil, et linjestykke med retning.
> **d** Når vi setter sammen en parallellforskyvning og en speiling der parallellforskyvningsvektoren *UV* er parallell med speilingslinja *l*, får vi en *glidespeiling*. (Ibid: 300)

Eystein Raude (2000: Melodien), ser på avbildninger musikalsk. Han bruker imidlertid funksjoner for å forklare dette matematisk. Jeg syns dette er unødvendig vanskelig, og vil bare snakke om forflytninger i denne oppgaven.

En parallellforskyving er kanskje det fenomenet som er lettest å forstå musikalsk sett, da melodien blir værende som den er, bare flyttet et annet sted. De enkleste formene for parallellforskyvning er parallelt med x-aksen, som musikalsk sett betyr at en melodisnutt repeteres, og parallelt med y-aksen som vil si at melodisnutten transponeres. Parallellforskyvning i y-retning kan tolkes på 2 måter. Det kan være hele melodien transponeres til en ny toneart, slik vi med fordomsfulle øyne kan påstå samtlige grand prix-låter er eksempel på. Imidlertid kan vi også oppfatte det som at vi legger på en annenstemme til melodien i en konstant avstand.



Figur 5.3: Parallellforskyvning

I dette eksempelet er den øverste stemmen en parallellforskyvning av den nederste, en ters opp. Legg merke til at takt 3, egentlig også er en parallellforskyvning av takt 1. Her er den ikke bare forflyttet i x-retning, men også i y-retning. En forflytning både i tid og tonehøyde, kalles sekvensering. Denne teknikken er blant annet vanlig i barokken. Det kan være snakk om imitasjon mellom stemmegrupper, eller innad i en stemme. Jeg sang høsten 2013 en allehelgenskonsert med Tønsberg Domkor. Vi sang tre barokkverker; to av Bach, og et av Teleman. Alle har flere eksempler på både imitasjon og sekvensering. Her er to av dem:

Figur 5.4a: Johan Sebastian Bach BWV 106 Sats 4, takt 20-21. Det kommer ikke frem av notebildet, men satsen går i Bb-dur.

Her kan vi se et lengre motiv i tenorstemmen, som egentlig er bygd opp av fire 16-deler som flyttes en sekund opp for hver nye runde. Merk også at i de to første slagene i 2. takt imiterer altene tenorstemmen. De synger den bare en ters lysere.

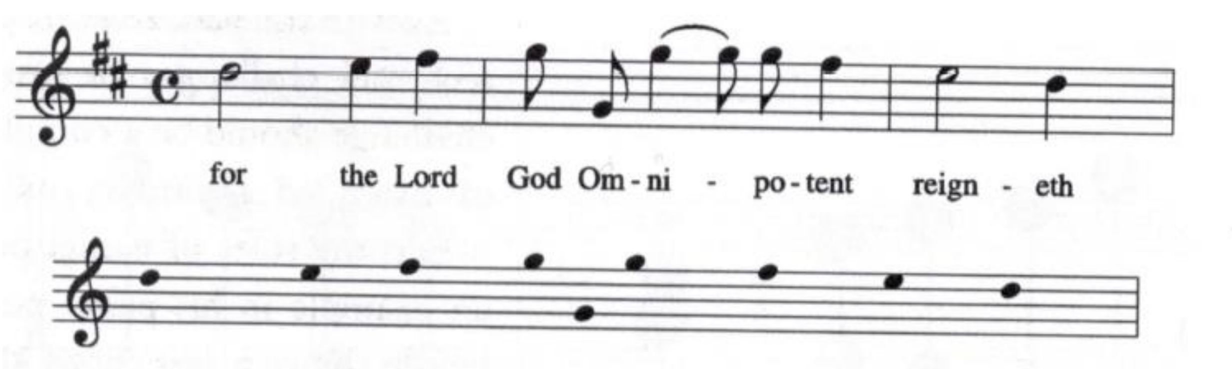
Figur 5.4b: Georg Philipp Telemann Trauer-Kantate, Du aber, Daniel, gehe hin Sats 1. Takt 33-37

I dette eksempelet presenteres først et tema i bassen, som så imiteres av tenorstemmen men flyttet en kvint lysere.

Som vi kan se av disse eksemplene er musikalske avbildninger ofte «mindre strenge» enn strengt matematiske avbildninger. Blant annet er det vanlig at sekvensering, eller ters-transponering skjer innenfor samme skala, slik at avstanden mellom stemmene ikke er f.eks. en stor ters hele tiden, men heller en diatonisk ters. Matematikken er altså kun et hjelpemiddel og ikke et hinder for hva som klinger best.

Speilinger og rotasjoner er litt mer avansert, men vi finner mange musikalske eksempler på dette også. De avbildningene vi i praksis finner er speiling om en vertikal eller horisontal akse, eller rotasjoner på 180 grader, som forøvrig er entydig med først å speile om en horisontal akse, og så om en vertikal akse. Disse teknikkene finner vi brukt mye i 12-toneteknikken, der en speiling om en vertikal akse kalles for retrograd eller kreps, mens en speiling om en horisontal akse kalles omvending eller inversjon. En rotasjon på 180-grader vil være en omvendt kreps/invertert retrograd.

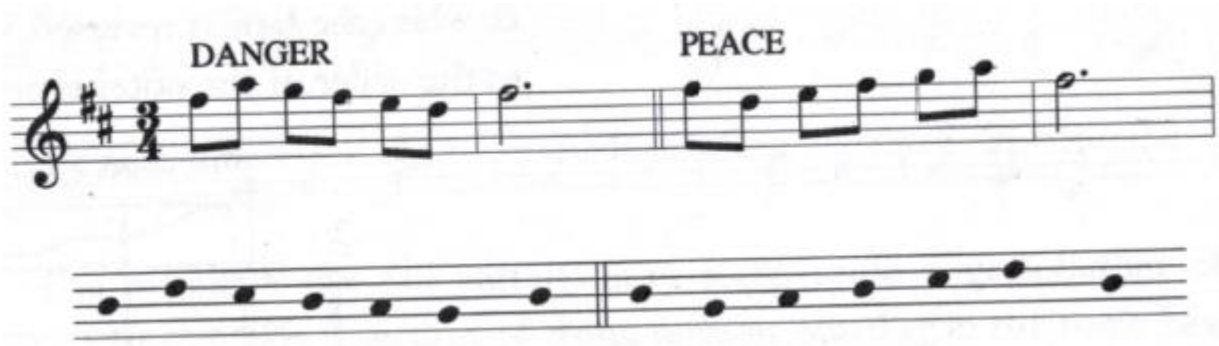
Musikalsk kan dette gjøre seg gjeldende på enten tonehøyde, rytme eller begge deler. Wilfrid Hodges (2003: 100-104), viser til flere melodisnutter som har enten speilsymmetri eller rotasjonssymmetri, og hvor følgelig siste delen av melodien kan oppfattes som en avbildning av første delen. Et eksempel på speilsymmetri om en vertikal akse, der vi ikke tar hensyn til tonenes lengde, men kun høyde har han hentet fra *Hallelujakoret*:



Figur 5.5: Utdrag fra hallelujakoret. [11]

Han viser også et interessant eksempel på rotasjonssymmetri (Ibid: 104) hos Rimsky-Korsakov. I operaen *Gullhanen* (Engelsk tittel: The golden cockerel), er handlingen spunnet rundt en magisk fugl som synger to sanger. En når det er fare, og en når det er fred. Temaet for fred kan sees som en rotasjon av temaet for fare:

[11] Bildet er hentet fra Wilfrid Hodges (2003: 103)



Figur 5.6: Utdrag fra Rimsky-Korsakovs Gullhanen. [12]

Se kapittel 6 for et lengre eksempel på hvordan avbildninger kan brukes aktivt i musikken.

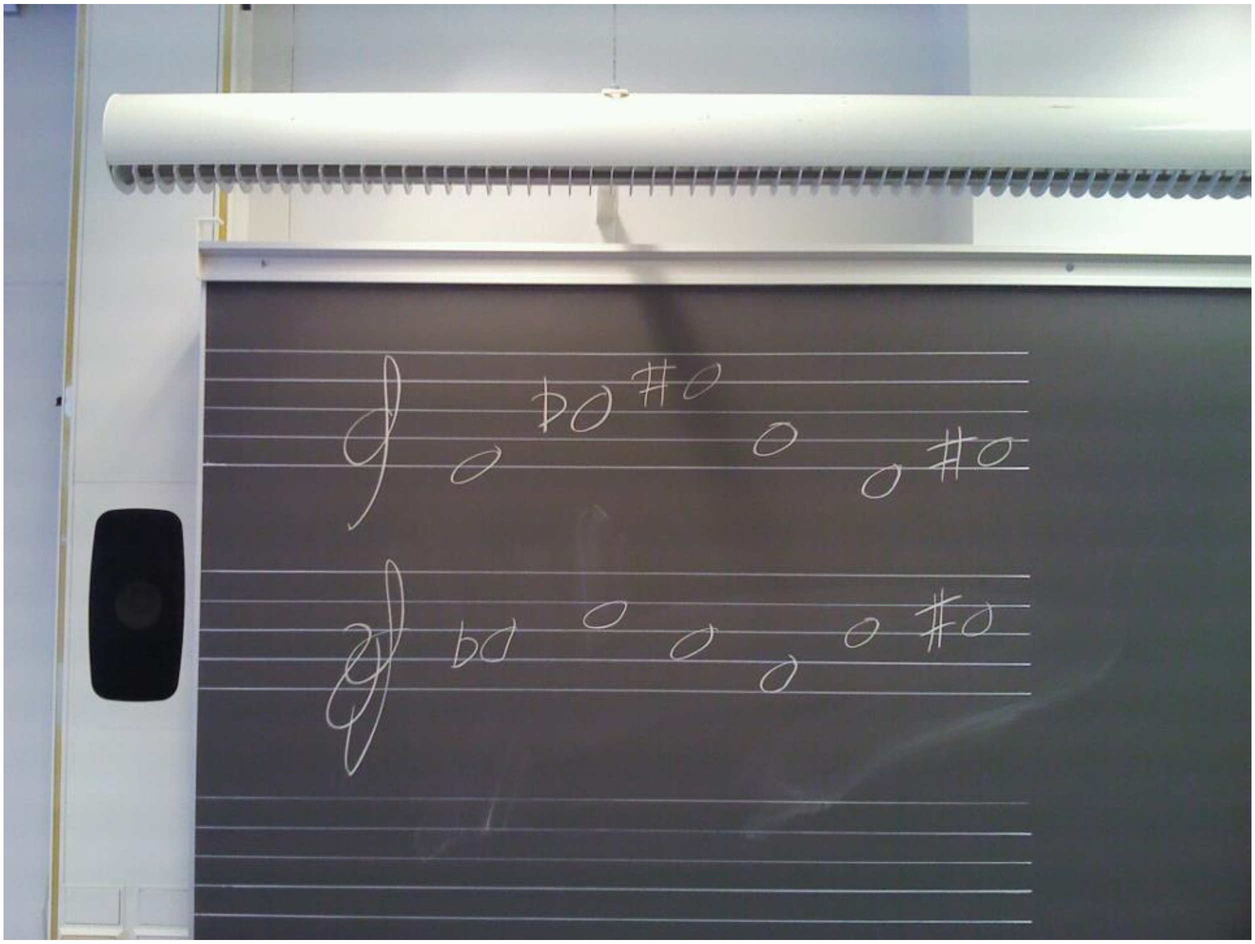
5.3 1900-tallets komposisjonsformer

Som jeg nevnte i min historiske gjennomgang har 1900-tallet mange innfallsvinkler til musikk og matematikk, særlig når det kommer til komposisjon. Dette temaet i seg selv har mer enn nok innfallsvinkler til å fylle en masteroppgave og jeg må følgelig begrense meg. I stedet for å gi en generell oversikt velger jeg å fokusere på noen få ting. Først vil jeg se på hvordan matematikken kan brukes til å sette musikken i ordnede former gjennom 12-toneteknikken til Arnold Schønberg og i serialismen.

Som jeg skrev var dette på mange måter Schønberg sin «redning» når han mistet tonalitetens trygge grunn. Paul Griffiths (2007) skriver at i 12-toneteknikk (eller 12-note serialism) er serien en organisering av de 12-notene i den tempererte kromatiske skalaen. I en skala er det kun hvilke toner som er inkludert som har noe å si. I en 12-tonerekke som på mange måter kan sees som en erstatning for skalaen er alle tonene involvert. Følgelig er det rekkefølgen på dem som har noe å si. Man skal i prinsippet være innom alle de 12 tonene i rekka før man starter på nytt igjen, men vi aksepterer oktavekvivalens og følgelig kan tonene plasseres så lyst

[12] Bildet er hentet fra Wilfred Hogdes (2003: 104)

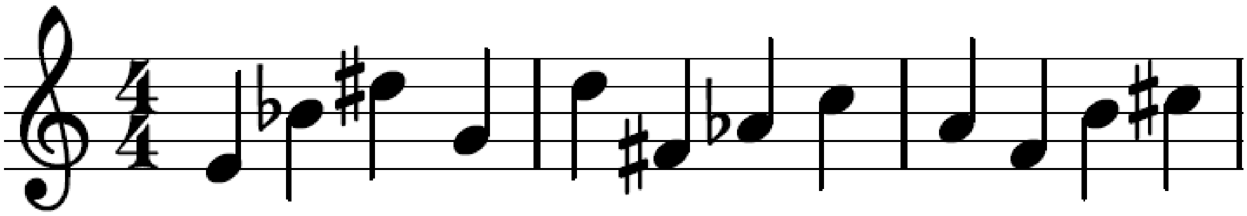
eller mørkt som man ønsker.



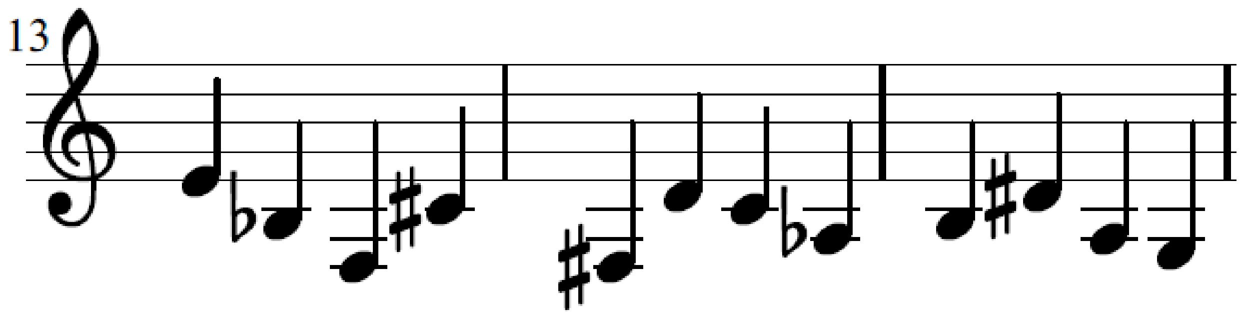
Figur 5.7: Eksempel på en 12-tonerekke.

12-tonerekka på figur 5.7 lagde en musikklasse der jeg var i praksis våren 2012. Måten vi lagde den på var ved fritt valg. Jeg lot en elev velge en tone, neste elev valgte neste tone osv. Eneste kravet var at tonen de valgte ikke var brukt før, og vi endte opp med denne 12-tonerekken. På denne måten har man 12!=479001600 mulige utfall/rekker.

Foreløpig virker ikke 12-tonerekken veldig matematisk bortsett fra at det er et ordnet system man bruker. Derimot er det de teknikkene Schønberg brukte på grunnrekken matematiske. En rekke danner nemlig grunnlag for 48 variasjoner. Den kan nemlig omvendes, krepses, eller omvendt krepses. Her er musikklassens 12-tonerekke i alle former. Jeg flytter 5. tone opp en oktav slik at rekkens omfang ikke overstiger oktaven.

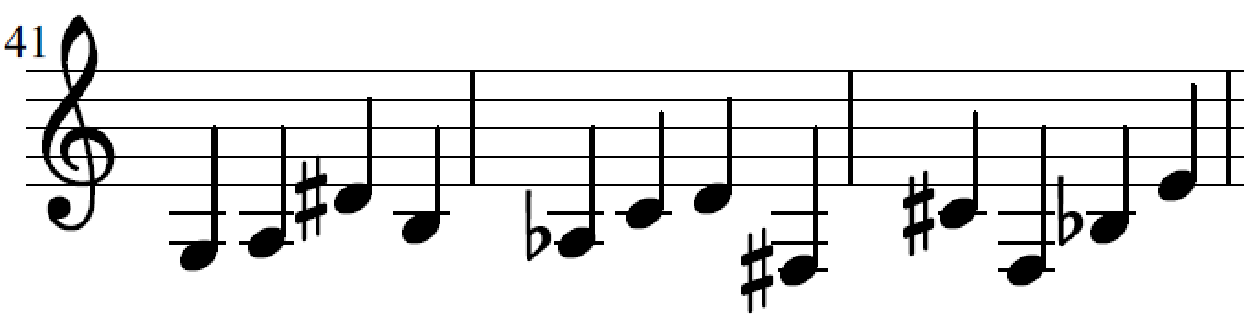


Figur 5.8a: Originalform.



Figur 5.8b: Omvending.

Figur 5.8c: Kreps.



Figur 5.8d: Omvendt kreps.

I tillegg til dette kan hver av disse fire rekkene transponeres til 12 ulike starttoner.

Dette systemet er blitt kritisert for å mangle inspirasjon, og kun være mekanisk (Cross 2003: 132). Cross påpeker at dette er et misforstått syn. Noe musikk skrevet etter matematiske modeller som 12-toneteknikken er riktignok mekanisk, men som han sier kan musikk bli mekanisk i alle systemer ikke minst tonaliteten (Ibid: 132). 12-toneteknikken er et hjelpemiddel. Et middel for å nå et mål. Cross (2003: 133-137) viser eksempler på hvordan både Arnold Schønberg, og hans elever Alban Berg og Anton Webern bruker 12-toneteknikken i komposisjoner.

12-toneteknikken er et eksempel på hvor viktig innføringen av den tempererte skalaen er for musikkens utvikling. 12-tonerekka ville vært meningsløs i en renstemt eller pytagoreisk skala, siden det strengt talt ikke er 12 halvtrinn i en slik skala. En Ab vil for eksempel ikke være enharmonisk med en G#. Tempereringen av skalaen «løser dette problemet», og gir muligheten for atonal musikk.

Serialismen er en på mange måter en videreføring av dette. Særlig Weberns musikk ble sett på som en modell for senere komponister i denne retningen (Cross 2003: 136). I serialisme, eller det Paul Griffiths (2007) omtaler som «total serialism», skal ikke bare tonene organiseres i rekker, men også andre musikalske elementer som tonenes varighet, styrkegrad og anslag.

Som et eksempel på et serialistisk stykke der mer enn bare tonehøyder er organisert i serier kan jeg nevne Messians *mode des valeurs et d'intensite's* fra *4 etudes des rythme.* Her har han organisert følgende rekker: 36 tonehøyder, 24 varigheter, 12 styrkegrader og 7 anslagsmåter. Merk at disse rekkene danner grunnlag for en fri komposisjonsteknikk med elementene (Nesheim 2004: 345). Jeg vil se litt på lengden på de forskjellige rekkene Messian opererer med her. Siden 12 går opp i 24, vil ikke disse rekkene opp mot hverandre lage noe særlig «spenning». Forutsatt at hver rekke gjentas uten variasjoner vil styrkegradsrekka bare gå 2 ganger for hver varighetsrekke. Likeledes er det med tonehøyderekka og styrkegradsrekka. 3 styrkegradsrekker= 1 tonehøyderekke. Derimot er anslagsrekka interessant. 7 er et primtall, og går ikke opp i 12 (og dermed ikke i 24 eller 36). Det vil si at det er først etter 7 runder med styrkegrader og 12 runder med anslagsmåter, at disse to rekkene samsvarer. Hva som er «bra og dårlig» vil jeg ikke mene noe om her, men fra et matematisk ståsted er det verdt å merke seg at jo lavere felles divisor de forskjellige rekkene har, jo lenger tid tar det før de samsvarer igjen. F.eks. vil en rekke på 3, mot en rekke på 4 måtte opp i 12 enheter, før de samsvarer igjen, siden 3 og 4 har 1 som felles divisor. Mens en rekke på 4 mot en rekke på 6 vil også bare vare 12 slag, siden 4 og 6 har 2 som største felles divisor. For å finne ut når to eller flere rekker starter på nytt igjen samtidig, altså hvor lang tid det tar før vi er «tilbake til start», må vi finne rekkenes minste felles multiplum.

Dette er det minste tallet som er delelig med alle tallene vi sammenlikner. I vårt eksempel er 12 minste felles multiplum, siden det er det minste tallet som er delelig med både 3, 4 og 6.

5.4 Tilfeldighetsprinsippet i komposisjon. Motsetningen til total kontroll

Elef Nesheim (2004: 343) trekker frem at den modernistiske perioden i etterkrigstiden særlig var konsentrert om to miljøer: Darmstadtskolen og John Cages tilfeldighetsmusikk. Han skriver videre:

> «Darmstatskolens musikk blir gjerne oppfattet som en retning som la vekt på sterk organisering av musikkelementene, mens Cage blir oppfattet som en komponist som åpnet for fullstendig frihet. Selv om dette bare i noen grad er riktige vurderinger, så er det likevel interessant at de to viktigste bidragene til 50-årenes modernisme sto som sterke motsetninger (Nesheim 2004: 343).»

Det som er interessant å se her er at to grunnleggende ulike veier, nemlig kontroll kontra tilfeldighet, var begge veier til å unngå tonalitetens rammer. Det hørbare resultatet er ikke nødvendigvis veldig ulikt (Edwards 2012). I vår sammenheng er det også interessant å se at begge veiene er gjennomsyret av matematikk. I 12-toneteknikken og serialismen blir matematikken brukt til å sette musikken i kontroll, men matematikken er til like god hjelp når målet er å gi slipp på kontrollen.

Selv om John Cage er en viktig bidragsyter til bruk av tilfeldighetsprinsipper i musikk, er ikke dette noe som først dukket opp på midten av 1900-tallet. Leon Harkleroad (2006: 71) skriver at bruk av tilfeldighet (chance) florerte i komposisjoner på 1700-tallet og 1900-tallet. Derimot var det lite bruk av tilfeldighet i romantikken (Ibid: 81). Harkleroad forklarer dette med komponistens rolle som geniet i romantikken, og hvordan musikken uttrykte komponistens følelser. Komponisten var nærmest en urørlig autoritet. Kort sagt var musikken et for subjektivt fenomen til at tilfeldighet hadde noen naturlig plass (Ibid: 81-82). Hvordan kunne et stykke musikk være direkte uttrykk komponistens geni, hvis man ikke engang visste hva resultatet ville bli? Jeg vil trekke frem noen eksempler fra Leon Harkleroad (2006:71-91).

