Problemløsning i norske matematikklærebøker for videregående skole

En studie av fremstillingen av problemløsningsmetoder i algebraeksempler i lærebøkene for kursene 1T og R1

Veronika Klungland Harder

Master i realfagsdidaktikk ved
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning
Det utdanningsvitenskapelige fakultet

UNIVERSITETET I OSLO

Vår 2013

Problemløsning i norske matematikklærebøker for videregående skole

En studie av fremstillingen av problemløsningsmetoder i algebraeksempler i lærebøkene for kursene 1T og R1

Veronika Klungland Harder

2013

Problemløsning i norske matematikklærebøker for videregående skole

Veronika K. Harder

http://www.duo.uio.no

Trykk: Reprosentralen, Universitetet i Oslo

Sammendrag

Denne masteroppgaven i realfagsdidaktikk fokuserer på metoder for problemløsning i algebraeksempler i matematikklærebøker for den videregående skole i Norge under Læreplanen for Kunnskapsløftet LK06. Målet med studien er å se hva læreplanen sier om problemløsning og problemløsningsmetoder, og hvordan dette gjennomføres i lærebøkene. Den overordnede problemstillingen er: *I hvilken grad belyses problemløsning i algebraeksemplene i matematikklærebøkene for videregående skole?*

For å svare på problemstillingen benytter jeg meg av dokumentanalyse. Analysen begrenses til eksemplene i lærebøkene for matematikkursene 1T og R1 som omfattes av hovedområdene *Tall og algebra* og *Algebra* i de respektive læreplanene. Lærebøkene som analyseres er *Matematikk*-serien til Aschehoug, *Sinus*-serien til Cappelen Damm og *Sigma*-serien til Gyldendal for matematikkursene 1T og R1.

Først analyseres læreplanen LK06 for å finne hva den sier om problemløsning. Videre analyseres bruken av problemløsningsmetoder i algebraeksemplene i matematikklærebøkene. Med henvisninger til rådende teori antas det at bruken av problemløsningsmetoder indikerer hvorvidt eksemplene presenterer problemløsning.

For å analysere eksemplene benytter jeg meg av et analyseverktøy utviklet av doktorgradsstudenten Tom Rune Kongelf ved Universitetet i Agder. Kongelf undersøkte i arbeidet med sin doktorgrad metodebruken i eksempler i lærebøkene for grunnskolen. Han tok utgangpunkt i rådende litteratur og skapte en liste over ni problemløsningsmetoder med tilhørende beskrivelser. Utgangspunktet for min analyse er Kongelfs liste, som jeg har utvidet med én metode.

Resultatene fra analysen av læreplanen viser at læreplanen slår fast at problemløsning er viktig, og at elevene skal erverve seg varierte strategier for problemløsning. Likevel viser analysen av algebraeksemplene i lærebøkene at bruken av problemløsningsmetoder er begrenset, lite variert og utydelig. Dersom det i det hele tatt er metodebruk i eksemplene, er den lite tydelig ved at det mangler forklaringer eller at metodebruken ikke poengteres. I tillegg til dette viser analysen at bruken av problemløsningsmetoder i all hovedsak er representert ved et fåtall av de ti utvalgte problemløsningsmetodene.

Forord

Denne oppgaven er det sluttførende arbeidet som vil fullføre min mastergrad ved lektorprogrammet ved UiO. Gjennom fem år har jeg studert matematikk, naturfag, pedagogikk og didaktikk. Arbeidet med masteroppgaven har vært utfordrende, annerledes, frustrerende og inspirerende, og jeg håper det kan bidra med viktig kunnskap til det matematikkdidaktiske forskningsfeltet, samt min egen praksis som vordende lærer.

Helmer Aslaksen og Inger Christin Borge har vært mine veiledere på masteroppgaven. Jeg vil takke begge to for gode innspill, tanker og konstruktive kommentarer under arbeidet med oppgaven. Jeg vil også takke Torgeir Onstad for all hjelp med å finne og sette meg i kontakt med veilederne mine.

Jeg vil også takke Aschehoug som generøst ga meg lærebøkene jeg trengte til analysen, og Helmer Aslaksen for utlån av de resterende lærebøkene.

Takk til min mor for oppmuntring underveis og korrekturlesing av oppgaven.

Til slutt vil jeg vil takke alle som har hørt på meg når jeg har hatt behov for å snakke om arbeidet, kanskje spesielt Margrethe Heibø Modalsli under våre faste onsdagslunsjer på Blindern. En kjempestor takk til kjæresten min, Nicolai Horn Sætre, som har bidratt med støtte, disiplin når jeg har manglet det selv, distraksjoner når det trengtes, lyttende ører, og ikke minst utallige måltider jeg har slippet å bekymre meg over og bruke tid på å stelle i stand.

Oslo, mai 2013

Veronika K. Harder

Innholdsfortegnelse

1 **Innledning** 2
- 1.1 **Mål med studien** 3
- 1.2 **Kapitteloppbygging** 5

2 **Problemstilling og forskningsspørsmål** 6

3 **Teori** 8
- 3.1 **Problemer og problemløsning** 8
  - 3.1.1 Hva er et problem? 8
  - 3.1.2 Hva menes med problemløsning? 9
  - 3.1.3 Problemløsningsprosessen 10
  - 3.1.4 Problemløsning og heuristikk, to sider av samme sak? 12
  - 3.1.5 Undervisning i problemløsning 13
  - 3.1.6 Vurdering i matematikk – et spørsmål om problemløsningsevne? 14
- 3.2 **Problemløsning i de norske læreplanene** 14
  - 3.2.1 Problemløsning i Mønsterplanen 87 14
  - 3.2.2 Problemløsning i Reform 94/Læreplanen L97 15
  - 3.2.3 Problemløsning i læreplanen Kunnskapsløftet LK06 15
  - 3.2.4 Revisjon av LK06 17

4 **Metode** 20
- 4.1 **Design og metode** 20
- 4.2 **Utvalg** 22
  - 4.2.1 Hvorfor analyse av lærebøker og eksempler? 22
  - 4.2.2 Hvilke fag og skoletrinn? 22
  - 4.2.3 Hvilke bøker? 23
  - 4.2.4 Hvilke tema og hvilke eksempler? 24
- 4.3 **Analyse** 27
  - 4.3.1 Hvilket analytisk rammeverk? 27
  - 4.3.2 Ti heuristiske metoder 27
  - 4.3.3 Analyseprosedyre og gjennomføring 27
  - 4.3.4 Eksempler på klassifisering 31
  - 4.3.5 Alternativt rammeverk og analyseverktøy 32

5 **Funn** 34
- 5.1 **Skjev fordeling av eksempler** 34
- 5.2 **Heuristiske metoder i bøkene** 35
  - 5.2.1 Antall 35
  - 5.2.2 Fordeling 36
  - 5.2.3 Fordeling i underkategorier 39
  - 5.2.4 Metoder i kombinasjon 40
  - 5.2.5 Variasjon fra 1T til R1 44
- 5.3 **Problemløsningsprosessen i lærebøkene** 45
  - 5.3.1 Ingen generell innføring i problemløsning 45
  - 5.3.2 Pólyas fjerde trinn: ”å se tilbake” 46

6 **Diskusjon** 48
- 6.1 **Bruken av heuristiske metoder i eksemplene** 48
  - 6.1.1 Er høy forekomst av heuristiske metoder en indikasjon på problemløsning? 48

6.1.2 Algebra preger metodebruken ... 49
6.1.3 Er det metodefavoritter i ulike lærebokserier og matematikkurs? ... 50
6.1.4 Diskusjon av utvalgte eksempler ... 52
6.1.5 Tilfeldig og "skjult" metodebruk ... 60

7 Oppsummering ... 62
7.1 **Konklusjon ... 62**
7.2 **Fremtidig forskning ... 63**

Litteraturliste ... 64

Lærebøker ... 69

Figurer og tabeller ... 70

Vedlegg ... 71
Vedlegg 1: Analyseskjema – Aschehoug: *Matematikk 1T* ... 71
Vedlegg 2: Analyseskjema – Aschehoug: *Matematikk R1* ... 73
Vedlegg 3: Analyseskjema - Cappelen Damm: *Sinus 1T* ... 74
Vedlegg 4: Analyseskjema - Cappelen Damm: *Sinus R1* ... 76
Vedlegg 5: Analyseskjema – Gyldendal: *Sigma 1T* ... 77
Vedlegg 6: Analyseskjema – Gyldendal: *Sigma R1* ... 79

1 Innledning

Jeg har alltid likt å jobbe med matematikk og logikkoppgaver, og har lenge hatt interesse for matematisk problemløsning. Mestringsfølelsen man får av å løse et vanskelig problem man har strevet lenge med er fantastisk. Mye av grunnen til at jeg vil bli matematikklærer er for å kunne spre den gleden, og vise elevene spennende måter å løse matematikkproblemer på. Både oppgaver på skolen, morsomme gåter og problemer, samt sudoku (et logikkbasert, kombinatorisk "tallkryssord") har opptatt meg i timevis opp gjennom årene. Jeg frydes over å oppdage mønster og sammenhenger og knytte det sammen til en helhet.

Problemløsning er noe av det mest sentrale i matematikken (Björkquist, 2003; Schoenfeld, 1992). Halmos (1980, s. 519) skriver for eksempel:

> What does mathematics really consist of? Axioms (such as the parallel postulate)? Theorems (such as the fundamental theorem of algebra)? Proofs (such as Godel's proof of undecidability)? Concepts (such as sets and classes)? Definitions (such as the Menger definition of dimension)? Theories (such as category theory)? Formulas (such as Cauchy's integral formula)? Methods (such as the method of successive approximations)? Mathematics could surely not exist without these ingredients; they are all essential. It is nevertheless a tenable point of view that none of them is at the heart of the subject, that the mathematician's main reason for existence is to solve problems, and that, therefore, what mathematics really consists of is problems and solutions.

Problemløsning kan anses som kjernen i matematikk. Ole Björkquist, professor i matematikkdidaktikk ved Åbo Akademi i Finland, poengterer at problemløsning alltid er

> forbundet med muligheter for nye utfordringer i form av nye problemer. [...] Denne «organiske» egenskapen – at problemløsning både *er* og fremmer utvikling – innebærer at problemløsning framstår som en svært hensiktsmessig komponent når nye generasjoner skal bygge opp sin egen matematiske kunnskap (Björkquist, 2003, s. 51)

Læreplanen LK06 slår klart fast i formålet til faget at «problemløysing høyrer med til den matematiske kompetansen. Det er å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig det er» (Utdanningsdirektoratet [UDIR], 2010a, s. 2).

Det er derfor rimelig at norske elever burde lære seg problemløsning. Spesielt viktig er det med matematisk problemløsning. Dette kommer også frem i vurderingsveiledningen til eksamen 2012 der det er et eget avsnitt *Kjennetegn på måloppnåelse*, der problemløsning er et eget punkt (UDIR, 2012e). Altså skal elevens problemløsningsevner vurderes til eksamen. Likevel tyder mye på at oppgavene gitt på eksamen i liten grad stiller krav til problemløsningsevne. To masteroppgaver som undersøkte hvorvidt oppgavene som gis på eksamen stiller krav til problemløsningsevne, konkluderte begge med at oppgavene på eksamen i liten grad krever problemløsningsevne (Fossum, 2009; Leer, 2009).

Alseth, Breiteig og Brekke (2003) hevder etter sin undersøkelse av læreplanen L97 at skriftlig eksamen er sterkt styrende for innholdet i matematikkundervisningen, og at eksamen derfor har en tilbakevirkende effekt på undervisningen. Når eksamensoppgavene i liten grad krever problemløsningsevne er det derfor grunn til å tro at dette igjen påvirker undervisningen ved at det fokuseres på andre typer oppgaver.

Jeg vil undersøke i hvilken grad problemløsning blir presentert i lærebøkene i matematikk. Dersom det viser seg at lærebøkene heller ikke fokuserer på problemløsning, i tillegg til at eksamensoppgavene i liten grad stiller krav til problemløsningsevne, er det kanskje ikke så rart at norske elever presterer dårlig på problemløsningsoppgaver i internasjonale undersøkelser som TIMSS og PISA (Grønmo, Onstad, & Pedersen, 2010; Kjærnsli, Lie, Olsen, & Roe, 2007; Kjærnsli & Roe, 2010).

Som en vordende lærer ønsker jeg å hjelpe elevene mine til å bli bedre problemløsere, og jeg tror et godt utgangspunkt for dette er å utruste elevene med verktøy for problemløsning. Et godt utgangspunkt for dette er strategier og metoder for hvordan man kan jobbe og tenke for å løse et matematisk problem. Jeg håper å vekke interessen deres for matematikk og matematiske problemer ved å vise frem de mange ulike metodene for problemløsning.

1.1 Mål med studien

Denne oppgaven vil se på om læreplanens fokus på problemløsning stadfestes i matematikken som fremstilles i lærebøkene for videregående skole. Eksponeres elevene for problemløsning og problemløsningsteknikker ved å se på eksemplene i læreboken? I oppgaven vil problemløsningsmetoder også kalles heuristiske metoder, i tråd med litteraturen som presenteres i teorikapitlet.

Det er rimelig å anta at eksemplene og teorien i lærebøkene gir en god pekepinn på om elevene undervises i problemløsning, siden funn viser at lærebøkene spiller en uvanlig viktig rolle i norske klasserom (Kongelf, 2011; Schmidt, McKnight, Valverde, Houang, & Wiley, 1996). Imsen (2003) fant i en undersøkelse av 63 norske skoleklasser at lærebøkene var lærerens viktigste hjelpemiddel ved planlegging av undervisning i matematikk på tiende trinn. Nest viktigst var læreplanen. I tillegg oppgir både lærere og elever at mye av tiden på skolen går med til å løse oppgaver som likner på eksemplene i boken (Grønmo, et al., 2012; Grønmo, et al., 2010; Kjærnsli & Roe, 2010). Læreplanen og lærebøkene er av den grunn et godt materiale for denne studien.

Tom Rune Kongelf undersøkte i sin doktorgradsavhandling hvorvidt 740 eksempler fra ulike lærebøker på niende trinn stiller krav til typiske problemløsningsteknikker. Resultatet var at de i liten grad gjorde det (Kongelf, 2011). Jeg vil med min studie finne ut om det samme er tilfellet på videregående også.

Studiet av problemløsning i lærebøkene er altså relevant fordi problemløsning er en sentral del av matematikken og elevene forventes å mestre problemløsning. Dette kommer frem i den intenderte læreplanen og vurderingsveiledninger (Utdanningsdirektoratet, 2010a, 2012e). Siden lærebøkene har en sentral rolle i matematikkundervisningen, er det viktig å vite om elevene kan lære om problemløsning ved å bruke lærebøkene som informasjonskilde.

Læreplanen i matematikk er per dags dato til revisjon. Denne studien er derfor svært relevant både for forlag og myndigheter. Den vil vise om intensjonene i læreplanen blir implementert i lærebøkene. Funnene vil belyse praksis i skolen og kan legge grunnlaget for eventuelle endringer, både i læreplanen og lærebøkene. Forlagene vil høyst sannsynlig lage nye lærebøker som er tilpasset endringene i læreplanen. Funnene i denne undersøkelsen vil kunne bidra til å belyse eventuelle områder med forbedringspotensiale i lærebøkene, noe forlagene kan ta til etterretning når de nye lærebøkene forfattes.

1.2 Kapitteloppbygging

Kapittel 2 presenterer problemstillingen og forskningsspørsmålene i denne studien.

Kapittel 3 omhandler teori om problemløsning og problemløsningens plass i de norske læreplanene siden 80-tallet. Det blir redegjort for hvilke definisjoner og begreper som er sentrale og som benyttes i studien. Presentasjonen av læreplanene belyser det første forskningsspørsmålet.

Kapittel 4 behandler metodologien og rammeverket for studien. Det blir gjort rede for utvalg og begrensninger. Til slutt presenteres analyseprosedyren, samt eksempler på klassifisering av problemløsningsmetoder i eksemplene.

Kapittel 5 viser funnene gjort i analysen med flere eksempler. Funnene presenteres ved bruk av tabeller og figurer som visuelle hjelpemidler.

Kapittel 6 er en diskusjon av funnene i kapittel 5, og utvalgte eksempler diskuteres. Dette knyttes opp mot forskningsspørsmål 2.

Kapittel 7 oppsummerer studien, svarer på problemstillingen og ser fremover mot ny forskning, revidert læreplan og nye lærebøker.

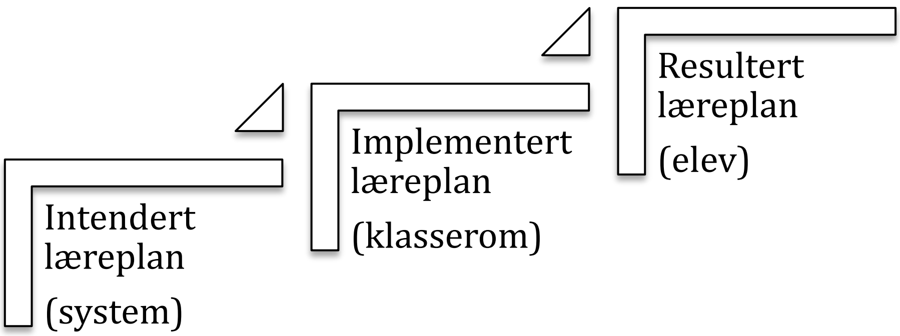
2 Problemstilling og forskningsspørsmål

Med utgangspunkt i den presenterte bakgrunnen er problemstillingen for denne studien som følger: *I hvilken grad belyses problemløsning i algebraeksemplene i matematikklærebøkene for videregående skole?*

For å svare på problemstillingen har jeg formulert følgende forskningsspørsmål:

1. Hva sier læreplanen i matematikk om problemløsning?
2. Hvilke heuristiske metoder, og hvor ofte, blir benyttet i utvalgte eksempler i matematikklærebøkene?

Det første forskningsspørsmålet utdyper hva som menes med problemløsning i læreplanen. Læreplanen kan tolkes på ulike nivåer. I forbindelse med TIMSS-undersøkelsene er det utviklet er hierarki av "læreplantyper" med tre ulike nivåer:



Figur 1: Læreplanens tre nivåer (Gjone, 2003; Lie, Kjærnsli, & Brekke, 1997; Robitaille, et al., 1993)

På systemnivået finner vi den intenderte læreplanen slik den er vedtatt av myndighetene. Den vil tolkes blant annet av lærere og lærebokforfattere, og deres måte å gjennomføre denne på er den implementerte læreplanen på klasseromsnivå. Hva den enkelte elev til slutt tar med seg videre av denne er den resulterte læreplanen på elev/individnivå (Gjone, 2003).

Det er den intenderte læreplanen som er gjenstand for analyse i denne oppgaven. Jeg tolker innholdet i læreplanen, men tar den ikke i bruk i klasserommet. Analysen vil slå fast hvorvidt problemløsning er noe elevene *skal* lære.

I og med at problemløsning og metodebruk er utgangspunktet for analysen, er forskningsspørsmålet er viktig fordi hensikten er å slå fast at problemløsning, og metodebruken knyttet til problemløsningen, er forankret i læreplanen. I teoridelen blir de tre siste læreplanene presentert med fokus på problemløsning. Dermed blir det første forskningsspørsmålet belyst i teorikapitlet.

Av hensyn til oppgavens omfang vil analysen begrenses til å omfatte matematikkursene 1T og R1. I tillegg ble analysen også begrenset til delkapitler i lærebøkene som omfattes av hovedområdet *Tall og algebra* i læreplanen for matematikk 1T og *Algebra* for matematikk R1. Utvalget ble gjort med kompetansemålene under *(Tall og) algebra* som utgangspunkt for hvilke delkapitler som skulle analyseres.

Et viktig aspekt ved problemløsning er heuristikk (Pólya, 1973; Schoenfeld, 1985) som beskrives som oppdagelseskunst (Gundersen & Berulfsen, 2008; Pólya, 1973). Heuristikk og heuristiske metoder vil i denne oppgaven forstås som strategier eller metoder for å forstå og hjelpe til å løse (matematiske) problemer. Det andre forskningsspørsmålet vil belyse om heuristiske metoder presenteres i lærebøkene, og i så fall hvordan og i hvilken utstrekning. Dette forskningsspørsmålet vil derfor bekrefte om intensjonene i den intenderte læreplanen resulterer i gjennomføring i den implementerte læreplanen slik den tolkes og fremstilles av lærebokforfatterne.

Denne studien tar utgangspunkt i at problemløsning krever bruk av heuristiske metoder og at forekomsten av heuristiske metoder i lærebøkene derfor indikerer hvorvidt bøkene formidler problemløsning. Kongelf (2011) fant at de heuristiske metodene i grunnskolebøkene hovedsakelig ikke var presentert bevisst, men heller var et resultat av ubevisst kulturell praksis. I tillegg var utvalget av metoder ensartet: enkelte metoder ble brukt mye, andre var nesten totalt fraværende. Med dette som bakteppe forventet jeg i min analyse å finne tilsvarende i de utvalgte eksemplene i lærebøkene for videregående skole.

3 Teori

3.1 Problemer og problemløsning

3.1.1 Hva er et problem?

Det har gjennom tidene figurert mange forskjellige definisjoner på både hva et problem er og hva som følgelig menes med problemløsning. I matematikken har problemer tradisjonelt sett blitt likestilt med matematiske oppgaver som skal utføres (Schoenfeld, 1992). Denne definisjonen inkluderer rutineoppgaver som har til hensikt å gi trening i spesifikke løsningsteknikker, men som ikke nødvendigvis oppleves som utfordrende eller vanskelig for problemløseren (Björkquist, 2003). En annen definisjon som omfavner denne problematikken er blitt vanligere i bruk: et problem er ikke bare en matematisk oppgave som skal utføres, det er en matematisk oppgave der løsningsmetoden(e) i utgangspunktet er ukjent for problemløseren. Denne definisjonen er individrelatert og dynamisk; En situasjon som oppleves som et problem for noen, er ikke nødvendigvis et problem for andre, og noe kan oppfattes som et problem ved et tidspunkt, men ikke oppleves slik ved et annet tidspunkt. (Björkquist, 2003; Pólya, 1973; Schoenfeld, 1992; Solvang, 1992)

Denne studien har til hensikt å analysere eksempler presentert i matematikklærebøker. Derfor vil jeg i denne oppgaven, som Kongelf (2011), ikke bruke sistnevnte definisjon av begrepet problem, selv om det er den som er rådende i problemløsningslitteraturen. Fokuset i denne oppgaven er ikke på hvorvidt problemløseren sitter fast på et punkt eller ikke i problemløsningsprosessen, men hvordan problemløseren løser problemet ved hjelp av hvilke metoder. Metodebruken er av interesse uansett om det for problemløseren er utført av rutine eller må ”søkes frem”. Dette fører nødvendigvis til at alle situasjoner som krever en avgjørelse blir definert som problem (Kongelf, 2011), og det er slik det defineres her. Dessuten vil det hjelpe til med å gjøre analysen mer konkret ved at denne definisjonen ikke er knyttet til problemløseren: Jeg som forsker vil slippe å spekulere i hvilke krav jeg tror oppgaven stiller til den enkelte problemløser. Et alternativt analyseverktøy som tar utgangspunkt i den individrelaterte definisjonen vil omtales i metodekapitlet.

3.1.2 Hva menes med problemløsning?

Problemløsning har, på lik linje som begrepet problem, flere og ofte motsigende betydninger (Schoenfeld, 1992). Mens begrepet problem har hatt en viktig plass i skolematematikken siden antikken, er problemløsning relativt nytt (Stanic & Kilpatrick, 1989). Solvang (1992, s. 135) definerer problemløsning som «å søke etter handlinger som fører til en løsning av et problem». Denne definisjonen tar utgangspunkt i den rådende definisjonen av problem, men jeg har ingen motforestillinger mot å bruke denne definisjonen som utgangspunkt i denne oppgaven, selv om jeg definerer problem annerledes. Dersom løsningsmetoden anses som kjent, må problemløseren kun bruke mindre tid på å ”søke” etter løsningsmetode.

I årboken fra 1980 til National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) tolker Branca (1980) problemløsning på tre måter; Problemløsning som mål, problemløsning som prosess og problemløsning som grunnleggende ferdighet. Dersom problemløsningen er et mål er den uavhengig av spesifikke problemer, prosedyrer og metoder, og også matematisk innhold: Hovedargumentet for å studere matematikk er å lære å løse problemer. Problemløsning som prosess innebærer et fokus på metodene, prosedyrene og strategiene problemløseren bruker for å løse et problem. Dersom man tolker problemløsning som grunnleggende ferdighet ser man på innholdet i et problem, problemtyper og løsningsmetoder. Man fokuserer på det essensielle ved problemløsningen som alle elever må lære (Branca, 1980, s. 3-4).

