

**Deformasjon av Stanley-Reisner skjemaer
til $K3$ -flater i rasjonale normale skruer**

av

CHRISTINE FURUSETH TAPPEL

MASTEROPPGAVE

for graden

Master i Matematikk

(Master of Science)



*Det matematisk- naturvitenskapelige fakultet
Universitetet i Oslo*

November 2012

*Faculty of Mathematics and Natural Sciences
University of Oslo*

Takk til

Jeg ønsker først og fremst å takke min veileder Jan Christophersen, som har gitt meg et spennende tema å jobbe med, inspirerende veiledningstimer, tett oppfølging, tålmodighet og god hjelp hver gang jeg har trengt det.

Videre vil jeg yte en stor takk til Sigurd Segtnan, Fredrik Meyer og Robin Bjørnetun Jabocsen som alle har lest korrektur på oppgaven og kommet med konstruktive tilbakemeldinger.

En stor takk går også til Karoline Moe som har vært min matematikkmentor og gode venninne gjennom hele min mastergrad. Hennes uforbeholdne støtte har hjulpet meg til å komme rakrygget gjennom denne prosessen.

Jeg ønsker også å takke Håkon Gylterud som jobbet tett med meg hele bachelor-graden og som gjennom sin store matematikkentusiasme inspirerte meg til å ta en mastergrad i matematikk.

Til slutt vil jeg takke min familie, og mest av alt min kjære mann Espen som har sittet tålmodig på sidelinjen hele veien.

Innledning

I artikkelen til Bowen og Fisk [3] gis en algoritme for hvordan trianguleringer av 2-sfæren kan genereres og en tilhørende liste over antall trianguleringer med n hjørner opp til isomorfi. Vi kan gi disse trianguleringene en skjemastruktur ved hjelp av Stanley-Reisner konstruksjonen. Målet med denne oppgaven er å se hva som skal til for at Stanley-Reisner skjemaene av denne typen kan glattes til $K3$ -flater i rasjonale normale skruer. Med en glatting mener vi en flat familie \mathcal{X} slik at den generelle fiberen \mathcal{X}_t er glatt.

I Kapittel 1 gir vi en introduksjon til teorien som ligger til grunn for resten av oppgaven. Vi gir en kort forklaring av hvordan Knutsen og Johnssen [9] beskriver projektive modeller av $K3$ -flater i rasjonale normale skruer. Deretter forklarer vi konseptet rullende faktorer introdusert i artikkelen til Stevens [14]. Dette gir oss et verktøy til å kunne gi en eksplisitt beskrivelse av idealene til $K3$ -flaten som er skåret ut av divisorer på skruen. Vi introduserer de grunnleggende prisippene i deformasjonsteori fra Hartshorne [8], og til slutt en beskrivelse av førsteordensdeformasjonene til Stanley-Reisner skjemaer basert på resultater fra artikkelen til Altmann og Christophersen [1].

I Kapittel 2 gir vi en beskrivelse av en bestemt degenerasjon av rasjonale normale skruer gitt ved det såkalte Riemenschneider-symbolet [10]. Disse degenerasjonene er Stanley-Reisner skjemaer assosiert til trianguleringer av n -ballen. Vi viser at bestemte typer kantflipper av disse trianguleringene også vil deformere til rasjonale normale skruer, og hvorledes kantflippene er ekvivalent med søylepermutasjoner av matrisen hvis 2×2 -minorer gir idealet til skruen.

I Kapittel 3 ser vi på triangulerte sfærer som delmengder av triangulerte n -baller. For å få en flat deformasjon av Stanley-Reisner skjemaet til sfæren må vi lage en deformasjon der sfæren og n -ballen deformeres samtidig på en

kompatibel måte. Vi introduserer i dette kapitlet en delvis deformasjon der kun monomene i Stanley-Reisner idealet til den degenererte skruen perturberes. Gitt visse forutsetninger fremkommer det flere kriterier på den triangulerte sfæren for at denne deformasjonen skal være flat.

I Kapittel 4 gir vi en eksplisitt beskrivelse av hvordan de triangulerte sfærene beskrevet i Kapittel 3 kan glattes til $K3$ -flater. Her bruker vi en såkalt ren rullende faktor deformasjon introdusert av Stevens i [14]. Dette gir oss mulighet til å gi klare kriterier for når sfærene på denne formen kan glattes til $K3$ -flater i rasjonale normale skruer i tilfellene der skruen har dimensjon 3 og 4.

Vi avslutter oppgaven med en klassifisering av de glattbare sfærene på denne formen for trianguleringer med 6, 7 og 8 hjørner. Deretter gir vi et glattbart eksempel der sfæren er delmengde av en degenerert skrue assosiert til en triangulering av 5-ballen.

Innhold

1	Bakgrunn	1
1.1	$K3$ -flater i rasjonale normale skruer	1
1.1.1	Rasjonale normale skruer	1
1.1.2	Projektive modeller av $K3$ -flater i skruer	2
1.1.3	Resolusjon av \mathcal{O}_X som \mathcal{O}_Y -modul	3
1.2	Rullende faktorer	3
1.3	Deformasjonsteori	4
1.3.1	Deformasjon av skjemaer	4
1.3.2	T^i -funktorene	5
1.3.3	Førsteordens deformasjoner av affine skjemaer	5
1.3.4	Obstruksjoner til løfting av deformasjoner	6
1.4	Deformasjon av Stanley-Reisner skjemaer	7
2	Degenererte skruer	11
2.1	Trianguleringer av disken	12
2.2	Trianguleringer av B^n	18
2.2.1	Delordninger	19
2.2.2	Trianguleringer av B^3	21
2.2.3	Generalisering til B^n	23

3	En delvis deformasjon	25
3.1	Den delvise deformasjonen	25
3.2	Kriterium for flatthet	30
3.2.1	Deformasjonen $\mathcal{X}' \rightarrow k[t]$ når $\dim \mathcal{Y} = 3$	32
3.2.2	Deformasjonen $\mathcal{X}' \rightarrow k[t]$ når $\dim \mathcal{Y} \geq 4$	35
3.3	Degenererte skruer på generell form	40
3.3.1	Løfting av relasjoner for $\dim \mathcal{Y} = 3$	46
3.3.2	Løfting av relasjoner for $\dim \mathcal{Y} \geq 4$	49
4	Glattbare sfærer	53
4.1	Resolusjon av \mathcal{O}_X som \mathcal{O}_Y -modul	53
4.2	Idealet I_X	54
4.2.1	$\dim Y = 3$	54
4.2.2	$\dim Y \geq 4$	55
4.3	Glattbare sfærer	56
4.3.1	Rullende faktor deformasjoner	57
4.3.2	Skruer av dimensjon 3	57
4.3.3	Skruer av dimensjon ≥ 4	60
5	Eksempler	65
5.1	Glattbare skruer med 6, 7 og 8 hjørner	65
5.1.1	Glattbare skruer med 6 hjørner	66
5.1.2	Glattbare skruer med 7 hjørner	66
5.1.3	Glattbare skruer med 8 hjørner	67
5.2	Glattbare sfærer i skruer av $\dim Y = 5$	68
	Referanser	71

Kapittel 1

Bakgrunn

1.1 $K3$ -flater i rasjonale normale skruer

I [11] gir Schreyer en beskrivelse av hvordan visse typer varieteter skjæres ut av divisorer på rasjonale normale skruer, og i [9] gjør Johnsen og Knutsen dette mer spesifikt når varietetene er $K3$ -flater. I sistnevnte konstrueres en projektiv modell av $K3$ -flatene i skruer som vi også skal gjengi slik at vi kan forstå resolusjonene. Fra nå av lar vi X være en $K3$ -flate og Y en rasjonal normal skrue som beskrevet i Definisjon 1.1.1 og Definisjon 1.1.2.

1.1.1 Rasjonale normale skruer

Definisjon 1.1.1. [11, s. 109] La $\mathcal{E} = \mathcal{O}(d_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(d_r)$ være et lokalt fritt knippe av rang r på \mathbb{P}^1 med $d_1 \geq \cdots \geq d_r \geq 0$ der $d_i \in \mathbb{Z}$ og $f = d_1 + \cdots + d_r$. Vi har da et lineært system $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ på \mathbb{P}^{r-1} -bunten $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ over \mathbb{P}^1 og kan avbilde $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ til \mathbb{P}^g via det komplette lineære systemet $H^0(\mathcal{L})$, der $g = f + r - 1$. Bildet Y vil være en rasjonal normal skrue av typen $S(d_1, \dots, d_r)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{i} & Y \subseteq \mathbb{P}^g \\ \downarrow p & & \\ \mathbb{P}^1 & & \end{array}$$

Hvis $d_r \geq 1$ vil Y være glatt og isomorf med $\mathbb{P}(\mathcal{E})$.

For praktiske formål er det verdt å merke seg at den rasjonale normale skruen Y er en determinantell varietet, som forklart i Harris [7, s. 106]. Hvis Y er av skruetype $S(d_1, \dots, d_r)$, vil ligningene være gitt ved 2×2 -minorene til matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} x_{1,0} & \cdots & x_{1,d_1-1} & x_{2,0} & \cdots & \cdots & x_{r,0} & \cdots & x_{r,d_r-1} \\ x_{1,1} & \cdots & x_{1,d_1} & x_{2,1} & \cdots & \cdots & x_{r,1} & \cdots & x_{r,d_r} \end{array} \right).$$

1.1.2 Projektive modeller av $K3$ -flater i skruer

Definisjon 1.1.2. [2, s. 245] En $K3$ -flate X er en glatt kompakt flate med triviell kanonisk divisor $K_X = \mathcal{O}_X$ og $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

For å gi en projektiv modell av $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{P}^g$ ser vi på morfien

$$\varphi_L : X \rightarrow \mathbb{P}^{h^0(L)-1} := \mathbb{P}^g$$

definert av det komplette lineære systemet $|L|$, der L er en basepunktfri og stor linjebunt på X . Vi sier at L er stor hvis $L^2 > 0$. Videre antar vi at $L \sim D + F$ der $h^0(D) \geq 2$ og $h^0(F) \geq 2$, og velger et 2-dimensjonalt underrom $W \subseteq H^0(X, D)$. Dette gir oss en pensel

$$\{D_{\lambda \in \mathbb{P}^1}\} \subseteq |D|.$$

Hver $\varphi_L(D_\lambda)$ utspenner et $(h^0(L) - h^0(L - D) - 1)$ -dimensjonalt underrom av \mathbb{P}^g som vi kaller det lineære spennet til $\varphi_L(D_\lambda) =: \bar{D}_\lambda$. Da har vi

$$Y = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{P}^1} \bar{D}_\lambda \subseteq \mathbb{P}^g$$

som vil være en skrue.

Når vi senere skal se resolusjonen av X i Y , inngår den såkalte *Clifford*-indeksen til linjebunten L på X nevnt ovenfor, og vi tar derfor med definisjonen av denne.

Definisjon 1.1.3. Clifford-indeksen $c = \text{Cliff}(L)$ er definert som Clifford-indeksen til alle de glatte kurvene i $|L|$. Hvis C er en kurve har vi $\text{Cliff}(C) = \min\{\text{Cliff} A \mid h^0(A) \geq 2, h^1(A) \geq 2\}$ der A er en linjebunt på C med $\text{Cliff}(A) = \deg A - 2(h^0(A) - 1)$.

I tilfellene vi skal jobbe med er $K3$ -flatene underskjemaer av glatte skruer, og vi har da

$$\begin{aligned}\dim Y &= c + 2 \\ \deg Y &= g - c - 1.\end{aligned}$$

1.1.3 Resolusjon av \mathcal{O}_X som \mathcal{O}_Y -modul

Vi skal betrakte glatte skruer og har derfor $Y \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$. La $H = [i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)]$ være hyperplanklassen til $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ og $R = [p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)]$ fibreringen, der p og i er definert ovenfor. Picard-gruppen til $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ er da gitt ved

$$\text{Pic } \mathbb{P}(\mathcal{E}) = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}R$$

I [9, s. 60] finner vi resolusjonen av \mathcal{O}_X som \mathcal{O}_Y -modul. Vi får forskjellige resolusjoner avhengig av dimensjonen til Y og disse er gitt som følger.

(i) Hvis $\dim Y = 3$ har vi

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-3H + (g - 4)R) \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

Dette betyr at en $K3$ -flate X i en skrue av dimensjon 3 vil ligge som en divisor i det lineære systemet $|3H - (g - 4)R|$.

(ii) Hvis $\dim Y \geq 4$ har vi

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-(c + 2)H + (g - c - 3)R) &\longrightarrow \bigoplus_{k=1}^{\beta_{c-1}} \mathcal{O}_Y(-cH + b_{c-1}^k R) \\ &\longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^{\beta_1} \mathcal{O}_Y(-2H + b_1^k R) \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0\end{aligned}$$

der $\beta_i = i \binom{c+1}{i+1} - \binom{c}{i-1}$. Hvis $\dim Y = 4$ har vi $\beta_1 = \binom{3}{2} - \binom{2}{0} = 2$, slik at $K3$ -flaten X vil ligge som et komplett snitt av divisorer i klassen $|2H - b_1^k R|$. I tilfellene der $\dim Y > 4$ har vi $\beta_1 = \binom{c+1}{2} - 1$ med $c \geq 3$, og det følger at $\beta_1 > \dim Y - \dim X = c$ slik at X ikke er et komplett snitt i Y .

1.2 Rullende faktorer

For å få en mer eksplisitt beskrivelse av hvordan divisorene skjæres ut i skruen bruker vi konseptet *rullende faktorer* som beskrevet i artikkelen til Stevens [14].

La $Y \subset \mathbb{P}^g$ være en skrue av typen $S(d_1, \dots, d_r)$ slik at $\dim Y = r$. Videre lar vi $(s : t)$ være homogene koordinater på \mathbb{P}^1 og $(w_1 : \dots : w_r)$ homogene koordinater på fibrene til Y . Da vil koordinatene på \mathbb{P}^g være gitt ved

$$x_{i,j} = s^{d_i-j} t^j w_i$$

der $1 \leq i \leq r$ og $0 \leq j \leq d_i$. Gitt denne koordinattransformasjonen vil idealet til Y nå være generert av 2×2 -minorene til matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} s^{d_1} w_1 & \dots & s t^{d_1-1} w_1 & s^{d_2} w_2 & \dots & \dots & s^{d_r} w_r & \dots & s t^{d_r-1} w_r \\ s^{d_1-1} t w_1 & \dots & t^{d_1} w_1 & s^{d_2-1} t w_2 & \dots & \dots & s^{d_r-1} w_r & \dots & t^{d_r} w_r \end{array} \right).$$

Videre lar vi hver w_i ha vektet grad $-d_i$.

Lemma 1.2.1. [14, s. 188] *En divisor på Y i det lineære systemet $|aH - bF|$ er gitt ved en bihomogen ligning $P(s, t, w_i)$ av grad a i w_i 'ene og total grad $-b$. Multipliserer vi $P(s, t, w_i)$ med $s^{b-m} t^m$ får vi $b+1$ ligninger P_m som nå kan uttrykkes i koordinatene $x_{i,j}$ til \mathbb{P}^g . Vi kan gå fra P_m til P_{m+1} ved å rulle faktorer, det vil si at en $x_{i,j}$ byttes ut med $x_{i,j+1}$ i hvert ledd i P_m .*

1.3 Deformasjonteori

I denne seksjonen skal vi gi en introduksjon til deformasjonteorien. Vi definerer deformasjon av skjemaer, T^i -funktorene, og spesielt deformasjon av ringer. Resultatene fra denne seksjonen kommer fra Hartshorne [8] og Sernesi [12].

1.3.1 Deformasjon av skjemaer

Definisjon 1.3.1. [8, s. 78] La X være et skjema over k . En deformasjon av X over en Artinsk ring C er et skjema \mathcal{X} , flat over C , sammen med en lukket immersjon $i : X \rightarrow \mathcal{X}$ som induserer en isomorfi $X \rightarrow \mathcal{X} \times_C k$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \text{flat} \\ k & \longrightarrow & C \end{array}$$

Lar vi \mathcal{C} være kategorien av Artinske ringer, har vi en funktor

$$\text{Def}_X : \mathcal{C} \rightarrow (\text{sets}),$$

som til enhver Artinsk ring $C \in \mathcal{C}$ gir mengden av deformasjoner av X over denne.

1.3.2 T^i -funktorene

La $A \rightarrow B$ være en ringhomomorfi og M en B -modul. Vi skal definere $T^i(B/A, M)$ for $i = 0, 1, 2$, og gjør dette som beskrevet i Hartshorne [8, Kap. 3].

La $R = A[x]$, $x = \{x_i\}$ og $B = R/I$. Velg en fri R -modul F og en surjeksjon $j : F \rightarrow I$ med kjerne Q . Videre lar vi $F_0 \subseteq F$ være undermodulen av F generert av Koszul-relasjonene $j(a)b - j(b)a$ for $a, b \in F$. Siden $j(F_0) = 0$ følger det at $F_0 \subseteq Q$.

Vi kan nå definere kotangentkomplekset av B -moduler:

$$L_\bullet : \quad Q/F_0 \xrightarrow{d_2} F \otimes_R B \xrightarrow{d_1} \Omega_{R/A} \otimes_R B$$

der $F \otimes_R B \cong F/IF$. Avbildningen d_2 er indusert av avbildningen $Q \rightarrow F$, og avbildningen d_1 fremkommer ved å sende $F/IF \rightarrow I/I^2$, og deretter vil $I/I^2 \rightarrow \Omega_{R/A} \otimes_R B$ være indusert av $d : R \rightarrow \Omega_{R/A}$. Vi er nå i stand til å definere $T^i(B/A, M)$.

Definisjon 1.3.2. For enhver B -modul M har vi

$$T^i(B/A, M) := h^i(\text{Hom}_B(L_\bullet, M)).$$

Hvis X er et skjema, \mathcal{F} et knippe av \mathcal{O}_X -moduler og vi har en morfi $X \rightarrow k$, kan vi definere knippet $\mathcal{T}^i(X, \mathcal{F})$, siden T^i -funktorene er kompatible med lokalisering. Modulene T_X^1 er da definert som hyperkohomologien til kotangentkomplekset på X .

1.3.3 Førsteordens deformasjoner av affine skjemaer

Vi skal nå se på situasjonen der $X = \text{Spec } A$ er et affint skjema.

Definisjon 1.3.3. En førsteordens deformasjon av X er en deformasjon over de duale tallene $C = k[t]/t^2$.

Proposisjon 1.3.1. [8, s. 38] La $X = \text{Spec } A$ være et affint skjema og A en k -algebra. Da er mengden av deformasjoner av X over $k[t]/t^2$ i en-til-en-korrespondanse med gruppen $T^1(A/k, A)$.

Vi ser altså at førsteordens deformasjoner av affine skjemaer er gitt ved T_X^1 , og vi skal nå gi noen resultater som gjør dette enklere å regne på.

Lemma 1.3.2. *For enhver $A \rightarrow B$ og alle M har vi*

$$T^0(B/A, M) \cong \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M) \cong \text{Der}_A(B, M).$$

Proposisjon 1.3.3. *La $P = k[x_1, \dots, x_n]$ og $A = P/I$. Da har vi for enhver M en eksakt sekvens*

$$0 \rightarrow T^0(A/k, M) \rightarrow \text{Der}_k(P, M) \rightarrow \text{Hom}(I/I^2, M) \rightarrow T^1(A/k, M) \rightarrow 0.$$

og en isomorfi

$$T^2(A/P, M) \xrightarrow{\sim} T^2(A/k, M).$$

Anta nå at I er et endeliggenerert ideal med $I = (f_1, \dots, f_r) \subset P = k[x_1, \dots, x_n]$. Vi ønsker en beskrivelse av de førsteordens deformasjonene til skjemaet $\text{Spec } A$. Fra den eksakte sekvensen 1.3.3 ser vi at et element $[\varphi] \in T_A^1$ er representert ved $\varphi \in \text{Hom}_P(I, A)$. Vi ønsker derfor å få en beskrivelse av $\text{Hom}_P(I, A)$ og betrakter følgende eksakte sekvens.

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Dualiserer vi denne får vi

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(I, A) \longrightarrow A^r \longrightarrow A^s,$$

der $\text{Hom}(I, A) = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \mid \sum r_i \varphi_i = 0 \text{ i } A \text{ når } \sum r_i f_i = 0 \text{ i } P\}$.

For at deformasjonen skal være flat, har vi et lokalt kriterium for løfting av relasjoner.

Lemma 1.3.4. *[12, s. 276] Anta at $I = (f_1, \dots, f_r) \subset P = k[x_1, \dots, x_n]$. Da er \mathcal{X} en flat deformasjon over C hvis og bare hvis relasjonene mellom f_1, \dots, f_r løfter til relasjoner mellom F_1, \dots, F_r .*

1.3.4 Obstruksjoner til løfting av deformasjoner

Vi lar fortsatt $X = \text{Spec } A$ og $\mathcal{X} \rightarrow k[t]/t^2$ en førsteordens deformasjon. Da vil obstruksjonsrommet T_A^2 fortelle oss når førsteordens deformasjoner av X kan løftes til høyereordens deformasjoner. Hvis $T_A^2 = 0$ finnes det ingen obstruksjoner, og vi kan løfte fritt.