Som eksempel fra 1700-tallet viser Harkleroad til diverse musikkterningsspill, der man kunne «komponere» ved bruk av å kaste terninger. Et av spillene var laget av Johann Phillipp Kirnberger, og bar tittleen «der allezeit fertige Menuetten- und Polonoisen-komponist» (Harkleroad 2006: 72). Oversatt til norsk blir det noe som «Den alltid klare menuett- og polonesekomponist.» Kirnbergers spill er laget for å produsere 14-takters poloneser. Kirnberger har komponert 11 versjoner av hver av disse 14 taktene. Dvs. at for hver takt har man 11 valgmuligheter. Her kommer terningenes rolle inn. Ved å kaste to terninger kan man få summen av øyne fra 2 til 12, altså 11 alternativer. Hver sum hører til sin respektive versjon av en takt. For hver takt kaster man terningene (Ibid: 72).

Dette er en enkel oppskrift, men den gir muligheten for et stort antall ulike poloneser. For hver takt har vi 11 muligheter, dvs. at bare for de to første taktene har vi 121 mulige varianter. totalt vil vi ha 11^{14}varianter som tilsvarer nesten 380 billioner ($3.8 * 10^{14}$), så sannsynligheten for at to komponister «komponerer» akkurat samme polonese er ganske lav. Selv om mulighetene er mange, er en slik komposisjon langt fra totalt kaos. Hver takt har 11 varianter, men hver av disse variantene er komponert slik at de passer sammen med foregående og neste takt. Komponisten har med andre ord lagt rammene, og lar så tilfeldighetsprinsipper avgjøre veien gjennom taktene.

Sannsynlighetsmodellen Kirnberger bruker er ikke «rettferdig», eller uniform som det heter. Sannsynligheten for å rulle to terninger og få summen 2, er mye lavere enn å få summen 7. Mens summen 2 bare kan oppnås på en måte, nemlig ved å kaste to enere, kan man oppnå summen 7 på hele 6 forskjellige måter. Sannsynligheten for å få summen 2 er 1/36, mens sannsynligheten for å få summen 7 er 6/36=1/6. Dvs. at sannsynligheten for at man ender opp med versjon sum7 for en tilfeldig valgt takt er seks ganger høyere enn for versjon sum2. Dette bildet viser hvor mange muligheter man har for å få de forskjellige summene ved kast av to terninger, og følgelig sannsynligheten for hvert enkelt tilfelle:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figur 5.9: Mulige utfall ved kast av to treninger.

Som vi ser er sannsynligheten lavest for sum2 og sum12. Den vokser så innover mot sum7 som har den høyeste sannsynligheten. For å sette på spissen hvor store forskjeller dette skaper:

Sannsynligheten for å kaste terningene 14 ganger, og ende opp med bare sum2-takter vil være ca. 1/380billioner, mens sannsynligheten for å gjøre det samme og ende opp med kun sum7-takter vil være ca. 78milliarder/380billioner=78/380000. Dette er det mest sannsynlige enkeltutfallet. Om dette er noe komponisten var bevisst på eller ikke vet jeg ikke, men det er ikke utenkelig at han sorterte variantene utfra hvilke han ønsket at skulle brukes oftest.

Harkleroad (2006:82-83) skriver videre at på midten av 1900-tallet dukket på ny bruken av tilfeldighetsprinsipper i musikken opp, blant annet som en reaksjon på serialismen. Et åpenbart eksempel han trekker fram er bruken av improvisasjon i jazz. Her er utøverne gjerne underlagt et akkordskjema, men styrer selv hva de spiller over det. I stedet for å fokusere på konkrete komposisjoner vil jeg trekke frem en mer generell tilnærming Harkleroad går gjennom, som eksempel på hvordan tilfeldighetsprinsipper kan brukes. Harkleroad (2006: 83-84) skriver at i mange av komposisjonene på 1900-tallet var tilfeldighetsprinsippet lagt til note for note, i stedet for ferdigkomponerte takter. Et eksempel på hvordan dette kan gjøres i praksis er å ta ut 12 ulike kort fra en kortstokk og knytte hver av dem til en av de 12 tonene i den kromatiske skalaen. Vi trekker så et kort og får vår note, blander kortene og gjentar prosessen igjen og igjen for å skape en melodilinje. Her vil alle 12 notene ha like stor sannsynlighet, og vi har veldig liten valgfrihet. Eneste er valg av oktav til tonene. Harkleroad (Ibid: 84) skriver at en så streng metode gir musikalske resultater som kanskje ikke er veldig interessante. De er, nå ja, for tilfeldige. I eksempelet fra 1700-tallet var det alt lagt restriksjoner som gjorde at alle kombinasjoner «passet». Han foreslår derfor muligheten til å legge noen rammer på kortstokkens tilfeldighet. En mulighet er å sortere kortene i to bunker. En som inneholder de syv tonene i C-dur, og en som inneholder de resterende fem. Hvis vi begrenser oss til å trekke kort fra syver bunken vil vi få en melodi som holder seg på pianoets hvite tangenter og gir kanskje en C-durtonalitet? En restriksjon kun til femerbunken vil gi oss en pentaton melodi. Selv om vi kun holder oss til pianoets hvite tangenter er vi ikke garantert en melodi med C-dur tonalitet. En annen tone kan lett oppleves som grunntone. D-dorisk og A-moll er eksempler på skalaer som inneholder de samme tonene som C-dur. Harkleroad (85-86) foreslår derfor å favorisere noen av tonene. Han skriver at hvis en melodi skal ha C-durtonalitet bør særlig tonen C, men også E og G som fullfører C-durtreklangen klinge oftere enn de andre tonene. Han foreslår derfor en kortstokk med 11 kort, der 3 representerer C, 2 E, 2 G, og 1 kort for resten av de hvite tonene. En melodi laget på tilfeldighetsprinsippet med disse rammene vil sannsynligvis få et C-durpreg.

En begrensning med en slik metode er imidlertid at ingen av tonene påvirkes av den foregående. En melodi har gjerne en flyt der neste tone til en viss grad bestemmes av den foregående, og med vår metode tas ikke dette med i betraktningen. Harkleroad (86-87) foreslår at vi bruker 12 forskjellige kortstokker som en løsning på dette. Der hver kortstokk har ulik fordeling mellom de forskjellige tonene, og foregående tone avgjør vårt neste trekk. hvis vi nettopp har trukket en C trekker vi neste kort fra bunke 1. Hvis vi har trukket en C# trekker vi neste tone fra bunke 2 osv. En kjedereaksjon som dette, der hvert nye utfall styres av det forrige, kalles for en markovkjede etter den russiske matematikeren A.A. Markov (Harkleroad 2006: 87). Som et konkret eksempel tar Harkleroad utgangspunkt i bare tre toner, D, G og H. Han lager følgelig tre bunker med følgende regler:

Hvis siste note var D, trekk fra en kortstokk med 2D, 5G og 3H

Hvis siste note var G, trekk fra en kortstokk med 3D, 3G og 4H

Hvis siste note var H, trekk fra en kortstokk med 2D, 7G og 1H

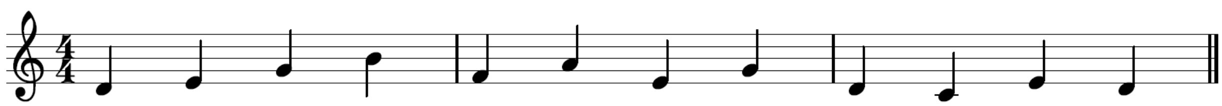
Dette er tilfeldig valgte verdier, men viser tydelig hvordan et slikt system fungerer. Hvis man trekker en G er sannsynlighetens relativt stor for at neste note blir en H. Trekker man en H er sannsynligheten veldig stor for at neste note blir en G, mens sannsynligheten for enda en H er veldig lav. Hvilken note man skal starte med er derimot vårt valg. Den komponisten som er mest kjent for bruk av markovkjeder i musikalsk sammenheng er Iannis Xenakis (Harkleroad 2006: 90).

Bruk av tilfeldighet i musikk gir rom for litt refleksjon. Siden tilfeldigheten spiller en avgjørende rolle på hvordan et en slik komposisjon faktisk vil høres kan det være rimelig å påstå at verket er ikke ferdig i det komponisten leverer det fra seg. Kirnberger lagde et spill som gav potensial for et veldig stort antall poloneser. Vil det dermed være på sin plass å påstå at han komponerte 380 billioner poloneser? Min påstand er at dette er en uriktig tolkning. Jeg vil heller si at Kirnberger komponerte en polonese med 380 billioner mulige versjoner. Dette kommer veldig tydelig frem i tilfeldighetsmusikk, men er egentlig en av de grunnleggende kvalitetene ved musikkens vesen. Musikken blir skapt på nytt hver gang den fremføres. Ingen fremføring er helt lik, delvis på grunn av praktiske elementer som dirigents tolkning, og utøveres musikalske ferdigheter, men også tilfeldighetens preg.

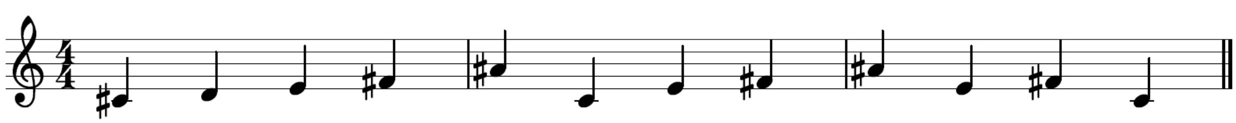
5.5 Matematikken kjenner ingen grenser

Når det gjelder bruk av matematikken som verktøy for komposisjoner er det bare fantasien som setter grenser. Man kan ta nærmest hvilken som helst matematisk regel og oversette den til et tonesystem på en eller annen måte. For eksempel har jeg sett flere videoer som oversetter desimalene i tallet π til toner og lager melodier utfra det. Andre eksempler finner vi hos Eystein Raude (2000: Kuriositeter) som viser eksempler på både fibonaccitallene (feilaktig. Se kapittel 9.1), det gyldne snitt og stokastiske prinsipper brukt i musikk.

Jeg har laget et eget eksempel der jeg har laget en tonerekke med utgangspunkt i de 12 første primtallene, og oversatt dette til skalatrinn. Jeg transponerer tonene inn til samme oktav. Primtall er ikke tilfeldige, men det er ikke noe system i hvor tett de kommer. Følgelig er det vanskelig på forhånd å anslå noe system i tonene. De 12 første primtallene er følgende: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Jeg har to variasjoner. I den første har jeg tatt utgangspunkt i C-durskalaen med C som første trinn. I det andre har jeg tatt utgangspunkt i den kromatiske skalaen med C som første trinn. Resultatene er som følger:



Figur 5.10a: Primtallsrekke med C-dur som grunnlag



Figur 5.10b: Primtallsrekke med kromatisk skala som grunnlag. C=trinn 1.

Hvis vi ser på rekkene gir de to forskjellige resultater. Likheten med begge er at de er objektive utfra de reglene jeg har satt. Hvordan jeg bruker dem i en eventuell komposisjon er min frihet. Naturlig nok gir rekken med alle 12-tonene som mulighet et mer atonalt preg siden det er flere toner involvert. Likevel er det interessant å se at i den kromatiske rekken dukker det opp noen systemer. Både tone 3-4-5 og 7-8-9 gir oss motivet E-F#-A#. Vi finner dessuten både tonen E og tonen F# tre ganger hver blant disse 12 tonene. De utgjør med andre ord halvparten av alle tonene, og et musikkstykke basert på denne rekken vil naturlig ha disse som logiske tonale sentre.

Rekken basert på C-dur har færre mulige toner å involvere, og vil følgelig oppleves mer tonal. Hele melodien gir egentlig en følelse av D som grunntone. Særlig siste takt gir dette inntrykket.

Bruken av slike objektive matematiske formler trenger ikke være en begrensning for kreativitet. Derimot kan de være en trigger som setter oss i gang, og gir oss noen trygge rammer å jobbe innenfor.

6. Analyse av John Taveners *The Lamb*

Hittil har jeg sett på matematiske elementer som gjør seg gjeldende i mye musikk, men kun vist dette med fragmenterte eksempler eller på generelt grunnlag. I dette kapittelet vil jeg gjøre en analyse av et musikkstykke, for å vise at det ikke er vanskelig å finne matematiske innfallsvinkler med utgangspunkt i et konkret musikkstykke. Den matematikken som ligger til grunn er gjennomgått i tidligere kapitler.

Analyse er et av hovedområdene i MIP-faget der vi kan lese at hovedområdet lyttetrening «omfatter ulike lytteteknikker og refleksjon over forhold som påvirker musikkopplevelsen. Identifisering og beskrivelse av musikkens grunnleggende elementer og karakteristiske musikkhistoriske trekk er sentralt (Utdanningsdirektoratet 2013b: Hovedområder).» Jeg vet ikke om en musikkmatematisk analyse av et musikkstykke kan betegnes som lytteteknikk. Selv om jeg skal argumentere for fordeler med å kjenne til den matematiske oppbygningen av stykket jeg skal analysere, er jeg ikke sikker på om det er noe man hører i første omgang. Derimot kan den matematiske oppbygningen absolutt tolkes som et av musikkens grunnleggende elementer. Under kompetansemålene (Utdanningsdirektoratet 2013b) kan vi lese at eleven skal kunne «identifisere og beskrive musikkens elementer med utgangspunkt i eksempler fra musikkhistorien, auditivt og ved hjelp av notebilde.» En analyse av denne typen er i stor grad knyttet til notebildet. Derfor velger jeg å legge ved notene i sin helhet ved slutten av dette kapittelet.

6.1 Presentasjon av *The Lamb*

Stykket jeg har valgt er *The Lamb* av John Tavener. Selv har jeg tilnærmet meg det både som lytter, korsanger og dirigent. Grunnen til at jeg har valgt akkurat dette stykket er fordi det tok meg lang tid før jeg ble bevisst på at det var gjennomsyret av matematikk. Altså er dette i mine øyne et stykke som er vakkert og interessant i seg selv. Det at det også har en matematisk orden gir det bare en ekstra dimensjon. Et interessant spørsmål er så klart i hvilken grad komponisten har vært dette bevisst, og i hvor stor grad han aktivt har brukt matematiske teknikker for å skape musikken.

Jeg vil komme tilbake til dette etter analysen. Jeg har imidlertid prøvd å gjøre meg et inntrykk av John Tavener som person gjennom 7 spor på CD-en «John Tavener a portrait» (Tavener 2004) med fellestitlene «John Tavener reflects [...] A Recorded Interview». Her deler

John Tavener sine egne tanker med lytteren. Mitt hovedinntrykk etter å ha lyttet til dem er at John Tavener er en meget religiøs og åndelig mann. Ikke minst virker det som han er inspirert av zen-buddhismen (Refleksjon 5). Molde og Salvesen (2000: 114) skriver at John Tavener (1944-2013) utviklet en personlig stil inspirert av østlig filosofi. Han konverterte til den gresk-ortodokse kirken i 1977. Det guddommelige er et gjennomgående tema for han og han sier, om ikke i klartekst, at lyden av (god) musikk er lyden av gud. Alt er egentlig en åpenbaring av gud (Refleksjon 4). Temaet død er også viktig for han, fordi han sier det kommer mye kjærlighet og musikk ut av det (Refleksjon 1). I refleksjon 1 tar Tavener også et oppgjør med den modernistiske stilen og ikke minst serialismen, som han mener stort sett ikke er «guds stemme». Anton Webern er imidlertid et unntak. I refleksjon 7 sier han at hans eneste mål er enkelhet. Musikken skal forstås av alle. Når det gjelder sin egen musikk har han en interessant tilnærming til å «vite om han er på rett spor». Han tar utgangspunkt i naturen. Hvis stykket samsvarer med naturen er han på rett spor (Refleksjon 6). Han skal også ha sagt han ser på katten sin for å vite om stykket hans er i ubalanse (Irvy 2001). Det jeg derimot syns er veldig interessant er at Tavener også sier at stykket må ha matematisk logikk: «If it does'nt make mathematical sense to me it just won't do (Refleksjon 6).» I refleksjon 7 gir Tavener uttrykk for at musikken bør kunne forstås av alle. Fra de enkleste sjeler til de største matematikere. Jeg sitter igjen med det inntrykket at for Tavener har musikken og naturen samme utspring: Gud.

6.2 Analyse

> «The Lamb was written twenty-two years ago for my then 3-year old nephew, Simon. It was composed from seven notes in an afternoon. Blake's child-like vision perhaps explains The Lamb's great popularity in a world that is starved of this precious and sacred dimension in almost every aspect of life (Tavener 2004, sitert i Redfern 2010: 6). »

John Taveners tonesetting av William Blakes dikt *The Lamb* er ikke av hans større verker, men er likevel av de mest populære og de som fremføres oftest (John Tavener 2013). Min analyse vil i hovedsak ta utgangspunkt i notebildet som jeg fant hos Nick Redfern (2010: 18-20).

The Lamb samsvarer stilistisk sett med mye annet jeg har hørt av John Tavener, særlig når det gjelder den kontemplative stemningen. Nick Redfern (2010: 5-6) trekker også frem flere eksempler på trekk som er typisk for John Tavener blant annet sterk enkelhet, tonal struktur, bruk av repetisjon, religiøs tekst, rolig kontemplativt tempo og enkel rytmisk struktur.

The Lamb er skrevet for firestemmig blandakor (SATB), men jeg har hørt flere opptak der det brukes guttestemmer til å synge sopran og alt. Nick Redfern (2010: 6) viser også til opptak hvor dette er tilfellet. Jeg vil også nevne at det finnes også finnes innspillinger av verket for strykere, og jeg må si at det gjør seg like bra for stryk som for kor. Det er likevel korversjonen jeg skal gjøre en analyse av her. Den innspillingen jeg kommer til å forholde meg til er gjort av kammerkoret Tenebrae (2006) på plata *Allegri Miserere.*

Rytmisk sett er dette stykket meget enkelt. Stort sett går tonene på jevne åttedeler, med noen lengre noteverdier på slutten av hver frase. Imidlertid er det ikke noen jevn metrisk puls. Tonene er alltid underlagt og styrt av teksten. Det er heller ikke naturlig å snakke om noen taktart her. Stykket er inndelt i taktstreker, men egentlig er dette mer snakk om fraseinndelinger. Stykkets form er ABA'B, som jeg skal komme litt tilbake til i den matematiske delen av analysen.

Tonaliteten i dette stykket er i seg selv interessant. Nick Redfern (2010) skriver at de styrende toneartene er G-dur og E-moll. Han viser også til en form for bi-tonalitet i blant annet takt 2, der alten synger i en Ess-durtonalitet, og sopranen i en G-durtonalitet. Det han skriver er ikke feil, men jeg føler likevel det ikke er en god måte å tilnærme seg tonalitetsspørsmålet for å få en god forståelse av opplevelsen. Når det gjelder den E-molltonaliteten Redfern refererer til vil jeg si meg enig i at B-delene av stykket isolert sett tydelig går i en E-moll aeolisk på grunn av melodiens harmonisering. Imidlertid er melodistemmen her den samme som i takt 1, og isolert sett har denne en G-durtonalitet. Tavener har valgt å holde seg strengt til den aeoliske skalaen, og dermed brukt H-moll i stedet for H-dur som dominant. Dette føler jeg i stor grad er med på å gi stykket mindre spenning, og forsterker den kontemplative stemningen som gjennomsyrer det.

Jeg spilte A-delen i dette stykket for en videregåendeklasse, og spurte dem om den var tonal eller atonal. Svaret var nærmest enstemmig atonalt. Dette var riktignok elever som ikke hadde et ordentlig bevisst forhold til hva atonalitet faktisk er. De hørte ikke noe tydelig dur/mollstruktur, og fant heller ikke noen tone som var «viktigere» enn de andre. Konklusjonen deres var dermed at stykket var atonalt. Jeg trekker frem dette, for å understreke min påstand om at det ikke er naturlig å snakke om noe dur/molltonalitet i A-delen av dette stykket. Jeg vil heller snakke om en melodi som sentrerer seg rundt tonen g_1, hvor Tavener har valgt å bruke $f\#_1$, i sopranstemmen som ledetone. Det faktum at alt-stemmen i takt 2 isolert sett får en Ess-durtonalitet, ser jeg på mer som en tilfeldig følge av at den er en omvending av sopranstemmen, enn at det er et ønske om bruk av bi-tonalitet. Dessuten sentrerer alt-stemmen seg også om tonen g_1, derfor ville det eventuelt vært naturlig å snakke om en bi-tonalitet mellom G-dur og G-frygisk. Dette kommer jeg mer tilbake til i den matematiske delen av analysen.

Dynamikken i dette stykket er ikke ekstrem, men likevel meget effektfull. Vi beveger oss fra pp til mp, og i utgangspunktet er det brå dynamiske skifter (ikke crescendo og diminuendo). Et eksempel på dynamikkens effekt er hvordan Tavener velger å gå tilbake i styrke i B-delene der koret synger firestemmig.

Hovedvekten av denne analysen skal være på matematiske elementer, og da særlig bruk av avbildninger i musikken. Tavener skrev at dette stykket er komponert utfra syv noter, og jeg skal etterhvert vise hvordan disse syv notene, ved hjelp av hovedsakelig speilinger, nærmest utgjør hele stykket.

Det første jeg vil ta tak i er stykkets form. Som nevnt er den ABA'B. Det som skiller A og A'(bortsett fra ny tekst) er at i A' er herrestemmene med å synge også. Tenor dobler sopran, og bass dobler alt. Dessuten synger alle stemmene de unisone partiene i A' som kun sopran synger i A. Matematisk sett kan det at herrene kommer inn, oppfattes som en parallellforskyvning av melodistemmen, parallelt med tonehøydeaksen, en oktav ned. Det er også verdt å understreke at selv om de forskjellige delene har ulik tekst, er det nøyaktig de samme noteverdiene i AB og A'B. Et par steder er det lagt inn noen melismer for å tilpasse teksten til notene, men ellers er stykket gjennomgående syllabisk. Hvis vi ser på formen isolert sett kan denne også oppfattes som en parallellforskyvning. AB forskjøvet parallelt med tidsaksen. På grunn av dette vil det ikke være nødvendig å forholde seg til mer enn AB for resten av analysen, siden alt gjentar seg.

Hvis vi ser A- og B-delen opp mot hverandre oppleves de meget kontrasterende. A-delen er unison/tostemt, første runde dessuten bare med damestemmer. B-delen er en firestemt koralsats. A-delen har en G-tonalitet med mye dissonanser, mens B-delen oppleves som E-moll med lite dissonanser. Her har vi også et skille mellom tradisjonell tonalitet, riktignok med molldominant kontra 1900-tallets brudd med det tradisjonelle tonalitetsbegrepet. Nick Redfern (2010: 16) skriver: «The harmony of the chorale refrain is more concordant and acts as a foil against the chromatic dissonance of the **verse**. » Imidlertid er de bygd opp av de samme grunnsteinene, nemlig de syv tonene Tavener refererer til, og som blir presentert i takt 1:

Figur 6.1: *The Lambs* syvtoners tema.

