Konkreter i matematikkundervisningen

En litteraturstudie

Nina Halvorsen og Vidar Waaler

Masteroppgave i spesialpedagogikk ved
Det utdanningsvitenskapelige fakultet,
Institutt for spesialpedagogikk

UNIVERSITETET I OSLO

Vår, 2011

Bruk av konkreter i matematikkundervisningen

Nina Halvorsen og Vidar Waaler

2011

Bruk av konkreter i matematikkundervisningen.

http://www.duo.uio.no/

Trykk: Reprosentralen, Universitetet i Oslo

Sammendrag

Problemstilling

Dette er en litteraturstudie som tar for seg bruk av konkreter i matematikkundervisningen. Problemstillingen er:

Hva sier forskningslitteratur om bruk av konkreter i matematikkundervisningen?

Datamaterialet har ulike tilnærminger til bruk av konkreter. Det er variert alder i utvalgene og materialet kan gi oss et flerspektret bilde på hvordan konkreter virker inn på læring.

Metode og materiale

Vi benyttet oss av formålstjenelig, eller skjønnsmessig utvalg hvor vi hadde ulike kriterier for valg av forskningslitteratur. Fem ulike artikler dannet datamaterialet vårt. Vi hadde til hensikt å få et bredt innblikk i hvordan konkreter kan brukes, og hvordan de virker inn på læring av matematiske begreper og konsepter.

Resultater og konklusjon

Forskningen er tvetydig og innehar både positive og negative sider. Konkreter ser ut til å ha en positiv effekt på barns ervervelse av matematikkforståelse. Det kan imidlertid se ut som det i større grad bør tas hensyn til hvordan konkretene ser ut og hvordan læreren bruker dem. Konkreter med irrelevante elementer kan avlede eleven fra forståelse. Dersom konkreter ikke er relevante for overføring fra konkret til abstrakt forståelse, kan konkretene ha en svekkende funksjon. De kan derimot ha en profitterende effekt dersom konkretene er relevante uten for mye avledende egenskaper. Det bør tas individuelle hensyn i forhold til hvor ofte konkretene brukes, hva slags konkreter som anvendes eller didaktiske tilnærminger. Konkreter har også en påvirkning på motivasjon. Det er forskningsmessig usikkerhet rundt hvilken effekt konkreter har. Det kan se ut til å være behov for mer forskning på området.

Forord

Arbeidet med denne oppgaven har vært lærerikt, utfordrende og interessant. Vi har ervervet ny lærdom om bruk av konkreter i matematikken, som i seg selv er utrolig spennende. Vi ser på det som et privilegium at vi har kunnet vie så mye tid til kun dette temaet over lengre tid.

Vi ønsker først å takke hverandre for overbærenhet og raushet gjennom hele prosessen. Ikke mindre viktig er vår veileder, Kolbjørn Varmann. Tusen takk for spennende iakttakelser, innspill og digresjoner. Vi har følt oss utfordret og ivaretatt. Videre vil vi takke Kristian, Stine, Nina og Hanne for nyttige innspill og språklige korreksjoner.

Takker også familie og venner som har holdt ut med oss i opp- og nedturer.

Langhus, 15.juni 2011

Vidar Waaler og Nina Halvorsen

Innholdsfortegnelse

1 Innledning ... 1
1.1 Konkreter, en selvfølgelighet? ... 1
1.2 Problemstilling ... 2
1.3 Konkreter og mentale representasjoner ... 3
1.3.1 Fysiske representasjoner ... 4
1.3.2 Mentale representasjoner ... 5
1.4 Konstruktivismen som læringsteoretisk ramme ... 7
1.5 Labinowicz ... 13
1.5.1 Elementer fra “Learning From Children. New Beginnings for Teaching Numerical Thinking” ... 13
1.6 Oppsummering ... 19
2 Metode ... 20
2.1 Forforståelse ... 20
2.2 Litteratursøk ... 21
2.3 Kriterier og utvalg ... 21
2.4 Validitet og reliabilitet ... 24
2.5 Etikk ... 25
3 Teori ... 27
3.1 Patrick W. Thompson ... 27
3.2 Vladimir M. Sloutsky, Jennifer A. Kaminski, og Andrew F. Heckler ... 48
3.3 David H. Uttal, Linda L. Liu og Judy S. DeLoache ... 59
3.4 Snorre Ostad ... 75
3.5 Evelyn J. Sowell ... 77
4 Analyse ... 85
4.1 Innledning ... 85
4.2 Konkretenes relevans ... 86
4.2.1 Avledende konkreter ... 88
4.2.2 Hensynet til individet ... 90
4.2.3 Lærerens rolle ... 92
4.3 Overføring ... 95
4.3.1 Overføring i et tids- og utviklingsperspektiv ... 97

4.4 Motivasjon ... 99
4.5 Konkreter i utvikling ... 101
5 Avslutning ... 103
Litteraturliste ... 105
Vedlegg 1 ... 108

1 Innledning

Denne oppgaven er en litteraturstudie som tar for seg bruk av konkretiseringsmateriell i matematikkundervisning. Bruk av konkreter blir ansett som forsterkende for utvikling av abstrakt tenkning. Vi lærte en del om temaet på studiet i spesifikke lærevansker. På bakgrunn av dette ønsker vi å se nærmere på forskning rundt bruk av konkreter som hjelp til utvikling av abstrakt tenkning i matematikk.

1.1 Konkreter, en selvfølgelighet?

Konkreter har i uminnelige tider blitt brukt i matematikkundervisning. Både barnehager, skoler og institusjoner bruker konkretiseringsmateriell. I barnehagen tilrettelegges det for at barna skal telle med penger og i skolene har de ofte egne lagerrom med konkretiseringsmateriell. Du kan antakelig spørre en hvilken som helst barnehageansatt eller lærer om det er hensiktsmessig å bruke konkreter som en del av undervisningen, og positiviteten vil råde. Vi har det implementert både i rammeplanen, læreplanverket og andre offentlige dokumenter. Blant annet står det i idédokumentet utgitt av Kunnskapsdepartementet, ”Matematikk for alle … men alle behøver ikke kunne alt” (2010, s.12):

”Alle som underviser i matematikk bør ta i bruk læringsressurser som legger til rette for en mer utforskende matematikkundervisning, med fokus på grunnleggende begrepslæring og forståelse. Det gjøres for eksempel gjennom varierte arbeidsmåter og bruk av konkreter.”

Videre i samme dokument står det, som en viktig implikasjon for praksis at lærere bør bruke en rekke ulike representasjoner, som kan være ulike typer konkreter. Dette dokumentet er ikke alene om å understreke betydningen av bruk konkreter i matematikkundervisningen. I for eksempel ”Rammeplanen for Barnehager” legges det frem et eksempel hvor ”Caroline” deltar i en butikklek hvor de har funnet noen steiner som representerer penger. I samme eksempel har de en stor stein som i følge Caroline er en stor penge. Dette er bare ett av flere eksempler i Rammeplanen der bruk av konkreter fremheves. På internett er det også kommet mange ressurssider innen matematikkfaget. Går man inn på for eksempel matematikk.org, det nasjonale nettstedet for matematikk, og klikker seg inn på undervisningsopplegg for lærere, ser man en rekke tips og metodiske opplegg hvor konkretisering står sentralt. I Tangenten (tidskrift for matematikkundervisning), står det jevnlig artikler om bruk av konkreter. Vi kan blant annet se i den første utgivelsen i 2010 hvor hovedtemaet er konkretisering, at tips, råd og vektlegging av temaet formidles. Bruk av konkreter i matematikkundervisningen er med andre ord godt fundert i norsk skole og det er generell enighet om at nytteeffekten er stor.

Til tross for bred enighet kan det være interessant å se på dette med et undrende blikk. Kan det være mulig at bruk av konkreter som er godt fundamentert i norsk matematikkundervisning bør ses i et kritisk lys? Forskningsresultatene på dette området er delt. Mange forskningsrapporter viser til positive resultater ved bruk av konkretiseringsmateriell, men det er òg en del forskning som belyser dette temaet med kritiske øyne.

1.2 Problemstilling

Erfaringer vi har gjort oss i yrkeslivet som førskolelærere har vært at bruk av konkreter som representasjoner i mange sammenhenger virker positivt for læring. I barnehagesammenheng gjelder dette spesielt for utvikling av språket, som inntil nylig har hatt det største fokuset i barnehagen. Vi har erfart at barn utvikler tall – og mengdeforståelse gjennom å utføre handlinger som å dekke på bord, telle antall kopper, eller ved å telle antall barn som er tilstede, og hvor mange som ikke er tilstede. Barna kan lære om ulike geometriske figurer ved å tegne, snekre eller leke med pinner i skogen. Matematikken omgir oss, og gjennom handlinger i hverdagen internaliserer barna en mengde matematiske begreper før de begynner på skolen. Våre egne barn går på småskoletrinnet, og vi har sett at det brukes mange typer konkretiseringsmateriell for å lære tallsymboler, addisjon og subtraksjon. Fingrene blir mye brukt, penger, tellesnorer, pinner/staver, klosser, steiner, kulerammer og terninger. De konkrete gjenstandene blir imidlertid raskt erstattet av todimensjonale objekter som bilder av prikker, tallinjer og så videre, frem til de rene symbolene overtar.

Vi har i løpet av studiet i spesifikke lærevansker blitt opptatt av matematikk i grunnskolen. Det er spesielt interessant å få innsikt i hvordan bruk av konkreter, og ulike representasjoner påvirker matematikkundervisingen og elevenes forståelse. Vi synes det er spennende å undersøke hvordan bruk av konkreter virker inn på matematikkopplæringen, og på hvilken måte kunnskapen elevene tilegner seg er funksjonell og fleksibel i forhold til de oppgavene de stilles ovenfor. Et mål for vellykket læring er *overføring*, eller evnen til å bruke tilegnet kunnskap utenfor den lærte situasjonen. Spontan overføring er derimot vanskelig å oppnå, selv for relativt enkel kunnskap (Detterman, i Sloustky, Kaminski og Heckler, 2005). I matematikkfaget snakker vi om overføring av læring fra det konkrete nivået til de abstrakte tankestrukturene hvor matematikken foregår som rene tankeoperasjoner. En dypt forankret og utbredt oppfatning i utdanningssamfunnet har vært at læring og overføring kan forenkles gjennom bruk av konkrete materialer når barn skal lære seg matematiske begreper og konsepter.

Vi har som nevnt kommet over en del motstridende litteratur på området. Forskning viser blandede resultater når det gjelder spørsmålet om hvorvidt bruk av konkreter er gunstig for overføring fra det konkrete til det abstrakte nivået i matematikk. Dette ønsket vi å gå mer i dybden på, og kom frem til følgende problemstilling:

Hva sier forskningslitteratur om bruk av konkreter i matematikkundervisningen?

Vår hensikt er å få oversikt over hvordan konkreter virker inn på læring, og hva forskning sier om dette. Videre håper vi at kunnskapen kan gjøre oss bedre i stand til å gi lærere i småskolen en tilrettelagt veiledning. Elever med matematikkvansker er særlig utsatt når det gjelder overføring fra det konkrete til det abstrakte, og det har vært fokus på at manipulering med konkrete objekter spesielt kan hjelpe disse barna til bedre matematisk forståelse (Ostad, 1990). Vi er opptatt av at alle elever skal mestre matematikkfaget best mulig, og ønsker å ha fokus på bruk av konkreter uten spesielt fokus på barn med matematikkvansker. Vi håper å oppnå økt kompetanse om bruk av konkreter, og ønsker å bli bedre rustet til å tilpasse undervisningen til den enkelte elev, både med tanke på forebygging av matematikkvansker, og for å hjelpe elevene til å danne et godt grunnlag for matematisk forståelse.

1.3 Konkreter og mentale representasjoner

I matematikkens verden er det mange elementer som er utfordrende. Mye av matematikken er handlinger eller operasjoner som vi ikke kan forholde oss til i den fysiske virkelighet. I den forbindelse har mennesker muligheten til å konstruere mentale forestillinger av det som er abstrakt. Som støtte for å forstå matematiske operasjoner på det abstrakte plan kan det være til hjelp med konkreter, eller fysiske representasjoner. Stedfortrederrollen er det karakteristiske kjennetegnet for alle typer representasjoner (Ostad, 1992). Representasjoner kan klassifiseres på ulike måter. Ostad (1992) og Piaget (1971) skiller mellom to hovedgrupper; Fysiske representasjoner og mentale representasjoner. En type representasjon kan klassifiseres i forhold til innhold, ved at de er visuelle, auditive og så videre. Det er de konkrete representasjonene. Den andre typen representasjoner er i følge Piaget (1971) klassifisert i forhold til sin struktur.