1.4 Deformasjon av Stanley-Reisner skjemaer

Definisjon 1.4.1. [13] Et simplisialkompleks \mathcal{K} på en mengde av hjørner V er en samling av delmengder F av V som tilfredsstiller

- (i) Hvis $x \in V$, så er $\{x\} \in \mathcal{K}$
- (ii) Hvis $F \in \mathcal{K}$ og $G \subset F$, så er $G \in \mathcal{K}$

Gitt en fasett $f \in \mathcal{K}$ kan vi definere linken til f ved

$$\text{lk}(f, \mathcal{K}) := \{g \in \mathcal{K} \mid g \cap f = \emptyset \text{ og } g \cup f \in \mathcal{K}\}.$$

Til ethvert simplisialkompleks \mathcal{K} kan vi definere Stanley-Reisner skjemaet assosiert til dette. La $[n] = \{0, \dots, n\}$, og Δ_n mengden av alle delmengder av $[n]$. Vi kan da se på et simplisialkompleks \mathcal{K} som en delmengde av Δ_n . Lar vi $P = k[x_0, \dots, x_n]$ der $n + 1$ er antall hjørner i \mathcal{K} , kan vi definere Stanley-Reisner idealet til \mathcal{K} ved

$$I_{\mathcal{K}} = (x_p \in P \mid p \in \Delta_n \setminus \mathcal{K}).$$

Dette vil si at $I_{\mathcal{K}}$ er gitt ved alle *ikke-fasettene* i komplekset. Stanley-Reisner ringen er da gitt ved $A_{\mathcal{K}} = P/I_{\mathcal{K}}$, og vi kan til denne assosiere det vi kaller det projektive Stanley-Reisner skjemaet til \mathcal{K} ,

$$\mathbb{P}(\mathcal{K}) = \text{Proj } A_{\mathcal{K}}.$$

Vi ønsker nå å gi en beskrivelse av $T_{A_{\mathcal{K}}}^1$ når \mathcal{K} er en triangulert sfære, og bruker resultater fra artikkelen til Altmann og Christophersen [1] for å gjøre dette.

I våre tilfeller skal vi forsøke å glatte $\mathcal{K} = \mathbb{S}^2$ til projektive $K3$ -flater. Det finnes en 20-dimensjonal familie av analytiske isomorfiklasser av $K3$ -flater, der ikke alle er algebraiske. Dermed er det naturlig å forvente at dette er tilfelle også for degenererte $K3$ -flater. Men siden vi skal se på projektive $K3$ -flater kan vi restrikttere oss til funktoren Def_X^a av algebraiske deformasjoner definert i [1], som ved resultatet nedenfor er betraktelig enklere å håndtere.

Teorem 1.4.1. [1, Teorem 6.1] Hvis \mathcal{K} er en mangfoldighet har vi

$$\text{Def}_X^a(k[t]/t^2) \cong T_{A_{\mathcal{K}}, 0}^1$$

Dette betyr at det er tilstrekkelig å finne de førsteordens deformasjonene til $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ i grad 0. For å beskrive $T_{\mathcal{A}_{\mathcal{K}}}^1$ viser det seg at det er hensiktsmessig å innføre en multigradering av denne. Hvis \mathcal{K} er en triangulert sfære med $n+1$ hjørner dekomponerer vi $T_{\mathcal{A}_{\mathcal{K}}}^1$ i komponenter $T_{\mathcal{A}_{\mathcal{K}},\mathbf{c}}^1$ der $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Videre dekomponerer vi $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ der $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^{n+1}$.

Definisjon 1.4.2. Støtten til en vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ er definert ved $a := \{i \in [n] \mid \mathbf{a}_i \neq 0\}$, der $[n] = \{0, \dots, n\}$.

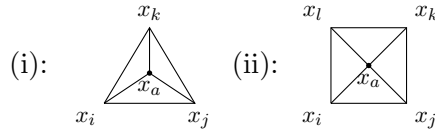
Det viser seg at $T_{\mathcal{A}_{\mathcal{K}},\mathbf{c}}^1$ kun avhenger av støtten til \mathbf{a} og \mathbf{b} , slik at vi får $T_{\mathcal{A}_{\mathcal{K}},\mathbf{c}}^1 = T_{\mathcal{A}_{\mathcal{K}},\mathbf{a}-\mathbf{b}}^1$. I artikkelen gis en beskrivelse av $T_{\mathcal{A}_{\mathcal{K}},\mathbf{c}}^1$ når \mathcal{K} er en mangfoldighet, og fra [1, Teorem 4.6] og tilhørende tabell får vi at de førsteordens deformasjonene til Stanley-Reisner skjemaet til en triangulert sfære vil være generert av deformasjonene gitt nedenfor. Siden vi ser på det projektive Stanley-Reisner skjemaet må elementene i $T_{\mathcal{A}_{\mathcal{K}},\mathbf{c}}^1$ ha grad 0.

En basis for $T_{\mathcal{A}_{\mathcal{K}}}^1$ er ved [1, Teorem 4.6] beskrevet som følger. Hvis $\varphi \in T_{\mathcal{A}_{\mathcal{K}},\mathbf{c}}^1 \neq 0$ og $x_p \in I_{\mathcal{K}}$, så har vi

$$\varphi(x_p) = \begin{cases} x_p \frac{x_a^{|b|}}{x_b} & \text{hvis } b \subseteq p, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vi skal nå se nærmere på de ulike mulighetene dette gir.

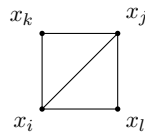
- x_a et hjørne, slik at $|a| = 1$. Dette gir to alternativer



Alternativ (i) gir oss deformasjonene $\varphi(x_i x_j x_k) = x_a^3$, $\varphi(x_i x_j) = x_a^2$, $\varphi(x_i x_k) = x_a^2$ og $\varphi(x_j x_k) = x_a^2$.

Alternativ (ii) gir oss deformasjonene $\varphi(x_i x_k) = x_a^2$ og $\varphi(x_j x_l) = x_a^2$.

- $x_a = x_i x_j$ er en kant, slik at $|a| = 2$. Dette gir ett alternativ



der $\{x_k x_l\} = \text{lk}[\{x_i x_j\}, \mathcal{K}]$. Dette gir oss deformasjonene $\varphi(x_i x_j) = x_k x_l$, det vil si at hver kant bidrar en gang til $T_{\mathcal{K}, \mathbf{c}}^1$.

Kapittel 2

Degenererte skruer

Vi skal i dette kapitlet beskrive en bestemt degenerasjon av en glatt rasjonal normal skrue $Y \subset \mathbb{P}^g$. Hvis $\dim Y = n$ vil denne degenerasjonen gi et Stanley-Reisner skjema $Y_0 = \mathbb{P}(T)$, der T er en triangulering av B^n . Videre skal vi vise at en bestemt type flipping av kantene i T også vil gi et Stanley-Reisner skjema som er en degenerasjon av den samme skruen Y .

Degenerasjonen vi skal se på er beskrevet i artikkelen til Riemenschneider [10]. Gitt en determinantell varietet med ideal I gitt ved 2×2 -minorene til matrisen

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix},$$

ser vi på det formelle symbolet

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Perturbasjonene til elementene i I vil da være gitt ved

$$x_i y_j - y_i x_j \prod_{k=i}^{j-1} a_k.$$

Vi skal bruke dette til å beskrive perturbasjoner av idealet til en skrue og setter $a_i = t$ for alle i . Hvis Y er en skrue av typen $S(d_1, \dots, d_n)$, får vi

$$\begin{pmatrix} x_{1,0} & \cdots & x_{1,d_1-1} & x_{2,0} & \cdots & x_{n,0} & \cdots & x_{n,d_n-1} \\ x_{1,1} & \cdots & x_{1,d_1} & x_{2,1} & \cdots & x_{n,1} & \cdots & x_{n,d_n} \\ & t & \cdots & t & & t & \cdots & t \end{pmatrix}.$$

Perturbasjonene blir da

$$\begin{aligned} x_{1,0}x_{1,2} - tx_{1,1}^2, \\ x_{1,0}x_{1,3} - t^2x_{1,1}x_{1,2}, \\ \vdots \\ x_{n,d_n-2}x_{n,d_n} - tx_{n,d_n-1}^2. \end{aligned}$$

Setter vi $t = 1$ får vi de genererende polynomene til idealet til skruen Y , og setter vi $t = 0$ får vi kvadratfrie monomer som genererer idealet til degenerasjonen Y_0 . Dette vil derfor være et Stanley-Reisner skjema med $h = \sum_{i=1}^n d_i + n$ hjørner. Merk at $g = \sum_{i=1}^n d_i + n - 1 = h - 1$. Vi skal senere vise at Riemenschneider-symbolet gir en flat deformasjon av Y_0 , men i dette kapitlet ser vi bare på egenskaper ved degenerasjonen.

I første omgang skal vi studere trianguleringer av disken og definere lovlige flippinger for denne. Deretter skal vi generalisere dette til trianguleringer av B^n .

2.1 Trianguleringer av disken

Definisjon 2.1.1. En matrise som er slik at 2×2 -minorene gir idealet til en skrue kaller vi en *skruematrise*.

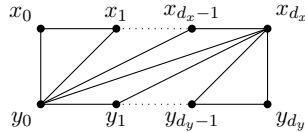
Gitt en rasjonal normal skrue med $\dim Y = 2$ av typen $S(d_x, d_y)$ er idealet til denne gitt ved 2×2 -minorene til skruematrixen

$$\begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_{d_x-1} & y_0 & \cdots & y_{d_y-1} \\ x_1 & \cdots & x_{d_x} & y_1 & \cdots & y_{d_y} \end{pmatrix}.$$

Riemenschneider-symbolet vil derfor gi oss degenerasjonen Y_0 som vil være bestemt av idealet

$$I_{Y_0} = (x_0x_2, x_0x_3, \dots, x_0x_{d_x}, x_0y_1, \dots, x_0y_{d_y}, x_1y_3, \dots, x_1x_{d_x}, x_1y_1, \dots, x_1y_{d_y}, \dots, y_{d_y-2}y_{d_y}).$$

Siden Y_0 er et Stanley-Reisner skjema har vi $Y_0 = \mathbb{P}(T)$ der T er en triangulering av disken:

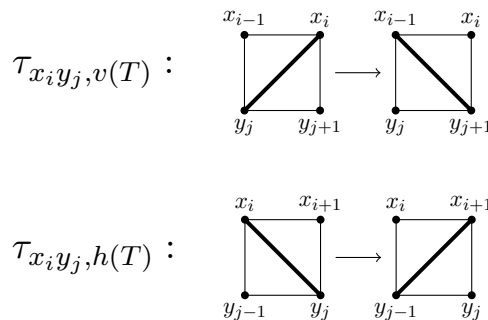


Definisjon 2.1.2. Vi kaller trianguleringen beskrevet ovenfor *standardtrianguleringen av disken*.

Definisjon 2.1.3. En *bipartitt triangulering* er en triangulering av disken der randen er bestemt av to strenger x_0, \dots, x_{d_x} og y_0, \dots, y_{d_y} slik at $x_i x_{i+1}$ og $y_j y_{j+1}$ er kanter for $i = 0, \dots, d_x, j = 0, \dots, d_y$ og slik at $x_0 y_0$ og $x_{d_x} y_{d_y}$ er kanter. Diagonalene vil dermed være på formen $x_i y_j$.

Vi ser altså at standardtrianguleringen av disken T er et eksempel på en bipartitt triangulering av disken og skal bruke dette til å definere de lovlige flippene som også skal gi bipartitte trianguleringer. Vi beskriver først begrepene venstreflipp og høyreflipp.

Definisjon 2.1.4. La T være en bipartitt triangulering av disken og $x_i y_j$ en gitt diagonal. En flipp $\tau_{x_i y_j, v}(T)$ som bytter diagonalene $x_i y_j \rightarrow x_{i-1} y_{j+1}$ er en *venstreflipp* og $\tau_{x_i y_j, h}(T)$ som bytter diagonalene $x_i y_j \rightarrow x_{i+1} y_{j-1}$ er en *høyreflipp*.



Vi kaller flippinger på denne formen *lovlige venstreflipper* og *lovlige høyreflipper*.

Hvis $x_i y_j$ er en kant som ikke er i flippbar posisjon, kan denne høyre- og venstreflippes ved en endelig komposisjon av lovlige høyre- og venstreflippinger.

Vi kaller dette henholdsvis $\sigma_{x_i y_j, v}$ og $\sigma_{x_i y_j, h}$. Venstreflippene er definert for alle kanter unntatt $x_0 y_{d_y}$ og vil være gitt ved

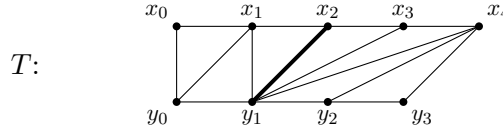
$$\sigma_{x_i y_j, v} = \tau_{x_i y_j, v} \circ \tau_{x_{i+1} y_j, v} \circ \cdots \circ \tau_{x_k y_j, v}$$

der $i < k \leq d_x$ er det minste tallet slik at $x_{k+1} y_j$ ikke er kant i T . Hvis $x_{d_x} y_j$ er kant i T får vi $k = d_x$. Høyreflippene er definert for alle kanter unntatt $x_{d_x} y_0$ og gitt ved

$$\sigma_{x_i y_j, h} = \tau_{x_i y_j, h} \circ \tau_{x_i y_{j+1}, h} \circ \cdots \circ \tau_{x_i y_k, h}$$

der $j < k \leq d_y$ er det minste tallet slik at $x_i y_{k+1}$ ikke er kant i T . Hvis $x_i y_{d_y}$ er kant i T får vi $k = d_y$.

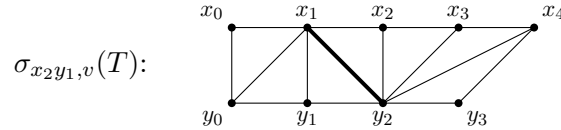
Eksempel 2.1.1. La T være en triangulering av disken.



Da er

$$\sigma_{x_2 y_1, v}(T) = \tau_{x_2 y_1, v} \circ \tau_{x_3, y_1, v} \circ \tau_{x_4 y_1, v}(T),$$

som gir trianguleringen



Vi skal se at disse flippene svarer til å permutere søylene til skruematrixen som definerer idealet til Y .

Definisjon 2.1.5. La A være en skruematrixe. Da definerer vi en lovlig venstre matrisetransposisjon ved

$$\tau_{x_i y_j, v}(A) = \tau_{x_i y_j, v} \begin{pmatrix} \cdots & x_{i-1} & y_j & \cdots \\ \cdots & x_i & y_{j+1} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & y_j & x_{i-1} & \cdots \\ \cdots & y_{j+1} & x_i & \cdots \end{pmatrix}$$

og en lovlig høyre matrisetransposisjon ved

$$\tau_{x_i y_j, h}(A) = \tau_{x_i y_j, h} \begin{pmatrix} \cdots & y_{j-1} & x_i & \cdots \\ \cdots & y_j & x_{i+1} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & x_i & y_{j-1} & \cdots \\ \cdots & x_{i+1} & y_j & \cdots \end{pmatrix}.$$

La nå $\begin{pmatrix} x_{i-1} \\ x_i \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} y_j \\ y_{j+1} \end{pmatrix}$ være to søyler i A som *ikke* er i posisjonen gitt i Definisjon 2.1.5. Da definerer vi en lovlig venstrepermutasjon $\sigma_{x_i y_j, v}(A)$ for matriser på formen

$$\begin{pmatrix} \cdots & y_{j-1} & x_{i-1} & x_i & \cdots & x_{k-1} & y_j & \cdots \\ \cdots & y_j & x_i & x_{i+1} & \cdots & x_k & y_{j+1} & \cdots \end{pmatrix},$$

ved

$$\sigma_{x_i y_j, v}(A) = \tau_{x_i y_j, v} \circ \tau_{x_{i+1} y_j, v} \circ \cdots \circ \tau_{x_k y_j, v}(A).$$

Tilsvarende definerer vi lovlige høyrepermutasjoner $\sigma_{x_i y_j, h}(A)$ for matriser på formen

$$\begin{pmatrix} \cdots & x_{i-1} & y_{j-1} & y_j & \cdots & y_{k-1} & x_i & \cdots \\ \cdots & x_i & y_j & y_{j+1} & \cdots & y_k & x_{i+1} & \cdots \end{pmatrix},$$

ved

$$\sigma_{x_i y_j, h}(A) = \tau_{x_i y_j, h} \circ \tau_{x_i y_{j+1}, h} \circ \cdots \circ \tau_{x_i y_k, h}(A).$$

Eksempel 2.1.2. La A være skruematriksen

$$A = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 \\ x_1 & y_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Da er

$$\sigma_{x_2 y_1, v}(A) = \tau_{x_2 y_1, v} \circ \tau_{x_3 y_1, v} \circ \tau_{x_4 y_1, v}(A),$$

som gir

$$\sigma_{x_2 y_1, v}(A) = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & y_1 & x_1 & x_2 & x_3 & y_2 \\ x_1 & y_1 & y_2 & x_2 & x_3 & x_4 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Lemma 2.1.1. Hvis $\begin{pmatrix} x_{i-1} \\ x_i \end{pmatrix}$ står rett til venstre for $\begin{pmatrix} y_j \\ y_{j+1} \end{pmatrix}$, vil $x_i y_j$ være kant i T .

Bevis. Gitt denne situasjonen vil skruematriksen være på følgende form:

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & y_{j-1} & \cdots & x_{i-1} & y_j & \cdots & x_i & \cdots \\ \cdots & y_j & \cdots & x_i & y_{j+1} & \cdots & x_{i+1} & \cdots \end{pmatrix}$$

Det følger dermed at $x_i y_j \notin I_{Y_0}$ slik at denne må være kant i T . \square

Lemma 2.1.2. *Gitt en rasjonal normal skrue Y av dimensjon 2 med matrise A som degenererer til et Stanley-Reisner skjema Y_0 assosiert til en bipartitt triangulering T får vi $\sigma_{x_i y_j, v}(A) = \sigma_{x_i y_j, v}(T)$ og $\sigma_{x_i y_j, h}(A) = \sigma_{x_i y_j, h}(T)$.*

Bevis. La T være en degenerert skrue som gir en bipartitt triangulering av disken med hjørnene $x_0, \dots, x_{d_x}, y_0, \dots, y_{d_y}$. Vi skal først vise at en lovlig venstreflipp svarer til en lovlig venstre matrisetransposisjon (dette vises tilsvarende for høyreflipper). Anta derfor at $x_i y_j$ står i flippbar posisjon slik at $x_i y_j \notin I_{Y_0}$. Dermed vet vi at søylen $\begin{pmatrix} x_{i-1} \\ x_i \end{pmatrix}$ står til venstre for søylen $\begin{pmatrix} y_j \\ y_{j+1} \end{pmatrix}$. Vi må sjekke at det ikke finnes noen søyler mellom disse. Hvis $\begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix}$ står mellom disse søylene vil $x_{i+1} y_j$ være kant i T og da står vi ikke i flippbar posisjon. Tilsvarende ser vi at hvis $\begin{pmatrix} y_{j-1} \\ y_j \end{pmatrix}$ står mellom de to søylene, så vil $x_i y_{j-1}$ være kant slik at vi heller ikke da står i flippbar posisjon. Dermed får vi at søylene må stå rett ved siden av hverandre og vi får

$$\tau_{x_i y_j, v}(A) = \begin{pmatrix} \cdots & y_j & x_{i-1} & \cdots \\ \cdots & y_{j+1} & x_i & \cdots \end{pmatrix}.$$

Vi ser altså at $x_i y_j \in I'_{Y_0}$, som derfor vil være en ikke-kant, mens $x_{i-1} y_{j+1}$ nå har blitt en kant.

Siden lovlige flipper og lovlige matrisepermutasjoner svarer til henholdsvis en endelig komposisjon av lovlige venstre- og høyreflipper og lovlige venstre- og høyre matrisetransposisjoner vil resultatet følge. \square

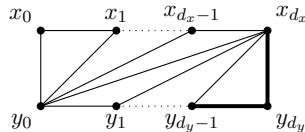
Proposisjon 2.1.3. *Alle bipartitte trianguleringer gir et Stanley-Reisner skjema som er en degenerert rasjonal normal skrue.*

Bevis. La T være en bipartitt triangulering med strenger x_0, \dots, x_{d_x} og y_0, \dots, y_{d_y} . Vi vet at standardtrianguleringen til disken er gitt ved en skrue-matrise som beskrevet innledningsvis. For å vise at T også gir en degenerert skrue er det tilstrekkelig å vise at enhver bipartitt triangulering av disken kan omformes til standardtrianguleringen ved hjelp av en endelig komposisjon av lovlige høyre og venstreflipper. Ved Lemma 2.1.2 vet vi at en slik omforming vil svare til endelig mange transposisjoner av søyler i matrisen til standardtrianguleringen. For å vise dette bruker vi induksjon på antall hjørner i trianguleringen.