Riktignok består takt 1 av åtte toner, siden den siste tonen gjentas på grunn av teksten. Dette temaet synger sopranen gjennomgående i B-delen. Hvis vi «zoomer litt inn», og ser på B-delens indre form er denne ccc'c''. I c' er tonene akkurat som i takt 1, mens i c er den nest siste tonen sløyfet på grunn av teksten. c'' er en augmentasjon av c'. Alle noteverdiene dobles. Siden dette kun er en augmentasjon langs tidsaksen (sprangene i stemmen forblir like), kan dette oversatt til matematikkspråk sees på som en avbildning der alle de opprinnelige punktene fordobler x-verdien sin. Dvs. at punktet *(x,y)* får koordinatene *(2x,y)* etter avbildningen. Utover dette kan vi se på B-delen som en parallellforskyvning av første frase. Ved å se på enkeltstemmene i første frase av B-delen dukker det opp et par interessante matematiske observasjoner her også.

Figur 6.2: Harmoniseringen av B-delen på *The Lamb*.

Altstemmen følger sopranstemmen, og kan oppfattes som en parallellforskyvning ned en diatonisk ters (forutsatt at vi godtar at vi er i e-moll). Tenor- og bass-stemmen er mer styrt av det harmoniske TSDT-forløpet, men vi finner en viss avbildning her også. Hvis vi ser på tenorstemmens seks første toner, er de speilsymmetriske om en loddrett linje midt mellom tone 3 og 4. Det er også her interessant å merke seg at tone 1 og 2 i tenoren hører til i en e-mollakkord, mens tone 5 og 6 (som er de samme tonene) hører til i en h-mollakkord.

I stykkets A-del er det desto mer matematiske avbildninger å snakke om. A-delens indre form er aa'bb'; a og b, synges kun av sopran. I a' og b' gjentar sopranen sin stemme fra a og b, mens altstemmen kommer på i tillegg. Igjen er det naturlig å snakke om en parallellforskyvning av a til a’ og av b til b’. Imidlertid er det et annet matematisk fenomen som kommer frem her, nemlig at altstemmen i A-delen uten unntak er en omvending av sopranstemmen. Dette kan sees på som en speiling langs en horisontal linje, i dette tilfellet langs G-linjen.

Figur 6.3: Takt 2 av *The Lamb* notert i et notesystem.

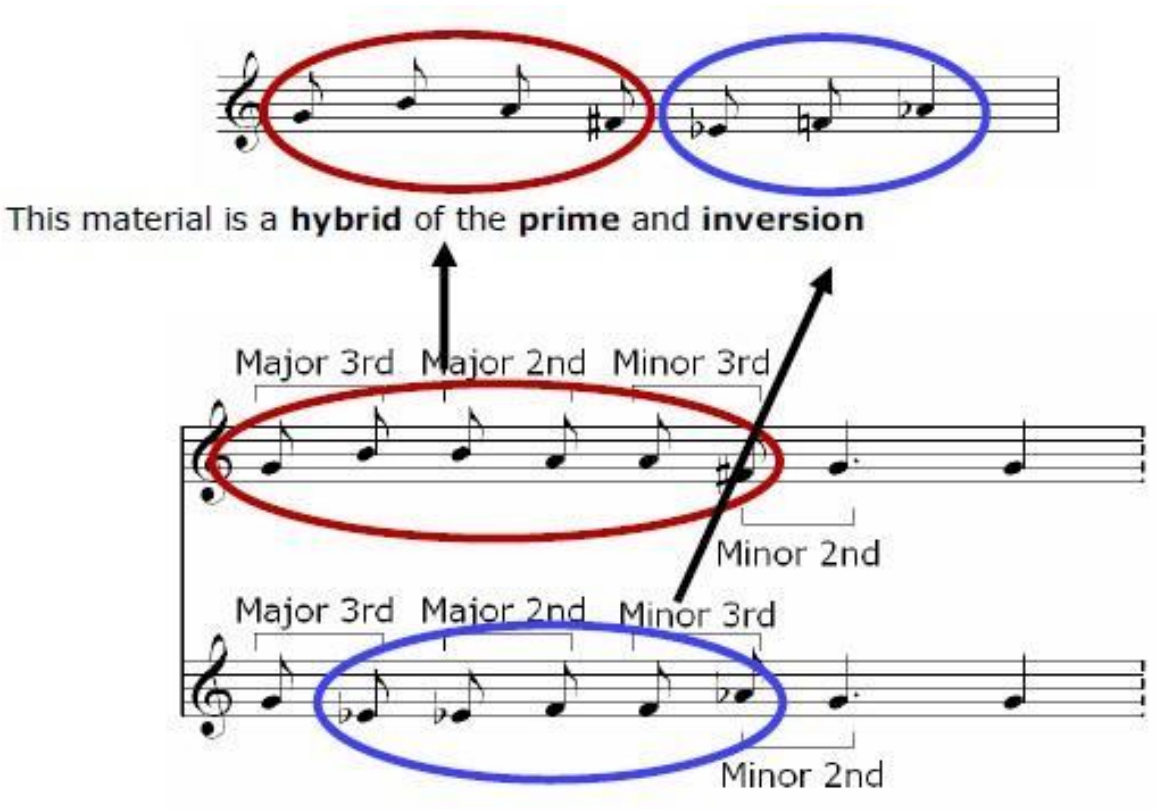
Legg merke til at på tone nr. 5, er det et stemmekryss. Tavener har valgt en kromatisk omvending, og ikke en diatonisk. Dette føler jeg er med på å underbygge min påstand om at det ikke er naturlig å snakke om G-dur kontra Ess-dur her (eventuelt G-frygisk). Hvis vi ser på b-temaet er det i seg selv symmetrisk. Vi ser bort fra noteverdiene (noe som jeg syns er naturlig da disse er styrt av teksten) består b-temaet av syv toner som så spilles i kreps. Dette er en speiling langs en vertikal akse. Det som virkelig blir interessant å se på er hvordan dette ser ut når vi setter sopran og alt sammen.

Figur 6.4a: Takt 5 og 6 av *The Lamb*.

Her har vi et tema i sopranstemmen som i seg selv speiles, slik at takt 5 blir sunget baklengs i takt 6. I tillegg har vi en altstemme som er en omvending av sopranstemmen. Det vil si at vi har her en speilsymmetri langs en horisontal akse (G-linjen), og langs en vertikal akse, som må bli omtrent på taktstreken mellom taktene. Følgelig har vi også en rotasjonssymmetri på 180 grader om skjæringspunktet mellom disse linjene.

Figur 6.4a: Takt 5 og 6 av *The Lamb* notert i et notesystem med markerte speilingslinjer.

Vi skal nå ta en titt på temaet i takt 1 (a-motivet), som hele stykket visstnok er bygd opp av. Vi har allerede sett hvordan det har blitt omvendt til altstemmen i A-delens a', og blitt harmonisert i B-delen. Vi har derimot et b-tema i A-delen som ved første øyekast er noe helt nytt i forhold til a-motivet. b-motivet omtaler Nick Redfern (2010) som «hybrid», og viser at det egentlig er satt sammen av a-motivet og altens omvending av a-motivet.



Figur 6.5: Sammenhengen mellom grunntemaet og hybridtemaet i A-delen av *the Lamb* hentet fra Nick Redfern (2010)

Hvis vi ser bort i fra tonegjentakelser i a-motivet, og altens i omvending, vil b-motivet bestå av de fire første tonene fra a-motivet, samt tone 2, 3 og 4 fra altens omvending. En følge av dette er at tone nr. 5, 6 og 7 i b-motivet er en glidespeiling av tone 2, 3 og 4 til sopranens a-tema.

Vi står da igjen med et motiv på syv toner, av og til med tonegjentakelse av siste tonen, som hele stykket er bygd opp av. Selv her er det en viss form for matematisk symmetri. Isolert sett har dette motivet en G-durtonalitet, og det er derfor naturlig å snakke om diatoniske intervaller. Temaet består da av ters opp, tonegjentakelse, sekund ned, tonegjentakelse, ters ned og sekund opp. Hvis vi i tillegg ignorerer tonegjentakelser, og kun er interessert i å se på bevegelsen i tonehøyde får vi følgende: ters opp-sekund ned, ters ned-sekund opp. Motivets bevegelse i tonehøyde er altså bevegelsen ters opp-sekund ned, som så blir speilet og vi står igjen med en bevegelse på tre toner. Imidlertid føler jeg at denne siste oppdelingen er interessant for å vise matematisk struktur i grunnmotivet, men den tar fra motivet sine egenskaper da tonegjentakelsen er essensiell for motivets karakter. Jeg vil sammenlikne det med å si at motivet på syv toner er som et atom for dette stykket. Et hydrogenatom kan spaltes, men da er det ikke lenger et hydrogenatom.

6.3 Noen refleksjoner

Dette stykket er tydelig gjennomsyret av matematiske elementer, men har det noen betydning? Er det kun interessant på et teoretisk plan, eller har det en praktisk innvirkning på oss?
Jeg «hørte ikke matematikken» første gang jeg hørte dette stykket, ikke andre gang heller. Først da jeg studerte notebildet ble jeg bevisst på det, så de matematiske elementene er hvert fall ikke helt åpenbare. Lettest å høre er kanskje repetisjonen av samme tonene fire ganger i B-temaet, hvor den siste repetisjonen dobler noteverdiene.

Hvis man derimot blir bevisstgjort de matematiske elementene, vil jeg tro at trente ører oppfatter dem ganske raskt. Her er det imidlertid en viktig faktor å ta med i betraktningen. De avbildningene jeg har vist til i analysen tar utgangspunktet i notebildet, som kan sees på som et todimensjonalt plan med lengde og bredde. Disse to dimensjonene representerer imidlertid musikkens to dimensjoner: tonehøyde og tid. Det skjer med andre ord en overgang mellom dimensjoner her, og særlig den overgangen fra rom til tid kan være kritisk. Erling Gulbrandsen (2012e) påpeker det at ting i fortiden huskes som kortere enn det vi opplever i nuet. En følge av dette er at hvis vi hører et tema i originalform som så krepses, kan krepsemotivet oppleves som lenger enn originalmotivet. Den avgjørende faktoren er forholdet mellom lytterens hukommelse, og lengden på temaet. I dette stykket er temaet som krepses så kort at jeg antar de fleste vil oppfatte de som like lange. Hvert fall med en liten intellektuell refleksjon i bakhodet. En annen effekt avbildningene i dette stykket er med på å skape, er sammenheng mellom A-temaet og B-temaet. Disse to temaene er store kontraster ved første øyekast. B-temaet er firestemt og tonalt i e-moll, mens det tostemte A-temaet kretser rundt tonen G, og kan ved første gjennomhøring nesten oppfattes som brudd på tonalitet. Likevel har de dette syvtoners-temaet som binder dem sammen.

Jeg vil også påstå en ting til. Hvis man er bevisst på disse elementene vil det hjelpe til i en innøvingsfase. Hvis en sanger, i A-delen, er bevisst på at de skal synge samme tema om igjen bare baklengs tror jeg dette vil gjøre veien dit enklere. Ikke minst er det lett å gli over på en annen stemme i dette partiet på grunn av mange stemmekryss, og en slik tilnærming vil begrense dette. På samme måte tror jeg at en omvending blir lettere å synge hvis man er bevisst på at man skal springe de samme avstandene som man nettopp har gjort, bare i motsatt retning. I B-delen er det mer åpenbart. Hvis sangerne har lært seg de første syv notene, kan de i praksis hele B-delen.

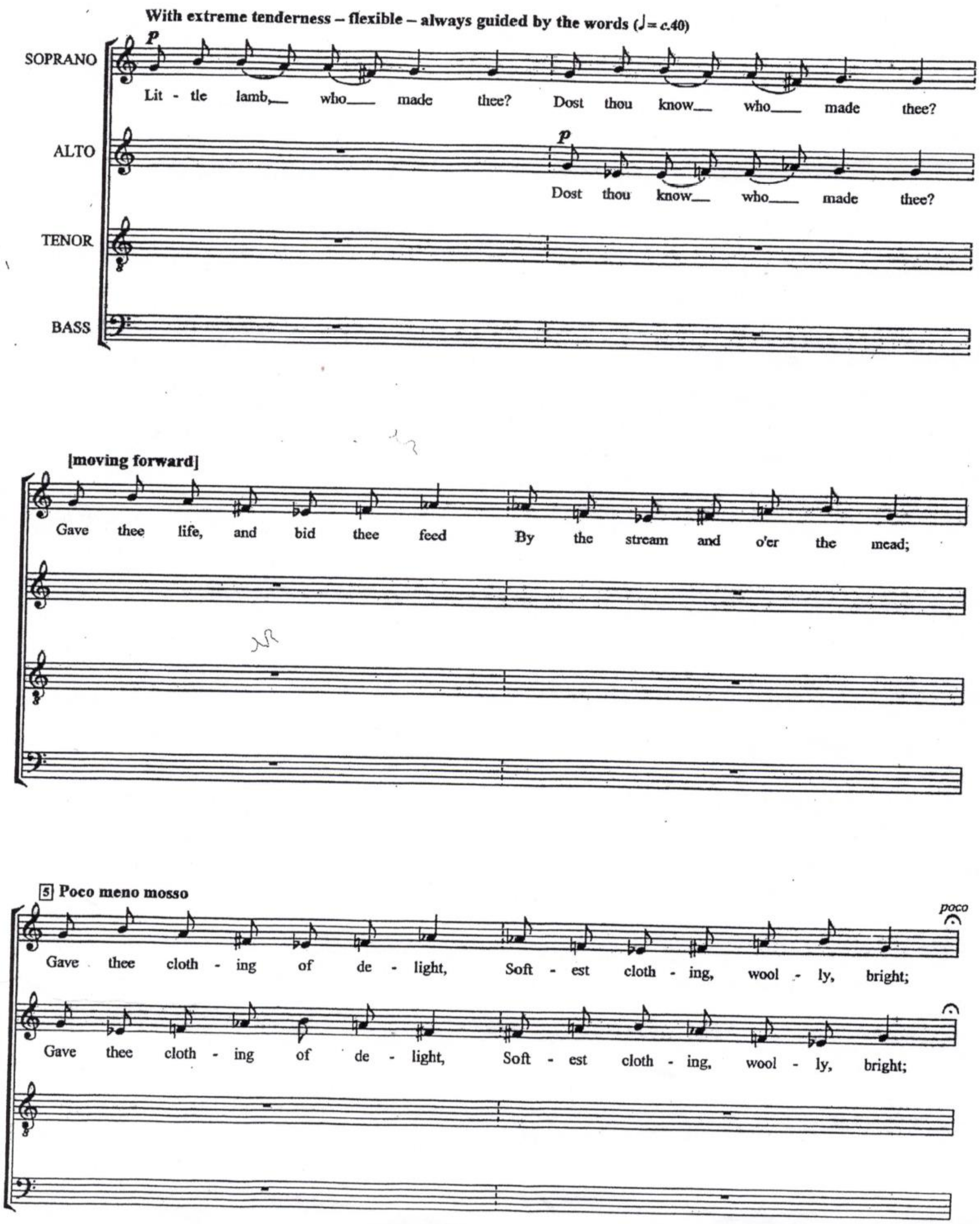
Jeg spurte innledningsvis i hvilken grad komponisten selv var bevisst bruken av matematiske elementer. Med utgangspunkt i utsagnet hans om at musikken må ha en matematisk logikk, er det rimelig å anta at han hvert fall til en viss grad har vært bevisst på bruken av matematiske teknikker. Tavener slår meg imidlertid ikke som en mann som vil redusere musikken til kun matematikk, og han virker kritisk til mye av 1900-tallets mer matematiske komposisjonsteknikker, ikke minst serialismen. Når han tyr til matematiske teknikker tror jeg det er fordi de gir musikalsk mening for han på flere plan. Når han sier at et stykke må ha matematisk logikk oppfatter jeg ikke dette som et krav om at det skal være serialistisk, men at det skal ha samme formen for orden som vi finner mange steder i naturen. Den matematiske logikken kommer til uttrykk gjennom en indre orden i stykket. Derfor er det spesielt interessant å se hvor mye matematikk vi finner i *The Lamb* bare ved å lete.

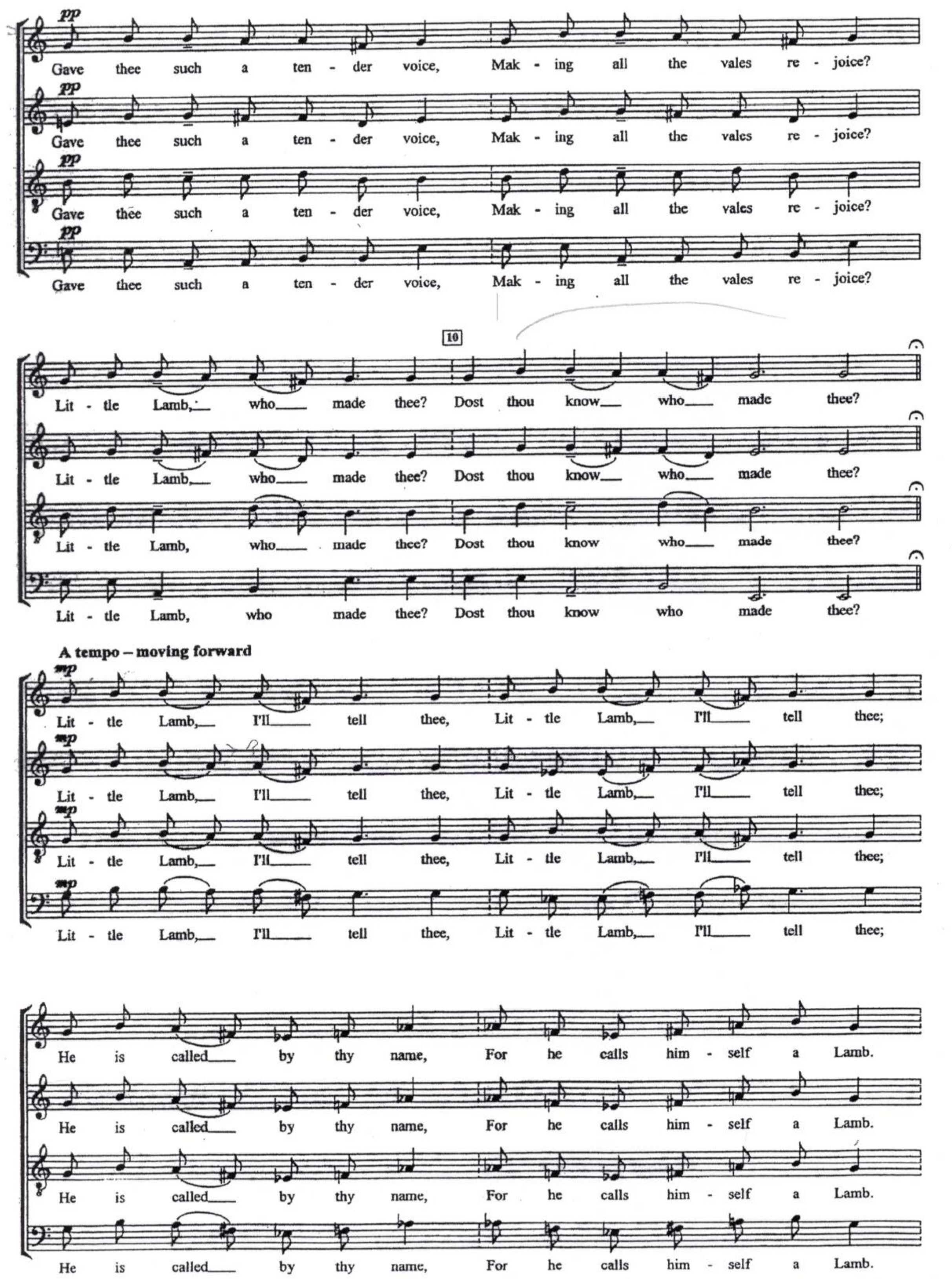
Score

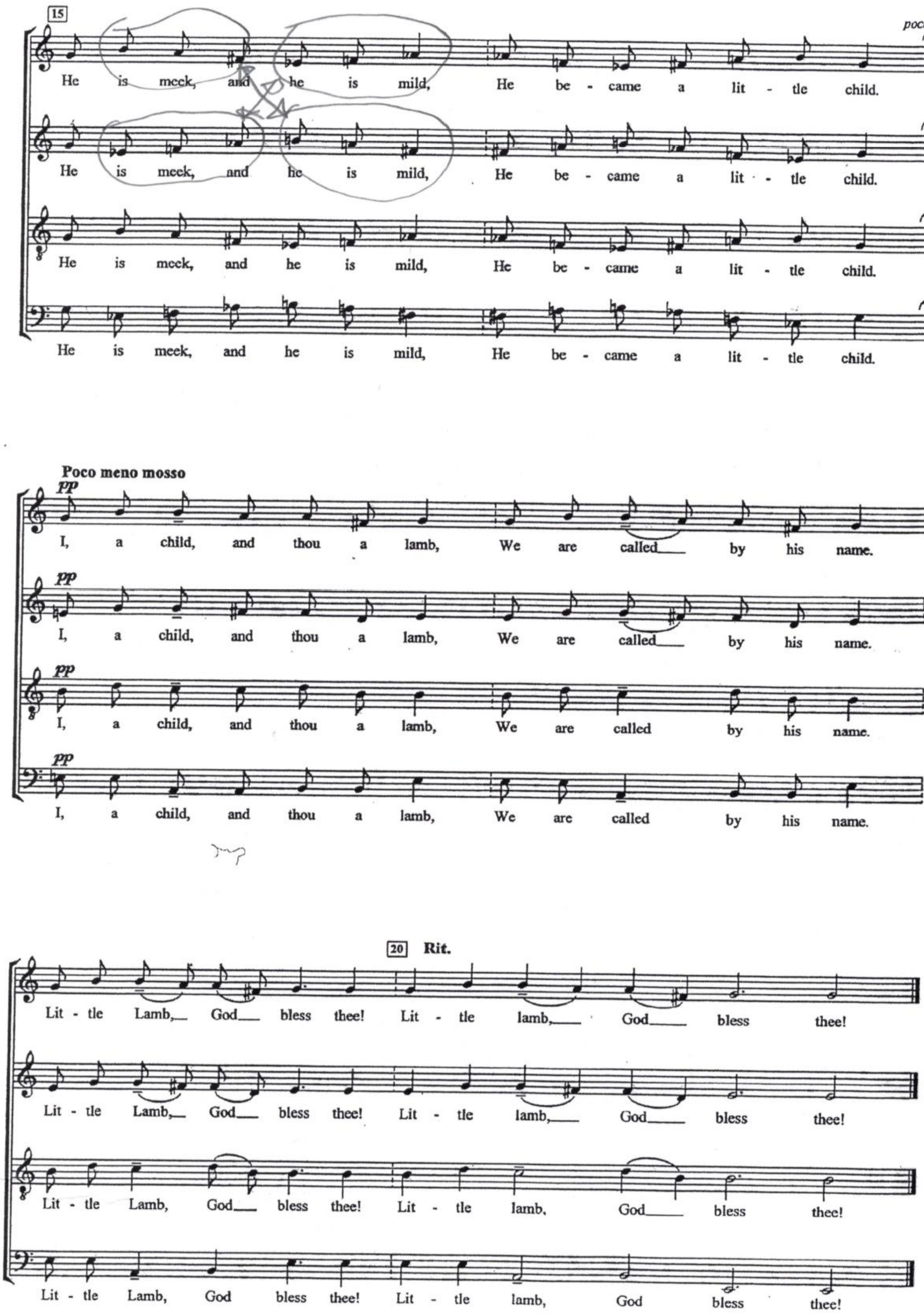
32 The Lamb

CD 3 track 10

John Tavener (b. 1944)
text: William Blake




pp
Gave thee such a ten - der voice, Mak - ing all the vales re - joice?
10
Lit - tle Lamb, who made thee? Dost thou know who made thee?
A tempo – moving forward
mp
Lit - tle Lamb, I'll tell thee, Lit - tle Lamb, I'll tell thee;
He is called by thy name, For he calls him - self a Lamb.