Stanic og Kilpatrick (1989) identifiserer også tre temaer som har preget problemløsningens rolle i læreplanene i matematikk. De tre temaene er problemløsning som kontekst, problemløsning som ferdighet og problemløsning som kunst. Problemløsning som kontekst har flere underkategorier. Man ser problemløsning som begrunnelse, motivasjon, rekreasjon, middel og øvelse. Alle underkategoriene baserer seg på tanken om at problemer og problemløsning er midler for å oppnå ulike mål. Problemløsning som ferdighet innebærer at problemløsning ses på som en mengde ferdigheter som kan læres bort i skolen. Det påpekes at dette medfører et hierarki der man skiller mellom rutine og ikke-rutine problemer, og at sistnevnte blir forbeholdt ”de heldige få” som mestrer rutineproblemene. Problemløsning som kunst stammer fra Pólya og er den mest omfattende forståelsen av problemløsning. For Pólya var problemløsning en kunst som kan læres ved imitasjon og øvelse med veiledning. Dessverre blir ofte problemløsning som kunst redusert til problemløsning som ferdighet når man forsøker å undervise: De generelle heuristiske metodene reduseres til teknikker eller algoritmer som passer spesifikke problemer. Problemløsning som kunst er den mest fruktbare forståelsen, men også den som er vanskeligst å operasjonalisere i lærebøker og klasserom (Stanic & Kilpatrick, 1989, s. 17). Schoenfeld (1985, 1992) advarer mot de mange fallgruvene når man skal lære bort problemløsning som kunst, og påpeker at heuristikk à la Pólya muligens krever et visst matematisk nivå, og anbefaler med det universitetsnivå. Pólyas heuristikker er generelle og kan deles opp i flere mer spesifikke strategier/metoder slik som de metodene som er omtalt i denne oppgaven. Undervisning vedrørende disse metodene kan være gunstig ifølge Schoenfeld (1992).

3.1.3 Problemløsningsprosessen

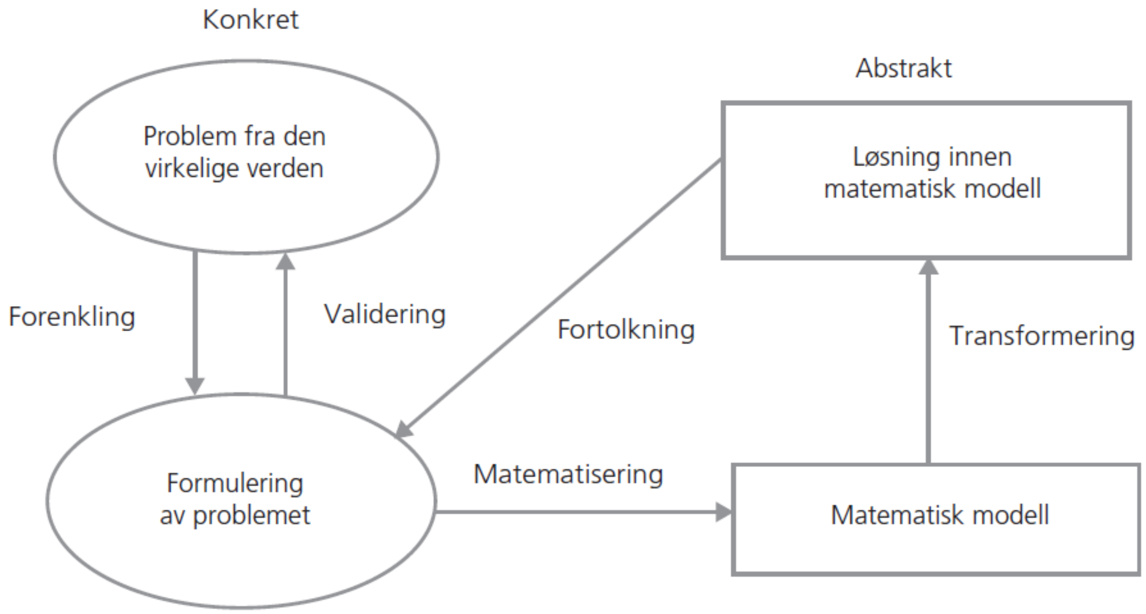
George Pólya har vært sentral i begrepsutviklingen rundt problemløsning i moderne tid og i den kjente klassikeren ”How to solve it”, første gang utgitt i 1943, presenterer Pólya (1973, s. xvi-xvii) en firetrinns ”oppskrift” på hvordan man løser problemer:

1. Å forstå problemet
2. Å legge en plan
3. Å gjennomføre planen
4. Å se tilbake

Denne ”oppskriften” er generell og Pólya lister opp flere mer spesifikke strategier eller heuristikker under hvert punkt. Pólyas firetrinns ”oppskrift” har mye til felles med det Ole Björkquist, professor i matematikkdidaktikk ved Åbo Akademi i Finland, definerer som matematisk modellering:

> Utgangspunktet er at det foreligger et ekte problemområde i en kontekst som ikke oppfattes som matematikk (skolematematikk). Man går gjennom en prosess med en del tydelige trinn som til sammen fører til for eksempel økt forståelse eller praktisk nytte innenfor denne konteksten (Björkquist, 2003, s. 56).

Björkquist (2003, s. 56) anser matematisk modellering som en prosess og «den mest fullstendige typen matematisk problemløsning». For å bli gode i denne type problemløsning må elevene lære seg mange ulike strategier og innfallsvinkler når de møter et matematisk problem. I rapporten fra TIMSS 2008 blir en figur som illustrerer matematisk modellering presentert, og figuren har mye til felles med Pólyas oppskrift (se Figur 2).



Figur 2: Matematisk modellering (Grønmo, et al., 2010, s. 32)

Matematisk problemløsning har også mange fellestrekk med det som Elstad og Turmo (2006, s. 15) beskriver som læringsstrategier; «en betegnelse som knyttes til elevenes strategiske oppmerksomhet om egne læringsprosesser». Videre defineres læringsstrategier på følgende måte: «hvordan elever på en aktiv, fleksibel og effektiv måte kan tilnærme seg ulike typer læringssituasjoner og ulike typer lærestoff» (Elstad & Turmo, 2006, s. 16). Dette kjennetegner også matematisk problemløsning. Undervisning i matematisk problemløsning vil derfor ha mange av de samme komponentene som undervisning i læringsstrategier. Faktisk sier læringsplakaten at «skolen og lærebedrifta skal stimulere elevane og lærlingane/lærekandidatane til å utvikle eigne læringsstrategiar og evne til kritisk tenking» (UDIR, 2010b, s. 2). Altså plikter læreren å undervise i læringsstrategier, som i matematikkundervisning stort sett sammenfaller med undervisning i metodebruk og problemløsning. Kopka og Pedersen (2000, s. 113) gir eksempler på strategier; transformere, løse et analogt problem, spesialisere, generalisere, arbeide baklengs, eksperimentere systematisk, illustrere og konkretisere, innføre hjelpestørrelser, lage selvmotsigelser, lete etter mønster og løse delproblemer. Mange av disse strategiene vil vise seg å sammenfalle med de heuristiske metodene denne analysen baseres på.

3.1.4 Problemløsning og heuristikk, to sider av samme sak?

Pólya (1973) knyttet problemløsning til heuristikk. Faktisk er heuristikk blitt så godt som synonymt med matematisk problemløsning ifølge Schoenfeld (1985). Heuristikk defineres i fremmedordboken som «oppfinnelseskunst, læren om de metoder som tjener til å vinne nye vitenskapelige resultater» (Gundersen & Berulfsen, 2008). Målet med heuristikk er ifølge Pólya å studere metodene og reglene for oppdagelse og oppfinnelse (Pólya, 1973). Dersom vi isolerer læringsstrategiene nevnt tidligere til matematisk problemløsning, kan vi si at det er snakk om heuristiske metoder. Jeg vil komme tilbake til at strategier omtales i læreplanen, og at jeg tolker det til å omfatte de heuristiske metodene jeg diskuterer i denne oppgaven.

Det er reist mye kritikk mot Pólya og hans heuristiske metoder, spesielt rettet mot det at de er deskriptive heller enn preskriptive. Med det menes at beskrivelsene av de heuristiske metodene gjør det mulig å gjenkjenne strategiene når de brukes, men at de ikke gir de nødvendige detaljene for å gjøre elever som ikke kjenner strategiene fra før i stand til å bruke dem for å løse problemer (Kongelf, 2011, s. 15; Schoenfeld, 1992). Schoenfeld (1992) påpeker at det på 1970-tallet var lite empirisk bevis som støttet at heuristikk kunne forbedre problemløsning, men at funnene utover 80-tallet snudde seg mer i Pólyas favør. Schoenfeld (1992) viser til studier som har vist at undervisning i generell problemløsning ikke nødvendigvis gjør elevene i stand til å overføre teknikkene til nye situasjoner, men påpeker at nyere funn indikerer at elever kan dra nytte av å lære seg mer spesifikke metoder, som for eksempel de heuristiske metodene.

Alan Schoenfeld er som Pólya kjent for å engasjere seg for å forstå matematisk tenkning og problemløsning. Også Schoenfeld fokuserer på heuristikk. Schoenfeld har utviklet et rammeverk for analyse av problemløsningsprestasjon som består av fire aspekter: Ressurser, heuristikk, kontroll og oppfatninger [belief systems] (Schoenfeld, 1985). Hans rasjonale for å studere og undervise i heuristikk er basert på tanken om at elever stadig møter problemer i matematikk. Etter hvert som de løser problemer vil de huske hvilke metoder som førte frem og ikke, og utvikle ”favoritter” som etter hvert blir en del av elevens løsningsstrategier. Resultatet blir at hver elev utvikler et personlig sett med problemløsningsstrategier. Studier har vist at mange metoder er ”gjengangere”, og ved å undervise i disse metodene kan man spare elevene for å måtte oppdage metodene på egenhånd (Schoenfeld, 1985, s. 70-71).

3.1.5 Undervisning i problemløsning

Problemløsning er en kompleks prosess og følgelig vanskelig å undervise i (Lester, 1996). Det er forsket mye på hvordan man best kan undervise i problemløsning, og Lester (1996) gjennomgikk rådende litteratur om undervisning i problemløsning og presenterte en liste med fire hovedprinsipper:

I. Elever må løse mange problemer for å forbedre sin problemløsningsevne

II. Problemløsningsevne utvikles sakte over lang tid

III. Elever må tro at deres lærer synes problemløsning er viktig for at de skal ta til seg undervisning i/om problemløsning

IV. De fleste elever tjener på systematisk undervisning i problemløsning

(Lester, 1996, s. 87, egen oversettelse)

Ifølge Wyndhamn og Säljö (1997, s. 363) er nyere tolkninger av problemløsning basert på det som kan beskrives som et interaksjonistisk perspektiv (interactionist perspective) som forsøker å forstå menneskelig kognisjon ved å se på situasjoner og kontekster som oppfordrer mennesker til å delta i visse aktiviteter, men ikke andre. I lys av lærebokens sterke posisjon ved planlegging og gjennomføring av matematikkundervisning i norske klasserom (Schmidt, et al., 1996; Skjelbred, Solstad, & Aamotsbakken, 2005) er det i et interaksjonistisk perspektiv rimelig å anta at lærebøkenes presentasjon av heuristiske metoder, eller manglende presentasjon som sådan, begrenser aktivitetene elevene og lærere deltar i, og derfor også læringsmulighetene (Kongelf, 2011; Wyndhamn & Säljö, 1997). Det samme gjelder eksamensoppgavene som i liten grad stiller krav til problemløsningsevne (Fossum, 2009; Leer, 2009). ”Teach to the test” er et begrep som omhandler problematikken som oppstår når undervisningen hovedsakelig fokuserer på pensum som er på ulike tester, for eksempel nasjonale prøver. ”Teach to the test” fører til overfokusering i undervisningen på enkelte områder, temaer og ferdigheter, og utelukker andre. Når problemløsningsevne ikke kreves på viktige eksamener og tester kan det derfor føre til enda mindre fokus på dette i undervisningen.

3.1.6 Vurdering i matematikk – et spørsmål om problemløsningsevne?

I vurderingsveiledningen til eksamen på studiespesialiserende program på VGS kommer det tydelig frem at elevene skal vurderes etter problemløsningsevne. Det refereres blant annet til formålet med faget, i tillegg til at det er et eget avsnitt med kjennetegn på måloppnåelse der problemløsning er et av tre punkter. Kjennetegnene på måloppnåelse uttrykker i hvilken grad eleven har nådd kompetansemålene i læreplanen, og er ment å være til hjelp for sensors faglige skjønn når elevens prestasjon vurderes (UDIR, 2012e, s. 19). I teorien er altså problemløsning noe elevene burde lære seg å mestre dersom de ønsker å gjøre det godt på eksamen. En annen interessant diskusjon dukker opp i kjølvannet av denne intensjonen om at elevene skal vurderes etter problemløsningsevne på eksamen. Vi har sett at flere undersøkelser (Fossum, 2009; Leer, 2009) konkluderer med at eksamensoppgavene i liten grad stiller krav til problemløsningsevne. Hvordan skal elevene da kunne vurderes etter problemløsningsevne?

3.2 Problemløsning i de norske læreplanene

Problemløsning har spilt en varierende rolle i de norske læreplanene. I det følgende vil jeg gi en kort gjennomgang av problemløsning i de tre siste læreplanverkene.

3.2.1 Problemløsning i Mønsterplanen 87

I mønsterplanen M87 var problemløsning tatt med som et eget hovedemne for første gang (Botten, 2003), og det ble slått fast at «det skal være en del av all matematikkopplæring» (Kirke- og undervisningsdepartementet [KUD], 1987, s. 195). Matematikk skulle være et verktøy for å løse praktiske problemer, og arbeidet skulle bygge på og utvikle elevenes kreative og skapende evne. Schoenfeld (1992, s. 338) er av den mening at mye av den generelle utviklingen rundt problemløsning i læreplanene på 80-tallet kan sies å falle inn under problemløsning som ferdighet slik Stanic & Kilpatrick (1989) beskrev det. I M87, med problemløsning som eget hovedemne, kan man si at problemløsning ble sett på som en ferdighet, en ferdighet elevene burde erverve seg gjennom undervisning. Mønsterplanen beskrev problemløsning som en prosess med flere ledd, tydelig inspirert av Pólya (Botten, 2003). Altså var problemløsning «tiltenkt en både grunnleggende og overordnet del i læreplanen» (Botten, 2003, s. 142). Fagplanen i matematikk (KUD, 1987, s. 196) presenterte problemløsning som en prosess som består av fire ledd:

- Å formulere problemet
- Å analysere problemet og komme frem til en løsningsmetode
- Å foreta de nødvendige beregninger
- Å vurdere fremgangsmåte og resultater

Dette likner i stor grad på Pólyas presentasjon av problemløsning. Videre i læreplanen ble det presisert hvordan dette skulle gjennomføres ved arbeidsmetoder og ulike teknikker elevene burde tilegne seg (KUD, 1987).

3.2.2 Problemløsning i Reform 94/Læreplanen L97

I læreplanen L97, som avløste mønsterplanen M87, var ikke problemløsning et eget tema lenger. Nytteaspektet var dominerende (Gjone, 2003), for eksempel var *Matematikk i dagliglivet* et av fem hovedtemaer, og et mål for opplæringen var at «matematikk blir et redskap elevene kan ha nytte av på skolen, i fritiden og i arbeids- og samfunnsliv» (Det kongelige kirke-, utdannings- og forskningsdepartement [KUF], 1996, s. 158). Det var fokus på utforskende aktiviteter, for eksempel skulle elevene på alle nivåer blant annet få mulighet til å «undersøke og utforske sammenhenger, finne mønstre og løse problemer» og «samarbeide om å løse oppgaver og problemer» (KUF, 1996, s. 156). Dette har klare paralleller til matematisk modellering og åpnet for arbeidsmetoder som passer med problemløsning. Det ble også fremhevet i målet for faget at elevene «utvikler innsikt i grunnleggende begreper og metoder i matematikk, og utvikler sin evne til å se sammenhenger og strukturer og kunne forstå og bruke logiske resonnementer og trekke slutninger» (KUF, 1996, s. 158).

3.2.3 Problemløsning i læreplanen Kunnskapsløftet LK06

I dagens læreplan LK06 blir problemløsning omtalt som en del av den matematiske kompetansen (UDIR, 2010a), og slik jeg ser det, behandles problemløsning fortsatt som en ferdighet. Definisjonen av matematisk kompetanse i LK06 er hentet fra rapporten til det danske prosjektet ”Kompetencer Og Matematiklæring” (Niss & Jensen, 2002), og er som følger:

> Matematisk kompetanse består i å ha kunnskap om, å forstå, å utøve, anvende og ta stilling til matematikk og matematikkvirksomhet i et mangfold av sammenhenger der matematikk inngår eller kan komme til å inngå. Matematisk kompetanse er innsiktsfull parathet til å handle hensiktsmessig i situasjoner som rommer en bestemt slags matematiske utfordringer (Utdanningsdirektoratet, s. 1)

Videre deles den matematiske kompetansen i åtte delkompetanser der problembehandlingskompetanse er en av åtte:

> Problembehandlingskompetanse består i å kunne formulere matematiske problemer, og kunne løse egne og andres problemer. Problemene kan være åpne eller lukkede, ren eller anvendt matematikk. Med problem menes at oppgaven ikke kan løses ved hjelp av rutineferdigheter (Utdanningsdirektoratet, s. 2-3)

I LK06 er problemløsning omtalt eksplisitt i læreplanen for matematikk fellesfag (matematikk til og med 1VGS) fem ganger, og to av disse er i formålet med faget:

> Problemløysing høyrer med til den matematiske kompetansen. Det er å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig det er (...) opplæringa vekslar mellom utforskande, leikande, kreative og problemløysande aktivitetar og ferdigheitstrening (UDIR, 2010a, s. 2).

To andre forekomster er å finne under grunnleggende ferdigheter, henholdsvis i regning og bruk av digitale verktøy. Grunnleggende ferdigheter er felles for alle fag i skolen og skal være integrert i kompetansemålene der de er en del av og medvirker til å utvikle fagkompetansen (UDIR, 2010a). Den grunnleggende ferdigheten *å kunne regne* beskrives slik:

> Å kunne rekne i matematikk utgjer ei grunnstamme i matematikkfaget. Det handlar om problemløysing og utforsking som tek utgangspunkt i praktiske, daglegdagse situasjonar og matematiske problem. For å greie det må ein kjenne godt til og meistre rekneoperasjonane, ha evne til å bruke varierte strategiar, gjere overslag og vurdere kor rimelege svara er. (UDIR, 2010a, s. 5)

Kun ett sted i læreplanen er problemløsning omtalt i et kompetansemål. Det er i et kompetansemål under hovedområdet *Tall og algebra* etter tiende årstrinn:

> [eleven skal kunne] bruke, med og utan digitale hjelpemiddel, tal og variablar i utforsking, eksperimentering, praktisk og teoretisk problemløysing og i prosjekt med teknologi og design (UDIR, 2010a, s. 8).

Det levnes liten tvil om at utvikling av problemløsningsevne som ferdighet er svært sentralt i matematikkfaget og en del av læreplanen LK06s intensjoner.

Som i L97 er problemløsning i LK06 knyttet til arbeidsmetoder. Det at problemløsning hovedsakelig omtales i formålet og under grunnleggende ferdigheter, gjør det imidlertid vanskeligere å operasjonalisere. Det at problemløsning ikke lenger verken er et eget emne, eller er konkretisert i flere kompetansemål gjør det vanskeligere for læreren å bruke tid til å undervise i problemløsning, for eksempel ved å gå gjennom ulike heuristiske metoder.

Det blir i dagens læreplan poengtert at problemløsning er viktig, men mye tyder på at elevene ikke får opplæring i hvordan de skal bli gode i problemløsning. Det kan virke som om det forventes at elevene skal bli gode problemløsere uten å få direkte trening i det. Dette bekreftes i TIMSS Advanced-undersøkelsen (Trends in International Mathematics and Science studies) fra 2008, og i TIMSS-undersøkelsen fra 2007, ved at både lærere og elever oppgir i at det brukes veldig liten tid på å diskutere strategier for problemløsning og på å velge egne fremgangsmåter for å løse sammensatte problemer. Enda mindre tid brukes på å diskutere resonnement (Grønmo & Onstad, 2009; Grønmo, et al., 2010). I tillegg kommer det også frem at veldig få lærere oppgir at de har deltatt i faglig relevant etterutdanning i problemløsning.

De heuristiske metodene som brukes som utgangspunkt i denne oppgaven kan sies å være strategier slik de omtales i læreplanen, som for eksempel de siste strategiene som nevnes i den grunnleggende ferdigheten å skrive i matematikk: «Å kunne uttrykkje seg skriftleg i matematikk inneber å løyse problem ved hjelp av matematikk, beskrive og forklare ein tankegang og setje ord på oppdagingar og idear. Ein lagar teikningar, skisser, figurar, tabellar og diagram» (UDIR, 2010a, s. 4). Disse strategiene sammenfaller med de to heuristiske metodene ”lag en systematisk tabell” og ”lag en illustrasjon”.

3.2.4 Revisjon av LK06

Læreplanen i matematikk er en av flere læreplaner som per dags dato er oppe til revisjon. Grunnen til at Kunnskapsdepartementet har gitt dette oppdraget, er et ønske om å tydeliggjøre de grunnleggende ferdighetene og utvikling av disse (UDIR, 2012a). Resultatet er foreslåtte endringer i læreplanen i matematikk fellesfag og matematikk 2T og 2P. Også formålet med faget foreslås justert, og de grunnleggende ferdighetene beskrives mer omfattende, og dette inkluderer beskrivelser av utvikling av ferdighetene (UDIR, 2012b).

Vi har tidligere sett at problemløsning i LK06 først og fremst omtales i læreplanen i formålet og i beskrivelsen av de grunnleggende ferdighetene. Det er her det er foreslått størst endringer i læreplanen. Hvilke konsekvenser har dette med tanke på problemløsningens posisjon i læreplanen? De foreløpige utkastene viser at problemløsning blir styrket i læreplanen dersom endringene gjennomføres. For eksempel er det foreslått å legge til ”og modellering” i formålet: «problemløysing *og modellering* [egen kursiv] høyrer med til den matematiske kompetansen» (UDIR, 2012c, s. 1). Dette begrunnes ved at det vil tydeliggjøre at «modellering inngår i den grunnleggende ferdigheten å regne og i den matematiske kompetansen» (UDIR, 2012b, s. 3). Modellering er et viktig aspekt ved problemløsning (se 3.1.3), og når dette nå fremheves kan det styrke fokuset på problemløsning i læreplanen.

Rammeverket for de grunnleggende ferdighetene er et dokument som skal være styrende for hvordan de grunnleggende ferdighetene skal beskrives i hvert enkelt fag (UDIR, 2012d). Den grunnleggende ferdigheten *å kunne regne* innebærer blant annet å kunne ”velge holdbare metoder når problemene skal løses, være i stand til å gjennomføre dem og tolke gyldigheten og rekkevidden av resultatene” (UDIR, 2012d, s. 12). De beskriver ferdighetesområder i å kunne regne, som for eksempel ferdighetsområdet *bruke og bearbeide*:

> *Bruke og bearbeide* innebærer å kunne velge strategier for problemløsing. Det innebærer å kunne bruke passende måleenheter og presisjonsnivå, utføre beregninger, hente informasjon fra tabeller og diagrammer, tegne og beskrive geometriske figurer, bearbeide og sammenlikne informasjon fra ulike kilder (UDIR, 2012d, s. 12).

Med utgangspunkt i dette rammeverket er det nå foreslått følgende beskrivelse av *å kunne regne* i læreplanen:

> Å kunne rekne som grunnleggjande ferdigheit inneber å kunne bruke matematiske omgrep, framgangsmåtar og varierte strategiar til problemløysing og utforsking som tek utgangspunkt i praktiske, daglegdagse situasjonar og matematiske problem. Dette inneber å kunne kjenne att og beskrive situasjonar der matematikk inngår, og bruke matematiske metodar til å behandle problemstillingar. Eleven må òg kunne kommunisere og vurdere kor gyldige løysingane er. Utvikling av å kunne rekne i matematikk går frå å kjenne att og løyse problem ut frå enkle situasjonar til å kunne analysere og løyse eit spekter av komplekse problem med eit variert utval av strategiar og metodar. Vidare inneber dette i aukande grad å kunne bruke ulike hjelpemiddel i

berekningar og modellering, og samtidig ta i bruk fleire verkemiddel i kommunikasjonen kring prosess og resultat (UDIR, 2012c, s. 3).

Den nye beskrivelsen styrker, etter min mening, problemløsningens rolle i læreplanen kraftig. Jeg vil spesielt understreke at å kunne bruke varierte strategier for problemløsning er en grunnleggende ferdighet, og at det av den grunn burde være stort fokus på dette i undervisningen og i lærebøkene.

4 Metode

4.1 Design og metode

Problemstillingen for denne studien har vært: *I hvilken grad belyses problemløsning i algebraeksemplene i matematikklærebøkene for videregående skole?* For å kunne svare på problemstillingen formulerte jeg to forskningsspørsmål:

1. Hva sier læreplanen i matematikk om problemløsning?
2. Hvilke heuristiske metoder, og hvor ofte, blir benyttet i utvalgte eksempler i matematikklærebøkene?