Minste antall hjørner i en bipartitt triangulert disk er $n = 4$. I dette tilfellet er dette trivielt. Anta derfor at hypotesen stemmer for n hjørner og evaluer en vilkårlig bipartitt triangulering av disken bestående av $n + 1$ hjørner. Da har vi $(d_x + 1) + (d_y + 1) = (n + 1)$ og vi må evaluere to tilfeller.

Tilfelle 1:

Anta at induksjonshypotesen stemmer for disken med hjørner $x_0, \dots, x_{d_x}, y_0, \dots, y_{d_y-1}$. Dette betyr at denne delen av disken kan omformes til standardtrianguleringen ved et endelig antall permutasjoner, og vi befinner oss i følgende situasjon:

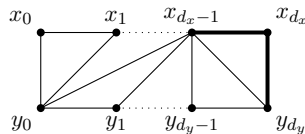


Fra figuren ser vi at det nå bare er å legge til en ekstra søyle på høyre side av matrisen og vi vil fortsatt ha standardtrianguleringen.

$$\begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_{d_x-1} & y_0 & \cdots & y_{d_y-2} & \mathbf{y}_{d_y-1} \\ x_1 & \cdots & x_{d_x} & y_1 & \cdots & y_{d_y-1} & \mathbf{y}_{d_y} \end{pmatrix}.$$

Tilfelle 2:

Anta at induksjonshypotesen stemmer for disken med hjørner $x_0, \dots, x_{d_x-1}, y_0, \dots, y_{d_y}$. Vi kan følgelig omforme denne delen av disken til standardtrianguleringen, og vi befinner oss i følgende situasjon:



I dette tilfellet vil matrisen være på formen

$$\begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_{d_x-2} & y_0 & \cdots & y_{d_y-1} & \mathbf{x}_{d_x-1} \\ x_1 & \cdots & x_{d_x-1} & y_1 & \cdots & y_{d_y} & \mathbf{x}_{d_x} \end{pmatrix},$$

og vi må foreta en rekke lovlige høyreflipper for å få den nye disken på ønsket form.

$$\begin{aligned} x_{d_x-1}y_{d_y} &\rightarrow x_{d_x}y_{d_y-1} \\ x_{d_x-1}y_{d_y-1} &\rightarrow x_{d_x-1}y_{d_y-2} \\ &\vdots \\ x_{d_x-1}y_{d_1} &\rightarrow x_{d_x}y_{d_0} \end{aligned}$$

Dette vil altså svare til d_y ytterligere transposisjoner av matrisen som nå har kommet på standardform. \square

2.2 Trianguleringer av B^n

Vi skal nå se hva som skal til for at en triangulering B^n er en degenerert skrue, og kaller dette trianguleringer av *skruetype*. Videre skal vi se at slike trianguleringer er flagg-komplekser når $n \geq 4$. Et simplisialkompleks \mathcal{K} er et flagg-kompleks hvis alle ikke-fasettene er kanter, det vil si at $I_{\mathcal{K}}$ er generert av kvadratiske monomer.

En rasjonal normal skrue Y av dimensjon n av typen $S(d_1, \dots, d_n)$ vil være gitt ved $2 \times n$ -minorene til matrisen

$$\begin{pmatrix} x_{1,0} & \cdots & x_{1,d_1-1} & x_{2,0} & \cdots & x_{2,d_2-1} & \cdots & x_{n,0} & \cdots & x_{n,d_n-1} \\ x_{1,1} & \cdots & x_{1,d_1} & x_{2,1} & \cdots & x_{2,d_2} & \cdots & x_{n,1} & \cdots & x_{n,d_n} \end{pmatrix}.$$

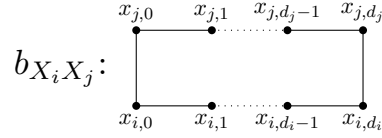
Definisjon 2.2.1. Den degenererte skruen Y_0 som fremkommer ved å ta Riemenschneider-symbolet til matrisen over kaller vi *standardtrianguleringen*.

Definisjon 2.2.2. En triangulering T av ballen er av skruetype dersom den er på følgende form:

- Randen er bestemt av n strenger s_{X_i} på følgende form:

$$s_{X_i}: \quad \bullet \text{---} \bullet \cdots \bullet \text{---} \bullet \\ x_{i,0} \quad x_{i,1} \quad x_{i,d_i-1} \quad x_{i,d_i}$$

- Vi har $\binom{n}{2}$ bånd $b_{X_i X_j}$ mellom to strenger i x_i 'er og x_j 'er som hver svarer til en bipartitt triangulert disk.



Denne trianguleringen er et flagg-kompleks når $n \geq 4$.

Lemma 2.2.1. Gitt en kant $x_{i,l_i}x_{j,l_j}$ i båndet $b_{X_i X_j}$ kan vi finne ett hjørne x_{k,l_k} på hver av de $n - 2$ resterende strengene slik at $x_{i,l_i}x_{k,l_k}$ og $x_{j,l_j}x_{k,l_k}$ også er kanter.

Bevis. Gitt en kant $x_{i,l_i}x_{j,l_j}$ i båndet $b_{X_i X_j}$ vil denne være kant i minst et n -simpleks siden T er en triangulering av ballen. Spesielt vil det finnes et slikt simpleks slik at x_{i,l_i+1} , x_{i,l_i-1} , x_{j,l_j+1} eller x_{j,l_j-1} også er en kant i dette. Anta at dette gjelder for kanten x_{i,l_i+1} og n -simplekset S . Vi må vise at de resterende $n - 2$ hjørnene i S fordeler seg på de resterende $n - 2$ strengene.

S kan ikke ha flere hjørner på båndet $b_{X_i X_j}$, så vi vet at resten av hjørnene må fordele seg på de andre strengene. Anta som motsigelse at S har to hjørner x_{k,l_k} og x_{k,l_k+1} på samme streng. Da vil $x_{i,l_i}, x_{i,l_i+1}, x_{k,l_k}$ og x_{k,l_k+1} være fire hjørner på samme bånd hvilket er umulig siden S er et n -simpleks. \square

Fra dette følger det dessuten at enhver delmengde av T bestående av k strenger og de $\binom{k}{2}$ båndene mellom dem vil gi en triangulering av B^k som også er av skruetype.

2.2.1 Delordninger

Siden en triangulering T av skruetype er et flagg-kompleks når $n \geq 4$ og kun har tre bånd når $n = 3$, er trianguleringen definert av den bipartitte trianguleringen til de $\binom{n}{2}$ båndene. Som tidligere beskrevet fremkommer disse fra Riemenschneider-symbolet til en matrise $A_{X_i X_j}$. For å se når båndene tilsammen definerer en triangulering av B^n skal vi finne et kriterium for når matrisene er kompatible, det vil si når matrisene kan slåes sammen til en enkelt matrise som gir de samme 2×2 -minorene som hver av matrisene $A_{X_i X_j}$. For å finne et slikt kriterium skal vi se på delordninger på generelle mengder X .

Definisjon 2.2.3. Gitt en mengde X vil en ordning R på X være gitt som en delmengde $R \subset X \times X = \{(a, b) \mid a \in X, b \in X\}$. Vi har altså aRb hvis $(a, b) \in R$.

Definisjon 2.2.4. X er en delvis ordnet mengde under relasjonen R hvis følgende er tilfredsstilt for alle a, b og $c \in X$:

- Antisymmetri: aRb og $bRa \Rightarrow a = b$.
- Transitivitet: aRb og $bRc \Rightarrow aRc$.
- Refleksivitet: aRa .

Hvis vi i tillegg har at aRb eller bRa for alle $a, b \in X$, sier vi at R er en totalordning på X .

Definisjon 2.2.5. Anta gitt en mengde delordninger $\{R_i\}_{i \in I}$ på X . En sykel på unionen $R = \cup_{i \in I} R_i$ er gitt ved følgende situasjon:

$$a_1Ra_2, a_2Ra_3, \dots, a_{n-1}Ra_n, a_nRa_1,$$

der $a_i \neq a_j$ hvis $i \neq j$.

La A_1, \dots, A_n være en samling av disjunkte mengder, og la Q_i være en total ordning på A_i for $i = 1, \dots, n$. Videre lar vi $A_0 = A_n$. For $i = 0, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, n-1$ og $i < j$ lar vi $X_{ij} = A_i \cup A_j$ og R_{ij} en ordning på X_{ij} som utvider $Q_i \cup Q_j$, slik at vi får en totalordning på X_{ij} .

Vi definerer en relasjon R på $X = \cup_{i < j} X_{ij}$ ved at xRy dersom det finnes elementer $z_0, \dots, z_m \in X$ og relasjoner $R_{\alpha_1}, \dots, R_{\alpha_m}$ slik at $x = z_0, z_0R_{\alpha_1}z_1, \dots, z_{m-1}R_{\alpha_m}z_m$ og $y = z_m$.

Lemma 2.2.2. Gitt konstruksjonen beskrevet ovenfor vil R gi en delordning på $X = \cup_{i < j} X_{ij}$ hvis og bare hvis $R = \cup_{i < j} R_{ij}$ ikke har sykler.

Bevis. Vi må sjekke at kravene til en delordning er tilfredsstilt:

- Antisymmetri: Anta xRy og yRx . Da er $x = y$ siden R ikke har sykler.
- Transitivitet: Anta xRy og yRz . Da finnes z_0, \dots, z_m og z_{m+1}, \dots, z_{m+k} og $R_{\alpha_1}, \dots, R_{\alpha_m}, R_{\alpha_{m+1}}, \dots, R_{\alpha_{m+k}}$ slik at $x = z_0, y = z_m$ og $z = z_{m+k}$. Dermed følger det fra konstruksjonen av R at $z_0R_{\alpha_1}z_1, \dots, z_{m+k-1}R_{\alpha_{m+k}}z_{m+k}$ som medfører at xRz .

- Refleksivitet: Hvis $x \in X_{ij}$, så er $xR_{ij}x$, og det følger at xRx .

□

Vi lar

$$A_i = \left\{ \begin{pmatrix} x_{i,k} \\ x_{i,k+1} \end{pmatrix} \mid 0 \leq k \leq d_i \right\},$$

og $X_{ij} = A_i \cup A_j$. Videre lar vi

$$X_s = \left\{ \begin{pmatrix} x_{i,k} \\ x_{i,k+1} \end{pmatrix} \mid 1 \leq i \leq n, 0 \leq k \leq d_i \right\},$$

være mengden av søyler i matrisene $A_{X_i X_j}$. Da er $X_s = \cup_{i < j} X_{ij}$ og vi definerer ordningene på X_{ij} som følger:

Definisjon 2.2.6. Vi lar $\begin{pmatrix} x_{i,k_1} \\ x_{i,k_1+1} \end{pmatrix} R_{X_i X_j} \begin{pmatrix} x_{j,k_2} \\ x_{j,k_2+1} \end{pmatrix}$ hvis $\begin{pmatrix} x_{i,k_1} \\ x_{i,k_1+1} \end{pmatrix}$ står til venstre for $\begin{pmatrix} x_{j,k_2+1} \\ x_{j,k_2+1} \end{pmatrix}$ i matrisen $A_{X_i X_j}$. Da vil $R_{X_i X_j}$ være en totalordning på X_{ij} .

Proposisjon 2.2.3. $R = \cup R_{X_i X_j}$ gir en totalordning på X_s hvis og bare hvis det ikke finnes noen sykler på R .

Bevis. \Rightarrow : Følger fra Lemma 2.2.2.

\Leftarrow : Anta at det ikke finnes noen sykler på R . Ved Lemma 2.2.2 vil R gi en delordning på X_s , så det gjenstår bare å vise at ordningen er total. La

$$a = \begin{pmatrix} x_{i_1, j_1} \\ x_{i_1, j_1+1} \end{pmatrix} \text{ og } b = \begin{pmatrix} x_{i_2, j_2} \\ x_{i_2, j_2+1} \end{pmatrix}.$$

Da finnes et bånd mellom strengene $s_{X_{i_1}}$ og $s_{X_{i_2}}$ og vi vil ha $(a, b) \in R_{X_{i_1} X_{i_2}}$ eller $(b, a) \in R_{X_{i_1} X_{i_2}}$. Siden $R_{X_{i_1} X_{i_2}} \subset R$ følger resultatet. □

2.2.2 Trianguleringer av B^3

Vi ønsker nå å vise at enhver triangulering av ballen som er av skruetype gir en degenerert skrue. For å vise dette skal vi se på trianguleringer av B^3 for deretter å vise at resultatet vil følge for trianguleringer av B^n .

La båndene b_{XY}, b_{XZ} og b_{YZ} være bipartitte triangulerte disker. Hver av disse vil fremkomme fra Riemenschneider-symbolet til en matrise som beskrevet tidligere. Vi skal vise at disse tre matrisene er kompatible hvis og bare hvis de tre båndene tilsammen genererer en triangulering av B^3 som er av skruetype.

Båndene b_{XY}, b_{XZ} og b_{YZ} består av tilsammen tre strenger s_X, s_Y og s_Z med henholdsvis hjørnene $x_0, \dots, x_{d_x}, y_0, \dots, y_{d_y}$ og z_0, \dots, z_{d_z} . De tre båndene vil da komme fra Riemenschneider-symbolet til matrisene

$$\begin{aligned} A_{XY} &= \begin{pmatrix} \cdots & x_{i_1} & \cdots & y_{j_1} & \cdots \\ \cdots & x_{i_1+1} & \cdots & y_{j_1+1} & \cdots \end{pmatrix}, \\ A_{XZ} &= \begin{pmatrix} \cdots & x_{i_2} & \cdots & z_{k_2} & \cdots \\ \cdots & x_{i_2+1} & \cdots & z_{k_2+1} & \cdots \end{pmatrix}, \\ A_{YZ} &= \begin{pmatrix} \cdots & y_{j_3} & \cdots & z_{k_3} & \cdots \\ \cdots & y_{j_3+1} & \cdots & z_{k_3+1} & \cdots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Proposisjon 2.2.4. Hvis det finnes sykler på $R_{XY} \cup R_{XZ} \cup R_{YZ}$, vil de tre bipartitte trianguleringene *ikke* gi en triangulering av B^3 .

Bevis. Anta at det finnes en sykel på $R_{XY} \cup R_{XZ} \cup R_{YZ}$. Da har vi følgende situasjon:

$$\begin{pmatrix} \cdots & x_i & \cdots & x_{i_1} & y_{j_1} & \cdots & y_j & \cdots \\ \cdots & x_{i+1} & \cdots & x_{i_1+1} & y_{j_1+1} & \cdots & y_{j+1} & \cdots \end{pmatrix}, \quad i_1 \geq i, j_1 \leq j,$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & y_j & \cdots & y_{j_2} & z_{k_2} & \cdots & z_k & \cdots \\ \cdots & y_{j+1} & \cdots & y_{j_2+1} & z_{k_2+1} & \cdots & z_{k+1} & \cdots \end{pmatrix}, \quad j_2 \geq j, k_2 \leq k,$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & z_k & \cdots & z_{k_3} & x_{i_3} & \cdots & x_i & \cdots \\ \cdots & z_{k+1} & \cdots & z_{k_3+1} & x_{i_3+1} & \cdots & x_{i+1} & \cdots \end{pmatrix}, \quad k_3 \geq k, i_3 \leq i,$$

der vi ser at $x_{i_1+1}y_{j_1}, y_{j_2+1}z_{k_2}$ og $z_{k_3+1}x_{i_3}$ er kanter på hvert av båndene. Vi skal vise at dette ikke kan generere en triangulering av ballen.

Siden $x_{i_1+1}y_{j_1}$ er en kant vet vi at det finnes en $0 < r < n$ slik at $y_{j_1}z_r$ og $z_r x_{i_1+1}$ er kanter. Videre må vi ha $r \leq k_2$ siden $y_{j_2+1}z_{k_2}$ er kant og $j_1 < j_2 + 1$. Men vi har allerede gitt kanten $x_{i_3}z_{k_3+1}$, og siden $r < k_3 + 1$ og $i_1 + 1 > i_3$ og kanter ikke kan krysse så kan ikke $z_r x_{i_1+1}$ være kant. Følgelig vil ikke dette kunne generere en triangulering av ballen. \square

2.2.3 Generalisering til B^n

Lemma 2.2.5. Enhver sykel på X_s av lengde k kan reduseres til en sykel av lengde 3.

Bevis. Anta gitt en sykel av lengde k . Vi har da følgende situasjon:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x_{i_1, j_1} \\ x_{i_1, j_1+1} \end{pmatrix} R_{X_{i_1} X_{i_2}} \begin{pmatrix} x_{i_2, j_2} \\ x_{i_2, j_2+1} \end{pmatrix}, \\ & \quad \vdots \\ & \begin{pmatrix} x_{i_{k-1}, j_{k-1}} \\ x_{i_{k-1}, j_{k-1}+1} \end{pmatrix} R_{X_{i_{k-1}} X_{i_k}} \begin{pmatrix} x_{i_k, j_k} \\ x_{i_k, j_k+1} \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} x_{i_k, j_k} \\ x_{i_k, j_k+1} \end{pmatrix} R_{X_{i_k} X_{i_1}} \begin{pmatrix} x_{i_1, j_1} \\ x_{i_1, j_1+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Videre ser vi på båndet $b_{X_1 X_{k-1}}$. Der har vi enten

$$\begin{pmatrix} x_{i_1, j_1} \\ x_{i_1, j_1+1} \end{pmatrix} R_{X_{i_1} X_{i_{k-1}}} \begin{pmatrix} x_{i_{k-1}, j_{k-1}} \\ x_{i_{k-1}, j_{k-1}+1} \end{pmatrix} \text{ eller } \begin{pmatrix} x_{i_{k-1}, j_{k-1}} \\ x_{i_{k-1}, j_{k-1}+1} \end{pmatrix} R_{X_{i_{k-1}} X_{i_1}} \begin{pmatrix} x_{i_1, j_1} \\ x_{i_1, j_1+1} \end{pmatrix}.$$

I første tilfelle vil vi få en 3-sykel på $R_{X_{i_1} X_{i_{k-1}}} \cup R_{X_{i_{k-1}} X_{i_k}} \cup R_{X_{i_k} X_{i_1}}$ og i det andre tilfellet en 3-sykel på $R_{X_{i_1} X_{i_{k-2}}} \cup R_{X_{i_{k-2}} X_{i_{k-1}}} \cup R_{X_{i_{k-1}} X_{i_1}}$. \square

Teorem 2.2.6. Enhver triangulering av B^n som er av skruetype gir en degenerert rasjonal normal skrue.

Bevis. La T være en triangulering av skruetype av B^n . Vi ønsker å vise at $\cup R_{X_i X_j}$ gir en totalordning på X_s . Dersom det ikke finnes sykler på $\cup R_{X_i X_j}$ vil dette følge fra Proposisjon 2.2.3, så det er nok å vise at det ikke finnes noen sykler.

Anta som motsigelse at det finnes en sykel på $\cup R_{X_i X_j}$ av lengde k . Ved Lemma 2.2.5 kan denne reduseres til en sykel av lengde 3 på $R_{X_i X_j} \cup R_{X_j X_k} \cup R_{X_i X_k}$ på båndene $b_{X_i X_j}$, $b_{X_j X_k}$ og $b_{X_i X_k}$. Siden vi har 3-sykler følger det fra Proposisjon 2.2.4 at vi ikke får en triangulering av B^3 og per definisjon heller ikke en triangulering av skruetype av B^n . Ettersom T er en triangulering følger det fra det kontrapositive at det ikke finnes sykler på $\cup R_{X_i X_j}$. Dette gir dermed en totalordning på X_s .

Hvert av de $\binom{n}{2}$ båndene er gitt ved et ideal $I_{X_i X_j}$ som fremkommer av Riemenschneider-symbolet på matrisen $A_{X_i X_j}$. Siden $\cup R_{X_i X_j}$ er en totalordning kan vi finne en matrise A slik at Riemenschneider-symbolet gir

oss idealet $I = \oplus I_{X_i X_j}$ som definerer trianguleringen T . Dette viser at T er en degenerert rasjonal normal skrue. \square

Kapittel 3

En delvis deformasjon

Vi skal i dette kapitlet se på trianguleringer av sfærer $S \subset T$, der T er en triangulering av B^n av skruetype. Lar vi $X_0 = \mathbb{P}(S)$ være Stanley-Reisner skjemaet til S får vi $X_0 \subset Y_0$. Vi ønsker til slutt å se når X_0 kan deformeres til en glatt $K3$ -flate $X \subset Y$ der Y er en skrue. For å få til dette skal vi først definere en delvis deformasjon av X_0 der kun de genererende monomene til Y_0 perturberes ved Riemenschneider-symbolet.

Dersom dette skal være mulig må vi sørge for at deformasjonen av X_0 er kompatibel med deformasjonen av Y_0 , og vi skal se at dette frembringer en del restriksjoner på S . Videre må vi sjekke at deformasjonen er flat, og til slutt skal vi se hvilke flippinger av S som gir en kompatibel og flat deformasjon.

3.1 Den delvise deformasjonen

Før vi definerer den delvise deformasjonen må vi se hva som skal til for at X_0 skal være en delmengde av Y_0 , slik at ingen hjørner fjernes.