15
poco
He is meek, and he is mild, He be - came a lit - tle child.
He is meek, and he is mild, He be - came a lit - tle child.
He is meek, and he is mild, He be - came a lit - tle child.
He is meek, and he is mild, He be - came a lit - tle child.
Poco meno mosso
pp
I, a child, and thou a lamb, We are called by his name.
pp
I, a child, and thou a lamb, We are called by his name.
pp
I, a child, and thou a lamb, We are called by his name.
pp
I, a child, and thou a lamb, We are called by his name.
20 Rit.
Lit - tle Lamb, God bless thee! Lit - tle lamb, God bless thee!
Lit - tle Lamb, God bless thee! Lit - tle lamb, God bless thee!
Lit - tle Lamb, God bless thee! Lit - tle lamb, God bless thee!
Lit - tle Lamb, God bless thee! Lit - tle lamb, God bless thee!

7. Konsonans

Etter å ha gått gjennom samtlige musikkfag for musikklinja, finner jeg ingen referanse til konsonans/dissonans. Følgelig kan man som lærer la en elev gå gjennom alle tre årene på musikklinja uten å ha hørt om dette, og man har ikke brutt noen regler i forhold til læreplanen. Da jeg likevel velger å bruke noen sider på konsonans/dissonans er det fordi det vil overraske meg om videregående elever ikke blir introdusert for dette. Dessuten er denne bevisstgjøringen veldig nyttig blant annet i gehørtrening. Hvis man klarer å skille mellom konsonerende og dissonerende intervaller, er det mye lettere å identifisere et spesifikt intervall gjennom elimineringsmetoden.

Jeg har allerede skrevet en del om konsonans i denne oppgaven og antar at leseren har en forståelse av hva det er, og kunne videreformidle dette om noen hadde spurt. I dette kapittelet vil jeg se litt på hvilke svar man kan gi hvis eleven spør «Hvorfor er noen intervaller konsonerende, mens andre er dissonerende?» For meg er ikke «Fordi det er sånn», eller «Du hører jo at de og de intervallene er konsonerende, mens de og de er dissonerende» et fullverdig svar. Da kan du like gjerne svare «Hold kjeft og gjør leksene dine».

Finn Benestad (2004: 32) skriver at en tradisjonell mening av ordet konsonans er toner som klinger godt sammen, og dissonans blir følgelig toner som klinger dårlig sammen. Han påpeker imidlertid at dette ikke er en holdbar definisjon. Hva som klinger «bra» og «dårlig» er et subjektivt fenomen, og selv synes jeg ordene ro og spenning er bedre for å beskrive konsonans og dissonans. Forskjellige intervaller har dessuten blitt behandlet ulikt i forskjellige musikkstiler, og ikke minst tidsepoker. Generelt kan man si at jo lenger tilbake i historien man går, jo færre intervaller blir regnet som konsonerende. En inndeling jeg ofte har sett av musikkhistorien er utfra tersens status, og man kaller gjerne perioden fra ca. 1400-1900 for terstiden (Raude 2000: Dissonans). Dvs. at i denne perioden var tersen (og følgelig seksten) regnet som konsonans. I perioden før terstiden ble den regnet som dissonans, og i perioden etter ble også mer dissonerende intervaller behandlet konsonerende når det gjelder videreføring og oppløsning av dissonanser.

Benestad (Ibid: 32), gir følgende inndeling av konsonerende og dissonerende intervaller:

«*Konsonerende* intervaller er i følge tradisjonen:
a) rene primer, oktaver, kvarter og kvinter
b) store og små terser og sekster

> *Dissonerende* intervaller er i følge tradisjonen:
> a)store og små sekunder og septimer
> b)alle forstørrede og forminskede intervaller»

Denne inndelingen stemmer med det jeg lærte på videregående. Hvis vi ser på de konsonerende intervallene har Benestad i rubrikk a plassert de intervallene Pytagoras ville omtalt som konsonerende, mens i rubrikk b kommer de intervallene som Zarlino og Kepler ville legge til i inndelingen av konsonans og dissonans.

Det er verdt å merke seg at Benestad karakteriserer alle forstørrede og forminskede intervaller som dissonerende. Skal vi godta den påstanden, følger det at konsonans og dissonans må sees i en musikalsk kontekst. Isolert vil en forstørret kvint og en liten sekst klinge enharmonisk, mens utfra Benestads inndeling vil den ene være dissonerende og den andre konsonerende. Hvis vi tar utgangspunkt i dissonans/konsonans som spenning/ro, er det for meg liten tvil om at den musikalske konteksten har mye å si. *The Lamb*, som jeg analyserte i forrige kapittel, har hvert fall i A-delen en stor grad av dissonerende intervaller, men likevel opplever jeg ikke dissonansene her som spenningsfylte.

Hvis dissonans/konsonans kun kan la seg forklare utfra musikalsk kontekst er det vanskelig å si noe tilnærmet objektivt om hvorfor noen intervaller oppleves mer konsonerende enn andre. Vi står igjen med ørets dom som eneste forklaring. Dette vil avhenge mye av smak og musikalsk skolering, og jeg mener det er en lite tilfredsstillende argumentasjon.

Geir Vang (2003: 44-62) drøfter forskjellige konsonansteorier, og viser til Krumhansl og Bregman (Ibid: 46) som skiller mellom to typer konsonans (og dissonans). Musikalsk konsonans og tonal konsonans(Krumhansl)/psykoakustisk konsonans(Bregman). For begge er musikalsk konsonans den konsonansforståelsen som er knyttet til en musikalsk stil og kulturell kontekst, mens tonal/psykoakustisk konsonans er studiet av tonepar der man ønsker å unngå involvering av musikalsk stil, kulturell kontekst eller andre «subjektive variabler». Ved å utelate de musikalske/subjektive elementene er det lettere å si noe generelt om konsonans. Jeg velger å bruke Bergmans begrep psykoakustisk konsonans/dissonans videre. Isteden for å skille intervallene i to adskilte grupper, plasserer han samklanger på en skala fra «veldig smul [smooth] (psykoakustisk konsonans) til veldig ru [rough] (psykoakustisk dissonans) (Vang: 2003: 46).» Skal man snakke om konsonans/dissonans uavhengig av tid og kontekst er dette en mye bedre tilnærming enn vanntette skott.

Det finnes mange teorier og undersøkelser om konsonans. Denne oppgaven er ikke omfattende nok til å gå gjennom disse, men jeg vil presentere noen tabeller som viser intervallene rangert utfra hvor konsonerende/dissonerende de er. Jeg vil legge til noen korte kommentarer der det er nødvendig.

Interval	Frequency ratio	Largest number occurring in ratio
Unison	1 : 1	1
Octave	2 : 1	2
Fifth	3 : 2	3
Fourth	4 : 3	4
Major Third	5 : 4	5
Major Sixth	5 : 3	5
Minor Third	6 : 5	6
Minor Sixth	8 : 5	8
Second	9 : 8	9

Figur 7.1: Tabellen er hentet fra Sir James Jeans (1968: 154), og er rangert fra mest til minst konsonerende utfra hvor lave tall intervallenes brøker kan uttrykkes med. De neste intervallene på listen ville vært stor septim (15:8), liten sekund (16:15) og til slutt tritonus (45:32)[13].

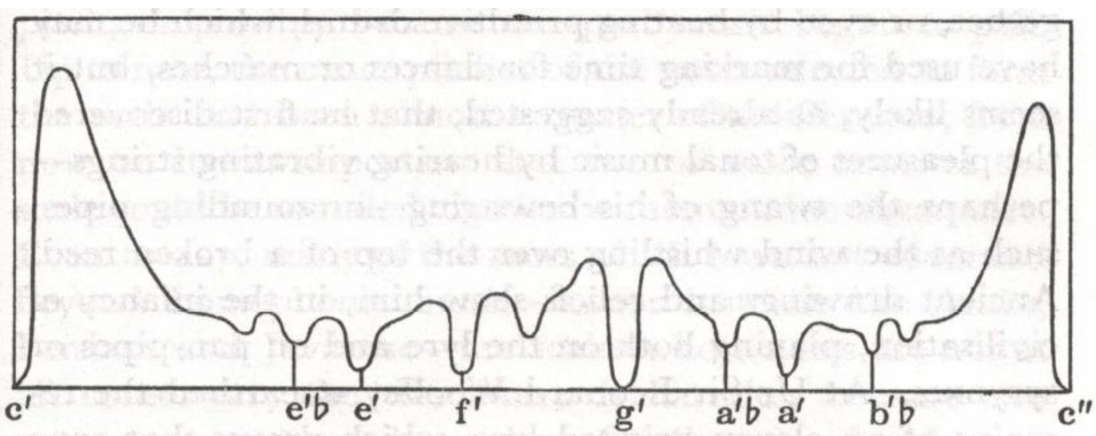
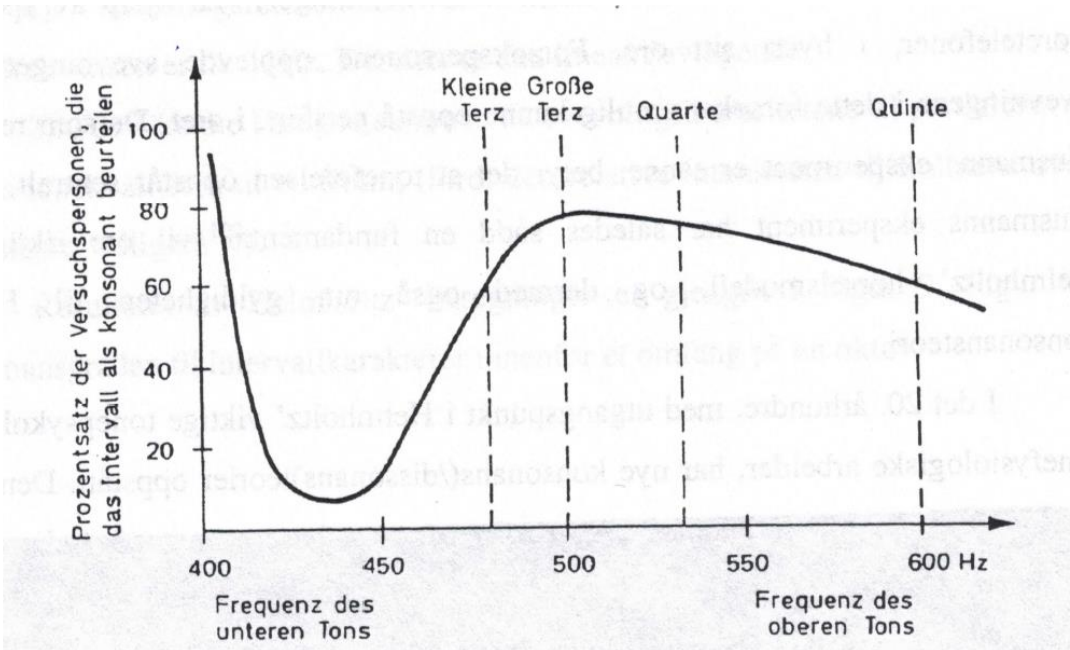


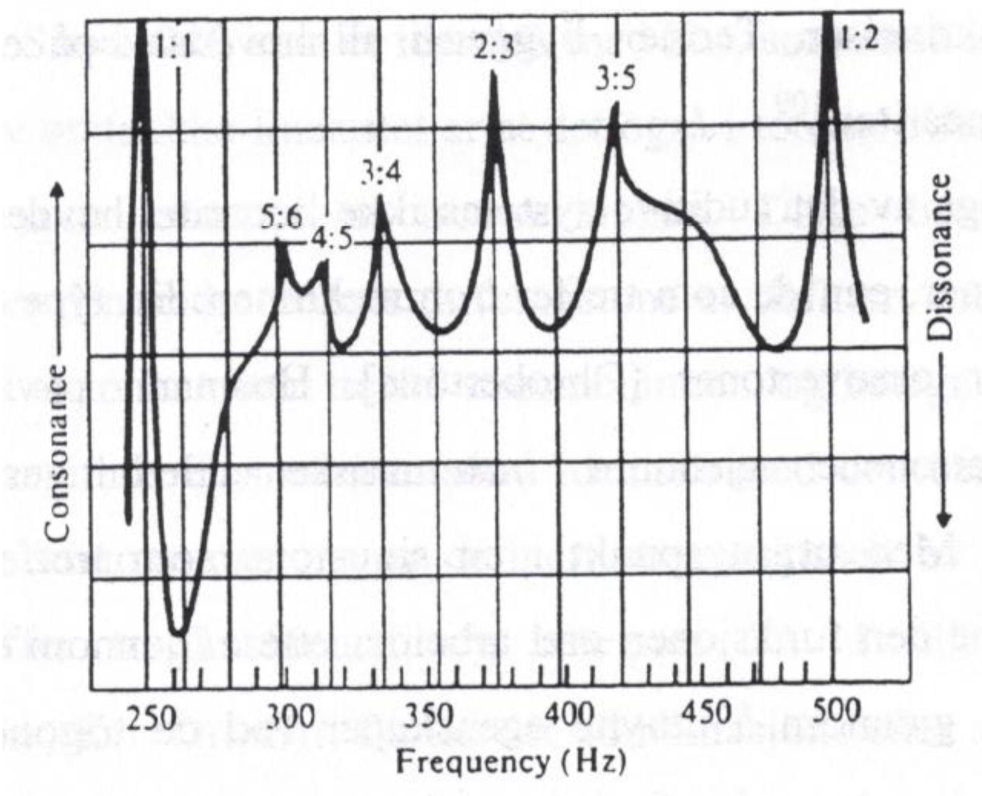
Fig. 53. The degree of dissonance, as calculated by Helmholtz, of two violin tones sounding together. The lower tone c′ sounds continuously, while the upper tone moves gradually from c′ to c″.

Figur 7.2: Bildet er hentet fra Sir James Jeans (1968:159).

[13] Dette tallforholdet refererer til den forstørrede kvarten mellom fjerde og syvende trinn i en renstemt durskala.



Figur 7.3a



Figur 7.3b: Disse to bildene er hentet fra Geir Vang (2003: 54-55), og viser forskning gjort av Plomp & Levelts. Det første viser til avstanden mellom to sinustoner og graden av behag (i vår sammenheng konsonans) basert på noen forsøkspersoner uten musikalsk skolering. Det andre viser forskernes forventede grad av konsonans mellom to komplekse toner.

Intervall:	Oktav	Kvint	Kvart	St. Ters	Tritonus	St. Sek
Prosent:	76 %	62 %	36 %	30 %	15 %	9 %

Figur 7.4: Tabellen er hentet fra Geir Vang (2003: 61) og viser til en undersøkelse der uskolerte forsøkspersoner ble utsatt for to toner klingene sammen. Den nederste raden viser hvor stor prosentandel av forsøkspersonene som mente de bare hadde hørt én tone når de forskjellige intervallene ble spilt. Følgelig er det rimelig å anta at intervallene er rangert fra mest til minst konsonerende.

Selv om resultatene avviker noe på de ulike figurene, er det såpass stor likhet at det bør være mulig å si noe om en generell oppfatning av hvilke intervaller som er mest konsonerende. Et poeng som bør nevnes er at konsonans/dissonans mellom to toner vil ikke nødvendigvis oppleves likt for ulik instrumentering, eller med to sinustoner kontra to komplekse toner. Dette viser tabellene til Plomp og Levelts. Sir James Jeans (1968: 153) belyser også denne forskjellen og viser til et eksperiment der man lot to sinustoner klinge sammen, den ene med en konstant tone (261 hz) mens den andre starter på 262hz og øker gradvis. De starter på tilnærmet samme frekvens, noe som følgelig oppleves behagelig for øret. Når den ene tonen gradvis stiger oppleves tonen mer og mer ubehagelig, til den nådde maks ubehag der avstanden var omtrent 23hz, altså litt større enn en liten sekund. Etter dette roet ubehaget seg igjen, men ikke betydelig. Jeans skriver at fra avstanden mellom tonene var stor nok til at vi ikke lenger opplever beats[14] var ubehagsnivået ganske stabilt frem til det forsvinner ved oktaven. Derimot når det samme eksperiment blir gjort med to fiolinstrenger, som er komplekse toner, blir opplevelsen annerledes. Nå er opplevelsen av ubehag mye lavere ved stor ters og kvart, og det forsvinner helt ved kvinten og oktaven. Likheten med alle disse intervallene er at de kan uttrykkes ved relativt enkle brøker.

Dette er den første forklaringen jeg vil trekke frem på hvorfor noen intervaller oppleves mer konsonerende enn andre. Det virker som de intervallene som oppleves mest konsonerende, er de som kan uttrykkes med de enkleste brøkene. James Jeans (1968: 154) skriver at; «It is found to be a quite general law that two tones sound well together when the ratio of their

[14] Beats oppstår mellom to toner som ligger svært tett. Albegtsen og Skagestein (2007:125) forklarer at dette ikke vil oppleves som to toner, men som en tone hvor amplituden varierer. Dette oppleves som en «svinging på tonen».

frequencies can be epressed by the use of small numbers, and the smaller the numbers the better is the consonance. » Jeg vil imidlertid legge til at en god tilnærmingsverdi vil hovedsakelig oppleves lik. Intervallene vi finner i den tempererte skalaen er alle irrasjonelle, men gode tilnærmingsverdier til de rene intervallene med tallforholdene vi finner hos Sir James Jeans. De gir i hovedsak samme konsonans/dissonansopplevelse som sine renstemte ekvivalenter. En annen forklaring som er tett knyttet opp til dette er forholdet mellom overtonene. Hvis vi tar utgangpunkt i Jeans sin forklaring om at toner som ligger svært tett klinger ubehagelig pga. «beats», taler dette for at små sekunder dissonerer. Kort sagt er toner som ligger veldig tett ubehagelig. Dette forklarer derimot ikke hvorfor tritonusen oppleves så dissonerende før vi tar en titt på overtonerekka til de respektive toner. Mens for eksempel en C og en F# ligger langt nok fra hverandre til ikke å skape noen beats, vil C sin fjerde overtone som er c_1, ligge svært tett til F# sin tredje overtone som er $c\#_1$. Dette er utgangspunktet for Helmholtz sin teori om konsonans og dissonans (Jeans 1968: 157). Et annet poeng som er verdt å trekke frem her, som også forklarer hvorfor enkle brøker gir konsonerende intervaller, er at jo enklere brøk, jo flere felles overtoner finner vi i tonenes respektive overtonerekker. Hvis vi tar utgangspunkt i en tone med frekvens F, vil dens overtoner ha frekvensene $2F, 3F, 4F, 5F$ kort sagt alle heltallige multipla av F. Kobler vi den sammen med en tone som ligger en kvint over vil den ha grunnfrekvens $\frac{3}{2}F$. Dens overtoner vil være $2*\frac{3}{2}F = 3F, 3*\frac{3}{2}F, 4*\frac{3}{2}F = 6F, 5*\frac{3}{2}F, 6*\frac{3}{2}F = 9F$ osv. Vi ser av systemet at annenhver overtone i kvinten, også finnes i overtonerekka til grunntonen. La oss teste en tese med dette utgangspunktet. Hvor går grensen mellom konsonans og dissonans? Hvis vi bruker Benestads inndeling av intervaller er den lille seksten det konsonerende intervallet med «styggest brøk» 8/5, og den store sekunden den dissonansen med «penest brøk» 9/8, kan vi sjekke hvor ofte overtonene til disse rekkene samsvarer med Grunnfrekvensen F. Overtonene til sekunden vil kunne skrives som $m*\frac{9}{8}F$, og overtonene til seksten som $n*\frac{8}{5}F$. m og n er positive hele tall. For at en overtone skal samsvare med grunnfrekvensens overtoner, må de kunne uttrykkes som et heltallig multiplum av F. For at dette skal være tilfelle for seksten må $n*\frac{8}{5}$ være et helt tall, ergo må n være delelig med 5. Dette er tilfelle for hver femte overtone. For sekunden må m være delelig med 8 for at $m*\frac{9}{8}$ skal være et helt tall. Dette er tilfelle for hver åttende overtone. Generelt kan vi si at brøkens nevner forteller oss hvor stor andel overtoner som samsvarer.

For meg er ikke dette nødvendigvis en universell sannhet for hvilke toner som er mest konsonerende, men jeg syns det er en god kandidat til en tilnærmet objektiv forklaring. Overtoner finnes i alle naturskapte toner og de har sin faste matematiske oppbygning. Hvordan overtoner samsvarer, har tydeligvis en sammenheng med hvor konsonerende vi opplever klangen, og dette kan ikke være tilfeldig.

