Matematisk modellering

En teoretisk og empirisk belysning av PISA

Ole Henrik Ishoel Olsen

RDID 4190 – Mastergradsoppgave i realfagdidaktikk

Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling

Det utdanningsvitenskapelige fakultet

UNIVERSITETET I OSLO

29. april 2008

Forord

Med denne masteroppgaven avslutter jeg mitt femårige studieløp på Lektor- og adjunktprogrammet (LAP) ved Universitetet i Oslo. Jeg begynte på LAP da programmet hadde sin oppstart, så jeg er dermed i det første kullet som uteksamineres som lektorer med alle årene i programmet. Det var vært en lærerik prosess å være med på å bane denne nye veien til læreryrket, og jeg håper mange kommer etter.

Det har ikke alltid vært like lett å være LAP'er, men en gjeng som har gjort tiden og fagene vesentlig lettere å holde ut, er dem (utenom meg selv) som nå utgjør den ”harde kjerne” på LAP-realfag, kull h03, med fordypning i matematikk: Charlotte, Kristin, Susanne, Odd Bjørnar, Per-Aasmund og Ottar. Alle skriver hver sine LAP-masteroppgaver våren 2008, se Jensen (i trykk), Staxrud (i trykk), Hoksnes (i trykk), Andersen (i trykk), Utgård (i trykk) og Dahl (i trykk). Takk for den støtten dere har vært i disse fem årene, og takk for samarbeidet i ”mastergruppa”.

Jeg vil takke ILS for at de har latt meg skrive denne masteroppgaven ved deres institutt, og håper at den bidrar til fagmiljøet rundt PISA og TIMSS. Takk til veilederne mine, Liv Sissel Grønmo og Torgeir Onstad for god og konstruktiv hjelp gjennom disse ett og et halvt årene. Jeg er glad for at dere inviterte oss til å skrive masteroppgave hos PISA/TIMSS-gruppen.

Jeg vil også takke min morfar, Ola, for at du alltid har vist interesse for hvordan studiet har gått, og for alle oppmuntrende ord og råd. Det er gøy å studere når man har støttespillere som deg i familien.

Til slutt vil jeg rette en takk til min fremtidige kone, Eva Kristine, for at du har lest korrektur, og for at du har holdt ut klagingen gjennom fem lange år, særlig de siste månedene. Nå kan vi endelig tenke på andre ting.

Oslo, april 2008

Ole Henrik Ishoel Olsen

Sammendrag

Denne masteroppgaven i realfagdidaktikk er en belysning av den internasjonale komparative undersøkelsen *PISA* med hensyn på den didaktiske betydningen av begrepet *matematisk modellering*. Problemstillingen i oppgaven åpner for en generell redegjørelse for både matematisk modellering og PISA, samt en undersøkelse i hvilken grad matematisk modellering er inkludert i PISAs teoretiske bakgrunn og operasjonaliseringer. Litteraturen som redegjørelsen for matematisk modellering baseres på, er i hovedsak studievolumet til den 14. ICMI-studien kalt *Modelling and Applications in Mathematics Education*, samt artikler fra ulike matematikkdidaktiske tidsskrifter, mens redegjørelsen for PISA baserer seg på teorirammeverket utgitt av OECD i 2003, samt den norske rapporten fra PISA 2003 utgitt i 2004. Årsaken til at PISA 2003 blir vektlagt her, er at matematikk var mer sentralt i denne undersøkelsen enn i de andre PISA-undersøkelsene.

Metodisk benytter masteroppgaven både en teoretisk og en empirisk tilnærming til problemstillingen. De teoretiske betraktningene knytter seg til en sammenlikning av sentral teori for de to referanserammene, mens de empiriske knytter seg til analyse av en oppgave fra PISA 2003. Masteroppgaven bygger på datamateriale hentet direkte fra PISA 2003, så for betraktninger rundt innsamling og behandling av datamaterialet henvises det til den nasjonale rapporten for undersøkelsen. Ellers bruker oppgaven i hovedsak teori, så helhetlig sett kan den teoretiske innfallsvinkelen sies å være den dominerende.

Konklusjonen i masteroppgaven er at man i PISAs teoretiske grunnlag og operasjonaliseringer inkluderer mye matematisk modellering, altså at det er stor grad av samsvar mellom referanserammene når det gjelder hvordan matematikk og matematisk prosess beskrives. I begge referanserammene innebærer matematisk prosess at man beveger seg mellom den matematiske og den utenommatematiske verden i utforskingen av virkelighetsnære situasjoner og problemer, en prosess som representeres i form av en syklus. I modelleringslitteraturen kalles denne syklusen *modelleringssyklus* og i PISA *matematiseringssyklus*. Det er også samsvar i beskrivelsen av begrepet *matematisk kompetanse* og et par andre begreper knyttet til læring av matematikk. Det nevnes at årsaker til samsvarene kan knyttes til det faktum at deler av kildelitteraturen til matematisk modellering og PISA i visse tilfeller er den samme, og at enkelte medlemmer av PISAs ekspertgruppe i matematikk er forfattere av modelleringslitteratur.

Det blir også funnet sider ved PISA hvor det er mindre innslag av matematisk modellering. Det at PISA er en kvantitativ undersøkelse fører til operasjonaliseringer av det teoretiske grunnlaget som kan begrense implementeringen av matematisk modellering. Både undersøkelsens design og formålene den setter seg er faktorer som legger føringer på hvordan teorien operasjonaliseres i konstrukter og måleinstrumenter, noe som gir seg utslag i hvordan faglige oppgaver er formulert og hvilke krav man stiller til besvaringen av dem. I masteroppgaven vises det at disse føringene er sentrale i forhold til hva som begrenser inkludering av matematisk modellering i undersøkelsen.

Innhold

1. Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Jeg har lenge vært interessert i matematikkens sammenheng med "den virkelige verden" og hvilken betydning denne sammenhengen kan ha for læring og undervisning av faget. I matematikken kan vi skille mellom matematikk i *vanlig språk* og matematikk i *rent matematisk språk*. Tidlig i arbeidet med masteroppgaven var jeg mest opptatt av oppgaver i *tekstform*, som faller inn under den første kategorien, og ville undersøke sammenhengen mellom evne til å løse tekstoppgaver og besittelsen av grunnleggende matematiske kunnskaper og ferdigheter, samt hvorvidt fokus på tekstoppgaver kunne virke positivt på læring. Sentrale faktorer her var elevenes syn på matematikk, og didaktiske aspekter som for eksempel elevenes motivasjon og metakognisjon. Etter hvert som jeg lærte mer om temaet, fant jeg ut at mange av sammenhengene jeg var ute etter, var grundig behandlet i teorien bak *matematisk modellering*. Modellering var opprinnelig ikke del av oppgaven, men det viste seg etter hvert at dette temaet passet svært godt med det jeg ville skrive om, og ble til slutt den mest sentrale komponenten av oppgaven. Selv om oppgaven har endret karakter og problemstilling underveis, synes jeg at den fortsatt er innen samme interesseområde som jeg hadde i starten.

Det at PISA ble en såpass stor del av oppgaven skjedde i flere trinn. Like etter at masterprogrammet begynte, ble vi[1] kontaktet av representanter fra ILS[2] som kom med tilbud om å skrive mastergrad ved deres institutt. I skrivende stund (våren 2008) er det så langt skrevet relativt få masteroppgaver på 30 studiepoeng ved UV[3], men ILS' representanter mente de hadde et opplegg som passet oss og de nye retningslinjene godt. Dette gjorde at jeg valgte å skrive mastergraden ved ILS.

Siden undersøkelsene TIMSS og PISA var såpass viktige elementer ved instituttet og oppgavens omfang måtte være relativt begrenset, var det derfor naturlig å gjennomføre en sekundæranalyse av TIMSS eller PISA. Dette la imidlertid lite føringer på valg av tema og

[1] Her refereres det til masterstudentene i matematikkdidaktikk i LAP-realfag kull 03.

[2] Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling.

[3] Det utdanningsvitenskapelige fakultet

problemstilling. Jeg så tidlig at PISA-undersøkelsens innfallsvinkel til matematikkfaget passet ganske godt med mitt interesseområde, og bestemte meg tidlig for å bruke datamateriale herfra. I tillegg er PISA en viktig undersøkelse nasjonalt og internasjonalt, og det kunne slik være interessant å lære mer om den. Etter hvert fikk PISA relativt stor plass, og utgjør nå en hovedbestanddel av oppgaven.

Underveis har jeg vært åpen for mange ulike vinklinger på problemstillingene, og mange av dem som er utelatt er nevnt i kapittel 6.2.2. Dette er en svært teoritung oppgave, så det er først og fremst i de teoriske delene av oppgaven problemstillingene besvares. Den empiriske delen av oppgaven er mer et supplement til den teoretiske.

1.2 Problemstilling og forskningsspørsmål

I problemstillingen vil jeg åpne for en generell redegjørelse for hva matematisk modellering er, samtidig som den skal åpne for en undersøkelse av hvor mye modellering det er i PISA. En naturlig måte å formulere dette på, er derfor som følger:

> **Hva er matematisk modellering, og hvor mye matematisk modellering inkluderes i PISAs teoretiske grunnlag og operasjonaliseringer?**

Her må det skytes inn at selv om det viktigste teoretiske grunnlaget for PISA er det teoretiske rammeverket (OECD, 1999, 2000, 2003), bygger PISA også på annen teori som ikke er med der. For å fange opp all teori som PISA bygger på, velger jeg derfor å bruke betegnelsen *grunnlag*, og ikke *rammeverk*, i problemstillingen. Med operasjonalisering menes hvordan det teoretiske grunnlaget operasjonaliseres i konstrukter, måleinstrumenter og faglige oppgaver.

Det er en svært generell problemstilling, og masteroppgaven ville blitt for omfattende om jeg skulle gitt et komplett bilde av matematisk modellering, teorigrunnlaget for PISA og oppgavene som inngår i undersøkelsen. For å belyse problemstillingen har jeg derfor valgt ut kun sentrale deler av teorien og én oppgave fra PISA 2003, som på sin side fungerer som et eksempel på hvor mye matematisk modellering som kan inngå i oppgaver fra PISA.

For å konkretisere problemstillingen har jeg formulert tre forskningsspørsmål som jeg vil forsøke å svare på. De tre spørsmålene er:

a) **I hvilken grad er det samsvar mellom *grunnprinsipper* i teorien for matematisk modellering og *grunnprinsipper* i PISAs teoretiske grunnlag og operasjonaliseringer?**

b) **I hvilken grad er det samsvar mellom begrepene *matematisk kompetanse* i teorien for matematisk modellering og *matematisk kompetanse* i PISAs teoretiske grunnlag og operasjonaliseringer?**

c) **I hvilken grad er det samsvar mellom begrepene *metakognisjon* og *motivasjon* i teorien for matematisk modellering og hhv. *læringsstrategier* og *motivasjon* i PISAs teoretiske grunnlag og operasjonaliseringer?**

Hensikten er blant annet å forsøke å finne likhetstrekk mellom synet på matematikk i modelleringslitteraturen og i teorigrunnlaget for PISA, samt i hvilken grad man må modellere for å mestre oppgavene som inngår i PISA-undersøkelsene. Forskningsspørsmålene belyses dels gjennom sammenlikningen av de to teoretiske referanserammene, og dels gjennom den teoretiske og empiriske analysen av den valgte oppgaven fra PISA 2003. Noen steder vil jeg for enkelhets skyld forkorte ”teorien for matematisk modellering” til ”modelleringslitteraturen” eller bare ”modellering”, og ”PISAs teoretiske grunnlag og operasjonaliseringer” til ”teorien for PISA” eller bare ”PISA”.

1.3 Oppbygning av oppgaven

I kapittel 2 gjennomgås litt historisk bakgrunnsstoff, både i forhold til matematisk modellering og PISA. I kapittel 2.1 tas et historisk blikk på begrepet matematisk modellering, der matematikkdidaktikere som Hans Freudenthal og Henry Pollak trekkes frem. I dette kapitlet redegjøres det også for sentrale matematikkdidaktiske kommisjoner og konferanser som aktivt har bidratt til fagfeltet angående matematisk modellering. Slike kommisjoner har eksistert i over 100 år, men det er først i senere tid at den didaktiske betydningen av matematisk modellering har blitt viet oppmerksomhet av betydning. Kapittel 2.2 inneholder en redegjørelse for hva PISA er, undersøkelsens historie, litt om undersøkelsens skolepolitiske betydning, samt en begrunnelse for hvorfor PISA 2003 er vektlagt i denne oppgaven.

Kapittel 3 kan sies å være det mest sentrale kapitlet i oppgaven, da det inneholder den teoretiske sammenlikningen av modellering og PISA. Det er viet et eget innledningskapittel i 3.1, så en mer detaljert beskrivelse av kapitlet finnes der. Redegjørelsen for modellering kommer i 3.3, mens redegjørelsen for, og sammenlikningen med PISA kommer i kapittel 3.5. Kapittel 3 vektlegger å besvare forskningsspørsmålene med en teoretisk innfallsvinkel.

Kapittel 4 er et rent metodekapittel der PISA settes i en metodisk sammenheng i kapittel 4.1, før selve metodene i PISA skisseres i kapittel 4.2. I 4.3 forklares den statistikken som brukes i kapittel 5, før jeg i kapittel 4.4 forklarer hvordan jeg har hentet og bearbeidet teori og tallmateriale brukt i oppgaven.

I kapittel 5 analyseres oppgaven som i PISA 2003 heter ”den beste bilen”. I kapittel 5.1 omtales konstruktene[1] *læringsstrategier* og *motivasjon*, mens selve analysen finner sted i kapittel 5.2. Oppgaven analyseres i henhold til teorien som er gjennomgått i oppgaven, og gjennom en statistisk analyse. Formålet her er å belyse problemstillingen ved å besvare forskningsspørsmål b og c, gjennom både teori og empiri.

I kapittel 6 kommer en oppsummering av hva oppgaven har kommet frem til i behandlingen av problemstillingen. Kapittel 6.1 er en oppsummering, kort helhetsvurdering av resultatene, og refleksjon over mulige årsaker til funnene. I kapittel 6.2 trekkes det frem begrensninger i oppgaven, før det kommer en liste over spennende temaer jeg kunne tenkt meg å gå videre med, men som jeg ikke har plass til i denne oppgaven. Siden deler av kapittel 3 og 5 kan karakteriseres som drøftende, har jeg valgt å ikke ha et eget drøftingskapittel i slutten av masteroppgaven, men altså heller oppsummere hva oppgaven har kommet fram til.

Kapittel 7 skal fungere som et kortfattet svar på problemstillingen og forskningsspørsmålene.

[1] Dette begrepet forklares senere i oppgaven.

2. Bakgrunn

2.1 Historisk perspektiv på matematisk modellering

Det er vanskelig å danne et komplett bilde av historien til begrepet *matematisk modellering*, både i forhold til hvem som faktisk har gitt begrepet den betydningen det har i dag, og hvor lenge det har vært i bruk i og utenfor didaktikken. I matematikken har man lenge brukt matematiske modeller for å beskrive eller simulere ulike typer situasjoner, som for eksempel en pendel. Slik har begrepet matematisk modellering lenge blitt brukt i *matematiske* fagmiljøer, mens det i senere tid også har blitt tatt i bruk av *matematikkdidaktiske* fagmiljøer.

Ifølge Garcìa, Gascòn, Higueras og Bosch (2006) gikk det et skille midt på 1980-tallet knyttet til forskeres interesse for hvordan modelleringsprosesser påvirker undervisning og læring av matematikk i utdanningssystemet. Innen didaktikken henspiller begrepet matematisk modellering ikke bare på en matematisk modell *i seg selv*, men snarere en helhetlig lærings- og undervisningsmetode der en matematisk modell er *involvert*. Den didaktiske betydningen av begrepet tar utgangspunkt i en virkelighetsnær situasjon man skal utlede oppgaver eller problemer fra, gjerne formulert i vanlig språk. Deretter oversettes disse problemene til rent matematisk språk i form av en matematisk modell, som håndteres ved hjelp av matematiske operasjoner for å utvikle løsninger. Til slutt oversettes løsningene tilbake i vanlig språk og vurderes opp mot den opprinnelige situasjonen. Den matematiske modellen er altså helt sentral i dette synet, men begrepet matematisk modellering knyttes også til læringsprosesser i kontekst av matematikkopplæring i skolen, ikke bare rene matematiske prosesser. I det resterende av denne oppgaven vil jeg snakke om matematisk modellering utelukkende i kontekst av den didaktiske betydningen av begrepet.

Nært knyttet til begrepet matematisk modellering er begrepet *anvendelser* i matematikk. Å bruke matematikk til å løse virkelighetsnære problemer kalles ofte å *anvende* matematikk, og en virkelighetsnær situasjon som kan håndteres med matematikk kalles en *anvendelse* av matematikk (Blum et al., 2002, s. 155). Anvendelser er et svært sentralt område av matematikken, og de har eksistert siden fagets fødsel, da behovet for å løse problemer av ulik art er noe av det som har bidratt til oppdagelsen av matematikk (Katz, 2004). Historisk kan man også se at det relativt tidlig var interesse for *matematikkdidaktiske* spørsmål knyttet til anvendelser av matematikk. Den første artikkelen i den første utgivelsen av det prestisjetunge tidsskriftet *Educational Studies in Mathematics* er skrevet av Hans Freudenthal og bærer tittelen *Why to teach Mathematics so as to be useful* (Freudenthal, 1968). I artikkelen presiserer han hva han mener matematikk faktisk er, understreker nytteverdien av det, og argumenterer for at denne nytteverdien må vektlegges mer i skolen. I 1981 skrev samme forfatter en annen artikkel kalt *Major Problems of Mathematics Education* (Freudenthal, 1981) i samme tidsskrift og vier mye av plassen til temaet problemløsing (*problem solving*) i matematikk. Disse artiklene har i likhet med andre av hans verk (for eksempel Freudenthal, 1973) vært svært innflytelsesrike i matematikkdidaktikk. For mer om selve historien til begrepet problemløsing, se Kilpatrick (1985).

At problemløsing og anvendelser har vært viktige tema innen matematikkdidaktikk kan også sluttes fra den mengden litteratur det finnes om dem, inkludert materiale fra en rekke nasjonale og internasjonale konferanser. ICMI[1], grunnlagt i 1908 som en del av IMU[2], er en meget viktig bidragsyter i så måte, og har spilt en sentral rolle for etableringen av matematikkdidaktikk som vitenskapsområde (Gjone, 2001). Kommisjonen har holdt konferanser om matematikkundervisning siden oppstarten, og siden 1969 har disse konferansene båret navnet ICME[3]. Ett av målene med disse konferansene er å lage et forum for profesjonelle innen matematikkdidaktikk fra hele verden hvor de kan utveksle ideer, informasjon og synspunkter og utvikle en produktiv dialog med sine kolleger (ICME, n.d.). ICMI har hittil (våren 2008) fullført 14 såkalte ICMI *studies,* som består av en eller flere konferanser og et påfølgende *Study Volume,* der forskere inviteres til å være bidragsytere. Pr. våren 2008 er 3 nye slike studier allerede i gang, og 2 er under planlegging.

Den 14. og sist fullførte studien har navnet *Modelling and Applications in Mathematics Education,* og i studievolumet til denne studien er de fleste aktive innen dette feltet invitert til å bidra (Blum, Galbraith, Henn, & Niss, 2007). Studiens mål er å presentere "*state-of-the-art"* innen modellering og anvendelser, identifisere svakhetstilstander og stimulere til videre studier og forskning. Boken er derfor en grundig og oppdatert gjennomgang av temaene modellering og anvendelser. I tillegg til ICME-konferansene og ICMI-studiene, finnes det en

[1] The International Commission on Mathematical Instruction, se http://www.mathunion.org/ICMI/

[2] International Mathematical Union, se http://www.mathunion.org/

[3] The International Congress on Mathematical Education, se http://www.mathunion.org/ICMI/ICME_congress.html

egen organisasjon spesielt for modellering og anvendelser. Denne har navnet ICTMA[1], og har som formål å promotere modellering og anvendelser i alle områder av matematikkopplæringen (ICTMA, n.d). ICTMA gjennomfører konferanser annethvert år, og utgir en publikasjon fra hver av dem.

En person som har vært en av de fremste pionerene innen modellering og anvendelser i matematikkdidaktikken, er den amerikanske matematikkdidaktikeren Henry Pollak. Så tidlig som på 60-tallet arbeidet han for integrering av modellering og anvendelser i matematikkundervisning, og hans engasjement for dette ble synlig i internasjonal sammenheng da han i 1976 holdt et foredrag over artikkelen *The Interaction between Mathematics and Other School Subjects* (Pollak, 1979) i den 3. ICMI-studien. Han var også aktiv i de første ICTMA-studiene, særlig i ICTMA-3. På grunn av hans engasjement og store innflytelse gis han æren for at modellering og anvendelser har en såpass sterkere stilling i dagens matematikkpensum enn det hadde på den tiden (Pollak, 2007). I studievolumet til den 14. ICMI-studien har man viet et kapittel til han personlig (Ibid).

Det eksisterer nå et hav av litteratur om matematisk modellering som undervisnings- og læringsaktivitet; artikler, bøker, kurs og studier florerer. Og stadig flere forskere fra ulike land er bidragsytere til feltet, da English og Galbraith (Australia), Verschaffel (Belgia), Niss og Blomhøj (Danmark), Blum og Kaiser (Tyskland), de Lange (Nederland), samt Lesh og Schoenfeld (USA), er blant mange forskere som har engasjert seg i spørsmål rundt modellering.

Et tegn på at modellering er et voksende tema i utdanningskretser, er at pensumbøker i skolen inneholder flere problemer hentet fra virkeligheten enn for 20 år siden (Blum et al., 2007). Et eksempel på modellering i pensumbøker finner vi i det nye læreverket SIGMA, der flere av bøkene har kapitler som handler om modellering i matematikk (for eksempel Sandvold et al., 2007). Likevel eksisterer det fortsatt et gap mellom idealene beskrevet i forskningslitteraturen og hverdagspraksisen. Selv om det har vært en viss utvikling på dette området, hevdes det i litteraturen at det fortsatt er vanskelig å finne genuine modelleringsaktiviteter i klasserommene (Blum et al., 2007).

[1] The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications, se www.ictma.net

2.2 Historisk perspektiv på PISA

PISA står for *Programme for International Student Assessment* og er en internasjonal komparativ undersøkelse av elevers prestasjonsnivå og skolesystemer. Undersøkelsen gjennomføres i regi av OECD[1], en organisasjon som er svært involvert i matematikk- og naturfagundervisning. Siden matematikk og naturfag lenge har vært sett på som viktige fag for et lands økonomiske utvikling, begynte organisasjonen allerede på 50-tallet å arrangere konferanser om dette, samt å bidra økonomisk til utdanningsprosjekter (Gjone, 2001). Nå står de altså bak PISA, en undersøkelse som gjennomføres hvert 3. år, og som hittil har blitt gjennomført i år 2000, 2003 og 2006. Fagene som vektlegges i testene er lesing, matematikk og naturfag, og i hver test gis ett av fagene størst plass, mens de to andre tas med i den grad det trengs for å gjøre longitudinelle sammenlikninger i dem. I år 2000 var lesing vektlagt, i 2003 matematikk, og i 2006 naturfag.

Når det gjelder hva som måles i PISA, har man valgt å la ekspertgrupper i de 3 fagområdene utvikle et teoretisk rammeverk (OECD, 1999, 2000, 2003) som i detalj beskriver hva som måles innen hvert fagområde. I tillegg bruker de diverse matematikkdidaktiske forskningsartikler og hoved- og masteroppgaver til ulike aspekter ved undersøkelsen, så det er et stort nettverk av kildemateriale som ligger til grunn for den[2]. Alternativet er å la deltakerlandenes pensum i skolen være det teoretiske grunnlaget, noe man gjør i undersøkelsen TIMSS[3]. I PISA er hensikten å måle kunnskaper og ferdigheter som anses for å være nødvendige for å mestre fremtidas samfunn. Målet er å finne ut i hvilken grad deltakerne (15-åringer) er forberedt på å bli ”fungerende” samfunnsborgere, det vil si om de er i besittelse av den kunnskapen som skal til for å være et tenkende og kritisk medlem av samfunnet. Dette krever en internasjonal konsensus om hva et tilstrekkelig kunnskapsnivå faktisk vil være, noe rammeverket er ment til å beskrive. Utenom å måle kunnskaper, kartlegger PISA også skolefaktorer og hjemmebakgrunn. Dette er for å kunne beskrive hvordan demografiske, sosiale, økonomiske og utdanningspolitiske faktorer henger sammen med prestasjoner i fagene. I tillegg har PISA et mål om å svare på spørsmålet om hva som

[1] Organisation for Economic Co-operation and Development, se http://www.oecd.org/

[2] Dette er årsaken til at jeg bruker betegnelsen ”teoribakgrunnen for PISA” i problemstillingen og forskningsspørsmålene.

[3] Trends in International Mathematics and Science Study, se www.timss.no

fremmer god læring, hvilket man mener er det samme som å kartlegge hva som kjennetegner ”den gode skole” (Kjærnsli, Lie, Olsen, Roe, & Turmo, 2004).

Norge har deltatt på alle de tre PISA-undersøkelsene, og det er ILS ved Universitetet i Oslo som er ansvarlig for gjennomføringen i Norge. Jeg vil ikke gå inn på konkrete resultater fra undersøkelsene her, men kort sagt har Norges elever hittil prestert noe under det som var forventet og ønskelig. I de faglige testene ligger vi under nivået til land vi liker å sammenlikne oss med og OECD-gjennomsnittet for øvrig. For detaljert gjennomgang av resultatene, se de nasjonale rapportene fra undersøkelsene (Lie, Kjærnsli, Roe, & Turmo, 2001, Kjærnsli et. al, 2004, Kjærnsli, Lie, Olsen, & Roe, 2007).

En annen undersøkelse Norge er med i, heter TIMSS og gjennomføres i regi av IEA[1]. IEA har gjennomført undersøkelser helt siden 60-tallet, mens TIMSS ble gjennomført i sine tidligste former på 80-tallet. I denne undersøkelsen testes 4. og 8.-klassinger, samt elever i det siste trinnet på videregående skole i kunnskaper i matematikk og naturfag (fysikk for vgs-elever). Undersøkelsen tester det man kaller *skolekunnskap*, som vil si at det er landenes pensum i fagene som danner grunnlaget for hva som skal måles. TIMSS skiller seg derfor fra PISA på en del områder. For mer informasjon om denne undersøkelsen, se www.timss.no.

Det er liten tvil om at internasjonale undersøkelser som PISA og TIMSS har stor innflytelse på den skolepolitiske debatten i deltakerlandene. ”Clemet & co la Pisa [sic] til grunn for nær sagt alle tiltak i sin skolepolitikk” (Sjøberg, 2007), er et sitat som støtter dette i Norges tilfelle. Rapporter om dårlige testresultater vekker stor oppsikt i media, noe vi har erfart her til lands flere ganger de siste årene. Selv om mange synes det er viktig med denne typen undersøkelser, er det også mange som stiller seg kritisk til slike undersøkelser i seg selv, hvordan de gjennomføres, og/eller hvilke konsekvenser de får for norsk skole. Kritikere har blant annet stilt spørsmålstegn ved målsettingene til PISA, samt deres beskrivelse av hvilke kunnskaper de mener er nødvendige for å klare seg i morgendagens samfunn. For eksempel kan man stille spørsmålet om fagene lesing, matematikk og naturfag faktisk dekker det et individ trenger å kunne for å klare seg i fremtidas samfunn. Hva med sosial kompetanse? Det blir med andre ord et spørsmål om PISA virkelig når målene som er nedfelt i rammeverket. Uansett kan de fleste være enig i at det er viktig med debatt om undersøkelser og deres konsekvenser. For mer om denne debatten, se Schleiner (2007) og Sjøberg (2007).