1.3.1 Fysiske representasjoner

I matematikkfaget kan fysiske representasjoner som bilder, tallbilder eller tall ha en stedfortrederrolle i forhold til for eksempel antall epler i en tekstoppgave som elevene skal løse. Ostad (1992) henviser til Paivo som klassifiserer de fysiske representasjonene i språk - eller bilderepresentasjoner. Språkrepresentasjoner som tallnavn og tallsymboler er arbitrære representasjoner, da de ikke ligner på det de refererer til i virkeligheten. De er rene symboler, i motsetning til bildesymboler som ikke er vilkårlige i forhold til virkeligheten. Bilderepresentasjonene inneholder en eller flere ikoniske egenskaper som vi kjenner igjen fra den virkelige verden. For eksempel form, farge eller antall. Når det gjelder ikoniske egenskaper er det glidende overgang fra helkonkreter til ulike typer bilderepresentasjoner og til slutt språkrepresentasjonene som rene symboler. Matematikkundervisningen i grunnskolen tar i bruk både bilde- og språkrepresentasjoner, og det er førstnevnte som ofte får funksjonen som konkretiseringsmateriell. Det er vanlig å klassifisere konkretiseringsmateriell med tanke på graden av likhet mellom den virkelige verden og den verden som skal representeres. Ostad (1992) refererer til Bue som lar den representerte verden stå som helkonkreter og klassifiserer de fysiske representasjonene som halvkonkreter, halvabstrakter og abstrakter. Tilsvarende klassifikasjonssystem er konkreter, (virkelige gjenstander med alle fysiske egenskaper til stede), semikonkreter (vanlige bilder, visuelle og taktile), semi-symboler (tallbilder som står i stedet for en diskontinuerlig mengde) og rene symboler (tallnavn, og tallsymboler) (Ostad, 1992). Vi forholder oss til det sistnevnte klassifikasjonssystemet.

Fysiske representasjoner skal fungere på en annen måte enn helkonkrete gjenstander. Dette har med prosessen som går fra konkret til abstrakt å gjøre. Elevene skal abstrahere de matematiske operasjonene etter hvert som de får mer erfaring, og da kan de fysiske representasjonene være en hjelp på veien. Ved at representasjonene etter hvert får færre fysisk gjenkjennbare egenskaper, kan elevene hjelpes videre i prosessen mot abstrakt tenkning. Elever får etter hvert variert erfaring med helkonkreter og bilderepresentasjoner. Når elevene blir eldre er både konkretene og bilderepresentasjonene ulikt utformet enn det de er i for eksempel første klasse.

Konkretene og bilderepresentasjonenes egenskaper varierer, og ulike egenskaper kan ha ulik funksjonalitet i forhold til oppgaveløsning i matematikk. Ostad (1992) kategoriserer tre hovedtyper av slike egenskaper. Det er oppgave - relevante egenskaper, oppgave - redundante egenskaper og oppgave- irrelevante egenskaper

1.3.2 Mentale representasjoner

En mental modell, eller representasjon kan forklares som et kunnskapslager som må ha en dynamisk beredskapsfunksjon i forhold til alle typer problemer og utfordringer et individ møter (Ostad, 1992). Mentale representasjoner er et begrep som kan omfatte mange andre begreper som forestillinger, skjema, prototyper og lignende. Ostad (1992) bruker ulike representasjonsbegreper som eksempler på mentale representasjoner, og det gjør også vi i denne oppgaven. Vi kommer tilbake til dette.

"Mentale representasjoner refererer til en primær konstruksjon av en perseptuell handling hvor det ikke finnes en original som kan bli replisert, eller reprodusert. Representasjonene skapes internt i individet, og de gjentas, henlegges eller destrueres i henhold til deres nytte og anvendbarhet en i eksperimentell kontekst".

(Fritt oversatt fra Vygotsky, s.4, 1987).

Vygotsky og hans medarbeidere (1978) fant ut at symbolsk tenkning blir utviklet som et resultat av en langvarig og kompleks prosess. Symbolsk tenkning oppstår fra noe som ikke er en symbolsk tankeoperasjon i utgangspunktet, men som blir det etter en lang rekke med kvalitative transformasjoner. Denne utviklingen går i stadier som bygger på tidligere erfaringer, og tilsvarer barnets psykologiske utvikling. Individet har potensial for komplekse symboloperasjoner allerede i de tidlige stadiene av sin intellektuelle utvikling. Observasjoner viser imidlertid at det mellom elementær atferd og høyere nivå av intellektuell utvikling, utvikles et komplekst system av psykologiske overføringer (Vygotsky, 1978). Dette overføringssystemet befinner seg biologisk i individet fra starten av, og utvikles i den kulturelle sammenhengen vi befinner oss i. Vygotsky refererer til dette som *”the natural history of the sign”*.

Piaget (1971) skriver at mentale representasjoner er vanskelig å klassifisere. Vi kan danne oss representasjoner av statiske objekter som for eksempel en trekant, eller en heksagon. Vi kan også konstruere representasjoner av bevegelse, eksempelvis en pendel. I tillegg kan vi danne oss mentale representasjoner av kjente transformasjoner, som for eksempel å dele et kvadrat i to rektangler. Det er ulik vanskelighetsgrad på disse representasjonene, og de har en hierarkisk oppbygning. Hierarkiet har mange plan som kan korrespondere med de ulike nivåene i utvikling hos enkeltindividet, og nivåene går fra enkle representasjoner og øker i kompleksitet. Det er for eksempel enkelt å forestille seg statiske objekter som en trekant eller et rektangel dersom man har erfaring med tre – og firkanter. Mer komplekst blir det dersom man skal danne seg representasjoner for komplekse matematiske relasjoner som man ikke har fysisk erfaring med. Piaget (1971) skiller mellom reproduktive mentale forestillinger, og foreløpige, eller antatte forestillinger (anticipatory images). De førstnevnte er mentale forestillinger som dannes på grunnlag av objekter eller hendelser som allerede er kjent for oss. De sistnevnte fremkalles ved figurativ fantasi som representerer hendelser. Det være seg for eksempel bevegelser, eller transformasjoner som vi enda ikke har oppfattet. Altså er disse representasjonene i en konstruksjonsprosess internt i individet, ved at en elev for eksempel arbeider med en utfordrende addisjonsoppgave i matematikk.

Vygotsky (1987) mener det er så mange betydninger av begrepet ”å representere” at det skaper forvirring. Han velger derfor å bruke begrepet ”konsepter” (concepts) om mentale representasjoner. Konseptene er formet av repetisjon, standardisert ved interaksjon og kan assosieres til et spesifikt begrep (språklig representasjon). Vygotsky understreker videre at konseptene må ses på som dynamiske da de utvikles parallelt med subjektets erfaringer og tolkninger av omverdenen. Et konsept utvikles alltid fra elementer som først ble erfart på et sensomotorisk plan. Subjektet har alltid elementer av tidligere erfaring. Nyervervede erfaringer og kombinasjoner kobles til slik at konseptene stadig er i utvikling og forandring. Vygotsky (1987) og Piaget (1971) mener mentale representasjoner har en relativ selvstendig struktur i seg selv. De representerer ikke nødvendigvis noe annet enn seg selv, men kan være koblet til en lengre sekvens av språklige segmenter.

"A representation does not represent itself – it needs interpreting and, to be interpreted, it needs an interpreter"

Vygotsky (1987, s.215)

Mennesker tolker verden ut fra sine tidligere erfaringer. Måten vi møter virkeligheten på avhenger av hvilke erfaringer vi tidligere har gjort oss på ulike områder. Slik er det også med matematikken og representasjoner. Et bilde kan for eksempel forstås ulikt fra individ til individ. Måten vi konstruerer våre mentale forestillinger av virkeligheten på avhenger av hvordan vi innlemmer nye erfaringer og handlinger til de eksisterende, både fysisk og mentalt. Ostad (1992) skriver om tunge og lette forestillinger, og hvordan vi lagrer forestillinger med redundante eller irrelevante egenskaper, eller om forestillingene kun er lagret med problemrelevante egenskaper. En elev som har lette forestillinger med oppgaverelevante egenskaper finner lett frem til oppgaverelevante løsninger, mens det motsatte er tilfelle for en elev med tyngre forestillinger.

Vi bruker begrepene konkreter, manipulativer, objekter og fysiske representasjoner som likeverdige begreper i oppgaven. Mentale representasjoner, forestillinger og konsepter brukes på samme måte.

1.4 Konstruktivismen som læringsteoretisk ramme

"Verum ipsum factum"

Giambattista Vico, 1710

Når elever har vansker med å abstrahere er det god hjelp i å visualisere for å forstå. Å se et abstrakt fenomen visualisert ved bruk av fysiske representasjoner gir bedre forutsetninger for å forstå fenomenet enn om arbeidsmåtene utelukkende foregår ved hjelp av symboler. Flere sanser tas i bruk, og undervisningen stiller mindre krav til abstrakt tenkning. Det å starte opplæringen på et konkret plan, og videreføre kunnskapen på et semikonkret og abstrakt nivå er som nevnt et prinsipp som forskere og lærere til alle tider har vært opptatt av. Ny kunnskap og læring om matematikk har ført til ulike varianter av prinsippet de siste årene. Arbeid med konkreter i matematikk er det første av tre nivåer som skriver seg tilbake til ideer fra Piaget og Bruner (Holm, 2002). På det første nivået er kunnskapen av konkret karakter. Dette kunnskapsnivået videreføres til læring ved hjelp av bilder, tegninger og ikoner som er det semikonkrete nivå. Etter hvert utfører elevene matematikkoppgaver bare ved hjelp av abstrakte symboler som er det siste nivået i modellen. Holm (2002) omtaler en undersøkelse gjort av Mercer og Miller som viste at denne tretrinnsmodellen er effektiv for å lære elever å løse oppgaver på et abstrakt nivå.

Konstruktivistisk læringsteori er aktuell som teoretisk forankring for vårt studieprosjekt. Konstruktivistisk tankegang beskriver hvordan mennesket skaper kunnskap, og hevder at kunnskap konstrueres aktivt av den tenkende person i samhandling med omgivelsene. Von Glaserfield (1984) referer Vico, som på 1700-tallet hevdet at den eneste måten ”å vite” en ting, er å ha laget den. Kun på den måten kjenner vi komponentene, og hvordan de er satt sammen. Vi kan altså bare forstå det vi selv har konstruert. Den sveitsiske grunnleggeren av kognitiv psykologi, Jean Piaget er en av mange som har vært opptatt av konstruktivistiske tenkemåter, og var på 1930-tallet pionér for ideene som skulle bli ”konstruktivismen”. Piagets holdninger var karakterisert av en bevisst omdefinering av konseptet forståelse som en adaptiv prosess. Teorien var radikal fordi den brøt med andre tradisjonelle teorier som behaviorismen (von Glaserfield, 2002). Piagets utviklingsstudier danner grunnlaget for hovedideen til konstruktivismen. Han peker på forholdet mellom kunnskap og virkelighet. I hans modell består virkeligheten alltid av verden slik den erfares av den enkelte. Det viktigste for kognitiv utvikling er barnets konkrete handlinger, og etter hvert som språket beherskes, får også dette stor betydning for utviklingen (Holm, 2002). All stimulering og læring skjer ved at individet tilpasser den nye kunnskapen i forhold til sine gamle forestillinger. Læring er altså et resultat av hva mennesket gjør med stimuleringen, og ikke hva stimuleringen gjør med mennesket (Imsen, 1998). Vi konstruerer vår egen subjektive kunnskap, og læringen foregår i en vekselvirkning mellom individet og omgivelsene. Dette synet kalles også interaksjonisme, som betegner subjektets aktive konstruksjon av egen læring. Dette står i kontrast til behaviorismen hvor individet er passivt mottakene.

Kunnskap er i følge konstruktivistisk tankegang altså et produkt av aktiviteten til et aktivt individ. Konstruktivistene kaller denne aktiviteten ”operating” for å vise til måten aktiviteten foregår på. De mener at vi bygger opp vår kunnskap ved aktivt å operere kognitive enheter, som vi organiserer i vår eksperimentelle verden. Von Glaserfield (1984) henviser til Piaget som skriver: *”Intelligence organizes the world by organizing itself”*. Dette forteller oss hvordan læring skapes i følge det konstruktivistiske læringssynet; All kunnskap konstrueres av individet gjennom dets egne erfaringer. Dette betyr at vår oppfattelse av virkeligheten ikke nødvendigvis er identisk. Konstruksjon av læring er en prosess som begynner med en intuitiv antakelse om at all kognitiv aktivitet skjer i en målrettet bevissthet. Kognitive prosesser evaluerer erfaringene, og fordi erfaringene blir evaluert, blir noen gjentatt, og andre unngått. På denne måten bygger vi opp vårt kunnskapslager, mer eller mindre bevisst (Von Glaserfield, 2002).