8. Rytme. Musikkens tidsdimensjon

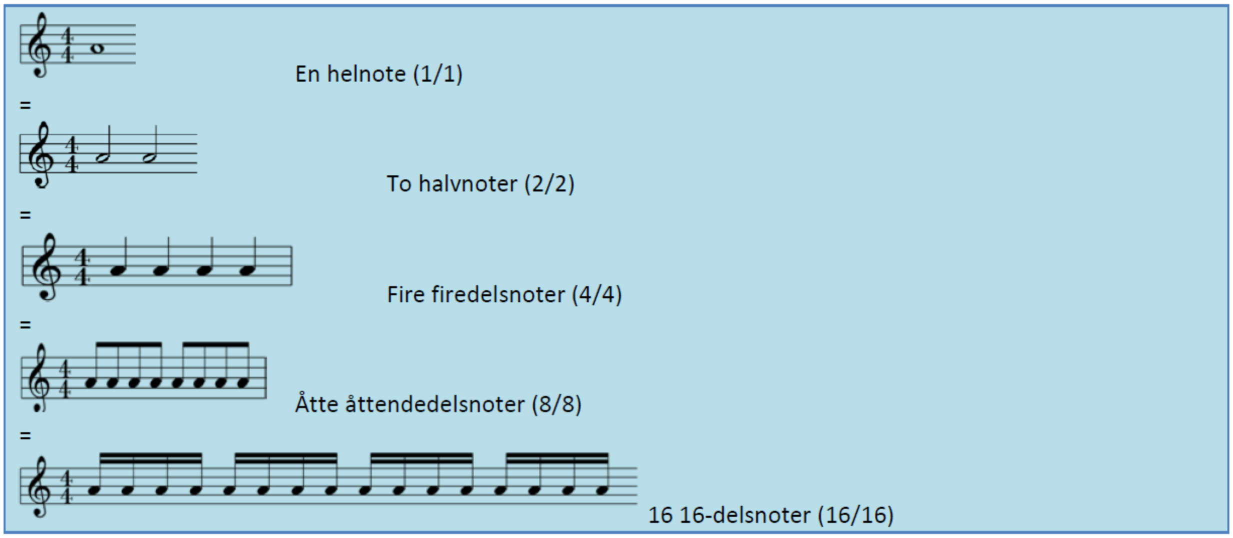
Hittil har jeg i denne oppgaven primært konsentrert meg om musikalske fenomener som spenner seg ut i tonehøydens dimensjon. Selv om rytme har vært berørt, har ikke dette vært i fokus. Finn Benestad (2004: 99) definerer rytme som *en ordnet rekke av skiftende impulser*. Denne definisjonen kan lett knyttes til taktarters inndeling av tung/lett osv., men strengt talt trenger ikke rytmefenomenet begrenses til dette. Slik jeg forstår det er alle impulser i musikken som utspiller seg i tid inkludert i denne definisjonen. Ergo har all musikk rytme, og ergo inngår rytme i alle musikkfagene på videregående. Grunnleggende rytmelære er kanskje særlig knyttet til faget anvendt musikklære der vi kan lese at elevens skal kunne: «beherske noteskrift, besifringsnotasjon og vanlige musikkuttrykk» og «høre, skrive og synge enkle melodier og rytmer(Internettkilde6: kompetansemål).» Rytmetrening er også et gjennomgående fenomen i gehørtrening, og matematikken kan ofte være til hjelp.

Av all litteratur jeg har lest om musikk og matematikk er det overraskende lite som er skrevet om rytme. Jeg har faktisk til gode å finne en eneste bok som setter av et kapittel til å fokusere på denne siden av musikken. Derfor vil jeg i dette kapittelet i større grad ta utgangspunkt i personlige refleksjoner, samt vise til hvordan matematikken er et hjelpemiddel for arbeid med rytme enn å vise til hva som er skrevet om fenomenet. Å redusere rytmefenomenet til ren matematikk er ikke for meg et mål, men en matematisk tilnærming til rytme kan være et godt hjelpemiddel for å få rytmefigurer nøyaktige. Hvis man i etterkant velger å gjøre rytmen noe friere vil det da være som et bevisst musikalsk virkemiddel, og ikke fordi man ikke klarer å spille jevnt.

8.1 Noteverdier

Sannsynligvis vil mye informasjon i dette delkapittelet være kjent for leseren. Jeg vil derimot ta en mer matematisk innfallsvinkel enn kanskje vanlig.

I vår tradisjonelle notasjon noteres rytmer med forskjellige noteverdier. Sætre et al. (2010: 16) skriver at notelengde tar utgangspunkt i helnoten, og gir denne tabellen for forholdet mellom noteverdier:

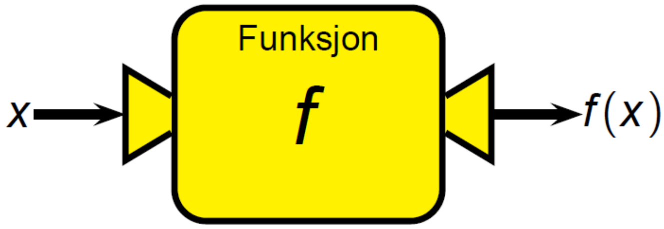


Figur 8.1: Noteverdier.

En hver noteverdi har sin respektive pauseverdi hvor samme inndeling gjelder.
Her ser vi flere matematiske elementer. For det første er forholdet mellom notenes lengde ikke tilfeldig, men en halvering for hver nye verdi. En hel=to halve=fire firedeler osv. Dessuten er noteverdienes navn hentet fra matematikkens brøkverden. Hel, halv, firedel, åttedel osv.. Dette er kanskje åpenbart for alle lesere av denne oppgaven. Kanskje er dette forklaringen på at det er skrevet lite om rytme og matematikk. Det kan virke for åpenbart for en musikkmatematiker.

Denne inndelingen av noteverdier er alene ganske begrensende siden den reduserer våre muligheter for å oppgi en eksakt noteverdi til x-antall halveringer av helnoten, eller summen av en sammensetning av disse tonene. F.eks. kan vi binde sammen tre åttedeler og få en noteverdi som ligger mellom halvnoten og firedelen. Imidlertid kan vi ikke oppnå noteverdi hvis lengde er 1/3 av en firedelsnote. Samme gjelder noteverdier hvis lenge er 1/5, 1/7, 1/9 og faktisk alle versjoner av 1/n der n ikke kan skrives som en toerpotens. Det finnes løsning på dette problemet; vi kjenner det som trioler, kvintoler osv.

Jeg vil tilnærme meg inndelingen av noteverdier fra et matematisk ståsted, med utgangspunkt i funksjonsbegrepet. Hans Jakob Rivertz (2011: 3) gir følgende definisjon på en matematisk funksjon: «en **funksjon** er en regel *f* som til et hvert tall i **definisjonsmengden** angir et entydig tall i **verdimengden.**» Han viser også til dette bildet for å illustrere.



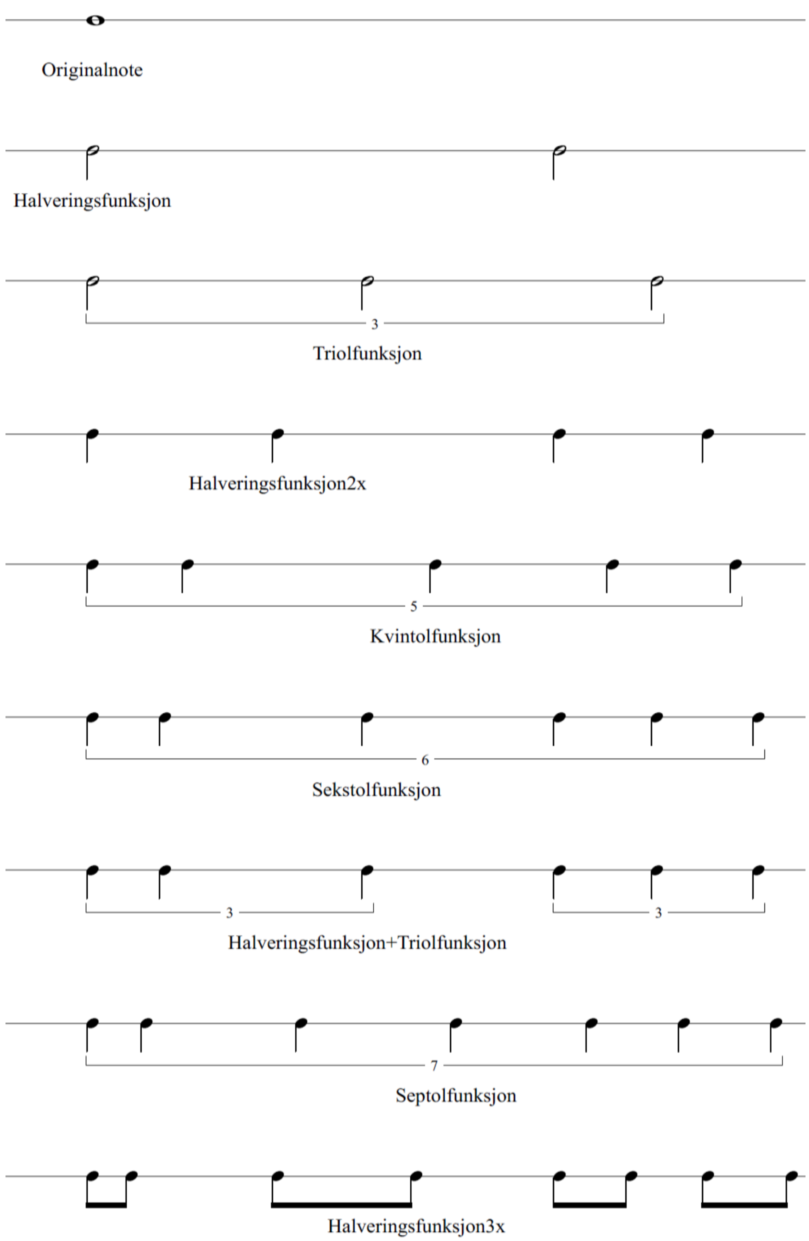
Figur 8.2: Illustrasjon av en funksjon. [15]

Rivertz definisjon begrenser seg til tall, men prinsippet kan med enkelhet utvides. Vi kan tenke oss en funksjon som en regel/maskin hvor vi putter inn en eller annen form for data, f.eks. en noteverdi og funksjonen gir oss en entydig output. Alle noteverdier har en matematisk regel/forhold til helnoten, og vi kan følgelig tenke oss «skapelsen» av noteverdier som en funksjon.

La oss gjøre et tankeeksperiment der vi tar utgangspunkt i at vi kun har en noteverdi til rådighet: Helnoten. Vi skal skape nye noteverdier. Vi kan være relativt frie, men vi er tvunget til å uttrykke det vi gjør som en matematisk funksjon eller summere de noteverdiene vi allerede har til rådighet. Standardfunksjonen vi har for skapelsen av noteverdier kan vi kalle *halveringsfunksjonen.* Vi kan tenke oss at den tar vår input og deler den i to like store deler. Putter vi inn en helnote, får vi ut to halvnoter. Nå har vi en ny noteverdi, halvnoten, skapt av å behandle helnoten gjennom *halveringsfunksjonen*. Vi kan nå putte vår nye noteverdi gjennom *halveringsfunksjonen* og få to firedeler. Denne prosessen kan gjentas så mange ganger vi vil med stadig nye noteverdier som resultat. Imidlertid har vi av og til behov for å gjøre noe annet med en noteverdi enn å halvere den. La oss tenke at vi har behov for en noteverdi som er en tredjedel av en firedelsnote. I så fall trenger vi en ny funksjon. Jeg velger å kalle den *triolfunksjonen,* hvis regel er at den deler en gitt input i tre like deler. Vi kan lage andre liknende funksjoner. *kvintolfunksjonen* deler en note i fem like deler, og *septolfunksjonen* i syv like deler. Likheten med alle disse funksjonene er at de deler en noteverdi i x-antall like store deler. En annen likhet er at inputen i praksis vil være en helnote, eller en noteverdi skapt ved kun å bruke *halveringsfunksjonen.* I teorien kan vi kjøre en helnote først gjennom *kvintolfunksjonen,* for så å kjøre resultatet gjennom *triolfunksjonen.* Resultatet blir en noteverdi som er 1/15 av vårt

[15] Rivertz (2011: 3)

utgangspunkt. Hadde vi notert dette med noter ville vi imidlertid notert det som en helnote kjørt gjennom *15-funksjonen*, altså tallet 15 over noteverdiene. Ikke som trioler inni en kvintolramme. Følgende bilde viser forskjellig oppdeling av helnoten med bruk av forskjellige funksjoner. Merk at sekstolfunksjon=halveringsfunksjon+triolfunksjon.

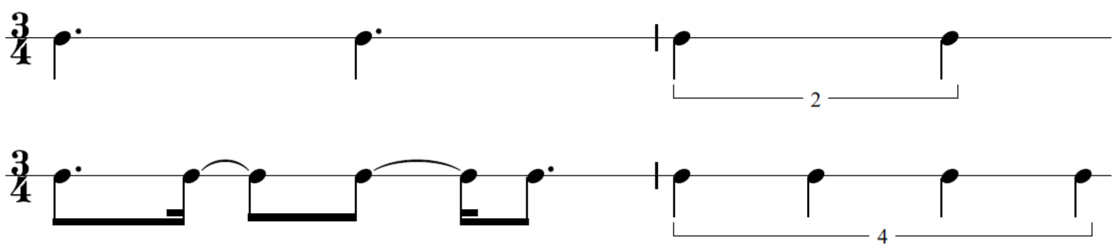


Figur 8.3: En helnote behandlet gjennom ulike funksjoner.

Med de funksjonene jeg har presentert har vi altså mulighet til å skape nye noteverdier ved å ta utgangspunkt i en eksisterende noteverdi, og dele den i x antall like deler. Vi har også mulighet til å summere eksisterende noteverdier ved bruk av bindebuer. Det eneste vi trenger er en utgangsnote, som er helnoten. Dette er hvordan vårt tradisjonelle notesystem i praksis er bygd opp. Et spørsmål som er naturlig å stille seg da er: Kan vi skape en hvilken som helst ønsket noteverdi ved bruk av de reglene jeg nå har definert? For å svare på dette må vi over på det matematiske og mer teoretiske planet. I praksis har vi mulighet til å uttrykke noteverdier med stor nøyaktighet på denne måten. Dessuten er det en begrensing i hva hvor nøyaktige verdier vi faktisk klarer å spille. Imidlertid er vi, teoretisk sett, begrenset til alle (positive) rasjonelle tall. Med rasjonelle tall menes alle tall som kan uttrykkes med en brøk der både teller og nevner er et helt tall. Hvis vi antar at helnoten har verdi 1, halvnoten verdi 1/2 osv. er det lett å tenke oss til at dette må være sant. Vi kan dele helnoten i så mange like deler vi vil, og kan følgelig lage noter med verdier tilsvarende en hver stambrøk (en brøk hvor telleren er 1). F.eks. kan vi dele en helnote i 364 deler og få en note hvis lengde er 1/364. Vi har lov til å summere sammen så mange noter vi vil, og kan følgelig utfra denne noten lage en hver notelengde hvis nevner er 364, f.eks. 255/364. Imidlertid finnes det uendelig mange tall som ikke lar seg uttrykke som brøk. De såkalte irrasjonelle tallene omfatter de fleste kvadratrøttene, samt noen kjente tall som π og e. Hvis man for eksempel hadde ønsket å skrive et stykke der vi lar en stemme ha helnoter og en annen stemme noter med verdi π (3,1415osv…) ville dette vært umulig å notere med tradisjonell notasjon. En annen observasjon er at alle rasjonelle tall vil hvis de summeres nok antall ganger med seg selv (eller ganges med et helt tall) bli et helt tall. Dette vil i praksis si at hvis vi velger oss to ulike noteverdier/pulser, starter dem samtidig og lar dem gå uendelig vil de på et eller annet punkt samsvare igjen. Dette er ikke gjeldende for irrasjonelle tall. Denne observasjonen er mest av teoretisk interesse, da jeg mener man kan uttrykke noteverdier nøyaktig nok til all praktisk bruk. Likevel er det interessant å se at vårt notesystem faktisk er underkastet matematikkens lover.

Med nevnte funksjoner har vi mulighet til å skape alle rasjonelle noteverdier. Imidlertid har vi noen andre funksjoner som også brukes. Disse er strengt talt ikke nødvendige, men til hjelp for enklere notasjon, og for å vise betoning. Den viktigste er kanskje *punkteringsfunksjonen* som gir en noteverdi en . etter seg. I praksis gjør denne funksjonen en hver noteverdi halvannen

gang opprinnelig verdi, altså noteverdi+halv noteverdi. Hvis inputen allerede er en note med en eller flere punkteringer vil funksjonen legge til halve verdien av siste punkt. *Duolfunksjonen* og *kvartolfunksjonen* er andre eksempler på funksjoner vi bruker på noter. *Duolfunksjonen* tar en input på tre like noter, og gir en output bestående av to noter hvis lengde til sammen er like lang som de tre notene som puttes inn. *Kvartolfunksjonen* fungerer på samme måte, men gir oss fire noter output for en input på tre. I praksis kan vi få til samme noteverdier ved bruk av punktering så bruk av duoler og kvartoler sier mer om betoning enn noteverdi.
Bildet viser samme noteverdier notert som punkterte noter og som duoler/kvartoler.



Figur 8.4: Ulike noteringsmåter for samme noteverdier.

8.2 Taktarter

Finn Benestad (2004: 95) åpner sitt kapittel om takt på følgende måte:

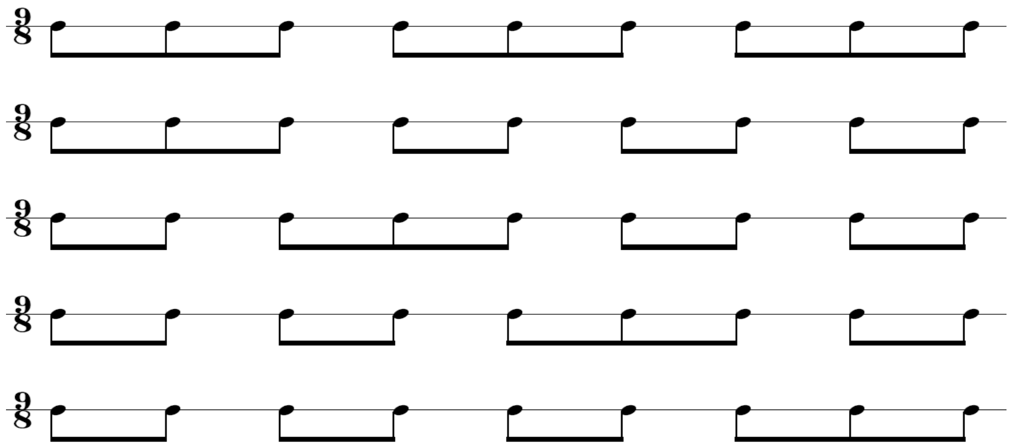
> «Takt (fra gresk *tatto* eller *tasso*= stille opp, ordne på geledd) betyr inndeling av et musikkstykke i like lange tidsavsnitt, *takter*, som er atskilt fra hverandre ved loddrette streker, *taktstreker*.
>
> Taktangivelsen (taktsignaturen) settes som en matematisk brøk i begynnelsen av musikkstykket etter de faste fortegnene: 2/4, 3/4, 6/8 osv. *Nevneren* angir taktslagets (taktdelens) noteverdi (telleenheten), mens *telleren* sier hvor mange taktslag det er i hver takt. I 3/4 er firedelen taktslag (telle-enhet), og hver takt inneholder til sammen verdien av tre firedeler.»

Dette er ikke hentet fra en bok om musikk og matematikk, men en om grunnleggende musikklære. Likevel tyr Benestad til matematiske begreper. For det er nettopp grunnlaget for beskrivelsen av takt: En brøk. Selv om nevneren i taktbrøken angir telleenheten og telleren hvor mange telleenheter hver takt har, er det ikke alltid en telleenhet tilsvarer et slag. I praksis har 6/8-takt som regel to taktslag, mens 9/8 kan både ha tre og fire taktslag utfra hvordan man underdeler. Generelt handler taktart om å ramme inn pulsslag med forskjellig betoningsmønster. Som regel betones det i grupper på to (tung-lett-tung-lett), eller grupper på tre (tung-lett-lett). Nå skal det sies at alle tunge slag ikke nødvendigvis er like tunge, og alle lette slag ikke like lette. Eneren i takter er generelt den tyngste, og i en 4/4 takt er ofte fjerde slaget noe lettere enn andre slaget selv om begge er ubetonte.

Det er ikke bare matematikken som kan være en hjelp for musikken. Musikken kan også være en hjelp for matematikken, og taktart er et eksempel på dette. Den viser praktisk bruk av brøk, dessuten hvordan et tall kan skrives på ulike måter som summen av mindre tall. Tallet 10 kan for eksempel skrives som $7 + 3$, men også som $5 + 5, 2 + 3 + 3 + 2$ osv. Jeg vil vise hvordan dette viser seg i taktarter gjennom et tankeeksperiment. I praksis kan vi si at en takts betoningsmønster består av grupper på to (tung-lett), eller tre (tung-lett-lett). La oss nå anta at kun de betonte pulsslagene i en takt er regnet som et taktslag. Altså vil 3/4 kun ha ett taktslag for eksempel. Generelt kan vi si at en takt har $2x + 3y$ pulsslag, der x står for antall toergrupper og y for antall treergrupper. Her har nevnerens verdi egentlig ingenting å si. Jeg velger å bruke åttedel i nevneren. 2/8, 3/8, og 4/8 er taktarter med kun et betoningsmønster, siden det er kun en måte man kan få tallene 2, 3 og 4 ved å summere toergrupper og treergrupper. Tallet 5 kan derimot skrives som 3+2 eller som 2+3. Følgelig har 5/8-takt to mulige betoningsmønster. 6 kan skrives som 3+3, eller som 2+2+2. I praksis så er den vanligste betoningen av 6/8-takt 3+3 siden 3/4-takt dekker 2+2+2varianten. En annen bevisstgjøring her at selv om brøkene 6/8 og 3/4 er «like store», kan de bety forskjellige ting.

6/8-takt er et eksempel på en taktart som ikke bare har forskjellige betoningsmønstre, men ulike antall slag i takten. 9/8 kan ha tre slag i takten (3+3+3), eller fire slag (2+2+2+3 i forskjellige mønstre). Jo høyere tall, dess flere kombinasjoner byr det seg. 12/8-takt er den første takten som har tre forskjellige varianter på antall taktslag, nemlig 4 (3+3+3+3), 5 (3+3+2+2+2) eller 6 (2+2+2+2+2+2). I teorien er det ikke noe begrensning på hvor mange åttedeler en takt kan ha, men i praksis vil det være en begrensning i hva vi opplever som en hel takt. Blir en takt for lang vil vi praksis oppleve den som en sammensetning av flere mindre takter. Dette går motsatt vei også. I en hurtig 3/8-takt vil man ofte oppleve to og to takter til sammen danner en «stor takt» med tanke på melodiens frasering osv.

Man skal ikke ha veldig mange pulsslag i en takt til før det byr seg mange potensielle betoningsmønstre. Dette er alternativene for 9/8-takt.



Figur 8.5: Ulike inndelinger av 9-takt.

Følgende tabell viser antall mulige varianter for antall taktslag og betoningsmønster for de første 14 taktartene, gitt de rammene jeg har definert.