Lemma 3.1.1. *En triangulering S av sfæren med h hjørner har $3h - 6$ kanter.*

Bevis. Hvis k er antall kanter og f antall fasetter har vi $2k = 3f$. Resultatet følger dermed fra Eulers formel. \square

Lemma 3.1.2. Hvis T er en triangulering av skruetype slik at $Y_0 = \mathbb{P}(T)$ deformerer til en skrue Y av typen $S(d_1, \dots, d_r)$ så vil antall kanter i T være lik $\binom{r}{2} + r(h - r)$.

Bevis. Hvert bånd $b_{X_i X_j}$ har $1 + 2(d_i + d_j)$ kanter, og når vi summerer sammen antall kanter i hvert bånd teller vi hver streng s_{X_i} $r - 1$ ganger, og må derfor trekke fra $(r - 2) \sum d_i$. Hvis k er antall kanter i T får vi

$$\begin{aligned} k &= \sum_{i < j} (1 + 2(d_i + d_j)) - (r - 2) \sum_{i=1}^r d_i \\ &= \binom{r}{2} + 2 \sum_{i < j} (d_i + d_j) - (r - 2) \sum_{i=1}^r d_i \\ &= \binom{r}{2} + 2(r - 1)(h - r) - (r - 2)(h - 3) \\ &= \binom{r}{2} + r(h - r) \end{aligned}$$

der vi har brukt at antall hjørner $h = \sum d_i + r$. □

Når T er en triangulering av B^3 har denne $\binom{3}{2} + 3(h - 3) = 3h - 6$ kanter, og vi kan derfor ikke fjerne noen kanter fra T for å få en triangulert sfære. Dette betyr at S er randa til T slik at vi må fjerne de innvendige trekantene i T . Dette tilsvarer å legge til kubiske monomer i Stanley-Reisner idealet til X_0 . Når T er en triangulering av B^n der $n \geq 4$, vil $\binom{r}{2} + r(h - r) > 3h - 6$ og vi må derfor fjerne kanter for å få en triangulert sfære. Dette tilsvarer å legge til kvadratiske monomer i Stanley-Reisner idealet til X_0 . Vi forutsetter at kanten $x_{i,d_i} x_{i+1,0}$ ikke kan fjernes fra T .

Med dette i havn kan vi definere den delvise deformasjon av X_0 der vi kun perturberer skruemonomene. Vi skal først verifisere at deformasjonen av Y_0 fra Riemenschneider-symbolet er flat.

Definisjon 3.1.1. Deformasjonen

$$\begin{array}{ccc} Y_0 & \longrightarrow & \mathcal{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ k & \longrightarrow & k[t] \end{array}$$

gitt ved Riemenschneider-symbolet kaller vi *standarddeformasjonen* til Y_0 .

Lemma 3.1.3. *Standarddeformasjonen til Y_0 er flat.*

Bevis. Relasjonene mellom generatorene til I_{Y_0} er generert av 3×3 determinantene

$$\begin{vmatrix} x_j & x_k & 0 \\ x_j & x_k & 0 \\ 0 & x_{k+1} & x_{l+1} \end{vmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{vmatrix} 0 & x_{k+1} & x_{l+1} \\ x_j & x_k & 0 \\ 0 & x_{k+1} & x_{l+1} \end{vmatrix}$$

der vi kopierer henholdsvis den øverste og nederste raden. Med standarddeformasjonen blir relasjonene mellom generatorene til $I_{\mathcal{Y}}$ tilsvarende være generert av

$$\begin{vmatrix} x_j & x_k & t^{l-k}x_l \\ x_j & x_k & t^{l-k}x_l \\ t^{k-j}x_{j+1} & x_{k+1} & x_{l+1} \end{vmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{vmatrix} t^{k-j}x_{j+1} & x_{k+1} & x_{l+1} \\ x_j & x_k & t^{l-k}x_l \\ t^{k-j}x_{j+1} & x_{k+1} & x_{l+1} \end{vmatrix}.$$

Siden dette er en formell operasjon er det klart at relasjonene løftes og at deformasjonen er flat. \square

Vi ser nå på deformasjonen

$$\begin{array}{ccc} & & Y_0 \longrightarrow \mathcal{Y} \\ & \nearrow & \uparrow \\ X_0 & \longrightarrow & \mathcal{X}' \\ \downarrow & & \downarrow \text{flat} \\ \text{Spec } k & \longrightarrow & \text{Spec } k[t] \end{array}$$

(Note: The diagram also includes a dotted arrow from X_0 to Y_0 , a solid arrow from X_0 to \mathcal{X}' , a solid arrow from \mathcal{X}' to \mathcal{Y} , and a solid arrow from $\text{Spec } k$ to $\text{Spec } k[t]$. The arrow from \mathcal{X}' to \mathcal{Y} is labeled "flat".)

der $\mathcal{Y} \rightarrow k[t]$ er standarddeformasjonen og $\mathcal{X}' \rightarrow k[t]$ er deformasjonen der monomene fra Y_0 perturberes, mens de resterende monomene forblir urørt. Vi kaller denne deformasjonen \star fra nå av. Fiberen til \mathcal{Y} i $t = 1$ gir dermed skruen Y .

La $\xi \in T_{Y_0}^1$ være gitt ved de førsteordens deformasjonene som fremkommer

fra Riemenschneider-symbolet. Disse vil være gitt ved

$$\begin{aligned} x_{1,0}x_{1,2} - tx_{1,1}^2, \\ x_{1,1}x_{1,3} - tx_{1,2}^2, \\ \vdots \\ x_{i,d_i-1}x_{i+1,1} - tx_{i,d_i}x_{i+1,0}, \\ \vdots \\ x_{r,d_r-2}x_{r,d_r} - tx_{r,d_r-1}^2. \end{aligned}$$

For å beskrive de elementene i $T_{X_0}^1$ som er kompatible med denne standarddeformasjonen betrakter vi fiberdiagrammet

$$\begin{array}{ccc} T_{X_0}^1 \times_{T_{Y_0}^1(\mathcal{O}_{X_0})} T_{Y_0}^1 & \longrightarrow & T_{Y_0}^1 \\ \downarrow & & \downarrow g \\ T_{X_0}^1 & \xrightarrow{f} & T_{Y_0}^1(\mathcal{O}_{X_0}). \end{array}$$

Fra Proposisjon 1.3.3 vet vi at et element $[\varphi] \in T_A^1$ der $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$ er representert ved $\varphi \in \text{Hom}(I, A)$. Dermed får vi at elementene i $T_{\mathcal{O}_{X_0}}^1$ og $T_{\mathcal{O}_{Y_0}}^1$ er representert ved elementer fra henholdsvis $\text{Hom}(I_{X_0}, \mathcal{O}_{X_0})$ og $\text{Hom}(I_{Y_0}, \mathcal{O}_{Y_0})$. For å forstå hvordan disse er relatert ser vi på diagrammet

$$\begin{array}{ccc} I_{Y_0} & \xhookrightarrow{i} & I_{X_0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \xrightarrow{=} & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{Y_0} & \xrightarrow{p} & \mathcal{O}_{X_0} \end{array}$$

der $P = k[x_{1,0}, \dots, x_{r,d_r}]$. Elementer i $T_{Y_0}^1(\mathcal{O}_{X_0})$ er representert ved $\text{Hom}(I_{Y_0}, \mathcal{O}_{X_0})$. Vi ser dermed at hvis $[\varphi] \in T_{X_0}^1$ med $\varphi \in \text{Hom}(I_X/I_X^2, \mathcal{O}_X)$ og $[\psi] \in T_{Y_0}^1$ med $\Psi \in \text{Hom}(I_Y/I_Y^2, \mathcal{O}_Y)$, så er f og g definert ved

$$\begin{aligned} \varphi &\mapsto \varphi \circ i \\ \Psi &\mapsto p \circ \Psi. \end{aligned}$$

Dermed ser vi at $[\xi] \in T_{Y_0}^1$ sendes på

$$(p \circ \xi)(x_{i,j}x_{i,j+2}) = p(x_{i,j+1}^2) = x_{i,j+1}^2 \in \mathcal{O}_{X_0} \text{ for } 1 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq d_i - 2,$$

$$(p \circ \xi)(x_{i,d_i-1}x_{i+1,1}) = p(x_{i,d_i}x_{i+1,0}) = x_{i,d_i}x_{i+1,0} \in \mathcal{O}_{X_0} \text{ for } 1 \leq i \leq r - 1.$$

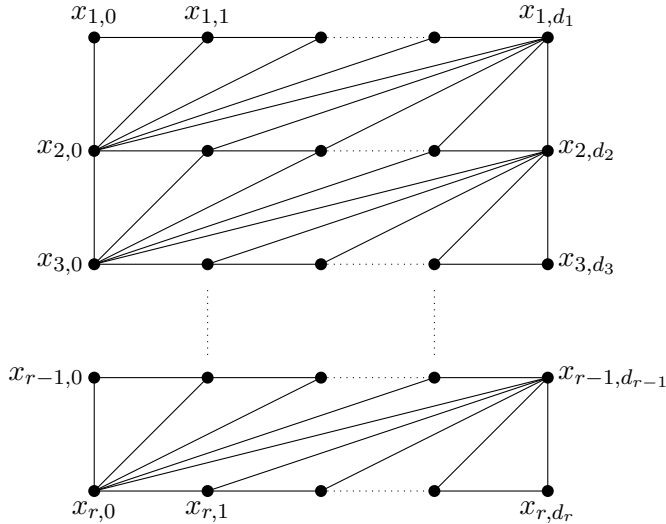
I fiberdiagrammet må vi ha $f^{-1}(g(\xi)) \in T_{X_0}^1$. Siden $x_{i,j+1}^2 \notin I_{X_0}$ (dette er klart siden vi bare kan legge til kvadratfrie monomer) og vi har forutsatt at $x_{i,d_i}x_{i+1,0} \notin I_{X_0}$ må det finnes et element $\varphi \in T_{X_0}^1 = f^{-1}(g(\xi))$ slik at

$$(\varphi \circ i)(x_{i,j}x_{i,j+2}) = \varphi(x_{i,j}x_{i,j+2}) = x_{i,j+1}^2 \text{ for } 1 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq d_i - 2,$$

$$(\varphi \circ i)(x_{i,d_i-1}x_{i+1,1}) = \varphi(x_{i,d_i-1}x_{i+1,1}) = x_{i,d_i}x_{i+1,0} \text{ for } 1 \leq i \leq r - 1.$$

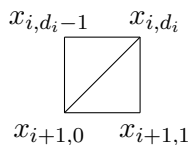
Som forklart i Seksjon 1.4 har vi en klar beskrivelse av T^1 til Stanley-Reisner skjemaet til en triangulert sfære. Vi skal nå vise at noen kanter i T ikke kan fjernes hvis vi skal få til en deformasjon $\mathcal{X}' \rightarrow k[t]$ av X_0 .

Lemma 3.1.4. *Gitt førsteordens deformasjonen av X_0 gitt ved \star , får vi en triangulert disk D_0 slik at Stanley-Reisner skjemaet til disken $\mathbb{P}(D_0) \subset Y_0$ også vil være en delmengde av X_0 , det vil si $\mathbb{P}(D_0) \subset X_0$. Kantene i denne disken kan følgelig ikke fjernes fra T . D_0 består av indre hjørner slik at summen av hjørner på randen og innvendige hjørner er lik antall hjørner i T , slik som figuren viser.*

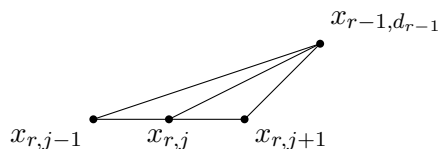
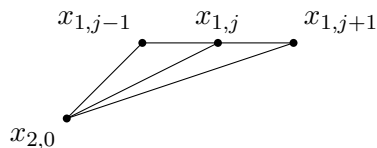


Bevis. Vi skal nå se hvilke kriterier som fremkommer fra Seksjon 1.4 som vil gi at kantene beskrevet ovenfor ikke kan fjernes fra T . Vi får to typer kriterier:

1. $\text{lk}[\{x_{i,d_i}x_{i+1,0}\}] = \{x_{i,d_{i-1}}x_{i+1,1}\}$ for $1 \leq i \leq r-1$.



2. $x_{i,j}$ har valens 4 for $1 \leq i \leq r$ og $2 \leq j \leq d_1 - 1$. For de indre hjørnene blir dette automatisk oppfylt, så det gjenstår å betrakte hjørnene på randa som faller innunder denne kategorien.



Siden alle disse hjørnene allerede har valens 3 betyr det at randen D_1 til D_0 må trianguleres slik at dette kriteriet tilfredsstilles. Disse to kriteriene gir tilsammen disken i lemmaet. \square

3.2 Kriterium for flathet

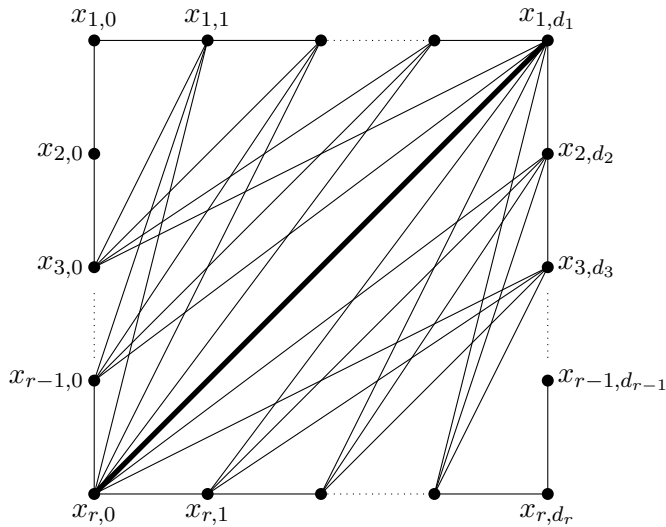
For å få en triangulering av sfæren må vi finne en triangulering D_1 av randen til D_0 slik at disse limer sammen til en sfære. Vi skal nå se at det fremkommer ytterligere kriterier i og med at deformasjonen \star skal være flat. Fra Lemma 1.3.4 vet vi at en slik deformasjon er flat hvis og bare hvis relasjonene mellom generatorene i idealet løftes. Vi ser nå tilbake på disken D_0 og får følgende resultat som skal vise seg å ha innvirkning på løftingene.

Lemma 3.2.1. *La D_1 være randen til disken D_0 som beskrevet ovenfor. Enhver triangulering av D_1 vil ha $x_{1,d_1}x_{r,0}$ som kant.*

Bevis. I trianguleringen av D_1 får vi ikke lov til å benytte kanter fra skrueidealet I_{Y_0} og heller ikke kantene fra trianguleringen D_0 . Med dette står vi igjen med følgende kanter:

$$\begin{aligned}
 & x_{r,0}x_{r-2,0}, \dots, x_{r,0}x_{1,0}, x_{r,0}x_{1,1}, \dots, x_{r,0}x_{1,d_1}, \\
 & x_{r-1,0}x_{r-3,0}, \dots, x_{r-1,0}x_{1,d_1}, \\
 & \vdots \\
 & x_{3,0}x_{1,0}, \dots, x_{3,0}x_{1,d_1}, \\
 & x_{1,d_1}x_{3,d_3}, \dots, x_{1,d_1}x_{r,1}, \\
 & x_{2,d_2}x_{4,d_4}, \dots, x_{2,d_2}x_{r,0}, \\
 & \vdots \\
 & x_{r-2,d_{r-2}}x_{r,d_r}, \dots, x_{r-2,d_{r-2}}x_{r,0}.
 \end{aligned}$$

I figuren nedenfor er noen av disse kantene tegnet opp, og vi ser tydelig at $x_{r,0}x_{1,d_1}$ må være kant ettersom ingen andre kanter krysser denne og vi skal ha en triangulering.



□

Vi ønsker nå å se nærmere på hvordan relasjoner mellom generatorene i idealet I_{X_0} løftes til relasjoner mellom generatorene i idealet $I_{\mathcal{X}'}$. Etersom \mathcal{Y} allerede er en flat deformasjon av Y_0 vet vi at relasjonene mellom generatorene i I_{Y_0} løftes til relasjoner mellom generatorer i $I_{\mathcal{Y}}$. De resterende monomene skal som sagt ikke perturberes, så det gjenstår å sjekke at relasjonene mellom monomer fra I_{Y_0} og monomer fra $I_{X_0} - I_{Y_0}$ løftes.

Proposisjon 3.2.2. [5, Lemma 15.1] *La I være et ideal der alle generatorene er kvadratfrie monomer. Relasjonene mellom generatorene til I vil være generert av $x_{q \setminus p}(x_p) - x_{p \setminus q}(x_q) = 0$.*

Det gjenstår nå å verifisere at deformasjonen $\mathcal{X}' \rightarrow k[t]$ er flat. Vi gjør dette først for skruer av dimensjon 3, og deretter for skruer av dimensjon ≥ 4 .

3.2.1 Deformasjonen $\mathcal{X}' \rightarrow k[t]$ når $\dim \mathcal{Y} = 3$

Lemma 3.2.3. *La $\dim Y = 3$. Da er deformasjonen $\mathcal{X}' \rightarrow k[t]$ flat.*

Bevis. Vi må sjekke at relasjonene mellom generatorene i I_{Y_0} og $I_{X_0} - I_{Y_0}$ løftes til relasjoner mellom generatorene i $I_{\mathcal{X}'}$. $I_{X_0} - I_{Y_0}$ består av de monomiale kubikkene

$$\begin{aligned} & x_{d_x} y_{d_y} z_{d_z-1} \\ & x_{d_x} y_{d_y} z_{d_z-2} \\ & \vdots \\ & x_{d_x} y_{d_y} z_0 \\ & x_{d_x} y_{d_y-1} z_0 \\ & \vdots \\ & x_{d_x} y_0 z_0 \\ & x_{d_x-1} y_0 z_0 \\ & \vdots \\ & x_{d_1} y_0 z_0. \end{aligned}$$

Vi deler disse inn i tre ulike kategorier slik at vi enklere kan sjekke løfting av relasjonene for hver kategori.

1. **Kubikker av typen $x_{d_x}y_{d_y}z_i$ der $1 \leq i \leq d_z$**

(i) Relasjonen $y_{d_y}z_i(x_px_{d_x}) - x_p(x_{d_x}y_{d_y}z_i) = 0$ løftes til

$$\begin{aligned} & y_{d_y}z_i(x_px_{d_x} - t^m x_{p+1}x_{d_x-1}) - x_p(x_{d_x}y_{d_y}z_i) + \\ & t^m x_{p+1}z_i(x_{d_x-1}y_{d_y} - t^n x_{d_x}y_{d_y-1}) + t^{m+n} x_{p+1}x_{d_x}(y_{d_y-1}z_i - t^r y_{d_y}z_{i-1}) \\ & + t^{m+n+r} x_{p+1}(x_{d_x}y_{d_y}z_{i-1}) = 0. \end{aligned}$$

(ii) Relasjonen $x_{d_x}z_i(x_px_{d_y}) - x_p(x_{d_x}y_{d_y}z_i) = 0$ løftes til

$$\begin{aligned} & x_{d_x}z_i(x_px_{d_y} - t^m x_{p+1}x_{d_y-1}) - x_p(x_{d_x}y_{d_y}z_i) \\ & + t^m x_{p+1}x_{d_x}(x_{d_y-1}z_i - t^n x_{d_y}z_{i-1}) + t^{m+n} x_{p+1}(x_{d_x}y_{d_y}z_{i-1}) = 0. \end{aligned}$$

(iii) Relasjonen $x_{d_x}y_{d_y}(x_pz_i) - x_p(x_{d_x}y_{d_y}x_i) = 0$ gir to ulike løftinger ettersom x_pz_i kan perturberes både ved $x_pz_i - t^m x_{p+1}z_{i-1}$ og $x_pz_i - t^n x_{p-1}z_{i+1}$. Den siste perturbasjonen er kun mulig når $i \leq d_z - 1$. I det første tilfellet får vi løftingen

$$x_{d_x}y_{d_y}(x_pz_i - t^m x_{p+1}z_{i-1}) - x_p(x_{d_x}y_{d_y}x_i) + t^m x_{p+1}(x_{d_x}y_{d_y}z_{i-1}) = 0$$

og i det andre tilfellet

$$x_{d_x}y_{d_y}(x_pz_i - t^n x_{p-1}z_{i+1}) - x_p(x_{d_x}y_{d_y}x_i) + t^n x_{p-1}(x_{d_x}y_{d_y}z_{i+1}) = 0.$$

2. **Kubikker av typen $x_{d_x}y_i z_0$ der $1 \leq i \leq d_y$**

(i) Relasjonen $y_i z_0(x_px_{d_x}) - x_p(x_{d_x}y_i z_0) = 0$ løftes til

$$\begin{aligned} & y_i z_0(x_px_{d_x} - t^m x_{p+1}x_{d_x-1}) - x_p(x_{d_x}y_i z_0) \\ & + t^m x_{p+1}z_0(x_{d_x-1}y_i - t^n x_{d_x}y_{i-1}) + t^{m+n} x_{p+1}x_{d_x}y_{i-1}z_0 = 0. \end{aligned}$$