[1] International Association for the Evaluation of Educational Achievement, se http://www.iea.nl/

2.2.1 PISA 2003

Når denne masteroppgaven skrives, foreligger resultatene fra alle de tre hittil gjennomførte PISA-undersøkelsene. En av årsakene til at jeg ikke tar for meg PISA 2000 eller PISA 2006 spesielt, er fordi man da vektla hhv. lesing og naturfag, noe som medfører at tallmaterialet fra matematikk i PISA 2000 og PISA 2006 er begrenset i forhold til PISA 2003. Dette gjør disse undersøkelsene mindre relevante for denne oppgaven. En annen årsak kan knyttes til denne masteroppgavens teoritunge natur; siden det teoretiske rammeverket så å si er det samme for alle PISA-undersøkelsene, er det teoretisk sett liten forskjell på om man studerer den ene eller den andre undersøkelsen. I tillegg er ingen av matematikkoppgavene fra PISA 2006 frigitt ennå, noe som gjør at jeg ikke hadde kunnet gjengi noen av oppgavene fra denne testen i den offentlige utgaven av masteroppgaven. Til sammen gjør dette at PISA 2003 er mest relevant av de undersøkelsene som hittil er gjennomført. Til tross for at oppgaven vektlegger PISA 2003, kan resultatene likevel sies å gjelde PISA generelt, da formål, rammeverk og operasjonaliseringen av disse er nesten identisk for alle de tre undersøkelsene.

I PISA 2003 var det 41 deltakerland, hvorav 30 var OECD-medlemmer. Til sammen deltok over en kvart million 15-åringer, fra Norge 4046 elever fordelt på 182 skoler (Kjærnsli et al., 2004). Som nevnt var matematikk viet mest plass i denne undersøkelsen, og tallmaterialet brukt i dataanalysen i denne oppgaven er hentet fra PISA 2003. Utenom lese-, naturfag og matematikkoppgaver og elevspørreskjema, var det dette året også tatt med en del som skulle teste det man kalte *problem solving*, det vil si *problemløsing* på norsk. Denne delen er tatt med verken før eller etter PISA 2003. Mer om dette kommer i kapittel 3.4.1.

3. Teoretisk redegjørelse og sammenlikning

3.1 Innledning

I dette kapitlet redegjøres det mer inngående om hva som ligger i begrepet matematisk modellering i matematikkdidaktisk forstand. Deretter redegjøres det for tilsvarende begreper i teorien for PISA, samtidig som sammenhengene med modelleringslitteraturen kommenteres fortløpende.

Siden matematisk modellering kan ses på som en lærings- og undervisningsmetode eller -aktivitet, velger jeg å ta utgangspunkt i matematikk som en *aktivitet* i kapittel 3.2. Jeg trekker frem Deweys *aktivitetspedagogikk* sammen med hans *problemmetode*, før jeg knytter læring gjennom aktivitet til matematikkfaget. Her vil Hans Freudenthal og Alan Bell sine teorier være sentrale.

I kapittel 3.3 kommer selve gjennomgangen av det jeg vil vektlegge fra modelleringslitteraturen, nemlig modelleringssyklusen, matematisk kompetanse og et par andre matematikkdidaktiske perspektiver på modellering. Navn som Werner Blum, Mogens Niss, Ragnar Solvang, Henry Pollak og Markku Hannula vil dukke opp i denne gjennomgangen. Dette kapitlet danner mye av grunnlaget for de videre teoretiske betraktningene i oppgaven.

Før jeg begynner på redegjørelsen for og sammenlikningen med teorien bak PISA, ser jeg det som nødvendig å avklare forholdet mellom matematisk modellering og *problemløsing*, som da er tema for kapittel 3.4. Her vil George Polya og Alan H. Schoenfeld sine teorier trekkes frem i den generelle delen, før problemløsing slik det er definert i PISA behandles.

I kapittel 3.5 vil det så redegjøres for sentral teori i PISA, samtidig som denne sammenliknes med teorien som ble trukket frem i kapittel 3.3. Kapitlet vil være noenlunde likt oppbygd som kapittel 3.3, og titlene på delkapitlene er ment til å tilsvare de i 3.3, bortsett fra tittelen på kapittel 3.3.1 (*mathematical literacy*), da dette begrepet ikke har motstykke innen modellering. Matematiseringssyklusen (3.3.2), matematisk kompetanse (3.3.4) og selvregulert læring (3.3.5) er alle begreper som brukes i PISA, og deres betydning i PISAs rammeverk vil sammenliknes med tilsvarende begreper innen modellering.

3.2 Læring gjennom aktivitet

3.2.1 Aktivitetspedagogikk og problemmetoden

Tanken om at man må være i aktivitet for å lære noe, har røtter helt tilbake til Aristoteles[1]. En som ga det man kaller *aktivitetspedagogikken* det filosofiske grunnlaget det har i dag, var den amerikanske utdanningsfilosofen John Dewey (1859-1952). Ord som er brukt om hans filosofi er progressivitisme, reformpedagogikk, pragmatisme, instrumentalisme og eksperimentalisme, noe som vitner om omfanget til teoriene hans. Da Dewey begynte å publisere verkene sine rundt år 1900, var tankene om barns *utvikling*, oppdragelse i sosial kontekst (kalt *demokrati*) og *erfaring* av de mest nytenkende. Det siste begrepet knyttes til at læring er noe aktivt, altså i motsetning til ren ”boklig” eller akademisk kunnskap, og må fostres ved hjelp av konkrete handlinger. Å modellere, lage noe, undersøke og eksperimentere er aktiviteter Dewey anså for å være verdifulle aktivitetsformer. *Learning by doing* er hans mest berømte slagord (Imsen, 2004).

I tillegg til å utvikle en omfattende aktivitetsfilosofi, la Dewey også grunnlaget for prosjektorientert undervising, og en læringsmetode som kalles *problemmetoden.* Han så likheter mellom eksperimentell, naturvitenskapelig forskningsmetode og måten barn lærer på. Problemmetoden formulerte han i fem trinn:

1) Eleven må oppleve et problem eller noe som er vanskelig, og som han eller hun er motivert for å løse.

2) Problemet må undersøkes nærmere for å finne ut hva vansken består i (definere problemet).

3) Eleven må samle mer kunnskap eller informasjon om problemet eller fenomenet.

4) På grunnlag av disse kunnskapene resonnerer eleven seg fram til hypoteser om fenomenet, og prøver å tenke seg hva konsekvensen av hypotesene vil bli.

5) De mest sannsynlige hypotesene testes ved å bli satt ut i praktisk virksomhet. (Imsen, 2004, s. 83).

Drivkraften i denne prosessen er ønsket om å løse en vanske, og på denne måten ble lærestoff og arbeidsmåter forent i en og samme læringsprosess.

[1] Jfr. Aristoteles’ beskrivelse av *energeia*, som kan oversettes til ”aktivitet” eller ”å være i arbeid”.

Dewey reformerte mye av datidas pedagogiske filosofi, og pedagogikken hans har vært den mest tiljublede *og* mest kritiserte pedagogiske retningen på 1900-tallet. I samtida kom den som en kjærkommen fornyelse av en tilstivnet puggeskole, og Dewey markedsførte selv sin egen pedagogikk som et alternativ til ”den gamle skolen”. I Skandinavia har ideene hans bred tilslutning blant lærere flest (Ibid).

3.2.2 Matematikk som aktivitet

I sitatet “Every mathematician knows at least unconsciously that besides ready-made mathematics there exists mathematics as an activity. But this fact is almost never stressed, and non-mathematicians are not at all aware of it” (Freudenthal, 1973, s. 114), ser vi at den hollandske matematikkdidaktikeren Hans Freudenthal (1905-1990) markerer et syn der matematikk knyttes til aktivitet. Som vi ser, skiller han mellom det han kaller *ready-made mathematics*, noe vi kan oversette med *oppstilt* eller *tilrettelagt matematikk*, og det han kaller *mathematics as an activity*, altså *matematikk som en aktivitet*. Dette synet innebærer at oppstilt matematikk ikke stimulerer til matematisk aktivitet på samme måte som uoppstilt matematikk. Det er først når elevene må definere problemer og gjøre antakelser, og ikke bare gå løs på ferdig formulerte oppgaver, at vi har det Freudenthal vil anerkjenne som sann matematisk aktivitet (Freudenthal, 1973).

Bell (1993) følger opp dette synet ved å kategorisere matematisk aktivitet i to deler, altså skiller han mellom *algorithms for calculations* og *cycle of mathematization*. Matematikk kan altså involvere en form for syklus av matematisering, manipulasjon og tolkning, det vil si å oppdage relevansen av en matematisk sammenheng til en gitt situasjon, uttrykke relasjonen med symboler, manipulere dette uttrykket for å avdekke et nytt aspekt eller gi det ny mening i den gitte situasjonens kontekst.

Videre skiller Bell mellom undervisning av for eksempel algoritmer for utregning og metoder for løsing av likninger, som han mener kun hører til midtpartiet av matematiseringssyklusen, og undervisning som aktiviserer *hele* syklusen. Til slutt i artikkelen argumenter han for at elevenes erfaring fra klasserommet bør inneholde genuin og substansiell matematisk aktivitet, da dette gir opphav til abstraksjon, representasjon, bruk av symboler, generalisering, bevisføring og formulering av nye spørsmål. Han hevder at dette utgjør de nødvendige kunnskapene for eksperimentell aktivitet (Ibid). Dette siste poenget kan knyttes til Deweys problemmetode, der fellesnevneren eksperimentering.

3.3 Matematisk modellering

Matematisk modellering handler blant annet om å bruke matematikk til aktivt å løse problemer som har sin natur i ikke-matematiske sammenhenger. Dette kan være problemer fra fagområder som fysikk, statistikk, medisin etc., fra dagligdagse situasjoner i for eksempel butikken eller fra kunstig konstruerte situasjoner der man for eksempel skal konstruere eller omforme ulike geometriske steder. Det har fellestrekk med Deweys aktivitetspedagogikk, Freudenthals matematiske aktivitet og Bells eksperimenterende aktiviteter, med andre ord matematikk som ikke er ferdig oppstilt og som man ikke kan bruke en fast regel for å løse.

I Niss, Blum og Galbraith (2007, s. 4) kan vi lese at “In any application of mathematics a mathematical model is involved, explicitly or implicitly”. Dette sier noe om hvilken grad man kan involvere matematiske modeller i løsingen av virkelighetsnære problemer. Når man snakker om matematisk modellering, er det vanlig å referere til *modelleringssyklusen*. Denne består av flere deler, men først og fremst de to dimensjonene den har sine røtter i, nemlig det *ekstramatematiske domene* (den ”virkelige” verden) og det *matematiske domene* (den matematiske verden). Man begynner som regel i det førstnevnte, der man identifiserer objekter, relasjoner og fenomener som skal analyseres og slik er av interesse, oversetter disse til tilsvarende objekter, relasjoner og fenomener i den matematiske verden. Her gjøres nå matematiske overveielser, manipulasjoner og slutninger, før man oversetter resultatene tilbake og vurderer disse som løsninger i det opprinnelige domenet (Niss, Blum, & Galbraith, 2007).

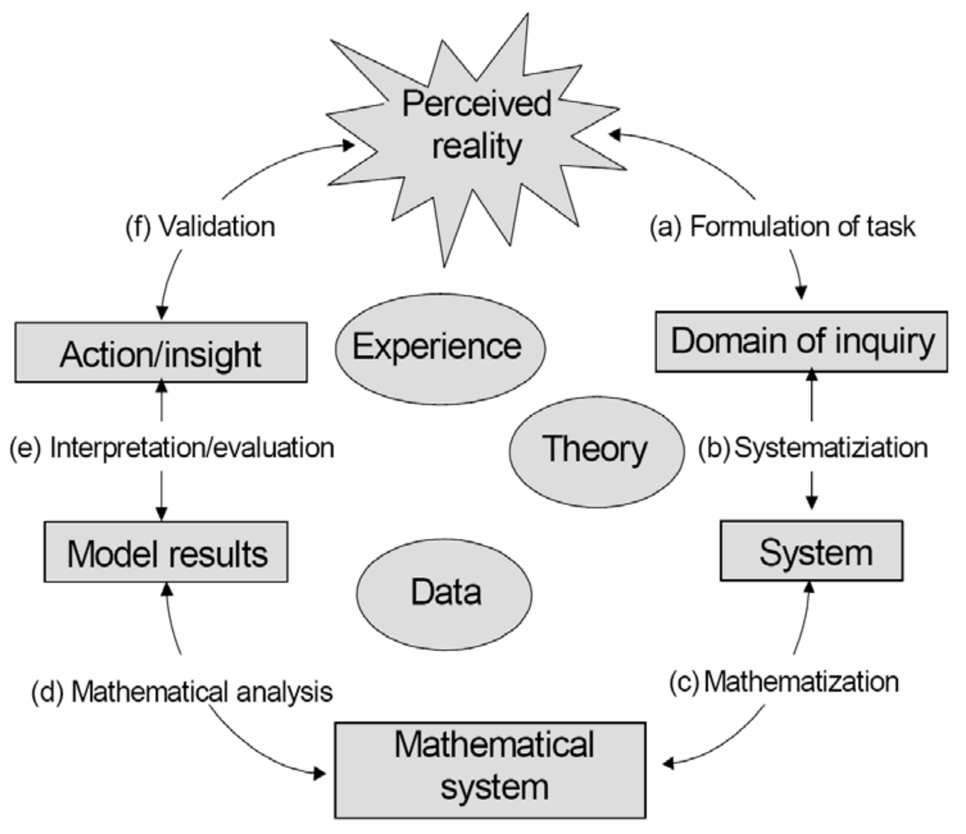
Hvordan modellering kan fungere i praksis blir klarere i kapittel 5, hvor jeg analyserer en oppgave fra PISA 2003 i lys av matematisk modellering. For å unngå kun begrepsmessige beskrivelser før dette, vil jeg her ta med et kort eksempel. Eksempelet er fra en artikkel (Lakoma, 2007) som tar for seg læring gjennom matematisk modellering fra et sannsynlighetsperspektiv. I undersøkelsen artikkelen baseres på, blir elever fra videregående trinn bedt om å ta stilling til følgende situasjon:

> Two boys – Jack and Mark – try to score at a basket target. They both have the same frequencies of success: 50%. They decided to play a game: each will throw the ball until he fails to score [sic]. When one fails, the other takes over the throwing. The first who scores a hit is a winner. Jack always starts first. What are the chances for winning for these boys? Do you think the game is fair? (Lakoma, 2007, s. 390).

Her blir elevene bedt om å bruke matematikk de har lært for å besvare spørsmålene, og de står fritt til å bruke ulike tilnærminger; skjemaer, grafiske representasjoner, diagrammer etc. I arbeidet begynner elevene å avdekke regelmessigheter, og de kommer etter hvert frem til ulike svar og perspektiver. Her vil de ulike representasjonene de bruker kunne ses på som selve modellene de utvikler på bakgrunn av oppgavebetingelsene. Etter hvert vil de komme frem til matematiske løsninger og svar, oversette svarene tilbake til den opprinnelige situasjonen, og må således vurdere dem i lys av oppgaven. På denne måten tilfredsstiller arbeidsmåten i dette eksempelet de kriteriene man har for at noe skal være en modelleringsaktivitet.

3.3.1 Modelleringssyklusen

I modelleringslitteraturen er det som nevnt vanlig å fremstille matematisk prosess i form av en syklus kalt modelleringssyklusen, som har nær sammenheng med det Bell (1993) peker på i det han kaller *cycle of mathematization*. For å danne et bredt bilde av modelleringssyklusen som kan brukes videre i oppgaven, velger jeg her å presentere en modell fra Blomhøj og Kjeldsen (2006) i detalj.



Figur 1: Modelleringssyklusen etter Blomhøj og Kjeldsen (2006, s. 166).

Figur 1 består av tre typer elementer; 1) de ulike ”boksene” sammen med ”stjernen” på toppen, som i det videre blir kalt *stadier*, 2) overgangene *mellom* stadiene (a-f), som i det videre blir kalt *overganger* og 3) de tre boblene i midten, som vi kan kalle *overordnete faktorer*. I modellen begynner man som regel i ”stjernen” på toppen (stadiet *perceived reality*) og følger syklusen ”med klokka”, som også er den rekkefølgen jeg velger å basere presentasjonen på. Det at ”pilene” i overgangene går begge veier forklares til slutt i dette kapitlet. Presentasjonen i det følgende bygger på Blomhøj og Kjeldsen (2006) og Niss et al. (2007).

Det første stadiet kalles *perceived reality*, på norsk *oppfattet virkelighet*. Dette representerer stoffet man stilles ovenfor, oppgaveteksten eller situasjonen oppgaven angår. Kvaliteten på informasjonen man får her vil avhenge av oppgaveteksten, og vil derfor variere i omfang, detaljnivå og presisjon. I denne sammenhengen har det vært en diskusjon over hvorvidt man skal bruke begrepene ”virkelig verden” eller ”ekstramatematisk verden” sammen med begrepet ”matematisk verden” når man beskriver de to dimensjonene i modelleringssyklusen. Problematikken ligger i at mange ikke vil skille mellom ”virkelig verden” og ”matematisk verden”, siden den matematiske verden er vel så ”virkelig” som resten. I tillegg kan man spørre seg om alle fenomener i verden faktisk er virkelige, da for eksempel deler av kvantefysikken kan oppleves som mindre virkelig for noen (for eksempel tunnellering[1]). Pollak (1979) har parert denne problematikken ved å bruke begrepet *rest of the world*, mens Niss et al. (2007) har valgt å bruke *the extra mathematical world*, altså den *ekstramatematiske verden* om alt det som ikke er ren matematikk. Hensikten med alt dette er altså at man ønsker å skille mellom den rene matematikken og verden ellers.

Fra den oppfattede virkeligheten skal man så *formulere oppgave* (*formulation of task*). Dette handler om å identifisere og velge ut relevante objekter og fenomener man vil ta med i modellen, og evt. gjøre forenklinger dersom dette er nødvendig. I denne sammenhengen har det også vært en diskusjon om hva et *problem* faktisk er. Den mest utbredte definisjonen på et problem kan vi blant annet finne i Solvang (1996): Først defineres *algoritme* som en fremgangsmåte eller oppskrift for å løse en gitt oppgave, og et *problem* defineres til å være en oppgave man *ikke* kan løse ved hjelp av en slik algoritme.

[1] Et fenomen fra kvantemekanikk. For en forklaring, se http://www.britannica.com/eb/article-77514/quantum-mechanics

I Niss et al. (2007) mener man at begrepet *problem* ikke bare skal henspille på det man kan betegne som *tekstoppgaver* (*word problems*), men også det man kaller *intellektuelle problemer* (*intellectual problems*) som søker å beskrive, forklare og forstå verden. Det hevdes at mange tekstoppgaver kun involverer en ”bekledning” av oppstilte oppgaver, og at det egentlige problemet med disse kun ligger i å avkle dem igjen.

> At their best, word problems allow for interesting and worthwhile activities located within what is effectively the solution and interpretation stages of the modelling cycle – translation takes place between the worlds of mathematics and words. At their worst, they promote mathematical tasks in an unrealistic disguise and recipe approaches to their solutions. (Niss et al., 2007, s. 12).

Den type problemer i kategorien intellektuelle problemer de trekker frem som mer gunstig, er det de kaller *modelleringsproblemer* (*modelling problems*). Dette er problemer som også involverer formulering av oppgaver, ikke bare løsing og tolking. Et eksempel er: ”Decide the best location for speed bumps to calm traffic along a road within the college campus” (Niss et al, 2007, s. 12). Modelleringsoppgaver som denne er oppgaver som vektlegger å involvere modelleringssyklusen i sin helhet.

En kort kommentar som kan tas med under denne overgangen, er at elever kan ha vanskeligheter med å formulere problemer. Elever kan ha vanskelig for å se og akseptere en matematisk tolkning av oppgaven på bakgrunn av konteksters påvirkning på meningssammenheng. For mer om dette, se Wistedt (1993).

Formuleringsfasen fører til *domain of inquiry* eller *domene for undersøkelse*, altså at man identifiserer nøyaktig hvilke relasjoner man skal modellere. ”Domenet” består altså av de objektene, egenskapene og fenomenene man har valgt å ta med, og er ofte en forenklet versjon av den opprinnelige situasjonen man ble stilt ovenfor.

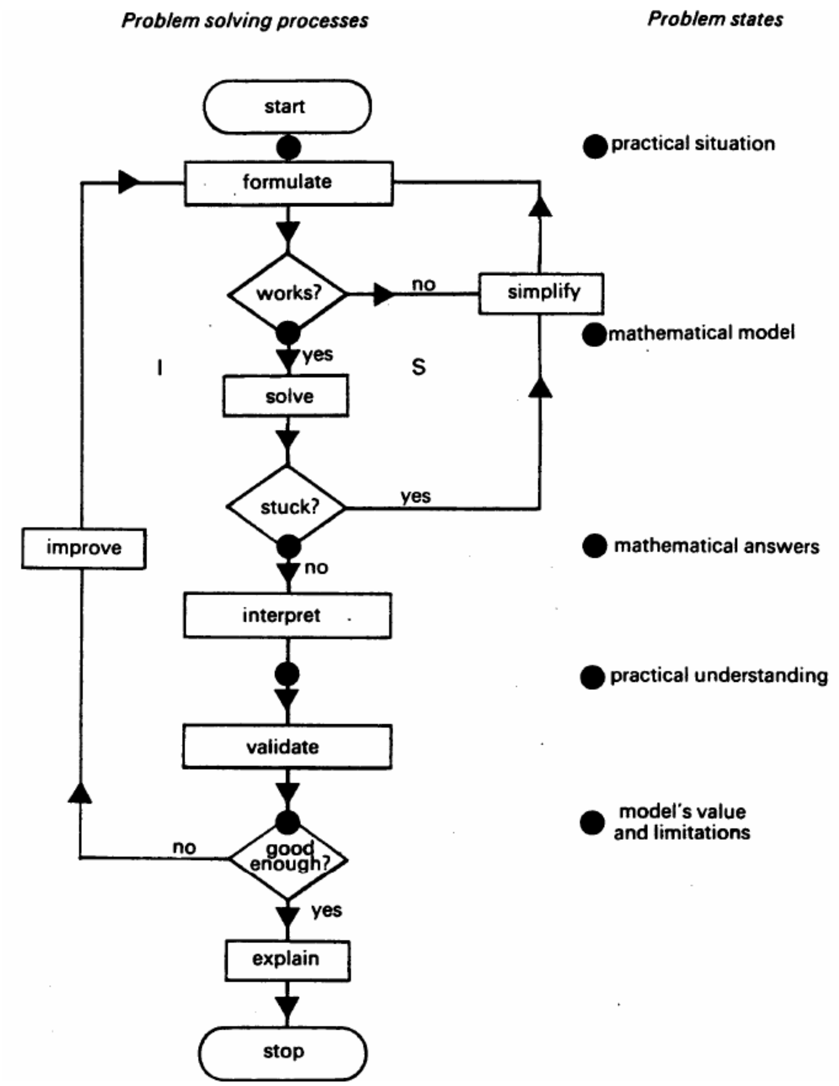
Overgangen *systematiziation* eller *systematisering* handler om å omorganisere dette domenet til noe presist og strukturert. Man prøver her å idealisere situasjonen etter de målene man har med oppgaven. Systematiseringen fører naturlig nok til et *system.* Stadiet *system* består gjerne av en modell i ikke-matematiske termer som helst skal ha den egenskapen at det kan beskrives ved eller oversettes direkte til et rent matematisk språk. Dette systemet vil som regel antyde en passende matematisk modell det kan oversettes til, det være seg et likningssett, algebraiske uttrykk, funksjoner eller liknende.

Mathematization eller *matematisering* involverer abstraksjon og representasjon av det opparbeidede systemet. Den ikke-matematiske modellens objekter, data, relasjoner og betingelser oversettes her til en ren matematisk modell, som igjen bør adressere det identifiserte problemet. Det matematiske systemet, *mathematical system* på engelsk, vil stort sett bestå av den matematiske modellen. Å gjøre denne typen representasjon kan oppleves som problematisk for mange. For eksempel tar Goldin (2002) for seg den kognitive hindringen begrepet ”ukjent” kan være for mange elever. For mer om representasjon, se Goldin (2002).

Neste overgang kalles helt enkelt *mathematical analysis* eller *matematisk analyse*. Her bruker man matematiske metoder for å håndtere de matematiske uttrykkene man har kommet frem til. Dette kan være logisk utledning fra matematiske antakelser, bruk av kjent teori, likningsløsing, symbolsk manipulasjon, numeriske beregninger, estimere parametere, statistisk testing, simulering eller liknende. Uansett metode fører denne overgangen til en form for matematisk *løsning*, i figuren kalt *model results* eller *modellresultater*. Dette er da rene matematiske løsninger, og sier ikke så mye om den opprinnelige situasjonen uten at de tolkes i henhold til den ikke-matematiske verden hvor problemet oppstod. Denne overgangen kalles *interpretation/evaluation* eller *tolkning/evaluering*. Når dette er gjort, kommer man frem til stadiet *action/insight* eller *innsikt*, som er selve resultatene av modelleringsprosessen. Hvilken ny innsikt har man oppnådd? Her skal man altså oppsummere svarene på problemstillingene man lagde i formuleringsfasen.

Til slutt gjenstår *validation* eller *validering* som den siste overgangen i syklusen. Årsaken til at den er plassert i ”slutten” av syklusen er at kvaliteten på den matematiske modellen vi utviklet vil bli tydeligst først når resultatene foreligger. Resultatene vurderes opp mot den opprinnelige konteksten, og den sammenlignes også med praktiske erfaringer, observerte eller forutsette data, eller med teoretisk kunnskap og refleksjoner, som var det vi kalte *overordnete faktorer* (”boblene” i midten av figur 1). En viss grad av validering bør imidlertid gjøres gjennom hele modelleringsprosessen, som en slags kontinuerlig kvalitetssikring. Målet med validering er å sjekke om vi gjør hensiktsmessige antakelser og om modellen gir rimelige resultater.

Det finnes mange utgaver av denne syklusen, og en annen (selvforklarende) modell for modelleringsprosessen som vektlegger nettopp det å vurdere hvert steg gjennom stadig forenkling og forbedring av modellen, er hentet fra Burkhardt og Pollak (2006):



Figur 2: Modelleringsprosessen etter Burkhardt og Pollak (2006, s. 181)

I denne modellen kan vi gjenkjenne mange av fasene fra figur 1, i et mer rettlinjet oppsett.