For å svare på det første forskningsspørsmålet tolket og analyserte jeg dagens læreplan for å se hvilken rolle problemløsning spiller, både for å bekrefte at dette er noe som burde finnes i lærebøkene, og for å vite hva som menes med problemløsning i læreplanen. Det andre forskningsspørsmålet har jeg besvart ved å benytte meg av forskningsmetoden tverrsnittstudie (cross-sectional design) i form av dokumentanalyse. Ifølge Bryman (2012, s. 58) er en tverrsnittstudie innsamling av data i en populasjon (mer enn ett tilfelle/case) på et gitt tidspunkt, for å samle en mengde kvantitative eller kvantifiserbare data knyttet til to eller flere variabler som så sammenliknes for å se etter mønster. I analysen av eksemplene har jeg brukt analyseverktøyet til Kongelf (2011). Hensikten med dette verktøyet er å beskrive og å gjøre det mulig å gjenkjenne ni (i mitt tilfelle ti) heuristiske metoder i eksempler i lærebøkene. Bruken av disse heuristiske metodene vil indikere om eksemplene i lærebøkene gir elevene opplæring i problemløsningsmetoder.

Begge forskningsspørsmålene ble besvart ved hjelp av dokumentanalyse, om enn på forskjellig måte. Dokumentanalyse kan være både kvalitativ og kvantitativ (Ary, Jacobs, & Sorensen, 2010), og begge variantene er representert i denne oppgaven. Bryman beskriver innholdsanalyse som «en tilnærmingsmåte til dokumentanalyse og tekster (...) som forsøker å kvantifisere innhold i forhåndsbestemte kategorier på en systematisk måte som kan gjentas» (Bryman, 2012, s. 289, egen oversettelse). Analyseverktøyet brukt for å svare på det andre forskningsspørsmålet kan sies å være innholdsanalyse slik Bryman beskriver det, og faller med det innunder kvantitative metoder (Bryman, 2012). Analysen av læreplanen derimot hadde som mål å finne dybdeinformasjon om innholdet og kan anses som kvalitativ metode (Bryman, 2012; Mertens, 2005).

Det knytter seg både fordeler og ulemper til dokumentanalyse. Blant fordelene er at forskeren kan observere uten å bli observert (Ary, et al., 2010; Mertens, 2005). Det er ingen risiko for at forskeren påvirker datamaterialet. Det er derimot risiko for at forskerens forforståelse vil påvirke analysen siden forskeren selv i dette tilfellet er instrumentet for undersøkelsen. Kvaliteten på analysene avhenger altså i stor grad av meg som forsker. Derfor er det viktig at jeg gjør rede for ulike valg som er fattet, og gjør det enkelt å følge prosessen tilbake fra tolkning til de opprinnelige dataene. Alle analyseskjemaer er av den grunn vedlagt. Ved å bestemme kategorier og lage en kodingsmanual på forhånd begrenses også påvirkningskraften til min forforståelse: Jeg har kun fulgt forhåndsbestemte regler for kategorisering. Dersom jeg var usikker på noe angående kategorisering ble det diskutert med mine veiledere og vi ble enige om et resultat. Siden ble videre analyse basert på dette på en konsekvent måte.

En annen fordel med dokumentanalysen er at den er enkel å gjenta slik at andre forskere kan benytte samme verktøy under andre forhold eller sjekke troverdigheten i arbeidet. Problemer som kan oppstå er at kvaliteten til dokumentene er dårlig, dokumentene er ufullstendige eller ikke representative. Et ufullstendig dokument kan være et mangelfullt utkast, eller en gammel bok der sider mangler eller enkelte deler av teksten ikke er lesbar. Et dokument kan være lite representativt fordi dokumentet ikke nødvendigvis er skapt med forskning som øyemed. I tillegg kan dokumenter forvrenges eller forfalskes. Det er derfor viktig å ta hensyn til hvorfor dokumentet ble laget og hvorvidt det er fullstendig og representativt for det som skal undersøkes.

I denne studien er det offentlige læreplaner og utgitte lærebøker som analyseres. Siden analysen tar for seg de gjeldende læreplanene for fagene som undersøkes, er utvalget av læreplaner representativt, og læreplandokumentene er fullstendige. Også lærebøkene er fullstendige, de mangler ingen sider eller liknende. Utvalget i lærebøkene er også representativt i analysen fordi alle kompetansemålene i det utvalgte hovedområdet i læreplanene for 1T og R1 er å finne i bøkene, og alle bøkene som brukes i de utvalgte kursene i videregående skole er representert i analysen.

Kvaliteten på både læreplanen og lærebøkene i faglig forstand vil nok alltids være en kime til diskusjon, og denne oppgaven er et eksempel på dette da den vurderer innholdet i eksempler i lærebøkene.

4.2 Utvalg

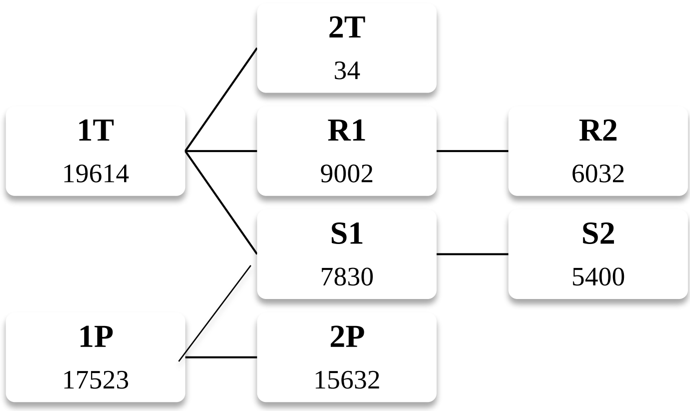
4.2.1 Hvorfor analyse av lærebøker og eksempler?

Som nevnt tidligere oppgir både norske lærere og elever at mye av skoletiden går med til å løse oppgaver som likner eksempler i boken (Grønmo, et al., 2010; Kongelf, 2011), og at lærebøkene spiller en eksepsjonelt viktig rolle i norske klasserom (Kongelf, 2011; Schmidt, et al., 1996). Dette bekreftes også i en rapport bestilt av Utdanningsdirektoratet om læremiddelbruk i den norske skolen (Skjelbred, et al., 2005). Lærebøkene er derfor høyst relevante når det kommer til hva elevene undervises i. Ifølge Lithner (2003) er det vanlig at elever løser oppgaver ved aktivt å bruke eksemplene i læreboken til å finne liknende problemer der de kan ”herme” etter løsningsmetoden. Til og med på universitetsnivå dominerer denne formen for resonnering, som Lithner kaller imiterende resonnering (Lithner, 2003). Eksemplene er derfor det jeg velger å fokusere på i analysen. De spiller en viktig rolle når elevene gjør oppgaver, og metodene som blir fremstilt her har fundamental påvirkningskraft.

En annen grunn til å studere lærebøker er at det ikke lenger finnes en godkjenningsordning for norske lærebøker slik det gjorde før. Nasjonalt læremiddelsenter var et spesialsenter for læremateriell i Norge og hadde frem til 2000, da det ble vedtatt å oppheve godkjenningsordningen, autorisasjon til å godkjenne norske lærebøker (Bratholm, 2001). I dag kan i teorien hvem som helst produsere lærebøker til bruk i norsk skole, og det er ikke nødvendigvis problemfritt. Studier som denne oppgaven kan være med på å kontrollere kvaliteten på lærebøkene som brukes.

4.2.2 Hvilke fag og skoletrinn?

Av hensyn til oppgavens omfang kan ikke alle matematikkvariantene på alle trinn undersøkes. For det første begrenses analysen til studiespesialiserende program (SSP). Studiespesialiserende program inkluderer matematikk fellesfag (1T og 1P) på Vg1, og de til sammen seks variantene av matematikkfaget i Vg2 og Vg3(2T, 2P, R1, S1, R2 og S2). De vanligste kombinasjonene er som følger:



Figur 3: De vanligste studieløpene i matematikk med elevantall i 2012/2013 på SSP (UDIR, 2013)

Denne oppgaven ble begrenset til matematikk 1T og R1 (øverste studieløp i Figur 3). T-varianten av matematikken er mer teoretisk orientert, mens P-varianten er praktisk orientert (UDIR, 2010a). Videre velger elevene matematikk for realfag (R-variantene) eller matematikk for samfunnsfag (S-variantene), eventuelt matematikk 2P som er avsluttende. Jeg valgte de to første årene på videregående fordi alle elever må ha matematikk disse årene. Grunnen til at jeg velger de mer teoretiske og realfaglige matematikkvariantene er at de som vil fortsette med matematikk etter videregående gjerne velger den retningen. Tanken er at det er disse elevene som virkelig trenger å lære seg å beherske problemløsning i matematikk siden de høyst sannsynlig vil måtte benytte seg av det i senere studier.

4.2.3 Hvilke bøker?

Det er i all hovedsak lærebøkene til tre forlag som brukes i matematikk på videregående skoler i Norge (Pedersen, 2012): Aschehoug med serien *Matematikk*, Cappelen Damm med serien *Sinus* og Gyldendal med serien *Sigma*. I denne oppgaven undersøkte jeg lærebøkene til disse tre forlagene for å sikre at utvalget er representativt.

Bøkene er som følger:

- Aschehougs *Matematikk 1T* (Heir, Erstad, Borgan, Engeseth, & Moe, 2009), heretter omtalt som *Matematikk 1T*
- Aschehougs *Matematikk R1* (Heir, Erstad, Borgan, Moe, & Skrede, 2007), heretter omtalt som *Matematikk R1*
- Cappelen Damms *Sinus 1T* (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Hanisch, & Hals, 2009), heretter omtalt som *Sinus 1T*
- Cappelen Damms *Sinus R1* (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Hanisch, & Hals, 2007), heretter omtalt som *Sinus R1*
- Gyldendals *Sigma 1T* (Sandvold, et al., 2009), heretter omtalt som *Sigma 1T*
- Gyldendals *Sigma R1* (Øgrim, et al., 2011), heretter omtalt som *Sigma R1*

4.2.4 Hvilke tema og hvilke eksempler?

For å begrense analysens omfang ytterligere har jeg valgt å se på læreplanens hovedområder *Tall og algebra* i matematikk 1T og *Algebra* i matematikk R1. Regning med tall og symboler er grunnleggende for matematikken, og algebra kan sammen med aritmetikk/tall regnes som «motoren i matematikken» (Grønmo, et al., 2012, s. 27). Grunnleggende ferdigheter og forståelse innenfor dette området er viktig for alle som bruker matematikk og potensialet for problemløsning er stort. Dessverre bekrefter den nyeste TIMSS-undersøkelsen at norske elever presterer bekymringsverdig dårlig i algebra (Grønmo, et al., 2012). Jeg valgte dette temaet fordi det har mye potensiale hva angår problemløsning, og også fordi det er et område norske elever sliter med.

Kompetansemålene i de utvalgte hovedområdene er som følger:

Etter 1T - Vg1 studieførebuande utdanningsprogram: Tal og algebra

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- tolke, tilarbeide og vurdere det matematiske innhaldet i ulike tekstar
- bruke matematiske metodar og hjelpemiddel til å løyse problem frå ulike fag og samfunnsområde
- rekne med potensar med rasjonal eksponent og tal på standardform, bokstavuttrykk, formlar, parentesuttrykk og rasjonale og kvadratiske uttrykk med tal og bokstavar, og bruke kvadratsetningane til å faktorisere algebrauttrykk
- løyse likningar, ulikskapar og likningssystem av første og andre grad og enkle likningar med eksponential- og logaritmefunksjonar, både med rekning og med digitale hjelpemiddel
- omforme ei praktisk problemstilling til ei likning, ein ulikskap eller eit likningssystem, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er

(UDIR, 2010a, s. 9)

Matematikk R1: Algebra

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- faktorisere polynomer ved hjelp av nullpunkter og polynomdivisjon, og bruke dette til å løse likninger og ulikheter med polynomer og rasjonale uttrykk
- omforme og forenkle sammensatte rasjonale funksjoner og andre symbolske uttrykk med og uten bruk av digitale hjelpemidler
- utlede de grunnleggende regnereglene for logaritmer, og bruke dem og potensreglene til å forenkle uttrykk og løse likninger og ulikheter
- gjøre rede for implikasjon og ekvivalens, og gjennomføre direkte og kontrapositive bevis

(UDIR, 2006, s. 5)

Med utgangspunkt i disse kompetansemålene har jeg valgt ut hvilke deler av bøkene som er aktuelle og med det hvilke eksempler som skal analyseres i bøkene. Dette resulterte i totalt 417 eksempler som er blitt analysert, i følgende utvalg:

Utvalg 1T-lærebøker

Aschehoug – *Matematikk 1T*	**Delkapittel**
Kap 1 – Tall og algebra	1-10 (hele)
Kap 5 – Mer algebra	1-7 (hele)

Cappelen Damm – *Sinus 1T*	**Delkapittel**
Kap 2 – Tallregning og algebra	1-9 (hele)
Kap 3 – Formler, likninger og ulikheter	1-8 (hele)
Kap 4 – Funksjoner og andregradsuttrykk	3,4,5,6,7,8,9
Kap 5 – Potenser og logaritmer	1-8 (hele)

Gyldendal – *Sigma 1T*	**Delkapittel**
Kap 1 – Matematikken rundt oss	1-8, 12, 13 14
Kap 3 – Potenser, logaritmer og eksponentiell vekst	1-10 (hele)
Kap 5 – Algebra	2-15
Kap 7 – Grafer og ulikheter	1,2

Utvalg R1-lærebøker

Aschehoug – *Matematikk R1*	**Delkapittel**
Kap 2 – Algebra	1-9 (hele)
Kap 5 – Funksjoner 2	1

Cappelen Damm – *Sinus R1*	**Delkapittel**
Kap 1 - Algebra	1-9 (hele)
Kap 2 – Logaritmer	1-7 (hele)

Gyldendal – *Sigma R1*	**Delkapittel**
Kap 2 – Bevis og bevisføring	1-6, 9
Kap 4 – Algebra	1-13 (hele)

Tabell 1: Utvalg i lærebøkene

4.3 Analyse

4.3.1 Hvilket analytisk rammeverk?

I lys av teorien vil jeg se etter bruken av heuristiske metoder i lærebøkene. I teorikapitlet så vi at bruken, og presentasjonen, av heuristiske metoder kan indikere i hvor stor grad elevene undervises i problemløsning ved bruk av lærebøkene siden heuristikk anses som et viktig aspekt ved problemløsning. Jeg vil ta utgangspunkt i analyseverktøyet utviklet av doktorgradsstudenten Kongelf (2011), og se etter bruken av ti utvalgte heuristiske metoder i lærebøkene.

4.3.2 Ti heuristiske metoder

Kongelf analyserte i arbeidet med sin doktorgrad eksempler i matematikklærebøker for grunnskolen. Han ønsket å identifisere hvilke av ni heuristiske metoder som ble benyttet, og hvor ofte. Under arbeidet til Kongelf kom en tiende metode til syne, nemlig ”bruk digitale hjelpemidler” (Kongelf, 2011). Jeg har valgt å inkludere denne metoden siden en av de grunnleggende ferdighetene i læreplanen er å kunne bruke digitale verktøy, og dette er en metode som vil kunne bli mer og mer sentral ettersom teknologien utvikler seg. De ti heuristiske metodene er som følger:

1. Se etter et mønster
2. Lag en systematisk tabell
3. Lag en illustrasjon
4. Prøv og feil
5. Løs deler av problemet
6. Jobb baklengs
7. Tenk på et liknende problem
8. Gjør problemet enklere
9. Se problemet fra en annen side
10. Bruk digitale hjelpemidler

4.3.3 Analyseprosedyre og gjennomføring

Jeg har analysert bruken av ti heuristiske metoder i eksemplene i lærebøkene for matematikk 1T og R1. Eksemplene ble valgt ut i fra kompetansemålene i læreplanene under hovedområdene *Tall og algebra* for matematikk 1T og *Algebra* for matematikk R1.

Kodingsmanual

For å utføre analysen valgte jeg å bruke kodingsmanualen til Kongelf (2011). Kodingsmanualen har hjulpet meg å være konsistent i analysen ved å gi bestemte retningslinjer for hva som kreves for de ulike metodene, og kategoriene er utformet slik at de ikke er overlappende (Kongelf, 2011). Dette hjalp meg som forsker ved at min forforståelse ikke fikk ”spillerom”.

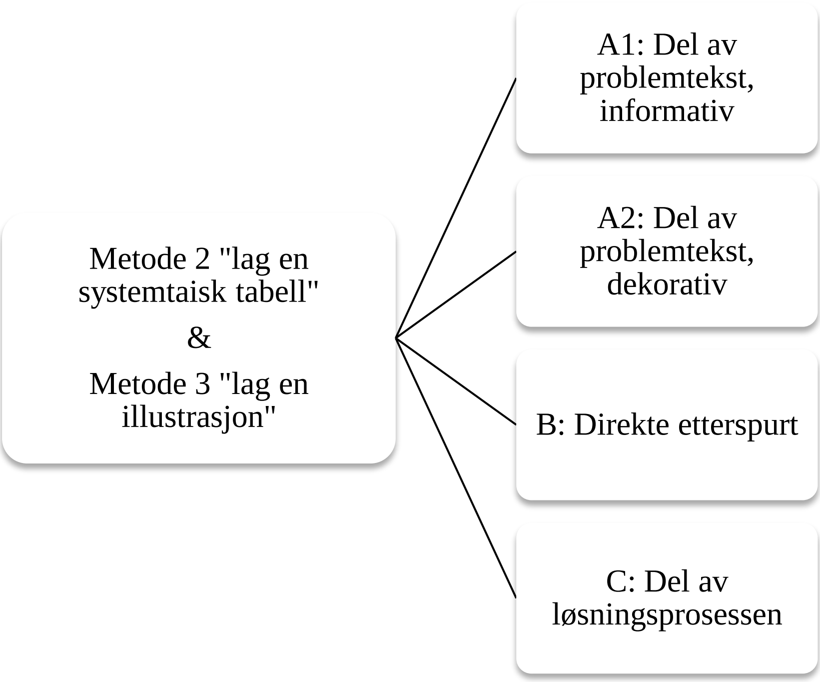
Heuristiske metoder	**Beskrivelse**
1 Se etter et mønster	Identifisere mønster i den gitte informasjonen ved nøyaktig observasjon av felles egenskaper, variasjoner eller forskjeller ved tall, former og liknende i problemet
2 Lag en systematisk tabell	Lage en systematisk liste eller tabell som inneholder den gitte informasjonen eller de ulike mulighetene.
3 Lag en illustrasjon	Bruke den gitte informasjonen til å lage en illustrasjon/visualisering for å presentere problemet visuelt.
4 Prøv og feil	Gjøre en rimelig antakelse om hva svaret er, og så sjekke om resultatet blir riktig. Gjenta prosedyren hvis nødvendig for å finne svaret eller en god tilnærming.
5 Løs deler av problemet	Dele et problem i flere delproblemer, for så å løse disse ett etter ett, og finne løsningen på det opprinnelige problemet.
6 Jobb baklengs	Tilnærme seg problemet baklengs fra dets resultat eller løsninger for å finne hvilke krav som må tilfredsstilles.
7 Tenk på et liknende problem	Huske eller vurdere liknende problemer som er løst tidligere for å eventuelt kunne bruke samme metoder og resultater i tilnærmingen til problemet.
8 Gjør problemet enklere	Forenkle vanskelige tall eller forhold i problemet uten å endre problemet matematisk.
9 Se problemet fra en annen side	Tilnærme seg problemet med en annen vinkling når tidligere tilnærminger ikke fører frem.
10 Bruk digitale hjelpemidler	Bruke digitale hjelpemidler som grafisk kalkulator, regneark eller andre programmer for å løse problemet.

Tabell 2: Kodingsmanual basert på Kongelf (2011, egen oversettelse)

Underkategorier

I sin undersøkelse observerte Kongelf (2011) at det for enkelte av metodene dannet seg naturlige underkategorier. Jeg har valgt å benytte meg av noen av disse underkategoriene, og se bort fra andre. Grunnen til dette er at Kongelfs undersøkelse var beregnet på bøker og pensum fra grunnskolen og at jeg skulle analysere bøker for videregående. Enkelte tilpasninger vil være naturlig siden det matematiske nivået er høyere.

Inspirert av Kongelf har jeg har valgt å dele to av metodene opp i flere underkategorier, nemlig metode 2 ”lag en systematisk tabell” og metode 3 ”lag en illustrasjon/visualisering”. For begge metodene har jeg valgt å innføre følgende underkategorier:



Figur 4: Underkategorier av metode 2 og 3

Begrunnelsen for dette er at det i et problemløsningsperspektiv vil være nyttig å skille mellom disse underkategoriene. Spesielt interessant er underkategori C siden det er den underkategorien som virkelig viser hvilke, og på hvilken måte, ulike metoder kan bidra til å finne en løsning på et problem. I den andre enden av skalaen finner vi underkategori A2 som kan bidra til å gi metoden et høyt representasjonstall i undersøkelsen, men som egentlig er helt irrelevant når det kommer til problemløsning.

Kongelf (2011) kommenterer at metode 5 ”løs deler av problemet” kan virke overrepresentert siden en trinnvis utførelse av en matematikkoppgave vil falle i denne kategorien. Han skiller derfor ut ”trinnvis utførelse” som en underkategori av ”løs deler av problemet”. Jeg har valgt *ikke* å inkludere denne fininndelingen. Grunnen til det er at veldig mange av matematikkoppgavene på videregående nivå krever trinnvis utførelse. Jeg mener at det ikke vil være formålstjenlig å kode for dette i denne analysen fordi matematikken på videregående nivå er såpass avansert at trinnvis utførelse nærmest er et premiss for enhver oppgave. Spesielt er det ikke å anse som problemløsning. Det betyr at metode 5 ”løs deler av problemet” kun inkluderer eksempler som faktisk presenterer en inndeling i del-oppgaver, ikke bare trinnvis utregning. Det vil si at jeg, i motsetning til Kongelf, har ekskludert ”trinnvis utførelse” fra metode 5 ”løs deler av problemet” totalt.

Kongelf (2011) påpeker videre at metode 9 ”se problemet fra en annen side” innehar en underkategori, nemlig å ”forandre uttrykksform”. Han eksemplifiserer dette med at man som ledd i en utregning skriver 0,5 som ½ for å forenkle videre regning. Også denne fininndelingen har jeg unngått siden det er veldig mye bruk av dette i algebra på videregående. Jeg har ikke inkludert ”forandre uttrykksform” i kodingen, siden jeg anser det som en fundamental del av algebra, og det ikke er den type problemløsning denne studien har dreid seg om. Igjen betyr det at metode 9 ”se det fra en annen side” kun omhandler eksempler som faktisk tilnærmer seg problemet med en annen vinkling, for eksempel ved å presentere to ulike fremgangsmåter. I stedet har valgte jeg å kode eventuelle forandringer av uttrykksform som metode 5 ”gjør problemet enklere” dersom denne forandringen faktisk gjorde den videre utregningen enklere ved for eksempel forkorting eller liknende.

Analyseskjema

Under selve analysen benyttet jeg meg av analyseskjemaer, et skjema for hver lærebok. Tabell 3 viser oppbyggingen av et slikt skjema, eksemplifisert ved et utsnitt av analyseskjemaet til Aschehougs *Matematikk 1T* (før utfylling). Dersom et eksempel inneholdt en metode markerte jeg dette ved å fylle inn et ett-tall i kolonnen tilsvarende metoden. Ved å telle antall ett-tall i hver kolonne kunne jeg se hvor mange ganger metoden ble brukt i boken. Alle analyseskjemaene følger vedlagt, ferdig utfylt.

					HEURISTISKE METODER															
					1	2				3				4	5	6	7	8	9	10
Kap.	Del-kap.	Tema	Eks.	Side	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell				Lag en illustrasjon				Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et liknende problem	Gjør problemet enklere	Se problemet fra en annen side	Bruk digitale hjelpemidler
						a1	a2	b	c	a1	a2	b	c							
1 Tall og algebra	1.1	Regning med hele tall	Eks 1	9																
			Eks 2	10																
			Eks 3	12																
			Eks 4	13																
			Eks 5	14-15																
	1.2	Brøk	Eks 1	15																
			Eks 2	16																

Tabell 3: Utsnitt av analyseskjema (Aschehoug, *Matematikk 1T*)

4.3.4 Eksempler på klassifisering

For å vise hvordan analysen er foretatt, og for å forklare nærmere hvordan jeg kodet eksemplene, følger en del konkrete eksempler på hvordan jeg kodet eksemplene i analysen. Eksemplene viser kun utvalgte metoder.

Om metode 1 ”se etter et mønster”

Dersom ulike regler, konsepter eller liknende i eksempelet ble generalisert, for eksempel ved utsagn som ”slik er det alltid” ble dette kodet som metode 1. Eksemplene inneholdt ikke nødvendigvis noen videre forklaring på hvorfor det ”alltid er slik”, men jeg mener likevel det tilfredsstiller beskrivelsen av metoden. Det er også verdt å nevne at metode 1 ”se etter et mønster” enkelte ganger ble presentert i teksten etter et eksempel. Eksempelet viser en spesifikk situasjon, og i den følgende teksten presiseres det at dette gjelder generelt. Av hensyn til oppgavens omfang har det ikke vært mulighet til å inkludere teksten utover eksemplene i analysen, så disse tilfellene er ikke kodet. Faktorisering av flerleddet uttrykk kodes som metode 1 ”se etter et mønster” siden det krever gjenkjennelse av fellesfaktorer.