(ii) Relasjonen $x_{d_x}z_0(x_p y_i) - x_p(x_{d_x}y_i z_0) = 0$ gir to ulike løftinger siden $x_p y_i$ kan perturberes både ved $x_p y_i - t^m x_{p+1} y_{i-1}$ og $x_p y_i - t^n x_{p-1} y_{i+1}$. Den siste perturbasjonen er kun mulig når $i \leq d_y - 1$. I det første tilfellet får vi løftingen

$$x_{d_x}z_0(x_p y_i - t^m x_{p+1} y_{i-1}) - x_p(x_{d_x}y_i z_0) + t^m x_{p+1}(x_{d_x}y_{i-1}z_0) = 0$$

og i det andre tilfellet

$$x_{d_x}z_0(x_p y_i - t^n x_{p-1} y_{i+1}) - x_p(x_{d_x}y_i z_0) + t^n x_{p-1}(x_{d_x}y_{i+1}z_0) = 0.$$

(iii) Relasjonen $x_{d_x}y_i(x_pz_0) - x_p(x_{d_x}y_iz_0) = 0$ løfter til

$$x_{d_x}y_i(x_pz_0 - t^m x_{p-1}z_1) - x_p(x_{d_x}y_iz_0) + t^m x_{p-1}x_{d_x}(y_iz_1 - t^n y_{i+1}z_0) + t^{m+n} x_{p-1}(x_{d_x}y_{i+1}z_0) = 0$$

når $i \leq d_y$. Når $i = d_y$ løftes relasjonen til

$$x_{d_x}y_{d_y}(x_pz_0 - t^m x_{p-1}z_1) - x_p(x_{d_x}y_{d_y}z_0) + t^m x_{p-1}(x_{d_x}y_{d_y}z_1) = 0.$$

3. Kubikker av typen $x_iy_0z_0$ der $1 \leq i \leq d_z$

(i) Relasjonen $y_0z_0(x_px_i) - x_p(x_iy_0z_0) = 0$ gir to ulike løftinger siden x_px_i kan perturberes både ved $x_px_i - t^m x_{p+1}x_{i-1}$ og $x_px_i - t^m x_{p-1}x_{i+1}$. Den siste perturbasjonen er kun mulig når $i \leq d_x - 1$. I det første tilfellet får vi løftingen

$$y_0z_0(x_px_i - t^m x_{p+1}x_{i-1}) - x_p(x_iy_0z_0) + t^m x_{p+1}(x_{i-1}y_0z_0) = 0$$

og i det andre tilfellet

$$y_0z_0(x_px_i - t^m x_{p-1}x_{i+1}) - x_p(x_iy_0z_0) + t^m x_{p-1}(x_{i+1}y_0z_0) = 0.$$

(ii) Relasjonen $x_iz_0(x_py_0) - x_p(x_iy_0z_0)$ løfter til

$$x_iz_0(x_py_0 - t^m x_{p-1}y_1) - x_p(x_iy_0z_0) + t^m x_{p-1}z_0(x_iy_1 - t^n x_{i+1}y_0) + t^{m+n} x_{p-1}(x_{i+1}y_0z_0) = 0$$

når $i \leq d_x - 1$. Når $i = d_x$ løftes relasjonen til

$$x_{d_x}z_0(x_py_0 - t^m x_{p-1}y_1) - x_p(x_{d_x}y_0z_0) + t^m x_{p-1}(x_{d_x}z_0y_1) = 0.$$

(iii) Relasjonen $x_iy_0(x_pz_0) - x_p(x_iy_0z_0) = 0$ løfter til

$$x_iy_0(x_pz_0 - t^m x_{p-1}z_1) - x_p(x_iy_0z_0) + t^m x_{p-1}x_i(y_0z_1 - t^n y_1z_0) + t^{m+n} x_{p-1}z_0(x_iy_1 - t^r x_{i+1}y_0) + t^{m+n+r}(x_{i+1}y_0z_0) = 0$$

når $i \leq d_x - 1$. Når $i = d_x$ løftes relasjonen til

$$x_{d_x}y_0(x_pz_0 - t^m x_{p-1}z_1) - x_p(x_{d_x}y_0z_0) + t^m x_{p-1}x_{d_x}(y_0z_1 - t^n y_1z_0) + t^{m+n} x_{p-1}(x_{d_x}y_1z_0) = 0.$$

Dette viser at alle relasjonene løftes og deformasjonen er følgelig flat ved Lemma 1.3.4. \square

3.2.2 Deformasjonen $\mathcal{X}' \rightarrow k[t]$ når $\dim \mathcal{Y} \geq 4$

Vi skal først se at det i dette tilfellet vil fremkomme kriterier om ytterligere kanter som ikke kan fjernes fra T ettersom deformasjonen skal være flat.

Lemma 3.2.4. *La $\dim \mathcal{Y} \geq 4$. Da er \mathcal{X}' er en flat deformasjon av X_0 hvis og bare hvis $x_{1,i}x_{r,0}$, $0 \leq i \leq d_1 - 1$ og $x_{1,d_1}x_{r,j}$, $0 \leq j \leq d_r$ er kanter i X_0 .*

Bevis. Anta at $x_{1,d_1}x_{r,1}$ ikke er kant i X_0 . Siden $x_{1,d_1-1}x_{r,1} \in I_{Y_0}$ har vi relasjonen

$$x_{1,d_1}(x_{1,d_1-1}x_{r,1}) - x_{1,d_1-1}(x_{1,d_1}x_{r,1}).$$

Fra deformasjonen av Y_0 får vi

$$x_{1,d_1-1}x_{r,1} - t^n x_{1,d_1}x_{r,0}$$

og må sjekke at relasjonen løftes. Vi vet fra Lemma 3.2.1 at $x_{1,d_1}x_{r,0}$ må være kant i X_0 , så relasjonen kan ikke løftes ved hjelp av denne. Den eneste måten å løfte denne relasjonen på vil derfor være ved

$$\begin{aligned} & x_{1,d_1}(x_{1,d_1-1}x_{r,1} - t^n x_{1,d_1}x_{r,0}) - x_{1,d_1-1}(x_{1,d_1}x_{r,1}) \\ & - x_{1,d_1}(x_{1,d_1-1}x_{r,1} - t^n x_{1,d_1}x_{r,0}) + x_{1,d_1-1}(x_{1,d_1}x_{r,1}) = 0. \end{aligned}$$

Men dette betyr at den løftede relasjonen er gitt ved

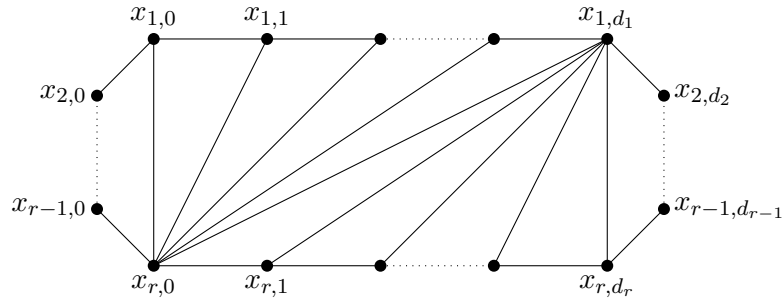
$$\begin{pmatrix} \vdots \\ x_{1,d_1} - x_{1,d_1} \\ \vdots \\ -x_{1,d_1-1} + x_{1,d_1-1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

og det følger at relasjonen ikke kan løftes. Vi gjentar dette argumentet for $x_{1,d_1}x_{r,i}$, $2 \leq i \leq d_r$. Siden $x_{1,d_1-1}x_{r,i} \in I_{Y_0}$ for $2 \leq i \leq d_r$ vil vi alltid få relasjonen

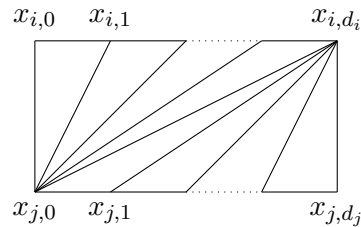
$$x_{1,d_1}(x_{1,d_1-1}x_{r,i}) - x_{1,d_1-1}(x_{1,d_1}x_{r,i}) \text{ for } 2 \leq i \leq d_r.$$

Tilsvarende som vist ovenfor vil dette medføre at $x_{1,d_1}x_{r,i} \in I_{X_1}$ for $1 \leq i \leq d_r - 1$ for at relasjonen skal løftes. Men vi viste ovenfor at $x_{1,d_1}x_{r,1} \notin I_{X_1}$ og ved induksjon følger resultatet. Dette vises tilsvarende for $x_{1,j}x_{r,0}$, $0 \leq j \leq d_1 - 1$. \square

Det siste resultatet gir oss følgende bilde.



Vi ser altså at de to kurvene bindes sammen ved standardtrianguleringen, hvilket betyr at $D_0 \cup D_1$ er en sylinder bestående av bånd med standardtrianguleringen. Vi ser altså tydelig gitt dette resultatet hvilke kanter som må fjernes. På bunnen og toppen av sylindere må det fjernes nok kanter til at vi får en triangulering. Resten av kantene vi fjerner vil svare til båndene som ikke ligger på randen av sylindere, det vil si bånd av typen

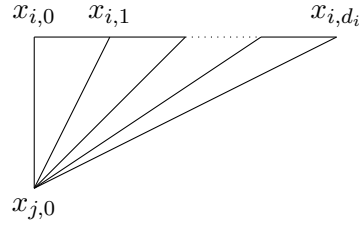


der $j \neq i \pm 1$. Vi kan heller ikke se på båndet der $i = 1$ og $j = r$ ved resultatet ovenfor. Kantene vi må fjerne vil være på formen $x_{j,0}x_{i,k}$, $1 \leq k \leq d_i$ og $x_{j,l}x_{i,d_i}$, $0 \leq l \leq d_j - 1$. Kantene $x_{i,0}x_{j,0}$ og $x_{i,d_i}x_{j,d_j}$ ligger henholdsvis på bunnen og toppen av sylindere, og det er bare et visst antall kanter på denne formen som kan fjernes, som vi senere skal se at kan gjøres helt fritt. Det gjenstår å vise at X_0 på denne formen faktisk gir en flat deformasjon $\mathcal{X}' \rightarrow k[t]$.

Proposisjon 3.2.5. *Deformasjonen $\mathcal{X}' \rightarrow k[t]$ av X_0 er flat.*

Bevis. Vi må sjekke at relasjonene mellom kantene vi har fjernet og monomene fra skruetidealet kan løftes. For enkelthets skyld antar vi at $i < j$ og sjekker dette for de to type kantene vi fjerner:

Kanter av typen $x_{j,0}x_{i,k}$, $1 \leq k \leq d_i$



Disse kantene vil ha relasjoner til to typer monomer fra I_{Y_0} .

Situasjon 1: $x_{i,k}(x_{j,0}x_p) - x_p(x_{j,0}x_{i,k}) = 0$

Vi lar x_p være en vilkårlig variabel i følgende posisjon:

$$\begin{pmatrix} \cdots & x_{j,0} & \cdots & & \\ & & & x_p & \cdots \end{pmatrix}$$

Siden $i < j$ er $x_{i,k}x_{j,1} \in I_{Y_0}$ for $1 \leq k \leq d_i - 1$. Dessuten er $x_{j,0}x_{i,k+1} \in I_{X_0}$ for $k \geq d_i - 1$, så for disse k vil denne relasjonen løfte til

$$\begin{aligned} x_{i,k}(x_{j,0}x_p - t^n x_{j,1}x_{p-1}) - x_p(x_{j,0}x_{i,k}) + t^n x_{p-1}(x_{i,k}x_{j,1} - t^m x_{i,k+1}x_{j,0}) \\ + t^{n+m} x_{p-1}(x_{j,0}x_{i,k+1}) = 0. \end{aligned}$$

For $k = d_i$ har vi $x_{i,d_i}x_{j,1} \in I_{X_0}$ siden dette er en av kantene vi har fjernet, og vi får dermed løftet relasjonen ved

$$x_{i,k}(x_{j,0}x_p - t^n x_{j,1}x_{p-1}) - x_p(x_{j,0}x_{i,d_i}) + t^n x_{p-1}(x_{j,1}x_{i,d_i}) = 0.$$

Situasjon 2: $x_{j,0}(x_p x_{i,k}) - x_p(x_{j,0}x_{i,k}) = 0$

Vi lar x_p være en vilkårlig variabel i en av følgende posisjoner:

$$\begin{pmatrix} \cdots & x_p & \cdots & & \\ & & & x_{i,k} & \cdots \end{pmatrix} \text{ for } 1 \leq k \leq d_i$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & x_{i,k} & \cdots & & \\ & & & x_p & \cdots \end{pmatrix} \text{ for } 1 \leq k \leq d_i - 1$$

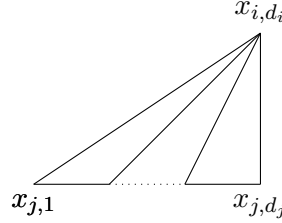
og vi må følgelig sjekke at relasjonene løftes når vi perturberer

$$\begin{aligned} x_p x_{i,k} - t^n x_{p+1} x_{i,k-1} & \text{ for } 1 \leq k \leq d_i \\ x_{i,k} x_p - t^m x_{i,k+1} x_{p-1} & \text{ for } 1 \leq k \leq d_i - 1 \end{aligned}$$

Vi har $x_{j,0} x_{i,k-1} \in I_{X_0}$ for $2 \leq k \leq d_i$ ettersom dette er kanter vi har fjernet og vil ved et tilsvarende argument som i situasjon 1 kunne løfte disse relasjonene. Tilsvarende har vi fjernet kantene $x_{j,0} x_{i,k+1}$ for $1 \leq k \leq d_i - 1$. Det gjenstår derfor å sjekke at den første relasjonen løfter når $k = 1$, og vi vil i dette tilfellet få

$$\begin{aligned} x_{j,0}(x_p x_{i,1} - t^n x_{p+1} x_{i,0}) - x_p(x_{j,0} x_{i,1}) + t^{n-m} x_{i,0}(x_p x_{j,1} - t^m x_{p+1} x_{j,0}) \\ - t^{n-m} x_p(x_{i,0} x_{j,1} - t^r x_{i,1} x_{j,0}) - t^{r+n-m} x_p(x_{i,1} x_{j,0}) = 0. \end{aligned}$$

Kanter av typen $x_{j,l} x_{i,d_i}$, $1 \leq l \leq d_j - 1$



Disse kantene vil ha relasjoner til to typer monomer fra I_{Y_0} .

Situasjon 1: $x_{j,l}(x_p x_{i,d_i}) - x_p(x_{j,l} x_{i,d_i}) = 0$

Vi lar x_p er en vilkårlig variabel i følgende posisjon:

$$\begin{pmatrix} \cdots & x_p & \cdots & & \\ & & \cdots & x_{i,d_i} & \cdots \end{pmatrix}$$

slik at vi får perturbasjonen $x_p x_{i,d_i} - t^m x_{p+1} x_{i,d_i-1}$. Siden $i < j$ har vi $x_{i,d_i-1} x_{j,l} \in I_{Y_0}$ for $2 \leq l \leq d_j$ og ved tilsvarende argument som ovenfor vil relasjonene løftes i disse tilfellene.

Situasjon 2: $x_{i,d_i}(x_p x_{j,l}) - x_p(x_{j,l} x_{i,d_i}) = 0$

Vi lar x_p være en vilkårlig variabel i en av følgende posisjoner:

$$\begin{pmatrix} \cdots & x_p & \cdots & & \\ & & \cdots & x_{j,l} & \cdots \end{pmatrix} \text{ for } 1 \leq l \leq d_j - 1$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & & & & \\ & \cdots & x_{j,l} & \cdots & \\ & & \cdots & x_p & \cdots \end{pmatrix} \text{ for } 1 \leq l \leq d_j - 1$$

og vi må følgelig sjekke at relasjonene løftes når vi perturberer

$$x_p x_{j,l} - t^m x_{p+1} x_{j,l-1} \text{ for } 1 \leq l \leq d_j - 1,$$

$$x_{j,l} x_p - t^n x_{j,l+1} x_{p-1} \text{ for } 1 \leq l \leq d_j - 1.$$

Vi har $x_{i,d_i} x_{i,l-1} \in I_{X_0}$ for $1 \leq l \leq d_j - 1$ ettersom dette er kanter vi har fjernet, så disse relasjonene vil løftes. Tilsvarende har vi fjernet kantene $x_{i,d_i} x_{j,l+1}$ for $1 \leq l \leq d_j - 2$. Det gjenstår derfor å sjekke relasjonen løftes i tilfellet $-t^n x_{i,d_i} x_{j,d_j} x_{p-1} = 0$. Da har vi

$$x_{i,d_i}(x_{j,d_j-1} x_p - t^n x_{j,d_j} x_{p-1}) - x_p(x_{j,d_i-1} x_{i,d_i}) - t^{n-m} x_{i,d_i}(x_{j,d_j-1} x_p - t^m x_{j,d_j} x_{p-1}) + t^{n-m} x_p(x_{i,d_i} x_{j,d_j-1}) = 0.$$

Videre får vi at toppen og bunnen kan trianguleres fritt ved lemmaet nedenfor hvilket betyr at alle relasjoner løftes og deformasjonen er flat. \square

Lemma 3.2.6. *Toppen og bunnen av sylindere kan trianguleres fritt.*

Bevis. Vi ser først hva som skjer hvis vi fjerner kanten $x_{i,0} x_{j,0}$. Her vil vi ha to typer relasjoner til monomer i I_{Y_0} på formen $x_{i,0} x_p$ og $x_{j,0} x_p$ der x_p er en vilkårlig variabel i følgende posisjon:

$$\begin{pmatrix} \cdots & x_{i,0} & \cdots & & \\ & & \cdots & x_p & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & & & & \\ & \cdots & x_{j,0} & \cdots & \\ & & \cdots & x_p & \cdots \end{pmatrix}.$$

Dette gir oss relasjonene

$$x_{j,0}(x_{i,0} x_p) - x_p(x_{i,0} x_{j,0}) = 0 \text{ og}$$

$$x_{i,0}(x_{j,0} x_p) - x_p(x_{i,0} x_{j,0}) = 0$$

som vil løftes til

$$x_{j,0}(x_{i,0}x_p - t^m(x_{i,1}x_{p-1})) - x_p(x_{i,0}x_{j,0}) + t^m x_{p-1}(x_{j,0}x_{i,1}) = 0,$$

og

$$x_{i,0}(x_{j,0}x_p - t^n(x_{j,1}x_{p-1})) - x_p(x_{i,0}x_{j,0}) + t^n x_{p-1}(x_{i,0}x_{j,1} - t^n x_{i,1}x_{j,0}) + t^{m+n} x_{p-1}(x_{j,0}x_{i,1}) = 0.$$

Dette vises tilsvarende for kantene $x_{i,d_i}x_{j,d_j}$ og vi har dermed vist at toppen og bunnen av sylindere kan trianguleres fritt. \square

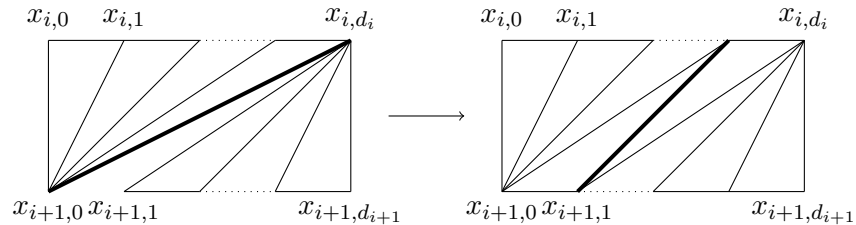
3.3 Degenererte skruer på generell form

Vi ønsker nå å finne en beskrivelse av hvilke $X_0 \subset Y_0$ som kan deformeres til $\mathcal{X}' \subset \mathcal{Y}$ der Y_0 nå er på generell form. Vi tar derfor utgangspunkt i $X_0 \subset Y_0$ der Y_0 er på standardform, og ser hvilke flips vi kan foreta slik at betingelsene beskrevet ovenfor holder.

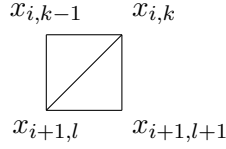
Vi minner om at de lovlige flipsene svarer til permutasjon av søyler som står ved siden av hverandre i matrisen og er fra forskjellige strenger s_{X_i} . Vi kan derfor permutere søylene

$$\begin{pmatrix} x_{i,d_i-1} \\ x_{i,d_i} \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} x_{i+1,0} \\ x_{i+1,1} \end{pmatrix}$$

som vil svare til flippen



Anta nå at vi har foretatt endelig mange lovlige flips og at vi står i en ny flippbar posisjon.

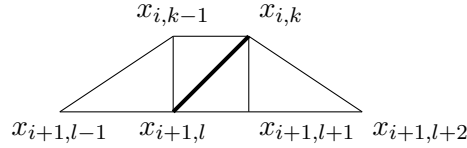


Gitt denne generelle situasjonen på et bånd har vi flere mulige posisjoner vi må evaluere.