Et viktig moment i teorigrunnlaget for matematisk modellering er helhetsbildet av modelleringsprosessen. I figur 1 ser vi at pilene mellom stadiene og overgangene går begge veier. Dette er både for å indikere muligheten til å gå tilbake i prosessen for å gjøre eventuelle forbedringer og forenklinger, og for å si noe om den ”samtidigheten” de ulike stadiene og overgangene bør inngå i. Stadiene og deres overganger kan identifiseres og beskrives hver for seg, men det betyr ikke at alle kan eller bør *læres* separat. En av de viktigste pedagogiske ideene bak matematisk modellering er dette *holistiske* synet på syklusen. Bevissthet om delprosessene vil ikke bare bidra til elevenes læringsutbytte, men i undervisning vil det å ha kunnskap om dem være nyttig for å være i bedre stand til å kunne utfordre og støtte elevene i læringsprosessen (Blomhøj & Kjeldsen, 2006).

3.3.2 Matematisk kompetanse

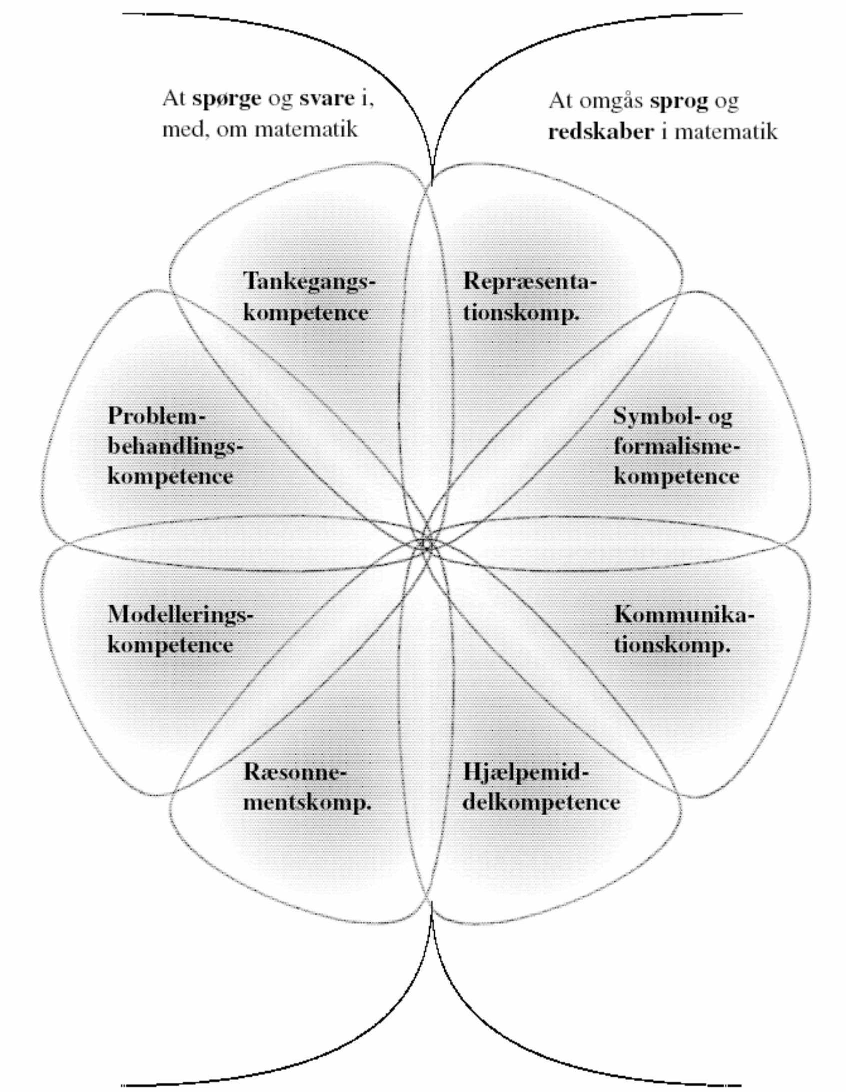
Et av mange begrep ulike mennesker vil gi ulike betydninger, er begrepet *matematisk kompetanse*. I gjennomgangen av modelleringssyklusen over, så vi eksempler på andre begrep dette gjelder, som for eksempel *virkelighet*, *problem* og *representasjon*. Innen matematikkdidaktikken finnes en mengde slike problematiske begrep, som for eksempel *forståelse, kunnskap, ferdigheter, kompetanse, affeksjon, holdninger* etc. Om man skal bruke noen av disse begrepene i en eller annen sammenheng, bør man i de fleste tilfeller presisere hva man mener med dem, for så å bruke dem med den gitte betydningen. I det følgende vil jeg redegjøre for hva man mener med matematisk kompetanse i modelleringslitteraturen, men som vi skal se, er det også her nyanseforskjeller i hva man legger i dette begrepet.

Jeg tar først for meg hvordan begrepet matematisk kompetanse belyses i Niss et al. (2007). Her knytter man matematisk kompetanse først til det man kaller *modelling competency*, på norsk *modelleringskompetanse*. Først beskrives *kompetanse* beskrives som et individs evne til å utføre passende handlinger i problemsituasjoner, hvor disse handlingene er påkrevd eller ønskelige. Dette følges opp med:

> So *mathematical modelling competency* means the ability to identify relevant questions, variables, relations or assumptions in a given real world situation, to translate these into mathematics and to interpret and validate the solution of the resulting mathematical problem in relation to the given situation, as well as the ability to analyse or compare given models by investigating the assumptions being made, checking properties and scope for a model etc. In short: modelling competency in our sense denotes the ability to perform the processes that are involved in the construction and investigation of mathematical models. (Niss et al., 2007, s. 12).

Med andre ord kan man si at i modelleringskompetanse ligger det å kunne *utføre overgangene* i modelleringssyklusen. Jfr. syklusen i figur 1 innebærer dette formulering av oppgaver, systematisering, matematisering, matematisk analyse, tolking/evaluering og validering, altså overgangene a-f. Selv om man i *modelleringskompetanse* slik fanger mange viktige sider ved matematisk prosess, er det klart at modelleringskompetanse i seg selv ikke utgjør et fullstendig syn på hvilke kvaliteter man kan ha bruk for i løsing av virkelighetsnære problemer. For eksempel er evne til å argumentere matematisk også viktig, men er ikke del av begrepet modelleringskompetanse. Og om man løser oppgaver i gruppe, er det en rekke *sosiale* aspekter som for eksempel kommunikasjon og samarbeidsevne som heller ikke fanges opp i det (Ibid). Jeg vil derfor ta med et par perspektiver som kan sies å utvide dette kompetansebegrepet, et fra Niss og Jensen (2002) og et fra Maass (2006).

Beskrivelsen av det førstnevnte kan summeres i en figur:



Figur 3: De åtte matematiske kompetanser (Niss & Jensen, 2002, s. 43[1])

Dette er en generell beskrivelse av hva matematisk kompetanse er, og har opprinnelse i det danske KOM-prosjektet (Niss, 2003). Prosjektet pågikk i perioden fra år 2000-2002, var initiert av danske utdanningsmyndigheter og hadde Mogens Niss som leder[2]. Prosjektets hovedanliggende var å basere læreplaner i matematikk på beskrivelsen av matematisk kompetanse, i stedet for å la en tradisjonell liste over emner, krav og læringsmål være

[1] Dette er hovedrapporten fra KOM-prosjektet.

[2] For mer informasjon om KOM-prosjektet, se Niss (2003).

grunnlaget. Man har her kommet frem til åtte matematiske kompetanser som til sammen skal utgjøre et helhetlig bilde av hva matematisk kompetanse er. Fra figur 3 ser vi at de åtte er å

1) tenke matematisk (*tankegangskompetence*), som involverer å stille relevante spørsmål, kjenne og forstå matematiske begrepers rekkevidde og ulike betydninger;

2) fremme og løse matematiske problemer (*problembehandlingskompetence*), altså å stille opp både rene og anvendte problemstillinger, samt å løse dem på opptil flere ulike måter;

3) modellere matematisk (*modelleringskompetence*), som involverer både å lage og analysere modeller, det vil si kunne jobbe begge veier i modelleringssyklusen fra 3.3.2;

4) resonnere matematisk (*ræsonnementskompetence*), som er å følge og bedømme et matematisk resonnement, forstå hva et bevis er og hvordan det fungerer, samt å tenke ut og gjennomføre uformelle og formelle resonnement;

5) representere matematiske størrelser (*repræsentasjonskompetence*), en kompetanse som består både i å kunne forstå og bruke ulike representasjoner (algebraiske, visuelle, geometriske, grafiske, diagrammiske, tabellmessige eller verbale), og å se sammenhengen mellom dem;

6) håndtere matematiske symboler og formalisme (*symbol- og formalismekompetence*), som går ut på å kunne oversette mellom symbol- og formelspråk, og naturlig språk, samt å kunne benytte seg av symbolholdige utsagn og uttrykk;

7) kommunisere i, med og om matematikk (*kommunikationskompetence*), som involverer å sette seg inn i og tolke andres matematikkholdige skriftlige, muntlige eller visuelle utsagn, samt å kunne uttrykke seg på forskjellige måter og presisjonsnivå, og å

8) bruke matematiske hjelpemidler og verktøy (*hjælpemiddelkompetence*), som involverer å ha kjennskap til eksistensen og egenskapene til diverse former for relevante redskaper i matematikk, ha innblikk i deres muligheter og begrensninger og å kunne bruke dem. (Niss & Jensen, 2002, ss. 45-62, min oversettelse).

Vi kan se av figur 3 at de åtte kompetansene er delt inn i to hovedgrupper, nemlig gruppen *å kunne spørre og svare i, med og om matematikk*, og *å kunne håndtere matematikkens språk og redskaper*. Dette er først og fremst gjort av fremstillingsmessige hensyn, og disse to ”overkompetansene”, består fullt og helt av de fire ”underkompetansene”. Det understrekes også at alle åtte kompetanser har like mye med hverandre å gjøre (Ibid).

I denne beskrivelsen ser vi at modellering i seg selv kun er en av totalt åtte kompetanser. På denne måten gis modelleringskompetanse en relativt liten rolle i det generelle bildet, selv om man kan argumentere for at noen av ”modelleringskompetansene” overlapper flere av de resterende syv. For eksempel inngikk det å formulere og løse virkelighetsnære problemer i modelleringskompetanse, og vi finner dette også i kompetanse nummer 2 over.

En annen artikkel som setter helhetlig matematisk kompetanse i fokus, er skrevet av Katja Maass (2006). I begynnelsen av artikkelen hevder forfatteren at modelleringskompetanse så langt ikke har blitt beskrevet på en allsidig nok måte, og at målet med artikkelen er å supplere tidligere beskrivelser. Hun bruker mye datamateriale i sin analyse, og lar både elevenes evner og feiltrinn være grunnlag for analysen. Artikkelen kommer frem til fem grupper av kompetanser som anses for å være nødvendige for å være i besittelse av helhetlig matematisk kompetanse.

1) Underkompetanser for å utføre enkeltstegene i modelleringsprosessen, det vil si å forstå problemet, lage en modell basert på virkeligheten, lage en matematisk modell, løse den matematiske modellen, samt tolke og validere resultatene.

2) Metakognitive modelleringskompetanser, noe som innebærer å tenke på og kontrollere egen tankeprosess.

3) Kompetanser til å strukturere virkelighetsnære problemer og jobbe med disse i retning av en løsning.

4) Kompetanser til å argumentere i relasjon til modelleringsprosessen og å kunne skrive ned denne argumentasjonen.

5) Kompetanse til å se *mulighetene* matematikk gir for løsing av virkelighetsnære problemer, og å vurdere disse mulighetene som positive. (Maass, 2006, s. 139, min oversettelse).

Hovedkonklusjonen i denne artikkelen er at det er langt flere kompetanser involvert i matematisk prosess enn dem som kan knyttes direkte til modelleringsprosessen.

Det finnes en mengde ulike beskrivelser og inndelinger av matematisk kompetanse. I dette kapitlet var hensikten å trekke frem noen av de som er mest relevant i modelleringssammenheng. De to siste, fra Niss og Jensen (2002) og Maass (2006) likner på hverandre i det at de har med modelleringskompetanser som en egen gruppe, samt en rekke andre grupper i tillegg. En kompetanse som går igjen begge steder er matematisk argumentasjon, mens vi kan se ulikheter i at Niss og Jensen (2002) har med punkt om kommunikasjon som Maass (2006) ikke har, mens hun på sin side har med en om metakognisjon som vi ikke finner hos Niss og Jensen. Likevel kan vi konkludere med at det er mye overlapp mellom definisjonene, og at det i denne litteraturen stort sett er enighet om hva matematisk kompetanse er.

Men hva er så matematisk kompetanse i kontekst av modellering? Er det hva vi i begynnelsen av kapitlet kalte modelleringskompetanse, eller er det mer i retning av de to siste perspektivene? I denne saken støtter jeg meg til Niss et al. (2007), da de mener at bruken av termen ”kompetanse” i modelleringssammenheng involverer flere aspekter, gjerne i kombinasjon, og at disse kan supplere og forsterke hverandre. Altså ”ja takk, begge deler”. I denne artikkelen hevdes det at dersom målet med modelleringsaktiviteten er at det skal oppstå et naturlig behov for matematiske konsepter og begreper (*concepts*) under løsingen av et modelleringsproblem, bidrar modelleringskompetanse også til utviklingen av generell matematisk kompetanse.

Når jeg senere i oppgaven snakker om matematisk kompetanse i modellering, menes beskrivelsene i dette kapitlet, som kan sies å danne et relativt komplett bilde av matematisk kompetanse i kontekst av modellering.

3.3.3 Matematikkdidaktiske perspektiver

I dette kapitlet ønsker jeg å se nærmere på to andre matematikkdidaktiske perspektiver enn dem jeg har sett på så langt. Som en generell oversikt har vi blant annet aspekter knyttet til

- *modelleringssyklusen*, som for eksempel kompetanser, autentisitet ved oppgaver, formulering av problemer etc.;
- *kognitive prosesser i modellering,* som for eksempel motivasjon, metakognisjon, sinnsstemninger (affeksjon), følelser, holdninger etc., og
- *undervisning i modellering,* som for eksempel vurdering, klasseromssituasjonen, undervisningsmateriell, lærerkompetanse, lærerutdanningen, modellering på ulike nivå, sammenheng med problembasert læring og prosjektarbeid, IKT og teknologi.

Det viktigste utvalgskriteriet var at de aspektene jeg valgte bidro til å kaste lys over PISA. I PISA tar man blant annet for seg begrepene ”læringsstrategier” og ”motivasjon”, der tilsvarende begreper i modelleringslitteraturen ofte kalles hhv. ”metakognisjon” og ”motivasjon”. I det følgende vil jeg kort skissere hva disse begrepene innebærer og hvordan de kan knyttes til matematikkfaget generelt og matematisk modellering spesielt.

Metakognisjon

Metakognisjon handler om å ha bevissthet om egen tenkning. Dette har mennesker hatt lenge, i alle fall siden Descartes sa ”Ego cogito, ergo sum”[1] (Descartes, 1644, s. 7), og det er i senere tid blitt et populært forskningsobjekt. Metakognisjon kan for eksempel handle om å lære teknikker for hvordan man kan ”sile” informasjon når man skal løse problemer ved å finne ut hva som er viktig eller mindre viktig informasjon, eller lete etter flere måter å løse problemet på for så å velge den ”lureste”. Dette kalles ofte studieteknikker eller læringsstrategier, og handler i grunn om hvordan vi lærer best, å ha kunnskap om det, og sist men ikke minst, bruke denne kunnskapen aktivt. Bevissthet om egen tenkning ses på som viktig for uavhengig håndtering av oppgaver og problemløsing, i tillegg til at det forbedrer tenkeevnen betydelig (Imsen, 2001).

En av de tidligste kildene for selve begrepet metakognisjon slik det brukes i matematikkdidaktikken, er Flavell (1976). Han karakteriserte begrepet slik:

> Metacognition refers to one’s knowledge concerning one’s cognitive processes or anything related to them, e.g. the learning-relevant properties of information or data. … Metacognition refers, among other tings, to the active monitoring and consequent regulation and orchestration of those processes in relation to the cognitive objects or data on which they bear, usually in the service of some concrete goal or objective. (Flavell, 1976, s. 232).

Som vi ser er dette en generell karakteristikk av begrepet, og ikke direkte knyttet til matematikk. Etter at denne definisjonen fikk anerkjennelse, har en rekke forskere innen matematikkdidaktikk vært opptatt av dette begrepet, blant annet Alan H. Schoenfeld. I Schoenfeld (1992) prøver han å skissere hva som utgjør *tenkning* i matematikk, gjerne knyttet til problemløsing og det han kaller *selvregulering* (*self regulation*) i den forbindelse, og kommer slik inn på Flavells beskrivelse av metakognisjon. Schoenfeld understreker at begrepet har mange og ofte disjunkte definisjoner, noe som gjør det vanskelig å bruke begrepet med en entydig betydning. Han skisserer derfor tre kategorier som han mener Flavells beskrivelse kan deles opp i. De er: 1) et individs *forklarende* (*declarative*) kunnskap om deres egen tankeprosess; 2) *selvregulerende* (*self-regulatory*) prosedyrer, som involverer overvåking av egen tenkning og umiddelbare beslutninger, og 3) *holdninger*[2] (*beliefs*) og

[1] ”Jeg tenker, altså er jeg.”

[2] Oversettingen av begrepet *beliefs* er problematisk, da *belief* egentlig betyr *tro*. Jeg velger allikevel å oversette det til *holdninger*, siden dette passer bedre innholdmessig.

sinnsstemninger (*affect*) og deres effekter på prestasjoner. Vi ser at alle disse kan falle inn under Flavells beskrivelse, selv om faktorer som holdninger og forklarende kunnskap er to relativt ulike aspekter ved tenkning. Schoenfeld mente at Flavells beskrivelse og de ulike betydningene man ga det opplevdes som forvirrende, men at hans egen beskrivelse gjorde begrepet metakognisjon mer håndterlig og konkret (Ibid).

En moderne og noe mer oppdatert beskrivelse av metakognisjon finner vi hos Sjuts (2003) i Maass (2006)[1], selv om denne i stor grad er en videreføring av Schoenfelds tredeling. Overordnet definerer også Sjuts metakognisjon som å tenke på og administrere egen tenkning, og deler begrepet inn i følgende tre kategorier:

1) *Forklarende* (*declarative*) *metakognisjon,* som inneholder den diagnostiske kunnskapen om ens egen tenkning, den bedømmende tenkningen om oppgaver, og den strategiske kunnskapen om måter å løse et problem på.

2) *Prosessuell* (*procedural*) *metakognisjon,* som involverer planlegging, befaring, og bedømming av egen tenkning, altså overvåking over egne tanker og handlinger.

3) *Motiverende* (*motivational*) *metakognisjon,* bestående av nødvendige betingelser for å bruke metakognisjon, nemlig motivasjon og viljestyrke til å aktivt ta i bruk denne kunnskapen. (Maass, 2006, s. 118, min oversettelse).

Vi ser altså en ganske lik tredeling som hos Schoenfeld, han har til og med brukt mange av de samme ordene for å forklare begrepet.

I forbindelse med metakognisjon i matematikkfaget, er det en diskusjon om det er kausalitet mellom metakognisjon og prestasjoner, altså om elever med høy grad av metakognisjon oppnår bedre resultater enn andre. Påstanden om at eksistens av metakognisjon hos individer har en positiv effekt på deres prestasjoner finner vi mange steder i litteraturen, blant annet i Schoenfeld (1985, s. 138) og Dahl (2004, s. 153), og i Kramarski, Mevarech og Arami (2002, s. 228) hevdes det i forlengelsen av dette at ulike *typer* undervisning i metakognisjon også har ulik effekt på prestasjonene hos elevene.

Det kan hevdes at matematisk modellering kan åpne for overvåking av prosessen med å løse virkelighetsnære problemer ved hjelp av matematiske modeller. Kjenner man til hvilke delprosesser som inngår i matematisk modellering, gjerne fra fremstillinger som figur 1, kan det bli lettere å identifisere ulike steg i modelleringsprosessen mens man arbeider, samt

[1] Jeg måtte bruke sekundærkilde siden primærkilden er på tysk og vanskelig å få tak i.

nyttegjøre seg av denne kunnskapen. I litteraturen finner man både at metakognisjon kan være en viktig faktor for utvikling av modelleringskompetanser (Maass, 2006), og at det er en klar sammenheng i hvor godt elever presterer i matematikk og den grad de viser til metakognisjon (Dahl, 2004). Altså tyder mye på at metakognisjon og modellering har klare sammenhenger.

Motivasjon

Motivasjon kan sies å være det som forårsaker og vedlikeholder aktivitet hos mennesker, og det som gir denne aktiviteten mål og mening. Det er sterkt knyttet til følelser og sinnsstemninger i handlinger, og er sentralt for å forstå menneskelig atferd. Ofte snakker vi om *positiv* eller *negativ* motivasjon, gjerne drevet av *indre* eller *ytre* krefter, og det knyttes ofte til det å prestere eller en persons selvbilde. Andre begreper som henger sammen med motivasjon er verdier, behov, mål, belønning, straff, interesse, anerkjennelse, eller frykt for å mislykkes. (Imsen, 2001). I det hele tatt er det svært mange begreper og teorier knyttet til motivasjon. For mer om kjente og anvendbare teorier om motivasjon i generell pedagogisk sammenheng, se Imsen (2001).

Selv om motivasjon er et viktig aspekt i de fleste skolefag, spiller motivasjon en relativt liten rolle innen matematikkdidaktisk litteratur sammenliknet med andre begreper. Det betyr ikke at begrepet ikke er relevant for matematikkfaget, men enn så lenge har det blitt relativt lite forsket på innen matematikkdidaktikken. Dette støttes av McLeod (1985), der det hevdes at til da handlet forskning på temaet problemløsing først og fremst om kognitive prosesser, som for eksempel metakognisjon, og lite på sinnsstemninger (*affection*), som er kategorien motivasjon faller inn under. I artikkelen *Affective Issues in Research on Teaching Mathematical Problem Solving* (McLeod, 1985), tar McLeod for seg temaer som han mener matematikkdidaktisk forskning burde vie mer oppmerksomhet.

Ifølge Hannula (2006) har denne situasjonen med lite oppslutning rundt motivasjon innen matematikkdidaktikk vedvart. Her understrekes det at andre, relaterte temaer har vært gjenstand for forskning, men at ingen tidligere perspektiver klarer å beskrive *kvaliteten* på motivasjon i tilfredsstillende grad. Sammen med en tidligere artikkel (Hannula, 2004) beskriver han et teoretisk rammeverk om motivasjon i matematikk. Utgangspunktet er at motivasjon kan ses på som dragningen mot å gjøre visse ting, og frastøtningen fra å gjøre andre. Selve definisjonen lyder slik: “Motivation is a potential to direct behaviour [sic] that is built into the system that controls emotion. This potential may be manifested in cognition, emotion and/or behaviour.” (Hannula, 2004, s. 3).

For å spesifisere hva som menes med *potensial* (*potential*), innfører han begrepene *behov* (*needs*) og *mål* (*goals*), der det er samspillet mellom et individs behov og mål som kan sies å *strukturere* og *regulere* motivasjonen. Han skisserer tre aspekter ved slik strukturering og regulering, nemlig 1) å utlede mål fra behov, der ett behov kan føre til mange mål, og ett mål kan tilfredsstille mange behov; 2) oppfattet tilgang til måloppnåelse, og 3) automatisert regulering av motivasjon, som henspiller på spontane reaksjoner på enkle stimuli. Motivasjon ses *ikke* på som en sinnsstemning eller følelse, men *manifesteres* snarere i form av slike, der følelsene ses på som den mest direkte linken til motivasjonen. Et annet viktig aspekt er at siden mennesker har svært mange og ulike mål og behov, kan de fort komme i konflikt med hverandre.

I Hannula (2006) eksemplifiserer han teorien med et case han kaller ”Frank”. Denne eleven har satt seg mål om å forstå og lære av de matematikkoppgavene han gjør, og å være en flink elev. Det første målet prøver han å nå ved å tenke seg godt om når dette er nødvendig, samt å fordype seg i oppgaven, mens han vil nå det andre målet ved å unngå å bruke kalkulator og løse oppgaver raskt og effektivt. De to målene kommer av behov om hhv. å oppnå kompetanse i faget og å imponere læreren. Det som imidlertid viser seg, er at de to målene kommer i konflikt så fort han får en vanskelig oppgave. På den ene siden vil han unngå å bruke den, men følte seg samtidig tvunget til å bruke kalkulatoren i forsøk på å løse oppgaven raskt. Dette gjorde at han måtte stoppe og tenke seg om, noe som også stred med at han ville løse oppgaven raskt. Disse konfliktene skapte først følelsen bekymring, senere panikk, og til slutt frustrasjon og sinne. Når han til slutt mestret motgangen, ble han glad. Her blir det tydelig at Franks følelser har nær sammenheng med motivasjonen hans. Motivasjonen blir drevet og regulert av behovene han har og målene han setter seg, og gir seg utslag i mer eller mindre sterke følelser etter hvert som har arbeider.

I rammeverket til Hannula (2004, 2006) knyttes ikke motivasjon direkte til modellering, men til matematikkfaget generelt. I en artikkel av Zbiek og Conner (2006) forsøker man å beskrive hvilke effekter *modellering* kan gi i form av motivasjon hos elevene. Her hevdes det at modellering kan motivere elevene til å engasjere seg i matematikk i form av tre typer motivasjon:

1) Bekreftelse på at virkelighetsnære problemer appellerer til elever. Dette skjer ved at elevene ser sammenhenger mellom matematikk og verden ellers, og ser at matematikk kan være nyttig.

2) Motivasjon til å lære matematikk generelt.

3) Motivasjon til å ville lære *ny* matematikk, som skjer når man møter problemer der den matematikken man kan fra før, ikke er tilstrekkelig for å løse problemet. (Zbiek & Conner, 2006, ss. 105-106, min oversettelse).

Et eksempel på det siste punktet, er at *behovet* for å utlede en ny egenskap eller parameter i for eksempel funksjonsdrøfting (for eksempel derivasjon) kan motivere læring av en ny prosedyre eller ny karakteristikk. Motivasjonen kan dukke opp i ulike deler av modelleringssyklusen, og det er vanskelig å si noe om utfallet på forhånd. Hovedpoenget i artikkelen er at man kan motivere elever til å studere matematikk ved å vise dem at virkelighetsnære problemer kan løses ved hjelp av matematisk anvendelse.

3.4 Matematisk modellering og problemløsing

Begrepet *problemløsing*, på engelsk *problem solving*, er i nær slekt med begrepet matematisk modellering. Før jeg behandler begrepet modellering videre, ser jeg det som hensiktsmessig å avklare forholdet mellom de to. Som nevnt inneholder PISA 2003 en egen problemløsingsdel, og jeg vil i dette kapitlet begrunne hvorfor denne ikke er en større del av oppgaven enn det den er.

I seg selv er problemløsing et vidt og upresist begrep i seg selv. Det gjenspeiles i Blum og Niss (1991) ved dette sitatet: ”Now, *problem solving* simply refers to the entire *process* of dealing with a problem – pure or applied – in attempting to solve it” (Blum & Niss, 1991, s. 2). Samt i dette: ” The meaning of the term ‘problem solving’ is rather vague, a kind of umbrella under which different theoretical approaches co-exist” (Nesher, Hershkovitz, & Novotna, 2003, s. 153). Dette fenomenet har røtter i det faktum at begrepet problemløsing brukes i mange ulike fagområder, og det er således mangel på enighet om hva det betyr. Problemløsing brukes også mye i matematikk, men heller ikke her har det en ensartet betydning. Med andre ord avhenger betydningen av begrepet problemløsing ofte av hvilken kontekst det står i.