Som tidligere nevnt opplever mennesker en og samme situasjon ulikt. Dermed blir det ikke mulig å legge sin egen subjektive mening inn i det andre sier og mener. Vi lever i ulike samfunn, og meninger, ideer og konsepter blir gjerne intersubjektive fordi vi modifiserer og tilpasser oss i interaksjon med andre. Dette er særlig viktig å tenke på for mennesker som arbeider i pedagogiske sammenhenger. Nye konsepter og ny læring kan ikke overføres direkte fra formidler til mottaker, men må abstraheres av den enkelte i forhold til de erfaringer som individet har. Språket kan brukes til å orientere elever mot spesielle erfaringer, eller ulike mentale aktiviteter, men kan ikke brukes alene for å formidle forståelse (von Glaserfield, 2002).

Språket skaper ofte illusjonen om at ideer, konsepter og deler av vår forståelse blir transportert fra den snakkende personen til den lyttende. For å bryte ned denne illusjonen kan man tenke seg hvordan man først startet med å erverve språket. Forståelsen av et ord blir utvidet etter hvert som erfaringene knyttet til ordet blir flere (Von Glaserfield, 2002). Tanken om at læring og forståelse er et resultat av den lærendes egen aktivitet heller enn passiv mottakelse og instruksjon går helt tilbake til Sokrates og det antikke Hellas. Gjennom samtaler, og ofte ironiske spørsmål som motparten svarte på, opptrådte Sokrates som «jordmor» og kunnskapsforløser for andre. Denne kommunikasjonsformen kalles sokratisk ironi, eller dialektikk (hentet fra http://www.snl.no, 11.april 2011).

Jean Piaget sin teori blir ofte kalt for kognitiv konstruktivisme fordi vekten ligger på hva som skjer med personen sine mentale strukturer under læring. Piaget fokuserer på at lek og annen interaksjon mellom individet og omverdenen fører til læring, eller konstruksjon av kunnskap på det mentale plan hos enkeltindividet. I følge denne teorien blir læring en individuell prosess (Imsen, 2005).

Sosial konstruktivisme tar utgangspunkt i at både læring og kunnskap må ses relatert til kultur, språk og det øvrige fellesskapet et individ hører til i. Språk finnes overalt og på alle læringsarenaer, både muntlig og skriftlig. Den sosiale konstruktivismen er lett å koble til praktiske hendelser i klasserommet der kommunikasjon, sosial interaksjon og konkrete erfaringer er sterkt vektlagt i kunnskapstilegnelsen. Dette har derfor vært en populær teori innenfor pedagogikken. Vygotsky var opptatt av språkets betydning for læring, og er ofte omtalt som en sosial konstruktivist (Imsen, 2005). Språket er i følge Vygotsky (1978) en kritisk faktor for mennesket når det gjelder å løse problemer. Han skriver at

"…the most significant moment in the course of intellectual development , which gives birth to purely human forms of practical and abstract intelligence, occurs when speech and practical activity, two previously completely independent lines of development, converge"

(s. 24)

Eksperimenter gjort på barn viser at de bruker språket som hjelp for og nå et mål. Bruk av språket øker ettersom vanskelighetsgraden på oppgavene blir større. Språket er et redskap for mennesket slik at vi kan skape en gjensidig forståelse. Mennesket i en gruppe erverver bestemte meninger ved hjelp av ulike lyder, og uten denne felles språklige evnen ville ikke lydene båret mening, og konsepter og begreper ville aldri blitt til (Vygotsky, 1986).

Vygotsky har også vært opptatt av prosessen mellom formidling og intellektuell utvikling. Når barnet lærer en aritmetisk operasjon, er det ikke alltid slik at utviklingskurven til barnet sammenfaller med lærerens formidlingskurve. For at lærere skal undervise barna på det nivået de er, og for at barna skal strekke seg lengst mulig, skriver Vygotksky om *"den proksimale utviklingssonen"* (Vgotsky, 1986). Læreren kan for eksempel gi et barn med en mental alder på cirka åtte år en oppgave som er litt for vanskelig til at hun kan klare å løse utfordringen alene. Minimal assistanse ved hjelp av et ledende spørsmål, kan hjelpe barnet til å løse problemer som er designet for tolvåringer. Læreren må finne ut på hvilket utviklingsnivå den enkelte eleven befinner seg slik at hun holder seg innenfor sonen hvor læringsutbyttet for eleven er størst.

Barn blir bevisst betydningen av sine spontant innlærte begreper relativt sent. Evnen til å definere betydningen av språklige begreper utvikles først på et senere stadium i utviklingen. Utviklingen av et vitenskapelig begrep begynner i motsatt ende. Kjennskap til vitenskapelige begreper begynner vanligvis med en språklig definisjon og brukes i ikke - spontane sammenhenger, som i klasserommet. Vygotsky (1986) skriver at utviklingen av barns spontane begreper fortsetter oppover, mens vitenskapelige begreper og konsepter utvikles nedover, til et mer elementært og konkret nivå. De to prosessene er avhengige av hverandre. Utviklingen av et spontant begrep må ha kommet til et visst nivå i utvikling for at barnet skal kunne lære det relaterte vitenskapelige begrepet. Et eksempel kan være et barn på fem år som vet hva "mer" betyr. "Mer" er et begrep som barnet bruker ofte i spontane situasjoner, men som i yngre alder kan være vanskelig for barnet å forklare med andre ord. Etter hvert mestrer barnet å forklare hva "mer" betyr. Når barnet begynner i første klasse introduseres det for "addisjon" som er et høytsvevende abstrakt begrep det kan være vanskelig å forstå, men som blir forklart av læreren gjennom språklig definering og fysisk eksemplifisering. Etter hvert som det vitenskapelige begrepet "addisjon" blir kjent og internalisert i barnet, kobles det sammen med det kjente og spontane ordet "mer".

Vår opplevelse av virkeligheten som individer vil som nevnt alltid være noe ulik. For og oppnå en felles forståelse på et spesifikt område, er det nødvendig å bygge opp en konsensus ved hjelp av kommunikasjon og avtaler. Slike avtaler kalles konsensusdomener. Det eldste konsensusdomenet i den vestlige verden er tallene. Felles for tilhengere av konstruktivistisk tankegang er at etablering av et konsensusdomene, som omfatter elev så vel som lærer, er en forutsetning for læring (von Glaserfield, 2002). Radikal konstruktivisme som von Glaserfield (1984) representerer, er radikal fordi den går mot tradisjonelle konvensjoner og utvikler en teori om læring hvor kunnskap ikke reflekterer en "objektiv" ontologisk virkelighet, men utelukkende baserer seg på en verden som består av våre egne erfaringer. Ideologien legger vekt på aktivitet og erkjennelse, og at formidling av kunnskap må tilpasses den enkelte. Radikal konstruktivisme skiller mellom undervisning og trening. Undervisningens mål er å skape forståelse, mens treningen skal generere kompetent ytelse. Femti år med behavioristisk tilnærming i pedagogisk sammenheng har nærmest visket ut dette skillet. De pedagogiske tilnærmingene til Skinner og hans følgesvenner gjorde det nesten mulig for elevene å prestere feilfrie svar ved hjelp av metodikken med stimuli og forsterkning. Konstruktivistene hevder at behavioristisk tilnærming kommer til kort når det gjelder å generere matematisk forståelse. Dette fordi "kompetansen" behavioristene utvikler bevisst er avkuttet fra mentale operasjoner og forståelse. I følge konstruktivistisk læringsteori er det å forstå matematikk, det å forstå hvorfor en opererer på en spesiell måte, og ikke på andre. I tillegg vet man hvorfor og hvordan resultatene man får er utledet fra operasjonene som er utført. Fokuset på forståelse leder til en rekke vurderinger. Dersom elever produserer svar for å tilfredsstille læreren, er svarene ofte tilfeldige og uten en dypere forståelse for de utførte matematiske operasjonene (von Glaserfield, 2002). Elever som løser oppgaver basert på sin egen forståelse vil ikke svare tilfeldig. Svarene de kommer frem til gir mening for dem på det nivået de befinner seg. Lærerens oppgave er å finne ut hvordan elevene tenker, og derfra hjelpe dem til å utvide sin mentale forståelse. Steffe (2002, s.177) skriver at lærerens viktigste oppgave er ”*constructing a model of the student`s concepts and operations”.* I følge det konstruktivistiske synet er dette en uunnværlig arbeidshypotese for en lærer som ønsker at elevene skal utvikle god matematikkforståelse. Modellene som lærere skaper av sine elevers tenkning og konsepter er kun hypoteser, da det er umulig å vite eksakt hva som foregår av tankevirksomhet hos andre. Modellene av elevenes tankevirksomhet kan sjekkes ut ved å gi elevene oppgaver som tilrettelegger for å finne ut om de tenker slik læreren tror. På denne måten kan læreren best mulig hjelpe elevene til omstrukturering av sine mentale modeller, og til å utvikle sin matematiske forståelse (jamfør den proksimale utviklingssone s.11). Lærerens genuine forsøk på å forstå elevenes tilnærming i problemløsning kan føre til et fruktbart sosialt miljø. Elevene blir tatt på alvor, noe som oppfordrer til å slippe seg løs i faglige diskusjoner til tross for eventuell usikkerhet innen et tema. Tilhengere av den konstruktivistiske tankegangen hevder at dette er den optimale pedagogiske tilnærmingen for å generere refleksjonen nødvendig for å oppnå forståelse av mer avanserte matematiske konsepter. Piaget hevdet at all operativ kunnskap er resultat av refleksjon (von Glaserfield, 2002). I følge det konstruktivistiske synet er evne til refleksjon en viktig kilde til forståelse på alle matematiske nivåer. Derfor er samtale og diskusjoner en viktig del av den matematiske utviklingen. Man får undersøkt det man holder på med ved å sette ord på det man gjør. Det er i utforskning av slik mental virksomhet at elevene oppdager faglige hull, motsigelser og lignende. Piaget mente at erfaringer fra interaksjon med andre er den viktigste faktoren for akkomodasjon. Konstruktivistisk læringsteori legger stor vekt på elevens eget ansvar for læring, og tenker at opplevelse av å forstå gir motivasjon til videre utforskning og læring (von Glaserfield, 2002).

Det konstruktivistiske læringssynet er viktig i norsk skole som en teoretisk forankring. Barnets konkrete handlinger er essensielt for kognitiv utvikling. Dette er i tråd med dagens praksis i matematikkundervisningen, hvor konkreter har en vesentlig betydning. Dette er antatt å være spesielt viktig når det gjelder elever med matematikkvansker. Matematikkvansker kan komme til uttrykk på forskjellige måter. Blant annet kan begrepsapparatet være en faktor som begrenser opplæringen (Holm, 2002). Ved mangel på didaktiske opplæringsstrategier, eller elevers manglende strategibruk, kan bruk av konkreter som nevnt være gjenstand for diskusjon i forhold til forebygging av matematikkvansker. Bruk av konkreter kan også være hensiktmessig i forhold til de som har slike vansker. Lærerens rolle blir å stimulere alle elever til å gjøre selvstendige erfaringer gjennom å konstruere egen kunnskap om matematikk ved hjelp av tenkning og refleksjon. Elevene skaper forståelse ut fra aktiviteter som i begynnelsen er fysiske. De konkrete hjelpemidlene blir gradvis mer abstrakte, og til slutt foregår aktivitetene som rene tankeoperasjoner.

1.5 Labinowicz

Ed Labinowicz har en Ph.D in Science Education fra California State University. Han har utviklet en klinisk intervjumetode til bruk i klasserommet med utgangspunkt i Piagets teorier om intellektuell utvikling og læring hos barn. Han har utført flere eksperimenter innen matematikk med elever i småskolen, og diskuterer hvordan barn lærer matematiske konsepter best mulig. Hans forskning har blant annet vært fokusert på elevers bruk av klosser som kunne settes sammen til større kuber, og hvordan lærers intervensjon påvirker elevenes tenkning og utforskning.

Videre følger et utdrag fra et lite område av Labinowicz (1985) sitt arbeid. Labinowicz jobbet i dette prosjektet bevisst med bruk av konkreter og kommunikasjon i matematikkundervisningen med elevene, og hans arbeid kan gi oss en pekepinn på hvordan matematikk med konkrete materialer kan formidles på en god måte.