Situasjon 1: Før flipping står vi i følgende situasjon

$$\begin{pmatrix} \cdots & x_{i+1,l-1} & x_{i,k-1} & x_{i+1,l} & x_{i+1,l+1} & \cdots \\ \cdots & x_{i+1,l} & x_{i,k} & x_{i+1,l+1} & x_{i+1,l+2} & \cdots \end{pmatrix},$$

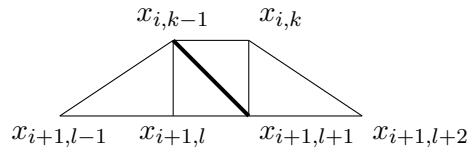
som gir dette kravet til kantene som **må** være med i X_0 :



Etter flipping har vi

$$\begin{pmatrix} \cdots & x_{i+1,l-1} & x_{i+1,l} & x_{i,k-1} & x_{i+1,l+1} & \cdots \\ \cdots & x_{i+1,l} & x_{i+1,l+1} & x_{i,k} & x_{i+1,l+2} & \cdots \end{pmatrix},$$

som gir oss følgende bilde:



Etter flipping vil vi dermed få følgende nye førsteordens deformasjoner:

$$\begin{aligned} x_{i+1,l-1}x_{i+1,l+1} - tx_{i+1,l}^2 \\ x_{i+1,l}x_{i,k} - tx_{i+1,l+1}x_{i,k-1} \\ x_{i,k-1}x_{i+1,l+2} - tx_{i,k}x_{i+1,l+1} \end{aligned}$$

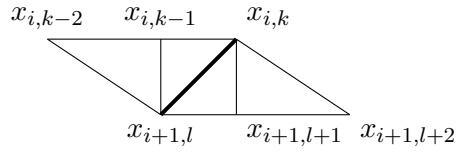
og må følgelig ha $\text{lk}\{[x_{i+1,l+1}x_{i,k-1}]\} = \{x_{i+1,l}x_{i,k}\}$ og $\text{lk}\{[x_{i,k}x_{i+1,l+1}]\} = \{x_{i,k-1}x_{i+1,l+2}\}$ og hjørnet $x_{i+1,l}$ må ha valens 4. Dette hjørnet har allerede

en kant til et hjørne $x_{i+2,m}$, så vi ser av bildet ovenfor at disse betingelsene er tilfredsstilt.

Situasjon 2: Før flipping står vi i følgende posisjon:

$$\begin{pmatrix} \cdots & x_{i,k-2} & x_{i,k-1} & x_{i+1,l} & x_{i+1,l+1} & \cdots \\ \cdots & x_{i,k-1} & x_{i,k} & x_{i+1,l+1} & x_{i+1,l+2} & \cdots \end{pmatrix}$$

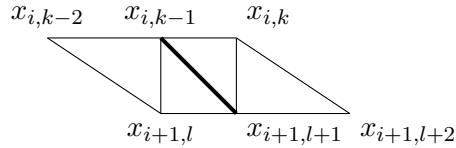
som gir dette kravet til kantene som **må** være med i X_0 :



Etter flipping har vi

$$\begin{pmatrix} \cdots & x_{i,k-2} & x_{i+1,l} & x_{i,k-1} & x_{i+1,l+1} & \cdots \\ \cdots & x_{i,k-1} & x_{i+1,l+1} & x_{i,k} & x_{i+1,l+2} & \cdots \end{pmatrix},$$

som gir oss følgende bilde:



Etter flipping vil vi dermed få følgende nye førsteordens deformasjoner:

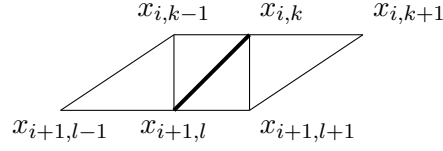
$$\begin{aligned} x_{i,k-2}x_{i+1,l+1} - tx_{i,k-1}x_{i+1,l} \\ x_{i+1,l}x_{i,k} - tx_{i+1,l+1}x_{i,k-1} \\ x_{i,k-1}x_{i+1,l+2} - tx_{i,k}x_{i+1,l+1} \end{aligned}$$

og må følgelig ha $\text{lk}\{[x_{i,k-1}x_{i+1,l}]\} = \{x_{i,k-2}x_{i+1,l+1}\}$, $\text{lk}\{[x_{i+1,l+1}x_{i,k-1}]\} = \{x_{i+1,l}x_{i,k}\}$ og $\text{lk}\{[x_{i,k}x_{i+1,l+1}]\} = \{x_{i,k-1}x_{i+1,l+2}\}$. Vi ser av bildet ovenfor at dette er tilfredsstilt.

Situasjon 3:

$$\begin{pmatrix} \cdots & x_{i+1,l-1} & x_{i,k-1} & x_{i+1,l} & x_{i,k} & \cdots \\ \cdots & x_{i+1,l} & x_{i,k} & x_{i+1,l+1} & x_{i,k+1} & \cdots \end{pmatrix}$$

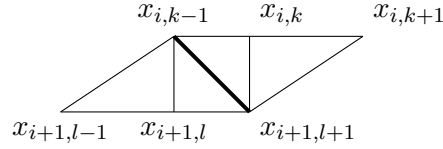
som gir dette kravet til kantene som **må** være med i X_0 :



Etter flipping har vi

$$\begin{pmatrix} \cdots & x_{i+1,l-1} & x_{i+1,l} & x_{i,k-1} & x_{i,k} & \cdots \\ \cdots & x_{i+1,l} & x_{i+1,l+1} & x_{i,k} & x_{i,k+1} & \cdots \end{pmatrix},$$

som gir oss følgende bilde:



Etter flipping vil vi dermed få følgende nye førsteordens deformasjoner:

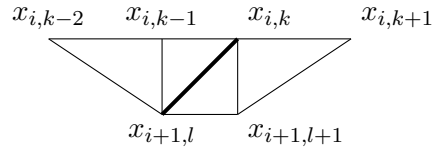
$$\begin{aligned} & x_{i+1,l-1}x_{i+1,l+1} - tx_{i+1,l}^2 \\ & x_{i+1,l}x_{i,k} - tx_{i+1,l+1}x_{i,k-1} \\ & x_{i,k-1}x_{i,k+1} - tx_{i,k}^2 \end{aligned},$$

og må følgelig ha $\text{lk}\{[x_{i+1,l+1}x_{i,k-1}]\} = \{x_{i+1,l}x_{i,k}\}$ og dessuten at hjørnene $x_{i+1,l}$ og $x_{i,k}$ må ha valens 4. Disse hjørnene har allerede en kant til et hjørne i et annet bånd, så vi ser av bildet ovenfor at dette er tilfredsstillt.

Situasjon 4:

$$\begin{pmatrix} \cdots & x_{i,k-2} & x_{i,k-1} & x_{i+1,l} & x_{i,k} & \cdots \\ \cdots & x_{i,k-1} & x_{i,k} & x_{i+1,l+1} & x_{i,k+1} & \cdots \end{pmatrix}$$

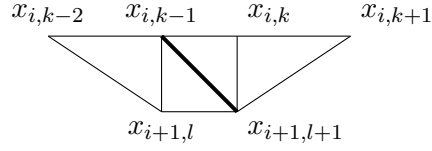
som gir dette kravet til kantene som **må** være med i X_0 :



Etter flipping har vi

$$\begin{pmatrix} \cdots & x_{i,k-2} & x_{i+1,l} & x_{i,k-1} & x_{i,k} & \cdots \\ \cdots & x_{i,k-1} & x_{i+1,l+1} & x_{i,k} & x_{i,k+1} & \cdots \end{pmatrix},$$

som gir oss følgende bilde:



Etter flipping vil vi dermed få følgende nye førsteordens deformasjoner:

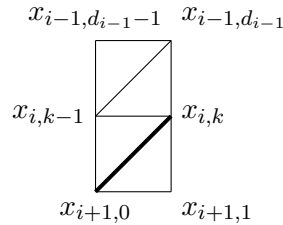
$$\begin{aligned} & x_{i,k-2}x_{i+1,l+1} - tx_{i,k-1}x_{i+1,l} \\ & x_{i+1,l}x_{i,k} - tx_{i+1,l+1}x_{i,k-1} \\ & x_{i,k-1}x_{i,k+1} - tx_{i,k}^2 \end{aligned}$$

og må følgelig ha $\text{lk}\{[x_{i,k-1}x_{i+1,l}]\} = \{x_{i,k-2}x_{i+1,l+1}\}$, $\text{lk}\{[x_{i+1,l+1}x_{i,k-1}]\} = \{x_{i+1,l}x_{i,k}\}$ og hjørne og $x_{i,k}$ må ha valens 4. Dette hjørnet har allerede en kant til et hjørne $x_{i-1,n}$, så vi ser av bildet ovenfor at betingelsene er tilfredsstillt.

Situasjon 5:

$$\begin{pmatrix} \cdots & x_{i-1,d_{i-1}-1} & x_{i,k-1} & x_{i+1,0} & \cdots \\ \cdots & x_{i-1,d_{i-1}} & x_{i,k} & x_{i+1,1} & \cdots \end{pmatrix}$$

som gir dette kravet til kantene som **må** være med i X_0 :

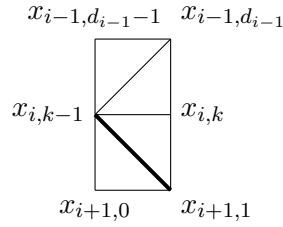


Vi ser på to mulige flippinger gitt denne situasjonen:

Permutasjon av de to siste kolonnene

$$\begin{pmatrix} \cdots & x_{i-1,d_{i-1}-1} & x_{i+1,0} & x_{i,k-1} & \cdots \\ \cdots & x_{i-1,d_{i-1}} & x_{i+1,1} & x_{i,k} & \cdots \end{pmatrix}$$

Dette gir følgende bilde:



Etter flipping vil vi dermed få følgende nye førsteordens deformasjoner:

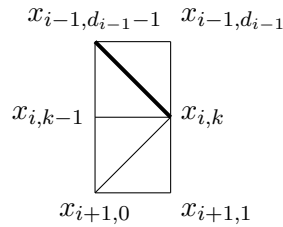
$$\begin{aligned} x_{i-1,d_{i-1}-1}x_{i+1,1} - tx_{i-1,d_{i-1}}x_{i+1,0} \\ x_{i+1,0}x_{i,k} - tx_{i+1,1}x_{i,k-1} \end{aligned}$$

Dette betyr at vi må ha $\text{lk}\{[x_{i-1,d_{i-1}}x_{i+1,0}]\} = \{x_{i-1,d_{i-1}-1}x_{i+1,1}\}$ og $\text{lk}\{[x_{i+1,1}x_{i,k-1}]\} = \{x_{i+1,0}x_{i,k}\}$. Førstnevnte er *ikke* tilfredsstilt når $\dim Y \geq 4$ og det følger at denne typen flip ikke er mulig for $S \subset T$ når T er en triangulering av B^n der $n \geq 4$.

Permutasjon av de to første kolonnene

$$\begin{pmatrix} \cdots & x_{i,k-1} & x_{i-1,d_{i-1}-1} & x_{i+1,0} & \cdots \\ \cdots & x_{i,k} & x_{i-1,d_{i-1}} & x_{i+1,1} & \cdots \end{pmatrix}$$

Dette gir følgende bilde:



Etter flipping vil vi dermed få følgende nye førsteordens deformasjoner:

$$\begin{aligned} x_{i,k-1}x_{i-1,d_{i-1}} - tx_{i,k}x_{i-1,d_{i-1}-1} \\ x_{i-1,d_{i-1}-1}x_{i+1,1} - tx_{i-1,d_{i-1}}x_{i+1,0} \end{aligned}$$

Dette betyr at vi må ha $\text{lk}\{[x_{i,k}x_{i-1,d_{i-1}-1}]\} = \{x_{i,k-1}x_{i-1,d_{i-1}}\}$ og $\text{lk}\{[x_{i-1,d_{i-1}}x_{i+1,0}]\} = \{x_{i-1,d_{i-1}-1}x_{i+1,1}\}$. Sistnevnte er *ikke* tilfredsstillt når $\dim Y \geq 4$ og det følger at denne typen flip ikke er mulig når $S \subset T$ og T er en triangulering av B^n der $n \geq 4$.

3.3.1 Løfting av relasjoner for $\dim \mathcal{Y} = 3$

Vi skal vise at relasjonene løftes når vi foretar en lovlig venstreflipp i båndet b_{XY} . Dette vises tilsvarende for de to andre båndene og for høyreflipper. En slik flipp vil gi både et nytt element i I_{Y_0} og en ny kubikk i $I_{X_0} - I_{Y_0}$.

Lemma 3.3.1. *Anta at kanten $x_i y_j$ kan venstreflippes. Da finnes en og bare en k slik at $x_i y_j z_k$ er en kubikk.*

Bevis. Siden $x_i y_j$ er i flippbar posisjon har vi

$$\begin{pmatrix} \cdots & x_{i-1} & y_j & \cdots \\ \cdots & x_i & y_{j+1} & \cdots \end{pmatrix}.$$

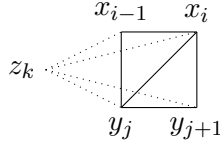
Anta at $x_i y_j z_k$ er kubikk og at det også finnes en $m \leq z_{d_z}$ slik at $x_i y_j z_{k+m}$ er kubikk og $x_i y_j z_{k+m+1}$ ikke er kubikk. Da er også $x_i y_j z_{k+l}$ kubikker for $1 \leq l \leq m - 1$. Dette betyr at også $y_j z_{k+m}$ er i flippbar posisjon og vi må ha

$$\begin{pmatrix} \cdots & z_{k+m-1} & y_j & \cdots \\ \cdots & z_{k+m} & y_{j+1} & \cdots \end{pmatrix}$$

som er umulig siden $x_i y_j$ er i flippbar posisjon. Dette vises tilsvarende for $k - m$. \square

Proposisjon 3.3.2. *Hvis $\dim \mathcal{Y} = 3$ og Y_0 er på generell form vil deformasjonen $\mathcal{X}' \rightarrow k[t]$ være flat.*

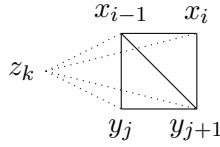
Bevis. Vi har tidligere sett skruer på generell form alltid er kompatible med fiberdiagrammet når $\dim \mathcal{Y} = 3$, så det gjenstår å sjekke at de nye relasjonene løftes. Anta at $x_i y_j$ er i venstreflippbar posisjon. Ved Lemma 3.3.1 finnes eksakt en k slik at $x_i y_j z_k$ er flippbar, og vi har følgende bilde:



og ser at også $x_{i-1} y_j z_k$ og $x_i y_{j+1} z_k$ må være kubikker. Etter flipping får vi

$$\begin{pmatrix} \cdots & y_j & x_{i-1} & \cdots \\ \cdots & y_{j+1} & x_i & \cdots \end{pmatrix},$$

som gir bildet



der $x_{i-1} y_{j+1} z_k$ nå er ny kubikk, mens $x_{i-1} y_j z_k$ og $x_i y_{j+1} z_k$ fortsatt er kubikker. Vi sjekker først at relasjoner mellom $x_i y_j$ og elementer i $I_{X_0} - I_{Y_0}$ løftes.

Relasjoner av typen $y_l z_k (y_j x_i) - y_j (x_i y_l z_k) = 0$ der $l \geq j + 1$

Hvis $l > j + 1$ får vi

$$\begin{aligned} y_l z_k (y_j x_i - t y_{j+1} x_{i-1}) - y_j (x_i y_l z_k) + t y_{j+1} z_k (x_{i-1} y_l - t^m x_i y_{l-1}) \\ + t^{m+1} y_{k-1} (x_i y_{j+1} z_k) = 0 \end{aligned}$$

der vi har brukt at $x_i y_{j+1} z_0 \in I_{X_0}$. Hvis $l = j + 1$ får vi

$$y_{j+1} z_k (y_j x_i - t y_{j+1} x_{i-1}) - y_j (x_i y_{j+1} z_k) + t y_{j+1} (x_{i-1} y_{j+1} z_k) = 0.$$

Relasjoner av typen $x_l z_k (y_j x_i) - x_i (x_l y_j z_k) = 0$ der $l \leq i - 1$

Hvis $l < i - 1$ får vi

$$x_l z_k (y_j x_i - t y_{j+1} x_{i-1}) - x_i (x_l y_j z_k) + t x_{i-1} z_k (x_l y_{j+1} - t^m x_{l+1} y_j) + t^{m+1} x_{l+1} (x_{i-1} y_j z_k) = 0$$

der vi har brukt at $x_{i-1} y_j z_k \in I_{X_0}$. Hvis $l = i - 1$ får vi

$$x_{i-1} z_k (y_j x_i - t y_{j+1} x_{i-1}) - x_i (x_{i-1} y_j z_k) + t x_{i-1} (x_{i-1} y_{j+1} z_k) = 0.$$

Vi skal nå sjekke at relasjoner mellom $x_{i-1} y_{j+1} z_k$ og elementer i I_{Y_0} løftes.

Relasjoner av typen $x_p (x_{i-1} y_{j+1} z_k) - y_{j+1} z_k (x_{i-1} x_p) = 0$

Hvis x_p står til høyre for x_{i-1} i matrisen får vi

$$x_p (x_{i-1} y_{j+1} z_k) - y_{j+1} z_k (x_{i-1} x_p - t^m x_i x_{p-1}) + t^m x_{p-1} (x_i y_j + 1 z_k) = 0.$$

Hvis x_p står til venstre for x_{i-1} i matrisen får vi

$$x_p (x_{i-1} y_{j+1} z_k) - y_{j+1} z_k (x_{i-1} x_p - t^m x_{i-2} x_{p+1}) - t^m x_{p+1} z_k (x_{i-2} y_{j+1} - t x_{i-1} y_j) + t^{m+1} x_{p+1} (x_{i-1} y_j z_k) = 0.$$

Relasjoner av typen $x_p (x_{i-1} y_{j+1} z_k) - x_{i-1} z_k (y_{j+1} x_p) = 0$

Hvis x_p står til høyre for y_{j+1} i matrisen får vi

$$x_p (x_{i-1} y_{j+1} z_k) - x_{i-1} z_k (y_{j+1} x_p - t^m y_{j+2} x_{p-1}) + t^m x_{p-1} z_k (x_{i-1} y_{j+2} - t^n x_i y_{j+1}) - t^{m+n} x_p (x_i y_{j+1} z_k) = 0.$$

Hvis x_p står til venstre for y_{j+1} i matrisen får vi

$$x_p (x_{i-1} y_{j+1} z_k) - x_{i-1} z_k (y_{j+1} x_p - t^m x_{p+1} y_j) + t^m x_{p+1} (x_{i-1} y_j z_k) = 0.$$

Relasjoner av typen $x_p (x_{i-1} y_{j+1} z_k) - x_{i-1} y_{j+1} (z_k x_p) = 0$

Siden både $y_j z_k$ og $x_i z_k$ er kanter må vi ha

$$\begin{pmatrix} \cdots & z_{k-1} & \cdots & y_j & x_{i-1} & \cdots & z_k & \cdots \\ \cdots & z_k & \cdots & y_{j+1} & x_i & \cdots & z_{k+1} & \cdots \end{pmatrix},$$

og kan bruke dette når vi skal løfte relasjonene. Hvis x_p står til høyre for z_k i matrisen får vi

$$\begin{aligned} x_p(x_{i-1}y_{j+1}z_k) - x_{i-1}y_{j+1}(z_kx_p - t^m z_{k+1}x_{p-1}) \\ - t^m y_{j+1}x_{p-1}(x_{i-1}z_{k+1} - t^n x_i z_k) - t^{m+n} x_{p-1}(x_i y_{j+1} z_k) = 0, \end{aligned}$$

der vi har brukt at z_{k+1} må stå til høyre for x_{i-1} i matrisen siden $x_{i-1}z_{k+1}$ ikke er kant ved Lemma 3.3.1. Hvis x_p står til venstre for z_k i matrisen får vi

$$\begin{aligned} x_p(x_{i-1}y_{j+1}z_k) - x_{i-1}y_{j+1}(z_kx_p - t^m z_{k-1}x_{p+1}) \\ - t^m x_{i-1}x_{p+1}(z_{k-1}y_{j+1} - t^n z_k y_j) - t^{n+m} x_{p+1}(x_{i-1}y_j z_k) = 0. \end{aligned}$$

Dette viser at alle nye relasjoner løftes og deformasjonen er flat. \square

3.3.2 Løfting av relasjoner for $\dim \mathcal{Y} \geq 4$

Vi har nå byttet ut monomet $x_{i,k-1}x_{i+1,l+1} \in I_{Y_0}$ med $x_{i,k}x_{i+1,l}$. Dette betyr at vi får $x_{i,k-1}x_{i+1,l+1} - s x_{i,k}x_{i+1,l} \in I_{\mathcal{Y}}$, og må sjekke at relasjoner mellom det nye monomet i I_{Y_0} og monomer i $I_{X_0} - I_{Y_0}$ vil løftes. Vi får generelt to slike relasjoner:

1. $x_p(x_{i,k-1}x_{i+1,l+1}) - x_{i,k-1}(x_p x_{i+1,l+1}) = 0$ og
2. $x_p(x_{i,k-1}x_{i+1,l+1}) - x_{i+1,l+1}(x_p x_{i,k-1}) = 0$,

der $x_p x_{i+1,l+1}$ og $x_p x_{i,k-1}$ svarer til kanter vi har fjernet. Fjerner vi $x_p x_{i+1,l+1}$ har vi to muligheter:

1. $x_p = x_{j,d_j}$ der $j < i$ og
2. $x_p = x_{j,0}$ der $j > i + 2$.