En kjent og utbredt beskrivelse av problemløsing i matematikk finner vi hos Polya (1971). Prosessen beskrives i fire trinn: Å 1) forstå problemet; 2) lage en plan; 3) utføre planen og; 4) se tilbake på prosessen. Polya mener at det å planlegge hva man vil gjøre vil hjelpe en til å unngå problemer man kanskje ville fått om man angriper problemet umiddelbart. Det blir altså lettere å ”sjekke” hva man gjør mens man arbeider. Vi ser fra gjennomgangen i kapittel 3.3 at det allerede her kan identifiseres likeheter med modelleringssyklusen, for eksempel det å se tilbake på prosessen (validering). Uten å gå i detaljer er det lett å se at Polyas syn på problemløsing har likhetstrekk med matematisk modellering. For mer om denne beskrivelsen av problemløsing se for eksempel Christensen (2004) og Polya (1971).

En annen og like kjent beskrivelse av problemløsingsevner er utviklet av Alan H. Schoenfeld og presenteres blant annet i boken *Mathematical Problem Solving* (Schoenfeld, 1985). I boken skisserer han fire kategorier som han mener er nødvendige for å karakterisere en persons problemløsingsevner. De fire, som til en viss grad overlapper og vekselvirker, er

> *Ressurser* (*resources*). Mengden matematisk kunnskap personen bringer med seg i den matematiske situasjonen. Man trenger å vite hvilke forutsetninger en person har for å vite hva den faktisk klarer å oppnå i et gitt tilfelle.
>
> *Heuristikk* (*heuristics*). Tommelfingerregler for effektiv problemløsing, med andre ord strategier for å gjøre fremgang i kjente og ukjente situasjoner. Eksempler er å utnytte analogier og jobbe baklengs.
>
> *Kontroll* (*control*). Disponering av resurser, planlegging og overvåking av egen tenkning. God kontroll over egen oppførsel gir best utnytting av evner, samt effektiv løsing av problemer.
>
> *Oppfatningssystemer* (*belief systems*). Det matematiske ”verdensbilde”, altså det perspektivet på matematikk man entrer situasjonen med. Ens oppfatning av matematikk styrer tilnærmingsmetoder, valg av strategier, tidsbruk etc. Oppfatningssystemet etablerer med andre ord konteksten de tre andre kategoriene opererer i. (Schoenfeld, 1985, ss. 44-45, min oversettelse).

Disse aspektene knyttes til det Schoenfeld kaller *matematisk oppførsel* (*mathematical behavior*), der alle fire er nødvendige for å forklare en persons oppførsel i matematiske situasjoner, inkludert hvorfor personen lykkes eller feiler i forsøket på å løse matematiske problemer. Mens Polya fokuserer på konkrete handlinger og strategier i problemløsingsprosessen, ser vi at Schoenfeld beskriver mer abstrakte forhold ved prosessen.

En artikkel ved navn *From Problem Solving to Modelling – A meta-analysis* av Mousoulides, Christou, og Sriraman (2006), tar for seg store deler av forskningslitteraturen om temaet problemløsing. Dette er en metaanalyse av utviklingen innen problemløsing de siste 20 årene, der de hevder at betydningen av begrepet problemløsing har forandret seg dramatisk over denne perioden. I artikkelen omtaler de matematisk modellering som en *type* problemløsing, og hevder at et økende antall forskere i matematikkdidaktikk fokuserer på modellering som den mest aktuelle formen for problemløsing. Videre hevder de at problemløsing og modellering som læringsprosesser står i sterk kontrast til matematiske aktiviteter der man kun jobber med det de kaller ”tekstoppgaver”. De hevder at denne type rutineoppgaver ikke forbereder elevene på å møte samfunnet, og at man trenger økt fokus på oppgaver hentet fra kontekster utenfor skolen (Mousoulides et al., 2006).

En av hovedforskjellene på begrepene matematisk modellering og problemløsing slik jeg ser det, er at mens modellering har en relativt presis betydning, er behovet for begrepsavklaring sterkere når det kommer til problemløsing. Mener man Polyas, Schoenfelds eller en annen tolking? En annen viktig forskjell er at mens problemløsing, ifølge sitatet av Blum og Niss (1991), kan handle om både rene *og* anvendte problemer, har matematisk modellering opphav i spennet *mellom* matematikken og den virkelige verden (Niss et al., 2007). Det er ikke modellering slik det beskrives i denne litteraturen om den virkelige eller ”ekstramatematiske” verden ikke er involvert i den situasjonen som skal modelleres matematisk.

En artikkel av Lesh og Yoon (2007) skisserer forskjellene mellom problemløsing i generell betydning og modellering på en enkel og grei måte. Her beskrives problemløsing som en prosess der man kommer fra det som er gitt til det som er målet på en måte som ikke er opplagt. Karakteristiske trekk ved prosessen er at utgangspunktet er veldefinert, de relevante dataene er uttrykt i matematisk form, altså er ikke den matematiske beskrivelsen av situasjonen i seg selv problematisk. Målet er å produsere et matematisk ”svar”, og trenger ikke nødvendigvis å gi mening utenfor matematikken. Problemet er altså å finne et sett med tillatte steg for å komme seg fra ”det som er gitt” til ”det som er målet” ved å bevege seg på en sti som aldri trenger å forlate den matematiske verden (Ibid). I matematisk modellering er man på den annen side interessert i utviklingen av meningsfulle og anvendelige matematiske sammenhenger og fokuserer på problemer med følgende karakteristikker: Den problematiske situasjonen involverer et interessant matematisk system som eksisterer utenfor den matematiske verden, og det mest krevende aspektet ved startfasen er å *tenke ut* relevante sammenhenger, mønstre og regelmessigheter, samt ulike løsningsmetoder der relevante matematiske verktøy kan benyttes. Produktet ved modellering er ikke et enkeltsvar, men er ofte en mer generell matematisk beskrivelse av den opprinnelige situasjonen. Av disse årsakene inneholder modellering flere aspekter ved matematiske prosesser da man, i motsetning til problemløsing, også beveger seg utenfor den matematiske verden (Ibid).

3.4.1 Problemløsing i PISA 2003

Som nevnt tidligere var det en egen problemløsingsdel i PISA 2003, og i den forbindelse har man måttet bestemme seg for hva begrepet skal inneholde. I rammeverket for PISA 2003 har man landet på denne definisjonen:

> Problem solving is an individual’s capacity to use cognitive processes to confront and resolve real, cross-disciplinary situations where the solution path is not immediately obvious and where the literacy domains or curricular areas that might be applicable are not within a single domain of mathematics, science or reading. (OECD, 2003, s. 156).

Vi ser altså at definisjonen legger vekt på å løse virkelighetsnære problemer, men at den er relativt generell i forhold til både Polyas og Schoenfelds definisjon. Den er noe løsrevet fra faget matematikk, og fungerer mer som en paraply for alle de tre fagområdene, som sitatet fra Nesher et al. (2003) antyder at begrepet ofte gjør. Man har altså valgt å legge de oppgavene som tester problemløsing *innen* de tre fagområdene lesing, matematikk og naturfag under de respektive testene for disse. De oppgavene elevene møter i problemløsingstesten (OECD-PISA i Norge, n.d.b) er ment til å tilsvare problemer man møter i dagliglivet, som ikke nødvendigvis involverer kunnskap man finner i læreplanen fra skolen. Oppgavene krever på den annen side at elevene organiserer og analyserer informasjon og finner løsninger som tar hensyn til oppgavens betingelser. Man har valgt å begrense mengden lesing i oppgavene, kun teste enkle matematiske ferdigheter og ingen naturfaglige ferdigheter. I stedet har man valgt å fokusere på problemløsingsprosessene i seg selv, men uten å definere problemløsing som et eget fagområde (Kjærnsli et al., 2004).

Grunnen til at jeg ikke analyserer problemløsingsoppgavene eller lar problemløsingsdelen i PISA 2003 bli en større del av oppgaven er tredelt. For det første er det for stor avstand mellom faget matematikk og disse problemløsingsoppgavene. Modellering på sin side er dypt integrert i faget matematikk, da matematiske anvendelser og modeller er hjørnesteiner i det teoretiske rammeverket, mens problemløsing i PISA kun involverer enkle matematiske ferdigheter.

For det andre er det relativt stor teoretisk avstand mellom de to begrepene. Jeg finner få sammenhenger mellom modelleringssyklusen og definisjonen på problemløsing i PISA. Det er likheter i at man bruker virkelighetsnære problemer der man umiddelbart ikke ser en løsning, at man må bruke analytiske evner som for eksempel å representere, løse og reflektere for å løse problemet, og at man må vurdere løsningen opp mot den opprinnelige konteksten. Med dette stopper også likhetene, og disse er imidlertid svært generelle likheter, og oppleves som lite fruktbare i en dypere studie. Det er ikke flere likheten her enn det er mellom modelleringslitteraturen og definisjonene av problemløsing fra Polya og Schoenfeld.

Den tredje og siste årsaken er at oppgavene i problemløsing i PISA 2003 (OECD-PISA i Norge, n.d.b) naturlig nok ikke er gode modelleringsoppgaver. Dette henger sammen med at de som nevnt ikke involverer matematikk i særlig grad, mens vi i kapittel 3.3 så at gode modelleringsoppgaver forutsetter nettopp dette. Slik vil det i det videre være lite nyttig å analysere disse oppgavene i lys av matematisk modellering, verken teoretisk eller empirisk.

3.5 PISA og matematisk modellering

I rammeverket kan vi lese at PISA undersøker elevenes evne til å analysere, resonnere og kommunisere matematiske ideer effektivt, mens de formulerer, løser og tolker matematiske problemer i en variasjon av situasjoner (OECD, 2003). I Kjærnsli et al. (2004) karakteriseres matematikk som et verktøy for å beskrive, bearbeide, og analysere fenomener, og vektlegger prosessene knyttet til det å *gjøre* matematikk.

I Kjærnsli et al. (2004) klargjøres også storparten av de matematikkdidaktiske perspektivene man benytter seg av i PISA 2003. Man har en generell diskusjon om hvilken rolle matematikk har i samfunnet, for eksempel viktigheten av matematikk i teknologiske samfunn, og hvordan dagliglivet er styrt og regulert av matematikk. I Ernest (2000) hevdes det at denne typen matematisering i det moderne samfunn har vokst eksponensiellt de siste årene. Et begrep som trekkes frem i diskusjonen, er matematikkens *formaterende kraft* (Skovsmose, 1994), som henspiller på det samme, nemlig at matematikken påvirker og regulerer store deler av samfunnet på mer eller mindre synlige måter. Til slutt kommer man inn på argumenter for matematikk i skolen, for eksempel begrunnelser basert på *funksjonalitet*, dvs. individers evne til å takle samfunnets utfordringer, et såkalt nytteaspekt, og *allmenndanning*, dvs. at man ser matematikk som en vitenskap og et felles tankegods alle medlemmer av samfunnet bør ta del i. Under sistnevnte kategori faller også argumenter som knyttes til *kultur, selverkjennelse* og *demokrati* (Kjærnsli et al., 2004).

I rammeverket for PISA (OECD, 1999, 2000, 2003) finner vi en rekke matematikkdidaktiske definisjoner og perspektiver som forsøker å ta hensyn til slike faktorer. Begreper som *mathematical literacy* og matematisk kompetanse som vi analyserer under er eksempler på dette. I tillegg er det en rekke andre begreper man har inkludert i PISA som ikke omtales eksplisitt i rammeverket, men hentes fra andre teorier og undersøkelser PISA bygger på. Eksempler på dette er hjemmebakgrunn, skolefaktorer, eller det som er tema for slutten av dette kapitlet, selvregulert læring.

I det følgende sammenlikner jeg noen av de mest sentrale punktene i teorirammeverket for PISA med modelleringslitteraturen fra kapittel 3.3. Hovedpunktene er *mathematical literacy*, matematiseringssyklusen, matematisk kompetanse og aspektene læringsstrategier og motivasjon. Jeg minner om at overskriftene her er begreper hentet fra PISA, og de sammenliknes fortløpende i henhold til gjennomgangen av matematisk modellering i kapittel 3.3.

3.5.1 Mathematical literacy

Som nevnt ligger det et omfattende teoretisk rammeverk til grunn for PISA (OECD, 1999, 2000, 2003), som i detalj beskriver hva som måles og analyseres i undersøkelsene. En av de mest sentrale definisjonene vedrørende matematikk i PISA, er definisjonen av det man kaller *mathematical literacy*. Her er de kunnskapene og ferdighetene PISA antar at elevene trenger i faget for å kunne klare seg i samfunnet, samlet i en kompakt karakteristikk:

> Mathematical literacy is an individual’s capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded judgments and to use and engage with mathematics in ways that meet the needs of that individual’s life as a constructive, concerned and reflective citizen. (OECD, 2003, s. 24).

Begrepet *mathematical literacy* er valgt for å utheve matematikkens funksjon i ulike situasjoner og kontekster. Vi kan tydelig se hvordan matematikk knyttes til virkelighetsnære situasjoner, og begrepet har derfor nær relasjon til den virkelige verden. Dette er også intuitivt ut i fra undersøkelsens målsettinger om å måle kunnskaper som er nødvendige nettopp i denne type virkelige situasjoner elevene kommer opp i som deltagere i et samfunn. I forbindelse med oversettingen av begrepet til norsk, har dette vist seg å være relativt vanskelig fordi man på norsk mangler ord som inneholder hele betydningen av ordet *literacy*. Jeg ser ikke noe poeng i å gjøre rede for diskusjonen her, og velger i resten av oppgaven å bruke begrepet *mathematical literacy* med den betydningen det er gitt i rammeverket. For mer om problematikken rundt oversettingen, se Turmo (2004).

Selv om man ikke har en sentral, tilsvarende definisjon for noe slikt i modellerings-litteraturen, er det klart at det er en sammenheng likevel. Likheten ligger i at man tar utgangspunkt i virkelighetsnære situasjoner og problemer, i tillegg til at man ser på hvilken rolle matematikk spiller i verden. Dette var for eksempel Maass (2006) inne på i sin definisjon av matematisk kompetanse i kapittel 3.3.2, der hun sier at en kompetanse (nummer 5) ligger i å se mulighetene matematikk gir til å løse virkelighetsnære problemer, det samme poenget Zbiek og Conner (2006) var inne på vedrørende motivasjon. I PISA har man altså som grunnidé at matematikk brukes i en variasjon av virkelighetsnære situasjoner og kontekster, altså samme grunnidé som i teorigrunnlaget for modellering. Et par sitater støtter dette synet:

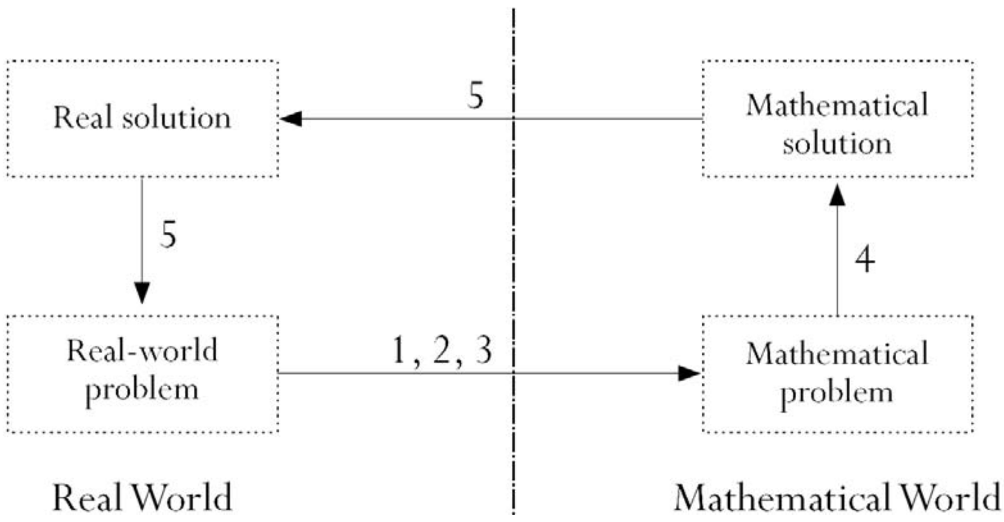
> PISA uses a ‘literacy’ orientation that is intended to extend well beyond simple curricular knowledge, to the ability of students to *use* their knowledge and skills to meet real-life challenges. This provides the possibility of a strong link with ideas about applications and modelling in mathematics. (Turner, 2007, s. 433).

> The OECD *Programme for International Student Assessment* in Mathematics is focussed [sic] on mathematical literacy, with items in the test that seek to reflect problems in the real world. They have a significant modelling demand. (Burkhard & Pollak, 2006, s. 187).

Som nevnt i kapittel 3.4 kan vi ikke betegne en aktivitet som matematisk modellering om ikke den virkelige eller ekstramatematiske verden er involvert, på samme måte som begrepet *mathematical literacy* også er uløselig knyttet til verden ellers.

3.5.2 Matematiseringssyklusen

Under redegjørelsen for matematisk modellering så vi at *matematisering* kun var en delprosess i modelleringssyklusen, nemlig overgangen fra stadiet *system* til *matematisk system*, mens *matematisering* i PISA betegner den fundamentale prosessen elevene bruker for å løse slike virkelighetsnære problemer. I PISA henspiller derfor *matematisering* på hele prosessen med å arbeide med matematikk. Prosessene som inngår i matematiseringen, og hvordan de forholder seg til hverandre, er vist i følgende figur:



Figur 4: Matematiseringssyklusen etter OECD (2003, s. 38)

Matematiseringen finner sted ved at man

1) begynner med et problem hentet fra virkeligheten;
2) organiserer problemet i henhold til matematiske konsepter, og identifiserer relevante algoritmer;
3) forenkler problemet ved å beskjære irrelevant informasjon, gjøre antakelser, generalisere og formalisere. Dette vil fremheve de matematiske karakteristikkene til situasjonen og transformerer det opprinnelige problemet til et matematisk problem som inkluderer all relevant informasjon;
4) løser det matematiske problemet, og
5) gir mening til den matematiske løsningen i det opprinnelige problemets kontekst, og inkluderer løsningens begrensninger om de eksisterer. (OECD, 2003, s. 38, min oversettelse).

Her ser vi klare likheter med modelleringssyklusen, for om man sammenlikner figur 4 med figur 1, ser man at de er like på flere områder. I begge tilfeller beveger vi oss mellom den virkelige og den matematiske verden, begge handler blant annet om å omforme et virkelighetsnært problem til ren matematikk, regne på denne matematikken med relevante operasjoner, for så å oversette svarene tilbake til virkeligheten og vurdere svaret mot det opprinnelige problemet. Ulikhetene slik jeg ser det, ligger blant annet i omfanget til fremstillingen av de to syklusene. Mens vi i modelleringssyklusen kan finne *seks* stadier på veien rundt (*perceived reality, domain of inquiry, system, mathematical system, model results* og *action/insight*), finner vi kun *fire* i matematiseringssyklusen (*real-world problem,* *mathematical problem*, *mathematical solution* og *real solution*). Tilsvarende hadde vi *seks* overganger (kompetanser) i figur 1, mens vi har *fem* i figur 4. Man skulle kanskje tro at modelleringssyklusen slik er noe mer kompleks enn matematiseringssyklusen, men om man tar forklaringene for den sistnevnte med i sammenlikningen, ser vi at også denne er relativt omfattende. I rammeverket forklarer man altså de ulike elementene i matematiserings-syklusen nærmere, men i det videre passer det bedre å sammenlikne disse forklaringene med kompetansebegrepet i modellering (kapittel 3.3.4).

Det er for øvrig vanskelig å sette fingeren på når og hvor fremstillingen av matematisk prosess i form av en syklus først dukket opp. En relativt gammel versjon av en slik syklus finner vi imidlertid i et verk som utgis av NCTM[1] som holder til i Virignia, USA. Beskrivelsen av denne likner i såpass stor grad på syklusen i PISA at det ikke er nødvendig å ta den med her. For mer om denne versjonen, se den norske TIMSS-rapporten fra TIMSS 2003 (NCTM, 1989 i Grønmo, Bergem, Kjærnsli, Lie og Turmo, 2004).

3.5.3 Matematisk kompetanse

Matematiseringssyklusens aktiviteter

Matematiseringen slik den er beskrevet i rammeverket, er delt inn i tre grupper av matematiske ”aktiviteter”. De tre gruppene er: Å 1) oversette problemet fra ”virkeligheten” til matematikk; 2) arbeide med den ”deduktive” delen av syklusen, altså den rene matematikken, og 3) reflektere over og validere hele matematiseringsprosessen. Den første gruppen av aktiviteter involverer å

- identifisere den relevante matematikken i henhold til problemet;
- representere problemet på en annen måte; det vil si å organisere det i henhold til matematiske konsepter og gjøre passende antakelser;
- forstå forholdet mellom problemets språk og det formelle språket som er nødvendig for å forstå det matematisk;
- identifisere regelmessigheter, mønstre og relasjoner;
- gjenkjenne fellestrekk med kjente problemer, og å
- oversette problemet til matematikk, for eksempel til en matematisk modell. (OECD, 2003, s. 39, min oversettelse).

Her ser vi klare likheter med det som ble beskrevet som matematiske kompetanser i kapittel 3.3.2, da representasjon, problemformulering og oversetting av problemet til matematisk

[1] National Council of Teachers of Mathematics, se http://www.nctm.org/. Her ligger onlineversjoner av verkene.

språk svarer til kompetanser som ble presentert der. For øvrig ser vi at begrepet *matematisk modell* dukker opp her, som et *eksempel* på hvordan problemsituasjonen kan se ut i matematiske termer, mens den hadde en mer sentral plass i modelleringssyklusen i kapittel 3.3.1. Vi ser altså en liten ulikhet i den matematiske modellens posisjon. I rammeverket går man videre med å beskrive syklusen, som nå fortsetter i rent matematisk språk og nå mer eller mindre rendyrkede matematiske evner og kunnskaper som benyttes. Den andre gruppen av aktiviteter involverer

- bruk av og veksling mellom ulike matematiske representasjoner;
- bruk av symbolsk, formelt og teknisk matematisk språk;
- forenkling og tilpasning av de matematiske modellene;
- kombinasjon og integrasjon av modeller;
- argumentasjon, og
- generalisering. (OECD, 2003, s. 39, min oversettelse).

Igjen ser vi likheter fra kapittel 3.3.2. For eksempel har vi kompetanse 3, 4, 5 og 6 fra beskrivelsen til Niss og Jensen (2002) som overlapper delvis eller helt med flere av disse. Det siste steget i prosessen involverer kritisk refleksjon over resultatene og hele matematiseringsprosessen for øvrig. Slik refleksjon finner sted under alle stegene i prosessen, men det er spesielt viktig ved konklusjonsfasen. Aspekter ved refleksjon og validering er å

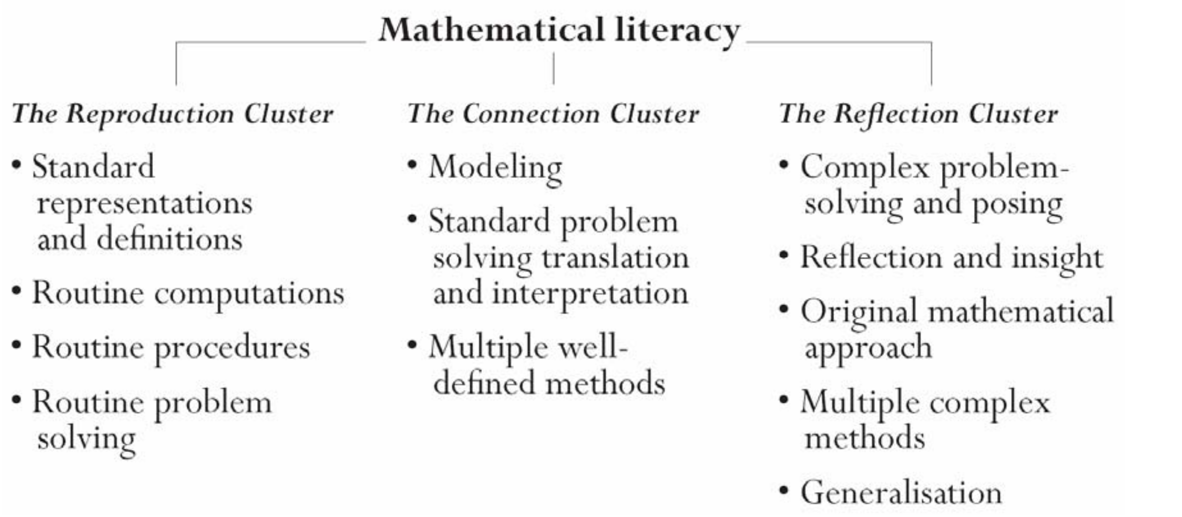
- forstå omfanget og begrensningene av matematiske konsepter;
- reflektere over matematiske argumenter;
- forklare og rettferdiggjøre resultater;
- kommunisere prosessen og løsningen, og å
- kritisere modellen og dens grenser. (OECD, 2003, s. 39, min oversettelse).

Også her ser vi klare likheter med stoffet i kapittel 3.3.2, slik det for øvrig har vært hele veien. Både det å kontinuerlig validere modellen, reflektere over de ulike stegene og tankeprosessene mot slutten av syklusen er så å si sammenfallende med momenter fra modelleringslitteraturen.

Matematisk kompetanse

I rammeverket (OECD, 2003) vektlegges det at man, i tillegg til å engasjere seg i matematiseringssyklusen slik den er beskrevet over, trenger å besitte ulike matematiske kompetanser som samlet sett utgjør det man kan kalle helhetlig matematisk kompetanse. Her må det påpekes at kilden som er brukt i rammeverket er den danske matematikkdidaktikeren Mogens Niss (Niss, 1999 i OECD, 2003), altså samme Niss som er henvist til flere ganger i teorien om modellering over. De kompetansene man har valg ut i rammeverket for PISA, er altså de samme åtte som er beskrevet i kapittel 3.3.2 (Niss & Jensen, 2003), der den eneste forskjellen er at kilden er en annen publikasjon av Niss. Det at den samme teorien brukes begge steder forsterker bare sammenhengen mellom teorien for modellering og rammeverket for PISA.

Rammeverket avslutter kapitlet om dette med å påpeke at disse kompetansene ikke skal testes individuelt, men i henhold til såkalte *competency clusters*, det vil si at man danner *kompetanseklasser* som bygger på disse åtte kompetansene. De tre kompetanseklassene illustreres med følgende figur:



Figur 5: Diagramfremstilling av de tre kompetanseklassene. (OECD, 2003, s. 49).