1.5.1 Elementer fra "Learning From Children. New Beginnings for Teaching Numerical Thinking".

Barn forsker, reflekterer og lærer i sine umiddelbare omgivelser. De venter ikke på at noe skal skje, men begynner å orientere seg ved å eksperimentere og teste ut ideene sine om hvordan de tror verden forholder seg. Piaget skriver at for å forstå noe må man bearbeide og transformere kunnskapen. Barnets aktivitet begrenser seg ikke bare til handlinger eller objekter, aktiviteten vil senere involvere refleksjoner rundt disse handlingene for å konstruere ideer. Disse ideene koordineres med eksisterende ideer og skaper et høyere plan av forståelse. Til tross for at klasseromsundervisning gir minimale muligheter for ”gjør – selv - læring”, har de fleste av oss sett eksempler på barn som tar initiativ til utforskning som resulterer i vesentlig læring. En elev kan for eksempel utvikle forståelse for rekketelling med fem ved å bruke en kuleramme med kuler hvor hver rekke på ti kuler er fargelagt i to ulike farger. Istedenfor passivt å kopiere kunnskap som befinner seg ”der ute”, kan vi aktivt konstruere vår egen kunnskap gjennom kontinuerlig interaksjon med omverdenen. Hvert menneske har sin egen forståelse av verden. Labinowicz skriver at den enkeltes forståelse er som et maleri av egen tolkning og syntese om virkeligheten. Vår forståelse av virkeligheten er ikke et fotografi. Det er den enkeltes interne nettverk av ideer som er i interaksjon med virkeligheten i gjensidig transformering. Fortløpende interaksjon mellom det voksende nettverket av ideer og omgivelsene er grunnlaget for våre skiftende perspektiver på virkeligheten fra tidlig barndom og opp i voksen alder. En bok kan for eksempel utløse ulike meninger for individet på ulike tidspunkt i livet. Ut fra det ovenstående om våre tolkninger av virkeligheten kan vi konkludere med at vi *ser det vi forstår*, heller enn *å forstå det vi ser*. Våre oppfatninger av virkeligheten og våre tolkninger av filmer, bøker og annet reflekterer organiseringen i vårt indre nettverk av ideer. I klasseromsammenheng betyr dette at barna ikke nødvendigvis griper det en lærer forsøker å forklare. Det barna lærer er ikke et fotografi av det som undervises. Barna kan kanskje fokusere på kun en del av det som undervises, eller de kan forandre det som undervises slik at det passer inn i deres perspektiv på virkeligheten. For å undervise barn på det nivået de befinner seg, trenger læreren innsikt i deres eksisterende perspektiver.

Piaget la merke til at barn utviklet seg i etapper. Basert på gjentatte observasjoner av barns utviklingsmønster, kategoriserte han barns tenkning i fire stadier. Kjennskap til disse stadiene kan hjelpe lærere til å forutse barns ulike syn på virkeligheten. Hvert stadium er mulig å oppnå gjennom erfaring på de tidligere stadiene. Tidligere forståelse er integrert i senere stadier på et høyere plan av forståelse og abstraksjon. Labinowicz støtter seg til Piaget og hevder at barn må få mulighet til å gå gjennom disse stadiene av logisk tenkning i fysisk kontekst før de blir utsatt for oppgaver som krever abstrakt tenkning.

PIAGET'S STAGES OF INTELLECTUAL DEVELOPMENT

	STAGE	AGE RANGE	CHARACTERISTICS
Prelogical stages	Sensori-motor	Birth–2 years	Coordination of physical actions; prerepresentational and preverbal
	Preoperational	2–7 years	Ability to represent action through thought and language; prelogical, intuitive
Logical stages	Concrete Operational	7–11 years	Logical thinking, but limited to physical reality
	Formal Operational	11–15 years	Logical thinking, abstract and unlimited

Piaget sine fire utviklingsstadier

Piaget (1974) mener at barns kapasitet til å løse abstrakte oppgaver i algebra i det formell - operasjonelle stadiet avhenger av tidligere erfaringer med konkrete objekter og fortløpende refleksjon rundt disse erfaringene. Dermed må barn få mulighet til å utvikle logisk tenkning i en fysisk kontekst før de går over på de mer abstrakte ideene.

Barn i grunnskolen kan vise abstrakt logisk tenkning på ett område i matematikken, mens de har et prelogisk perspektiv på andre arenaer i faget. For eksempel kan barna på høyere trinn forstå subtraksjon og addisjon på et abstrakt nivå, mens de fremdeles utvikler forståelse for divisjon og multiplikasjon på et mer konkret plan. Dette fenomenet finner vi også hos voksne. På felt hvor vi har kunnskap og ekspertise tenker vi på et abstrakt plan (formell operasjonell tenkning), men på områder som er nye for oss har vi behov for å utvikle tenkningen i en mer fysisk kontekst (konkret operasjonell tenkning).

Labinowicz beskriver et forskningsprosjekt hvor han brukte en stor kube bestående av tusen mindre klosser. I tillegg presenterte han en kube med ti ganger ti klosser i en høyde av tre, altså tre hundre, noen lengder med ti klosser (tiere), og noen løse klosser (enere). Barn i tredje klasse ble blant annet bedt om å finne ut hvor mange mindre klosser den store kuben var satt sammen av. Flere av barna konsentrerte seg om overflatene på kuben, og kom frem til at det var seks hundre små klosser i den store kuben. Noen av barna kom frem til seks hundre, men var åpne for at kuben hadde en innside, og at det kunne være flere enn seks hundre. I intervju i etterkant ble disse barna utfordret til å tenke videre på mulighetene for at det kunne være flere klosser enn de seks hundre som var synlige. De av barna som lykkes i å koordinere alle relasjoner som trengtes for å konstruere kuben på tusen, klarte dette som følge av at de ble klar over konflikten mellom deres eksisterende ideer og den overbevisende nye informasjonen fra omgivelsene. Læring begynner med en bevissthet om problemet. Barna mestret å desentrere fra et arealfokus, og innså at det var flere måter å se kuben på (gryende kunnskap om volum). Enkelte av barna foreslo at kuben kunne bestå av tusen, men svarte likevel seks hundre. Labinowicz skriver at slike utviklingsprosesser viser at barn trenger hjelp til å skape nye perspektiver på sin læring. Det at disse barna valgte å tro på sitt første svar som var seks hundre, kan tyde på at de valgte et område av læring som de hadde større kjennskap til, selv om de hadde en gryende bevissthet om at det kunne finnes en innside (kjennskap til volum, ikke bare areal). Til tross for at de var bevisste på problemet, hadde de en slags motstand mot å godta den nye innsikten. Piaget kaller denne typen prosess ”ekvilibrasjon,” eller likevekt. Ekvilibrasjon skjer når et individ får ny viten som gjør at det må reorganisere sin eksisterende tankestruktur. Dette skaper ofte forvirring og frustrasjon (desekvilibrasjon). Når individet har funnet en løsning på problemet oppstår en ro, eller indre balanse, altså ekvilibrasjon. Piaget (1974) skrev at læring tar tid, og at de barna som utvikler seg mest ofte er de som er mest forvirret i perioder.

Labinowicz konkluderer ut fra prosessen om ekvilibrasjon at barn har rett til å ta feil, utenom i tilfeller hvor det er helt klart hva svaret blir. Det å gjøre feil er en naturlig del av det og være i utvikling. Akkurat som babling er essensielt for talen, og krabbing for det å mestre å gå. Det har i pedagogiske miljøer vært en tro på, med støtte i behavioristisk teori, at feil og forvirring ikke er av verdi når det gjelder læring. Dermed er ikke klasseromssituasjonen tilrettelagt for å gjøre feil. Lærerens rolle har etter Labinowiczs mening vært å bryte læring ned til små bolker og små skritt. På den måten får ikke barna erfaringer med å gjøre feil. Dersom barna er forvirret, intervenerer læreren raskt for å ”redde” situasjonen og hjelpe med å finne det riktige svaret. Labinowicz mener at denne vanlige tilnærmingen i klasserommet ikke respekterer barnets muligheter til selv å bruke den tiden det trenger for å konstruere sin egen forståelse. Denne pedagogiske tilnærmingen kan også føre til at barna mentalt kopierer lærerens svar eller forklaring. I motsetning til det behavioristiske læringssynet mener Piaget at lærere har mulighet til å se på barnas ukorrekte svar som ”vinduer” inn til deres utvikling. Han mener at barnas ukorrekte svar kan være riktige i forhold til det stadium i utvikling hvor barnet befinner seg.

Jo mer erfaring barn har med fysiske objekter, desto mer sannsynlig er det at barna utvikler relatert forståelse av ulike matematiske konsepter. Piaget demonstrerte at mange matematiske konsepter har sine røtter i barns erfaringer med fysiske objekter. Ved å utføre handlinger med klossene kan barn lett abstrahere enkelte av materialenes fysiske egenskaper (simple abstraction). Ved å manipulere klossene, sammenligne dem, bygge større kuber av de mindre og reflektere rundt disse handlingene, vil barna indirekte abstrahere en relatert forståelse fra klossene. Denne indre prosessen av mentale konstruksjoner kan ikke observeres direkte, og Labinowicz kaller det refleksiv abstraksjon (reflective abstraction). Tankeløs manipulering med konkreter vil ikke føre til konstruksjon av mentale matematiske relasjoner, da mental tilstedeværelse er kritisk for å oppnå forståelse på et høyere nivå. Rike mentale forestillinger fra tidligere erfaringer med konkreter kan gi et godt grunnlag for refleksiv abstraksjon rundt matematiske relasjoner. Labinowicz observerte at noen av barna mestret å abstrahere kompliserte matematiske relasjoner med minimal eksponering for klossene. Dette viser at mengden med essensiell fysisk erfaring kan variere fra barn til barn. Noen trenger mer erfaring, andre trenger mindre for å oppnå de samme resultatene.

- Sosial interaksjon og overføring

Læring og intellektuell utvikling forbedres gjennom sosial interaksjon med jevnaldrende og voksne. For enkelte av barna i undersøkelsen kan lærerens spørsmål ha satt i gang tankevirksomhet som fikk elevene til å reorganisere sine perspektiver (benyttelse av den proksimale utviklingssone, s. 11). For andre barn hjalp interaksjon med jevnaldrende for å innlemmes i deres ulike perspektiver, og for å dele informasjon som at ”tusen er det samme som ti hundre”. Videre kan denne interaksjonen muligens føre til at barna selv stiller spørsmål i andre og nye matematiske sammenhenger.

Når det gjelder den store kuben på tusen klosser, kan det hende det ville hjulpet barna å få flere løse ”flater” på hundre klosser. Da ville elevene ha vært i stand til å konstruere en stor kube ved hjelp av ”flatene”. I stedet for å forestille seg mentalt hvor mange klosser det kunne være, ville det blitt tydeligere å se at kuben har en innside dersom elevene fikk manipulere klossene fysisk. Barna ville fått erfaring om kubens tyngde, og kunne sammenlignet med den originale som de trodde hadde seks hundre klosser. Elevene ville erfart at begge kubene var like tunge og så videre. Manipulering med konkretene kombinert med interaksjon med lærer og jevnaldrende ville til sammen hjulpet elevene til en reorganisering av deres mentale ideer når det gjelder volum.

I dette konstruktivistiske synet ses læreren på som en som fasiliterer interaksjon. Læreren tilrettelegger for fysiske og tankemessige erfaringer med konkreter, muligheter for interaksjon og stiller spørsmål som kan provosere elevenes tenkning og forestillinger. Dette er en tilnærming som Vygotsky (jamfør punkt 1.4) og sosialkonstruktivistene er tilhengere av. Læreren gir også elevene tid til refleksjon rundt egne erfaringer, og vurderer hvor raskt elevene de skal gå videre til neste nivå i undervisningen.

- Tre typer kunnskap som influerer utvikling og læring

Piaget beskrev tre typer kunnskap. Disse er sosial kunnskap, fysisk kunnskap og logisk matematisk kunnskap. Sosial kunnskap er kraftfull og kulturelt betinget. Den største ressursen er andre mennesker. Fysisk kunnskap implementeres ved hjelp av kontakt med den fysiske verden og enkel abstraksjon. Logisk matematisk kunnskap er ikke direkte tilgjengelig fra eksterne ressurser. Ved å sammenligne konkrete gjenstanders egenskaper konstruerer vi relasjoner som ikke er iboende i konkretene alene, men som introduseres ved hjelp av mental aktivitet. Gjennom kontinuerlig mental aktivitet blir relasjoner av kunnskap konstruert i tillegg til at kunnskapen blir koordinert på et høyere plan (mentale representasjoner).