I det første tilfellet perturberer vi med $-tx_{j,d_j}x_{i,k}x_{i+1,l}$ der vi også har fjernet $x_{j,d_j}x_{i+1,l}$. I det andre tilfellet perturberer vi med $-tx_{j,0}x_{i,k}x_{i+1,l}$ der $x_{j,0}x_{i+1,l}$ er fjernet når $l > 0$. Men som vi så av de mulige tilfellene kan vi aldri ha $k = 0$ og $l = 1$, så hvis $l = 1$ vet vi at $x_{j,0}x_{i,k}$ er fjernet.

Fjerner vi $x_p x_{i,k-1}$ har vi også to muligheter:

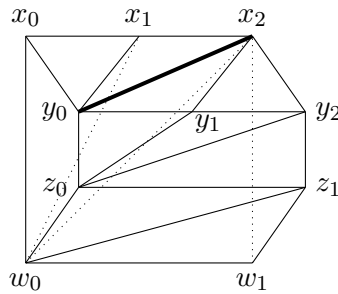
1. $x_p = x_{j,d_j}$ der $j < i - 1$ og
2. $x_p = x_{j,0}$ der $j > i + 1$.

I det første tilfellet perturberer vi med $-tx_{j,d_j}x_{i,k}x_{i+1,l}$ der vi har fjernet $x_{i,k}x_{j,d_j}$ for $k < d_i$. Hvis $k = d_i$ må vi ha $l < d_{i+1}$ slik at $x_{j,d_j}x_{i+1,l}$ er fjernet. I det andre tilfellet perturberer vi med $-tx_{j,0}x_{i,k}x_{i+1,l}$ der vi har fjernet $x_{i,k}x_{j,0}$.

Eksempel 3.3.1. La Y være av skruetype $(3, 3, 2, 2)$. Da er I_Y gitt ved 2×2 -minorene til matrisen

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & y_0 & y_1 & z_0 & w_0 \\ x_1 & x_2 & y_1 & y_2 & z_1 & w_1 \end{pmatrix}$$

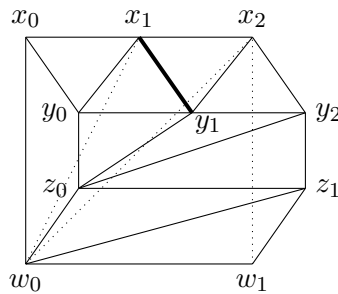
og S må være på formen



der topp og bunn kan trianguleres fritt. Med resultatene gitt ovenfor er det kun en flipp som er lovlig i dette tilfellet og vi får

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & x_1 & y_1 & z_0 & w_0 \\ x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & z_1 & w_1 \end{pmatrix}$$

som gir en X'_0 på formen



Vi ser at topp og bunn kan trianguleres på 2 måter hver som gir tilsammen 4 trianguleringer. Dette gir tilsammen 8 kandidater som kan deformeres til $K3$ -flater X i skruen Y av typen $(2, 2, 1, 1)$.

Kapittel 4

Glattbare sfærer

Gitt en flat deformasjon $\mathcal{X}' \rightarrow k[t]$ som beskrevet i forrige kapittel skal vi nå se hva som skal til for at \mathcal{X}' kan glattes til en $K3$ -flate $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$, der $\mathcal{Y}_1 = Y$ er en skrue. Vi skal først gi en beskrivelse av hvordan idealet til en slik $K3$ -flate vil være gitt av divisorer som kan uttrykkes ved polynomer på rullende faktor format som beskrevet i [14]. Deretter viser vi at idealet til $I_{\mathcal{X}'}$ også vil være på rullende faktor format, slik at en såkalt rullende faktor deformasjon vil gi oss \mathcal{X} .

Med dette i havn skal vi se hvilke kriterier som må være tilfredsstillt for at en $K3$ -flate $X \subset Y$ skal være glatt. Dermed vil vi få klare betingelser for når Stanley-Reisner skjemaene X_0 er glattbare, gitt forutsetningene vi har foretatt.

Vi begynner med en repetisjon av resolusjonene til $K3$ -flatene $X \subset Y$.

4.1 Resolusjon av \mathcal{O}_X som \mathcal{O}_Y -modul

La $X \subset Y$ der X er en $K3$ -flate inneholdt i en skrue av typen $S(d_1, \dots, d_r)$. Da vil \mathcal{O}_X ha en resolusjon som \mathcal{O}_Y -modul som beskrevet i det følgende.

Når $\dim Y = 3$ har vi resolusjonen:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-3H + (g-4)R) \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

Dette betyr at en $K3$ -flate X i en skrue av dimensjon 3 vil ligge som en divisor i det lineære systemet $|3H - (g - 4)R|$.

Når $\dim Y \geq 4$ har vi følgende resolusjon:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-(c+2)H + (g-c-3)R) &\longrightarrow \bigoplus_{k=1}^{\beta_{c-1}} \mathcal{O}_Y(-cH + b_{c-1}^k R) \\ &\longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^{\beta_1} \mathcal{O}_Y(-2H + b_1^k R) \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

der $\beta_i = i \binom{c+1}{i+1} - \binom{c}{i-1}$ og $c = \dim Y - 2$.

Hvis $\dim Y = 4$ har vi $\beta_1 = \binom{3}{2} - \binom{2}{0} = 2$, slik at $K3$ -flaten X vil ligge som et komplett snitt av divisorer i det lineære systemet $|2H - b_1^k R|$. I tilfellene der $\dim Y > 4$ har vi $\beta_1 = \binom{c+1}{2} - 1$ med $c \geq 3$, og det følger at $\beta_1 \geq \dim Y - \dim X = c$ slik at X ikke er et komplett snitt i Y [9, s. 60].

4.2 Idealet I_X

Ved hjelp av rullende faktorer kan vi nå gi en eksplisitt beskrivelse av idealet til en $K3$ -flate X der vi bruker resultater fra [14] beskrevet i Seksjon 1.2.

4.2.1 $\dim Y = 3$

Fra resolusjonen ser vi at X er et komplett snitt i Y skåret ut av en divisor fra klassen $|3H - (g - 4)R|$ når $\dim Y = 3$. Idealet til $Y \subset \mathbb{P}^g$ vil være gitt ved 2×2 -minorene til matrisen

$$\begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_{d_x-1} & y_0 & \cdots & y_{d_y-1} & z_0 & \cdots & z_{d_z-1} \\ x_1 & \cdots & x_{d_x} & y_1 & \cdots & y_{d_y} & z_1 & \cdots & z_{d_z} \end{pmatrix}.$$

Fra Lemma 1.2.1 får vi følgende bihomogene koordinater:

$$\begin{aligned} x_0 &= s^{d_x} w_1, & x_1 &= s^{d_x-1} t w_1, & \cdots, & & x_{d_x} &= t^{d_x}, \\ y_0 &= s^{d_y} w_2, & y_1 &= s^{d_y-1} t w_2, & \cdots, & & y_{d_y} &= t^{d_y}, \\ z_0 &= s^{d_z} w_3, & z_1 &= s^{d_z-1} t w_3, & \cdots, & & z_{d_z} &= t^{d_z}. \end{aligned}$$

Divisorer i $|3H - (g - 4)R|$ vil dermed være gitt ved et bihomogent polynom P på formen

$$P(s, t, w_1, w_2, w_3) = Q(s, t)_{i_1, i_2, i_3} w_1^{i_1} w_2^{i_2} w_3^{i_3}$$

der $Q(s, t)$ er et homogent polynom av grad $-(g-4) + (i_1e_1 + i_2e_2 + i_3e_3)$. Bruker vi koordinattransformasjonene gitt ovenfor vil vi få $g-3$ polynomer P_1, \dots, P_{g-3} slik at idealet I_X til $K3$ -flaten vil være

$$I_X = I_Y + (P_1, \dots, P_{g-3}).$$

4.2.2 $\dim Y \geq 4$

For skruer med dimensjon ≥ 4 ser vi fra resolusjonen at divisorene som snitter ut X er fra det lineære systemet

$$|2H - b_1^k R|,$$

som vil være beskrevet av en bihomogen ligning i bihomogene koordinater. Idealet til $Y \subset \mathbb{P}^g$ vil være gitt ved 2×2 -minorene til matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} x_{1,0} & \cdots & x_{1,d_1-1} & x_{2,0} & \cdots & \cdots & x_{r,0} & \cdots & x_{r,d_r-1} \\ x_{1,1} & \cdots & x_{1,d_1} & x_{2,1} & \cdots & \cdots & x_{r,1} & \cdots & x_{r,d_r} \end{array} \right),$$

så vi får følgende koordinattransformasjoner:

$$\begin{aligned} x_{1,0} &= s^{d_1} w_1, x_{1,1} = s^{d_1-1} t w_1, \dots, x_{1,d_1} = t^{d_1}, \\ &\vdots \\ x_{r,0} &= s^{d_r} w_r, x_{r,1} = s^{d_r-1} t w_r, \dots, x_{r,d_r} = t^{d_r}. \end{aligned}$$

Vi vet da at en divisor fra det lineære systemet gitt ovenfor vil være gitt ved et bihomogent polynom på formen

$$P(s, t, w_1, \dots, w_r) = \sum Q(s, t)_{i_1, \dots, i_r} w_1^{i_1} \cdots w_r^{i_r}$$

der $Q(s, t)$ er et homogent polynom i s og t av grad $-b_1^k + (i_1 d_1 + \dots + i_r d_r)$. I koordinatene til \mathbb{P}^g , via koordinattransformasjonene, vil dette gi oss $b_1^k + 1$ polynomer der $P_m = s^{b_1^k - m} t^m P$.

Eksempel 4.2.1. La Y være en skrue av typen $S(2, 1, 1, 1)$ slik at I_Y er gitt ved 2×2 -minorene til matrisen

$$\left(\begin{array}{ccccc} x_0 & x_1 & y_0 & z_0 & w_0 \\ x_1 & x_2 & y_1 & z_1 & w_1 \end{array} \right).$$

En divisor fra det lineære systemet $|2H - 2R|$ vil være gitt av det bihomogene polynomet

$$\begin{aligned} P(s, t, w_1, w_2, w_3, w_4) &= Q_{i_1^2} w_1^2 + Q_{i_1, i_2} w_1 w_2 + Q_{i_1, i_3} w_1 w_3 + Q_{i_1, i_4} w_1 w_4 \\ &\quad + Q_{i_2^2} w_2^2 + Q_{i_2, i_3} w_2 w_3 + Q_{i_2, i_4} w_2 w_4 + Q_{i_3^2} w_3^2 \\ &\quad + Q_{i_3 i_4} w_3 w_4 + Q_{i_4^2} w_4^2, \end{aligned}$$

der $Q_{i_j^2} = c_i s^2 + c_j s t + c_k t^2$, $Q_{i_1 i_j} = c_i s + c_j t$ for $j = 2, 3, 4$, og $Q_{i_j i_k} = c_{j,k}$ for $j, k = 2, 3, 4$. Siden $b_1^k = 2$ får vi 3 homogene polynomer

$$\begin{aligned} P_0 &= s^2 P = c_1 x_0^2 + c_2 x_0 x_1 + c_3 x_1^2 + c_4 x_0 y_0 + c_5 x_0 y_1 + c_6 x_0 z_0 + c_7 x_0 z_1 \\ &\quad + c_8 x_0 w_0 + c_9 x_0 w_1 + c_{10} y_0^2 + c_{11} y_0 z_0 + c_{12} y_0 w_0 + c_{13} z_0^2 \\ &\quad + c_{14} z_0 w_0 + c_{15} w_0^2, \\ P_1 &= s t P = c_1 x_0 x_1 + c_2 x_1^2 + c_3 x_1 x_2 + c_4 x_1 y_0 + c_5 x_1 y_1 + c_6 x_1 z_0 + c_7 x_1 z_1 \\ &\quad + c_8 x_1 w_0 + c_9 x_1 w_1 + c_{10} y_0 y_1 + c_{11} y_0 z_1 + c_{12} y_0 w_1 + c_{13} z_0 z_1 \\ &\quad + c_{14} z_0 w_1 + c_{15} w_0 w_1, \\ P_2 &= t^2 P = c_1 x_1^2 + c_2 x_1 x_2 + c_3 x_2^2 + c_4 x_2 y_0 + c_5 x_2 y_1 + c_6 x_2 z_0 + c_7 x_2 z_1 \\ &\quad + c_8 x_2 w_0 + c_9 x_2 w_1 + c_{10} y_1^2 + c_{11} y_1 z_1 + c_{12} y_1 w_1 + c_{13} z_1^2 \\ &\quad + c_{14} z_1 w_1 + c_{15} w_1^2. \end{aligned}$$

Idealet til X vil dermed være gitt ved

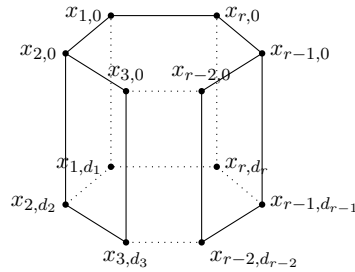
$$I_X = I_Y + (P_0, P_1, P_2, P'_0, P'_1, P'_2)$$

der P_i har koeffisienter $\{c_1, \dots, c_{15}\}$ og P'_i har koeffisienter $\{c'_1, \dots, c'_{15}\}$.

4.3 Glattbare sfærer

Definisjon 4.3.1. En triangulert sfære $X_0 \subset Y_0$ slik at deformasjonen $\mathcal{X}' \rightarrow k[t]$ av X_0 gitt ved \star er flat kaller vi en *syndersfære*.

En slik sfære vil være på følgende form:



Her er alle båndene $b_{X_i X_{i+1}}$ for $1 \leq i \leq r-1$ og $b_{X_r X_1}$ triangulert på standardform eller på en generell form som er slik at deformasjonen fortsatt er flat. Vi har r slike bånd, slik at toppen og bunnen av sylindren vil være en r -kant. Fra Lemma 3.2.6 vet vi at toppen og bunnen kan trianguleres fritt.

4.3.1 Rullende faktor deformasjoner

I [14] beskrives såkalte rullende faktor deformasjoner som vi skal bruke når vi deformerer \mathcal{X}' . Vi tar også med et resultat som forteller at disse deformasjonene er uobstruerte når vi har komplette snitt av divisorer i skruen.

Definisjon 4.3.2. En deformasjon der skruen ikke forandres, men kun de resterende ligningene kalles en *ren rullende faktor deformasjon*.

Proposisjon 4.3.1. [14, s. 196] *Rent rullende faktor deformasjoner er uobstruerte for komplette snitt.*

Ettersom vi kun har komplette snitt når $\dim Y = 3$ og 4 , er det bare i disse tilfellene vi kan garantere at vi kan finne en deformasjon av \mathcal{X}' til \mathcal{X} . Vi skal nå se nærmere på disse to situasjonene.

4.3.2 Skruer av dimensjon 3

La $X_0 \subset Y_0$ der $\dim Y_0 = 3$ og X_0 en sylinderkule. Da vet vi at denne fremkommer ved å fjerne kubikker fra Y_0 .

Lemma 4.3.2. *Hvis $X_0 \subset Y_0$ der $Y \subset \mathbb{P}^g$ vil $I_{X_0} - I_{Y_0}$ bestå av $g-3$ kubikker på rullende faktor format.*

Bevis. La de tre strengene til X_0 være b_X , b_Y og b_Z med henholdsvis d_X , d_Y og d_Z hjørner. Vi har da $g-2 = h-1 = d_X + d_Y + d_Z$. Vi antar for enkelthets skyld at X_0 er på standardform ettersom alle andre trianguleringer av X_0 fremkommer som flippinger av denne. Siden vi ikke kan fjerne ytterkantene $x_0y_0z_0$ og $x_{d_x}y_{d_y}z_{d_z}$ står vi igjen med

$$\begin{aligned} & x_{d_x}y_{d_y}z_{d_z-1}, \\ & x_{d_x}y_{d_y}z_{d_z-2}, \\ & \vdots \\ & x_{d_x}y_{d_y}z_0, \\ & x_{d_x}y_{d_y-1}z_0, \\ & \vdots \\ & x_{d_x}y_0z_0, \\ & x_{d_x-1}y_0z_0, \\ & \vdots \\ & x_1y_0z_0. \end{aligned}$$

Vi har altså $d_z + d_y + d_x - 1 = g - 3$ kubikker i $I_{X_0} - I_{Y_0}$.

Videre ser vi at disse kubikkene alle fremkommer fra det bihomogene polynom

$$P' = Q(s, t)w_1w_2w_3$$

der $Q(s, t)$ har grad $-(g-4) + d_x + d_y + d_z = 2$ slik at $Q(s, t) = s^2 + st + t^2$. Lar vi $P'' = stw_1w_2w_3$ får vi

$$\begin{aligned} P_0 &= s^{g-4}P'' = s^{d_x-1}tw_1s^{d_y}w_2s^{d_z}w_3 = x_1y_0z_0, \\ P_1 &= s^{g-5}tP'' = s^{d_x-2}t^2w_1s^{d_y}w_2s^{d_z}w_3 = x_2y_0z_0, \\ & \vdots \\ P_{g-4} &= t^{g-4}P'' = t^{d_x}w_1t^{d_y}w_2st^{d_z-1}w_3 = x_{d_x}y_{d_y}z_{d_z-1}. \end{aligned}$$

Vi observerer også at en lovlig venstre- eller høyreflipp vil bevare det rullende faktor formatet. Anta at vi har foretatt et endelig antall lovlige flipper slik at vi har bevart det rullende faktor formatet, og at x_iy_j er i flippbar posisjon mot venstre. Fra Lemma 3.3.1 vet vi at det finnes eksakt en k slik at $x_iy_jz_k$

er kubikk, og vi har da i utgangspunktet en av fire følgende rullinger:

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_{i-1}y_jz_k & x_{i-1}y_jz_k & x_iy_{j-1}z_k & x_iy_{j-1}z_k \\ x_iy_jz_k & x_iy_jz_k & x_iy_jz_k & x_iy_jz_k \\ x_{i+1}y_jz_k & x_iy_{j+1}z_k & x_{i+1}y_jz_k & x_iy_{j+1}z_k \end{array}$$

Vi må vise at dette formatet bevares etter vi har flippet. Da blir $x_{i-1}y_{j+1}z_k$ ny kubikk, og det er klart at dette vil bevare formatet i alle de fire mulige tilfellene gitt ovenfor. \square

Vi skal nå se hva kriteriet er for at en slik flate kan glattes til en $K3$ -flate.

Proposisjon 4.3.3. *La X_0 være en triangulert sylinderfære. Vi har dermed $X_0 \subset Y_0$ der Y_0 deformerer til en skrue Y av typen $S(d_1, d_2, d_3)$. Da kan X_0 glattes til en $K3$ -flate hvis og bare hvis enten*

1. $g - 4 \leq 3d_3$ eller
2. $g - 4 \leq 3d_2$ og $g - 4 = d_2 + 2d_3$.

Bevis. Fra [9, s. 103] følger det at en $K3$ -flate $X \subset Y$ er glatt hvis de numeriske betingelsene beskrevet i teoremet er tilfredsstillt. Vi vet at deformasjonen $\mathcal{X}' \rightarrow k[t]$ er flat når X_0 er en sylinderfære, så det gjenstår å sjekke at \mathcal{X}' deformerer til en $K3$ -flate $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$. Vi vet fra Lemma 4.3.2 at $I_{\mathcal{X}'}$ har $g - 3$ kubiske monomer på rullende faktor format, og får derfor en ren rullende faktor deformasjon av \mathcal{X}' . Siden \mathcal{X}' er et komplett snitt i \mathcal{Y} når skruen har dimensjon 3 er denne deformasjonen uobstruert ved Proposisjon 4.3.1. \square

Korollar 4.3.4. *En triangulering X_0 av sfæren som kan glattes til en $K3$ -flate i en skrue av dimensjon 3 vil alltid ha nøyaktig to hjørner med valens 3.*

Bevis. Det er nok å observere at en triangulering av B^3 som er av skruetype vil ha den samme egenskapen ettersom X_0 vil fremkomme ved å fjerne kubikker, slik at vi ikke endrer noe på valensen til hjørnene. Ethvert hjørne vil ha minst en kant mot de to andre strengene, og de indre hjørnene vil ha to kanter mot hjørner på samme streng. Vi ser altså at alle indre hjørner har valens ≥ 4 . På endestykkene vil hjørnene kun ha en kant mot samme streng, samt to mot de to andre strengene. Dette betyr at x_0, y_0 og z_0 (henholdsvis x_{d_x}, y_{d_y} og z_{d_z}) har valens minst 3. Men ettersom vi kun har en kubikk

mot endestykket som vil ha enten x_0y_0 , x_0z_0 eller y_0z_0 som kant følger det at akkurat ett av hjørnene på endestykket har valens 3. \square

4.3.3 Skruer av dimensjon ≥ 4

Gitt en triangulering Y_0 av skruetype må vi fjerne båndene av typen $b_{X_iX_j}$ (der $j \neq \pm i$) for å få en sylinderfære X_0 . Vi skal nå se at antallet divisorer svarer til antall bånd vi må fjerne fra Y_0 .