Som vi ser, er de tre kompetanseklassene *The Reproduction Cluster*, som involverer enkle representasjoner, rutineberegninger, rutineprosedyrer og rutineproblemløsing, *The Connection Cluster*, som involverer modellering, standard problemløsing og tolking, samt multiple veldefinerte metoder, og til slutt *The Reflection Cluster*, som involverer kompleks problemløsing og problemstilling, refleksjon og innsikt, originale matematiske tilnærminger, multiple komplekse metoder og generalisering (OECD, 2003, s. 49, min oversettelse). De åtte kompetansene er altså ikke inndelt direkte i tre grupper, men man har laget disse tre klassene på *grunnlag* av dem. De tre klassene spenner altså på *tvers* av de åtte kompetansene. Oppgavene i PISA lages og velges ut i tråd med disse tre kompetanse-klassene, da denne beskrivelsen fungerer som en kognitiv taksonomi av hvordan elevene skal kunne ta i bruk sin matematiske kunnskap. Måten man her har operasjonalisert matematisk kompetanse på, minner for øvrig om det som ofte kalles *Blooms taksonomi*. Noe unyansert kan vi si at Blooms taksonomi inneholder en seksdelt klassifisering av kvaliteten på kunnskaper og ferdigheter, som i noen sammenhenger forkortes til tre grupper. Denne forkortede tredelingen av Blooms taksonomi har likhetstrekk med tredelingen av kompetansebegrepet vi ser i rammeverket for PISA. For mer om denne taksonomien, se Bloom (1956). Uansett, PISAs tredeling skal ikke fungere som en beskrivelse av varierende vanskegrad, man kan for eksempel ha *komplekse* utregninger (*The Reproduction Cluster*), eller *enkle* bevis (*The Reflection Cluster*), selv om det er åpenbart at testing av kompetanseklassene mot høyre i figur 5 *ofte* medfører større grad av kompleksitet (Kjærnsli et al., 2004).

Det kan se ut til at OECD/PISA har inndelt kompetansene i disse kompetanseklassene for å gjøre det mulig å operasjonalisere dem i form av konkrete oppgaver, og for å lage et verktøy som *måler* de ulike kompetansene. I kildematerialet (for eksempel Niss og Jensen, 2002) som PISA har hentet de åtte kompetansene fra, har man faktisk valgt en annen inndeling enn det som er tilfelle i rammeverket. For det første har vi den todelingen vi var inne på i kapittel 3.3.2, nemlig en todeling av de åtte kompetansene. Denne har riktignok ingen funksjon analytisk, da den hovedsakelig ble gjort av fremstillingsmessige grunner. Men når de kommer til en persons besittelse av hver kompetanse, sier de at denne kan måles langs tre ”retninger”, tilsvarende med hvordan det gjøres i PISA, men med annen inndeling. De tre retningene er

1) dekningsgrad (*dækningsgrad*), som er hvor høy grad de aspekter som karakteriserer kompetansen er dekket hos personen, altså hvor mange av aspektene personen kan aktivere i ulike situasjoner;

2) aksjonsradius (*aktionsradius*), som involverer det spekter av matematiske sammenhenger og situasjoner personen kan aktivere kompetansen i, og

3) teknisk nivå (*teknisk niveau*), som er hvor komplekse og teknisk avanserte situasjoner og verktøy personen kan aktivere kompetansen *på.* (Niss & Jensen, 2002, s. 65, min oversettelse).

Vi har altså en helt ulik tredeling i denne litteraturen enn i PISA, selv om det er denne litteraturen PISA henter materialet fra. Så hvorfor bruker man ikke den samme? Det er lett å se at tredelingen hos Niss og Jensen (2002) er relativt abstrakt i forhold til den man bruker i PISA. Begrep som dekningsgrad, aksjonsradius og teknisk nivå er nok vanskeligere å operasjonalisere enn begreper som reproduksjon, forbindelser og refleksjon. Og i dette er det grunn til å tro at årsaken ligger, nemlig at de konstruktene som brukes her er vanskelig å måle i den type undersøkelse PISA er. Det er viktig å huske at PISA er en undersøkelse, ikke en samling teorier, og at operasjonaliseringer av den typen vi ser her er nødvendig for å kunne gjøre målinger og analyse av elevers prestasjoner.

3.5.4 Selvregulert læring

I PISA inngår en rekke begreper knyttet til det man kaller *selvregulert læring*. Disse var tema for den såkalte CCC-undersøkelsen, *Cross-Curricular Competencies*, som var en del av PISA 2000[1]. Dette ble oversatt til *Kompetanser på tvers av fag* på norsk, og betegnelsen henspiller på at kompetanser kan være knyttet til ikke bare ett, men flere fag, og trenger heller ikke å være av ren *faglig* art (Knain, 2002). Begrepene som inngår i begrepet *selvregulert læring* i PISA er *læringsstrategier*, *motivasjon* og *selvoppfatning*. I PISA 2000 ble elevene stilt spørsmål innen disse temaene knyttet til skolefag generelt, mens man i PISA 2003 valgte å knytte dem til matematikk spesielt. Dette var for å muliggjøre en mer direkte sammenlikning av respons på spørsmålene og prestasjoner i matematikk (Kjærnsli et al., 2004). I PISA 2006 ble de tilsvarende spørsmålene i spørreskjemaet knyttet til naturfag (Kjærnsli et al., 2006).

I denne oppgaven har jeg valgt å konsentrere meg om de to første begrepene, læringsstrategier og motivasjon, siden disse to har begrepsmessig sammenheng med begrepene metakognisjon og motivasjon i modelleringslitteraturen. Det siste begrepet innen selvregulert læring, selvoppfatning, har ikke en opplagt parallell innen modellering og inkluderes ikke i denne oppgaven. I det følgende kommer en teoretisk sammenlikning med de tilsvarende begrepene brukt i modelleringssammenheng, mens jeg i kapittel 5 gjør en mer empirisk fremstilling. I dette kapitlet prøver jeg altså å belyse hvor stort teoretisk samsvar det er mellom de respektive begrepene.

Læringsstrategier

I Kjærnsli et al. (2004) vises det at valg av begreper, konstrukter og spørsmål i PISA er fundert på bredt teoretisk grunnlag (Artelt, 2000, Chamot et al., 1999, Nisbet & Shuksmith, 1986 og Weinstein & Mayer, 1986 i Kjærnsli et al., 2004). Dette handler om hvilke læringsstrategier elevene bruker når de lærer, hvordan strategiene anvendes og kategoriseringer av læringsstrategier. I PISA har man valgt å kartlegge tre læringsstrategier,

[1] CCC-undersøkelsen var valgfri, og 21 OECD-land deltok (Lie et al., 2001)

som da utgjør de *måleinstrumenter* man har av begrepet. Det understrekes at alle tre måleinstrumentene knyttes til generelle læringssituasjoner i matematikk, og de måler derfor ikke i hvilken grad elevene *tilpasser* bruken av strategiene til ulike læringssituasjoner. Et problem dette fører med seg er at måleinstrumentenes generelle natur kan føre til at sammenhengen mellom læringsstrategiene og faglige prestasjoner blir svakere enn vi kanskje skulle forvente (Knain & Turmo, 2003). De tre måleinstrumentene er *ferdighetstrening i matematikk* (*memorisation strategies*), *utdypning i matematikk* (*elaboration stategies*) og *kontrollstrategier i matematikk* (*control strategies*)[1].

I en tematisk rapport om CCC-undersøkelsen i PISA 2000 av Erik Knain (Knain, 2002) hevdes det at for å regulere egen læring, må elevene kunne velge, kombinere og koordinere ulike læringsstrategier. Eksempler er å planlegge, bestemme mål, finne relevant kunnskap og sjekke læring underveis. I rapporten skilles det mellom kognitive og metakognitive strategier. De to viktigste kognitive læringsstrategiene er *memoreringsstrategier*, for eksempel å gjenta det en leser mange ganger for seg selv eller memorere de viktigste begrepene, og *utdypningsstrategier*, for eksempel å konstruere, integrere og transformere kunnskap. Som vi ser er versjoner av begge disse inkludert i PISA. Det siste instrumentet, *kontrollstrategier i matematikk*, handler om refleksjon over læringsutbytte og læringsmål. Dette er en form for metakognisjon, og ses på som nødvendig for å kunne gjøre justeringer og tilpasse arbeidsmåten etter arbeidssituasjonen (Ibid).

Sammenliknet med begrepet *metakognisjon* ser det ut som om *læringsstrategier* i PISA brukes noe bredt, og at det er bare delvis overlapp mellom disse to. Læringsstrategier defineres til å involvere både kognitive og metakognitive aspekter, og omfavner slik mer enn ”bare” metakognisjon, som på sin side er et kognitivt aspekt. Slik sett har metakognisjon sterkest teoretisk sammenheng med måleinstrumentet *kontrollstrategier*, da det var dette som skulle representere det metakognitive aspektet i begrepet *læringsstrategier*. Dette poengteres i Kjærnsli et al. (2004, s. 181). Samtidig må det understrekes at metakognisjon er mer enn bare kontrollstrategier, og det fanges ikke opp i sin fulle betydning i *kontrollstrategier* slik det brukes i PISA. I kapittel 3.3.3 ble det trukket frem at metakognisjon blant annet innebærer strategisk kunnskap om måter å løse problemer på (*forklarende metakognisjon* i Sjuts’ definisjon), som egentlig kan knyttes til begrepet læringsstrategier generelt.

[1] Dette er PISA-gruppens oversettinger.

I Maass (2006, s. 118) trekkes PISAs *selvregulerende læring* frem i gjennomgangen av begrepet metakognisjon. Det gjøres ikke en grundig sammenlikning her, men hun sier det beskriver hvordan elever setter læringsmål, bruker passende metoder og teknikker i forhold til stoffet og målene, og vurderer sin egen prosess. Denne litteraturen støtter altså synet om at det er klare sammenhenger mellom referanserammene knyttet til dette temaet.

Motivasjon

Det andre konstruktet jeg tar for meg her er *motivasjon*. I Kjærnsli et al. (2004) beskrives motivasjon som et mangesidig begrep som er sentralt i alle skolefag, da gjerne knyttet til spørsmål om hvordan man kan motivere elevene til å bli interessert i faget. Motivasjon har nær relasjon til begrepet selvoppfatning, og forskjeller i motivasjon hos gutter og jenter har fått stor oppmerksomhet i PISA. Begrepet kan oppfattes både som en forklaringsvariabel for prestasjoner, og som et utbytte av utdanningen (Ibid). De fire måleinstrumentene man bruker for å måle elevenes motivasjon i PISA er *interesse for matematikk* (*interest*), *instrumentell motivasjon for matematikk* (*instrumental motivation*), *læring gjennom konkurranse i matematikk* (*competitive learning*) og *læring gjennom samarbeid i matematikk* (*co-operative learning*).

I Knain (2002) kan vi lese at konstruktene i CCC-undersøkelsen har røtter i en teori om motivasjon som går på tvers av den vanlige inndelingen i indre og ytre motivasjon. I PISA er begrepet omtrent sammenfallende med begrepet *interesse*, som på sin side innebærer en personlig vurdering av emnet, positive følelser knyttet til det og egne intensjoner. Dette forklarer hvorfor *interesse for matematikk* er et eget måleinstrument. *Instrumentell motivasjon for matematikk* er først og fremst knyttet til fremtidige studier og jobb, og det kan tenkes at begrepet *instrumentell* er noe vidt i denne sammenhengen. Det man ønsker å måle, er om elevene jobber godt i faget fordi de mener det vil hjelpe dem senere i livet, og det kan jo godt hende at skolegangen kan hjelpe elevene med mer enn bare videre studier og jobb. Til slutt kommer de to instrumentene som handler om å lære enten gjennom konkurranse eller samarbeid. I PISA 2000 var disse to en del av et annet begrep, *læringsstil*, men ble ”flyttet” til *motivasjon*, både i hovedrapporten fra PISA 2000 og i PISA 2003. Opprinnelig er disse ment til å skille mellom hvorvidt elever blir motivert gjennom konkurranse eller samarbeid i faget. Man kan se at de også kan knyttes til motivasjon, og man fant til og med en positiv sammenheng mellom de to konstruktene i PISA 2003, det vil si at det var en tendens til at de som er motivert gjennom konkurranse, *også* blir motivert gjennom samarbeid.

I kapittel 3.3.3 fant vi at motivasjon ofte behandles som et svært generelt begrep, mens man i PISA har måttet konkretisere begrepet i form av spørsmål i elevspørreskjemaet. I modelleringssammenheng knyttet man motivasjon først og fremst til måter modellering kan motivere på.

I forhold til hvordan motivasjon oppfattes innen modellering og PISA, er det et punkt i kapittel 3.3.3 og begrepet *selvregulert læring* generelt i PISA som kan trekkes frem. I Knain (2002) handlet selvregulert læring blant annet om å sette mål for læringen, i måleinstrumentet som ble kalt *instrumentell motivasjon*, som ble knyttet til matematikkfagets bidrag til muligheter for jobb senere i livet. Også i Hannulas (2006) rammeverk for motivasjon var det å sette seg personlige mål en sentral faktor for motivasjonen. Hos Hannula vekselvirket behov, mål og midler kontinuerlig og fikk ofte utløp i form av følelser, som var den mest direkte linken til motivasjonen. Her er det altså en tydelig likhet i referanserammene i at det å sette seg mål påvirker motivasjonen.

4. Metode

4.1 Generell forskningsmetode

I samfunnsvitenskapelig forskning dominerer to forskningsmetoder: Kvalitativ og kvantitativ forskning. Metodene har hver sine hensikter, og valg av metode bør derfor gjøres på grunnlag av hva man ønsker å finne ut.

Kvalitativ forskning vektlegger ”dyp” kunnskap, altså forsøker man å si mye om relativt få enheter[1], gjennom for eksempel observasjon eller intervju av individer eller grupper av mennesker. I følge Ragin (1994) er det tre sentrale mål i kvalitativ forskning. Det første er å *gi stemme*. Ulike typer minoriteter, for eksempel etniske eller religiøse grupper, kan i mange tilfeller mangle stemme og representasjon i samfunnet, og det kan være forskernes oppgave å opplyse samfunnet om deres situasjon, meninger og/eller handlingsmønster. Det andre målet er å *tolke historisk eller kulturelt signifikante fenomen*. Med dette menes å tolke fenomener i samfunnet i et historisk eller kulturelt lys, noe som kan gi ny forståelse av de aktuelle fenomenene. Det siste målet er å *videreutvikle teori*. Kvalitativ forskning er basert på å samle inn store mengder materiale om få enheter, noe som gir mye ”råmateriale” for å raffinere etablerte teoretiske ideer. Kvalitativ metode er relativt lite strukturert, da man ofte begynner studien med en viss grad av åpenhet om forskningsobjektet og om hva som kan læres av det. Siden forskeren har nær kontakt med objektene og innsamlingen av materiale ofte er basert på observasjon og intervju, kan det være vanskelig å si på forhånd hvilken retning forskningen tar. Oppsummert kan man si at kvalitativ forskning brukes til å avdekke essensielle særpreg til et case[2], og beskrive et eller flere nøkkelforhold mellom disse særpregene. Om man for eksempel vil forske på hvordan medlemmer av små miljøer kommuniserer, tenker og handler seg i mellom, vil en kvalitativ forskningsmetode egne seg godt.

Kvantitativ forskningsmetode skiller seg fra den kvalitative på flere punkter. Blant annet tar kvantitativ forskning utgangspunkt i mange tilfeller, da man mener dette gir den beste veien til å oppnå nyttig kunnskap om samfunnet. Ragin (1994) trekker også her frem tre hovedmål

[1] En enhet er selve forskningsobjektet. I samfunnsvitenskapelig forskning vil det som oftest si mennesker.

[2] Et case kan beskrives som en viss hendelse eller tilfelle, som for eksempel et menneske og den situasjonen det befinner seg i, eller en organisasjon som for eksempel en bedrift.

for denne typen forskning. Det første er å *identifisere generelle mønstre*. Tommelfinger-regelen her er at jo større utvalg man har, jo mer generelt mønster kan avdekkes og jo lettere er det å generalisere mønstrene til en populasjon. I denne prosessen bruker man ofte å se på samvariasjonen mellom to eller flere variabler[1] hos enhetene, og hvis mulig er det ofte ønskelig å avdekke kausale sammenhenger mellom variable. Det andre målet med kvantitativ forskning er å *teste teori*. Man ønsker i mange tilfeller å teste teoretiske ideer som er utledet fra sosial teori, såkalt deduktiv teori. Dette skiller seg fra det å *bruke* teori, siden man her er ute etter å enten avkrefte eller verifisere teoretiske slutninger, fremfor å la teorien være grunnlag for forskningen. Det siste målet er å *gjøre prediksjoner*. Her ønsker man å bruke forskning til å kunne si noe om fremtidige handlinger til medlemmer av samfunnet (Ibid).

Prosessen i denne type forskning er også ganske annerledes enn den i kvalitativ forskning. Mens utgangspunktet i kvalitativ forskning er relativt åpent og ustrukturert, må kvantitativ forskning ta utgangspunkt i forhåndsdefinerte og presise definisjoner og strukturert gjennomføring. Dette ligger i forskningens natur: Om man for eksempel har tusen deltakere i en spørreundersøkelse, nytter det ikke å endre på skjemaets design etter at det er sendt ut. Derfor må alle spørsmål være nøye gjennomtenkt på forhånd, og man må også ha en plan for hvordan de besvarte skjemaene skal behandles. Spørsmålene i undersøkelsen knyttes til variabler, og variablene er selve byggesteinene i kvantitativ forskning. Det innsamlede materialet omsettes til rent datamateriale, behandles med statistiske metoder, før resultatene (som regel i tallform) presenteres og tolkes.

Som vist, er dette to svært ulike forskningstradisjoner med hver sine tilhengere. Det råder en del uenighet mellom disse gruppene om hvilken metode som gir best innsikt og kunnskap om sosiale forhold, kort sagt om verbale eller numeriske funn beskriver verden best. Likevel anses begge som verdifulle på sin måte, og begge besvarer sentrale spørsmål innen samfunnsvitenskapen (Ibid). Dette gjør at man i mange tilfeller åpner for å kombinere de to metodene.

[1] En variabel er en egenskap eller måleobjekt knyttet til enhetene i den aktuelle spørreundersøkelsen eller testen. Et eksempel er kjønn.

4.2 Metode i PISA 2003

PISA er et godt eksempel på kvantitativ forskning. Der er både mange deltakere og forhåndsdefinerte målsettinger med røtter i omfattende teori. Fra teorien definerer man *konstrukter*[1], og for å måle konstruktene lages det et sett med *måleinstrumenter*[2] som i sin tur representeres ved hjelp av konkrete spørsmål i spørrearket. Alt dette er utarbeidet i forkant av selve undersøkelsen, og det er derfor viktig at man reflekterer over hva man vil måle, samt hvordan man bør gå frem for å få målt nettopp dette.

4.2.1 Utvalg og populasjon

PISA 2003 hadde et utvalg på over 250 000 elever fra totalt 41 land. Disse representerte 27 millioner elever i deltakerlandene, som altså var populasjonen i undersøkelsen. Dette omfattet alle 15-åringer som gikk på skolen i deltakerlandene på dette tidspunktet. I Norge deltok 182 skoler der 30 elever ble tilfeldig trukket ut fra hver skole. De ble altså ikke trukket ut klassevis, men på skoler der det var mindre enn 30 15-åringer, ble hele klassen trukket ut. Totalt ble 4064 elever trukket ut i Norge (Kjærnsli et al., 2004).

4.2.2 Design

PISA 2003 bestod av en faglig test, et elevspørreskjema og spørreskjema til skolelederne. Selve testen var utformet som en totimers prøve, og inkluderte fagene matematikk, naturfag og lesing[3]. Alle oppgavene er utformet etter rammeverket (OECD, 1999, 2000, 2003), og man benyttet rotasjon av 13 oppgavehefter, der elevene svarte på ett hefte hver. Mange av oppgavene som var med i testen holdes hemmelige for å kunne brukes igjen senere, mens noen er frigitte og kan lastes ned fra www.pisa.no.

Matematikkoppgavene bestod av flervalgsoppgaver og åpne oppgaver. Flervalgsoppgavene var basert på ren avkrysning, enten det var å identifisere korrekt svar på en oppgave, eller vurdere sannheten til påstander, mens i de åpne oppgavene skrev elevene selv inn svarene.

---

[1] En del variabler er gruppert i samlevariable, der samlevariabelen representerer skåreverdier for et såkalt konstrukt. For eksempel er *motivasjon i matematikk* et konstrukt som måles ved hjelp av et sett spørsmål som utfyller og støtter opp om hverandre.

[2] Et måleinstrument er en operasjonalisering av et konstrukt. For eksempel er *ferdighetstrening, interesse, læring gjennom konkurranse* og *læring gjennom samarbeid* måleinstrumenter for konstruktet *motivasjon i matematikk.*

[3] PISA 2003 inneholdt også en problemløsingsdel som ble brukt i verken PISA 2000 eller PISA 2006.

Noen ganger trengte de bare å skrive enkle svar, som for eksempel tall med benevning, andre ganger krevdes resonnementer, begrunnelser, forklaringer, utregninger eller refleksjoner. Prosessen med å lage og velge ut passende oppgaver til undersøkelsene er lang og forgikk i flere steg. Oppgavene skulle ta hensyn til blant annet rammeverket, vanskegrad og kulturelle ulikheter, men samtidig være slik at de skiller mellom svake og sterke elever. Oppgavenes utforming har stor betydning for hva man klarer å måle. Også vurderingsfasen var nøye gjennomtenkt, da man har utviklet et kodesystem som brukes aktivt i vurderingen av besvarelsene. Fra generalprøven[1] utviklet man et tosifret kodesystem, med en kodemal for hver oppgave. Denne kodemalen ble brukt av dem som rettet besvarelsene, og dannet slik grunnlaget for dataanalysen av undersøkelsen (Kjærnsli et al., 2004).

Elevspørreskjemaene var utarbeidet slik at de ga informasjon om elevenes hjemmebakgrunn, sosiale faktorer, samt familiens kulturelle og økonomiske kapital. I tillegg ønsket man å kartlegge forhold som knyttes til skolen, matematikkundervisningen, læringsstrategier og holdninger til matematikkfaget.

Skolespørreskjemaet var ment til å avdekke forhold knyttet til skolens beliggenhet, skole- og klassestørrelse, skolens ressurser, organisering, lærernes ansvarsområder, antall lærere i hel- og deltidsstillinger, øvrige undervisningsforhold og lærerklima (Kjærnsli et al., 2004).

4.2.3 Kvalitetssikring

Kvalitetssikring er en svært viktig del av denne type undersøkelser, siden det har betydning for hvor pålitelige resultatene er. I PISA har man for eksempel strenge krav til deltakelse, der deltakerprosent og prosessen med å trekke skoler og elever overvåkes nøye, og man har laget veldefinerte krav til oversetting av oppgaver til de mange språkene deltakerne bruker. I forbindelse med gjennomføringen av undersøkelsen har man utarbeidet detaljerte veiledninger om hvordan den skal foregå, med informasjon om tidtaking og elevinstruksjoner (Kjærnsli et al., 2004).

Et annet eksempel på kvalitetssikring i gjennomføringen av PISA 2003 er måten rettingen av prøvene forgikk i Norge. De som rettet prøvene satt sammen under hele prosessen, fikk i felleskap detaljerte instruksjoner for retting før hver oppgave. I tillegg ble en bestemt andel

[1] Før hver undersøkelse gjennomføres det en generalprøve som er sentral i kvalitetssikringsprosessen.

av heftene til enhver tid kodet av fire uavhengige personer. Dette gjorde man for å sammenlikne kodingen kontinuerlig, slik at forskjeller i retting skulle elimineres.

4.2.4 Validitet

En annen måte å sikre pålitelige resultater i samfunnsvitenskapelig forskning er knyttet til begrepene *validitet* og *reliabilitet*. Dette er aspekter man ikke kan måle direkte, men de vurderes etter skjønnsmessige prinsipper og kriterier, i tillegg til at man har statistiske metoder som brukes indirekte på undersøkelsen.

Begrepet validitet går ut på at man i samfunnsvitenskapelig forskning har et ønske om at datamaterialet og måleprosedyrene skal virke etter hensikten. Validitet er altså et mål på hvor godt man måler det man ønsker å måle (Ragin, 1994). Det er et begrep med mange sider, men i PISA knyttes det først og fremst til at oppgavene er laget i henhold til et detaljert rammeverk med klare beskrivelser av hva man tar sikte på å måle (Kjærnsli et al., 2004). I de nasjonale PISA-rapportene (Lie et al., 2001, Kjærnsli et al., 2004 og Kjærnsli et al., 2007) legger man vekt på å definere alle *konstruktene* som inngår i undersøkelsen, og det nedlegges mye arbeid i å sikre at konstruktene operasjonaliseres i konkrete spørsmål på en tilfredsstillende måte. Når det gjelder fagkompetansen i matematikk, kan for eksempel oversetting av begreper fra rammeverket by på problemer knyttet til validiteten av dem. Eksempelvis bruker man samlebetegnelsen *mathematical literacy* i rammeverket fra OECD, mens man i de norske rapportene for enkelhets skyld bruker begrepet *matematikk* eller slagordet *matematikk for alle*. Her kunne man spurt om oversettingen inneholder hele betydningen av begrepet, hvis ikke vil det være et problem for validiteten til undersøkelsen (Kjærnsli et al., 2004). For mer om dette begrepet, se kapittel 3.5.1.

4.2.5 Reliabilitet

Reliabilitet handler om hvor pålitelige de resultatene vi har funnet er. Den største trusselen mot pålitelige resultater er store og/eller systematiske tilfeldigheter i målingene. Har vi for mye av dette, vil konklusjonene vi trekker være feilaktige, evt. ugyldige (Ragin, 1994). Vi trenger derfor å vite at vi får omtrent samme resultater selv om undersøkelsen skulle blitt gjennomført mange ganger, på samme tidspunkt, med samme respondenter, uten at respondentene på noen måte er påvirket av en slik gjentagelse av undersøkelsen. Dette er selvfølgelig en umulig situasjon, men man klarer likevel å identifisere de faktorene som bestemmer tilfeldighetene i målingene. I PISA er reliabilitet, i likhet med validitet, først og fremst knyttet til konstruktene og skåren på testen. Det at man i denne sammenhengen bruker mange spørsmål for å måle hvert konstrukt, er nettopp for å oppnå høy grad av reliabilitet. Har man for eksempel mange spørsmål knyttet til konstruktet *motivasjon i matematikk*, og en elev skårer høyt på denne samlevariabelen, kan man være mer sikker på at dette vitner om sannheten enn om man hadde bare ett spørsmål. Da kan tilfeldighetene i større grad svekke resultatet.

I forhold til selve matematikkskåren i undersøkelsen, er det at man også her bruker mange oppgaver en forvissning om at man oppnår høy grad av reliabilitet. Har en elev svart galt på alle oppgavene i en test, er det stor forskjell på om testen består av én eller hundre oppgaver. Man kan være sikrere på at eleven er svak i matematikk om testen består av mange oppgaver. Vanskegraden til oppgavene spiller selvfølgelig også inn på reliabiliteten. Om for eksempel alle oppgavene er så vanskelige at *ingen* får dem til, eller så lette at *alle* får dem til, svekker også dette resultatene betraktelig. Måten man tar hensyn til dette på i PISA, er å ha variasjon i både oppgavetyper og vanskegrad.

Generelt konkluderer man med at PISA-undersøkelsene oppnår høy grad av både validitet og reliabilitet. For en mer fyldig begrunnelse, se de nasjonale hovedrapportene (Lie et al., 2001, Kjærnsli et al., 2004 og Kjærnsli et al., 2007).