Om metode 3 ”lag en illustrasjon”

Mange eksempler hadde ingen markering for hva som var problemtekst og hva som var løsningen. Dette førte til at illustrasjoner kunne oppfattes både som del av problemtekst *og* som del av løsningen. For eksempel kunne en informativ illustrasjon av den grunn kvalifisere for å bli kodet som 3a1 ”del av problemtekst, informativ” *og* 3c ”del av løsningsprosessen”. Jeg valgte i alle tvilstilfeller å være konsekvent og kodet disse som 3c ”del av løsningsprosessen” fremfor 3a1 ”del av problemtekst, informativ”.

En del eksempler viste bilder av displayet til en kalkulator. Dette er ikke blitt kodet som metode 3 ”lag en illustrasjon” dersom bildet kun viser hvordan den forklarte utregningen i eksempelet ser ut på en kalkulator. Dersom bildet på en annen måte presenterte noe nytt eller noe av betydning, for eksempel en presentasjon av en graf, ble det kodet som metode 3 ”lag en illustrasjon”.

Om metode 8 ”gjør problemet enklere”

Jeg kodet det å trekke sammen bokstavledd av samme type som metode 8 ”gjør problemet enklere” dersom det forenklet videre utregning. Som nevnt tidligere ble også enkelte tilfeller av det å ”forandre uttrykksform” kodet som metode 8 dersom det lettet den videre utregningen. For eksempel ble utregninger som $(-2)^4=16$ kodet som metode 8 i de tilfellene det forenklet den videre utregningen. Andre vanlige utregningsmetoder, som det å utvide til fellesnevner, å faktorisere og å gjøre om store tall til potenser, ble også kodet som metode 8 dersom det forenklet videre utregninger.

Om metode 9 ”se problemet fra en annen side”

Dersom ulike regler eller sammenhenger ble påpekt i eksempler, ble dette kodet som metode 9 ”se problemet fra en annen side”. Eksempler på dette er utsagn som «å legge til et negativt tall er det samme som å trekke fra det tilsvarende positive tallet» (eks 1, s. 9 i Aschehoug 1T), eller «å dele med en brøk er det samme som å gange med den motsatte brøken». Et annet tilfelle er et eksempel der det poengteres at et desimaltall kan fremstilles som en brøk (eks 2, s. 16 i Aschehoug 1T). Ved å påpeke sammenhenger og regler fremhever forfatterne hvordan man kan ”se noe fra en annen side”.

4.3.5 Alternativt rammeverk og analyseverktøy

Jeg valgte analyse av lærebøker fordi lærebøkene spiller en viktig rolle i norske klasserom. I tillegg er dokumentanalyse enkelt å gjenta og å kvalitetssikre. I teoridelen redegjorde jeg for hvilken definisjon av problem jeg valgte å bruke og hvorfor. Dette fikk konsekvenser for metodevalget. Ved å velge en åpen definisjon som ikke er individrelatert kunne jeg analysere metodebruken i eksemplene uten å måtte tolke ut i fra problemløserens perspektiv. Det finnes flere muligheter hva angår analyseverktøy og rammeverk. Andre forskere som Ewa Bergqvist (2007), Jesper Boesen (2006) og Johan Lithner (2003, 2004, 2008) har valgt den individrelaterte definisjonen som utgangspunkt, og gjort andre grep for å kunne analysere oppgaver. Jeg vil spesielt trekke frem Johan Lithner som gjennom flere arbeider har utviklet et analyseverktøy for å kategorisere hvilke krav en matematikkoppgave stiller til løsningsstrategier og resonnement. Kort oppsummert baserer analyseverktøyet seg på at det finnes ulike resonnementstyper: imiterende resonnement og kreativt resonnement. Imiterende resonnement er når problemløseren enten går frem ved gjengivelse eller hukommelse (memorert) eller ved algoritmebruk (algoritmisk) (Lithner, 2008). Resonnementet er kreativt dersom det er nytt for eleven og inneholder begrunnelse for valg av strategi og logiske, matematikkbaserte argumenter for hvorfor konklusjonene medfører riktighet (Bergqvist, 2007). Det er først når en oppgave stiller krav til kreativt resonnement at vi kan snakke om at det er en problemløsningsoppgave. Med det alternative analyseverktøyet er det altså mulig å analysere oppgaver også.

Mitt metodevalg begrenset meg til å se på eksempler, siden det er i eksemplene vi har en fremstilling av *hvordan*, og med hvilke metoder, man løser oppgaven. Analysens formål er å undersøke lærebøkenes bruk av heuristiske metoder for problemløsning. Til dette er analyse av eksemplene gunstig, og et analyseverktøy som tillater analyse av oppgaver er av den grunn ansett som overflødig.

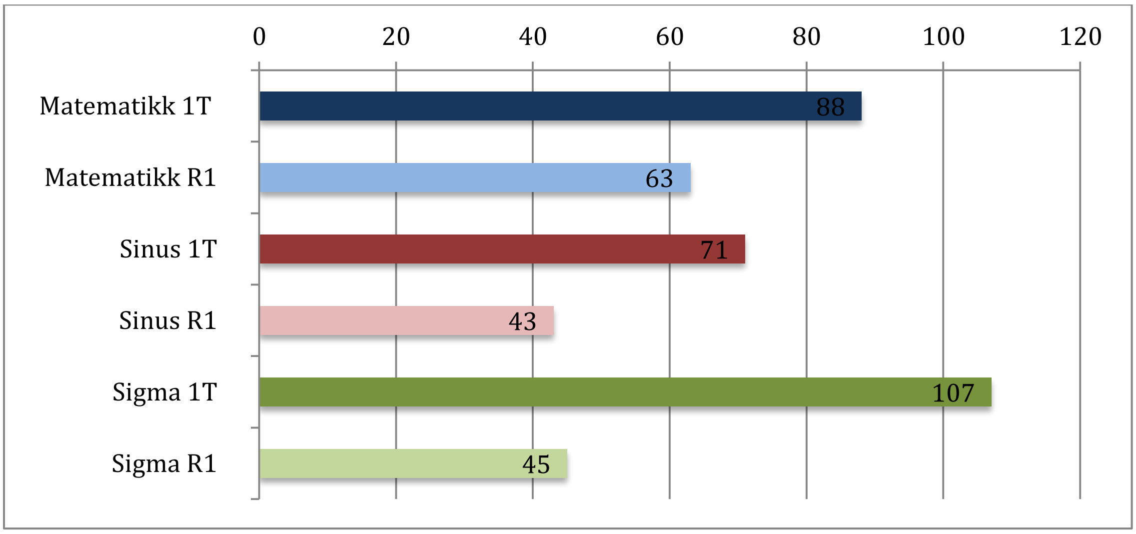
5 Funn

I presentasjonen av funnene har jeg valgt å bruke farger knyttet til hver lærebokserie for å gjøre figurene mer oversiktlige. Lærebøkene for matematikk 1T har fått en mørk fargenyanse, mens lærebøkene for matematikk R1 har fått en lysere fargenyanse. *Matematikk*-serien til Aschehoug har fått fargene blå/lyseblå, *Sinus*-serien til Cappelen Damm har fått fargene rød/lyserød og *Sigma*-serien til Gyldendal har fått fargene grønn/lysegrønn. Jeg har også valgt å presentere tabellene slik at de to lærebøkene fra samme serie er ved siden av hverandre. Dette er for lettere å kunne se tendensen til utvikling innen lærebokserien. I Tabell 5 er også farger brukt for å fremheve enkelte verdier.

De ulike lærebokseriene har ulik layout og oppbygging. Dette påvirker metodebruken i enkelte tilfeller. *Sinus*-bøkene til Cappelen Damm har for eksempel færrest eksempler både for 1T og R1. Noe av grunnen til dette er at *Sinus*-bøkene også er de bøkene med mest tekst som ikke er skilt ut som eksempler. Flere steder i den løpende teksten presenteres stoff som jeg mener med fordel kunne vært skilt ut og merket som eksempel. Siden denne analysen har tatt utgangpunkt i de eksemplene som er skilt ut og merket, er det derfor naturlig at antall eksempler er lavere i denne lærebokserien. Også for *Sinus 1T* er bruken av metode 10 ”bruk digitale hjelpemidler” lavere fordi det er skilt ut et eget appendiks som kalkulatorbruk. Dette erstatter mange av metodetilfellene vi finner i eksemplene i de andre lærebokseriene, men er utelukket fra analysen siden det ikke er inkludert i eksemplene. Der lærebøkene skiller seg ut på grunn av slike detaljer påpekes det i teksten.

5.1 Skjev fordeling av eksempler

Totalt sett er 417 algebraeksempler blitt analysert. Fordelingen av disse eksemplene i lærebøkene er relativt skjev. Figur 5 viser antall eksempler i de ulike bøkene. Læreboken *Sigma 1T* til Gyldendal skiller seg ut ved å ha desidert flest eksempler, men det er også i denne lærebokserien at det er størst forskjell i antall eksempler fra 1T-læreboken til R1-læreboken. Felles for alle forlagsseriene er at det er færre eksempler i R1-bøkene enn i 1T-bøkene. Noe av grunnen til dette er at hovedområdet *Tall og algebra* i læreplanen for matematikk 1T er mer omfattende enn hovedområdet *Algebra* i læreplanen for R1.

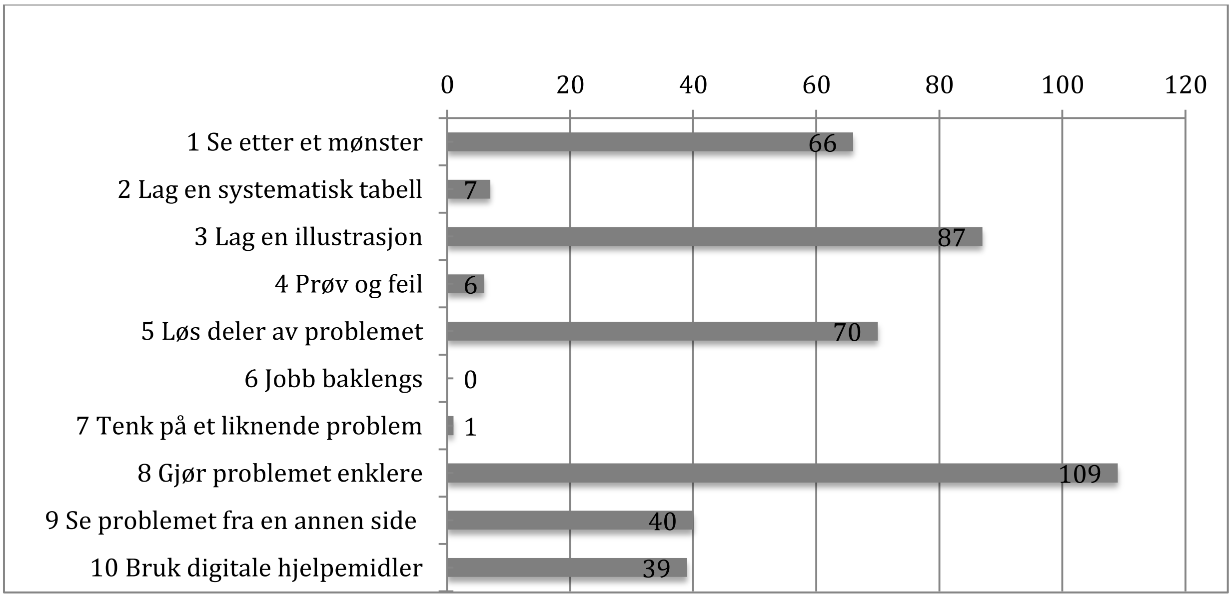


Figur 5: Antall algebraeksempler i lærebøkene

5.2 Heuristiske metoder i bøkene

5.2.1 Antall

Analysen har resultert i mange interessante funn. Totalt sett har jeg funnet 425 tilfeller av metodebruk fordelt på de 417 analyserte eksemplene. Analysen har resultert i følgende tabell som viser hvor ofte hver enkelt heuristisk metode presenteres i lærebøkene:



Figur 6: Metodebruk totalt

Figur 6 viser tydelig at enkelte metoder forekommer oftere enn andre. Blant annet er hele 78 % av metodebruken knyttet til de fire mest brukte metodene. Spesielt markant er det at metode 6 ”jobb baklengs” og metode 7 ”tenk på et liknende problem” ikke forekommer, med unntak av ett tilfelle av sistnevnte. Disse to metodene utgjør sammen med metode 4 ”prøv og feil” og metode 2 ”lag en systematisk tabell” de fire minst brukte metodene. I den andre enden av skalaen finner vi de fire mest brukte metodene: metode 8 ”gjør problemet enklere”, metode 3 ”lag en illustrasjon”, metode 5 ”løs deler av problemet” og metode 1 ”se etter et mønster”. Metode 10 ”bruk digitale hjelpemidler” har nok også en kunstig lav forekomst fordi kalkulatorbruk er skilt ut i et eget appendiks i *Sinus 1T*. Elevene henvises i teksten til appendikset når boken påpeker at eksempelet kan løses digitalt.

Funnene angående metodebruken i eksemplene i lærebøkene vil diskuteres nærmere i kapittel 6.

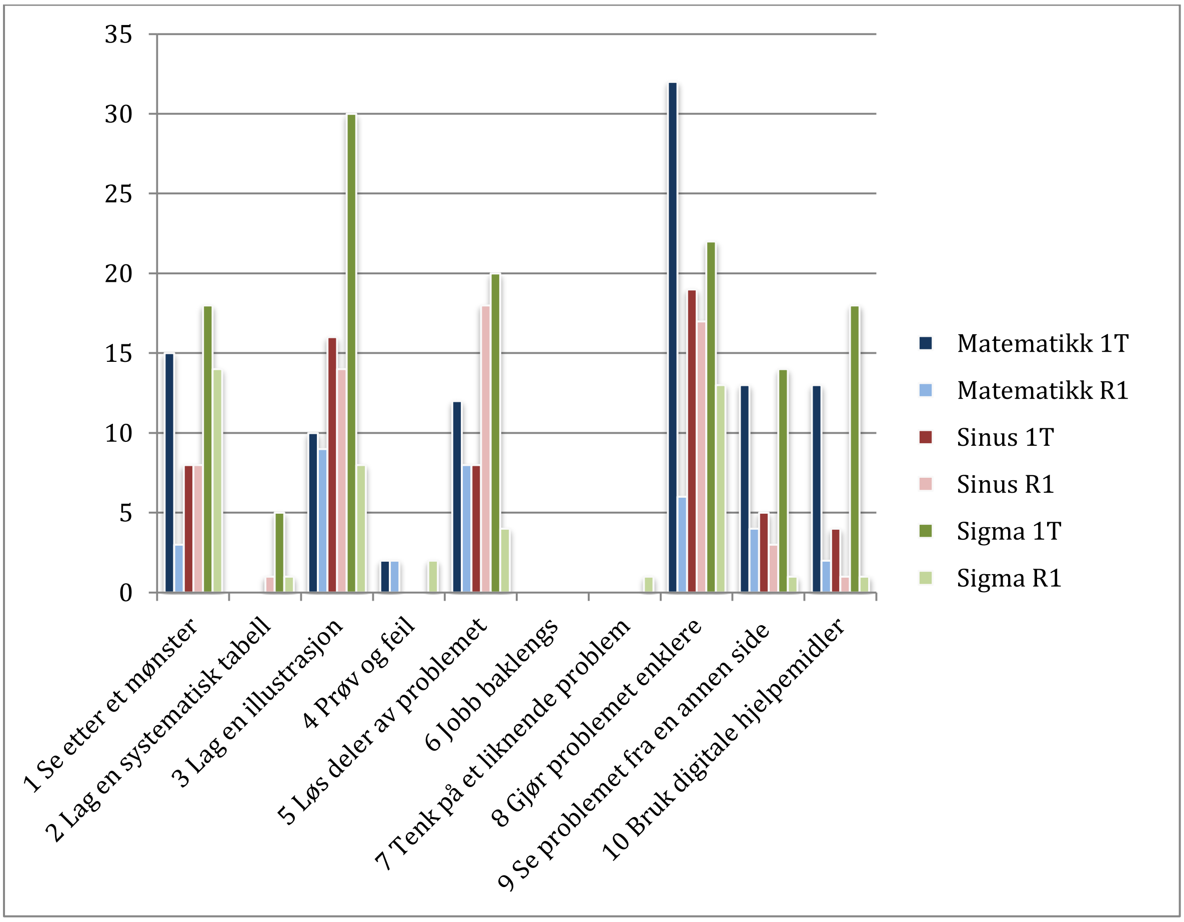
5.2.2 Fordeling

Fordelingen av metodebruken i eksemplene er oppsummert i Tabell 4 og visualisert i Figur 7.

Metode	**Lærebok**					
	Matematikk 1T	Matematikk R1	Sinus 1T	Sinus R1	Sigma 1T	Sigma R1
1 Se etter et mønster	15	3	8	8	18	14
2 Lag en systematisk tabell	0	0	0	1	5	1
3 Lag en illustrasjon	10	9	16	14	30	8
4 Prøv og feil	2	2	0	0	0	2
5 Løs deler av problemet	12	8	8	18	20	4
6 Jobb baklengs	0	0	0	0	0	0
7 Tenk på et liknende problem	0	0	0	0	0	1
8 Gjør problemet enklere	32	6	19	17	22	13
9 Se problemet fra en annen side	13	4	5	3	14	1
10 Bruk digitale hjelpemidler	13	2	4	1	18	1
Sum metodebruk	97	34	60	62	127	45
Totalt antall analyserte eksempler	88	63	71	43	107	45

Tabell 4: Totaloversikt metodebruk

Tabell 4 viser at *Sigma 1T* har 107 eksempler som er blitt analysert, og at det i disse 107 eksemplene er 127 tilfeller av metodebruk. Det vil si at det er flere eksempler som presenterer flere enn én metode. Dette er tilfellet for flere av lærebøkene. Unntakene er *Matematikk R1* med 29 flere eksempler enn metoder, *Sinus 1T* med 11 flere eksempler enn metoder og *Sigma R1* med likt antall eksempler og metoder. Tallet ”0” i tabellen markerer at metoden ikke er benyttet overhodet i læreboken. Tabell 4 viser at *Sigma R1* er den læreboken som presenterer flest metoder med ni av ti metoder representert, og at *Sigma R1* også er den eneste boken som har metode 7 ”tenk på et liknende problem”, men at metoden kun forekommer en gang. Færrest antall heuristiske metoder er å finne i *Sinus 1T*, der seks av ti metoder er presentert. Ingen av lærebøkene har brukt metode 6 ”jobb baklengs”.



Figur 7: Kolonnediagram metodebruk

For å kunne sammenlikne metodebruken i de ulike bøkene på tross av ulikt antall eksempler viser Tabell 5 den relative fordelingen i prosent. Det er ikke lett å si noe om fordelingen siden det er relativt stor variasjon.

Heuristisk metode	**Lærebok**					
	Matematikk 1T	Matematikk R1	Sinus 1T	Sinus R1	Sigma 1T	Sigma R1
1 Se etter et mønster	15,5 %	8,8 %	13,3 %	12,9 %	14,2 %	31,1 %
2 Lag en systematisk tabell	0,0 %	0,0 %	0,0 %	1,6 %	3,9 %	2,2 %
3 Lag en illustrasjon	10,3 %	26,5 %	26,7 %	22,6 %	23,6 %	17,8 %
4 Prøv og feil	2,1 %	5,9 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	4,4 %
5 Løs deler av problemet	12,4 %	23,5 %	13,3 %	29,0 %	15,7 %	8,9 %
6 Jobb baklengs	0,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %
7 Tenk på et liknende problem	0,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	2,2 %
8 Gjør problemet enklere	33,0 %	17,6 %	31,7 %	27,4 %	17,3 %	28,9 %
9 Se problemet fra en annen side	13,4 %	11,8 %	8,3 %	4,8 %	11,0 %	2,2 %
10 Bruk digitale hjelpemidler	13,4 %	5,9 %	6,7 %	1,6 %	14,2 %	2,2 %
Totalt	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %
Sum metodebruk	97	34	60	62	127	45
Totalt antall analyserte eksempler	88	63	71	43	107	45

Tabell 5: Relativ distribusjon i prosent

For å tydeliggjøre høyeste og laveste forekomst (ekstremverdier) har jeg markert dem med farger for de metodene der variasjonen er størst: de negative ekstremverdiene er blå, de positive er røde. Dette gjelder metodene 1, 3, 5, 8, 9 og 10. Da ser vi tydelig at alle lærebøkene har styrker og svakheter: I hver kolonne er det både positive og negative ekstremverdier (med enkelte unntak).

Selv om det er vanskelig å si noe basert på disse tallene, og dette uansett hører hjemme i diskusjonskapitlet, velger jeg å poengtere enkelte tall som skiller seg ut. I metode 1 ”se etter et mønster” skiller *Sigma R1* seg ut ved å ha 31,1 % av metodebruken sin mens de andre lærebøkene ligger på rundt halvparten med verdier mellom 8,8 % og 15,5 %. I metode 3 ”lag en illustrasjon” ser vi at *Matematikk 1T* har en uvanlig lav prosentandel på 10,3 % sammenliknet med de resterende lærebøkene som har verdier mellom 17,8 % og 26,7 %. I metode 8 har *Matematikk R1* og *Sigma 1T* veldig lik prosentandel, men sammen skiller de seg ut ved ha lavere prosentandel enn de fire andre bøkene. Alle disse tilfellene er blant ekstremtilfellene; altså høyeste eller laveste forekomst av metoden.

5.2.3 Fordeling i underkategorier

I analysen ble fire underkategorier av metode 3 ”lag en illustrasjon” og metode 2 ”lag en systematisk tabell” benyttet. Her vil kun inndelingen for metode 3 ”lag en illustrasjon” presenteres med tabell fordi forekomsten av metode 2 ”lag en systematisk tabell” var så liten, med kun syv tilfeller. Jeg nøyer meg med å nevne at fem av disse syv tilfellene var underkategori C ”del av løsningsprosessen”, og de to andre var ”direkte etterspurt”. Læreboken *Sigma 1T* skiller seg ut ved å ha fem av de syv tilfellene, inkludert begge tilfellene av ”direkte etterspurt”.

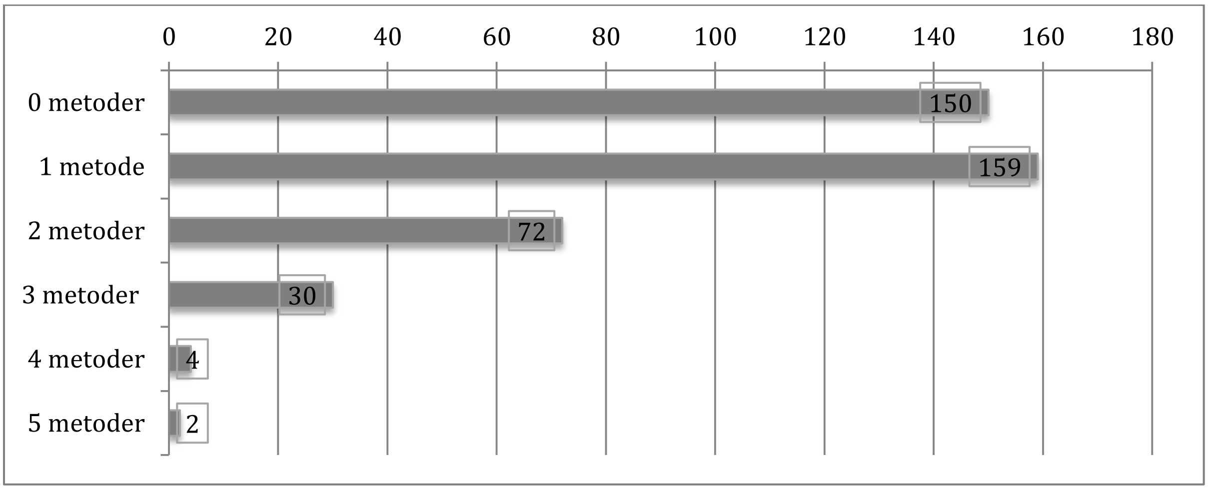
	Del av problemtekst		Direkte etterspurt	Del av løsningsprosessen	Sum
	Informativ A1	Dekorativ A2	B	C	
Matematikk 1T	0	2	1	7	10
Matematikk R1	0	1	0	8	9
Sinus 1T	0	10	4	2	16
Sinus R1	0	1	2	11	14
Sigma 1T	3	15	4	8	30
Sigma R1	0	2	0	6	8
Sum	3	31	11	42	87
Prosentandel	3 %	36 %	13 %	48 %	

Tabell 6: Fordeling i underkategorier for metode 3 ”lag en illustrasjon”

Tabell 6 viser fordelingen i underkategorier av metode 3 ”lag en illustrasjon”. Jeg fant 87 tilfeller av denne metoden, og disse fordelte seg hovedsakelig i to av underkategoriene, nemlig A2 ”del av problemtekst, dekorativ” og C ”del av løsningsprosessen”. Vi ser at 42 tilfeller faller i underkategorien C ”del av løsningsprosessen”, noe som tilsvarer 49 %, mens 31 tilfeller faller i underkategorien A2 ”del av problemtekst, dekorativ” og tilsvarer 36 %. Det er slående at kun *Sigma 1T* har illustrasjoner som faller i underkategori A1 ”informativ del av problemtekst”. To lærebøker skiller seg ut i underkategorien A2 ”dekorativ del av problemtekst”. Det er *Sinus 1T* og *Sigma 1T* som sammen står for 25 av 31 tilfeller. I underkategorien C ”del av løsningsprosessen”, som er den underkategorien som er mest relevant for problemløsning, ser vi at *Sinus 1T* har langt færre tilfeller enn de andre lærebøkene.