Logisk matematisk kunnskap fjerner seg over tid fra den fysiske virkeligheten, ettersom kunnskapen abstraheres og progressivt koordineres på et høyere mentalt nivå. Barns første erfaringer med tall har sine røtter i manipulering med konkreter og mental tankevirksomhet som resulterer i kunnskapsrelasjoner. Disse relasjonene danner grunnlaget for den videre intellektuelle utviklingen som integreres i et komplisert nettverk av abstrakte ideer på det formelle operasjonelle stadiet.

Labinowicz mener disse tre typene av kunnskap kan være gjensidig støttende, men de kan også være gjensidig likegyldige, eller til og med ødeleggende. Labinowicz skriver at utdanningssystemet gjør feilen å skille disse tre typer av kunnskap. Dette kan føre til at barn lærer matematiske konsepter på en måte som kan være til hinder for en positiv mental utvikling. Han mener at de tre typer kunnskap må være integrerte for at god intellektuell utvikling skal kunne skje.

For at barn skal få mulighet til å utvikle sine mentale forestillinger på en god måte er det viktig å tenke på hvordan læreren intervenerer. Hvordan læreren stiller spørsmål er essensielt. Labinowicz viser til ulike typer spørsmål i forhold til å få barna til å tenke på ulike mentale nivå. En annen viktig faktor er hvordan læreren lytter, og hvordan læreren forholder seg til barnas uttalelser og svar.

Våre mentale strukturer avgjør hva vi mestrer å se i konkrete materialer. Vi ser det vi forstår, som tidligere nevnt. Abstrakte ideer er ikke tilgjengelig i kraft av materialene i seg selv. Abstrakte tallrelasjoner blir konstruert internt gjennom utvidet interaksjon med barnets eksisterende mentale forestillinger og manipulering med materialene. Til slutt blir barna komfortable med sine nye konstruerte tallrelasjoner, og kan ”se” disse relasjonene i materialene som om de alltid har vært der. Piaget (1971) advarte lærere mot misbruk av konkreter. Med dette tenkte han på at barn får holde på med konkreter på en tankeløs måte uten rettledning. Det er viktig at barna får bruke konkretene på en slik måte at tankevirksomheten engasjeres, og det er essensielt at barna får den tiden de trenger til å manipulere med konkretene. Piaget understrekte at interaksjon mellom tankevirksomhet og materialer er essensielt for å rekonstruere virkeligheten på et nivå av abstrakte relasjoner.

1.6 Oppsummering

Ovenfor ser vi at bruk av konkreter i følge Labinowicz (1984) og konstruktivistisk læringsteori kan være gunstig for læring. Derimot viser flere forskningsprosjekter til motstridende resultater ved bruk av konkreter i matematikkundervisningen (Frostad, 1995). Effekten av konkretisering i elementær matematikk har vært gjenstand for omfattende forskning. Resultatene av forskningen har imidlertid vært vanskelig å tolke. Enkelte forskere finner god effekt av konkretene, andre ikke. Noen eksempler på slik forskning refereres av Frostad (1995): Resnick & Omanson (1987) og Fuson & Briars (1990). Frostad (1995) skriver blant annet om Resnick og Omanson som var opptatt av om bruk av konkretiseringsmateriell påvirket barns forståelse av subtraksjon med flersifrede tall. De fant ingen effekt av konkretene, verken med tanke på forståelse eller ferdighet. Fuson og Briars (1990) rapporterte om god effekt av konkreter på elevenes ferdighet i flersifrede addisjons- og subtraksjonsoppgaver, mens andre ikke fant effekt av et tilsvarende opplegg. Med dette som bakgrunn ønsker vi å få et innblikk i hvordan det forholder seg. Hva kan vi finne ut av teori og forskning på området?

2 Metode

Vi ønsket å øke vår kompetanse omkring bruk av konkreter i matematikkundervisningen, og leste oss opp på temaet. Med dette utgangspunktet bestemte vi oss for å gjennomføre en litteraturstudie. En litteraturstudie er en forskningsmetode der publisert forskning utgjør hovedmaterialet for undersøkelsen (Befring, 2007). Vi har gjennomgått ulike publikasjoner og har forsøkt å finne frem til konklusjoner som kan hjelpe til å belyse vår problemstilling.

Hva sier forskningslitteratur om bruk av konkreter i matematikkundervisningen?

2.1 Forforståelse

Vårt utgangspunkt i henhold til bruk av konkreter i matematikkundervisningen har vært uforbeholdent positivt. Vår erfaring tilsier at barn har utbytte av å bruke konkreter i ulike sammenhenger for å lette læring. I tillegg er det som nevnt bred støtte i utdanningssamfunnet og i ulike offentlige dokumenter til at konkreter er et godt hjelpemiddel i matematikkundervisningen.

Vi startet vårt litteratursøk for å finne ut hvordan man best mulig kan bruke konkreter i undervisningssammenheng. Det hele ble langt mer interessant da vi fant ut at forskningen også er kritisk til bruken av konkreter. I starten på søket fant vi som forventet forskningslitteratur som var positiv til bruk av konkreter. Etter inngående søk på internett og på biblioteksider så vi at bildet var mer nyansert. Underveis i lesingen dukket det opp artikler og avhandlinger som har en kritisk tilnærming til bruk av konkreter. Utfordringen var at publikasjonene ofte var av eldre slag. Vi ønsket nyere litteratur og søkte på internett etter aktualiteter. Da kom vi over universitetet i Ohio, som har ganske dyptgående og bred forskning på feltet. Problemet var at den siste forskningsrapporten ikke var publisert enda. Vi var bestemt på å prøve å få tak i dette dokumentet, og tok telefonkontakt med professor Andrew Heckler, som er en av tre medforfattere på rapporten. Han var imøtekommende og positiv og syntes vår litteraturstudie virket interessant. Forskningsrapporten som er under korrektur, rakk ikke å bli ferdig slik at vi kunne bruke den i vår oppgave. Vi får rapporten tilsendt når den er publisert, og vil muligens kunne bruke den ved en senere anledning. Heckler tipset oss imidlertid om en del annen litteratur på temaet per e-post. Noe av materialet han anbefalte har vi benyttet som grunnlag for analysen.

2.2 Litteratursøk

I tillegg til anbefalningene vi fikk fra professor Heckler, benyttet vi oss av Google, Google Scholar og Yahoo som søkemotor for å finne frem i jungelen av artikler og rapporter skrevet om bruk av konkreter i matematikkundervisning og i andre sammenhenger. Nettsider vi kom frem til var blant annet APA PsycNET, ERIC og JSTOR. I tillegg benyttet vi oss av Journal for Research in Mathematics Education. PsycNET fra American Psycological Assosiation er en internasjonal database for forskning innenfor psykologi. ERIC og JSTOR er internasjonale databaser for forskning og artikler innenfor pedagogikk. Journal for Research in Mathematics Education er en side fra amerikanske National Council of Teachers of Mathematics og er en ressursside for matematikklærere og andre matematikkinteresserte på alle nivåer. Vi benyttet linker fra kjente norske nettsider som for eksempel matematikk.org, og brukte også biblioteksbasen BIBSYS, for å se om det kunne finnes relevant litteratur på området. Vi søkte innenfor flere fagdisipliner fordi de i stor grad overlapper hverandre. Søkeord vi benyttet oss av var *konkreter, konkreter i matematikk, concretes, concretes mathematics*. Vi gikk også gjennom litteraturlister fra artikler og andre dokumenter vi kom over underveis i søket, kikket nærmere på ulike titler og ”abstracts” og undersøkte om disse kunne være relevante for oss.

2.3 Kriterier og utvalg

Vi opplever som nevnt at det er en alminnelig oppfatning i det pedagogiske samfunnet at bruk av konkreter er gunstig for utvikling av abstrakte begreper i matematikk. Vi mener at vi i offentlige dokumenter har belegg for påstanden om positive sider ved bruk av konkreter, og også gjennom vår egen yrkeserfaring som beskrevet i innledningen. Da vi innså at det finnes kritisk forskning på feltet, ble vi derfor opptatt av å finne ut hva denne typen litteratur kunne fortelle oss om andre måter å tolke bruk av konkreter på i matematikkundervisningen. Vi har forsøkt å balansere utvalget ved å ta med bidrag som reflekterer begge sider av debatten. Utvalget er likevel skjevt da vi har valgt å bruke flere artikler som er kritiske til bruk av konkreter, enn artikler som er positive. Dette fordi vi som nevnt opplever at de positive følgene av å bruke konkrete gjenstander er velfundamentert i norsk skole, og i våre egne erfaringer. Det er derfor interessant å finne ut hva de som er kritiske til bruk av konkreter i matematikkundervisningen har konkludert med i sine forskningsrapporter, slik at vi kan danne oss et bredspektret bilde av hvordan konkreter best mulig kan brukes i undervisningen.

Endelig har vi til hensikt å oppnå innsikt på bruk av konkreter i matematikkundervisning som gjør oss bedre rustet til å hjelpe lærere og elever. Kanskje kan vi også bruke vår innsikt til å utvikle hypoteser som kan brukes i senere sammenhenger.

Vi har benyttet oss av formålstjenelig, og skjønnsmessig utvalg ettersom vi har hatt klare mål for hva vi lette etter underveis i litteratursøket. Vi har til en viss grad brukt lenkeutvalg da vi en i artikkel fant tittel på den neste og så videre (Befring, 2007). En metode for å vurdere hvor representative de oppsporte undersøkelsene er, eksisterer ikke. Man må derfor utforme ulike kriterier (Christophersen, 2002). Våre kriterier i letingen etter litteratur var:

- Forskning som gir oss innsikt i hvordan konkreter innvirker på læring
- Forskning som tilnærmer seg bruk av konkreter på ulike vis
- Forskning som kan belyse kritiske sider ved bruk av konkreter

Gall, Gall og Borg (2007) skriver at et dokument kan bli analysert på ulike nivå, fra ulike perspektiver, og etter forskjellige formål. Vår hensikt har vært å øke vår kompetanse og innsikt om hva forskningslitteratur sier om bruk av konkreter i matematikkundervisningen. Vi har derfor vært opptatt av de ulike dokumentenes innhold, hva de kan fortelle oss, og ikke så opptatt av hvordan de ulike forskningsprosessene forløp.

Vi har brukt både primær – og sekundærundersøkelser i vårt datagrunnlag (Christophersen, 2002). I primære undersøkelser har vi tilgang på materiale som ikke er påvirket av noe utenom forskeren selv. Sekundære undersøkelser kan gi oss en bred oversikt over forskning gjort på feltet da de kombinerer kunnskap fra flere primære undersøkelser i en og samme undersøkelse. Gall, Gall og Borg (2007) anbefaler at man ikke kun benytter seg av sekundære kilder, da slikt materiale er preget av forskerens tolkninger, men at man også benytter primære kilder. En av de fem rapportene er en sekundær undersøkelse, eller metaanalyse. Dette kan hindre oss i å sammenligne undersøkelsene og de ulike resultatene på et dypere forskningsfaglig plan. Vi valgte likevel å benytte oss av den ene sekundære undersøkelsen, da vi ønsket en bred oversikt over bruk av konkreter.

Prosessen fra konkret til abstrakt er kompleks og sammensatt. Det krever god formidlings-kompetanse hos læreren og det krever at barna evner å abstrahere enkelte matematiske enheter fra sine konkreter erfaringer. Vi ønsket å få kunnskap om dette på ulike måter, og valgte forskningsrapporter med ulike typer studier og forskningsdesign. Flere av studiene hevder at funnene kan overføres til barn i andre aldersgrupper. Alder på utvalgene i de ulike studiene er forskjellig, alt fra 14 måneder til voksne studenter på universitetsnivå. Dette gir oss god oversikt over hvordan bruk av konkreter fungerer på ulike utviklingsnivå. I tillegg har studiene ulike tilnærminger til hvordan bruk av konkreter påvirker utviklingen av abstrakt tenkning. Vi tenker dette gir oss et godt utgangspunkt for å få bred innsikt i bruk av konkreter i matematikkundervisningen.

Etter litteratursøket endte vi med fem ulike forskningsrapporter, innlegg og artikler som vi mener oppfyller våre kriterier:

- Patrick W. Thompson sin rapport (1992): *"Notations, Conventions, and Constraints: Contributions to Effective Uses of Concrete Materials in Elementary Mathematics".* Han belyser på hvilken måte konkreter kan forstyrre innlæringsprosesser ved hjelp av treklosser versus bruk av grafisk fremstilte klosser på pc.