4.3 Statistikk

Sammenliknet med andre masteroppgaver er det i denne oppgaven brukt relativt lite statistikk, siden den vektlegger en teoretisk tilnærming i belysningen av problemstillingen. Det er likefullt en statistisk analyse i kapittel 5, og her brukes det en del begrepet fra PISA, generell statistikk og SPSS som det er behov for å forklare. Jeg vil ikke gå inn på hvordan ulike tallverdier er beregnet matematisk, men nøyer meg med å beskrive egenskaper til dem.

4.3.1 Begreper fra PISA

Resultatene fra PISA-undersøkelsene bygger i stor grad på statistikk, og selv om statistikk er et eget fagområde med veldefinerte metoder og entydig språk, kan anvendelsen av det tilpasses ulike formål. I dette ligger det at man kan gjøre en del selvstendige valg så lenge man har *bevissthet* rundt valgene og hvilke konsekvenser de får for resultatene man oppnår. For eksempel er det mange fundamentale likheter i metoden bak de to undersøkelsene PISA og TIMSS, men det finnes likevel forskjeller i metode knyttet til design, koding og målestokker.

Fra metoden i PISA er det relativt lite som er relevant å trekke frem her, men to begrep som brukes i kapittel 5, og som er hensiktsmessige å redegjøre for, er begrepene *valid* og *system missing*. *Valid* er antall elever som har et ”gyldig” svar på den aktuelle variabelen. Enten de har svart korrekt, delvis korrekt, galt, tegnet en seilbåt eller hoppet over oppgaven er likegyldig. Man defineres til å være *valid* om man har hatt en reell mulighet til å svare på oppgaven.

System missing involverer på den annen side alle dem som ikke har hatt samme mulighet til å svare. Her finnes det to utgaver: Enten er man *missing* fordi man ikke har hatt oppgaven i det heftet man har besvart (det finnes 13 ulike hefter), eller så har man latt den aktuelle oppgaven *og* samtlige resterende oppgaver være blanke. Da vil man bli definert til å være *system missing* fra og med den første oppgaven man ikke har besvart. Bak dette ligger det en antakelse om at elever i denne gruppen enten har gitt opp å svare mer etter dette, eller gått tom for tid. Uansett velger man å ta de ut av gruppen *valid*, siden de antakelig ikke har vurdert å svare på oppgaven. Dette er årsaken til at det ofte er færre og færre som er definert som *valid* i en oppgaves deloppgaver. Har man for eksempel besvart kun første og siste oppgave i heftet, er man definert som *valid* i alle oppgavene i heftet.

4.3.2 Bivariat korrelasjon

Dette begrepet sier noe om det gjensidige forholdet mellom to variabler (Løvås, 2004). Verdien for den bivariate korrelasjonen kan ha mange navn, og i denne oppgaven brukes *Pearsons r* som verdi, noe som gjenspeiles i korrelasjonstabellene i kapittel 5, hvor det står *pearsons correlation*. Korrelasjonen representeres med et tall som ofte kalles korrelasjons-koeffisienten. Denne ligger i intervallet mellom 1 og -1, der ytterpunktene angir fullstendig eller fullstendig omvendt samvariasjon mellom de to variablene man ser på. Samvariasjon mellom to variable vil si at om noen svarer eller skårer høyt på den ene variabelen, svarer eller skårer de høyt på den andre også. Om elever som skårer høyt på en matematikktest, også sier de har mange bøker hjemme, samtidig som elever som skårer lavt sier de har få, har vi samvariasjon mellom ”matematikkskkåre” og variabelen ”antall bøker hjemme”. Negativ korrelasjon kommer av at høy verdi på én variabel ”gir” lav på den andre og omvendt.

Absoluttverdien til korrelasjonskoeffisienten vil antyde hvor sterk sammenhengen er, og verdier nær null antyder at det ikke er sammenheng mellom variablene. Det er ingen faste grenser for når man har sterk eller svak korrelasjon, men man får som regel det beste bildet om man sammenlikner flere tilfeller. Men noe unyansert kan vi si at korrelasjon (i absoluttverdi) på 0,1-0,3 er svakt, 0,3-0,5 er middels og 0,5-1 er sterkt. Hvor god *kvalitet* det er på korrelasjonen imidlertid ikke det samme som styrke, da vi godt kan ha svake, men pålitelige funn. Kvaliteten på funnene er knyttet til begrepet *signifikans* (Ibid).

4.3.3 Konfidensintervall og signifikans

Når vi beregner korrelasjonen mellom variabler, kan vi også beregne sannsynligheten for at funnet gjelder hele populasjonen. Samtidig beregner vi en feilmargin, det vil si sannsynligheten for at funnet *ikke* gjelder hele populasjonen. Et 95 % konfidensintervall angir at det er 95 % sannsynlig at korrelasjonskoeffisienten for hele populasjonen ligger innenfor et gitt intervall (konfidensintervallet) om koeffisienten for utvalget. Man sier at funnet er *signifikant* på 0,05-nivå om man har 95 % konfidensintervall for korrelasjonskoeffisienten, og på 0,01-nivå om man har 99 % konfidensintervall. I det videre brukes konfidensintervall og signifikans kun på denne måten.

For å kunne bruke begrepet *konfidensintervall* i statistiske undersøkelser, forutsettes det som regel at elevene er trukket ut enkeltvis på en tilfeldig (*probabilistisk*) måte. For informasjon om hvordan dette er løst i PISA, se Lie et al. (2001, s. 94). Ofte bruker man konfidensintervall for å sammenlikne gjennomsnittsverdier for ulike grupper i utvalget, gjerne ved hjelp av diagrammer. Dersom forskjellen i verdi for to grupper er tilstrekkelig stor sier man at forskjellen er statistisk *signifikant*. Denne måten å bruke begrepet berøres ikke i denne oppgaven. For mer om dette, se Løvås (2004).

4.3.4 SPSS

SPSS er et softwareprogram som har eksistert siden slutten av 1960-tallet, og brukes til statistiske undersøkelser i mange fagkretser verden over. Opprinnelig sto SPSS for *Statistical Package for the Social Sciences,* mens det nå står for *Statistical Product and Service Solution*. I SPSS organiseres dataene i et regneark, og kan behandles med de fleste statistiske metoder. Resultatene presenteres i output-vinduer, der innholdet kan klippes ut og limes inn i for eksempel et tekstbehandlingsprogram (Løvås, 2004). De fleste statistiske analyser i PISA og TIMSS blir utført med SPSS (Lie et al., 2001).

SPSS oppgir eller beregner alt som er nevnt i dette kapitlet, det vil si at det oppgir antall *valid* og *system missing* i frekvenstabeller, *Pearsons r* og *signifikansnivå* i korrelasjons-tabeller, samt det totale antall elever som er med i beregningene.

4.4 Min metode

I denne oppgaven har jeg ikke foretatt noen egen undersøkelse, så gjennomgangen av mine metodevalg er relativt kort.

4.4.1 Teoretiske metoder

Metodene i de teoretiske delene av oppgaven har stort sett gått ut på å samle relevant litteratur på de stedene jeg har hatt tilgang til. Diverse biblioteker og Internett er mest brukt i så måte. De relevante delene av denne litteraturen har så blitt plukket ut og benyttet etter hvert som oppgaven har blitt til.

4.4.2 Statistiske metoder

De statistiske metodene i denne oppgaven hviler i stor grad på metodene i PISA, da dette er en typisk *sekundæranalyse* av PISA 2003. Jeg har brukt elevspørreskjemaet og matematikkdelen fra testen i undersøkelsen. Alle statistiske størrelser (utenom én) er beregnet på grunnlag av datamateriale fra PISA 2003, så validitets- og reliabilitetsbetraktninger dekkes av betraktninger gjort i PISA. Den eneste størrelsen jeg har beregnet selv, er en gjennomsnittsverdi for andelen som har fått uttelling på oppgaver som kodes likt som oppgaven ”den beste bilen”[1]. Oppgavene i PISA kan i prinsippet kodes på 5 ulike måter[2], og det var totalt 45 oppgaver som ble kodet likt som ”den beste bilen”. I disse oppgavene får man enten 1 poeng (uttelling) eller 0 poeng (ikke uttelling). Grunnen til at ikke alle oppgavene inkluderes i denne verdien, er fordi det er vanskelig å regne med oppgaver som kodes på en annen måte enn dette. Om for eksempel en oppgave gir maksimum 4 poeng, skal man da ta med dem som har fått 1, 2 eller 3 poeng, på lik linje med dem som fikk uttelling for ”den beste bilen”? Ved å ikke ta med slike oppgaver, slipper jeg altså å ta stilling til denne problemstillingen.

[1] Det er denne oppgaven fra PISA 2003 som analyseres i kapittel 5.

[2] Flervalgsoppgaver kodes på én måte, og de åpne oppgavene har enten 1, 2, 3, eller 4 poeng som høyest oppnåelige poengsum.

I mitt valg av oppgave til bruk i analysen var det kun aktuelt å bruke en frigitt oppgave, da jeg ønsker at masteroppgaven i sin helhet skal kunne leses av alle. Oppgaven fra PISA er viktig for masteroppgavens empiriske del, og om jeg hadde brukt en hemmeligholdt oppgave ville deler av denne blitt redigert bort fra masteroppgavens offisielle versjon. Uansett, det viktigste kriteriet for oppgavevalg var at den måtte kunne brukes i en analyse med hensyn på modellering, så jeg har altså unngått de enkleste og mest oppstilte oppgavene.

Neste kapittel vil inneholde selve analysen av oppgaven. De teoretiske betraktningene av oppgaven vil i stor grad bygge på kapittel 3, og i hovedsak belyse forskningsspørsmål a og b. Den statistiske analysen vil fokusere på forskningsspørsmål c.

5. Teoretisk og empirisk analyse

5.1 Presentasjon av konstruktene

I dette kapitlet vil jeg kort presentere de konstruktene i PISA jeg har valgt å bruke i analysen, nemlig *læringsstrategier* og *motivasjon*, som også var en del av den teoretiske analysen i kapittel 3.5.4. De to konstruktene måles ved hjelp av henholdsvis tre og fire måleinstrumenter, som igjen måles ved konkrete spørsmål i spørreskjemaet. På hvert spørsmål skal elevene vurdere hvor enig de er i visse påstander, der alternativene er ”svært enig”, ”enig”, ”uenig” og ”svært uenig”. I PISA er svarene standardisert slik at gjennomsnittet er 0,00 og standardavviket er 1,00 for alle elevene i OECD-landene (Kjærnsli et al., 2004). I dette kapitlet vil jeg redegjøre for de til sammen syv måleinstrumentene, mens de tilhørende spørsmålene fra spørreskjemaet er vedlagt i vedlegg 1. Den statistiske analysen og funnene vil bli presentert i kapittel 5.2 sammen med presentasjonen av oppgaven ”den beste bilen”.

5.1.1 Læringsstrategier

De tre måleinstrumentene man måler konstruktet *læringsstrategier* med i PISA 2003 er *ferdighetstrening i matematikk, utdypning i matematikk, og kontrollstrategier i matematikk.* Spørsmålene som ble brukt for å måle disse måleinstrumentene er listet opp i vedlegg 1.

Den første læringsstrategien kalles altså *ferdighetstrening i matematikk* på norsk, og *memorisation strategies* på engelsk. Både matematikktesten i PISA og modelleringssyklusen er basert på problemer i virkelighetsnære kontekster, noe som vil si at den matematiske aktiviteten i begge tilfeller skiller seg klart fra en ren drilleaktivitet. Likevel kan det argumenteres for at elementær ferdighetstrening er en viktig forutsetning for et godt resultat. I kapittel 3.3 ser vi at *matematisk analyse* er en del av modelleringssyklusen, og i denne overgangen benytter man seg ofte av kjent teori for å løse matematiske problemer, og da vil det være nyttig å ha en del matematiske sammenhenger og metoder automatisert.

Den andre læringsstrategien kalles *utdypning i matematikk* på norsk, og *elaboration strategies* på engelsk. Utdypning oppfattes ofte som en nødvendig strategi for å oppnå dypere forståelse av fagstoff (Knain & Turmo, 2003), og man kan her merke seg at utdypning synes å være viktig i alle skolefag (Kjærnsli et al., 2004).

Den tredje og siste læringsstrategien er *kontrollstrategier i matematikk*, på engelsk kalt *control strategies*. Som det ble sagt i kapittel 3.5.4, er dette konstruktet spesielt sterkt knyttet til begrepet metakognisjon. Dette handler om å ha kunnskaper om egen kunnskap, og det å tenke over hvordan man angriper matematiske problemer (Kjærnsli et al., 2004).

5.1.2 Motivasjon

I PISA 2003 måles konstruktet motivasjon ved hjelp av 4 måleinstrumenter; *interesse for matematikk, instrumentell motivasjon for matematikk, læring gjennom konkurranse i matematikk* og *læring gjennom samarbeid i matematikk.* Spørsmålene som ble brukt for å måle måleinstrumentene er listet opp i vedlegg 1.

Det første måleinstrumentet for motivasjon heter *interesse for matematikk*, og kalles *interest in mathematics* på engelsk. Som nevnt i kapittel 3.5.4 er begrepene interesse og motivasjon så å si synonymer i rammeverket for PISA.

Det andre måleinstrumentet heter *instrumentell motivasjon for matematikk*, på engelsk kalt *instrumental motivation for mathematics*. Instrumentell motivasjon handler om motivasjon som ligger utenfor faget selv, med andre ord det vi ofte kaller ytre motivasjon (Kjærnsli et al., 2004). Dette dreier seg som regel om et ønske eller forventning om at en skal få eller oppnå noe som følge av faglige prestasjoner. Å få gode karakterer er et godt eksempel, men også faktorer som en lønnsom jobb eller en materiell belønning kan være kilder til instrumentell motivasjon. I PISA har man fokus på de mulighetene til videre studier og arbeid matematikkfaget gir.

De to siste måleinstrumentene for *motivasjon i matematikk* heter *læring gjennom konkurranse,* på engelsk *competitive learning*, og *læring gjennom samarbeid i matematikk*, eller *co-operative learning*. Som nevnt i kapittel 3.5.4, har disse to siste måleinstrumentene mye med læringsstiler å gjøre, altså tanker man har om hvordan man lærer best. Instrumentene heter tross alt ”læring gjennom …” og ikke ”motivasjon gjennom …”. Likevel er de inkludert i konstruktet motivasjon, siden de også sier mye om hvordan man blir motivert i faget. Man skulle kanskje tro at disse er gjensidig utelukkende, siden de handler om hhv. konkurranse og samarbeid, men i Kjærnsli et al. (2004) vises det faktisk til positiv korrelasjon mellom dem. Det betyr at det er en tendens mot at elevene som uttrykker at de blir motivert gjennom konkurranse, også blir motivert gjennom samarbeid.

5.2 Teoretisk og empirisk analyse av en oppgave

I dette kapitlet vil jeg gjøre en teoretisk og empirisk analyse av en oppgave fra PISA 2003. Oppgaven som er valgt heter ”den beste bilen”, er frigitt og kan lastes ned (OECD-PISA i Norge, n.d.a). Aller først presenteres oppgaven slik den forekom i PISA 2003 med en tilhørende beskrivelse jeg har laget.

Deretter vil jeg gjøre den teoretiske analysen av oppgaven, som hovedsakelig består i at oppgaveteksten vurderes opp mot modelleringslitteraturen presentert i kapittel 3.3. Konkret innebærer dette å vurdere hvor stor del, altså hvor mange *stadier* og *overganger* fra modelleringssyklusen som involveres i arbeidet med å løse denne oppgaven, samt å vurdere hvor mye matematisk kompetanse oppgaven forutsetter at elevene besitter.

Etterpå vil jeg gjøre den statistiske analysen av oppgaven, hvor jeg først vil ta med frekvenstabeller for de to deloppgavene i oppgaven, før jeg redegjør kort for hva dataene her kan bety. Så gjør jeg en korrelasjonstest mellom de totalt syv måleinstrumentene knyttet til konstruktene læringsstrategier og motivasjon, og skåren på oppgaven. Korrelasjons-koeffisientene sammenliknes med dem man får for totalskåren fra matematikktesten i PISA 2003.

Fra kapittel 3.5.4 vet vi at måleinstrumentene *læringsstrategier* og *motivasjon* slik de er beskrevet i PISA har teoretisk sammenheng med tilsvarende begreper fra modelleringslitteraturen, mens analysen i dette kapitlet har en litt annen innfallsvinkel. Hvis oppgaven man undersøker her er en god modelleringsoppgave, vil høye korrelasjoner mellom konstruktene og skåren *støtte opp* om antakelsen at elevene her både viser til bruk av *selvregulert læring* og er gode modellerere. Den statistiske undersøkelsen er ment til å belyse hvorvidt begrepene *læringsstrategier* og *motivasjon* slik de brukes i PISA, også har *empirisk* sammenheng med matematisk modellering.

Til slutt i analysen vil jeg også betrakte noen mulige endringer man kunne gjort for å gjøre oppgaven til en ”bedre” modelleringsoppgave, det vil si endringer som vil gjøre at oppgaven vil involvere flere av modelleringssyklusens komponenter enn oppgaven gjør fra før. Dette kan så klart ikke gjøres uten at det får konsekvenser, noe som også er kommentert.

5.2.1 Oppgavepresentasjon

DEN BESTE BILEN

Et bilblad bruker et poengsystem for å vurdere nye biler og gir utmerkelsen ”Årets bil” til den bilen som får høyest poengsum. Fem nye biler er blitt vurdert, og poengsummene de har fått, er oppgitt i tabellen nedenfor.

Bil	Sikkerhets-utstyr (S)	Drivstoff-forbruk (D)	Utseende/ eksteriør (U)	Interiør (T)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Poengene tolkes slik:

3 poeng = utmerket
2 poeng = bra
1 poeng = brukbart

Oppgave 1: DEN BESTE BILEN *M704Q01*

For å regne ut den totale poengsummen for hver bil bruker bilbladet en regnemåte som tar hensyn til ulik vekting av de enkelte poengene:

$$\text{Total poengsum} = (3 \cdot S) + D + U + T$$

Beregn den totale poengsummen for bilen ”Ca”. Skriv svaret ditt på linjen nedenfor.

Total poengsum for “Ca”: ....

Oppgave 2: DEN BESTE BILEN *M704Q02*

Produsenten av bil “Ca” mente at utregningsmåten for den totale poengsummen var urettferdig.

Lag en utregningsmåte for den totale poengsummen som vil gjøre bil “Ca” til vinneren.

Utregningsmåten din må inneholde alle de fire variablene, og du viser den ved å fylle ut med positive tall i de fire tomrommene i formelen nedenfor.

Total poengsum = …….. · S + …….. · D + …….. · U + …….. · T

Figur 6: Oppgavetekst "den beste bilen" (OECD-PISA i Norge, n.d.a)

Beskrivelse

Denne oppgaven er definert som åpen, men det er likevel begrenset hvor mye elevene skal skrive når de besvarer den, da de kun skal fylle inn svarene de får, uten å vise utregninger eller argumentasjon.

Oppgavens tema er at et bilblad har vurdert visse egenskaper til fem nye biler i en test kalt ”Årets bil”, ved hjelp av et tallsystem der 1 er brukbart, 2 er bra og 3 er utmerket. Bilens totale poengsum beregnes ved hjelp av en formel der man har vektet egenskapene. I oppgave 1 skal elevene beregne hva bilen ”Ca” sin totale poengsum blir når man bruker denne formelen, før de i oppgave 2 skal omformulere formelen slik at denne bilen vinner testen. I begge oppgavene må elevene gjøre beregninger, men de skal altså kun skrive hva de kommer frem til. Det er lite trolig at elevene får bruk for andre matematiske operasjoner enn addisjon og multiplikasjon i beregningene her. De største utfordringene oppgaven byr på, er muligens å finne en passende fremgangsmåte i oppgave 2, identifisere variablene man skal vektlegge, og faktisk klare å lage en formel som virker etter hensikten. På denne måten ser jeg på oppgave 2 som mer åpen og krevende enn oppgave 1, siden det stilles større krav til elevenes resonering og valg underveis.

5.2.2 Teoretisk analyse

Den teoretiske analysen vil bestå i å vurdere hvor god modelleringsoppgave oppgaven ”den beste bilen” er, samt å vurdere hvor mye matematisk kompetanse oppgaven forutsetter.

Matematisk modellering

Som det ble vist i kapittel 3.3.2, er det å kunne utføre overgangene modelleringssyklusen omtrent ensbetydende med det man kaller modelleringskompetanse. Jeg ser derfor på denne gjennomgangen både som en vurdering av oppgavens disponering av syklusen og modelleringskompetansene.

Å *oppfatte virkeligheten* i denne oppgaven går først og fremst ut på å tolke informasjonen og tabellen i oppgaveteksten. Dette burde gå greit for elevene å skjønne, de er relativt vant med kåringer, tester og karaktergivning. Slik oppgaven er utformet, trenger ikke elevene å *formulere oppgaven* selv, så *domenet for undersøkelse* er allerede klarlagt. Da er det heller større mulighet for å *systematisere* situasjonen, særlig i oppgave to. Her kan informasjonen og parametrene virke noe uoversiktlige, så en måte å skaffe oversikt og struktur på ville i så fall kunne være fruktbar. Siden man i denne oppgaven opererer med en formel fra starten av, er det vanskelig å sette fingeren på hvor *matematiseringen* kommer inn i bildet her. Jeg ser det slik at overgangene *matematisering* og *matematisk analyse* så å si henger sammen, siden man i oppgave 1 kun skal sette inn tall i en formel, og i oppgave 2 utlede en annen, men tilsvarende formel og fylle inn ”konstantleddene” som svar. Formelen de skal utlede kan for øvrig ses på som en matematisk modell på situasjonen. Her vil muligens *matematiseringen* bestå i å bestemme seg for konstantledd man vil prøve, mens den *matematiske analysen* vil bestå i å beregne den totale poengsummen for de ulike bilene. Uansett vil man komme frem til en formel, og om man konkluderer med at den gir bilen ”Ca” den høyeste poengsummen, vil man neppe gjøre annet enn å fylle inn tallene og gå videre i oppgavesettet. Man bør riktignok gjøre en form for *validering* av formelen, det vil si sjekke om formelen faktisk gjør bilen ”Ca” til vinneren av testen. Dette kan for eksempel gjøres ved å sjekke hva poengsummen til alle bilene blir. Om ”Ca” ikke blir vinneren, må man endre formelen, det vil si gå bakover i syklusen igjen. Validering her kan også innbære å vurdere rimeligheten av svaret i forhold til hva man fikk i oppgave 1.

Helhetlig vurderer jeg dette til å være en middels god modelleringsoppgave. Oppgave 1 er en relativt dårlig modelleringsoppgave, mest fordi den er formulert ned til detaljnivå og det spørres verken etter fremgangsmåter, argumenter eller refleksjoner. I tillegg er det flere elementer i modelleringssyklusen som ikke involveres, for eksempel *formulering av oppgave*, *systematisering* og *tolking*, og de som blir involvert, er både vanskelig å skille fra hverandre og trenger ikke anvendes i særlig grad. I tillegg bruker man lite matematisk teori og få matematiske konsepter. Oppgave 2 er en vesentlig bedre modelleringsoppgave, da elevene faktisk skal utvikle den matematiske modellen selv. Her blir flere av syklusens stadier og overganger involvert enn i oppgave 1, og man står i tillegg friere til fremgangsmåte, samt at behovet for vurdering av svaret, dvs. validering av modellen er større.

Matematisk kompetanse

I det følgende vil jeg ta utgangspunkt i åttedelingen fra Niss og Jensen (2002) presentert i kapittel 3.3.2, siden det ble funnet at denne er relevant både for matematisk modellering og blir brukt i PISA. Jeg vil her vurdere i hvilken grad de to deloppgavene forutsetter hver av de åtte kompetansene.

Oppgave 1 forutsetter relativt lite matematisk kompetanse. Om man klarer å tenke matematisk (*tankegangskompetence*), tolke tabellen (*repræsentasjonskompetence*) og løse selve problemet (*problembehandlingskompetence*), skulle ikke denne oppgaven by på videre problemer. Det er altså ikke en særlig krevende oppgave. Med andre ord vil verken det å modellere matematisk (*modelleringskompetence*), resonnere matematisk (*ræsonnements-kompetence*), håndtere matematiske symboler og formalisme (*symbol- og formalisme-kompetence*), kommunisere i, med og om matematikk (*kommunikationskompetence*) eller det å bruke matematiske hjelpemidler og verktøy (*hjælpemiddelkompetence*) være spesielt relevant i denne oppgaven.

Når det gjelder oppgave 2 er situasjonen en annen. I tillegg til de kompetansene som er relevante for oppgave 1, vil man i denne oppgaven behøve å lage en matematisk modell (*modelleringskompetence*) ved å resonnere seg frem til den (*ræsonnementskompetence*). Dette kan gjøres ved å lage en generell formel (*symbol- og formalismekompetence*) først. De kompetansene som antagelig ikke blir særlig involvert i noen av deloppgavene er da kompetanse 7 (*kommunikationskompetence)* og kompetanse 8 (*hjælpemiddelkompetence),* som egentlig kan knyttes til det at man verken har lov til å kommunisere eller bruke flere hjelpemidler i løsingen av oppgavene i PISA-testen. Man skulle derfor tro at disse to kompetansene sjelden blir forutsatt av oppgaver i PISA, som kanskje er en svakhet i operasjonaliseringen av rammeverket.

5.2.3 Empirisk analyse

Frekvenstabeller

Her følger frekvenstabeller for de to deloppgavene:

		Frequency	Percent	Valid Percent
Valid	0	539	13,3	43,8
	1	693	17,1	56,3
	Total	1232	30,3	100,0
Missing	System	2832	69,7	
Total		4064	100,0	

Tabell 1: Den beste bilen oppgave 1

		Frequency	Percent	Valid Percent
Valid	0	1004	24,7	81,6
	1	226	5,6	18,4
	Total	1230	30,3	100,0
Missing	System	2834	69,7	
Total		4064	100,0	

Tabell 2: Den beste bilen oppgave 2

Av de totalt 4064 deltakende elevene i PISA 2003, ser vi av tabellene at det er hhv. 2832 som er *system missing*[1] i oppgave 1, mens 2834 er det i oppgave 2. De to deloppgavene er altså besvart av hhv. 1232 og 1230 elever, mens det er hhv. 693 og 226 som har fått uttelling. Dette betyr at 56,3 % har fått poeng på den første, mens 18,4 % har fått poeng for den andre. For å si noe mer om disse tallene enn bare at det er stor forskjell på skåreprosenten, har jeg som nevnt gått gjennom alle oppgaver som kodes på samme måte som denne oppgaven, og beregnet gjennomsnittsprosenten av dem som har fått uttelling på disse[2]. Prosenten jeg kom frem til på de 45 oppgavene dette gjaldt, ble 50,5 %. Dette betyr at i oppgaven ”den beste bilen” skårer elevene høyere på oppgave 1, men vesentlig lavere på oppgave 2 sammenliknet med disse 45 oppgavene. Dette kan antyde at oppgave 1 er en litt lettere oppgave enn gjennomsnittet, mens oppgave 2 er en ganske mye vanskeligere oppgave enn gjennomsnittet.