Lemma 4.3.5. *Gitt en skrue Y med $\dim Y = r$, vil antall divisorer β_1 gitt i resolusjonen være lik antall indre kanter i en komplett graf med r hjørner.*

Bevis.

$$\#b_{X_iX_j} = \binom{r}{2} - r = \frac{r(r-1)}{2} - r = \frac{r^2 - r - 2r}{2} = \frac{r^2 - 3r}{2} = \beta_1$$

\square

Lemma 4.3.6. *I resolusjonen svarer en divisor fra det lineære systemet $|2H - b_1^k R|$ til ett bånd $b_{X_iX_j}$ med $j \neq i \pm 1$ i Y_0 , der $b_1^k =$ antall fjernede kanter i båndet $b_{X_iX_j} - 1$.*

Bevis. Gitt et slikt bånd $b_{X_iX_j}$ skal vi som tidligere beskrevet fjerne de indre kantene, og eventuelt kantene på toppen og bunnen av sylinderen. Vi må sjekke at de fjernede kantene fra ett bånd svarer til ett ledd i $P(s, t, w_i)$. Fjerner vi både de indre kantene i båndet $b_{X_iX_j}$ og kantene på topp og bunn, vil monomene komme fra leddet

$$P' = Q(s, t)w_iw_j$$

der $Q(s, t)$ har grad $-b_{ij} + d_i + d_j = 0$ og $b_{ij} = b_1^k$. Ved koordinattransformasjonen får vi da

$$\begin{aligned} P_0 &= s^{b_{ij}} w_i w_j = s^{d_i} w_i s^{d_j} w_j = x_{i,0} x_{j,0}, \\ P_1 &= s^{b_{ij}-1} t w_i w_j = s^{d_i-1} t w_i s^{d_j} w_j = x_{i,1} x_{j,0}, \\ &\vdots \\ P_{b_{ij}} &= t^{b_{ij}} w_i w_j = t^{d_i} w_i s^{d_j} w_j = x_{i,d_i} x_{j,d_j}, \end{aligned}$$

som er de fjernede kantene i $b_{X_iX_j}$. Dette viser at vi må ha $b_{ij} = d_i + d_j$ hvis dette skal fungere. I dette tilfellet viste vi hvordan dette fungerer når

vi fjerner kantene på toppen av bunnen av sylindere, men dette vil rulle ut tilsvarende hvis vi bare fjerner en av dem eller ingen. Da får vi henholdsvis

$$b_{ij} = d_i + d_j - 1 \text{ eller}$$

$$b_{ij} = d_i + d_j - 2.$$

□

Proposisjon 4.3.7. *La $r = \dim Y$, og Y av typen $S(d_1, \dots, d_r)$. Da er summen av b_1^k 'ene gitt ved*

$$\sum_{i=1}^{\beta_1} b_1^k = (r-3) \sum_{i=1}^r d_i - 2r + 6.$$

Bevis. For hvert bånd $b_{X_i X_j}$ har vi $b_1^k = b_{ij} =$ antall fjernede kanter i $b_{X_i X_j} - 1$. Summerer vi disse får vi

$$\sum_{i=1}^{\beta_1} b_1^k = \text{antall fjernede kanter fra } T - \text{antall bånd } b_{X_i X_j}.$$

Fra Lemma 3.1.1 og Lemma 3.1.2 får vi at antall fjernede kanter fra T er gitt ved

$$\binom{r}{2} + r(h-r) - 3h + 6$$

der antall hjørner $h = \sum_{i=1}^r d_i + r$. Lemma 4.3.5 gir oss at antall bånd $b_{X_i X_j}$ er $\binom{r}{2} - r$, og dermed vil en enkel utregning gi oss resultatet. □

Vi skal nå se på deformasjonen $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$, det vil si en deformasjon der vi lar skrueligningene stå urørt, mens vi nå kun perturberer de resterende monomene som svarer til kantene vi har fjernet. Dette gir en ren rullende faktor deformasjon. Fra Proposisjon 4.3.1 vet vi at en slik deformasjon er uobstruert når \mathcal{X}' er et komplett snitt i Y . Vi observerer at X_0 kun er et komplett snitt i Y_0 når $\dim Y_0 = 4$, og kan med dette gi klare betingelser for når slike trianguleringer gattes til $K3$ -flater $X \subset Y$.

Proposisjon 4.3.8. *La X_0 være en sylinderfære med 4 bånd slik at vi har en triangulert firkant på topp og bunn. Da kan X_0 gattes til en $K3$ -flate $X \subset Y$ der Y er en skrue av typen $S(d_x, d_y, d_z, d_w)$ med $\dim Y = 4$ hvis og bare hvis enten*

1. $b_1^1 \leq d_3 + d_4$ eller
2. $b_1^1 = b_1^2 + 2, d_1 = d_2 = d_3 + 1 = d_4 + 1$ eller
3. $b_1^1 = b_1^2 + 4, d_1 = d_2 + 4 = d_3 + 6 = d_4 + 8$

der b_1^1 og b_1^2 avhengig av trianguleringen på topp og bunn er gitt ved en av de tre mulighetene

1. $b_1^1 = d_x + d_z - 2$ og $b_1^2 = d_y + d_w$
2. $b_1^1 = d_x + d_z - 1$ og $b_1^2 = d_y + d_w - 1$
3. $b_1^1 = d_x + d_z$ og $b_1^2 = d_y + d_w - 2$.

Bevis. Vi har tidligere vist at X_0 kan deformeres til $\mathcal{X}' \subset \mathcal{Y}$ hvis den er en sylinderfære og gitt at den er en mulig flipping av standardskruen som fortsatt gir en flat deformasjon. Dermed kan vi deformere \mathcal{X}' til \mathcal{X} ved en ren rullende faktor deformasjon som vil være uobstruert ved Proposisjon 4.3.1.

De to første numeriske betingelsene kommer fra [4, Teorem 5.3]. \square

Eksempel 4.3.1. La $Y \subset \mathbb{P}^8$ være av typen $S(2, 1, 1, 1)$ gitt ved 2×2 -minorene til matrisen

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & y_0 & z_0 & w_0 \\ x_1 & x_2 & y_1 & z_1 & z_2 \end{pmatrix}.$$

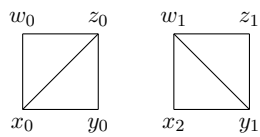
Da må vi fjerne to bånd b_{XZ} med 2 indre kanter og b_{YW} med 1 indre kant. Dette betyr at vi trenger 2 divisorer fra det lineære systemet $|2H - b_1^k R|$ der b_1^1 gir divisoren som svarer til b_{XZ} og b_1^2 divisoren som svarer til b_{YW} .

Vi ser at $b_1^1 = 1, 2, 3$ og $b_1^2 = 0, 1, 2$. Fra Proposisjon 4.3.7 har vi dessuten at $b_1^1 + b_1^2 = 3$, så de mulige alternativene for (b_1^1, b_1^2) er $(2, 1)$ og $(3, 0)$. Ved Proposisjon 4.3.8 er $(2, 1)$ mulig siden $b_1^1 \leq d_3 + d_4$. På den andre siden vil ikke $(3, 0)$ være mulig ettersom

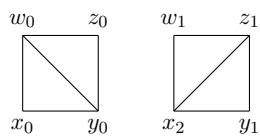
1. $b_1^1 > d_3 + d_4$
2. $b_1^1 \neq b_1^2 + 2$
3. $b_1^1 \neq b_1^2 + 4$.

Dette betyr at vi må triangulere topp og bunn på en av følgende to måter:

Alternativ 1:



Alternativ 2:



Kapittel 5

Eksempler

I artikkelen til Bowen og Fisk [3] blir det vist hvor mange triangulerte sfærer som finnes med n hjørner opp til isomorfi. Der beskrives også en algoritme for hvordan disse trianguleringene kan genereres. Ser vi på Stanley-Reisner skjemaene assosiert til disse sfærene kan vi nå gitt resultatene fra de forrige kapitlene, gi en liste over hvilke av disse som er glattbare når $n \leq 8$. Vi har ikke kunnet gi noen resultater for glattbarhet når skruen har dimensjon ≥ 5 , men det minste eksempelet av denne typen har 10 hjørner, hvilket betyr at vi kan si helt klart hvor mange av trianguleringene som kan glattes på denne måten når $n \leq 8$.

Antall hjørner	Antall trianguleringer
6	2
7	5
8	14
9	50
10	233
11	1249

Tabell 5.1: Liste over antall trianguleringer hentet fra [3]

5.1 Glattbare skruer med 6, 7 og 8 hjørner

Vi skal nå se hvilke Stanley-Reisner skjemaer $\mathbb{P}(S)$ som kan glattes til $K3$ -flater i skruer når S har ≤ 8 hjørner. Det minste eksempelet forekommer

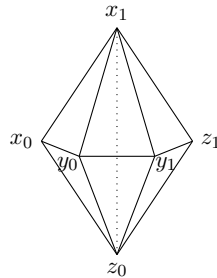
når S har 6 hjørner. Når T er en triangulering av B^3 av skruetype vet vi fra Korollar 4.3.4 at S vil ha nøyaktig 2 hjørner med valens 3, og det viser seg at alle sfærene med 6, 7 og 8 hjørner med denne egenskapen kan glattes til $K3$ -flater. Det minste eksempelet der T er en triangulering av B^4 forekommer når S har 8 hjørner.

5.1.1 Glattbare skruer med 6 hjørner

Når S har 6 hjørner vil $\mathbb{P}(T)$ være en degenerasjon av en skrue av typen $S(1, 1, 1)$, og $K3$ -flaten X vil skjæres ut av en divisor fra det lineære systemet $|3H - R|$. 2×2 -minorene til matrisen

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix},$$

vil da gi idealet til skruen, og dette gir en mulig glattbar sfære:

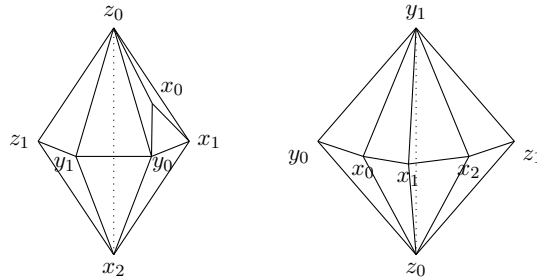


5.1.2 Glattbare skruer med 7 hjørner

Når S har 7 hjørner vil $\mathbb{P}(T)$ være en degenerasjon av en skrue av typen $S(2, 1, 1)$, og $K3$ -flaten X vil være skåret ut av en divisor fra det lineære systemet $|3H - 2R|$. 2×2 -minorene til matrisen

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & y_0 & z_0 \\ x_1 & x_2 & y_1 & z_1 \end{pmatrix},$$

vil da gi idealet til skruen. Vi kan foreta mange søylepermutasjoner av denne matrisen, men disse vil bare gi 2 triangulerte sfærer opp til isomorfi.

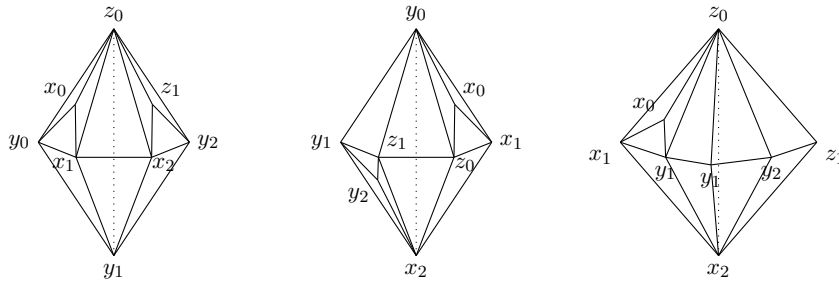


5.1.3 Glattbare skruer med 8 hjørner

Når S har 8 hjørner kan $\mathbb{P}(T)$ være degenerasjonen til skruer av tre mulige skruetyper; $S(2, 2, 1)$, $S(3, 1, 1)$ og $S(1, 1, 1, 1)$. Hvis Y er en skrue av typen $S(2, 2, 1)$ eller $S(3, 1, 1)$ vil $K3$ -flaten være skåret ut av en divisor fra det lineære systemet $|3H - 3R|$. Er Y derimot en skrue av typen $S(1, 1, 1, 1)$ vil $K3$ -flaten X være skåret ut av to divisorer fra det lineære systemet $|2H - b_1^k R|$ der $(b_1^1, b_1^2) = (1, 1)$ eller $(2, 0)$ ved Proposisjon 4.3.8. 2×2 -minorene til matrisen

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & y_0 & y_1 & z_0 \\ x_1 & x_2 & y_1 & y_2 & z_1 \end{pmatrix}$$

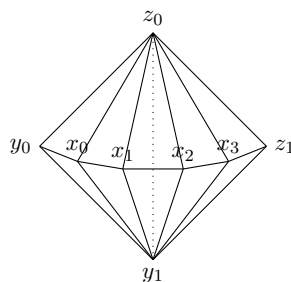
gir idealet til skruen av typen $S(2, 2, 1)$, og ved søylepermutasjoner av denne får vi tre glattbare sfærer:



2×2 -minorene til matrisen

$$\begin{pmatrix} y_0 & x_0 & x_1 & x_2 & z_0 \\ y_1 & x_1 & x_2 & x_3 & z_1 \end{pmatrix}$$

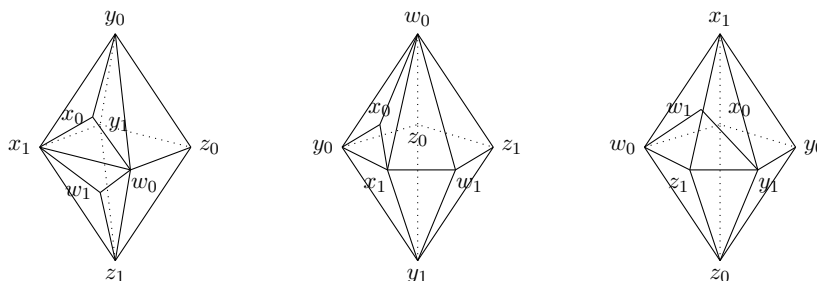
gir idealet til skruen av typen $S(3, 1, 1)$, og denne gir en mulig glattbar sfære:



2×2 -minorene til matrisen

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & w_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \end{pmatrix}$$

gir idealet til skruen av typen $S(1, 1, 1, 1)$. De ulike verdiene av (b_1^2, b_1^2) gir her tre glattbare sfærer:



5.2 Glattbare sfærer i skruer av $\dim Y = 5$

I dette tilfellet kan vi ikke si noe klart om hvilke Stanley-Reisner skjemaer som er glattbare, men vi kan sjekke dette eksplisitt for konkrete eksempler. Når $\dim Y = 5$ er $Y \subset \mathbb{P}^9$ av typen $S(1, 1, 1, 1, 1)$. Da er $I_Y \subset P = k[x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1, w_0, w_1, v_0, v_1]$ gitt ved 2×2 -minorene til matrisen

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & w_0 & v_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & w_1 & v_1 \end{pmatrix}.$$

Vi vet at $\beta_1 = \binom{c+1}{2} - \binom{c}{0} = \binom{4}{2} - 1 = 5$ slik at $K3$ -flaten skjæres ut av 5 divisorer fra det lineære systemet $|2H - b_1^k|$ der $k = 1, \dots, 5$. Vi vet fra

Proposisjon 4.3.7 at $\sum_{i=1}^5 b_i = 6$ og $0 \leq b_i \leq 2$, så dette gir oss følgende muligheter:

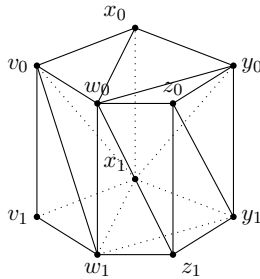
$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = (2, 2, 2, 0, 0),$$

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = (2, 2, 1, 1, 0),$$

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = (2, 1, 1, 1, 1).$$

Siden vi ikke har et komplett snitt i dette tilfellet, er det klart at det må finnes avhengigheter mellom koeffisientene til polynomene som gir de fem divisorene vi skal skjære ut med. Vi har tatt med et eksempel hvor vi får til en glatting av Stanley-Reisner skjemaet. Utregningene er gjort i programmet Macaulay2 [6].

Eksempel 5.2.1. La $S \subset T$ være en triangulert sfære på følgende form:



Her ser vi at $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = (2, 2, 2, 0, 0)$. Vi beregner førsteordens deformasjonene til skjemaet $\mathcal{X}' \subset \mathcal{Y}$ i Macaulay2 og gjør deretter suksessive løftinger som bevarer flatthet og rullende faktor format. Til slutt får vi per-

turbasjonene

$$\begin{aligned}
P_1 &= x_0 z_0 + t_{11} y_0 w_0 + t_{12} y_0^2, \\
P_2 &= x_1 z_0 + t_{11} y_1 w_0 + t_{12} y_0 y_1, \\
P_3 &= x_1 z_1 + t_{11} y_1 w_1 + t_{12} y_1^2, \\
P_4 &= x_1 w_0 + t_1 w_1 v_1 + t_2 v_1^2 + t_3 w_0 v_0 + t_4 v_0^2 + t_5 v_0 v_1 - t_8 t_{12} y_0 z_0 - t_9 t_{12} y_0 z_1 \\
&\quad - t_6 t_{12} y_1 z_1 - t_{10} t_{12} y_0 w_0 - t_8 t_{11} z_0 w_0 - t_{10} t_{11} w_0^2 - t_7 t_{12} y_1 w_1 - t_6 t_{11} z_1 w_1 \\
&\quad - t_7 t_{11} w_1^2 - t_9 t_{11} z_0 w_1, \\
P_5 &= y_1 w_0 + t_6 z_1^2 + t_7 z_1 w_1 + t_8 z_0^2 + t_9 z_0 z_1 + t_{10} z_0 w_0 - t_3 t_{13} w_0^2 - t_1 t_{14} x_1 w_1 \\
&\quad - t_1 t_{13} w_1^2 - t_4 t_{14} x_0 v_0 - t_4 t_{13} w_0 v_0 - t_5 t_{14} x_0 v_1 - t_2 t_{14} x_1 v_1 - t_5 t_{13} w_0 v_1 \\
&\quad - t_2 t_{13} w_1 v_1 - t_3 t_{14} x_0 w_0, \\
P_6 &= y_0 v_0 + t_{13} x_0 w_0 + t_{14} x_0^2, \\
P_7 &= y_1 v_0 + t_{13} x_1 w_0 + t_{14} x_0 x_1, \\
P_8 &= y_1 v_1 + t_{13} x_1 w_1 + t_{14} x_1^2, \\
P_9 &= z_0 v_0 - t_{12} t_{14} x_0 y_0 - t_{11} t_{14} x_0 w_0 - t_{12} t_{13} y_0 w_0 - t_{11} t_{13} w_0^2, \\
P_{10} &= z_1 v_0 - t_{12} t_{14} x_1 y_0 - t_{11} t_{14} x_1 w_0 - t_{12} t_{13} y_1 w_0 - t_{11} t_{13} w_0 w_1, \\
P_{11} &= z_1 v_1 - t_{12} t_{14} x_1 y_1 - t_{11} t_{14} x_1 w_1 - t_{12} t_{13} y_1 w_1 - t_{11} t_{13} w_1^2,
\end{aligned}$$

som gir en flat deformasjon av \mathcal{X}' . Da har vi $I_X = I_Y + (P_1, \dots, P_{11})$, og $X = \text{Proj } P/I_X$ vil være en $K3$ -flate. For å sjekke at denne er glatt ser vi på de 10 affine overdekningene som alle er glatte ved beregninger i Macaulay2.

Referanser

- [1] Klaus Altmann and Jan Arthur Christophersen. Deforming Stanley-Reisner schemes. *Math. Ann.*, 348(3):513–537, 2010.
- [2] Wolf P. Barth, Klaus Hulek, Chris A. M. Peters, and Antonius Van de Ven. *Compact complex surfaces*, volume 4 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004.
- [3] Rufus Bowen and Stephen Fisk. Generations of triangulations of the sphere. *Math. Comp.*, 21:250–252, 1967.
- [4] James N. Brawner. Tetragonal curves, scrolls, and $K3$ surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(8):3075–3091, 1997.
- [5] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.
- [6] Daniel R. Grayson and Michael E. Stillman. Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry. Available at <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>.
- [7] Joe Harris. A bound on the geometric genus of projective varieties. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 8(1):35–68, 1981.
- [8] Robin Hartshorne. *Deformation theory*, volume 257 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2010.
- [9] Trygve Johnsen and Andreas Leopold Knutsen. *$K3$ projective models in scrolls*, volume 1842 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

- [10] Oswald Riemenschneider. Zweidimensionale Quotientensingularitäten: Gleichungen und Syzygien. *Arch. Math. (Basel)*, 37(5):406–417, 1981.
- [11] Frank-Olaf Schreyer. Syzygies of canonical curves and special linear series. *Math. Ann.*, 275(1):105–137, 1986.
- [12] Edoardo Sernesi. *Deformations of algebraic schemes*, volume 334 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [13] Richard P. Stanley. *Combinatorics and commutative algebra*, volume 41 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 1996.
- [14] Jan Stevens. Rolling factors deformations and extensions of canonical curves. *Doc. Math.*, 6:185–226 (electronic), 2001.