- Vladimir M. Sloutsky, Jennifer A. Kaminski, og Andrew F. Heckler (2005): *"The advantage of simple symbols for learning and transfer".* Disse har kommet frem til resultater som forteller at vi bør være kritiske til bruk av konkreter, og mener at irrelevante egenskaper ved konkreter kan hindre læring.

- David H. Uttal, Linda L. Liu og Judy S. DeLoache (1999): *"Taking a Hard Look at Concreteness: Do Concrete Objects Help Young Children Learn Symbolic Relations?"* Forfatterne er kritiske til bruk av konkreter, og har gjennom eksperimenter med skalamodeller av virkelige rom funnet ut at små barn må ta i bruk dobbelt representasjon for å mestre symbol- referentforbindelser.

- Snorre Ostad (1990): *"Hvorfor har barn matematikkvansker? Et streiftog i ukjent landområde".* Ostad tar for seg om manipulering med konkreter kan gjøre det enklere å overføre til andre situasjoner hvor konkreter brukes. Likeledes om manipulering med konkreter kan hjelpe barn til å overføre fra det konkrete til det abstrakte.

- Evelyn J. Sowell (1989): *"Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction".* Dette er en metaanalyse av seksti studier om bruk av konkreter. Kriterier som ble forsket på var blant annet tidsperspektiv i forhold til bruk av konkreter, lærernes holdninger og hvordan instruksjon rundt bruken influerer på elevenes læring.

Det finnes forskning av både høy og lav kvalitet, hele 40 – 60 % av forskningslitteratur viser seg å være av dårlig kvalitet (Christophersen, 2002 og Gall, Gall og Borg, 2007). Som masterstudenter har vi ingen erfaring med å evaluere forskning. En litteraturstudie vil som vi har beskrevet over alltid være påvirket av skjønn, og denne studien er intet unntak i så måte. Vi har imidlertid benyttet oss av Gall, Gall og Borg (2007) sin sjekkliste for evaluering av forskningslitteratur, og mener at dokumentene vi har valgt ut tilfredsstiller disse kravene (Vedlegg 1).

2.4 Validitet og reliabilitet

Validitet og reliabilitet har vært omdiskuterte begreper i forbindelse med kvalitativ forskning. Vi støtter oss til Kvale og Brinkmann (2009) som bruker begrepene pålitelighet og gyldighet i forbindelse med forskningens troverdighet både i metodologisk og moralsk betydning. Vi har hatt som mål å finne ut hva forskningslitteratur sier om bruk av konkreter. I den forbindelse har vi forsøkt å utføre et arbeid som preges av pålitelighet og gyldighet ved å være bevisste på hva som er forskernes funn og meninger, og hva som er våre betraktninger. Dette gjelder både i de ulike studiene vi har lagt til grunn for undersøkelsen, og i analysen som følger i etterkant.

Befring (2007) viser til at svakheten ved en tradisjonell litteraturstudie er at vurderingene er avhengig av kunnskapsnivået til den som utfører studien. Vi har vår spesifikke fagkunnskap på feltet, men begrenset erfaring med å vurdere forskningslitteratur på en kritisk måte. Inn i forskningsprosessen tar vi med oss våre egne erfaringer og forforståelse. Allerede ved valg av datamaterialet har vi påvirket prosessen som ligger til grunn for undersøkelsen. Gall, Gall og Borg (2007) referer Patti som skriver det slik:

"A review is gatekeeping, policing, and productive rather than merely mirroring.... A review is not exhaustive; it is situated, partial, perspectival."

(s.109)

Et sammendrag kan lett bli upresist eller ufullstendig når det gjelder hvilke problemstillinger, variabler og resultater undersøkelsen omfatter (Christophersen, 2002). Fire av de fem rapportene som danner datagrunnlaget er engelskspråklige. Disse har vi laget sammendrag av, og oversatt til norsk. Vi har plukket ut fra artiklene det vi mener er relevant. Dette kan ha ført til at vårt datamateriale er noe upresist, da andre kanskje ville valgt å lage sammendragene på en annen måte, eller velge ut innhold som er forskjellig fra våre valg. Reliabiliteten er avhengig av at feilfaktorer og subjektivt skjønn i minst mulig grad påvirker datamaterialet, og om resultatene vi har kommet frem til kan etterprøves av andre (Befring, 2007). Det er enkelt å oppsøke kildene vi har brukt i vår studie, og på den måten kan vårt arbeid kontrolleres av andre i etterkant. Vi har presentert datamaterialet etter beste evne, og har lagt vekt på å være tolkingsnøytrale. Vi har forsøkt å være transparente, synlige og redelige i fremstillingen slik at det fremgår hva som er våre egne betraktninger, og hva som er de ulike forskernes innsigelser.

2.5 Etikk

I følge De nasjonale forskningsetiske komiteer er det viktig at forskning skal ha et formål, eller en verdi utenom forskerens eget utbytte (hentet fra http://www.etikkom.no, 29.5.2011). Denne litteraturstudien tar for seg et område som vi mener kan være interessant for alle som har sitt virke innenfor matematikk i grunnskolen. Vi anser denne studien som et mulig bidrag særlig for førskolelærere i barnehage og lærere som arbeider på småskoletrinnet, men også for andre instanser som forholder seg til matematikk i grunnskolen som fagområde.

En etisk utfordring ved en litteraturstudie vil være å sørge for et representativt og balansert utvalg av studier (Christophersen, 2002). I vår studie har vi lagt vekt på å få frem hva ulike forskere har kommet frem til i sine eksperimenter rundt bruk av konkreter. Rapportene vi har valgt ut har noe motstridende utgangspunkt, og et par av dem henviser til annen motsigende og relevant forskning på feltet som vi har benyttet som tilleggslitteratur. Vi har på den måten kommer frem til at vårt datamateriale representerer et noenlunde representativt bilde av virkeligheten slik det fremkommer av de ulike forskningsrapportene. Som nevnt finnes det mye forskning om bruk av konkrete objekter, og hvordan disse påvirker læring og overføring i matematikk. Vi har så langt vi formår forsøkt å fremstille et utvalg med balansert relevans i forhold til vår problemstilling.

Befring (2007) skriver at den emosjonelt engasjerte forskeren kan representere en etisk risikofaktor. Vi er opptatt av bruk av konkreter i matematikkundervisningen, og har vært bevisste på at dette kan innvirke på vårt arbeid. Vi har forsøkt å være objektive, og har lagt stor vekt på at oversettelsene og sammendragene som utgjør datamaterialet, er gjengitt så presist som mulig. Kvale og Brinkmann (2009) skriver at objektivitet kan bety å avspeile forskningsobjektets natur. Vi har etter beste evne forsøkt å forvalte datamaterialet på en slik måte at vi lar innholdet i de ulike artiklene komme tydelig frem, uten vår påvirkning. Vi presenterer stoffet på den måten vi mener er best for å ivareta innholdet slik det står i utgangspunktet. I tillegg har vi brukt referanser med intensjoner om å ivareta gode etiske holdninger som beskrevet på De forskningsetiske komiteenes sider (hentet fra http://www.etikkom.no, 29.5.2011).

3 Teori

Det er som nevnt ulike syn på om konkreter er gunstig for innlæring av matematiske konsepter. Vi har gått i dybden på noen av rapportene, og har gjort et kort overblikk over andre. Dette gjør at vi kan danne oss et bilde av hva som gjør at forskningen på bruk av konkreter er sprikende.

I det følgende har vi laget et sammendrag av Patrick W. Thompson sitt forskningsprosjekt. Han belyser som nevnt på hvilken måte konkreter kan forstyrre innlæringsprosessen. Deretter følger artikkelen fra Vladimir M. Sloutsky, Jennifer A. Kaminski, og Andrew F. Heckler. Disse mener å ha funnet resultater som forteller at vi bør være kritiske til bruk av konkreter. Det samme gjelder med de påfølgende forskerne, David H. Uttal, Linda L. Liu og Judy S. DeLoache. Vi ønsker som nevnt å belyse temaet fra flere vinkler, og har tatt med forskningsrapportene fra Snorre Ostad og Evelyn J. Sowell. Disse bidragene stiller seg positive til bruk av konkreter. Sistnevnte har gjort en metaanalyse av 60 studier og ønsket på den måten å synliggjøre effekten av konkreter på en dekkende måte.

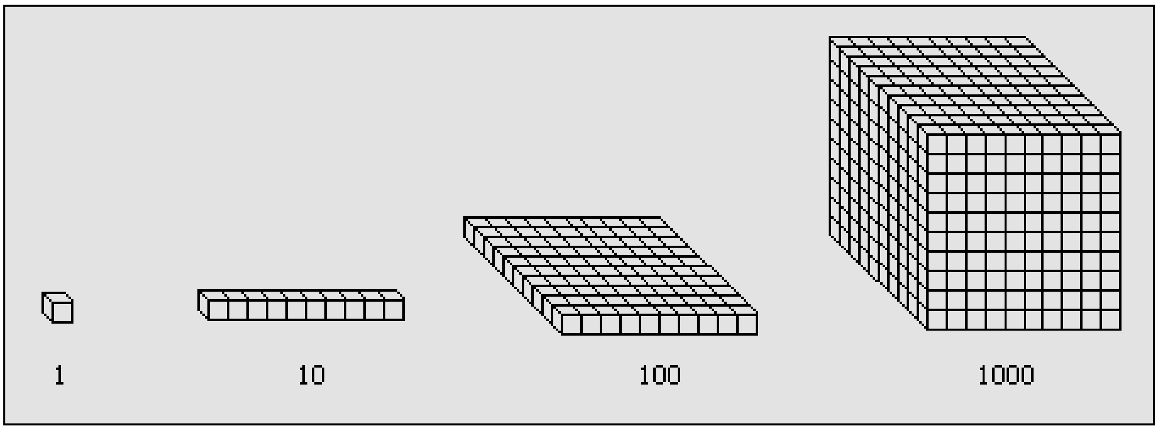
I presentasjonene av undersøkelsene forsøker vi å få frem så mange som mulig av de viktigste aspektene. Deretter ønsker vi å se på hva som skiller de ulike forskningsfunnene, og hva som gjør at forskerne ender opp med forskjellige resultater.

Følgende presenterer vi de fem forskningsrapportene som utgjør vårt datamateriale.

3.1 Patrick W. Thompson

"Notations, Conventions, and Constraints: Contributions to Effective Uses of Concrete Materials in Elementary Mathematics"

Forskere har funnet forskjellige resultat på effekten ved bruk av konkreter (Fennema 1972, Labinowicz 1985, Resnick 1982, Resnick & Omanson 1987, Sowell 1989, Suydam & Higgins 1977, Wearne & Hiebert 1988). Dersom man skal se på tvetydigheten i denne forskningen kan det være greit å se på Resnick og Omanson, Fuson og Briars, Labinowicz, og Wearne og Hiebert som står ganske ulikt i dette synet. Resnick og Omanson's forskning viser at barna hadde liten effekt ved bruk av base-ti blokker (se figur 1), i forhold til forståelse og kunnskap med plassverdien til flersifrede tall ved subtraksjon.



Figur 1. *Base-ti blokker*

Fuson og Briars derimot fant ut at barn hadde en raskere utvikling ved bruk av base-ti blokker med flersifrede tall i forhold til subtraksjon og addisjon. Wearne og Hiebert fant at ved bruk av base-ti blokker var det en merkbar påvirkning på både fjerde -, femte - og sjette klasses utvikling. Dette gjaldt forståelsen av desimaltall ved addisjon og subtraksjon samt brøk. Noe av denne tvetydigheten kan forklares med at man har forskjellige mål i forskningen, samt at man evaluerer på ulike vis. Selv om dette kan forklare noe av ulikhetene, så er nok også forklaringen mer kompleks. Elevenes interesse og engasjement i forhold til konkreter kan også være en mulig forklaring (Thompson, 1992).

Resnick og Omanson observerte at elever som aktivt var med i en organisert aktivitet ikke hadde noe særlig effekt av undervisningen så lenge de tenkte at de fulgte en ”oppskrift” i det de var med i. Disse elevenes rekonstruksjon av et opplegg lagd på forhånd, gjorde at de ikke fikk muligheten til å konstruere sin egen mening og forståelse. På denne måten hjelper det ikke elevene å bruke konkreter. Elevene vil oppleve problemer med det de selv logisk tenker og det som forskningen forventer. Det blir en spenning mellom disse. Enkelte elever vil være veldig følsomme for denne føringen som forskningen legger opp til, andre ikke. Med dette som bakgrunn kan man dele elevene som deltar i forskningseksperimentet i tre grupper. Først de som uttrykker seg personlig, uavhengig av forskningsopplegget. Deretter er det de som tilpasser seg konvensjonen, men med forsiktighet og begrensning. Til slutt de elevene som følger den matematiske konvensjonen uten å tenke på det, ubevisst (Thompson, 1992).