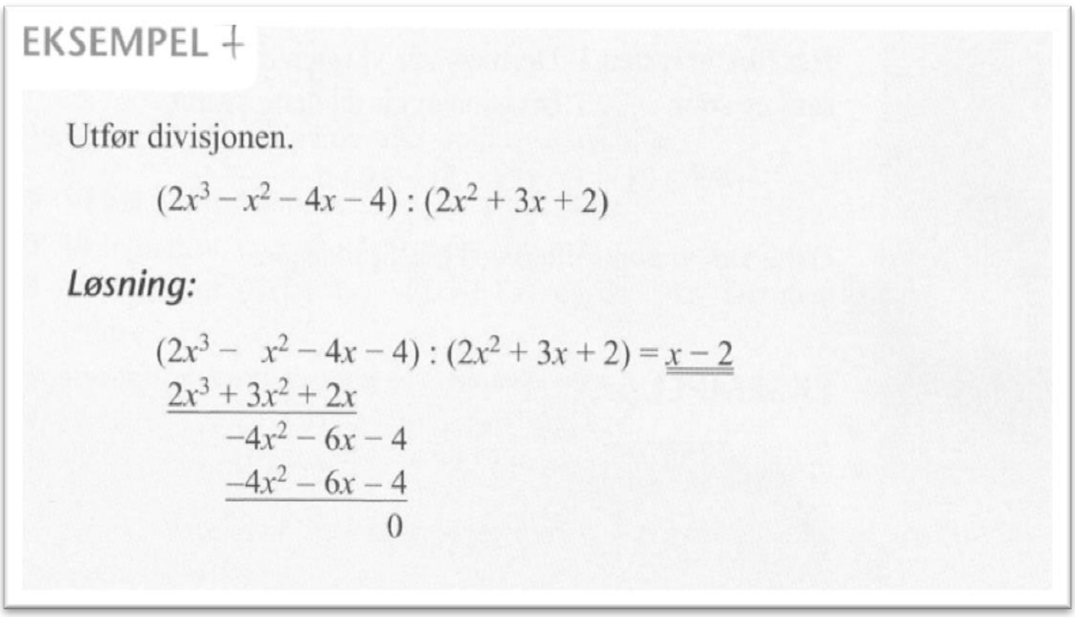
5.2.4 Metoder i kombinasjon

Det totale antallet tilfeller av metodebruk er 425. Med 417 eksempler analysert betyr det at flere eksempler må representere mer enn en metode. Figur 8 viser fordelingen:



Figur 8: Antall metoder brukt samtidig i eksempler

Mange av eksemplene hadde ikke metodebruk i det hele tatt (slik jeg har definert det). En del eksempler hadde flere tilfeller av metodebruk (opp til fem). Jeg presenterer et eksempel som ikke inkluderer metodebruk i det hele tatt i Figur 9. Eksempler som dette, som bare viser utregning uten noen form for forklaring, er det flust av i alle lærebøkene.



EKSEMPEL 7

Utfør divisjonen.

$$(2x^3 - x^2 - 4x - 4) : (2x^2 + 3x + 2)$$

Løsning:

$$\begin{array}{l} (2x^3 - x^2 - 4x - 4) : (2x^2 + 3x + 2) = \underline{\underline{x - 2}} \\ \underline{2x^3 + 3x^2 + 2x} \\ \quad -4x^2 - 6x - 4 \\ \quad \underline{-4x^2 - 6x - 4} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Figur 9: Eksempel ”7” (Sinus R1, 2007, s. 20)

Vi ser av Figur 8 at det mest vanlige i de utvalgte eksemplene er ingen metodebruk, eller bruk av én metode. Det er likevel hele 72 tilfeller av eksempler der to metoder forekommer samtidig, og 30 der tre metoder figurerer samtidig. Jeg vil se nærmere på disse tilfellene for å se etter hvilke metoder som forekommer sammen.

To metoder

Min erfaring fra analysen er at flere av metodene ofte går hånd i hånd. Tidlig i analysen skilte spesielt to par seg ut. Det var metode 1 ”se etter et mønster” kombinert med metode 8 ”gjør problemet enklere” og metode 3 ”lag en illustrasjon” kombinert med metode 5 ”løs deler av problemet”. Dette kommer tydelig frem i Tabell 7 som viser hvilke kombinasjoner[1] av to metoder som forekom, og hvor ofte.

	1 Se etter et mønster	**2** Lag en systematisk tabell	**3** Lag en illustrasjon	**4** Prøv og feil	**5** Løs deler av problemet	**6** Jobb baklengs	**7** Tenk på et liknende problem	**8** Gjør problemet enklere	**9** Se problemet fra en annen side	**10** Bruk digitale hjelpemidler
1 Se etter et mønster				1	2			19	2	1
2 Lag en systematisk tabell			1							1
3 Lag en illustrasjon			1	1	15			2	4	2
4 Prøv og feil										
5 Løs deler av problemet								8	3	2
6 Jobb baklengs										
7 Tenk på et liknende problem										
8 Gjør problemet enklere									3	1
9 Se problemet fra en annen side										1
10 Bruk digitale hjelpemidler										

Tabell 7: Kombinasjon av to metoder

Vi ser at det er de fire mest brukte metodene som også er representert i de metodeparene som fremkommer oftest. I tillegg til de to metodeparene som allerede er nevnt, ser vi at metode 5 ”løs deler av problemet” sammen med metode 8 ”gjør problemet enklere” forekommer relativt ofte. Alle tre parene er kombinasjoner av de fire mest brukte metodene, og jeg kommer tilbake til årsaker til dette i kapittel 6.

---

[1] Tabellen tillater kombinasjon av to like metoder siden underkategoriene i metode 2 og 3 kan kombineres; det var tilfellet da metode 3b og 3c var representert i samme eksempel

Tre metoder

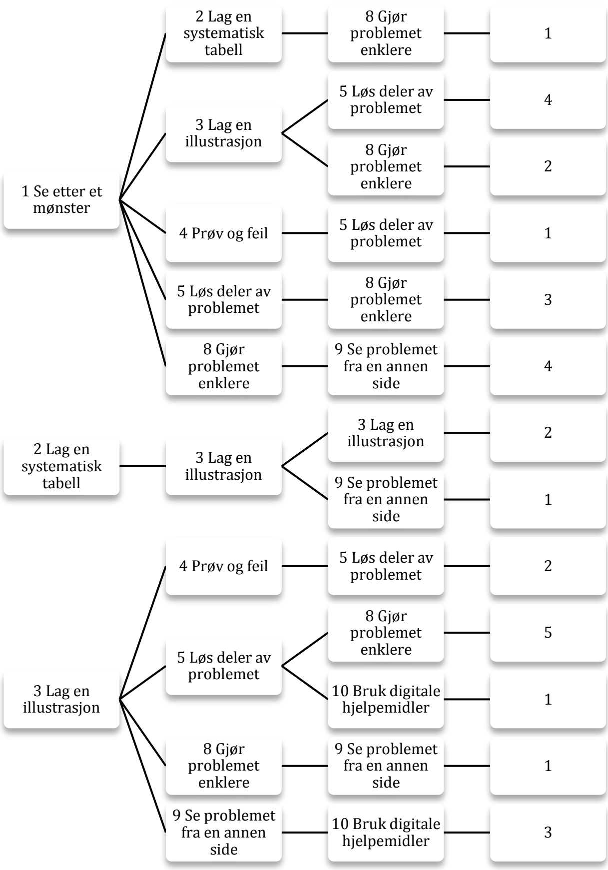
Bruk av tre metoder i samme eksempel forekom til sammen 30 ganger. Tabell 8 viser de radene fra analyseskjemaene (se vedlegg) som hadde tre ett-tall. Av disse var over halvparten å finne i Aschehougs *Matematikk 1T* og i Gyldendals *Sigma 1T*.

Lærebok	**1** Se etter et mønster	**2** Lag en systematisk tabell	**3** Lag en illustrasjon	**4** Prøv og feil	**5** Løs deler av problemet	**6** Jobb baklengs	**7** Tenk på et liknende problem	**8** Gjør problemet enklere	**9** Se problemet fra en annen side	**10** Bruk digitale hjelpemidler
Matematikk 1T			c		1					1
			a2						1	1
	1							1	1	
	1			1	1					
			a2		1			1		
			c						1	1
	1		b		1					
	1		c		1					
Matematikk R1			c	1	1					
			c	1	1					
			c						1	1
Sinus 1T	1		a2					1		
	1				1			1		
	1		a2					1		
Sinus R1			c		1			1		
			c		1			1		
			c		1			1		
	1		c		1					
Sigma 1T	1							1	1	
		c	b,c							
		c	b,c							
		b	a2						1	
	1							1	1	
	1				1			1		
			a2					1	1	
	1				1			1		
	1							1	1	
Sigma R1	1	c						1		
			c		1			1		
	1		c		1					
Sum	15	4	23	3	16	0	0	16	9	4

Tabell 8: Oversikt over bruk av tre metoder samtidig[2]

Tydelige mønster i kombinasjon av metoder fremkommer også her:

[2] For metode 2 og 3 har jeg i tabellen markert hvilken underkategori som er kodet, men underkategoriene vil ikke tas hensyn til i videre diskusjon.



Figur 10: Kombinasjoner av tre metoder i samme eksempel

Vi så tidligere at de vanligste kombinasjonene av to metoder i samme eksempel var

Metode 1 – Metode 8

Metode 3 – Metode 5

Metode 5 – Metode 8

Det er derfor lite overraskende at det er kombinasjonen

Metode 3 – Metode 5 – Metode 8

som er den kombinasjonen som forekommer oftest (se Figur 10) tett etterfulgt av kombinasjonene

Metode 1 – Metode 3 – Metode 5

Metode 1 – Metode 8 – Metode 9

Vi ser også at omtrent halvparten av tilfellene av de to lite brukte metodene ” lag en systematisk tabell” og ”prøv og feil” (jamfør Figur 6 som viser at metodene forekommer henholdsvis syv og seks ganger totalt) forekommer i ”tress”. Førstnevnte figurerer i fire tress, sistnevnte i tre tress.

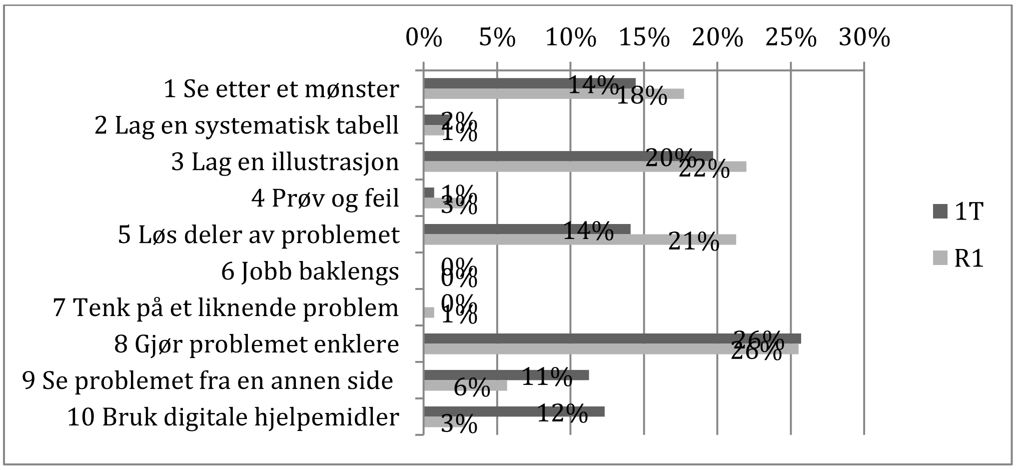
5.2.5 Variasjon fra 1T til R1

Denne analysen tar for seg eksempler fra hovedområdet (tall og) algebra i læreplanen. De to kursene innebærer imidlertid forskjellig krav til pensum og oppgavetyper for de ulike trinnene. Dette kan igjen tenkes å påvirke hvilke metoder som blir brukt i eksemplene. Tabell 9 og Figur 11 viser metodebruken fordelt på de to matematikkursene.

Metode	Matematikkurs			
	1T	1T	R1	R1
1 Se etter et mønster	41	14 %	25	18 %
2 Lag en systematisk tabell	5	2 %	2	1 %
3 Lag en illustrasjon	56	20 %	31	22 %
4 Prøv og feil	2	1 %	4	3 %
5 Løs deler av problemet	40	14 %	30	21 %
6 Jobb baklengs	0	0 %	0	0 %
7 Tenk på et liknende problem	0	0 %	1	1 %
8 Gjør problemet enklere	73	26 %	36	26 %
9 Se problemet fra en annen side	32	11 %	8	6 %
10 Bruk digitale hjelpemidler	35	12 %	4	3 %
Sum metodebruk	284		141	
Totalt antall analyserte eksempler	266		151	

Tabell 9: Metodebruk fordelt på matematikkursene i tall og relativ prosent

Det er generelt liten forskjell fra 1T til R1. De største forskjellene ligger i metode 5 ”løs deler av problemet”, metode 9 ”se problemet fra en annen side” og metode 10 ”bruk digitale hjelpemidler”. De to sistnevnte metodene har en nedgang fra matematikk 1T til matematikk R1, mens førstnevnte brukes mer i matematikk R1 enn i matematikk 1T. Dette vil diskuteres ytterligere i kapittel 6.



Figur 11: Metodebruk fordelt på matematikkursene i relativ prosent

5.3 Problemløsningsprosessen i lærebøkene

5.3.1 Ingen generell innføring i problemløsning

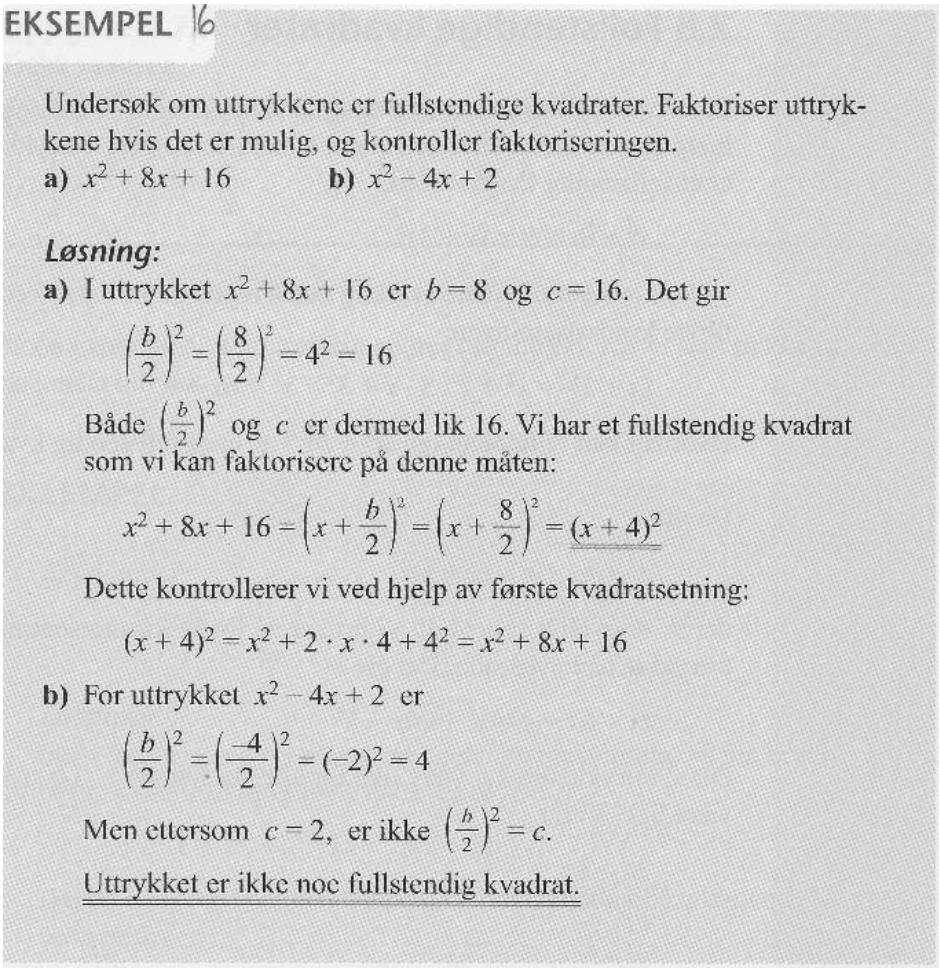
Ingen av lærebøkene behandler problemløsning i seg selv som tema. En måte å gjøre dette på kunne vært å ha et delkapittel som presenterer generelle strategier for hvordan man kan gå frem når man løser matematiske problemer, men det forekommer altså ikke i noen av bøkene. Pólyas tre første trinn omtales ikke eksplisitt i noen av bøkene. Det betyr ikke at de ikke brukes. Flesteparten av oppgavene dreier seg om trinn 3 ”gjennomfør planen”. Oppgaveteksten gir en kommando som så utføres. Dersom trinn 1 ”forstå oppgaven” og trinn 2 ”lag en plan” er inkludert, er eksemplene gjerne skilt ut som ”sammensatte problemer” eller ”praktisk bruk”, og er ofte tekstoppgaver.

Jeg kom derimot over flere referanser til det Pólya omtaler som problemløsningens fjerde trinn: ”å se tilbake”, både i løpende tekst og i eksemplene. Dette er også en viktig del av matematisk modellering slik det ble beskrevet i kapittel 3. Som nevnt tidligere, vil matematisk modellering høyst sannsynlig bli ”innlemmet” i læreplanen etter revisjonen, og er derfor stadig mer sentralt. I det følgende presenteres eksempler på referanser til Pólyas fjerde trinn.

5.3.2 Pólyas fjerde trinn: ”å se tilbake”

Selv om bøkene ikke presenterer problemløsning eller problemløsningsprosessen spesifikt, er referanser å finne. Det er spesielt ”å se tilbake” som omtales mer direkte, oftest ved at teksten forklarer eller presenterer konseptet ”å sette på prøve”. Jeg trekker frem tre eksempler, ett fra hver lærebokserie. To av eksemplene presenteres her, det siste eksempelet trekkes frem som et godt eksempel i diskusjonskapitlet (se figur 14).

Eksempel 1



EKSEMPEL 16

Undersøk om uttrykkene er fullstendige kvadrater. Faktoriser uttrykkene hvis det er mulig, og kontroller faktoriseringen.

a) $x^2 + 8x + 16$ **b)** $x^2 - 4x + 2$

Løsning:

a) I uttrykket $x^2 + 8x + 16$ er $b = 8$ og $c = 16$. Det gir

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 4^2 = 16$$

Både $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ og c er dermed lik 16. Vi har et fullstendig kvadrat som vi kan faktorisere på denne måten:

$$x^2 + 8x + 16 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{8}{2}\right)^2 = \underline{\underline{(x+4)^2}}$$

Dette kontrollerer vi ved hjelp av første kvadratsetning:

$$(x+4)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$$

b) For uttrykket $x^2 - 4x + 2$ er

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = (-2)^2 = 4$$

Men ettersom $c = 2$, er ikke $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$.

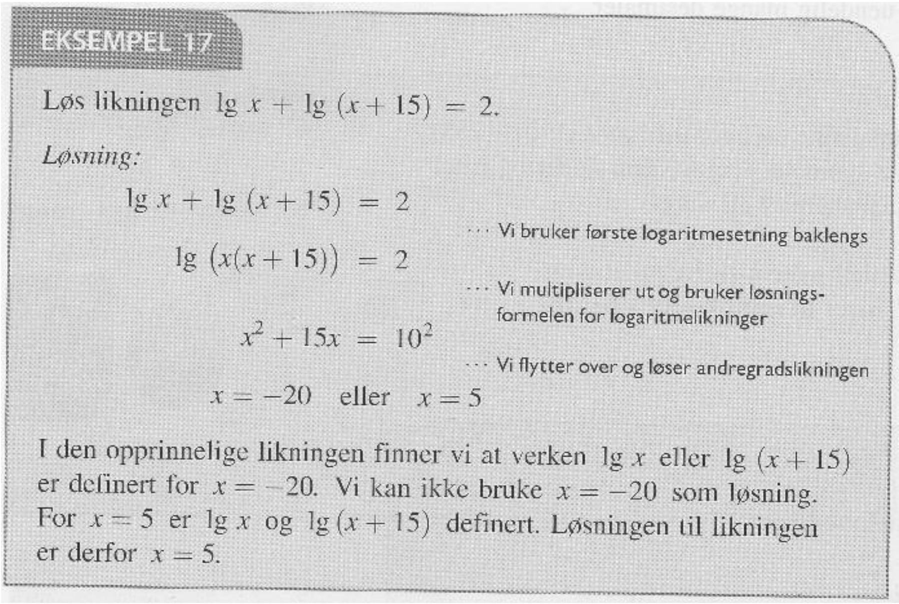
<u>Uttrykket er ikke noe fullstendig kvadrat.</u>

Figur 12: Eksempel ”16” (*Sinus 1T*, 2009, s. 52)

Figur 12 viser et eksempel som bruker en metode for å vurdere om et uttrykk er et fullstendig kvadrat og hvordan man eventuelt kan faktorisere det. Oppgaven ber om kontroll av svaret og dette gjøres ved bruk av første kvadratsetning. Med dette knyttes faktorisering, fullstendige kvadrat og første kvadratsetning sammen. Man ser tilbake, både på tidligere pensum og regler, men også for å sjekke om svaret er riktig.

Eksempel 2

I figur 13 ser vi igjen at forfatterne ”ser tilbake” til oppgavens premisser for å vurdere hvilke svar som er gyldige. I tillegg er det markert en notis i margen som påpeker at dette gjelder generelt: «Når vi løser en likning ved å bruke logaritmesetningene baklengs, må vi alltid undersøke om vi kan bruke svaret i den opprinnelige likningen» (*Sigma R1*, 2011, s. 135).



EKSEMPEL 17

Løs likningen $\lg x + \lg(x + 15) = 2$.

Løsning:

$$\lg x + \lg(x+15) = 2$$

··· Vi bruker første logaritmesetning baklengs

$$\lg\big(x(x+15)\big) = 2$$

··· Vi multipliserer ut og bruker løsningsformelen for logaritmelikninger

$$x^2 + 15x = 10^2$$

··· Vi flytter over og løser andregradslikningen

$$x = -20 \quad \text{eller} \quad x = 5$$

I den opprinnelige likningen finner vi at verken $\lg x$ eller $\lg(x + 15)$ er definert for $x = -20$. Vi kan ikke bruke $x = -20$ som løsning. For $x = 5$ er $\lg x$ og $\lg(x + 15)$ definert. Løsningen til likningen er derfor $x = 5$.

Figur 13: Eksempel 17 (*Sigma R1*, 2011, s. 135)

Referansene til Pólyas fjerde trinn er mer eller mindre begrenset til ulike varianter av det vi har sett over. Totalt sett merket jeg meg 22 tilfeller av slike referanser, en ikke veldig stor andel av 417 analyserte eksempler.

6 Diskusjon

6.1 Bruken av heuristiske metoder i eksemplene

6.1.1 Er høy forekomst av heuristiske metoder en indikasjon på problemløsning?

Funnene viser at det er en del metodebruk å finne i eksemplene i lærebøkene. I teorikapitlet argumenterte jeg for at metodebruken i stor grad vil indikere hvorvidt elevene blir undervist i problemløsning ved å studere eksemplene. Funnene antyder derfor at elevene blir introdusert for metodebruk og problemløsning ved å studere eksemplene. Imidlertid vil en finere inndeling i underkategorier kunne avsløre at mye av metodebruken kan reduseres til metoder som tradisjonelt sett ikke anses som problemløsning. I det følgende vil erfaringer fra analysen belyse dette.

Metode 3 ”lag en illustrasjon” ble kodet i fire underkategorier (se Tabell 2) inspirert av Kongelfs (2011) funn. Det resulterte i funnene presentert i Tabell 6. Som beskrevet tidligere er det hovedsakelig underkategori c ”del av løsningsprosessen” som er relevant for problemløsning. Underkategori a1 ”del av problemtekst, informativ” og b ”direkte etterspurt” er også relevante siden de viser at en illustrasjon kan være en god hjelp og fornuftig del av løsningen. Underkategori a2 ”del av problemtekst, dekorativ” er det derimot vanskelig å argumentere for at hjelper i problemløsningsprosessen som metode. Mye positivt kan sies om dekorative bilder, som for eksempel at de gjør læreboken mer spennende for eleven og muligens opprettholder motivasjon av den grunn, men det blir en helt annen diskusjon. Tabell 6 viser at hele 35 % av metodebruken faller i underkategori a2 ”del av problemtekst, dekorativ”. Dette gjør at den høye forekomsten av metode 3 ”lag en illustrasjon” er kunstig høy. Dersom man tar vekk de 30 tilfellene av dekorative illustrasjoner blir bruken av metode 3 ”lag en illustrasjon” redusert til 57, og med det går metoden fra å være den nest mest brukte metoden til å være den fjerde mest brukte metoden. Dette er en betydelig forskjell. Inndelingen i underkategorier viser altså her at en stor andel av metodebruken av metode 3 ”lag en illustrasjon” ikke er å anse som problemløsning slik det beskrives i denne oppgaven.