Oppgave 2 ble vurdert til å være en vesentlig bedre modelleringsoppgave enn oppgave 1, og som det er antydet tidligere, medfører dette som regel større kompleksitet. Dette kan gi elevene større utfordring i å klare oppgaven, så vel som opphav til feiltolkninger og misforståelser, som også kan bidra til at skåren går ned. Vi ser altså en sammenheng mellom det at oppgave 2 er vanskeligere enn andre oppgaver og det at den er en god modelleringsoppgave.

Korrelasjonstabell

Samvariasjonen mellom de 2 deloppgavene og de til sammen 7 måleinstrumentene av konstruktene *læringsstrategier* og *motivasjon* blir her presentert i samme tabell:

[1] Begrepene her, som for eksempel *valid, system missing, signifikans* og *Pearson Correlation,* ble forklart i kapittel 4.3

[2] Se kapittel 4.4.2 for en nærmere forklaring.

		THE BEST CAR Q1	THE BEST CAR Q2	Plausible value in math
Memorisation strategies	Pearson Correlation	,160(**)	,138(**)	,261(**)
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000
	N	1208	1207	3965
Elaboration strategies	Pearson Correlation	,042	,074(*)	,094(**)
	Sig. (2-tailed)	,149	,010	,000
	N	1207	1206	3972
Control strategies	Pearson Correlation	,123(**)	,090(**)	,153(**)
	Sig. (2-tailed)	,000	,002	,000
	N	1209	1208	3974
Interest in mathematics	Pearson Correlation	,279(**)	,266(**)	,401(**)
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000
	N	1215	1213	4000
Instrumental motivation in mathematics	Pearson Correlation	,150(**)	,190(**)	,316(**)
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000
	N	1215	1213	3998
Competitive learning	Pearson Correlation	,082(**)	,149(**)	,214(**)
	Sig. (2-tailed)	,005	,000	,000
	N	1202	1201	3949
Co-operative learning	Pearson Correlation	,012	-,037	,020
	Sig. (2-tailed)	,666	,203	,220
	N	1203	1202	3949

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

Tabell 3: Korrelasjonskoeffisienter mellom oppgaven "den beste bilen" og samleskåren, og de totalt 7 måleinstrumentene.

For å si noe om styrken på korrelasjonskoeffisientene mellom oppgavene og konstruktene sammenlikner jeg her koeffisientene for ”den beste bilen” med de tilsvarende koeffisientene for *samleskåren* (*plausible value in math* i tabellen) i matematikk. Denne samleskåren er beregnet av PISA-gruppen i Norge, så validitet- og reliabilitetsbetraktninger knyttet til denne verdien dekkes av PISA-rapporten fra PISA 2003 (Kjærnsli et al., 2004). I rapporten er det korrelasjonskoeffisientene under denne kolonnen som er gjenstand for analyse. Disse verdiene spiller altså en vesentlig rolle i analysen av sammenhenger mellom skolefaktorer og prestasjoner i faget. Som nevnt ligger antallet elever som er *valid* (N) for oppgaven ”den beste bilen” på rundt 1200, mens for samleskåren er det i underkant av 4000.

Konstruktet *læringsstrategier* er altså representert ved de tre øverste måleinstrumentene. For *ferdighetstrening i matematikk* (*memorisation strategies*), har vi koeffisienter på hhv. 0,16 og 0,14 for de to oppgavene, mens den for samleskåren er 0,26. For konstruktet *utdypning i matematikk* (*elaboration strategies*), har vi ikke signifikans for oppgave 1, og må derfor anta at det ikke er sammenheng mellom dette måleinstrumentet skåren på oppgaven. For oppgave to er imidlertid koeffisienten 0,074, som er svakt, men likevel sterkere enn for oppgave 1. Til slutt har vi konstruktet *kontrollstrategier i matematikk* (*control strategies*), det koeffisientene er på hhv. 0,123 og 0,09, mens for samleskåren er den 0,15.

Det er altså en tendens til at korrelasjonen er jevnt over lavere for denne oppgaven enn for samleskåren. Er dette et tegn på at elever som mestrer denne oppgaven legger mindre vekt på læringsstrategier enn det som er tilfelle på andre oppgaver, eller får vi disse funnene fordi den er vanskeligere enn andre? Som vi så, var det stor forskjell på de to oppgavene når det kom til andelen elever som hadde fått riktig svar. Oppgave 1 kan slik tolkes som relativt ”lett” i forhold til de 45 den ble sammenliknet med, mens oppgave 2 lå langt under, og kan vurderes til å være vanskelig i forhold til disse. Tar vi et raskt blikk på koeffisientene for oppgave 1 og 2, ser vi imidlertid at de jevnt over er vel så høye for oppgave 2 som for 1, noe som taler imot av høyere vanskegrad gir lavere korrelasjonskoeffisienter. Kan det være *flervalgsoppgavene* som trekker koeffisientene for samleskåren opp?

Det som uansett er verdt å merke seg, er at vi har lavere korrelasjon i oppgave 2 enn i oppgave 1 for instrumentene *ferdighetstrening* og *kontrollstrategier,* mens det er motsatt tendens for *utdypning*. Kan dette bety at utdypning i matematikk er spesielt viktig for å mestre oppgave 2, mens ferdighetstrening og kontrollstrategier er spesielt viktig for å mestre oppgave 1? Oppgave 2 ble vurdert som en bedre modelleringsoppgave enn oppgave 1, og funnene her vil slik antyde at elever som er gode modellerere viser til større bruk av utdypning i matematikk, men mindre bruk av ferdighetstrening og kontrollstrategier.

Konstruktet *motivasjon* er representert ved de fire gjenstående måleinstrumentene. *Interesse for matematikk (interest in mathematics)* er det instrumentet som er høyest korrelert med skåren på oppgavene, med koeffisienter på hhv. 0,28 og 0,27, men likevel under den for samleskåren (0,40). Koeffisientene for *instrumentell motivasjon i matematikk* (*instrumental motivation in mathematics*), er også under den for samleskåren (0,32), men her har vi sterkere koeffisient for oppgave 2 (0,19) enn oppgave 1 (0,15). Og ser vi på neste konstrukt, *læring gjennom konkurranse i matematikk* (*competitive learning*), ser vi at vi har samme tendens også her. Her er koeffisienten 0,08 for oppgave 1, og 0,15 for oppgave 2. For *læring gjennom samarbeid i matematikk* (*co-operative learning*) har vi ikke statistisk signifikans for funnene, og må konkludere med at det ikke er sammenheng mellom skåren og dette instrumentet.

I likhet med konstruktet læringsstrategier, er det også her klart svakere funn for ”den beste bilen” enn for samleskåren. Dette betyr at det er mindre tendens til at elevene som mestrer oppgaven, uttrykker at de er motiverte i matematikk enn det som er tilfelle for samleskåren. Det vi skal merke oss, er at det er sterkere sammenheng mellom skåren på oppgave 2 og instrumentene *instrumentell motivasjon* og *læring gjennom konkurranse*, enn det er for oppgave 1. Selv om det er små forskjeller, kan dette tyde på at elevene som mestrer oppgave 2, og slik er bedre modellerere enn andre, viser til større grad av instrumentell motivasjon og læring gjennom konkurranse. Når vi samtidig ikke hadde korrelasjon noen vei for *læring gjennom samarbeid*, og omtrent like høy for *interesse for matematikk*, kan dette støtte opp om påstanden at gode modellerere viser til høyere grad av motivasjon.

Dette innebærer at det jevnt over er positiv samvariasjon mellom konstruktene læringsstrategier og motivasjon, og skåre på oppgaven ”den beste bilen”. Ett instrument ga ingen sammenheng (*co-operative learning*), ett instrument ga omtrent like høy korrelasjon for begge oppgavene (*interest*), to ga høyere for oppgave 1 enn oppgave 2 (*memorisation strategies* og *control strategies*), mens tre instrumenter ga sterkere samvariasjon for oppgave 2 enn oppgave 1 (*elaboration strategies, instrumental motivation* og *competitive learning*), til tross for at det er langt færre som får uttelling på den.

Jeg skal være forsiktig med konklusjoner her, for resultatene ser ikke ut til å være entydige. Vi kan likevel se en liten tendens mot at de som behersker oppgave 2, hvilket vil si gode modellerere i følge den teoretiske analysen, viser til noe større bruk av *selvregulert læring* totalt sett enn andre elever. Uansett er det et faktum at vi faktisk *har* positive korrelasjoner mellom oppgave 2 og konstruktene, noe som antyder at konstruktene læringsstrategier og motivasjon slik de brukes i PISA generelt sett har sammenheng med modellering.

5.2.4 Mulige endringer

For å gjøre dette til en bedre modelleringsoppgave ville jeg begynt med å endre kravene til respons på de to oppgavene. I stedet for å spørre etter bare enkelttall, ville jeg også spurt etter fremgangsmåter, argumenter og refleksjoner. Mange av modelleringssyklusens stadier og overganger forutsetter disse faktorene, og om ønsket er at elevene skal modellere, er det også naturlig å be elevene vise til involvering av stadiene og overgangene i syklusen. Slik jeg ser det, er derfor nødvendig med en omformulering av de to oppgavene. En av de største ”manglene” ved denne oppgaven sett i modelleringsteoretisk lys, er at elevene står lite fritt til å formulere oppgavene selv, og blir heller ikke bedt om å begrunne eller forklare fremgangsmetoder. For å gjøre dette mulig i denne oppgaven, ville jeg derfor omformulert oppgave 1 til dette:

> For å regne ut den totale poengsummen for hver bil bruker bilbladet en regnemåte som tar hensyn til ulik vekting av de enkelte poengene. Lag en formel som vektlegger bilens poeng for sikkerhetsutstyr *mer* enn de tre andre poengene. Gjør antakelser, vis fremgangsmåte og begrunn valg underveis. Beregn så den totale poengsummen for bilene ”Ca” og ”N1” og sammenlikn disse. Synes du formelen din er rettferdig?

Her er det lett å tenke at man bør hjelpe elevene inn på riktig spor ved å si for eksempel at de skal vektlegge poeng for sikkerhetsutstyr *tre ganger så mye* som de andre poengene. Da vil de muligens begynne å tenke i baner av en formel der tallet tre skal være med. Jeg mener dette vil frata elevenes muligheter til å formulere problemet selv. Det var jo nettopp det som var hensikten med endringen, og ved å la selve løsningen på oppgaven være åpen, har man større mulighet til å ivareta denne muligheten. Når det gjelder sammenlikningen av poengsummene for bil ”Ca” og ”N1” er dette tatt med for å øke graden av refleksjon.

For å gjøre oppgave 2 til en bedre modelleringsoppgave, ville jeg omformulert den til dette:

> Produsenten av bil ”Ca” mente at utregningsmåten for den totale poengsummen var urettferdig. Lag en utregningsmåte for den totale poengsummen som vil gjøre bil ”Ca” til vinneren. Utregningsmåten din må inneholde alle de fire variablene, og det er bare lov med positive tall i den. Gjør antakelser, vis fremgangsmåte og begrunn valg underveis.

I praksis vil dette være samme oppgave, men med færre retningslinjer for hvordan svaret skal se ut. Dette vil også ”åpne” oppgaven mer, slik at elevene kan formulere problemer, gjøre antakelser og begrunne valg. Å vise til dette bør være en forutsetning for å få uttelling. En fare ved disse oppgaveendringene er at utregningsmåten fra oppgave 1 kan gjøre ”Ca” til vinneren av testen allerede der. Dette kan imidlertid kun skje om elevene vekter noen av de andre poengene mer enn sikkerhet. Det er det ingen grunn til at de skulle, og så lenge de kun har vektet sikkerhet mer enn resten, vil alltid bil ”KK” oppnå høyere poengsum enn ”Ca” i oppgave 1.

”To assess mathematical modelling is not easy, for the more complicated and open a problem, the more complicated is becomes to assess the quality of a solution” (Niss et al., 2007, s. 23). De foreslåtte omformuleringene vil altså kunne by på utfordringer, både for elevene og de som skal vurdere svarene. Blant annet må man få oppgavene til å henge sammen, noe som viste seg å bli noe vanskeligere enn det antagelig var med de opprinnelige oppgavene. I tillegg må man her vurdere hver besvarelse for seg, og det blir vanskelig å lage en fasit som beskriver de riktige svarene detaljert, siden det nå blir mange svar som kan være riktige. Elevenes begrunnelse og argumentasjon får en mer sentral stilling i besvarelsen, og da må den også vurderes på grunnlag av dette. En annen utfordring ved økt bruk av matematisk modellering er at oppgavene kan oppleves som vanskelige fordi elevene ikke er vant med oppgavetypen.

Man kunne ikke gjennomført slike endringer uten at de ville fått store konsekvenser for måten datamaterialet blir behandlet i PISA. Betingelsene vil bli helt annerledes, og med disse endringene måtte oppgaven blitt vurdert og kodet på en helt annen måte enn den ble i PISA 2003. Om denne typen formuleringer i det hele tatt er mulig i PISA vet jeg ikke, men så langt er det vanlig å forhåndsdefinere svarene på oppgavene, og ikke la elevenes egne valg påvirke hvordan de skal se ut. Av disse årsakene kan det være vanskelig å bruke oppgaver som er mer åpne enn dem som er brukt så langt, uten å endre på sentrale metoder i koding og retting av oppgaver. Oppgaver av typen jeg har laget her, passer derfor ikke inn i PISA slik undersøkelsens design var i 2003.

6. Oppsummering

6.1 Oppsummering av funn

I det følgende vil jeg gjøre en oppsummering av funnene som ble gjort i kapittel 3 og 5, før jeg gjør en kortfattet helhetsvurdering og sier litt om årsaker til funnene.

6.1.1 Funn i kapittel 3

Funnene i kapittel 3 kategoriseres i likheter og forskjeller.

Likheter

Teoretisk ble det funnet mange likhetstrekk mellom modelleringslitteraturen og teorirammeverket for PISA knyttet til det å aktivisere seg med matematikk. Begge steder vektlegges løsingen av virkelighetsnære problemer, en prosess som representeres i form av en *syklus*. Dette kalles ofte å *anvende* matematikk, det vil si å bruke matematiske kunnskaper og ferdigheter for å mestre problemer hentet fra verden rundt oss.

Blant annet er det store likheter mellom de to syklusene *modelleringssyklusen* og *matematiseringssyklusen*. For eksempel er de to domenene (*matematisk* og *virkelig* verden) og vekslingen mellom dem, *problemets* betydning, den matematiske analysen og den kontinuerlige valideringen av prosessen involvert begge steder. I det hele tatt er dette to svært like måter å betrakte matematisk prosess på.

Da vi kom til matematisk kompetanse, var det også her store likheter. Begge steder handler matematisk kompetanse blant annet om å besitte ulike matematiske ferdigheter, som for eksempel å *formulere* relevante spørsmål, *representere* virkelighetsnære problemer, *resonnere* seg frem til matematiske løsninger, eller å *generalisere*, *validere* og *reflektere* over løsningene. Oppsummert kan matematisk kompetanse beskrives som evnen til å utføre delprosessene som kan knyttes til behandlingen av virkelighetsnære problemer og matematiske modeller.

Da vi sammenliknet de valgte matematikkdidaktiske perspektivene i modelleringssammenheng med de tilsvarende i PISA, fant vi flere likheter også her, spesielt mellom begrepene *metakognisjon* og *læringsstrategier*. Det ble funnet at begge steder innebærer dette strategisk kunnskap om måter å løse problemer på, samt å ha bevissthet om hvordan man lærer best og hvordan man kan benytte seg av denne kunnskapen. Det ble funnet noe mindre likheter for motivasjon i de to referanserammene, mest på grunn av manglende forskning. Det ble på den annen side ikke funnet motstridende beskrivelser. Likhetene ligger i at motivasjon blir sett på som det interesseskapende i oss, og noe som har relasjon til mange andre begrep, for eksempel selvoppfatning og anerkjennelse. En annen likhet er at motivasjon kan skapes gjennom målsetting, enten det er faglige eller yrkesrettede mål.

Forskjeller

Jeg vil begynne med å poengtere at selv om det avdekkes en del forskjeller på teorien mellom modellering og PISA, trenger ikke disse nødvendigvis å medføre *motsetninger* mellom de to referanserammene. Modellering er en måte å fremstille matematisk prosess på, mens PISA først og fremst er en undersøkelse. Forskjellene kan ofte tilskrives de ulike innfallsvinklene, og ofte er det snakk om ulikheter i beskrivelser og organiseringen av begreper som ikke behøver å gå på det innholdsmessige.

Den første forskjellen jeg vil trekke frem, er at vi i modelleringslitteraturen ikke har en motsats til begrepet *mathematical literacy* slik det brukes i PISA. Dette understreker det allmenndannende perspektivet i PISA, dvs. at man prøver å undersøke hvor godt forberedt elevene er på å møte samfunnet, mens man i modelleringslitteraturen ikke har dette perspektivet. Dette skaper ikke motsetninger, men sier heller noe om PISA og undersøkelsens behov for å operasjonalisere teorien.

En annen forskjell er begrepene man bruker for å beskrive de to syklusene *modellerings-syklusen* og *matematiseringssyklusen*. Vi så at i modelleringslitteraturen var matematisering kun en overgang mellom stadiene *system* og *mathematical system* i syklusen (figur 1) og er slik beslektet med begrepene representasjon eller abstraksjon. Det er altså brukt om det å matematisere en modell fra ikke-matematiske termer til matematiske. I PISA bruker man det samme begrepet, men da om hele prosessen med å arbeide med matematikk. Her kan man for eksempel spurt seg om matematisering også kan brukes om det å oversette de matematiske resultatene tilbake til den opprinnelige konteksten. Er ikke dette tilfelle, kunne man spurt seg om begrepet matematiseringssyklusen er passende i denne sammenhengen.

Begrepet modellering bevarer muligens helhetsbildet i større grad, da flere av stegene kan sies å involvere modellering, og er kanskje mer dekkende for hva syklusen innebærer.

Videre så vi at organiseringen av begrepet *matematisk kompetanse* er noe ulik for PISA og kildelitteraturen. I modelleringslitteraturen var det flere beskrivelser man mente utfylte hverandre, enten det var ren modelleringskompetanse, en åttedeling eller femdeling. I PISA har man valgt å operasjonalisere den nevnte åttedelingen i en taksonomisk tredeling av begrepet, som vi så skilte seg fra operasjonaliseringen i kilden. Dette er altså en forskjell som har røtter i PISAs operasjonalisering av stoffet, og er ikke en innholdmessig forskjell.

I kapittel 3.5.4 ble det funnet at begrepene som inngikk i sammenlikningen her hadde ulik *dekningsgrad*. Man kan for eksempel si at begrepene metakognisjon og læringsstrategier har mange likheter, samtidig som læringsstrategier innholder mer enn metakognisjon og omvendt. Ulikhetene når det kommer til de to utgavene av begrepet motivasjon knytter seg til det at man hadde *ulik*, men ikke motstridende beskrivelser av begrepet i modelleringslitteraturen og PISAs teoretiske grunnlag.

Til slutt kan funnene knyttet til begrepet problemløsing nevnes. I kapittel 3.4 ble det vist at modellering kan ses på som en form for problemløsing, og man kunne kanskje tro at det kan være store likheter mellom modellering og problemløsing i PISA. Dette viste seg imidlertid ikke å være tilfelle. Det ble jo antydet at begrepet ”problemløsing” i seg selv er et litt upresist begrep med mange ulike betydninger, selv innen matematikk. Problemløsing slik det er beskrevet i PISA var rett og slett ikke relevant å sammenlikne med modellering, da det involverer relativt lite matematikk.

6.1.2 Funn i kapittel 5

Funnene i kapittel 5 er ikke like naturlig å kategorisere på samme måte som over, så de vil her komme under titlene ”teoretiske funn” og ”empiriske funn”.

Teoretiske funn

Oppgaven ”den beste bilen” ble helhetlig sett vurdert til å være en middels god modelleringsoppgave. Det ble imidlertid funnet at oppgave 2 er en vesentlig bedre modelleringsoppgave enn oppgave 1. Forskjellene lå i detaljnivået i oppgavene, graden av åpenhet, mulighetene for å benytte seg av ulike modelleringskompetanser, samt det å faktisk ha muligheten til å utvikle en matematisk modell. Samtidig var det større behov for å validere resultatet i oppgave 2 enn i oppgave 1. Det ble likevel vist i kapittel 5.2.4 at man kunne gjort flere endringer med både oppgave 1 og oppgave 2 som ville gjort ”den beste bilen” til en langt bedre modelleringsoppgave enn det var i PISA 2003, men ikke uten at det ville fått relativt store konsekvenser for vurderingen av den.

I forhold til matematisk kompetanse ble funnet ganske likt som over, altså at oppgave 2 forutsetter mer modelleringskompetanse *og* generell matematisk kompetanse enn oppgave 1. Jeg fant at det var relativt få av de åtte kompetansene fra Niss og Jensen (2002) som var relevant for oppgave 1, mens flertallet var relevant for oppgave 2. Det var et par kompetanser som ikke er forutsatt i oppgaven i det hele tatt, men disse er også vanskelig å involvere i den type test den faglige testen i PISA er, til tross for at de er med i rammeverket.

Empiriske funn

Først ble det funnet at var en vesentlig forskjell på skåreprosenten på de to oppgavene, det vil si andelen elever som har besvart oppgaven og som har fått uttelling (ett poeng). Dette henger sannsynligvis sammen med forskjellen i kompleksitet mellom de to, en forskjell som ble antydet i den teoretiske analysen. Vi så at 56,3 % hadde fått uttelling på oppgave 1, mens bare 18,4 % hadde fått det på den andre. Dette indikerer en relativt stor forskjell i vanskegrad på de to oppgavene. Gjennomsnittet av 45 oppgaver av lik form som ”den beste bilen”, var 50,5 % uttelling, noe som indikerer at oppgave 1 er noe lettere enn andre oppgaver, mens oppgave 2 er vesentlig vanskeligere.

Under avsnittet ”korrelasjonstabell” ble det undersøkt om det var sammenheng mellom konstruktene læringsstrategier og motivasjon, og skåre på oppgaven. Dette ble gjort for å kaste lys over de matematikkdidaktiske sidene ved modellering og PISA som ble håndtert i hhv. kapittel 3.3.3 og 3.5.4. Som vi fant i den teoretiske analysen, var oppgave 2 en vesentlig bedre modelleringsoppgave enn oppgave 1. Siden vi her så en svak tendens mot høyere korrelasjonsverdier for oppgave 2 enn oppgave 1, støtter altså funnene antakelsen om at gode modellerere også vektlegger selvregulert læring, selv om den sterkeste antydningen for dette ligger i det faktum at vi faktisk *har* korrelasjon mellom oppgave 2 og konstruktene. Det må understrekes at det er en svak tendens, og kan ikke sies å være et solid statistisk fundament å konkludere på.

6.1.3 Helhetsvurdering og årsaker

Totalt sett er det mange likheter mellom matematisk modellering og PISAs beskrivelse av matematisk prosess. I kapittel 3 fant vi store likheter mellom generelle prinsipper (anvendelsen av matematikk i virkelighetsnære situasjoner), måtene å fremstille matematisk prosess på (sykluser) og synene på hva matematisk kompetanse er (samme kildemateriale). Disse funnene ble underbygget med likheter i de matematikkdidaktiske perspektivene som ble trukket frem i kapittel 3.3.3 og 3.5.4. Også i kapittel 5 ble det funnet mye som underbygget funnene i kapittel 3. Oppgave 2 av oppgaven ”den beste bilen” fra PISA 2003 var en god modelleringsoppgave.

I det hele tatt er det bemerkelsesverdig mange fellestrekk i de to referanserammene, og man kunne kanskje hevdet at bruk av matematisk modellering som læringsaktivitet bidrar til utviklingen av elevenes *mathematical literacy*, og motsatt, at fokus på utviklingen av elevenes *mathematical literacy* vil medføre økt bruk av matematisk modellering.

Jeg synes det er naturlig å prøve å avdekke noen av årsakene til likhetstrekkene mellom modelleringslitteraturen og PISAs teoretiske bakgrunn. Vi har allerede sett at mye av kildematerialet til modelleringslitteraturen jeg har brukt, også brukes i rammeverket for PISA. For eksempel så vi under behandlingen av matematisk kompetanse i kapittel 3.5.3 at PISA bygger på det danske KOM-prosjektet (Niss & Jensen, 2002, Niss, 2003), som samtidig er referert til i en artikkel (Blomhøj & Jensen, 2007) i studievolumet til den 14. ICMI-studien om modellering og anvendelser (Blum et al., 2007). I tillegg kan vi se at to av redaktørene til dette studievolumet, Werner Blum og Mogens Niss, også sitter i ekspertgruppen i matematikk i PISA (OECD, 2003, s. 199).

Det er altså sterke bånd mellom modelleringslitteraturen og PISA. I en note i Niss (2003) understreker Mogens Niss dette:

> It should be noted that the thinking behind and before the Danish KOM-project has influenced the mathematics domain of OECD’s PISA project, partly because the author is a member of the mathematics expert group for that project. That influence is reflected in PISA’s notion of mathematical literacy and its constituents. (Niss, 2003, s. 12).

Man kunne kanskje spurt seg om ikke rammeverket for PISA kunne blitt omstrukturert til å ha selve modelleringsbegrepet som det mest sentrale, slik det er i modelleringslitteraturen generelt, og i studievolumet til ICMI 14 spesielt. Det kunne det nok, og denne oppgaven antyder at dette ikke er umulig. På den annen side er det vesenlige forskjeller i formålet i litteraturen for modellering og PISA-undersøkelsene. For det første ønsker PISA å teste i hvilken grad elevene er forberedt på å møte morgendagens samfunn, et perspektiv vi ikke finner i modelleringslitteraturen. For det andre må rammeverkene for PISA tilrettelegge for en type matematikktest med tilhørende statistiske analyser som vil være svært annerledes enn måten man ønsker å arbeide med og vurdere modellering på. Dette gjør det klart at PISA har behov for å tilpasse teori, konstrukter, måleinstrumenter, faglige oppgaver og spørsmål etter sine formål. I litteraturen for modellering kan man formulere oppgaver og situasjoner etter helt andre kriterier enn dem man har i PISA.

6.2 Begrensninger og videre studier

I dette kapitlet vurderer jeg først denne masteroppgavens begrensninger, før jeg antyder hva som kan undersøkes i forlengelsen av den.

6.2.1 Oppgavens begrensninger

De teoretiske delene av masteroppgaven er sammenlignende studier av ulike sider ved matematisk modellering og PISA, og jeg har forsøkt å trekke frem de mest relevante områdene i begge referanserammer. I den forbindelse har jeg måttet gjøre en del begrensninger, da jeg ikke hadde plass til å danne et komplett bilde av verken modellering eller PISA. Ett sted hvor jeg måtte gjøre en tematisk avgrensning, var i kapittel 3.5.4 hvor jeg snakker om *selvregulert læring* slik det brukes i PISA. Her har PISA med ett tredje konstrukt i tillegg til *læringsstrategier* og *motivasjon,* nemlig *selvoppfatning*. Dette konstruktet er ikke med i oppgaven fordi jeg vurderte det til ikke å være særlig relevant for matematisk modellering. Meningen med analysen av disse konstruktene var også å åpne for en empirisk belysning av PISA, noe jeg mener konstruktet *selvoppfatning* ikke bidro til.