Konvensjon, lærerplan og forskning:

En matematisk konvensjon er et faktum, navn, notasjon eller bruk som en generell inneforstått forståelse for matematikere. For eksempel; det faktum at man skriver multiplikasjon før addisjon i uttrykket 2 x 3+4, er bare konvensjonelt. Det er ingen iboende betydning hvilken rekkefølge operasjonen kommer i. Matematikere tviholder på konvensjonene, slik at andre matematikere kan forstå hva de skriver, uten stadig å måtte omdefinere grunnleggende prinsipper. Tenk om enhver matematisk artikkel begynte med en forklaring av konvensjonen!

Nesten alle matematiske navn og symboler er konvensjonelle. Jo lenger et navn eller en notasjon har vært i bruk, jo mer sannsynlig er det at det blir en matematisk konvensjon. Noen notasjonskonvensjoner nekter dessverre hardnakket å utvikle konvensjonelle løsninger, som regel fordi to eller flere konkurrerende konvensjoner oppnår utbredt bruk.

Thompson mener en måte å møte de metodiske og didaktiske undervisningsoppleggene på, er å la elevene selv få skape sine egne problemløsningsmetoder, ved bruk av konkreter. En mulig måte å nå dette målet, er å få elevene til å forstå at det finnes mange ulike måter å forstå noe på. Det finnes ikke noe riktig eller galt i prosedyrene for å nå et mål. Et annet mål vil være å få elevens resonnement og uttrykk til å forenes. Dersom eleven kan prøve å avgrense sitt uttrykk i resonneringen, vil eleven bedre klargjøre sitt eget resonnement. Dersom eleven kan strukturere sine egne tanker først, vil uttrykket komme mer systematisk og under mer ordnede forhold. Det er også på denne måten elever vil sette pris på den naturlige, produktive sammenhengen mellom kreativiteten og konvensjonalitet. For å skille konvensjon fra å være rituelt, må en forstå hvordan man tilnærmer seg på andre måter med samme gyldighet.

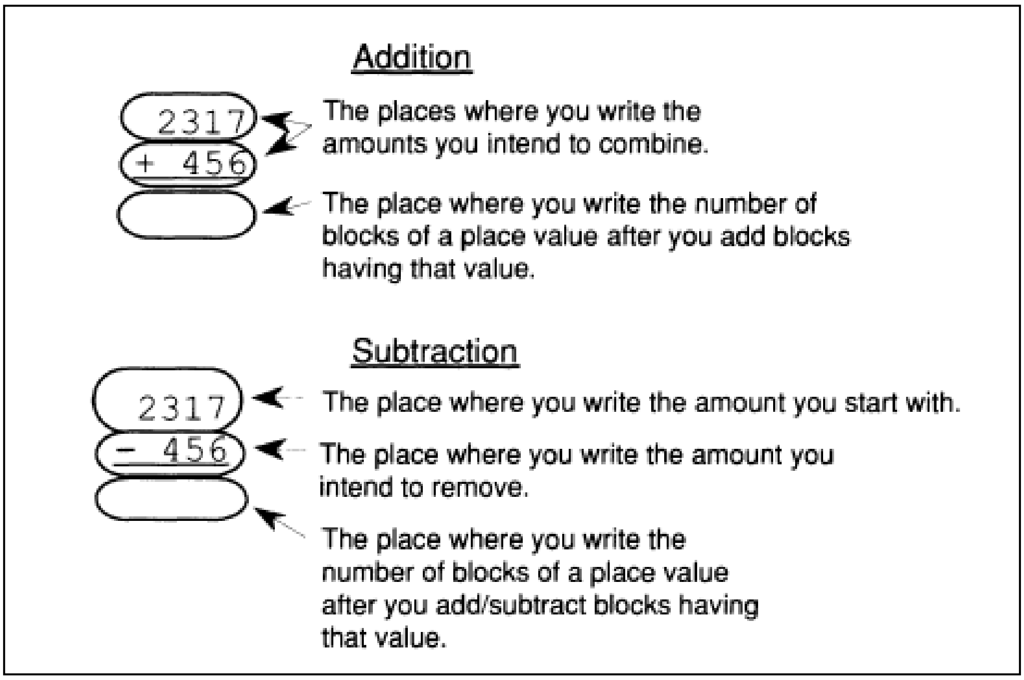
Å ha elever til å skape konvensjon der det passer er verken ønskelig eller hensiktsmessig. Vi kan ikke overse konvensjonene. Det blir som å la eleven skape sitt eget språk for at de skal sette pris på konvensjonen i språket.

Studien:

Studiens design er å finne ut om elevers bruk av base-ti blokker bidrar til en større forståelse for desimaltall, samt deres konstruksjon av notasjoner for fastsettelse av operasjonen, med involvering av desimaltall. Studien var gjennomført over ni dager, en dag for pretest, syv dager med instruksjon, og en dag for posttest.

Konvensjon av notasjoner og metoder:

Det ble i studien ikke gitt føringer for bruk av tallsystemet. Allikevel ble elevene oppmuntret til å bruke tallets verdi. Grunntallene ble presentert som et prinsipp, istedenfor å bli presentert som et av flere tallsystemer. Ingen metoder ble gitt konvensjonelt med oppgaver knyttet til base-ti blokker (f.eks. at barnet starter med blokk av minste verdi). Elevene kunne fritt løse problemer med addisjon og subtraksjon helt uten begrensninger, bortsett fra at problemene måtte utføres, og innenfor grunntallsystemet. Målet var å lede elevene til en organisering av allerede besatte ordninger av notasjonene.



Figur 2. *Konseptuelt organisert med standard konvensjon brukt av lærer og forklart for elevene*

Instruksjonene de fikk var designet slik at elevene fikk så mye frihet som mulig til å skape sine egne metoder for å løse oppgaver med blokker innen addisjon og subtraksjon, og for å skape sine egne ordninger for bruk av notasjoner. For å oppsummere var det slik at at elevene fikk mye frihet rundt løsningsmetoder, og det var mye sensitivitet ovenfor elvene når det gjaldt kommunikasjon i forhold til problemer, organisering og skriving.

Spørsmål:

Dersom frihet i forhold til løsningsmetoder for addisjon og subtraksjon ved bruk av base-ti blokker, og frihet i forhold til notasjonsuttykk med de begrensninger at nøyaktigheten reflekterer mening og metode vektlegges; Hvilke aspekter ved elevers bruk av base-ti blokker, støtter da gjennomføringen av notasjonsbruk for å representere mening og metode?

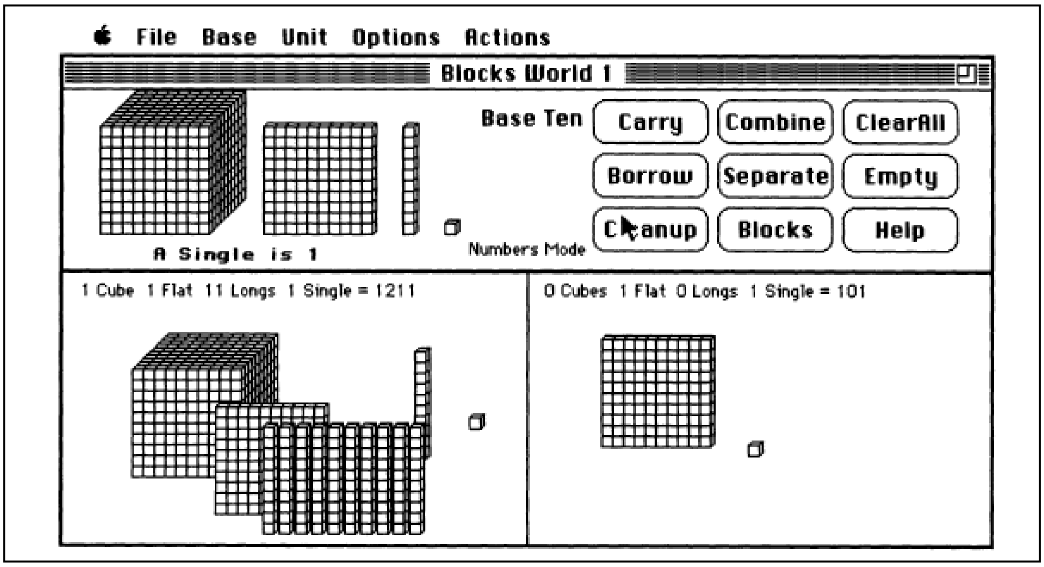
Hypotese:

1. Elever som er fra ni til ti år (Fourth - grade students), som har erfart typisk matematikkundervisning i sine første tre år, vil ikke lett bli overbevist om deres frihet i forhold til bruk av notasjon kreativt.

2. Når elevene oppfordres til å bruke notasjon for å uttrykke mening og forståelse, så vil en orientering til gjensidig relasjon om hva de har i tankene og deres uttrykk, bli mest effektiv i deres utvikling av meningsfull bruk av notasjon, enn om det ikke var en slik orientering.

Materialet:

Et musdrevet pc-program som heter "Blocks Microworld" (se figur 3). Det er et system som kobler base-ti blokker og desimaltall. Se figur:



Figur 3. *Bilde av pc-programmet, Blocks Microworld*

Enhver forandring på tallene fører til forandring på blokkene. Elevene lagde samlinger av blokker med å dra kopier av blokker fra en hovedbase til regionen som det ønskes å lagre. For å bytte en blokk for ti blokker av lavere verdi, måtte eleven klikke på riktig tall, som også lyste, og deretter trykket på *låne* (*borrow*). Når låne-knappen ble trykket på, kunne man se en blokk eksplodere i ti små blokker. På motsatt måte klikket man på ti små, deretter på *samle* (*carry*). Da ble blokkene visuelt smeltet sammen til en stor blokk. Programmet har mange ulike funksjoner, man kan blant annet dra to grupper med blokker til to ulike rom, deretter trykke *legg sammen* (*combine*), så forsvinner skillelinjen mellom disse to rommene og blokkene er sammenlagt. Man kan også velge å vise blokkene som desimaler, for eksempel 1/10 istedenfor bare en enkel. Det vises også et tall for denne sammenleggingen. Thompson sier at intensjonen med Blocks Microworld er at elevene skaper sin egen mening og sine egne tolkninger rundt notasjoner.

Når man løser subtraksjon og addisjonsoppgaver med f.eks. treklosser i fysisk form så er elevene konsentrert om klossene. Elevene får ikke et naturlig, systematisk forhold til sammenhengen mellom notasjonene og klossene. Eleven kan legge til og trekke fra med å bruke klosser, men har nødvendigvis ingen tydelig relevans til notasjon. Med Blocks Microworld derimot vises notasjonsrepresentasjonen visuelt. Intensjonen til programmet er og hele tiden kunne se sammenhengen mellom blokker og tall, og enhver handling forandrer dette fortløpende.

Metode:

Subjekter:

De som var med på studien var tjue elever i fjerde klasse, like mange gutter som jenter. Elevene var gjennomsnittlig gode på skolen og ingen hadde brukt pc i matematikkundervisningen.

Prosedyre:

Elevene fikk to forskjellige instruksjoner de måtte følge. Den ene gruppen fikk instruksjon i Microworld, den andre gruppen fikk instruksjon i bruk av treklosser. Microworld ble introdusert av deres vanlige lærer, men gruppen med treklosser ble introdusert av en forskningsassistent.

Forundersøkelse og tildeling av grupper:

Elevene ble i forkant testet på sin tallforståelse, kunnskap om plassverdi og brøkkunnskap. Elevene ble tildelt tilfeldige grupper etter hvordan de havnet i en analyse i forkant.

Posttest:

Posttesten inneholdt to deler: pretesten med elementer om hvordan ordne desimaltall, presentere desimaltall, anvendelse av metode og regning med desimaltall. Man ble belønnet med korrekt svar og riktig bruk av metode. Deretter kom posttesten, med intervju av åtte elever. Fire av de med høyest score på pretesten og fire med lavest score. Alt ble videofilmet og transkribert.

Instruktører:

Som tidligere nevnt, sto den vanlige læreren for instruksjonen til Microworld-gruppa, og forskerassistenten for treklosse-gruppa. Den vanlige læreren hadde ikke brukt slik informativ fremtoning før, heller ikke forskerassistenten for treklosse-gruppa. Hennes instruksjon inneholdt ikke noen orientering om konvensjon eller mening. Forskerassistenten var en erfaren lærer.