Også metoder som ikke ble delt inn og kodet i underkategorier, kunne med fordel blitt det. I retrospekt ser jeg at dette gjelder for eksempel metode 1 "se etter et mønster" og metode 8 "gjør problemet enklere". Disse er representert henholdsvis 66 og 109 ganger, og er henholdsvis den fjerde mest brukte og den mest brukte metoden (se Figur 6). En finere inndeling i underkategorier av disse to metodene ville kunne vise at mange av tilfellene simpelthen reduseres til matematiske metoder som ikke anses som tradisjonell problemløsning. For eksempel er faktorisering av flerleddet uttrykk kodet som metode 1 "se etter et mønster" (se etter felles faktor = se etter et mønster) og forkorting av brøk er kodet som metode 8 "gjør problemet enklere" dersom det forenklet videre utregninger. Kombinasjonen av disse to (faktorisering og forkorting) vil også være høyt representert der metode 1 og 8 figurerer i par (se Tabell 7).

Kombinasjonen av de to metodene som nettopp ble diskutert kan også bidra til et kunstig høyt antall metoder. De tre mest vanlige kombinasjonene var ifølge Tabell 7

Metode 1 "se etter et mønster" + Metode 8 "gjør problemet enklere"
Metode 3 "lag en illustrasjon" + Metode 5 "løs deler av problemet"
Metode 5 "løs deler av problemet" + Metode 8 "gjør problemet enklere"

Det kan tenkes at nærmere undersøkelse av disse ville avsløre kombinasjoner som er så vanlige at de nesten er å anse som en egen metode eller matematisk strategi. I algebra vil for eksempel kombinasjonen "faktoriser og forkort" kunne være så vanlig at det er misvisende at den skal kodes som to metoder. Som nevnt tidligere vil ikke disse metodene hver for seg kvalifisere for å være problemløsning tradisjonelt sett.

6.1.2 Algebra preger metodebruken

Av hensyn til oppgavens omfang ble analysen begrenset til å omfatte hovedområdene *Tall og algebra* i læreplanen til matematikk 1T og *Algebra* i læreplanen matematikk R1. Det betyr at hovedområdene *(Kombinatorikk og) sannsynlighet*, *Geometri* og *Funksjoner* ble utelatt. Disse fire hovedområdene dekker vidt forskjellige matematiske temaer, og lærebokpresentasjonen vil av naturlige årsaker derfor høyst sannsynlig vektlegge forskjellige metoder. Det kan blant annet tenkes at geometri fordrer høyere bruk av metode 2 "lag en illustrasjon" enn andre emner, eller at metode 2 "lag en systematisk tabell" benyttes mer for emnet sannsynlighet enn for andre emner. Det er derfor viktig å tenke på dette i diskusjonen av funnene i denne oppgaven. På den annen side er algebra en fundamental del av matematikken. Teknikkene som benyttes i algebra vil være sentrale også i andre områder fordi algebra mest sannsynlig er en viktig del også her. På denne måten vil funnene i denne analysen kunne antyde en mer generell tendens.

6.1.3 Er det metodefavoritter i ulike lærebokserier og matematikkurs?

På samme måte som elevene tilegner seg og utvikler favorittstrategier for problemløsning kan det tenkes at lærebokforfattere også har favoritter som ubevisst påvirker utformingen av lærebøkene. Det er derfor av interesse å studere fordelingen av metodebruken med tanke på dette. Enkelte verdier som skilte seg ut i Tabell 5 kan belyse dette. Alle lærebøkene hadde styrker og svakheter ved at hver lærebok-kolonne i tabellen inneholder både positive og negative ekstremverdier. På den måten er ekstremverdiene relativt jevnt fordelt på de ulike lærebøkene. Hver kolonne i Tabell 5 viser hvor stor variasjon det er i metodebruken innen hver lærebok. Dersom alle metodene ble brukt like mye ville hver metode representert 10 %. En slik fordeling er selvfølgelig relativt urealistisk, spesielt i denne analysen som har måttet begrenses til algebra. Det er naturlig at enkelte metoder er oftere representert enn andre når det kun er snakk om et emne.

Dersom en metode har verdier over 20 % er dette en markant høy verdi. Tabell 5 viser at to lærebøker, *Matematikk 1T* og *Sigma 1T*, har én forekomst over 20 %, tre lærebøker har to forekomster over 20 %, *Matematikk R1, Sinus 1T* og *Sigma R1*, mens kun én lærebok har tre slike forekomster, nemlig *Sinus R1*. Sistnevnte har derfor hele 79 % av metodebruken sin fordelt på kun tre metoder. Det er ikke overraskende at åtte av elleve tilfeller med verdier over 20 % i Tabell 5 representerer metode 3 ”lag en illustrasjon og metode 8 ”gjør problemet enklere” siden dette er de to mest brukte metodene (jamfør Figur 6). Tabellen viser tydelig at det er enkelte metoder som figurerer ofte, og at flere metoder har en marginal presentasjon i lærebøkene. Dette samsvarer dårlig med aspektet «å ha evne til å bruke varierte strategiar» (UDIR, 2010a, s. 5) under læreplanens grunnleggende ferdighet *å kunne regne* i matematikk.

Selv om de to lærebøkene i hver lærebokserie stort sett har de samme forfatterne, er det relativt stor variasjon i verdiene fra 1T-bøkene til R1-bøkene i hver serie (se Tabell 5). Det kan høyst sannsynlig forklares ved at de to matematikkursene er relativt forskjellige. For det første er pensum forskjellig, men andre forhold spiller også inn. Matematikk 1T er det kurset som anbefales for alle som skal fortsette med matematikk, og det er et av to mulige valg på Vg1. På Vg2 kan elevene velge mellom flere varianter, og R1 anses som det tøffeste kurset. Derfor er det langt færre elever som tar R1 enn 1T, jamfør Figur 3. Spesialiseringsgraden er av naturlige årsaker høyere i R1 enn i 1T som i mye større grad er et breddefag. Dette gir forskjellige oppgaver som igjen helt sikkert påvirker metodevalg. En interessant analyse kunne være å sortere forekomstene etter emne og oppgavetyper og se hvordan fordelingen påvirkes av dette. Det er dessverre ikke rom for dette her.

Det er for de fire mest brukte metodene at variasjonen fra 1T-læreboken til R1-læreboken er størst. Jeg nevner her de metodene der forskjellen fra 1T til R1-læreboken er over 10 %, til sammen syv tilfeller. Cappelen Damm skiller seg ut fra de to andre forlagene ved at det er kun for metode 5 ”løs deler av problemet” at forskjellen fra 1T til R1 er over 10 % med en økning på 15,7 % fra 1T til R1. Altså er Cappelen Damm det mest konsistente forlaget når det kommer til metodebruk innen algebra. Både Aschehoug og Gyldendal har forskjell på over 10 % på tre metoder. Aschehoug har størst variasjon for metode 3, 5 og 8; Gyldendal for metode 1, 8 og 10. Med unntak av metode 10 er disse metodene de fire mest brukte og det er derfor ikke overraskende at det er nettopp her vi ser en variasjon fra 1T til R1.

Å si noe om utviklingen fra en lærebok til en annen for det enkelte forlag, er vanskelig, siden dette ikke er snakk om statistisk signifikante tall. Jeg lagde derfor også en oversikt over metodebruken i de to matematikkursene, uavhengig av forlag, i Figur 11. Figuren viser at metodebruken i liten grad forandret seg fra 1T til R1, men at det er metode 1, 5, 9 og 10 som varierer mest. Det skiller seg noe fra verdiene som ble diskutert i de forrige to avsnittene. Dette bekrefter at jeg ikke kan trekke noen slutninger med tanke på metodefordeling innen det enkelte forlag.. Igjen vil muligens nærmere undersøkelser kunne vise hvorfor enkelte metoder blir mer brukt i ulike matematikkurs og tilhørende lærebøker.

I kapittel 5 bemerket jeg enkelte verdier i Tabell 5 som skilte seg ut. Det var metode 1 ”se etter et mønster” med uvanlig høy verdi for *Sigma R1* med sine 31,1 %, som er nær det dobbelte av de resterende. For metode 3 ”lag en illustrasjon” så vi at *Matematikk 1T* hadde en uvanlig lav prosentandel på 10,3 % sammenliknet med de resterende lærebøkene, med verdier mellom 17,8 % og 26,7 %. I tillegg hadde *Matematikk R1* og *Sigma 1T* veldig lik prosentandel for metode 8, men sammen skilte de seg ut ved å ha lavere prosentandel enn de fire andre bøkene. Som nevnt tidligere er det vanskelig å skulle tolke dette utover å kommentere at dette er verdier for den enkelte lærebok som skiller seg fra de andre lærebøkene. Jeg ønsker ikke å trekke noen slutninger om hvorvidt dette er positivt eller negativt, men det er verdt å merke seg. Kanskje kan eventuelle nye studier se nærmere på denne problematikken?

6.1.4 Diskusjon av utvalgte eksempler

Jeg har valgt å presentere en del av eksemplene fra analysen i dette kapitlet fremfor i kapittel 5 ”Funn”. Dette er fordi jeg ønsker å kommentere eksemplene og diskutere metodebruken. Av den grunn er det mer naturlig å inkludere de her. De utvalgte eksemplene viser noe jeg ønsker å poengtere eller diskutere. Jeg har ikke tatt hensyn til hvilke lærebøker eksemplene er hentet fra.

Gode eksempler

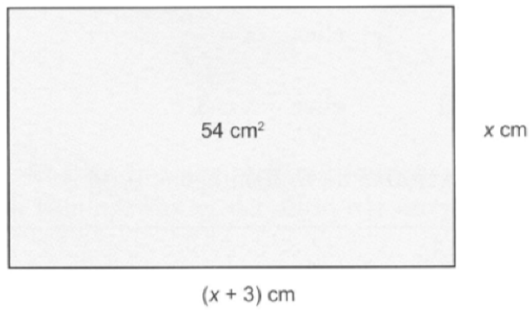
Først vil jeg presentere noen eksempler der jeg mener metodebruken er god og tydelig. Det er viktig å vise at det er fullt mulig å lage eksempler som viser de ulike metodene som er benyttet (og hvordan) for å komme frem til et svar.

Eksempel a

Vi ser i Figur 14 et godt eksempel på hvordan man kan bruke en andregradslikning til å løse et praktisk problem. Oppgaven er å finne sidene i et rektangel gitt at du vet at arealet er 54 cm^2 og at langsiden er 3 cm lengre enn kortsiden. Eksempelet er kodet som metode 5 ”løs deler av problemet”, metode 10 ”bruk digitale hjelpemidler” og 3c ”lag en illustrasjon, del av løsningsprosessen” i tråd med argumentasjon i 4.3.4. Ved å ha en bildetekst som sa for eksempel ”det er ofte lurt å lage en skisse for å sortere informasjonen” ville det ikke vært tvil om at illustrasjonen var en del av løsningsprosessen. Det ville også tydeliggjort metodebruken ytterligere.

Eksempel 7 Sidene i et rektangel

I et rektangel er den lengste siden 3 cm lengre enn den korteste siden. Arealet er 54 cm^2.
Vi vil finne lengden av sidene i rektanglet.



Vi lar den korteste siden være x cm.
Den lengste siden blir da $(x+3)$ cm.

Vi finner et uttrykk for arealet av rektanglet:

$$A = l \cdot b = (x+3) \cdot x = x^2 + 3x$$

Siden arealet er 54 cm^2, får vi likningen

$$x^2 + 3x = 54$$

Dette er en andregradslikning, der $a = 1$, $b = 3$ og $c = -54$.

Vi løser likningen ved å bruke *abc*-formelen eller digitalt verktøy, og får $x = -9$ eller $x = 6$.

Lengden av en side kan ikke være negativ, så løsningen $x = -9$ må vi forkaste.

Løsningen $x = 6$ sier oss at den korteste siden er 6 cm. Den lengste siden er $(6+3) \text{ cm} = 9 \text{ cm}$.

Vi regner ut arealet av rektanglet for kontroll: $6 \text{ cm} \cdot 9 \text{ cm} = 54 \text{ cm}^2$.

Figur 14: Eksempel 7 (*Matematikk 1T,* 2009, s. 54)

Eksempelet vurderer om de to løsningene av andregradslikningen er gyldige og forklarer på en god måte hvorfor en løsning forkastes. I tillegg kontrolleres svaret ved å regne ut arealet og se at det er riktig. I teksten etter eksempelet presiseres og generaliseres dette ytterligere: «Når vi bruker en likning til å løse et praktisk problem, må vi alltid undersøke om løsningene gir mening, altså om de er svar på det praktiske problemet» (*Matematikk 1T,* 2009, s. 54). På denne måten viser forfatter tilbake til oppgavens premisser i tråd med Pólyas fjerde trinn. Alt i alt er det mye god metodebruk i eksempelet, om enn illustrasjonen mangler bildetekst.

Eksempel b – nyanseforskjeller i to liknende eksempler

Figur 15 og Figur 16 viser eksempler fra to forskjellige lærebøker som er veldig like. Begge bruker metode 9 ”se problemet fra en annen side” på en tydelig og god måte. Figur 15 viser Eksempel 9 (*Matematikk 1T,* 2009, s. 204). De to utregningsmetodene er tydelig markert og nummerert, og eksempelet forklarer inngående de ulike leddene i hvert tilfelle.

Eksempel 9 Fra brudne brøker til vanlige brøker

Vi kan gjøre om brudne brøker til vanlige brøker på to måter.

1 Vi kan bruke at brøkstrek er det samme som divisjonstegn.

$$\frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{12}} = \frac{4}{9} : \frac{5}{12} = \frac{4}{9} \cdot \frac{12}{5} = \frac{4 \cdot 12}{9 \cdot 5} = \frac{16}{15}$$

2 Vi kan utvide med fellesnevneren for *smånevnerne*.

I den brudne brøken $\frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{12}}$ er smånevnerne 9 og 12.

Smånevnerne kan vi faktorisere slik: $9 = 3 \cdot 3$ og $12 = 3 \cdot 4$

Fellesnevneren for smånevnerne 9 og 12 blir derfor $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$.

$$\frac{\frac{4}{9} \cdot 36}{\frac{5}{12} \cdot 36} = \frac{\frac{4 \cdot 36}{9}}{\frac{5 \cdot 36}{12}} = \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{16}{15}$$

Figur 15: Eksempel 9 (*Matematikk 1T,* 2009, s. 204)

Det andre eksempelet er fra Gyldendals *Sigma 1T* og er veldig likt det foregående, men teksten som beskriver at vi kan bruke to metoder kommer *før* eksempelet (se Figur 16). Dette kunne med fordel vært innlemmet i ”eksempelboksen” for å være mer tydelig. Jeg mener likevel at begge er gode eksempler på hvordan man aktivt kan bruke metode 9 ”se problemet fra en annen side” på en god måte.

Vi kan regne ut den brudne brøken som en divisjon mellom to brøker. Men vi kan også regne ut den brudne brøken ved å multiplisere over og under hovedbrøkstreken med *fellesnevneren for smånevnerne*. Vi viser de to framgangsmåtene i eksempel 30.

EKSEMPEL 30

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{9}{10} \quad \text{eller} \quad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{3}{\cancel{4}} \cdot \overset{3}{\cancel{12}}}{\frac{5}{\cancel{6}} \cdot \overset{2}{\cancel{12}}} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{9}{10}$$

Figur 16: Eksempel 30 (*Sigma 1T*, 2009, s. 178)

Eksempel c

Eksempel 2 (*Matematikk R1*, 2007, s. 103-104) i Figur 17 illustrerer tap av en løsning på en interessant måte. Først viser eksempelet hvordan man kan løse problemet, med referanser til Pólyas fjerde trinn om ”å se tilbake” med kontroll av svaret. Det er positivt at det presiseres at dette kan gjøres på to måter. (Eksempelet er likevel ikke kodet som metode 9 ”se problemet fra en annen side” siden de to strategiene ikke utføres). Videre viser eksempelet hvordan en elev, ”Klem”, har regnet, og at han ”mister” en løsning underveis. Årsaken til dette forklares sist i eksempelet. Dette er en meget god måte å vise hvor viktig det er ”å se tilbake” og alltid huske premissene i både oppgaven og i regler og andre hjelpemidler man velger å bruke. Vi ser i tillegg at eksempelet kontrollerer løsningen grafisk ved ”illustrasjonen” av kalkulatoren, og eksempelet er følgelig kodet som metode 3 ”lag en illustrasjon” også.

Eksempel 2 Unngå å miste en løsning

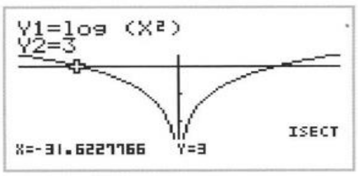
Vi vil løse likningen $\lg(x^2) = 3$.

NB! Siden $x^2 > 0$ når $x \neq 0$, kan x i denne likningen stå for et hvilket som helst reelt tall, unntatt null.

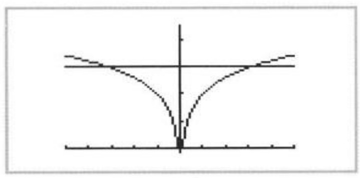
$$\lg(x^2) = 3, \quad x \neq 0$$
$$x^2 = 10^3$$
$$x = \pm\sqrt{10^3}$$
$$x = -31,6 \quad \text{eller} \quad x = 31,6$$

Som i forrige eksempel er det lurt å sette prøve eller kontrollere svaret grafisk.

CASIO



TEXAS



Klem løste likningen ved å bruke første logaritmesetning.
Løsningen så slik ut:

$$\lg(x^2) = 3$$
$$2\lg x = 3$$
$$\lg x = 1,5$$
$$x = 10^{1,5} = 31,6$$

Klem mistet altså en løsning!
Hvordan gikk det til?

Det kommer av at omformingen $\ln(x^2) = 2\ln x$ bare gjelder når $x > 0$.

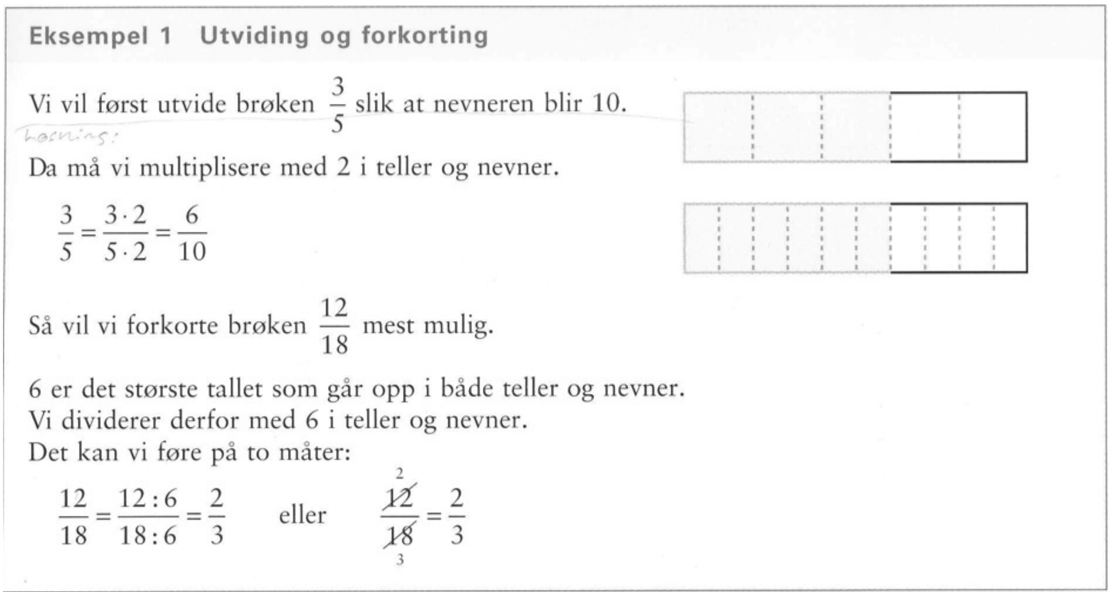
Klem mistet derfor den negative løsningen $x = -31,6$!

Figur 17: Eksempel 2 (*Matematikk R1*, 2007, s. 103-104)

Eksempler med ubenyttet potensiale

Jeg vil nå presentere eksempler på oppgaver jeg mener enkelt kunne poengtert eller forbedret metodebruken på ulike måter. Dette er for å understreke muligheter, og ikke for å kritisere de ulike lærebøkene.

Eksempel d



Eksempel 1 Utviding og forkorting

Vi vil først utvide brøken $\frac{3}{5}$ slik at nevneren blir 10.

Løsning:

Da må vi multiplisere med 2 i teller og nevner.

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$$

Så vil vi forkorte brøken $\frac{12}{18}$ mest mulig.

6 er det største tallet som går opp i både teller og nevner.
Vi dividerer derfor med 6 i teller og nevner.
Det kan vi føre på to måter:

$$\frac{12}{18} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3} \qquad \text{eller} \qquad \frac{\overset{2}{\cancel{12}}}{\underset{3}{\cancel{18}}} = \frac{2}{3}$$

Figur 18: Eksempel 1 (*Matematikk 1T,* 2009, s. 15)

Dette eksempelet viser det jeg vil kalle ”tilfeldig” bruk av metode, noe jeg kommer tilbake til i 6.1.5. Vi ser at metode 3 ”lag en illustrasjon” i utgangspunktet brukes på en veldig god måte, men illustrasjonen mangler bildetekst og refereres ikke til i teksten. Leseren vil kanskje ikke legge merke til illustrasjonen i det hele tatt. Her kunne metodebruken poengteres mye tydeligere ved for eksempel en bildetekst som sier ”Vi ser på bildet at 3/5 er det samme som 6/10”.

Eksempel e

Jeg mener dette er et godt eksempel i utgangspunktet, et av få eksempler der vi ser metode 2 ”lag en systematisk tabell”. Eksempelet er kodet som 2c ”Lag en systematisk tabell, del av løsningsprosessen”, og 3b og 3c ”lag en illustrasjon”, både direkte etterspurt og som en del av løsningsprosessen.

EKSEMPEL 15

Forskere har målt vekta x gram av kreps og sammenliknet med vekta $K(x)$ gram av kloa til krepsen. De har funnet at

$$K(x) = 0{,}023 \cdot x^{1{,}7}$$

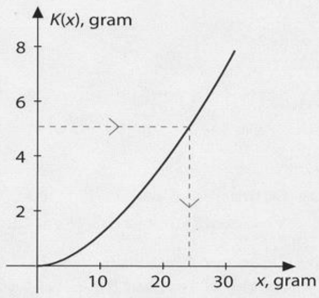
a) En kreps veier 29 g. Hvor mye veier kloa?
b) Tegn grafen for x mellom 0 og 30.
c) Kloa til en kreps veier 5,1 g. Hvor mye veier krepsen?

Løsning:

a) $x = 29$ gir $K(29) = 0{,}023 \cdot 29^{1{,}7} \approx 7{,}0$. Kloa veier 7,0 g.

b) Vi regner ut en tabell og tegner grafen.

x, gram	0	5	10	15	20	25	30
$K(x)$, gram	0	0,35	1,15	2,30	3,75	5,47	7,46



c) Avlesing viser at krepsen veier ca. 24 g.

Figur 19: Eksempel 15 (*Sigma 1T*, 2009, s. 95)

Likevel mener jeg eksempelet enkelt kunne vært enda bedre ved å presentere metode 9 ”se problemet fra en annen side” i c). Ved å vise til at man i c) like gjerne kan bruke formelen til å finne krepsens vekt, viser man ulike metoder for å løse problemet, og poengterer sammenhengen mellom funksjonsverdiene og grafen.

Eksempel f

Det første som slår meg i dette eksempelet (Figur 20) er mangelen på en illustrasjon.

EKSEMPEL 37

Fra en veranda 10 m over bakken kaster vi en ball oppover. Høyden h meter over bakken etter t sekunder er gitt ved

$$h = -5t^2 + 40t + 10$$

a) Finn den største høyden ballen kan få, og hvor lang tid det tar før ballen er i det høyeste punktet.
b) Når er ballen på nytt 10 m over bakken?
c) Når er ballen 50 m over bakken?

Løsning:

a) Vi setter -5 utenfor en parentes og får $h = -5 \cdot (t^2 - 8t - 2)$

Vi legger til og trekker fra $\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$ inni parentesen. Det gir

$$h = -5 \cdot (t^2 - 8t + 16 - 16 - 2) = -5 \cdot \left((t-4)^2 - 18\right) = -5(t-4)^2 + 90$$

Etter 4 s er ballen i det høyeste punktet. Den er da 90 m over bakken.

b) Siden høyden skal være 10 m, får vi likningen

$$-5t^2 + 40t + 10 = 10, \quad \text{dvs.} \quad -5t^2 + 40t = 0$$

Vi faktoriserer venstre side og bruker produktregelen:

$$-5t(t-8) = 0, \quad \text{dvs.} \quad t = 0 \quad \text{eller} \quad t = 8$$

Ballen er på nytt i starthøyden 10 m etter 8 s.

c) Vi får likningen

$$-5t^2 + 40t + 10 = 50, \quad \text{dvs.} \quad -5t^2 + 40t - 40 = 0$$

Vi finner løsningene $t_1 \approx 1{,}2$ og $t_2 \approx 6{,}8$.