Størst begrensninger knytter seg imidlertid til den empiriske undersøkelsen i kapittel 5, der det er mange skjønnsmessige vurderinger og subjektive synspunkter. Det er nok flere påstander og utsagn som er diskutable her, for eksempel påstandene knyttet til oppgavens (”den beste bilen”) forutsetninger til elevenes matematiske kompetanse. Jeg har ikke plass til å drøfte alle slike påstander her, og nøyer meg med å poengtere noen andre viktige begrensninger.

For det første bruker jeg bare én oppgave som grunnlag for analysen her, noe som gjør at denne delen fungerer mer som et *eksempel*. Jeg kan jo ikke si så mye om *hele* PISA på grunnlag av én oppgave, da måtte jeg i så fall ha tatt med et representativt utvalg av oppgaver. I en liten artikkel av Turner (2007) beskrives et utvalg oppgaver fra PISA 2000 og 2003, og det hevdes at oppgavene generelt er gode modelleringsoppgaver, men med varierende grad av kompleksitet. Siden denne oppgaven bygger på kun én oppgave, kan jeg ikke trekke generelle konklusjoner om PISA på samme måte som det gjøres i denne artikkelen. På den annen side er det mye i min oppgave som støtter det at oppgavene i PISA er gode modelleringsoppgaver, for eksempel det at rammeverket, som oppgavene jo operasjonaliseres ut fra, inneholder mye matematisk modellering.

Det er nevneverdig at korrelasjonskoeffisientene mellom skåren på oppgaven og de i alt syv måleinstrumentene jevnt over er lave. Den høyeste korrelasjonskoeffisienten jeg fant for oppgaven ”den beste bilen” var 0,28, som ifølge antydningen i kapittel 4.3.2 er i kategorien ”svak”, og alle de andre var vesentlig lavere enn dette. Dette betyr at funnene i kapittel 5 i den forbindelse kun kan anses som antydninger, ikke klare sammenhenger, til tross for at de er statistisk signifikante.

Vurdering har ikke vært et stort tema i denne oppgaven, det er bare nevnt i noen bisetninger. Likevel må det kommenteres at jeg gjør en form for vurdering i kapittel 5 når jeg bruker *skåren* på oppgaven ”den beste bilen” som vurderingsgrunnlag for hvem som er gode ”modellerere”, som jo er den måten PISA generelt vurderer faglige prestasjoner på. Uten å gjøre en større redegjørelse for temaet vurdering her, kan jeg si generelt at dette er en dårlig måte å vurdere modelleringsevne på. I teksten ble det vist til at matematisk modellering er en prosess som involverer relativt kompliserte problemstillinger, noe som gjør vurderingen komplisert. Men siden denne oppgaven bygger på PISAs metoder for hvordan man vurderer faglige prestasjoner, var jeg begrenset til å bruke samme metode.

6.2.2 Videre studier

Det finnes svært mange problemstillinger som kan utledes fra denne masteroppgaven som det hadde vært interessant å besvare. Noen av disse er som følgende:

- Hvilken plass har matematisk modellering i norsk skole i dag? Hvordan har utviklingen på dette punktet vært?

- I hvilken grad bidrar PISA til at matematisk modellering får større plass i norsk skole?
- Hvordan kan man bruke matematisk modellering i undervisning og vurdering i matematikkfaget?
- Hvilke fordeler og ulemper fører bruk av matematisk modellering med seg? Hvilke dilemmaer og hva slags kritikk står denne undervisningsformen ovenfor?
- I hvilken grad kan IKT brukes i undervisning av matematisk modellering?
- Hvordan kan matematisk modellering påvirke elevenes syn på matematikkens natur og dens funksjon i samfunnet?

Det er altså flere aspekter og vinklinger ved både undervisning og selve skolesystemet som kan bli gjenstand for undersøking. I forlengelsen av denne oppgaven vil problemstillinger knyttet til PISA kanskje være mest relevant, for eksempel om graden av modellering vil være økende eller minkende i fremtidige rammeverk for undersøkelsen, samt hvilken innflytelse dette kan ha på norsk skole.

En omfattende hovedoppgave som tar for seg matematisk modellering og hvordan det brukes i den videregående skolen i Norge, er Erfjord (1997). Oppgaven tar for seg omtrent alle matematikkursene i den videregående skolen slik den var organisert før Kunnskapsløftet (Utdanningsdirektoratet, n.d.) ble innført i 2006. Slik er denne oppgaven mindre relevant i forhold til hvordan matematikkfaget er bygd opp i den videregående skolen nå (våren 2008), men den er likevel leseverdig.

7. Konklusjon

Problemstillingen i denne oppgaven er:

> **Hva er matematisk modellering, og hvor mye matematisk modellering inkluderes i PISAs teoretiske grunnlag og operasjonaliseringer?**

Denne ble konkretisert i form av tre forskningsspørsmål. Det første er

a) **I hvilken grad er det samsvar mellom *grunnprinsipper* i teorien for matematisk modellering og *grunnprinsipper* i PISAs teoretiske grunnlag og operasjonaliseringer?**

Under dette spørsmålet ble det blant annet funnet at i både modelleringslitteraturen og PISA vektlegges løsing av virkelighetsnære problemer hentet fra dagliglivet eller verden for øvrig. Prosessen med å løse slike problemer fremstilles ved hjelp av sykluser fra begge hold, og disse syklusene har svært mange likhetstrekk. Den største ulikeheten på det prinsipielle planet er at PISA søker å måle i hvilken grad elevene besitter nødvendige kunnskaper for å være fullt funksjonerende samfunnsborgere, mens vi ikke finner et tilsvarende perspektiv i modelleringslitteraturen. Det andre forskningsspørsmålet er

b) **I hvilken grad er det samsvar mellom begrepene *matematisk kompetanse* i teorien for matematisk modellering og *matematisk kompetanse* i PISAs teoretiske grunnlag og operasjonaliseringer?**

Her ble det funnet stor grad av samsvar. I modellering skilles det riktignok mellom modelleringskompetanse og øvrig matematisk kompetanse, men begge perspektiver involveres her. I PISA bygger man rammeverkene på teori fra mange steder, deriblant det man kan kalle modelleringslitteratur, noe som er med på å forklare likhetene her. Det ble funnet noen forskjeller i hvordan man operasjonaliserer matematisk kompetanse i forbindelse med måling/vurdering av de ulike kompetansene. Det ble antydet at man i PISA trenger å operasjonalisere teorien etter formålene med undersøkelsen, mens man i modellering står friere i forhold til rammer for formulering og vurdering av oppgaver. Det siste forskningsspørsmålet er

c) **I hvilken grad er det samsvar mellom begrepene *metakognisjon* og *motivasjon* i teorien for matematisk modellering og hhv. *læringsstrategier* og *motivasjon* i PISAs teoretiske grunnlag og operasjonaliseringer?**

Under dette spørsmålet var det samsvar i den forstand at det var teoretisk overlapp mellom de parvise begrepene, som for eksempel at metakognisjon kan være en form for læringsstrategi, og vice versa. Selv om det ble funnet noen grad av overlapp mellom de to beskrivelsene av motivasjon, var det samtidig vanskelig å gi et klart bilde av samsvaret grunnet mangel på forskning. Empirisk ble det antydet at begrepene læringsstrategier og motivasjon slik de brukes i PISA, også er relevante i modelleringssammenheng. Jeg vil derfor vurdere det totalt sett til å være klare tegn på samsvar mellom disse perspektivene i modelleringslitteraturen og PISAs teoretiske bakgrunn og operasjonaliseringer.

Jeg vil konkludere med at det totalt sett er det inkludert mye matematisk modellering i PISAs teoretiske bakgrunn og operasjonaliseringer. Både på overordnet plan og dypere i teorien er det mange fellestrekk og likheter mellom referanserammene. De forskjellene som finnes blir tydeligere når teorien skal operasjonaliseres i form av konkrete oppgaver. Mens PISA er en undersøkelse som søker å måle og analysere kunnskap i form av en test med tilhørende spørreskjema, er modellering en måte å undervise og lære matematikk på som er løsrevet fra slike formål. Modellering er en fleksibel og åpen undervisnings- og læringsaktivitet som stiller helt andre krav til oppgaveformulering og måling av kunnskaper enn PISA.

Litteraturliste

Andersen, O. B. F. (i trykk). *Algebrakunnskaper hos norske elever. En sekundæranalyse av norske elevers skåre på utvalgte TIMSS-oppgaver*. Upublisert masteroppgave, Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo, Oslo.

Bell, A. (1993). Principles for the design of teaching. [Elektronisk versjon]. *Educational Studies in Mathematics, 24*(1), 5-34.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2007). What's the fuss about Competencies? I W. Blum, M. Niss & I. Huntley (Red.), *Modelling, applications and applied problem solving.* (1. utg., ss. 45-56). Chichester: Ellis Horwood Limited.

Blomhøj, M., & Kjeldsen, T. H. (2006). Teaching mathematical modelling through project work. [Elektronisk versjon]. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 163-177.

Bloom, B. S. (Red). (1956). *Taxonomy of Educational Objectives. The Classification of Educational Goals.* Ann Arbor, Michigan: Longmans, Green and Co.

Blum et al. (2002). ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education – Discussion Document. [Elektronisk versjon]. *Educational Studies in Mathematics, 51*(1-2), 149-171.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (Red.). (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study.* New York: Springer.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematical Instruction. I W.

Blum, M. Niss & I. Huntley (Red.), *Modelling, applications and applied problem solving.* (1. utg., ss. 1-21). Chichester: Ellis Horwood Limited.

Burkhardt, H., & Pollak, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. [Elektronisk versjon]. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 178-195.

Christensen, J. A. (2004). *Problemløsning. En teoretisk og emirisk studie av emnet problemløsning.* Upublisert hovedoppgave, Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo, Oslo.

Dahl, B. (2004). Analysing Cognitive Learning Processes through Group Interviews of Successful High School Pupils: Development and use of a Model. [Elektronisk versjon]. *Educational Studies in Mathematics, 56*(2-3), 129-155.

Dahl, O. (i trykk). *Derivasjon i 3MX. En analyse av pilotstudien til TIMSS Advanced 2008 I Norge. Noe har skjedd i realfagene, men med f'(x) < 0.* Upublisert masteroppgave, Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo, Oslo.

Descartes, R. (1644). *Principia philosophiae*. [Online]. Lastet ned 15. februar 2008, fra http://la.wikisource.org/wiki/Principia_philosophiae

Erfjord, I. (1997). *Matematisk modellering og bruk av matematikk i videregående skole*. Upublisert hovedoppgave, Institutt for matematiske fag, Høgskolen i Agder, Kristiansand.

Ernest, P. (2000). *Why Teach Mathematics?* [Elektronisk versjon]. Lastet ned 18. februar 2008, fra http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/why.htm

Flavell, J. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. I L. B. Resnick (Red), *The Nature of Intelligence.* (1. utg., ss. 231-235). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach Mathematics so as to be useful. [Elektronisk versjon]. *Educational Studies in Mathematics, 1*(1), 3-8.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1981). Major Problems in Mathematics Education. [Elektronisk versjon]. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 133-150.

Garcìa, J., Gascòn, J., Higueras, L. R., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. [Elektronisk versjon]. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(3), 226-246.

Gjone, G. (2001) Matematikkdidaktikk som vitenskap – nasjonal utvikling og internasjonal organisering. I E. Elstad (Red.) *Fagdidaktikkens identitet og utfordringer.* (1. utg., ss. 81-105). Oslo: Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo. [Online]. Lastet ned 29. april 2008, fra http://www.ils.uio.no/forskning/publikasjoner/actadidactica/AD0105ma.pdf

Goldin, G. A. (2002). Representation in Mathematical Learning and Problem Solving. I L.D. English (Red.), *Handbook of International Research in Mathematics Education.* (1. utg., ss. 197-218). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Grønmo, L. S., Bergem, O. K., Kjærnsli, M., Lie, S., & Turmo, A. (2004). *Hva i all verden skjer i realfagene? Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2003.* Oslo: Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.

Hannula, M. S. (2004). *Regulating Motivation in Mathematics.* [Elektronisk versjon]. Lastet ned 15. februar 2008, fra http://www.icme-organisers.dk/tsg24/Documents/Hannula.doc

Hannula, M. S. (2006). Motivation in Mathematics: Goals reflected in Emotions. [Elektronisk versjon]. *Educational Studies in Mathematics, 63*(2), 165-178.

Hoksnes, S. M. S. (i trykk). *Diagnostisk informasjon i TIMSS. En undersøkelse av oppgaver med desimaltall.* Upublisert masteroppgave, Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo, Oslo.

ICME. (n.d.). Lastet ned 31. januar 2008, fra http://www.icme11.org/about.html.

ICTMA. (n.d.). Lastet ned 01. april 2008, fra http://www.ictma.net/

Imsen, G. (2001). *Elevens verden. Innføring i pedagogisk psykologi* (3. utgave). Trondheim: Universitetsforlaget.

Imsen, G. (2004). *Lærerens verden. Innføring i generell pedagogikk* (3. utgave). Tangen: Universitetsforlaget.

Jensen, E. C. (i trykk). *Norske elevers forståelse av algebra. En dybdeanalyse av utvalgte TIMSS-oppgaver i 8. klasse.* Upublisert masteroppgave, Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo, Oslo.

Katz, V. J. (2004). *History of mathematics: Brief Edition.* Addison-Wesley.

Kilpatrick, J. (1985). A Retrospective Account of the Past 25 Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving. I E.A. Silver, *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives.* (1. utg., ss. 2-15). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kjærnsli, M., Lie, S., Olsen, R. V., & Roe, A. (2007). *Tid for tunge løft. Norske elevers kompetanse i naturfag, lesing og matematikk i PISA 2006.* Oslo: Universitetsforlaget. [Online]. Lastet ned 29. april 2008, fra http://www.udir.no/upload/Forskning/Internasjonale_undersokelser/Tid_for_tunge_loft.pdf

Kjærnsli, M., Lie, S., Olsen, R. V., Roe, A., & Turmo, A. (2004). *Rett spor eller ville veier? Norske elevers prestasjoner i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2003.* Oslo: Universitetsforlaget.

Knain, E. (2002). *Elevenes læringsvaner – Selvregulert læring som en viktig kompetanse på tvers av fag: Perspektiver og resultater*. [Elektronisk versjon]. Lastet ned 29. april 2008, fra http://www.ils.uio.no/forskning/publikasjoner/actadidactica/AD0205ma.pdf

Knain, E., & Turmo, A. (2003). Self-regulated Learning. I S. Lie, P. Linnakylä, A. Roe (Red.), *Northern Lights on PISA. Unity and Diversity in the Nordic Countries in PISA 2000.* (1. utg., ss. 101-112). Oslo: Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo. [Online]. Lastet ned 29. april 2008, fra http://www.oecd.org/dataoecd/31/16/33684855.pdf

Kramarski, B., Mevarech, Z. R., & Arami, M. (2002). The Effects of Metacognitive Instruction on Solving Mathematical Authentic Tasks. [Elektronisk versjon]. *Educational Studies in Mathematics, 49*(2), 225-250.

Lakoma, E. (2007). Learning Mathematical Modelling – From the perspective of Probability and Statistics Education. I W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education.* (1. utg., ss. 387-394). New York: Springer.

Lesh, R., & Yoon, C. (2007). What is Distinctive in (Our Views About) Models and Modelling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching? I W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education.* (1. utg., ss. 161-170). New York: Springer.

Lie, S., Kjærnsli, M., Roe, A., & Turmo, A. (2001). *Godt rustet for framtida? Norske 15 åringers kompetanse i lesing og realfag i et internasjonalt perspektiv.* Oslo: Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo. [Online]. Lastet ned 29. april 2008, fra http://www.pisa.no/pdf/hovedrapport_2004.pdf

Løvås, G. G. (2004). *Statistikk for universiteter og høgskoler* (2. utgave). Oslo: Universitetsforlaget.

Maass, K. (2006). What are modelling competencies? [Elektronisk versjon]. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 113-142.

McLeod, D. B. (1985). Affective Issues in Research on Teaching Mathematical Problem Solving. I E. A. Silver (Red). *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives.* (1. utg., ss. 267-279). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Mousoulides, N., Christou, C., & Sriraman, B. (2006). *From Problem Solving to Modelling – A meta-analysis.* [Elektronisk versjon]. Lastet ned 02. februar 2008, fra http://www.umt.edu/math/reports/sriraman/MousoulidesChristouSriraman.pdf

Nesher, P., Hershkovitz, S., & Novotna, J. (2003). Situation model, text base and what else? Factors Affecting Problem Solving. [Elektronisk versjon]. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(1), 151-176.

Niss, M. (2003). *Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project.* [Elektronisk versjon]. Lastet ned 13. februar 2008, fra http://www7.nationalacademies.org/mseb/mathematical_competencies_and_the_learning_of_mathematics.pdf

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. L. (2007). Introduction. I W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn, & M. Niss (Red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education.* (1. utg., ss. 3-32). New York: Springer.

Niss, M., & Jensen, T. H. (Red.). (2002). *Kompetencer og matematiklæring.* (Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18 – 2002). København: Undervisningsministeriet. [Online]. Lastet ned 29. april 2008, fra http://pub.uvm.dk/2002/kom/hel.pdf

OECD-PISA i Norge. (n.d.a). *Frigitte oppgaver i matematikk fra PISA 2003.* [Elektronisk versjon]. Lastet ned 29. januar 2008, fra http://www.pisa.no/pdf/frigitt_mate03.pdf

OECD-PISA i Norge. (n.d.b). *Frigitte oppgaver i problemløsing fra PISA 2003.* [Elektronisk versjon]. Lastet ned 29. januar 2008, fra http://www.pisa.no/pdf/frigitt_problem.03.pdf

OECD-PISA i Norge. (n.d.c). *Elevspørreskjemaet fra PISA 2003.* [Elektronisk versjon]. Lastet ned 23. april 2008, fra http://www.pisa.no/pdf/Elevsporreskjema2003-B.pdf

OECD. (1999). *Measuring Student Knowledge and Skills. A New Framework for Assessment.* Paris: OECD Publications Service. [Online]. Lastet ned 29. april 2008, fra http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/45/32/33693997.pdf

OECD. (2000). *Measuring Student Knowledge and Skills. The PISA 2000 Assessment of Reading, Mathematical, and Scientific Literacy.* Paris: OECD Publications Service. [Online]. Lastet ned 29. april 2008, fra http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/44/63/33692793.pdf

OECD. (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework.* Paris: OECD Publications Service. [Online]. Lastet ned 29. april 2008, fra http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/46/14/33694881.pdf

Pollak, H. (1979). The Interaction between Mathematics and Other School Subjects. [Elektronisk versjon]. *New trends in mathematics teaching, 4*(1), 232-248.

Pollak, H. (2007). Mathematical modeling – A conversation with Henry Pollak. I W. Blum, M. Niss & I. Huntley (Red.), *Modelling, applications and applied problem solving.* (1. utg, ss. 109-120). Chichester: Ellis Horwood Limited.

Polya, G. (1971). *How to solve it* (2. utgave). New Jersey: Princeton University Press.

Ragin, C. C. (1994). *Constructing Social Research.* Thousand Oaks: Pine Forge Press.

Sandvold et al. (2007). *Sigma, matematikk vg1 T – Studieforberedende.* Tangen: Gyldendal.

Schleiner, A. (2007). Can competencies assessed by PISA be considered the fundamental school knowledge 15-year-old should possess? [Elektronisk versjon]. *Journal of Educational Change, 8*(4), 349-357.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Florida: Academic Press, Inc.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. I D. A. Grouws (Red), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (1. utg, ss. 334-370). New York: Macmillan Publishing Company.

Sjøberg, S. (2007). *Hva tester PISA?* [Elektronisk versjon]. Lastet ned 09. januar 2008, fra http://folk.uio.no/sveinsj/PISA-kronikker-Sjoberg-des2007.pdf

Skovsmose, O. (1994). Towards a Critical Mathematics Education. [Elektronisk versjon]. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 35-57.

Solvang, R. (1996). *Matematikkdidaktikk.* Bekkestua: NKI-Forlaget.

Staxrud, K. (i trykk). [tittel ikke tilgjengelig]. Upublisert masteroppgave, Matematisk institutt, Universitetet i Oslo, Oslo.

Turmo, A. (2004). *Hva menes med matematikkompetanse i PISA-studien?* [Elektronisk versjon]. Lastet ned 06. februar 2008, fra http://www.caspar.no/tangenten/2004/pisa204.pdf

Turner, R. (2007). Modelling and Applications in PISA. I W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education.* (1. utg., ss. 433-440). New York: Springer.

Utdanningsdirektoratet. (n.d.). *Kunnskapsløftet – fag og læreplaner*. Hamar: Utdanningsdirektoratet. [Online]. Lastet ned 29. April 2008, fra http://www.udir.no/templates/udir/TM_UtdProgrFag.aspx?id=2103

Utgård, P.-A. (i trykk). *Elevers forståelse av brøkoppgaver. En sekundæranalyse av TIMSS-undersøkelsen i 2003 på 8. klassetrinn.* Upublisert masteroppgave, Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo, Oslo.

Wistedt, I. (1993). Elevers svårigheter att formulera matematiska problem. *Nordisk matematikkdidaktikk, 1*(1), 40-54.

Zbiek, R. M., & Conner, A. (2006). Beyond Motivation: Exploring Mathematical Modeling as a Context for Deepening Students' Understandings of Curricular Mathematics. [Elektronisk versjon]. *Educational Studies in Mathematics, 63*(1), 89-112.

Vedlegg 1

Spørsmålene i det følgende er hentet fra den nasjonale rapporten fra PISA 2003 (Kjærnsli et al., 2004, s. 178-190). For hele elevspørreskjemaet, se OECD-PISA i Norge (n.d.c).

Læringsstrategier

De tre måleinstrumentene man måler konstruktet *læringsstrategier* med i PISA 2003 er *ferdighetstrening i matematikk, utdypning i matematikk, og kontrollstrategier i matematikk.*

Ferdighetstrening i matematikk

Den første læringsstrategien man har kartlagt, kalles *ferdighetstrening i matematikk* på norsk, og *memorisation strategies* på engelsk. Måleinstrumentet er målt med følgende spørsmål:

Det er forskjellige måter å arbeide med matematikk på: Hvor enig er du i disse utsagnene?

- *Jeg løser noen typer matematikkoppgaver så ofte at jeg føler at jeg kan løse dem i søvne.*
- *Når jeg arbeider med matematikk, lærer jeg så mye jeg kan utenat.*
- *For å huske hvordan jeg løser matematikkoppgaver, går jeg gjennom eksempler mange ganger.*
- *For å lære matematikk prøver jeg å huske alle trinnene i framgangsmåten.*

Utdypning i matematikk

Den andre læringsstrategien man har kartlagt i PISA kalles *utdypning i matematikk* på norsk, og *elaboration strategies* på engelsk. Måleinstrumentet ble målt gjennom følgende spørsmål:

Det er forskjellige måter å arbeide med matematikk på. Hvor enig er du i disse utsagnene?

- *Når jeg løser matematikkoppgaver, leter jeg ofte etter nye måter å finne svaret på.*
- *Jeg tenker på hvordan den matematikken jeg har lært, kan brukes i dagliglivet.*
- *Jeg prøver å forstå nye begreper i matematikk ved å knytte dem til noe jeg kan fra før.*
- *Når jeg løser matematikkoppgaver, prøver jeg ofte å tenke meg hvordan løsningen kan brukes på andre interessante spørsmål.*
- *Når jeg lærer matematikk, prøver jeg å knytte det til noe jeg har lært i andre fag.*

Kontrollstrategier i matematikk

Den tredje og siste læringsstrategien er *kontrollstrategier i matematikk*, på engelsk kalt *control strategies*. Følgende spørsmål ble brukt for å måle dette måleinstrumentet:

Det er forskjellige måter å arbeide med matematikk på. Hvor enig er du i disse utsagnene?

- *Når jeg leser til en matematikkprøve, prøver jeg å finne ut hva som er mest viktig å lære.*
- *Når jeg arbeider med matematikk, kontrollerer jeg meg selv for å se om jeg husker det jeg allerede har gjort.*
- *Når jeg arbeider med matematikk, prøver jeg å finne ut hvilke begreper jeg ikke har forstått ordentlig.*
- *Når det er noe jeg ikke forstår i matematikk, prøver jeg alltid å finne mer informasjon som kan gjøre det klarere.*
- *Når jeg arbeider med matematikk, starter jeg med å finne ut nøyaktig hva jeg må lære.*

Motivasjon

I PISA 2003 måles konstruktet motivasjon ved hjelp av 4 måleinstrumenter, *interesse for matematikk, instrumentell motivasjon for matematikk, læring gjennom konkurranse i matematikk* og *læring gjennom samarbeid i matematikk.*

Interesse for matematikk

For å kartlegge elevenes *interesse for matematikk*, som for øvrig kalles *interest in mathematics* på engelsk, ble følgende spørsmål stilt:

Tenk på ditt forhold til matematikk: Hvor enig er du disse spørsmålene?

- *Jeg liker bøker om matematikk*
- *Jeg ser fram til matematikktimene*
- *Jeg arbeider med matematikk fordi jeg liker det*
- *Jeg er interessert i det jeg lærer i matematikk*

Instrumentell motivasjon for matematikk

Følgende spørsmål ble stilt for å måle måleinstrumentet *instrumentell motivasjon for matematikk*, på engelsk kalt *instrumental motivation for mathematics*:

Tenk på ditt forhold til matematikk: Hvor enig er du i disse utsagnene?

- *Å gjøre en innsats i matematikk er vel verdt fordi det vil hjelpe meg i det arbeidet jeg vil gjøre senere.*
- *Å lære matematikk er viktig for meg fordi det vil bedre mine yrkesmuligheter.*
- *Matematikk er et viktig fag for meg fordi jeg trenger det når jeg skal studere videre.*
- *Mye av det jeg lærer i matematikk, vil hjelpe meg til å få jobb.*

Læring gjennom konkurranse i matematikk

På engelsk kalles måleinstrumentet *competitive learning*, og måles ved følgende spørsmål:

Tenk på matematikktimene dine. Hvor enig er du i disse utsagnene?

- *Jeg vil gjerne være den beste i klassen i matematikk*
- *Jeg arbeider veldig hardt i matematikk fordi jeg vil gjøre det bedre enn de andre til eksamen.*
- *I matematikk prøver jeg alltid å gjøre det bedre enn de andre elevene i klassen.*
- *Jeg arbeider best i matematikk når jeg prøver å gjøre det bedre enn andre.*

Læring gjennom samarbeid i matematikk

På engelsk heter måleinstrumentet *co-operative learning*, og følgende spørsmål ble stilt:

Tenk på matematikktimene dine: Hvor enig er du i utsagnene?

- *Jeg liker å arbeide i grupper med andre elever i matematikk.*
- *Når vi arbeider med et prosjekt i matematikk, mener jeg at det er bra å samle ideene fra alle elevene i gruppa.*
- *Jeg arbeider best i matematikk når jeg arbeider sammen med andre elever.*
- *Jeg liker å hjelpe andre i gruppe til å gjøre det bra i matematikk.*
- *Jeg lærer matematikk best når jeg arbeider sammen med andre elever i klassen.*