Taktart	Varianter antall taktslag	Antall betoningsmønster
2/8	1	1
3/8	1	1
4/8	1	1
5/8	1	2
6/8	2	2
7/8	1	3
8/8	2	4
9/8	2	5
10/8	2	7
11/8	2	9
12/8	3	12
13/8	2	16
14/8	3	21

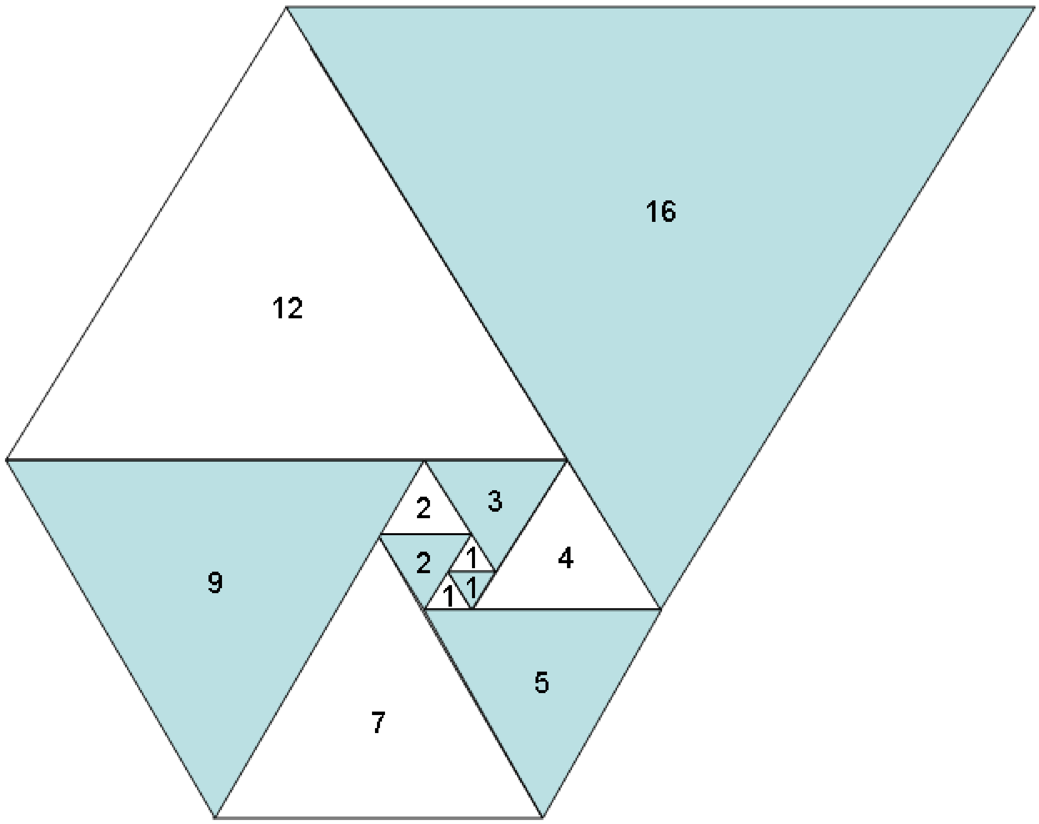
Figur 8.6: Antall varianter taktslag og betoningsmønster for 2-takt til 14-takt.

Ved første øyekast er det tydelig at jo høyere tall, jo flere betoningsmuligheter. Det ser også ut som vi generelt får flere mulige varianter av antall taktslag. Derimot er det interessant å merke seg at mens 6/8 har to mulige taktslagsvarianter har 7/8 bare en. Fra 8/8 har derimot alle taktene to varianter, helt frem til 12/8 som får tre. Igjen er det verdt å merke seg at 13/8 bare har to, før 14/8 har tre igjen. Hvorfor er det slik?

Forklaringen ligger i at 2+2+2=3+3=6. Dette får vi først merke ved 6/8-takt. Dette kan brukes til å forklare en generell utvikling. For hver gruppe på seks noter, kan vi gruppere dem som 2+2+2 som gir oss tre taktslag, eller som 3+3 som gir oss to taktslag. Vi kan tenke at for å øke taktarten med en åttedel kan vi gjøre om en toergruppe i foregående takt til en treergruppe, eller en treergruppe om til to toergrupper. Fra 6/8 til 7/8 medfører imidlertid dette det samme. 3+3 blir til 3+2+2, og 2+2+2 blir til 2+2+3. De to variantene fra 6/8 smelter i praksis sammen. I neste ledd deler de seg derimot da 2+2+3 kan økes ved å gjøre en toergruppe til en treergruppe, eller ved å splitte opp treergruppen til to toergrupper. Siden $12 = 2 * 6$ får vi samme runden når vi kommer til 12/8. Mulighet for å velge to varianter av seks nye noter. Samme prinsipp forklarer også hvorfor vi «går et hakk tilbake» på 13/8. Dette systemet vil gå videre. 18/8 vil være første taktart med fire varianter av antall taktslag, mens 19/8 bare vil ha tre muligheter. 20/8 vil ha 4 muligheter igjen.

Hva så med antall betoningsmønster? Er det mulig å finne noe system her, eller kan vi på det beste si at «jo høyere tall jo flere betoningsmønster?» La oss gå vekk fra musikkens verden og se på antall betoningsmønster som en isolert tallrekke. Den vil se slik ut:
1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21. Det ser ut som vi en generell regel vil være at jo lenger vi kommer i rekken, jo raskere øker den. Jeg vil anta at de to neste tallene i rekken vil være 28 og 37. Før jeg forklarer min påstand, vil jeg ta en liten digresjon innom en veldig kjent tallrekke, nemlig fibonacci-tallrekken. Starten på rekken er som følger: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Neste ledd i rekken er alltid summen av de to foregående leddene. Hvis vi definerer F_n som verdien F til det n-te leddet i rekken vil vi få følgene formel for F_n: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Vår tallrekke er ikke fibonacci-rekken, men den kan synes å ha liknende egenskaper. Hvert nye tall er nemlig ikke en sum av de to foregående tallene, men derimot av de to foregående tallene til det foregående tallet. Matematisk vil det si at $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$. Følgelig vil neste ledd i rekken være 12+16= 28, og

neste ledd etter det vil være 16+21=37. Denne tallrekken kalles forøvrig Padovan-rekken (Padovan sequence 2013), og kan også vises geometrisk ved bruk av likesidede trekanter.



Figur 8.7: Padovan-rekken fremstilt geometrisk. [16]

Denne spiralen av trekanter viser oss at P_n også kan uttrykkes som $P_n = P_{n-1} + P_{n-5}$

Tallene i tabellen har jeg telt meg frem til, og er sikker på at er riktig, men kan jeg være sikker på at det systemet jeg har foreslått her vil fortsette i all evighet? Kan det være at jeg bare har hatt flaks? Jeg har valgt et ganske stort utvalg av tallrekken, så det er en god mulighet for at jeg har antatt korrekt. Det vil likevel være dumt å utelukke muligheten for at det er et annet system som ligger til grunn, og som ikke viser seg med kun de 14 første leddene. Er det mulig å gi et generelt bevis for at min antakelse er korrekt?

Min prosess for å komme frem til et svar er for lang til å sette inn her[17], og jeg nøyer meg med kortversjonen. Det første jeg gjør er å finne en formel for T antall varianter taktslag vi får

[16] Bildet er hentet fra http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cd/Padovan_triangles_%281%29.png

for en takt med P pulsslag. Dette er nemlig det samme som antall betoningsmønster hvis vi ikke tar rekkefølge i betraktning. Dvs. at i denne sammenhengen vil 3+2 og 2+3 være det samme. Ved bruk av den diofantiske[18] likningen $3x + 2y = P$ får vi formelen $T = \left\lfloor \frac{P}{2} \right\rfloor - \left\lceil \frac{P}{3} \right\rceil + 1$. [19] Denne formelen viser også at syvtakt har færre betoningsmønster enn sekstakt. t står for antall taktslag i en gitt variant av P pulsslag, og kan skrive slik: $t = x + y$.

Det neste jeg gjorde var å se på kombinatorikk generelt. Dette fikk meg inn på tanken om hvordan antall mulige kombinasjoner i stor grad utvikler seg som en sum av tidligere utfall. La oss ta utgangspunkt i en takt med P pulsslag. Den vil ha T varianter for antall taktslag og B antall betoningsmønster. Vi kaller takten for $P/8$ siden jeg har brukt åttedeler som pulsverdi. Jeg vet ikke hvor mange betoningsmønster $P/8$ har, men jeg velger å rangere dem i to grupper. Gruppe en $G1$ rommer alle betoningsmønster hvor førsteslaget er en treergruppe $(x \ldots)$. Gruppe to $G2$ rommer alle betoningsmønster hvor førsteslaget er en toergruppe $(y \ldots)$. Siden førsteslaget enten må være en treergruppe eller en toergruppe kan vi konkludere med at $B_p = G1 + G2$. Hvis jeg klarer å finne et uttrykk for $G1$ og $G2$ er jeg i mål. Dette er ganske enkelt. Hvis jeg insisterer på at førsteslaget er en treergruppe står jeg egentlig igjen med et bestemt førsteslag +alle varianter i taktarten med tre pulsslag færre, siden tre pulsslag allerede er bestemt/låst. Dvs: $G1 = B_{p-3}$. Tilsvarende kan vi gjøre for gruppe to. Her er det to pulsslag som er låst, og vi står i praksis igjen med alle mulige variasjoner fra en taktart med to pulsslag færre enn $P/8$. Følgelig kan vi skrive at $G2 = B_{p-2}$. Vi setter dette inn i vår opprinnelige formel og får: $B_p = B_{p-3} + B_{p-2}$. Denne formelen kan vi omskrive til $B_p = B_{p-2} + B_{p-3}$ som er det jeg trodde var systemet. Hva så med totakt, tretakt og firetakt? Disse kan ikke skrives som en kombinasjon av toergrupper og treergrupper. Dette medfører at en av gruppene vil ha verdi 0. Siden det er 0 måter tretakt kan skrives på der første pulsslag er en toergruppe. Dette er også grunnen til at antall betoningsmønstre ikke øker før femtakt.

Dette delkapittelet er i stor grad veldig teoretisk og matematisk. Jeg mener ikke at det er naturlig å legge så mye matematikk inn i opplæring av taktarter. Imidlertid kan det som lærer være lurt å være bevisst på at det faktisk ligger et system til grunn for hvor mange måter vi kan dele inn en syvtakt eller en 12-takt på, og hva dette i praksis har å si. Som utøver er man avhengig av å vite hvor betoningene i takten skal inntreffe, og som dirigent vil en syvtakt av typen 2+2+3 dirigeres ulikt en 3+2+2.

---

[17] Min prosess for å komme til et matematisk bevis er ikke nødvendig for forståelsen av fremgangsmåten. Jeg har likevel skrevet det ned som en logg, og den ligger tilgjengelig på denne adressen: https://drive.google.com/file/d/0B5jyXvtaXy3IV3B4cG5yYWJkU2c/edit?usp=sharing

[18] En diofantisk likning er en likning der man krever at løsningene skal være heltallige. Altså er det en egenskap man kan tillegge en hvilken som helst likning.

[19] $\left\lfloor \frac{P}{2} \right\rfloor$ vil si at hvis svaret blir et desimaltall, rundes det ned til nærmeste heltall. $\left\lceil \frac{P}{3} \right\rceil$ betyr at et desimaltallsvar vil rundes opp til nærmeste heltall.

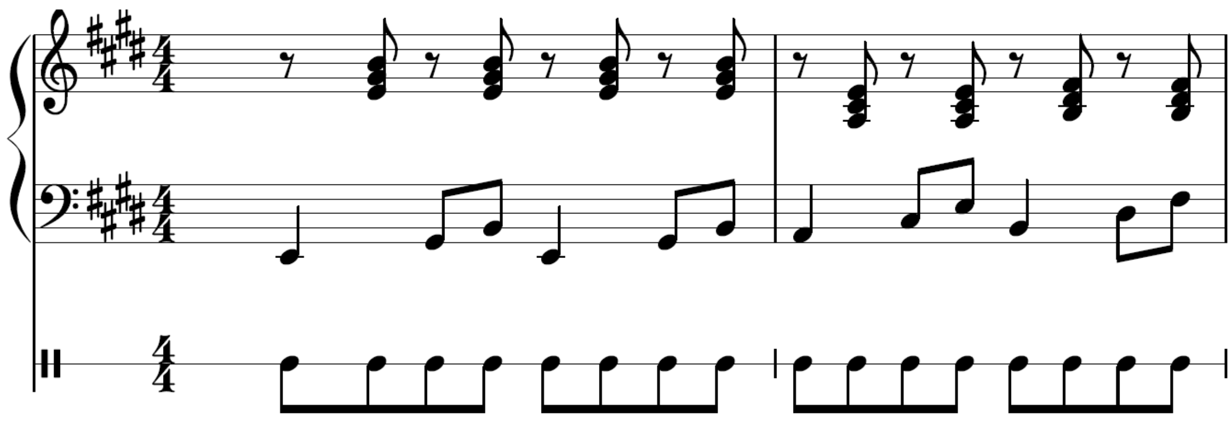
8.3 Når flere rytmemønster møtes

Når flere musikere spiller samtidig, er det ingen selvfølge at de har lik rytme. Ofte samsvarer rytmene ganske godt, men til tider ligger de såpass tett at en utøver kan lett dra en annen ut av sitt mønster. Når dette er tilfellet finner jeg matematikken som et godt hjelpemiddel. Hvis vi summerer sammen de ulike rytmene, vil de gi oss en ny rytmefigur. Dette kan være til god hjelp. Hvis vi tar det enda videre går det an å tenke en jevn puls som «fellesnevner» for de to rytmemønstrene. Siden alle noteverdier er matematisk oppbygd, vil dette være mulig bare vi velger en hurtig nok noteverdi. Følgende eksempel er hentet fra Jetze Bremers arrangement av *Englishman in New York*:

Figur 8.8a: Ulike rytmefigurer og summen av dem. *Englishman in New York*.

Her viser voice-stemmen summen av tenoren og bassens stemme. Sopran og alt har lik rytme som bassen her, så de tilfører ikke noen nye elementer. I dette eksempelet vil en jevn 16-delspuls være fellesnevner siden det er hurtigste noteverdi i sving, og siden dette kun er noteverdier som er skapt av halveringsfunksjonen. Dette forteller oss i praksis at alle noteverdiene her kan skrives som en sum av 16-deler. Enda mer krevende er det kanskje når samme utøver må spille tostemt (eller flerstemt) med seg selv, hvor de forskjellige stemmene har ulik rytme. Følgende eksempel er hentet fra Sonseeds *Jesus is my friend*[20], og viser en fri transkripsjon av keyboard-stemmen.

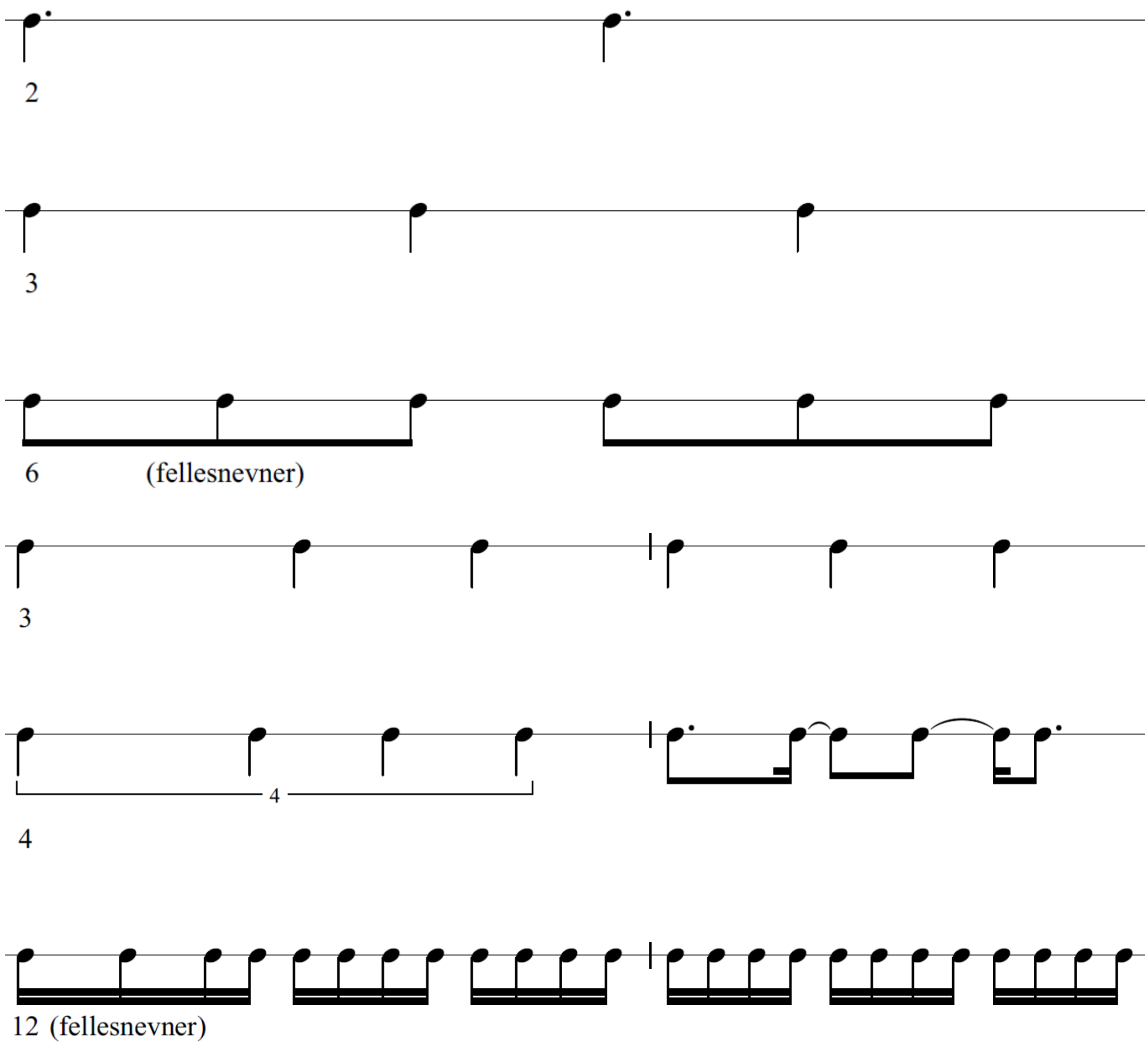
[20] Denne sangen ligger på youtube: https://www.youtube.com/watch?v=7-NOZU2iPA8



Figur 8.8b: Ulike rytmefigurer og summen av dem. *Jesus is my friend*.

Denne sangen har jeg selv jobbet med, og for å få en jevn rytme mellom høyre og venstrehånda kan tanken om en fellesnevner være en god hjelp.

Å velge den hurtigste noteverdien for å finne fellesnevner er en enkel løsning, men den fungerer ikke når vi opererer med noteverdier som ikke går opp i hverandre. For firedeler og firedelstrioler vil ikke firedelstriolene fungere som fellesnevner, selv om de er den hurtigste noteverdien. Vi kan nemlig ikke notere en firedel som summen av x-antall firedelstrioler. Vi kan si at firedelstriolen ikke går opp i firedelen. I slike tilfeller hvor de forskjellige rytmiske figurene ikke går opp i hverandre kan vi snakke om polyrytmikk. Babben Lavik og Astrid Krognes (1988:81) skriver at «Polyrytmikk oppstår når to eller flere rytmiske strukturer basert på ulike inndelinger brukes samtidig.» I praksis når vi snakker om polyrytmikk er det ofte snakk om to selvstendige jevne pulser som ikke går opp i hverandre. Å jobbe med dette kan ofte være enklere å uttrykke som et tallforhold enn som noteverdier. 2:3 er polyrytmisk, og kan for eksempel noteres som firedeler mot firedelstrioler. Tallforholdet forteller oss at den roligste pulsen bruker like lang tid på to slag, som den hurtigste bruker på tre slag. Vi kan også merke oss at tre ikke er delelig med to. Derfor er dette polyrytmisk. 2:4 vil ikke oppleves polyrytmisk, da den raskeste pulsen bare blir en todelt underdeling av den roligste. Bruken av fellesnevner er også i polyrytmikk en god støtte, for å unngå at de ulike pulsene trekker hverandre ut av kurs. Fellesnevneren for 2:3 er 6. Det forteller oss at en noteverdi som er så hurtig at den gir 6 slag på like lang tid som den roligste gir 2 og den hurtigere gir 3. For forholdet 3:4 vil 12 være fellesnevner. Følgende bilde, viser 2:3 og 3:4 uttrykt med noter.



Figur 8.9: Polyrytmikk. 2:3 og 3:4 med fellesnevner.

Polyrytmikk er et av de områdene jeg opplever at bruk av matematikk virkelig kan være til praktisk nytte. Denne oppgaven er i hovedsak ikke pedagogisk vinklet, men jeg vil likevel vise et pedagogisk eksempel på hvordan dette kan brukes i en konkret sammenheng. Eksempelet er hentet fra min fordypningsoppgave i PPU (Stensholt 2013), og jeg vil referere til denne oppgaven for en grundigere pedagogisk refleksjon rundt bruken av matematikk i musikk.

Følgende eksempel har jeg prøvd ut på en barneskoleklasse i en matematikktime, samt på en videregående klasse på musikklinja. Oppgaven går slik: Del klassen inn i tre grupper. Gruppe 1 klapper en firedels grunnpuls. Gruppe 2 tramper punkterte halvnoter, som markerer eneren i takta. Gruppe 3 får da utfordringen på å finne en puls som har et tempo slik at de klapper to ganger for hvert tredje klapp til gruppe en, altså punkterte firedeler. Hvordan man formulerer en slik oppgave må naturlig nok tilpasses aldersgruppen. På en musikklinje er det naturlig å bruke noteverdibegrepet, mens i en barneskoleklasse kunne det kanskje vært mer naturlig å knytte det til brøk, og kalt dem 1/3, 1/2 og 1/1. Sannsynligvis vil ikke dette gå perfekt ved første forsøk, med mindre de får hjelp av en lærer. Oppgaven blir da å tenke ut en teknikk for hvordan vi kan få dette helt jevnt. Her kommer fellesnevneren inn i bildet. Finnes det en rytme man kan klappe, som er slik at den treffer både klappene til gruppe 1, og gruppe 3? Hvordan man rent praktisk går frem videre kan tilpasses klassen, men jeg vil foreslå at vi kan dele klassen i fire. Gruppe 1, 2 og 3 har sine respektive oppgaver, mens gruppe 4 får oppgaven som «fellesnevner». I denne sammenhengen vil da gruppe 4 klappe åttedeler.

Figur 8.10: Pedagogisk eksempel. Rytmefigurer for gruppe 1-4.

Dette vil sannsynligvis gjøre oppgaven noe lettere. I en musikklasse kunne jeg utfordret dem på andre polyrytmer. F.eks. kunne vi prøvd oss på fire mot tre, og diskutert hva som måtte vært fellesnevneren for disse.

Fra et pedagogisk ståsted vil jeg påpeke særlig en ting her. I denne oppgaven er en matematisk tankegang ikke nødvendig fordi vi skal lære elevene å regne, men det beste redskapet vi har for faktisk å få rytmen jevn. Dette er en ren praktisk oppgave, og polyrytmikk må enhver musiker forholde seg til. Det viser med andre ord hvordan matematikken kan være et nyttig redskap i praktisk musikkarbeid. Fra en matematikklærers ståsted vil jeg påstå at denne oppgaven også fungerer motsatt vei. Den viser hvordan matematikk kan brukes i praktiske sammenhenger, og den gir et veldig godt bilde på hva en fellesnevner faktisk er. Elevene får ikke bare teoretisk forklart det, men de får føle det på kroppen. Dessuten gir dette eksempelet en bevissthet på forskjellen mellom 3/4 og 6/8, enten vi snakker taktart eller brøk. Selv om summen er den samme, vil ikke brøkene 3/4 og 6/8 i praksis referere til det samme alltid og dette er noe jeg ikke tror mange elever er bevisste på. En pizza er en pizza enten man deler den i fire eller åtte deler, men som svensken sa: Del pizzaen i fire biter. Jeg kommer ikke til å orke å spise åtte.