Ballen er 50 m over bakken etter 1,2 s (på opptur) og etter 6,8 s (på nedtur).

Figur 20: Eksempel 37 (*Sigma 1T*, 2009, s. 184-185)

En visualisering av situasjonen, med inntegnede akser, synes for meg innlysende i en oppgave som denne. Oppgaven kunne for eksempel innledningsvis spurt etter en illustrasjon, gjerne ved bruk av metode 2 ”lag en systematisk tabell”. Både i a), b) og c) kunne man så referere til illustrasjonen av funksjonen og vise løsningen av problemet grafisk også, og med det inkludere metode 9 ”se det fra en annen side”.

Eksempel g

EKSEMPEL 38

En tomt har form som et rektangel. Omkretsen av tomta er 200 m, mens arealet er 2100 m^2. Finn tomtesidene.

Løsning:
Med sider på x m og y m blir omkretsen $2x + 2y$ og arealet $x \cdot y$.
Det gir likningssettet

$$\begin{bmatrix} 2x + 2y = 200 \\ x \cdot y = 2100 \end{bmatrix}$$

Den øverste likningen gir $y = 100 - x$. Vi setter dette inn i den andre likningen:

$$x(100 - x) = 2100, \quad \text{dvs.} \quad -x^2 + 100x - 2100 = 0$$

Vi løser likningen og får $x = 70$ eller $x = 30$. Verdiene av y finner vi av likningen $y = 100 - x$. Svaret blir $y = 70$ eller $y = 30$.

Tomtesidene er 70 m og 30 m.

Figur 21: Eksempel 38 (*Sigma 1T*, 2009, s. 185)

Også dette påfølgende eksempelet, (Figur 21), i *Sigma 1T* har mye ubenyttet potensiale. Igjen savner jeg er illustrasjon. Denne oppgaven kunne også vært ideell for metode 4 ”prøv og feil” (som for øvrig er en av de minst brukte metodene (jamfør Figur 6)).

Eksempel h

Figur 22 viser et eksempel der oppgaven er å løse en ulikhet. Også i dette eksempelet er det mye bra. Det forklares nøye hvorfor vi ikke har noen nullpunkter og hva det betyr for uttrykket. Mot slutten poengteres det at det er mulig å se dette grafisk: «dette kan du også se ved å tegne grafen til funksjonen», men eksempelet viser ingen tegning. Derfor er eksempelet kodet som metode 5 ”løs deler av problemet” og metode 9 ”se problemet fra en annen side”, men ikke som metode 3 ”lag en illustrasjon”. En tegning ville vært et godt supplement til forklaringen angående uttrykkets fortegn.

EKSEMPEL 13

Løs ulikheten

$$x^2 - 4x + 6 > 0$$

Løsning:

Vi bruker andregradsformelen og finner nullpunktene.

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Kvadratrota av -8 fins ikke. Dermed har ikke $x^2 - 4x + 6$ noen nullpunkter, og uttrykket kan da heller ikke skifte fortegn. Uttrykket er dermed enten positivt for alle verdier av x, eller så er uttrykket negativt for alle verdier av x. Det finner vi ut ved å sette inn én verdi av x. Vi velger $x = 0$. Det gir

$$x^2 - 4x + 6 = 0^2 - 4 \cdot 0 + 6 = 6$$

Ettersom uttrykket er positivt for $x = 0$, må uttrykket være positivt for alle verdier av x.

$$\underline{\underline{x^2 - 4x + 6 > 0 \text{ for alle } x.}}$$

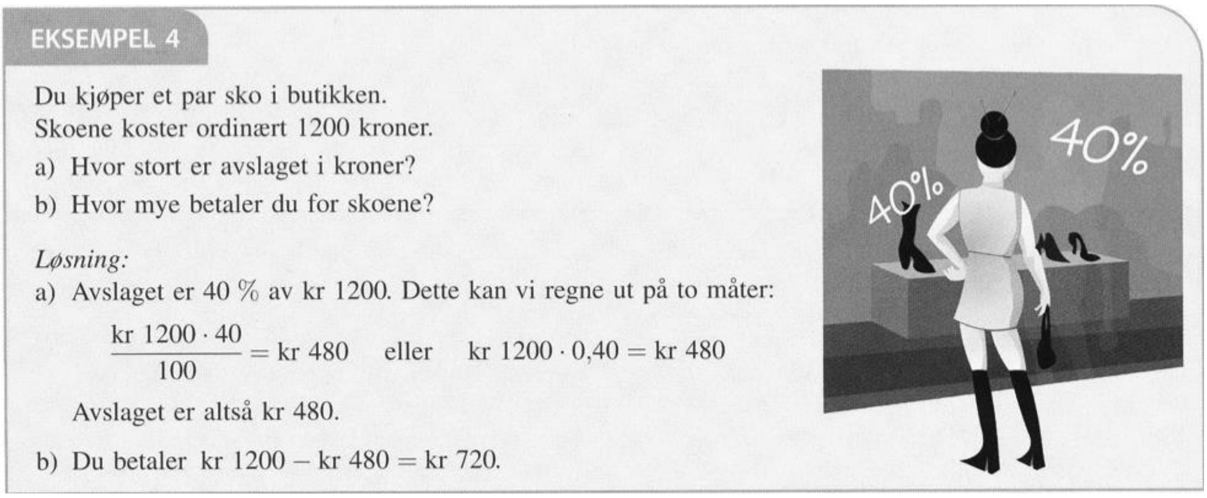
Det kan du også se ved å tegne grafen til funksjonen

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

Figur 22: Eksempel "13" (*Sinus 1T*, 2009, s. 113)

Eksempel i

I enkelte tilfeller kan metodebruken være uheldig, som eksempelet i Figur 23. Eksempelet handler om prosentvis avslag, og inkluderer en informativ illustrasjon, uten bildetekst. Ved siden av illustrasjonen er oppgaven formulert, men spørsmålene kan ikke besvares uten informasjonen fra illustrasjonen. Informasjonen som kreves for å løse oppgaven er nemlig ikke oppgitt i oppgaveteksten. Illustrasjonen har ingen nytteverdi utover å inneholde informasjon som av en eller annen grunn ikke inkluderes i formuleringen av oppgaven. Man kan stille spørsmål ved hva en slik illustrasjon tilfører eksempelet.



EKSEMPEL 4

Du kjøper et par sko i butikken.
Skoene koster ordinært 1200 kroner.

a) Hvor stort er avslaget i kroner?

b) Hvor mye betaler du for skoene?

Løsning:

a) Avslaget er 40 % av kr 1200. Dette kan vi regne ut på to måter:

$$\frac{\text{kr } 1200 \cdot 40}{100} = \text{kr } 480 \quad \text{eller} \quad \text{kr } 1200 \cdot 0{,}40 = \text{kr } 480$$

Avslaget er altså kr 480.

b) Du betaler kr 1200 − kr 480 = kr 720.

Figur 23: Eksempel 4 (*Sigma 1T*, 2009, s. 12)

6.1.5 Tilfeldig og "skjult" metodebruk

Mitt generelle inntrykk etter analysen er at metodebruken virker tilfeldig og lite synlig. Med det mener jeg at metodene benyttes i lærebøkene uten at metodebruken påpekes. Illustrasjoner brukes som regel uten bildetekst eller andre referanser. Oppgaver blir delt opp i flere mindre oppgaver uten bemerkninger om at det kan være enklere å løse oppgaven dersom den fragmenteres. Forklaringer og utdypinger av teknikker og metoder forekommer sjelden.

Ifølge Lester (1996) er problemløsningsevne noe som utvikles sakte over lang tid, og systematisk undervisning i problemløsning er gunstig. Funnene i denne oppgaven har vist at metodebruken i lærebøkene verken er systematisk eller tydelig. I 3.1.5 beskrev jeg det Wyndhamn og Säljø (1997) omtaler som et interaksjonistisk perspektiv: man forsøker å forstå menneskelig kognisjon ut i fra ulike situasjoner og kontekster som oppfordrer mennesker til å delta i noen aktiviteter, men ikke andre. Funnene i denne studien er i et interaksjonistisk perspektiv svært lite gunstig. Lærebøkene har en usedvanlig sterk posisjon i norske klasserom (Schmidt, et al., 1996; Skjelbred, et al., 2005), og har av den grunn stor påvirkningskraft når det kommer til hva som undervises og hvordan. Når metodebruken i lærebøkene er utydelig og lite systematisk, er sannsynligheten høy for at dette preger undervisningen. Det skal lite til for å gjøre metodebruken tydeligere i lærebøkene. Dette vil høyst sannsynlig kunne påvirke undervisningen, som igjen påvirker hva elevene lærer. Ved å markere metodebruken tydeligere vil det være enklere å skape et felles profesjonelt språk til bruk i klasserommet (Kongelf, 2011; Schoenfeld, 1992). Dersom både lærebøkene og læreren fremstiller problemløsning som noe som er viktig, på en tydelig og systematisk måte, er mange av punktene på Lesters liste for undervisning i problemløsning oppfylt (se 3.1.5).

Ingen av bøkene presenterer metoder for problemløsning spesifikt med for eksempel et eget delkapittel der metoder for problemløsning presenteres. Det blir ikke diskutert hva heuristiske metoder er, eller hva de kan brukes til. Punkt III på Lesters liste sier at det er viktig at læreren synes problemløsning er viktig for at elevene skal ta til seg undervisningen om problemløsning. En lærer som utelukkende er inspirert av lærebøkene, vil høyst sannsynlig ikke fokusere mye på heuristiske metoder, siden fokuset på heuristiske metoder i lærebøkene er minimalt. I ytterste konsekvens vil elevene derfor ikke oppleve problemløsning som noe som er verdt å bry seg om. Lærebokens sentrale rolle i norske klasserom forsterker effekten bøkene kan ha i undervisningen.

7 Oppsummering

7.1 Konklusjon

I denne oppgaven har jeg analysert læreplanen LK06 og funnet støtte for at problemløsning og problemløsningsmetoder er noe elevene burde lære. Det første forskningsspørsmålet slår fast at problemløsning er en viktig del av den intenderte læreplanen, og at problemløsning og metoder for problemløsning burde figurere både i lærebøker og undervisning. Lærebøkenes sentrale rolle under planlegging og gjennomføring av undervisning gjør fremstillingen av metoder i lærebøkene spesielt viktig for utvikling av elevenes problemløsningsevne.

For å svare på det andre forskningsspørsmålet analyserte jeg bruken av ti metoder for problemløsning i algebraeksempler i lærebøkene for matematikkursene 1T og R1 på videregående skole. Funnene jeg kom frem til viste at bruken av problemløsningsmetoder i eksemplene var ensartet; et fåtall metoder representerte store deler av forekomstene av metodebruk. De fire mest brukte metodene stod for 78 % av den totale metodebruken. I tillegg til dette er metodebruken tilfeldig og lite synlig i eksemplene. Det forekommer sjelden forklaringer eller påpekning av metodebruk. Da blir metodebruken utydelig og vanskelig for leseren å plukke opp. Rådende forskning viser at metoder for problemløsning er ytterst relevant i utviklingen av problemløsningsevne og at opplæringen må være konsekvent, tydelig og foregå over lengre tid. Her spiller lærebøkene en nøkkelrolle.

Kombinasjonen av Lesters (1996) liste over prinsipper for undervisning i problemløsning, funnene i denne oppgaven om metodebruken i lærebøkene for videregående skole, Kongelfs (2011) funn om metodebruken i lærebøkene for grunnskolen, samt lærebøkenes sentrale rolle i undervisningen i norske klasserom, gir god grunn til bekymring for elevenes utvikling av problemløsningsevne.

Problemstillingen for denne oppgaven er: *I hvilken grad belyses problemløsning i algebraeksemplene i matematikklærebøkene for videregående skole?* I lys av funnene må svaret på problemstillingen bli at eksemplene i matematikklærebøkene i liten grad belyser problemløsning. Det er derimot mye potensiale i hvordan eksemplene presenteres, og små forandringer kan være fruktbare, spesielt med tanke på lærebøkenes sterke posisjon.

7.2 Fremtidig forskning

Denne studien har bidratt med kunnskap om hvilke problemløsningsmetoder som brukes i lærebøkene for to matematikkurs på videregående skole. Den har også vist hvordan metodene presenteres. Enkelte av de utvalgte metodene benyttes ofte, andre er totalt fraværende.

Revisjon av læreplanen og forbedring av lærebøkene

Det er et stort forbedringspotensiale hva angår problemløsningsmetoder i matematikklærebøkene for videregående skole i Norge. Læreplanen for matematikk fellesfag, matematikk 2T og 2P er oppe til revisjon, og endringene i læreplanen vil kreve nye lærebøker. Forlagene har nå mulighet til å ta hensyn til funnene i denne oppgaven og forbedre bruken av problemløsningsmetoder når de nye lærebøkene forfattes.

Utvidede studier og analyser

Underveis i arbeidet med denne oppgaven har jeg gjort meg mange erfaringer, både med hensyn til hva jeg kunne gjort annerledes og ting jeg gjerne skulle sett mer på. Det hadde vært meget interessant å se om en utvidet analyse som inkluderer alle læreplanens hovedområder ville resultert i liknende funn som funnene gjort her angående algebraeksemplene. En analyse av lærebøkene til alle matematikkursene på videregående ville av samme grunn være interessant. Kodingen i denne oppgaven har vært ”snill”. Dersom jeg skulle utført en utvidet analyse, ville jeg inkludert flere underkategorier for å kunne utelukke triviell metodebruk. Underkategoriene av metode 3 ”lag en illustrasjon” avslørte at mye av metodebruken var dekorativ og derfor triviell. En finere inndeling av flere metoder vil kunne føre til ”strengere” krav for kodingen. Da vil triviell metodebruk kunne skilles ut, og kun metodebruken som faktisk belyser problemløsning vil stå igjen. På den måten tror jeg at flere underkategorier for hver metode ville gitt færre forekomster av ikke-trivielle problemløsningsmetoder, og av den grunn muligens mer avslørende funn. Med litt finjusteringer vil dette kunne danne et godt verktøy for videre analyser.

Litteraturliste

Alseth, B., Breiteig, T. & Brekke, G. (2003). *Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering* (Vol. 02/2003). Notodden: Telemarksforsking.

Ary, D., Jacobs, L. C. & Sorensen, C. (2010). *Introduction to research in education*. California: Wadsworth Cengage Learning.

Bergqvist, E. (2007). Types of reasoning required in university exams in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(4), 348-370. doi: 10.1016/j.jmathb.2007.11.001

Björkquist, O. (2003). Matematisk problemløsning. I B. Grevholm (Red.), *Matematikk for skolen* (s. 51-57). Bergen: Fagbokforlaget.

Boesen, J. (2006). *Assessing mathematical creativity: comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact.* Doktoravhandling. Umeå universitet, Umeå. Lokalisert 14.03.13 på http://umu.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2:144670.

Botten, G. (2003). *Meningsfylt matematikk*. Bergen: Caspar forlag.

Branca, N. A. (1980). Problem solving as a goal, process, and basic skill. I S. Krulik (Red.), *Problem solving in school mathematics* (Vol. 1980, s. 3-8). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Bratholm, B. (2001). Godkjenningsordningen for lærebøker 1889-2001, en historisk gjennomgang. Lokalisert 07.03.13 på http://www-bib.hive.no/tekster/hveskrift/notat/2001-05/not5-2001-02.html

Bryman, A. (2012). *Social research methods*. Oxford: Oxford University Press.

Det kongelige kirke-, utdannings-, -og forskningsdepartement. (1996). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Elstad, E. & Turmo, A. (2006). Hva er læringsstrategier? I E. Elstad & A. Turmo (Red.), *Læringstrategier*. *Søkelys på lærerens praksis.* (s. 13-26). Oslo: Universitetsforlaget.

Fossum, A. (2009). *Algoritmer og kreativitet til matematikkeksamen. Fra 2MX til R1: Endret eksamensoppgavene seg med eksamensformen?* Masteroppgave. Universitetet i Oslo, Oslo. Lokalisert 01.05.13 på http://hdl.handle.net/10852/32356.

Gjone, G. (2003). Læreplaner og læreplanutvikling i matematikk. I B. Grevholm (Red.), *Matematikk for skolen* (s. 261-287). Bergen: Fagbokforlaget.

Grønmo, L. S. & Onstad, T. (2009). *Tegn til bedring: norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007*. Oslo: Unipub.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo: Akademika forlag.

Grønmo, L. S., Onstad, T. & Pedersen, I. F. (2010). *Matematikk i motvind*. Oslo: Unipub.

Gundersen, D. & Berulfsen, B. (2008). *Fremmedord blå ordbok*. Oslo: Kunnskapsforlaget.

Halmos, P. R. (1980). The Heart of Mathematics. *The American Mathematical Monthly, 87*(7), 519-524. doi: 10.2307/2321415

Imsen, G. (2003). *Skolemiljø, læringsmiljø og elevutbytte: en empirisk studie av grunnskolens 4., 7. og 10. trinn*. Trondheim: Tapir akademisk forlag.

Kirke- og undervisningsdepartementet. (1987). *Mønsterplan for grunnskolen*. Oslo: Kirke- og undervisningsdepartementet.

Kjærnsli, M., Lie, S., Olsen, R. V. & Roe, A. (2007). *Tid for tunge løft: norske elevers kompetanse i naturfag, lesing og matematikk i PISA 2006*. Oslo: Universitetsforlaget.

Kjærnsli, M. & Roe, A. (2010). *På rett spor: norske elevers kompetanse i lesing, matematikk og naturfag i PISA 2009*. Oslo: Universitetsforlaget.

Kongelf, T. R. (2011). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway? *Nordic Studies in Mathematics Education, 16*(4), 5-54.

Kopka, J. & Pedersen, V. (2000). Et forsøk med problemløsning. I G. Gjone, T. Onstad & R. Solvang (Red.), *Mathema 2000* (s. 111-118). Oslo: NKS-forlaget.

Leer, L. G. (2009). *Vurdering av matematisk problemløsning: En studie av sammenhengen mellom fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk og oppgavene som gis på eksamen.* Masteroppgave. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, Trondheim. Lokalisert 01.05.13 på http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:no:ntnu:diva-10501.

Lester, F. K. (1996). Problemlösningens natur. I R. Ahlström, B. Bergius, G. Emmanuelson, L. Emmanuelson, M. Holmquist, E. Rystedt & K. Wallby (Red.), *Matematik - ett kommunikationsämne* (s. 85-91). Göteborg: Nämnaren.

Lie, S., Kjærnsli, M. & Brekke, G. (1997). *Hva i all verden skjer i realfagene? Internasjonalt lys på trettenåringers kunnskaper, holdninger og undervisning i norsk skole*. Oslo: Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics, 52*(1), 29-55. doi: 10.1023/a:1023683716659

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *The Journal of Mathematical Behavior, 23*(4), 405-427. doi: 10.1016/j.jmathb.2004.09.003

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276. doi: 10.1007/s10649-007-9104-2

Mertens, D. M. (2005). *Research and evaluation in education and psychology*. California: Sage.

Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriets forlag.

Pedersen, G. M. (2012). Forbrukeremner i matematikkfagets lærebøker. For den Videregående skole etter Kunnskapsløftet 2006. Lokalisert 28.02.13 på http://www.regjeringen.no/upload/BLD/FOR/Forbrukeremner_Matematikk.pdf

Pólya, G. (1973). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Robitaille, D. F., Schmidt, W. H., Raizen, S., McKnight, C., Britton, E. & Nicol, C. (1993). *Curriculum Frameworks for Mathematics and Science. TIMSS Monograph No. 1*. Vancouver: Pacific Educational Press.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Valverde, G. A., Houang, R. T. & Wiley, D. E. (1996). *Many visions, many aims: A cross-national investigation of curricular intentions in school mathematics.* London: Kluwer Academic Publishers.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. I D. Grouws (Red.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 334-370). New York: MacMillan.

Skjelbred, D., Solstad, T. & Aamotsbakken, B. (2005). *Kartlegging av læremidler og læremiddelpraksis* (Vol. [1/2005]). Tønsberg: Høgskolen i Vestfold.

Solvang, R. (1992). *Matematikk-didaktikk.* Bekkestua: NKI.

Stanic, G. M. A. & Kilpatrick, J. (1989). Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. I R. I. Charles & E. A. Silver (Red.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (s. 1-22). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Utdanningsdirektoratet. *Kompetanser og grunnleggende ferdigheter*. Lokalisert 29.04.13 på http://www.udir.no/Lareplaner/Veiledninger-til-LK06/Matematikk2/Matematikk/Artikler/Kompetanser-i-matematikk-og-grunnleggende-ferdigheter-/.

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplan i matematikk for realfag - programfag i studiespesialiserende utdanningsprogram*. Lokalisert 24.10.12 på http://data.udir.no/kl06/MAT3-01.pdf?lang=nob.

Utdanningsdirektoratet. (2010a). *Læreplan i matematikk fellesfag*. Lokalisert 02.10.12 på http://data.udir.no/kl06/MAT1-03.pdf?lang=nno.

Utdanningsdirektoratet. (2010b). *Læreplanverket for kunnskapsløftet. Prinsipper for opplæringen*. Lokalisert 19.04.13 på http://www.udir.no/Upload/larerplaner/Fastsatte_lareplaner_for_Kunnskapsloeftet/prinsipper_lk06.pdf?epslanguage=no.

Utdanningsdirektoratet. (2012a). *Høringsbrev om endringer i læreplaner for engelsk, matematikk, naturfag, norsk og samfunnsfag - LK06 og LK06-samisk*. Lokalisert 08.02.13 på http://www.udir.no/Upload/hoeringer/2012/051212/051212_Hoeringsbrev_felles.pdf?epslanguage=no.

Utdanningsdirektoratet. (2012b). *Høringsnotat om endringer i læreplan i matematikk i grunnskolen og videregående opplæring*. Lokalisert 08.02.13 på http://www.udir.no/Upload/hoeringer/2012/051212/051212_Hoeringsnotat_matematikk.pdf?epslanguage=no.

Utdanningsdirektoratet. (2012c). *Læreplan i matematikk fellesfag. Høyringsutkast 05.12.2012*. Lokalisert 08.02.13 på http://www.udir.no/Upload/hoeringer/2012/051212/051212_LP_matematikk_fellesfag.pdf?epslanguage=no.

Utdanningsdirektoratet. (2012d). *Rammeverk for grunnleggende ferdigheter*. Lokalisert 12.12.13 på http://www.udir.no/Upload/larerplaner/lareplangrupper/RAMMEVERK_grf_2012.pdf?epslanguage=no.

Utdanningsdirektoratet. (2012e). *Vurderingsveiledning 2012. Matematikk – sentralt gitt eksamen. Studieforberedende og yrkesfaglig utdanningsprogram. Kunnskapsløftet LK06*. Lokalisert 21.10.12 på http://www.udir.no/Upload/Eksamen/Videregaende/Vurderingsveiledninger_2012/Vurderingsveiledning_Matematikk_VGO_2012_BM.pdf.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Fagvalet til elevane i vidaregåande opplæring skoleåret 2012/2013*. Lokalisert 12.05.13 på http://www.udir.no/Upload/Statistikk/Fagvalg/Fagval_vgo_2012_2013.pdf?epslanguage=no.

Wyndhamn, J. & Säljö, R. (1997). Word problems and matematical reasoning - A study of childrens´s mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning and Instruction*, *7*(4), 361-382. doi: 10.1016/S0959-4752(97)00009-1

Lærebøker

Matematikk 1T

Heir, O., Erstad, G., Borgan, Ø., Engeseth, J. & Moe, H. (2009). *Matematikk 1T*. Oslo: Aschehoug.

Matematikk R1

Heir, O., Erstad, G., Borgan, Ø., Moe, H. & Skrede, P. A. (2007). *Matematikk R1*. Oslo: Aschehoug.

Sigma 1T

Sandvold, K. E., Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Thorstensen, A. et al. (2009). *Sigma matematikk 1T: studieforberedende*. Oslo: Gyldendal undervisning.

Sigma R1

Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Dypbukt, W., Mustaparta, S. et al. (2011). *Sigma R1: matematikk*. Oslo: Gyldendal undervisning.

Sinus 1T

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Hanisch, F. & Hals, S. (2009). *Sinus 1T: matematikk for Vg1 : studieforberedende program*. Oslo: Cappelen Damm.

Sinus R1

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Hanisch, F. & Hals, S. (2007). *Sinus R1: grunnbok i matematikk : studiespesialiserende program*. Oslo: Cappelen.