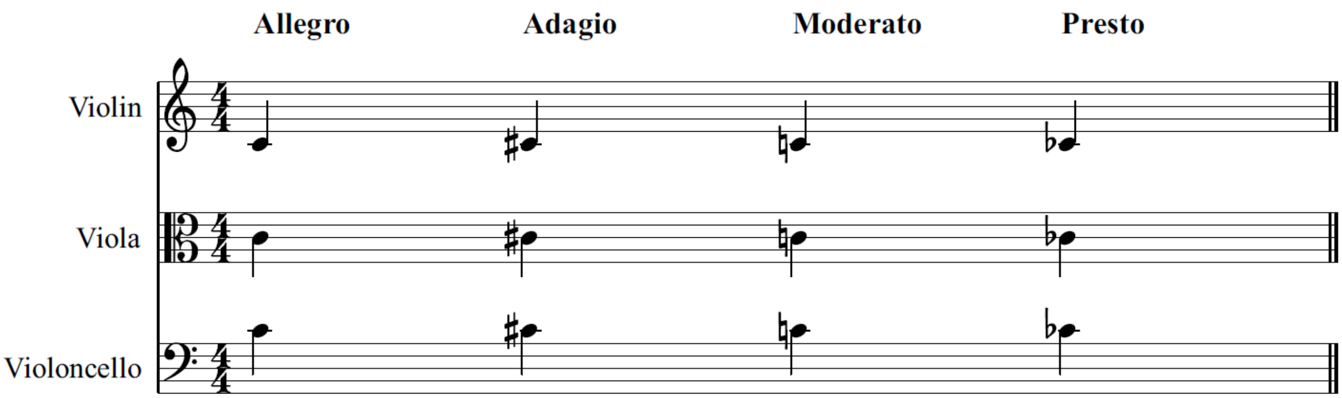
8.4 Tonehøyde og rytme. To dimensjoner med samme parameter

Mange musikere, meg selv inkludert, vil nok si at å redusere musikken til noe todimensjonalt vil være nærmest kriminelt. Likevel er det to dimensjoner som peker seg ut som mest håndgripelige. Wilfred Hodges (2003: 92), skriver at tid og tonehøyde er de to mest åpenbare musikalske dimensjonene. Det er disse som representerer de to aksene i notebildet. Disse dimensjonene er kanskje de eneste som det er logisk å tenke som separate dimensjoner med en kontinuerlig utvikling. Dette ser vi i notebildet hvis vi tenker det som et koordinatsystem med en x-akse (tid) og en y-akse (tonehøyde). Hvordan skulle en klangfargedimensjon vært rangert? Fra færrest til flest overtoner klingende kanskje? Eller som den totale styrken av en tones overtoner. Skulle vi i så fall summert lydintensitet eller opplevd lydstyrke? Det vil være lite matnyttig å prøve å definere klangfarge som en kontinuerlig akse. En noe bedre kandidat som Hodges (2003:92-93) trekker frem er styrkegrader, men han skriver at det menneskelige øret er dårlig til å sammenligne styrkegraden til ulike lyder, og enda dårligere på å huske styrkegrader. Hvor sterk vi opplever en tone har mer å si enn hvor mange desibel den klinger med. Tonehøyden er blant annet avgjørende. Så konklusjonen min er at tids og tonehøydedimensjonene er våre håndgripelige, kontinuerlige dimensjoner. Jeg vil ikke med dette avvise flere dimensjoner i musikken, men de er vanskeligere å definere og rangere. Som sammenlikning kan vi ta en snartur over i fysikkens verden, hvor vi har fire dimensjoner vi forholder oss til daglig og forstår. Illustrert vitenskap skriver at «Helt siden Einstein lanserte begrepet romtid, har vi betraktet universet som firedimensjonalt med tre romdimensjoner og én tidsdimensjon. Men ny fysisk forskning først og fremst innen strengteori tyder på at det kanskje finnes hele 11 dimensjoner (Illvit.no 2013).»

Hvis vi godtar musikkens to dimensjoner er de egentlig overraskende likt bygd opp, og jeg skal se på noen av likhetene her. Merk at y-aksen er en dimensjon for opplevd tonehøyde og ikke frekvens. En like stor bevegelse på y-aksen resulterer en konstant opplevelse av økt tonehøyde. Likeledes bør ikke x-aksen tenkes som en kontinuerlig tidsstrøm, men som musikkens rytme. I praksis trenger ikke denne gå kontinuerlig. Tempo rubato er et veldig godt eksempel på dette, men selv i fast tempo er det ikke uvanlig med små variasjoner.

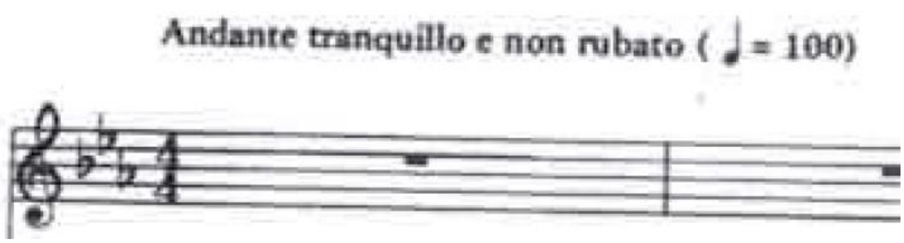
Begge dimensjonene er kontinuerlig i begge retninger. Likevel har de en praktisk avgrensning. y-aksen begrenses av halvtonen. I tradisjonell notasjon har vi ikke noen måte å notere intervaller mindre enn halvtonen, og mange instrumenter har ikke mulighet til å spille det heller. x-aksen som i praksis representerer rytme vil være begrenset av noteverdienes lengde. Det er ikke noe teoretisk grense for hvor hurtige disse kan være, men i praksis ser jeg sjelden hurtigere noter enn 32-deler. Dessuten vil denne dimensjonen være begrenset av utøvernes evne til å spille kjapt. Med andre ord er begge dimensjonene i teorien kontinuerlige, men i praksis begrenset av en minsteverdi.

En annen ting er at ingen av aksene kan alene gi oss noe konkret informasjon egentlig. y-aksen forteller oss en utvikling i tonehøyde. Et skritt på y-aksen tilsvarer et diatonisk skalatrinn opp/ned i c-durskalaen. For å oppnå halvtonene mellom enkelte trinn må vi ty til fortegn. Fortegn kan også tenkes på som funksjoner der krysset (#) hever en gitt tonehøyde med et halvt trinn i forhold til sin verdi uten fortegn, b-en (b) senker den tilsvarende med et halvt trinn og oppløsningstegnet opphever eventuelle tidligere funksjoner som har innvirket på tonen. Imidlertid har vi ingen snøring på hvor tonen c ligger, eller hvor lys/mørk den er. Jeg har alt vært inne på kammertonens funksjon ved bruk av tonehøyde. Hvis vi antar at den også er gyldig her a_1=440hz, har vi hvert fall en ide om hvor lys c er, men hvor den ligger vet vi fortsatt ikke. For å definere dette trenger vi en nøkkel. En nøkkel forteller oss hvor en spesifikk tone ligger. Resten av tonene vil da tilpasse seg utfra dette på samme måte som resten av tonehøydene tilpasser seg kammertonen. g-nøkkelen forteller oss hvor g_1 vil ligge, f-nøkkelen hvor f ligger og c-nøkkelen hvor c_1 ligger. Følgende bilde viser samme toner i tre nøkler.



Figur 8.11: Samme toner i forskjellige nøkler, samt eksempler på temporeferanser.

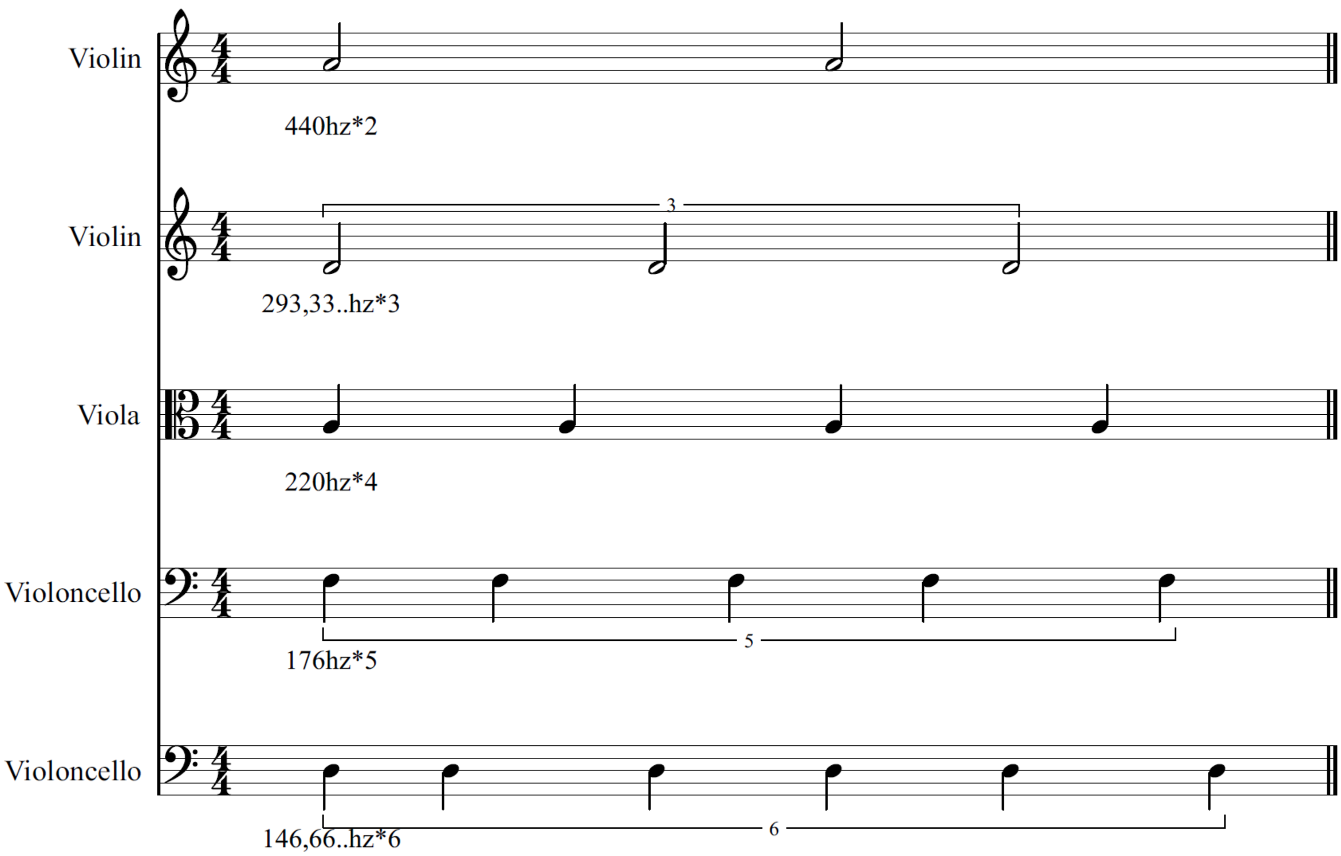
I dette notebildet har jeg også skrevet inn noen ord over øverste system. Dette er temporeferanser. x-aksen er nemlig heller ikke særlig informerende uten en form for referanse. Det eneste en firedelsnote forteller oss er at den er dobbelt så hurtig som en halvnote, men bare halvparten så hurtig som en åttedel. Uten noen form for referansepuls er vi helt tapt. Ordene over notebildet er noen vanlige temporeferanser, som gir oss en ide om hvor hurtig noe skal spilles. Hvilken noteverdi vi tar utgangspunkt i fortelles som regel av taktarten. I dette eksempelet vil allegro bety at firedelspulsen skal være hurtig. Nøyaktig hvor hurtig vil derimot være opp til en dirigent eller utøver å avgjøre. Noen tempoangivelser er mer nøyaktige som denne.



Figur 8.12: Temporeferanse med nøyaktig pulsangivelse.

Denne tempoangivelsen forteller oss at lengden på en firedel skal være slik at det går 100 firedeler på et minutt.

Jeg vil også trekke frem en likhet mellom tonehøyde og rytme jeg ble bevisst i sommer. I musikken er det særlig to steder man snakker om forholdstall (2:3, 3:4 osv.). Det ene er ved snakk om intervaller. Kvint har forholdet 2:3, kvart 3:4 osv. Det andre er når vi snakker om polyrytmikk. I forrige kapittel viser jeg forholdene 2:3 og 3:4 notert som rytme. Vi kan si at tidsdimensjonens 2:3 tilsvarer tonehøydens kvint, og tidsdimensjonens 3:4 tilsvarer tonehøydens kvart. Jeg har ikke forsket grundig på dette, og vet ikke om det er gjort forskning på det, men som tankeeksperiment kan det være interessant å se denne linken. Polyrytmen 3:5 vil tilsvare den store seksten, 4:5 stor ters osv. Hvis vi tenker oss tonens frekvens ganger antall ansatser i løpet av en takt kan vi skrive ut polyrytmer mellom intervaller der produktet (frekvens*toner innen en takt) for øverste og nederste tone blir den samme, slik som dette.



Figur 8.13: Frekvens*tempo gir samme svar.

I dette bildet dukker mange intervaller opp, og deres tilsvarende forhold uttrykt med rytme. Vi får oktaven mellom øverste og midterste stemme, og det samme gjelder mellom nederste og nest øverste stemme. Kvinten finner vi mellom de to øverste stemmene, men også mellom bratsjen og nederste stemme. Kvarten mellom nest øverste stemme og bratsjen, stor ters mellom bratsj og nest nederste stemme, samt liten ters mellom de to nederste stemmene. For alle linjene er produktet 880.

Dette får bli som en teoretisk kuriositet. Om det å trene polyrytmikk i tilsvarende intervaller er matnyttig har jeg ingen formening om, men det er en interessant sammenheng. Tonehøyde og rytme oppleves ulikt, men har i stor grad de samme reglene de er bygd opp av.

8.5 Tallet 2. En kuriositet

Dette avsnittet er mest ment som en kuriositet. Jeg har i løpet av mine forberedelser til denne oppgaven gjort meg bevisst på hvor ofte jeg kommer over tallet 2 i musikken. Jeg syns tallet 2 isolert sett er veldig interessant. Det er blant annet det eneste primtallet som også er et partall, og eneste tall hvor $x + x = x * x = x^x$. Her vil jeg raskt gå gjennom noen av mine musikalske observasjoner. Det er naturlig å starte i rytmeverden. Hele notesystemet vårt med inndelinger av noteverdier tar utgangspunkt i tallet 2, gjennom halvering. En helnote deles i to halvnoter, en halvnote i to firedeler osv. Tallet 2 dukker også opp blant taktarter, da pulsslagene som regel grupperes i grupper på to eller grupper på tre.

Det er ikke bare rytmen som er underlagt tallet 2. Tonehøydedimensjonen er like forankret gjennom oktaven. Oktaven er definert som en dobling av frekvensen og danner rammen for alle våre skalaer, enten det er moll, dur eller en 12-tonerekke. Vi snakker om oktavekvivalens, slik at etter en oktav er vi «tilbake til start». Med andre ord er tallet 2 selve grunnpilaren i både oppdelingen av tonehøyde og tid i musikken. Tallet 2 gjør seg også gjeldende i overtonerekka. En ting er at første intervallet er nettopp oktaven. Dessuten dobles antall toner for hver nye oktav i overtonerekka.

9. Avsluttende tanker

9.1 Musikk og matematikk. Ja eller nei?

I en masteroppgave som denne, eller en bok om musikk og matematikk, kan det være lett å skape en illusjon om at all musikk kan reduseres til matematikk og at matematikken bør knyttes til alle musikalske sider. Det at matematikken er så altomfattende gjør at man kan knytte den til veldig mange vitenskaper og fenomener. Eystein Raude (2000: Innledning) skriver at «*Matematikken* er vitenskapenes dronning som næres av de andre vitenskaper og gir liv til disse.» En fare siden matematikk kan knyttes til så mange vitenskaper er at man lett kan bli fristet til å knytte matematikk til deler av musikken der den egentlig ikke gjør seg gjeldende, eller vil være en begrensing.

Etter jeg egentlig var ferdig med å lete etter litteratur til denne oppgaven kom jeg over boka «The Math Behind the Music» av Leon Harkleroad (2006). Jeg fant denne umiddelbart interessant på grunn av bokas siste kapittel «How *NOT* to Mix Mathematics and Music». Her viser Harkleroad til noen eksempler på hvordan folk har prøvd å kombinere musikk og matematikk uten å lykkes. Han skriver at i noen slike tilfeller er årsaken manglende matematisk forståelse, men langt fra alltid (Harkleroad 2006: 117).

Et av eksemplene han trekker frem er forsøk på å vise til Fibonacci-rekken i musikkstykker. Min referanse til Eystein Raude i kapittel 5.5 er et praktisk eksempel på dette. Harkleroad (2006: 121) viser til en bok som mener at Fibonacci-tallene blant annet dukker opp i antall toner i skalaen. Boken viser til pentaton skala (CDEGA) med fem noter, diatonisk skala (CDEFGAHC) med åtte toner og kromatisk skala (CC#DD#EFGG#AA#HC) med 13 toner. Denne påstanden er lett å slå i bakken. Pentaton skala har riktignok fem toner, men diatonisk skala har strengt talt syv toner og kromatisk skala 12. Hvis man insisterer på å ende skalaen med oktaven på toppen faller argumentet også sammen, for i så fall vil den pentatone skalaen ha seks toner. Nå er dette et uriktig eksempel, men Harkleroad (2006:122) sier at selv om det nå hadde vært slik at mange skalatyper hadde inneholdt antall toner som samsvarte med fibonacci-rekken, ville ikke dette vært et veldig sterkt argument for fibonacci-rekkens tilstedeværelse i musikken. Av tallene 1-13 er seks av dem fibonacci. Dvs. sannsynligheten for at tre tilfeldig valgte nummer er fibonacci ikke er forsvinnende liten. Harkleroad sier på generell basis at å finne noen spesielle type tall tilstede når det er snakk om relativt små nummer ikke er nok. Med mindre man også finner en god forklaring på hvorfor akkurat disse talltypene burde være til stede, er sannsynligheten stor for at det bare er tilfeldig (Harkleroad 2006: 123).

Den som søker etter spesielle tall vil sannsynligvis klare å finne det, og de aller fleste tall klarer man å finne en eller annen unik egenskap ved. La meg ta et eksempel på hvordan denne ideen kan strekkes til det idiotiske: Min far er lite glad i Flytypen Boeing 737. Jeg vil nå ved (mis)bruk av matematikk vise at Boeing 737 er djevelens verk. Tverrsummen av 737=17. Tverrsummen av 17=8. Siden 17 er et tosifret tall er det naturlig å trekke 2 fra 8. 8-2=6. Det er 3 siffer i vårt opprinnelige tall, og følgelig er det rimelig å kunne si at 737=666? Tilfeldig at 737 så lett kan omformes til 666? Mest sannsynlig ja. Dette eksempelet er satt på spissen, men tilfeldigheter kan dukke opp mye letter enn dette.

Et annet eksempel som Harkleroad (2006: 123) trekker fram og omtaler som en «Urban Legend», er at Béla Bartók visstnok skal ha basert mye av sin musikk på fibonacci-rekken og det gyldne snitt. Denne «myten» er det Eystein Raude (2000: kuriositeter) trekker frem som bruk av fibonacci-rekken i musikk. For å avlive denne myten viser Harkleroad blant annet til Làszlò Somfai som "gjennomgikk «the complete existing source material of Bartòk's compoisitions as well as maunscripts of folk-music transcriptions, drafts of articles, and scattered scrap papers in the Hungarian and American estate (Harkleroad 2006:124). » Somfais konklusjon var at «not a single calculation of the proportions of a composition- with Fibonacci or other numbers- has been discovered (Ibid: 124), ». Ideen om fibonacci-rekken hos Bartók stammer fra musikkviteren Ernö Lendvai. Han presenterer flere eksempler fra Bartóks musikk for å vise hvordan fibonacci-rekken preget hans musikk. Imidlertid påstår han ikke at Bartók nødvendigvis brukte disse bevisst (Ibid: 124).

Harkleroad (Ibid: 124) ser på Lendvais eksempler, og mener de er like tåpelige som skala-eksempelet. Et konkret eksempel han trekker frem er fra Bartóks *Cantata Profana.* Her viser han til skalaen som starter på D og består av toner 2,3,5,6, og 8 halvtoner over D. Han beskriver denne som en fibonacci 2,3,5,8-skala med en forminsket kvint (6 halvtrinn) lagt til (Harkleroad 2006: 125). Her velger Lendvai å se bort fra det materialet som ikke «passet inn» i modellen hans og forsvare det med «en tilfeldig tillagt tone». Skalaen kunne like gjerne vært tolket som 2,3,6,8 med tillagt 5, men dette ville ikke støttet opp under Fibonacci.

Slike misoppfatninger er ikke uvanlig, og Harkleroad avslutter kapittelet med å si at det er veldig naturlig:

> «The human mind possesses a wonderful and highly useful ability to percieve patterns. Sometimes our mental mechanisms push us to see patterns that aren't really there. Take a couple of pattern-rich subjects like music and mathematics, and the temptations can become irresistible (Harkleroad 2006: 127). »

Likevel syns jeg det er viktig å påpeke at man bør unngå å tvinge frem en sammenheng mellom musikk og matematikk der det ikke synes hensiktsmessig. Jeg har vist til mange eksempler i denne oppgaven der jeg mener de er naturlig sammenkoblet, og ikke minst er med på å berike hverandre. Dette er spesielt viktig å tenke på i en undervisningssammenheng der jeg håper mye av denne oppgavens innehold kan brukes. Matematikken skal introduseres på musikkens premisser.

9.2 Musikk og matematikk i teori og praksis

En fare når det kommer til musikk og matematikk er at man blir dratt inn i den teoretiske verden, og blir adskilt fra den klingende og praktiske siden av musikken. Det er vel bare å innrømme at det er vanskelig å snakke om musikk og matematikk uten å snakke om musikkteori. Jeg ser det selv i denne oppgaven.

Det betyr på ingen måte at musikk og matematikk ikke kan ha praktisk betydning. En av mine PPU-lærere, Mathias Øhra, sa en gang at det finnes ikke noe mer praktisk enn en god teori. Slik er det med musikk og matematikk. Det tar kanskje utgangspunkt i det musikkteoretiske planet, men det kan være til god nytte for praktisk utøvelse.

I min fordypningsoppgave i PPU (Stensholt 2013), ser jeg på flere praktiske og pedagogiske innfallsvinkler til nettopp dette. I denne oppgaven har jeg vist til hvordan en matematisk tilnærming til rytme kan være til hjelp for å spille jevnt, noe jeg opplever mange sliter med. Jeg viser også til hvordan man kan renstemme intervaller i korsammenheng for å oppnå at koret låter renere. Å være bevisst på overtonerekka kan også være til hjelp her, for kjenner man til overtonerekka er den lettere å høre, og da kan man bruke den til å intonere blant annet kvinter og store terser. Å ha en bevissthet på at kvinter generelt bør klinge litt lysere enn på pianoet, samt at den lille tersen bør heves litt og den store tersen senkes litt er også, som nevnt, til hjelp for å synge rent.

Et siste eksempel er oppbygning av akkorder. Hvis man kan oversette det fra det spesifikke, f.eks. at en C-durtreklang består av tonene CEG, til det generelle der en C-dur består av grunntonen C etterfulgt av en stor ters og en kvint, vil overgangen til alle andre durtreklanger være mye enklere. Bruker man denne tilnærmingen i opplæringen av barn, vil det kanskje være mer naturlig å beskrive det som en grunntone, fire halvtrinn opp, og tre halvtrinn til opp derfra. Slik kan man bruke telling til å finne durtreklanger fra en tilfeldig valgt grunntone.

Dette er bare noen av mange eksempler, og for en mer pedagogisk tilnærming vil jeg igjen vise til min fordypningsoppgave (Stensholt 2013). Som lærer er det uansett smart å tenke på hvilken praktisk nytte musikkteori kan ha.

9.3 Min filosofi

Jeg har vist til mange eksempler og flere tenkere som beskriver forholdet mellom musikk og matematikk. Det er for meg hevet over en hver tvil at musikk og matematikk har dype felles røtter. Likevel føler jeg ikke slike konkrete eksempler i full grad kan forklare den dypeste sammenhengen mellom dem. For å forklare hvorfor jeg ser to sider av samme sak når jeg skuer musikken og matematikken, er det ikke nok å vise til noen konkrete eksempler. Å beskrive dette er vanskelig, kanskje umulig. Jeg vil likevel gi det et forsøk, da jeg mener det er viktig for å sette min signatur på denne oppgaven.

En av mine yndlingsbøker er *Angels & Demons* av Dan Brown. En av grunnene til at den fascinerer meg slik er at den kombinerer vitenskap og religion. Den fremstiller dem som to sider av samme sak, der begge søker etter universets sannheter bare med forskjellige innfallsvinkler. Hovedpersonen Robert Langdon blir spurt om han tror på Gud. Etter han prøver å svare med å vise til forskjellige religioner, avvises han med dette:

«Mr Langdon, I did not ask if you believe what *man* says about God. I asked if you believe in God. There is a difference. Holy scripture is stories [...] When you lie out under the stars, do you sense the divine? Do you feel in your gut that you are staring up at the work of God's hand? (Brown 2000: 132-133) »

Jeg ønsker ikke å gjøre en diskusjon rundt Guds eksistens og eventuelt hvordan man skal definere gud, men jeg syns dette sitatet i stor grad setter et bilde på mitt syn på musikk og matematikk. For jeg opplever en guddommelighet i begges vesen. Med dette mener jeg at når jeg står overfor enten musikk eller matematikk føler jeg tilstedeværelsen av noe mektigere, større og mer perfekt en min fysiske eksistens.

Musikken kan røre meg til det punktet hvor fortid, nåtid og fremtid nærmest smelter sammen og alt annet enn øyeblikket blir ubetydelig. Sjelen nærmest rives i stykker for så å bli fornyet og leget. Den vekker emosjoner enten det er smerte eller glede. Samtidig er musikken gjennomsyret av en logikk og matematikk som i seg selv er vakker, og som gjør musikkens vesen for meg enda mektigere. Overtonerekka er kanskje mitt beste eksempel på det. I en hver naturlig tone finnes det en rekke harmonier. De er ikke tilfeldig oppbygd, men har i seg selv en matematisk orden.

Når det gjelder matematikkens vesen, føler jeg den beskriver ting som vi bare kan tenke oss i teorien, men aldri ta inn i vår virkelige verden. En av mine yndlingsfigurer er sirkelen. Definert som en punktmengde med en konstant avstand til et punkt i sentrum. Bare ideen om et punkt kan vi ikke overføre til vårt univers. I det vi illustrerer det vil vi i teorien ha beveget oss ut i 3 dimensjoner, mens et punkt hverken har høyde, lengde eller bredde. En annen ting er at vi aldri kan konstruere en perfekt sirkel. Det vil alltid være små ujevnheter. Her er et eksempel på hvor stor avstanden er fra vårt univers og matematikkens univers. Tallet pi er definert som forholdet mellom diameteren og omkretsen i en sirkel. Dette er et irrasjonelt tall. Det vil si at vi aldri kan skrive det nøyaktig med vanlige tall. Det vil ha uendelig mange desimaler. Datamaskiner har beregnet pi med en nøyaktighet på flere billioner (10^{12}) desimaler (Numberphile), men det er fortsatt i teorien en avrunding, og veien til den eksakte verdien er uendelig lang. I matematikkens verden finnes den. Det finnes en størrelse pi som nøyaktig beskriver forholdet mellom omkretsen og diameteren i en perfekt sirkel. Hvis man ønsker å beregne omkretsen til det synlige universet (som danner en sirkel, siden vi ser like langt i alle retninger), som er flere milliarder lysår stort, vil man ved å avrunde pi til «bare» 39 desimaler få en unøyaktighet på størrelsen til et hydrogenatom. Dvs. at for alle praktiske forhold i hele universet vårt trenger vi ikke mer enn en håndfull desimaler i dette tallet hvis størrelse beveger seg inn i evigheten. For meg er dette nærmest guddommelig.

Hva er så mine tanker om musikkforståelse og forholdet mellom teori og praksis? Her vil jeg referere til Boethius som skriver følgende etter å ha etablert hvor grunnleggende del av mennesket musikken er:

> «Alt dette gir oss det klare og sikre bevis på at musikk så meget er en del av vår natur at vi ikke kunne være den foruten om vi så gikk inn for det. Og derfor bør sinnets krefter bestrebe seg på å etablere en oppfatning gjennom vitenskapen om det som er iboende av natur. Slik de lærde i sine studier av synet ikke er tilfredse med å betrakte farger og former uten å undersøke deres egenskaper, er de heller ikke tilfredse med å behages av melodier uten å vite hvilke tonemessige lover som de er satt sammen av (Boethius sitert i Bø-Rygg og Berg Eriksen 2012: 188).»

Boethius var av den oppfattelse at den teoretiske siden av musikken var klart overlegen, og egentlig den eneste sanne formen for musikk. Dette er jeg ikke enig i. Jeg mener at musikken i dagliglivet først og fremst utspiller seg som noe praktisk og estetisk, og for mannen i gata er ikke den teoretiske siden av musikken like viktig. Han kan likevel oppleve musikkglede. Hvis man derimot ønsker å prøve å forstå musikkens vesen, virkelig dykke ned i dens dypere dimensjoner og ikke bare skue overflaten, trenger man en forståelse av musikkens logiske og vitenskapelige side. Det betyr ikke at man må forkaste den emosjonelle. Vi trenger begge, og de beriker hverandre gjensidig.

Hvis du fjerner deg fra den emosjonelle siden av musikk, reduserer du musikkens vesen til matematiske formler og logikk. Dette kan gi et innblikk i mange av musikkens sider, men vil se bort fra hvordan musikkens vesen kan røre og gripe oss dypt inn i sjelen.

Hvis man derimot ser bort fra teorien og logikken og bare vier seg til følelsene den frembringer, har man mistet en like viktig side ved musikken. Man kan kanskje oppleve glede gjennom å spille eller høre, men har ingen anelse om at det ikke er tilfeldigheter som ligger til grunn for musikkens vesen derimot en stor grad av orden. Hvorfor låter noen intervaller «renere» enn andre? Hvorfor er noen akkorder fylt med spenning og andre med ro? Man ender opp som en blind mann som skal forklare hva man ser.

Man kan kanskje stille spørsmålet: Hvorfor må vi tillegge musikken en logisk dimensjon og prøve å forstå den? Hvorfor kan vi ikke bare akseptere musikken som noe vakkert, mystisk og uforståelig? For å svare på dette vil jeg igjen trekke en parallell til religion og Gud. Hvis vi antar at Gud finnes, og at han er igangsetteren av «the big bang», hvem er da nærmest Gud? Den troende som tror og sier at herrens veier er uransakelige, eller fysikeren som har fått et innblikk i guds skaperverk gjennom de grunnleggende fysiske lovene som ligger til grunn for denne verden? Å prøve å forstå fortrenger ikke hverken Gud eller musikkens mystiske side. For først når vi prøver å forstå kan vi ane hvor mektig, fantastisk, mystisk og uforståelig musikken faktisk er.

9.4 Mitt budskap

Siden min problemstilling er så åpen, er det unaturlig å komme med en konklusjon. Jeg vil heller trekke frem de viktigste poengene jeg ønsker å formidle gjennom denne oppgaven.

Som lærer på videregående må man integrere en form for matematikk i musikkfagene. Slik jeg ser det, kan man velge å se på dette som et hinder og en plage. I så fall vil det være naturlig nedtone det så mye som mulig, og tolke f.eks. at man leser rytmer i hovedinstrumentfaget som en form for matematikk og dermed ha «dekket» dette feltet. Et alternativ er å gjøre som jeg har gjort her, nemlig se hvilke innfallsvinkler det enkelte faget naturlig gir, og bruke matematikken til å berike musikkundervisningen.

Det finnes naturlige innfallsvinkler til musikk og matematikk i læreplanene. Jeg har vist mange eksempler her. Selv om jeg ikke har satt dem i en undervisningssituasjon er ikke dette en vanskelig oppgave. Det finnes mange flere og garantert mange jeg ikke har tenkt på.

Matematikken kan være en støtte for musikkfagene, både de teoretiske og de praktiske. Dette henger sammen med min forrige påstand. Matematikken er til god hjelp for å forklare mange «hvorfor»-spørsmål. Hvorfor er det akkurat 12 toner i skalaen? Hvorfor oppleves noen intervaller mer konsonerende, mens andre oppleves mer dissonerende? Men den kan også hjelpe i praktiske fag. Det mest konkrete eksempelet jeg har vist til i denne oppgaven er ved innlæring av polyrytmikk, men den kan også brukes f.eks. for å forstå hvilke intervaller man i et kor skal intonere litt lysere eller litt dypere. Jeg mener matematisk tenkning også kan være til hjelp i mindre konkrete eksempler. For eksempel når det kommer til hørelære, er jeg sikker på at evnen til logisk tenkning er meget nyttig. Bladsynging er et konkret eksempel på dette. Hvis man bare «hører seg frem» til stemmen, vil det medføre at hvert enkelt intervall må intoneres, noe som blir ganske vanskelig hvis ting går litt fort. Hvis man derimot tar logisk tenkning til hjelp, organiserer tonene i grupper, f.eks. treklangsbrytninger og trinnvise bevegelser, samt har noen holdepunkter f.eks. skalaens grunntone, har man gitt seg selv mange støttehjul som gjør prosessen mye enklere. Er ikke slik tenkning i nærheten av matematikken?

Teori og praksis er ingen motsetninger. Når man snakker om musikk og matematikk er det lett å havne helt i teoriavdelingen, og avskille seg fra den praktiske delen. Musikken er både logisk og følsom, og begge sidene er nødvendig. Teoretisk støtte hjelper den praktiske utøvelsen, og den praktiske utøvelsen gjør teorien mer interessant.

Mitt kanskje viktigste budskap er dette: *Man kan få en god forståelse av matematikken i musikken uten å ty til avansert matematikk.* I denne oppgaven har jeg, kanskje med unntak av diofantiske likninger, kun brukt matematikk man kan komme borti på videregående. Mye er til og med matematikk på grunnskolenivå. Forstår man brøkregning kommer man faktisk langt. Dessverre er det veldig mye litteratur som ikke begrenser seg til den enkle matematikken, men etter å ha gått gjennom grunnleggende ting beveger seg ut på nivåer som musikere uten matematikkutdanning vil slite med å fatte. Jeg sier ikke at denne siden av musikk og matematikk er mindre viktig. Det er fortsatt mange sider av musikk og matematikk jeg er sikker på er fantastisk spennende, men som jeg ikke forstår ennå på grunn av manglende matematikkunnskaper. På samme måte som en kan oppleve musikkglede uten å være musikkutdannet, kan man oppleve skjønnheten i musikk og matematikk uten å være matematikkutdannet.

Kilder:

Albregtsen, F. og Skagestein, G. (2007) *Digital representasjon: av tekster, tall, former, lyd, bilder og video (2. utgave)*. Oslo, Unipub. S. 113-164 (kap. 9, 10 og 11).

Benestad, Finn (2004) *Musikklære.* 3. utgave. Oslo, Universitetsforlaget.

Bibby, Neil (2003) «Tuning and temperament: closing the spiral» i Fauvel, John, Raymond Flood og Robin Wilson red. *Music and Mathematics From Pythagoras to Fractals.* Oxford, Oxford University Press. s. 13-28.

Botten, Geir (2009) *Meningsfylt matematikk.* Bergen, Caspar Forlag.

Breiteig, Trygve og Rolf Venheim (2005) *Matematikk for lærere 1.* Oslo, Universitetsforlaget.

Brown, Dan (2000) *Angels & Demons.* London, Transworld publishers.

Bø-Rygg Arnfinn og Trond Berg Eriksen red. (2012) *Klassisk estetisk teori, Fra Platon til Diderot.* Oslo, Universitetsforlaget.

Cross, Jonathan (2003) «Composing with numbers: sets, rows and magic squares» i Fauvel, John, Raymond Flood og Robin Wilson red. *Music and Mathematics, From Pythagoras to Fractals.* Oxford, Oxford University Press. s. 131-146.

Edwards, Peter (2012) *Myths of modernism* [Forelesning] Universitetet i Oslo IMV 29.08.12

Fauvel, John, Raymond Flood og Robin Wilson red. (2003) *Music and Mathematics, From Pythagoras to Fractals.* Oxford, Oxford University Press.

Griffiths, Paul (2007) *Serialism.* Oxford Music online, New Grove. [lesedato: 25.10.13]

Griffiths, Paul (2010) *Modern Music and After.* 3. utg. Oxford, Oxford University Press.

Grønvold, Eirik (1980) «Johannes Kepler og verdensharmonikken» i *Norsk musikktidsskrift* nr.3 september 1980, 17. årg. s. 129-142

Guldbrandsen, Erling E. (2012a) «Kunstmusikk i perioden 1945-1960» i Hovland, Erlend red. *Vestens musikkhistorie*. Cappelen Damm Akademiske. s. 282-296.

Guldbrandsen, Erling E. (2012b) «Kunstmusikk i perioden 1960-1975» i Hovland, Erlend red. *Vestens musikkhistorie*. Cappelen Damm Akademiske. s. 297-303.

Guldbrandsen, Erling E. (2012c) «Kunstmusikk i perioden 1975-1990» i Hovland, Erlend red. *Vestens musikkhistorie*. Cappelen Damm Akademiske. s. 304-313.

Guldbrandsen, Erling E. (2012d) «Kunstmusikk etter 1990» i Hovland, Erlend red.: *Vestens musikkhistorie*. Cappelen Damm Akademiske. s. 314-325.

Gulbrandsen, Erling E. (2012e) Seminartime i *Metodologisk emne: Historie, analyse, estetikk.* Universitetet i Oslo IMV 20.03.12

Harkleroad, Leon (2006) *The Math Behind the Music*. New York, Cambridge University Press.

Hodges, Wilfrid (2003) «The geometry of music» i Fauvel, John, Raymond Flood og Robin Wilson red. *Music and Mathematics From Pythagoras to Fractals.* Oxford, Oxford University Press. s. 91-112.

Holme, Audun 2001: *Matematikkens historie 1.* Bergen, Vigmostad & Bjørke.

Holme, Audun 2004: *Matematikkens historie 2.* Bergen, Vigmostad & Bjørke.

Illvit.no (2013) *Hvor mange dimensjoner er det?* Illustrert Vitenskap, http://illvit.no/universet/universets-gate-hvor-mange-dimensjoner-er-det-0 [lesedato 13.11.13]

Irvy, Benjamin (2001) «The cat decides: The music of John Tavener.» i *Commonweal* 26 jan. 2001, vol. 128.2 s. 20. [Utskrift fra nettet 29.03.12]

Jeans, Sir James (1968) *Science & Music*. New York, Dover Publications.

John Tavener (2013), *Wikipedia*. http://en.wikipedia.org/wiki/John_Tavener [lesedato: 01.04.12]

Kjerschow, Peder Christian (1988) *Schopenhauer om musikken.* Oslo, Aschehoug & CO.

Kjerschow, Peder Christian (1993) *Tenkningen som deltagelse.* Oslo, Solum forlag.

Klempe, Sven Hroar (2003) «Quadrivium» i *Gads Musikleksikon*. Gads forlag.

Lavik, Babben og Astrid Krognes (1988) *Rytme Studiebok med musikkeksempler*. Oslo, Norsk Musikkforlag.

Loy, Garreth (2006) *Musimathics volume 1.*Cambridge, Massachusetts, Mit Press.

Martineu, John red. (2010) *Quadrivium.* New York, Walker Publishing Company.

Matematikk (2013), *Wikipedia*. http://no.wikipedia.org/wiki/Matematikk [lesedato 24.03.13]

Molde, Audun og Geir Salvesen (2000) *Ekko 2.* Oslo Gyldendal norsk forlag.

Nesheim, Elef (2004) *Musikkhistorie.* Oslo, Norsk Musikkforlag.

Padovan sequence (2013), *Wikipedia*. http://en.wikipedia.org/wiki/Padovan_sequence [lesedato 12.11.13]

Raude, Eystein (2000) *Om matematikk og musikk. http://www-bib.hive.no/tekster/hveskrift/notat/2000-03/index.html* [lesedato: 09.10.13]

Redfern, Nick (2010) *AS Music Unit 3: Developing musical understanding a guide for students Vocal music 2010 John Tavener The Lamb.*

http://www.nickredfern.co.uk/AS%20Level%202010/Tavener/AS%20Music%20Developing%20Musical%20Understanding%20-%20Student%20Guide%20-%20Tavener.pdf [lesedato 01.04.12]

Rinvold, Reinert A. (2009) *Visuelle perspektiv Avbildninger og symmetri.* Caspar forlag.

Rivertz, Hans Jakob (2011) *Funksjoner Forelesning i Matematikk 1.* NTNU, https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/2011h/hjr/forelesning-08-18.pdf [lesedato: 07.11.13]

Rudi, Jøran red. (2008) *Karlheinz Stockhausen- En pioner i Utopia.* Oslo, Notam.

Ryde, J. (jan@ryde-berg.no) 10. april 2014. *Orgelspørsmål om dype toner*. Epost til E.A. Stensholt (maestrostensholt@gmail.com)

Salvesen, Geir (2013) *Emner fra musikkdidaktikk* [Forelesning/Power point] Høgskolen i Vestfold 10.01.13

Skorpen, Leif Bjørn (2003) *Matematikk i musikken - musikk i matematikken.* http://www.hivolda.no/attachments/site/group15/arb_148.pdf [Lesedato 25.03.13]

Stensholt, Erik Andreas 2013: *Regning i musikk på videregående,* Semesteroppgave PPU2 Fagdidaktikk, Musikk fordypning, Høgskolen i Vestfold,https://drive.google.com/file/d/0B5jyXvtaXy3IeFFIMXhVaU91VDA/edit?usp=sharing [Lesedato 26.11.13]

Sundberg, Ove Kristian (2000) *Musikktenkningens historie, Antikken.* Oslo, Solum forlag.

Sundberg, Ove Kristian (2002a) *Musikktenkningens historie II, Middelalder – Renessanse.* Oslo Solum forlag.

Sundberg, Ove Kristian (2002b) *Pytagoras og de tonede tall.* Oslo, Solum forlag.

Sundberg, Ove Kristian (2007) *Musikktenkningens historie III, Barokken.* Oslo, Solum forlag.

Sætre, Jon Helge, et al. (2010) *Å regne i musikk. Materiell til etterutdanningskurs.* http://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&frm=1&source=web&cd=1&ved=0CDAQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.matematikksenteret.no%2Fattachment.ap%3Fid%3D1103&ei=ObpOUb3MOLGP4gTV_IHABg&usg=AFQjCNEXmdRv7TUrgEW83nI1J_gNXtapHg&sig2=ECHAp9Ljb07bWospxNlw0w&bvm=bv.44158598,d.bGE [Lesedato 24.03.13]

Tavener, John (2004) *John Tavener A portrait.* Naxos [Lydfil fra Spotify]

Traavik, Hilde (2009) «Grunnleggende ferdigheter: Hvorfor er de så viktige?» i Traavik, Hilde, Oddrun Hallås og Anne Ørvig red. *Grunnleggende ferdigheter i alle fag*. Oslo, Universitetsforlaget. s. 18-31.

Tenebrae (2006) *Allegri Miserere.* Signum Records [Lydfil fra Spotify]

Utdanningsdirektoratet (2013a) *Grunnleggende ferdigheter.* Utdanningsdirektoratet, http://www.udir.no/Lareplaner/Grunnleggende-ferdigheter/ [lesedato 15.03.13]

Utdanningsdirektoratet (2013b) *Læreplan Musikk i perspektiv* Utdanningsdirektoratet, http://www.udir.no/kl06/MUS6-01/Hele/ [lesedato 30.09.13]

Utdanningsdirektoratet (2013c) *Læreplan Lytting*. Utdanningsdirektoratet. http://www.udir.no/kl06/MDD3-01/Hele/ [lesedato 09.10.13]

Utdanningsdirektoratet (2013d) *Læreplan Musikk.* Utdanningsdirektoratet, http://www.udir.no/kl06/MDD5-01/Hele/ [lesedato 15.10.13]

Utdanningsdirektoratet (2013e) *Læreplan Musikk fordypning*. Utdanningsdirektoratet, http://www.udir.no/kl06/MUS8-01/Hele/ [lesedato 23.10.13]

Vang, Geir 2003: *Keplers konsonansteori.* Hovedoppgave i musikkvitenskap, Institutt for musikk og teater, Det historisk-filosofiske fakultet, Universitetet i Oslo.

Wollenberg, Susan 2003: «Music and mathematics: an overview» i Fauvel, John, Raymond Flood og Robin Wilson red. *Music and Mathematics, From Pythagoras to Fractals.* Oxford, Oxford University Press. s. 1-9.

Youtube.com (2013) *Googol and Googolplex*. Numberphile, https://www.youtube.com/watch?v=8GEebx72-qs [lesedato. 21.01.13]

Å kunne regne (2013), http://www.hib.no/aktuelt/konferanse/dokumenter/Plan-regning-i-alle-fag.pdf [lesedato 24.03.13]