Figurer og tabeller

Liste over figurer

Figur 1: Læreplanenes tre nivåer 6
Figur 2: Matematisk modellering 11
Figur 3: De vanligste studieløpene i matematikk med elevantall i 2012/2013 på SSP 23
Figur 4: Underkategorier av metode 2 og 3 29
Figur 5: Antall algebraeksempler i lærebøkene 35
Figur 6: Metodebruk totalt 35
Figur 7: Kolonnediagram metodebruk 37
Figur 8: Antall metoder brukt samtidig i eksempler 40
Figur 9: Eksempel ”7” (Sinus R1, 2007, s. 20) 40
Figur 10: Kombinasjoner av tre metoder i samme eksempel 43
Figur 11: Metodebruk fordelt på matematikkursene i relativ prosent 45
Figur 12: Eksempel ”16” (*Sinus 1T*, 2009, s. 52) 46
Figur 13: Eksempel 17 (*Sigma R1*, 2011, s. 135) 47
Figur 14: Eksempel 7 (*Matematikk 1T*, 2009, s. 54) 53
Figur 15: Eksempel 9 (*Matematikk 1T*, 2009, s. 204) 54
Figur 16: Eksempel 30 (*Sigma 1T*, 2009, s. 178) 54
Figur 17: Eksempel 2 (*Matematikk R1*, 2007, s. 103-104) 55
Figur 18: Eksempel 1 (*Matematikk 1T*, 2009, s. 15) 56
Figur 19: Eksempel 15 (*Sigma 1T*, 2009, s. 95) 57
Figur 20: Eksempel 37 (*Sigma 1T*, 2009, s. 184-185) 57
Figur 21: Eksempel 38 (*Sigma 1T*, 2009, s. 185) 58
Figur 22: Eksempel ”13” (*Sinus 1T*, 2009, s. 113) 59
Figur 23: Eksempel 4 (*Sigma 1T*, 2009, s. 12) 60

Liste over tabeller

Tabell 1: Utvalg i lærebøkene 26
Tabell 2: Kodingsmanual basert på Kongelf 28
Tabell 3: Utsnitt av analyseskjema 31
Tabell 4: Totaloversikt metodebruk 36
Tabell 5: Relativ distribusjon i prosent 38
Tabell 6: Fordeling i underkategorier for metode 3 ”lag en illustrasjon” 39
Tabell 7: Kombinasjon av to metoder 41
Tabell 8: Oversikt over bruk av tre metoder samtidig 42
Tabell 9: Metodebruk fordelt på matematikkursene i tall og relativ prosent 44

Vedlegg

Vedlegg 1: Analyseskjema – Aschehoug: *Matematikk 1T*

					HEURISTISKE METODER																
					1	2				3				4	5	6	7	8	9	10	
Kap.	Del-kap.	Tema	Eks.	Side	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell				Lag en illustrasjon				Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et liknende problem	Gjør problemet enklere	Se problemet fra en annen side	Bruk digitale hjelpemidler	
						a1	a2	b	c	a1	a2	b	c								Sum
1 Tall og algebra	1.1	Regning med hele tall	Eks 1	9															1		1
			Eks 2	10																	0
			Eks 3	12	1																1
			Eks 4	13														1			1
			Eks 5	14-15																1	1
	1.2	Brøk	Eks 1	15									1								1
			Eks 2	16															1		1
			Eks 3	16-17														1			1
			Eks 4	17																	0
			Eks 5	18															1		1
			Eks 6	18-19																1	1
	1.3	Store og små tall	Eks 1	21															1		1
			Eks 2	22																	0
			Eks 3	22															1		1
			Eks 4	24																	0
	1.4	Bokstavuttrykk	Eks 1	26																1	1
			Eks 2	26														1			1
			Eks 3	27														1			1
	1.5	Likninger	Eks 1	28														1			1
			Eks 2	29														1			1
			Eks 3	30														1			1
			Eks 4	31																1	1
			Eks 5	32																	0
			Eks 6	33									1					1			2
	1.6	Formler	Eks 1	35																	0
			Eks 2	35																	0
			Eks 3	36																1	1
	1.7	Reelle tall	Eks 1	38																	0
			Eks 2	40																	0
	1.8	Potenser	Eks 1	41														1			1
			Eks 2	42														1			1
			Eks 3	43																	0
			Eks 4	43														1			1
			Eks 5	45														1			1
			Eks 6	45														1			1
	1.9	n-terøtter	Eks 1	48																	0
			Eks 2	48														1			1
			Eks 3	49																	0
	1.10	Andregrads-likninger	Eks 1	50															1		1
			Eks 2	51																	0
			Eks 3	52																	0
			Eks 4	52																	0
			Eks 5	52																	0
			Eks 6	53											1			1			2
			Eks 7	54									1		1					1	3
			Eks 8	55							1								1	1	3
5 Mer algebra	5.1	Faktorisering og forkorting	Eks 1	199																	0
			Eks 2	199	1																1
			Eks 3	199	1																1
			Eks 4	200	1													1			2
			Eks 5	202	1													1			2
			Eks 6	202	1													1	1		3
			Eks 7	203	1													1			2
			Eks 8	203	1													1			2
			Eks 9	204														1	1		2
	5.2	Kvadrat-setningene	Eks 1	205																	0
			Eks 2	205																	0
			Eks 3	206																	0
			Eks 4	207															1		1
			Eks 5	207	1																1
			Eks 6	208																	0
			Eks 7	208																	0
			Eks 8	208																	0
			Eks 9	209	1													1			2
			Eks 10	209	1													1			2
			Eks 11	210											1						1
			Eks 12	210	1									1	1						3

					1	2				3				4	5	6	7	8	9	10	
Kap.	Del-kap.	Tema	Eks.	Side	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell				Lag en illustrasjon				Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et liknende problem	Gjør problemet enklere	Se problemet fra en annen side	Bruk digitale hjelpemidler	
						a1	a2	b	c	a1	a2	b	c								Sum
	5.3	Likninger med brøkuttrykk	Eks 1	212														1			1
			Eks 2	213														1			1
			Eks 3	214														1		1	2
			Eks 4	214																1	1
	5.4	Likningssett	Eks 1	217-218							1				1			1			3
			Eks 2	219											1			1			2
			Eks 3	220											1					1	2
			Eks 4	221									1						1	1	3
	5.5	Ulikheter	Eks 1	222														1			1
			Eks 2	223										1							1
			Eks 3	224																	0
			Eks 4	224														1			1
			Eks 5	224														1			1
			Eks 6	226	1							1			1						3
			Eks 7	228	1								1		1						3
			Eks 8	229	1								1		1				1	1	5
			Eks 9	229	1								1		1				1	1	5
	5.6	Eksponential-likninger	Eks 1	232														1			1
			Eks 2	234											1						1
	5.7	Logaritme-likninger	Eks 1	235																	0
			Eks 2	236																	0
						0	0	0	0	0	2	1	7								
		Sum	88		16	0				10				2	12	0	0	32	13	13	

Vedlegg 2: Analyseskjema – Aschehoug: *Matematikk R1*

					HEURISTISKE METODER																
					1	2				3				4	5	6	7	8	9	10	
Kap.	Del-kap.	Tema	Eks.	Side	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell				Lag en illustrasjon				Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et liknende problem	Gjør problemet enklere	Se problemet fra en annen side	Bruk digitale hjelpemidler	
						a1	a2	b	c	a1	a2	b	c								Sum
2 Algebra	2.1	Faktorisering	Eks 1	59	1																1
			Eks 2	60																	0
			Eks 3	61																	0
			Eks 4	62																	0
			Eks 5	62																	0
			Eks 6	62																	0
			Eks 7	63																	0
			Eks 8	63																	0
			Eks 9	64	1													1			2
			Eks 10	64																1	1
	2.2	Polynomdivisjon	Eks 1	65-66																	0
			Eks 2	66																	0
			Eks 3	67																	0
			Eks 4	68																	0
			Eks 5	68																	0
			Eks 6	69											1						1
			Eks 7	69											1						1
	2.3	Likninger. Implikasjon. Ekvivalens	Eks 1	71																	0
			Eks 2	72																	0
			Eks 3	74														1			1
			Eks 4	75														1			1
			Eks 5	76											1				1		2
			Eks 6	77																	0
	2.4	Ulikheter	Eks 1	78									1		1						2
			Eks 2	80									1		1						2
			Eks 3	81									1	1	1						3
			Eks 4	82									1								1
			Eks 5	84-85									1	1	1						3
	2.5	Bevistyper	Eks 1	86																	0
			Eks 2	87																	0
			Eks 3	87-88															1		1
			Eks 4	89-90															1		1
	2.6	Potenser og logaritmer	Eks 1	91																	0
			Eks 2	92																	0
			Eks 3	92														1			1
			Eks 4	94	1																1
			Eks 5	95																1	1
			Eks 6	96																	0
			Eks 7	96																	0
			Eks 8	96																1	1
	2.7	Logaritme-setningene	Eks 1	97-98																	0
			Eks 2	98							1										1
			Eks 3	99														1			1
			Eks 4	100																	0
			Eks 5	100																	0
			Eks 6	102																	0
	2.8	Logaritme-likninger	Eks 1	102																	0
			Eks 2	103-104									1						1	1	3
			Eks 3	104																	0
			Eks 4	105																	0
			Eks 5	105																	0
	2.9	Eksponential- og logaritme-likninger	Eks 1	107																	0
			Eks 2	108																	0
			Eks 3	108																	0
			Eks 4	109									1		1						2
5 Funksjoner 2	5.1	Funksjoner med *e* som grunntall	Eks 1	201									1							1	2
			Eks 2	202																	0
			Eks 3	202																	0
			Eks 4	202																	0
			Eks 5	203														1			1
			Eks 6	204																	0
			Eks 7	205																	0
			Eks 8	205																	0
						0	0	0	0	0	1	0	8								
		Sum	63		3	0				9				2	8	0	0	6	4	5	

Vedlegg 3: Analyseskjema - Cappelen Damm: *Sinus 1T*

					HEURISTISKE METODER																
Merk: Egen nummerering av eksemplene					1	2				3				4	5	6	7	8	9	10	
Kap.	Del-kap.	Tema	Eks.	Side	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell				Lag en illustrasjon				Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et liknende problem	Gjør problemet enklere	Se problemet fra en annen side	Bruk digitale hjelpemidler	
						a1	a2	b	c	a1	a2	b	c								Sum
2 Tallregning og algebra	2.1	Regnerekke-følge	Eks 1	32																	0
	2.2	Brøkregning	Eks 2	33-34																	0
			Eks 3	35															1		1
			Eks 4	37																	0
	2.3	Bokstavregning	Eks 5	38														1			1
		og paranteser	Eks 6	39														1			1
	2.4	Rasjonale	Eks 7	41														1	1		2
		uttrykk	Eks 8	42														1			1
			Eks 9	42-43														1			1
	2.5	Kvadrat-	Eks 10	44														1			1
		setningene	Eks 11	45							1								1		2
	2.6	Faktorisering	Eks 12	47																	0
			Eks 13	48	1																1
	2.7	Forkorting av	Eks 14	48-49	1						1							1			3
		rasjonale	Eks 15	50																	0
	2.8	Fullstendige kvadrater	Eks 16	52																	0
	2.9	Metoden med fullstendige kvadrater	Eks 17	54																	0
3 Formler, likninger og ulikheter	3.1	Likninger	Eks 1	60														1			1
			Eks 2	61														1			1
			Eks 3	62														1			1
	3.2	Formler	Eks 4	64							1										1
			Eks 5	65							1										1
			Eks 6	67							1										1
	3.3	Rette linjer	Eks 7	71								1									1
			Eks 8	72								1			1						2
	3.5	Grafisk avlesning	Eks 9	75								1							1		2
	3.7	Innsettings-metoden	Eks 10	82											1			1			2
	3.8	Ulikheter	Eks 11	84														1			1
			Eks 12	85							1										1
4 Funksjoner og andregradsuttrykk	4.3	Andregradslikninge	Eks 4	98-99																	0
		r med to ledd	Eks 5	100	1																1
	4.4	Andregradsformelen	Eks 6	101-102																	0
	4.5	Praktisk bruk av andregrads-likninger	Eks 7	104-105									1		1						2
	4.6	Ikke-lineære	Eks 8	106											1						1
		likningssett	Eks 9	107	1										1			1			3
	4.7	Nullpunkter og faktorisering	Eks 10	108-109											1					1	2
	4.8	Andregrads-	Eks 11	110								1									1
		ulikheter	Eks 12	112									1		1						2
			Eks 13	113											1				1		2
5 Potenser og logaritmer	5.1	Potenser	Eks 1	120																	0
			Eks 2	121																	0
			Eks 3	122	1																1
			Eks 4	123																	0
			Eks 5	123																	0
	5.2	Regneregler for	Eks 6	124																	0
		potenser	Eks 7	125														1			1
			Eks 8	126														1			1
	5.3	Tall på	Eks 9	127							1										1
		standardform	Eks 10	127-128							1										1
			Eks 11	128																	0
			Eks 12	129																1	1
	5.4	Kvadratrøtter og	Eks 13	131																	0
		røtter av høyere	Eks 14	132																	0
		orden	Eks 15	132																	0
			Eks 16	133																	0
			Eks 17	133																1	1

Merk: Egen nummerering av eksemplene					1	2				3				4	5	6	7	8	9	10	
Kap.	Del-kap.	Tema	Eks.	Side	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell				Lag en illustrasjon				Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et liknende problem	Gjør problemet enklere	Se problemet fra en annen side	Bruk digitale hjelpemidler	
						a1	a2	b	c	a1	a2	b	c								Sum
	5.5	Potenser med brøk som eksponent	Eks 18	135																1	1
			Eks 19	136														1			1
			Eks 20	137																	0
	5.6	Logaritmer	Eks 21	138	1																1
			Eks 22	140																	0
			Eks 23	140																	0
			Eks 24	140																	0
			Eks 25	141																	0
	5.7	Eksponential-likninger	Eks 26	142																	0
			Eks 27	143							1										1
			Eks 28	144																	0
			Eks 29	145	1													1			2
			Eks 30	145-146	1						1							1			3
	5.8	Logaritme-likninger	Eks 31	147																	0
			Eks 32	148														1			1
						0	0	0	0	0	10	4	2								
		Sum	71		8	0				16				0	8	0	0	19	5	4	

Merk: Delkapittel "3.4: Rette linjer med digitale verktøy", "3.6: Grafisk løsning av lineære likningssett" og "4.9: Rasjonale funksjoner" er utelatt siden de ikke inneholdt noen eksempler

Vedlegg 4: Analyseskjema - Cappelen Damm: *Sinus R1*

					HEURISTISKE METODER																
Merk: Egen nummerering av eksemplene					1	2				3				4	5	6	7	8	9	10	
Kap.	Del-kap.	Tema	Eks.	Side	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell				Lag en illustrasjon				Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et liknende problem	Gjør problemet enklere	Se problemet fra en annen side	Bruk digitale hjelpemidler	
						a1	a2	b	c	a1	a2	b	c								Sum
1 Algebra	1.1	Implikasjon og ekvivalens	Eks 1	12														1			1
	1.2	Noen bevismetoder	Eks 2	14	1																1
			Eks 3	15	1														1		2
			Eks 4	16-17															1		1
	1.3	Polynom-divisjon	Eks 5	19																	0
			Eks 6	19-20																	0
			Eks 7	20																	0
			Eks 8	21																	0
	1.4	Resten ved en polynom-divisjon	Eks 9	22																	0
			Eks 10	23																	0
			Eks 11	24																	0
	1.5	Faktorisering av polynomer	Eks 12	26-27											1						1
			Eks 13	28											1						1
			Eks 14	28-29											1						1
	1.6	Likninger og ulikheter	Eks 15	30									1		1						2
			Eks 16	31											1						1
			Eks 17	32-33									1		1						2
			Eks 18	33-34									1		1						2
	1.7	Forkorting av rasjonale uttrykk	Eks 19	36											1			1			2
			Eks 20	37																	0
			Eks 21	37-38											1			1			2
	1.8	Rasjonale likninger	Eks 22	39	1													1			2
			Eks 23	40											1			1			2
			Eks 24	41-42											1			1			2
	1.9	Rasjonale ulikheter	Eks 25	43-44									1		1			1			3
			Eks 26	45-46									1		1			1			3
2 Logaritmer	2.1	Briggske logaritmer	Eks 1	51																	0
			Eks 2	53														1			1
	2.2	Eksponential-likninger	Eks 3	54	1																1
			Eks 4	55							1										1
			Eks 5	56																	0
	2.3	Eksponentielle ulikheter	Eks 6	57	1													1			2
			Eks 7	59									1		1						2
			Eks 8	60									1		1			1			3
	2.4	Likninger og ulikheter med lg x	Eks 9	61-62														1	1		2
			Eks 10	63														1			1
			Eks 11	63-64	1							1	1							1	4
	2.5	Den naturlige logaritmen	Eks 12	67					1			1	1		1						4
	2.6	Bruk av den naturlige	Eks 13	70-71														1			1
			Eks 14	72-73	1								1		1			1			4
	2.7	Likninger og ulikheter med ln x	Eks 15	74														1			1
			Eks 16	75														1			1
			Eks 17	76	1								1		1						3
		Sum	43		8	0	0	0	1	0	1	2	11	0	18	0	0	17	3	1	
						1				14											

Vedlegg 5: Analyseskjema – Gyldendal: *Sigma 1T*

					HEURISTISKE METODER																
					1	2				3				4	5	6	7	8	9	10	
Kap.	Del-kap.	Tema	Eks.	Side	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell				Lag en illustrasjon				Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et liknende problem	Gjør problemet enklere	Se problemet fra en annen side	Bruk digitale hjelpemidler	
						a1	a2	b	c	a1	a2	b	c								Sum
1 Matematikken rundt oss	1.1	Veien om 1	Eks 1	10							1										1
			Eks 2	10							1										1
			Eks 3	11							1				1						2
	1.2	Prosent	Eks 4	12						1									1		2
			Eks 5	12											1				1		2
			Eks 6	13											1				1		2
			Eks 7	13											1						1
	1.3	Regnerekkefølge og fortegn	Eks 8	14																	0
			Eks 9	14														1			1
			Eks 10	15																	0
			Eks 11	15																	0
	1.4	Regning med brøk	Eks 12	16																	0
			Eks 13	16															1		1
			Eks 14	17							1										1
			Eks 15	17											1						1
	1.5	Grunnleggende algebra	Eks 16	18																	0
			Eks 17	18																	0
			Eks 18	19	1													1	1		3
	1.6	Likninger	Eks 19	20																	0
			Eks 20	21							1				1						2
	1.7	Kvadratrøtter	Eks 21	22																	0
			Eks 22	22																	0
			Eks 23	23														1			1
	1.8	Dekadiske målenheter. Nøyaktighet	Eks 24	24																	0
			Eks 25	25																	0
			Eks 26	25																	0
	1.12	Vekstfaktor	Eks 34	32											1						1
			Eks 35	32											1						1
			Eks 36	33							1				1						2
			Eks 37	33											1						1
	1.13	Lineært forholdstall	Eks 38	34							1										1
			Eks 39	35											1						1
	1.14	Sammensatte eksempler	Eks 40	36															1		1
			Eks 41	36											1						1
			Eks 42	36						1											1
			Eks 43	37									1		1						2
			Eks 44	37						1											1
			Eks 45	37	1													1			2
3 Potenser, logaritmer og eksponentiell vekst	3.1	Potenser med positive eksponenter	Eks 1	86																	0
			Eks 2	87																	0
			Eks 3	87																	0
	3.2	Eksponent ≤ 0	Eks 4	88																	0
			Eks 5	89														1			1
	3.3	Store og små tall	Eks 6	90																	0
			Eks 7	90																1	1
			Eks 8	91																1	1
			Eks 9	91							1										1
	3.4	n-te røtter. Ukjent vekstfaktor	Eks 10	92														1			1
			Eks 11	92																	0
			Eks 12	93							1							1			2
	3.5	Potenser med brøkeksponenter. Potensfunksjoner	Eks 13	94																	0
			Eks 14	95														1			1
			Eks 15	95					1			1	1								3
	3.6	Logaritmer	Eks 16	96																	0
			Eks 17	96	1																1
			Eks 18	97							1									1	2
			Eks 19	97																1	1
	3.7	Eksponential-likninger	Eks 20	98														1			1
			Eks 21	99											1						1
			Eks 22	99																	0
	3.8	Eksponential-funksjoner	Eks 23	101								1	1								2
	3.9	Logaritme-likninger	Eks 24	102														1			1
			Eks 25	103							1										1
	3.10	Sammensatte eksempler	Eks 26	104					1				1								2
			Eks 27	105					1			1	1								3

					1	2				3				4	5	6	7	8	9	10	
Kap.	Del-kap.	Tema	Eks.	Side	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell				Lag en illustrasjon				Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et liknende problem	Gjør problemet enklere	Se problemet fra en annen side	Bruk digitale hjelpemidler	
						a1	a2	b	c	a1	a2	b	c								Sum
5 Algebra	5.2	Kvadratiske likninger og produktregelen	Eks 1	158																	0
			Eks 2	159	1																1
	5.3	Formelregning	Eks 3	160							1								1		2
			Eks 4	161				1			1								1		3
	5.4	Konjugat-setningen	Eks 5	162																	0
			Eks 6	162	1																1
			Eks 7	163	1													1			2
	5.5	Første og andre kvadratsetning	Eks 8	164																	0
			Eks 9	165																	0
			Eks 10	165	1														1		2
	5.6	Fullstendig kvadrat	Eks 11	166																	0
			Eks 12	166																	0
			Eks 13	167	1										1						2
			Eks 14	167	1										1						2
	5.7	Faktorisering og forkorting av brøkuttrykk	Eks 15	168	1													1	1		3
			Eks 16	169	1										1			1			3
	5.8	Løsningsformel for andregradslikninger	Eks 17	170																	0
			Eks 18	170																	0
			Eks 19	171															1	1	2
	5.9	Bruk av andregrads-likninger	Eks 20	172							1								1	1	3
			Eks 21	172	1								1								2
			Eks 22	173				1												1	2
	5.10	Likninger med brøker	Eks 23	174																1	1
			Eks 24	174														1			1
			Eks 25	175																	0
			Eks 26	175														1			1
	5.11	Sammentrekning av uttrykk med den ukjente i nevneren	Eks 27	176														1			1
			Eks 28	176	1													1			2
			Eks 29	177							1										1
	5.12	Brudden brøk	Eks 30	178															1		1
			Eks 31	178	1													1			2
			Eks 32	179	1													1			2
	5.13	Faktoriseringsformel for andregradsuttrykk	Eks 33	180														1			1
			Eks 34	181	1										1			1			3
	5.14	Likningssett som ikke er lineære	Eks 35	182											1						1
	5.15	Sammensatte eksempler	Eks 36	184	1													1	1		3
			Eks 37	184	1																1
			Eks 38	185											1						1
7 Grafer og ulikheter	7.1	Lineære ulikheter.	Eks 1	234																	0
			Eks 2	235								1									1
	7.2	Løsning av ulikheter ved hjelp av fortegnslinjer	Eks 3	236									1								1
			Eks 4	237									1								1
						0	0	2	3	3	15	4	8								
		Sum	107		18	5				30				0	20	0	0	22	14	8	

Vedlegg 6: Analyseskjema – Gyldendal: *Sigma R1*

					HEURISTISKE METODER																
					1	2				3				4	5	6	7	8	9	10	
Kap.	Del-kap.	Tema	Eks.	Side	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell				Lag en illustrasjon				Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et liknende problem	Gjør problemet enklere	Se problemet fra en annen side	Bruk digitale hjelpemidler	
						a1	a2	b	c	a1	a2	b	c								Sum
2 Bevis og bevisføring	2.1	Logikk	Eks 1	51																	0
	2.2	Implikasjon og ekvivalens	Eks 2	52							1										1
			Eks 3	52																	0
			Eks 4	53																	0
	2.3	Irrasjonale likninger	Eks 5	55																	0
	2.4	Bevis. Direkte bevis	Eks 6	56	1																1
			Eks 7	57	1								1								2
	2.5	Andre bevisformer	Eks 8	58	1									1							2
			Eks 9	58	1														1		2
			Eks 10	59	1																1
	2.6	Vi øver på bevis	Eks 11	60	1																1
			Eks 12	61	1																1
			Eks 13	61	1													1			2
	2.8	Sammensatt eksempel	Eks 16	64-65	1																1
4 Algebra	4.1	Andregrads-uttrykk	Eks 1	120	1													1			2
			Eks 2	121	1													1			2
	4.2	Polynom-divisjon	Eks 3	123																	0
	4.3	Nullpunkt-setningen. Faktorisering	Eks 4	124																	0
			Eks 5	124																	0
			Eks 6	125																	0
	4.4	Likninger og ulikheter med polynomer	Eks 7	126									1	1							2
	4.5	Likninger løst med substitusjon. Brøklikninger	Eks 8	128														1			1
			Eks 9	129	1				1									1			3
	4.6	Brøkulikheter	Eks 10	130									1		1						2
			Eks 11	131									1		1			1			3
	4.7	Logaritme-setningene	Eks 12	132																	0
			Eks 13	132														1			1
			Eks 14	133														1			1
	4.8	Likninger med logaritmer	Eks 15	134														1			1
			Eks 16	134-135																	0
			Eks 17	135																	0
	4.9	Tallet *e*. Naturlige logaritmer	Eks 18	136	1															1	2
			Eks 19	137																	0
			Eks 20	137														1			1
	4.10	Likninger med naturlige logaritmer	Eks 21	138																	0
			Eks 22	138														1			1
			Eks 23	139																	0
	4.11	Uttrykk og likninger med tallet *e*	Eks 24	140							1										1
			Eks 25	140																	0
			Eks 26	141																	0
			Eks 27	141														1			1
	4.12	Ulikheter med eksponentialfunksjoner og logaritmer	Eks 28	142																	0
			Eks 29	142																	0
			Eks 30	143	1								1		1						3
	4.13	Sammensatt eksempel	Eks 31	144-145									1		1		1	1			4
						0	0	0	1	0	2	0	6								
		Sum	45		14	1				8				2	4	0	1	13	1	1	