Instruksjon:

Instruksjon ble gitt over sju dager, med en posttest den åttende dagen. Instruksjonen til treklosse-gruppa var meget detaljert. Det var føringer på hva som skulle vises, hva som skulle sies og hva som skulle spørres. Undervisningen la veldig opptil bidrag fra elevene. For eksempel, i første forelesning presenterte læreren 4123 med blokker og skrev tallet det representerte, og så skulle elevene forklare korrespondansen mellom blokker og tallet. Deretter byttet læreren 10 flate med en kube og spurte elevene: Har det totale antallet forandret seg? Hva kan vi gjøre med tallet for å vise hva vi hadde, hva vi gjorde og hva vi endte opp med? Etter dialogen spurte læreren følgende: hvis vi spør en bonde om å levere fire tusen ett hundre og tjuetre epler og han kom med tre esker med tusen epler i, elleve esker med hundre i og to esker med ti i, og tre løse epler. Har han levert riktig antall epler? Spiller det noen rolle hvordan han grupperer dem? På denne måten sirkulerte de som instruerte rundt elevene og hjalp dem med å stille spørsmål, ba de forklare hva de gjorde, responderte og ryddet opp etter beste evne. Poenget er at elevene sto fritt til å velge løsningsmetode, fremgangsmåte, og diskutere sine valg. Det var satt opp en helt klar oppskrift for instruksjoner for de 8 gjennomgående dagene (figur 4). Fokuset for hjemmeleksene til begge gruppene var å representere de konkrete handlingene av noen som ikke brukte en standard metode for å løse subtraksjons- og addisjonsoppgaver.

Outline of Instruction for Both Groups

Day	In class	Homework
1	Demonstration of microworld, introduction to base-ten blocks Representing quantities Borrowing and representations of having borrowed Action-meanings of subtraction Representations of borrowing and subtracting	Represent steps in various subtraction problems; solutions presented as sequence of pictures of block collections
2	Representations of borrowing and subtracting (activity)	Represent steps in various solutions to subtraction problems; solutions presented as sequence of pictures of block collections
3	Carrying and representations of having carried Action-meanings of addition Representations of carrying and adding (activity)	Represent steps in various solutions to addition problems; solutions presented as sequence of pictures of block collections
4	Units other than a single "Ten of" and "one-tenth of" relationships among blocks and place values Base-ten decimal notational system Representing numbers in decimal notation (activity)	Represent given decimal fractions in three ways using pictures of blocks
5	Subtraction of decimally represented fractions Representations of borrowing and subtracting	Represent steps in various solutions to subtraction problems; solutions presented as sequence of pictures of block collections
6	Addition of decimally represented fractions Representations of carrying and borrowing	Represent steps in various solutions to addition problems; solutions presented as sequences of pictures of block collections
7	Mixed practice on addition and subtraction	None
8	Testing	

Figur 4

Analyse:

Resultatene av posttesten ble delt i to deler. Analyse av den første delen gikk på forandringen i nøyaktighet fra pretest til posttesten. Andre delen gikk på elevenes respons på spørsmål som ble introdusert i eksperimentet – desimaltall og kalkulering med desimaltall. Begge analyser var fra to perspektiver: utføring og metode. Analysen av utføring var satt på elevenes korrekthet av svarene. Analyse av metode fokuserte på om elevene brukte notasjonsmetoder som var påvirket av instruksjon. Og til slutt ble noen elever intervjuet for å vurdere elevenes evne til å relatere deres skrevne arbeid til noen matematiske prinsipper eller konkrete modeller.

Resultater:

Forandring i nøyaktighet fra pretest til posttest:

Tabell 2 viser forholdet mellom studentenes pretest og posttest på utregning av hele tall, brøk og brøk med desimaler. Det var ingen betydelige forbedringer på noen av de nevnte. Det var en svak forbedring i elevenes forståelse av brøk med desimaltall, som de tre siste i tabellen viser.

Desimaltall og utregning av dette:

Med tanke på posttesten var treklosseelevene generelt mere korrekte på desimalutregning enn Microworldelevene, men de var dårligere enn Microworldelevene på to av tre oppgaver som involverte orden og ekvivalens.

Number of Correct Responses on Pretest and Posttest Items for Blocks and Microworld Groups

	Blocks		Microworld	
Item	Pre	Post	Pre	Post
$3004 - 286$	5	6	5	5
$7814 + 2648$	9	10	9	9
$5002 - 493$	5	5	4	5
Shade $\frac{2}{10}$ of a 10 x 10 grid.	6	6	7	7
Shade $\frac{3}{5}$ of a 10 x 10 grid.	3	2	2	2
If a *flat* stands for one, then what does a *long* stand for?	3	5	2	5
If a *flat* stands for one, then what does a *cube* stand for?	5	5	3	5
If a *flat* stands for one, then what does a *single* stand for?	3	5	3	5

Note. $n = 10$ for each group.

Figur 5

Figur 5 viser elevenes utførelse på utregning av desimaler. Det var ikke mulig å tolke gruppenes feil på de første tre oppgavene. Microworldelevene gjorde noen småfeil som for eksempel 2+5=8 (fem feil). Seks feil ble gjort av treklosseelevene på ”14,8+7,23=___”. De to første oppgavene gikk på å bestemme samsvar mellom to representasjoner. Microworldelevene hadde flest riktig på den første og treklosseelevene hadde mest riktig på den andre. Det er interessant å legge merke til er at Microworldelevene skriblet masse notater på ark, slik at man kunne se etter løsningsmetoder. Dette gjorde ikke treklosseelevene i det hele tatt.

Number of Specific Responses to Decimal Fraction Equivalence and Order Items on the Posttest

Stem		Response	Blocks	Microworld
4.325	$4 + \frac{32}{100} + \frac{5}{1000}$	Same	3	7
		Different	4	2
		Can't tell	3	1
4.325	$4\frac{325}{1000}$	Same	6	4
		Different	3	4
		Can't tell	1	2
7.89 is smaller than 7.9		Yes	3	6
		No	6	3
		Don't know	1	1

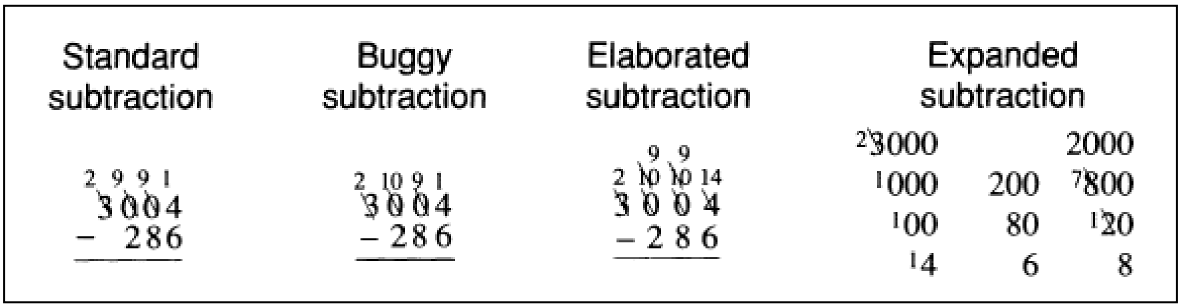
Note. n = 10 for each group.

Figur 6

Tabell seks inneholder også et annet element som gjør at vi kan vurdere forståelsen av plassrekkefølgen og tallrepresentasjonen av desimaler. Ingen av elevene hadde notater for å eksemplifisere deres forståelse (se intervju).

Løsningsmetode:

Det ble satt mye fokus på hvordan elevene løste oppgaven, både før og etter prosjektet. Som et eksempel hadde elevene i pretesten subtraksjon av hele tall.

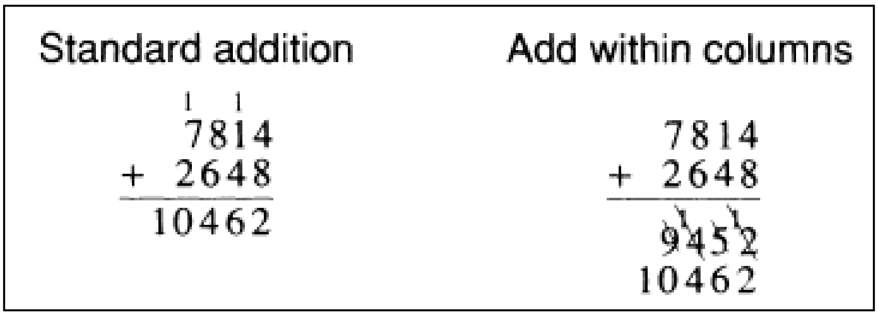


Figur 7. *Metode i pretest og posttest ved subtraksjon*

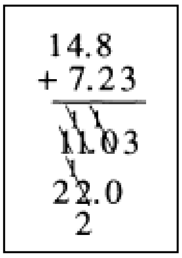
Disse kan vi dele inn i to grupper, standard (standard) subtraksjon og ”nesten” (buggy) subtraksjon:

”Nesten” subtraksjon er en ukorrekt modifikasjon av det riktige svaret. På posttesten ble oppgaver med hele tall delt i tre grupper med hensyn til metodebruk. Som før, standard og ”nesten” slik som før, men også novel - subtraksjon. Novel - subtraksjon kan igjen deles i to grupper; utdypet (elaborated) subtraksjon og utvidet (expanded) subtraksjon. Ser vi på den utvidede versjonen av novel - subtraksjonsgruppa har elevene tydelig lånt for eksempel 100 fra 800 og skrevet 7 i mente. Tydelig utført, men utvidet. Alle trekolosselevene brukte samme metode på pretesten som på posttesten. Åtte av ti av Microworldelevene brukte samme metode på pretest og posttest. Disse to som ikke gjorde det, byttet fra standard subtraksjon og ”nesten” subtraksjon til novel - subtraksjonsmetode.

Standard addisjon var den eneste metoden som ble brukt av elevene på pretesten. På posttesten ble det brukt to metoder på samme oppgave, standard addisjon (standard) og ”legg til i kolonner” (add within colums). På sistnevnte metode legger man først sammen og noterer de hele tallene for så å legge sammen disse igjen. Dette var en ganske vanlig metode under instruksjonene. Alle elevene brukte standard addisjon på pretesten. Syv treklosseelever beholdt bruken av standard addisjon på posttesten, tre byttet til ”legg til i kolonner”. Seks Microworldelever beholdt deres bruk av standard addisjon, mens fire byttet til ”legg til i kolonner”.



Figur 8. *To metoder på addisjon av hele tall, brukt av elevene på posttesten.*



Figur 9. *"Legg til i kolonner"-metode for desimaltall*

På de fire desimaloppgavene (figur 8), viste bare de to siste oppgavene om addisjon en forskjell på gruppene. Det ble brukt standard addisjon og "legg til i kolonner" i hele tall utregning. Tabell 9, som representerer en microworldelevs skrevne arbeid, er et eksempel på "legg til i kolonner", anvendt i desimaltall. Som vi ser har eleven først lagt sammen tiere (1), enere (11), tideler (10) og hundredeler(3). Deretter har hun gjort om tidelene til en ener, og fått tolv enere, deretter har hun gjort om 1 tier og 12 enere om til 2 tiere og 2 enere.

På figur 10 kan vi se de mange ulike metodene som ble brukt i addisjon. Høyrejustering (align right) betyr at tallene er justert til høyre. Treklosseelevene brukte standard addisjon eller høyrejustering mer enn microworldelevene på addisjon av desimaltall, mens microworldelevene brukte oftest "legg til i kolonner". I tillegg var det slik at to av tre microworldelever som ikke svarte riktig, ga forslag til svar som var metoden "legg til i kolonner".

Decimal Addition Notational Methods on Posttest

Item	Method	Blocks	Microworld
12.27 + 5.84	Standard addition	7	2
	Add within columns	3	8
14.8 + 7.23 = _____	Standard addition	5	0
	Add within columns	2	5
	Align right	3	1
	Novel	0	1
	No work	0	3

Note. n = 10 for each group.

Figur 10

Resultatet av hele tallutregningen viser elevenes motstand til å modifisere deres allerede automatiserte notasjonsordning, til tross for instruksjonene gitt i forkant. En indikator på effekten av motstanden til behandlingen er elevenes villighet til å gi slipp på deres automatiserte tanker og ta til seg nytt materiell. Syv treklosseelever beholdt standard addisjon som metode når de gikk fra hele tall til desimaltall. Tre treklosseelever brukte ”legg til i kolonner” for både hele tall og desimaltall. Fire av seks microworldelever som brukte standard addisjon for å addere hele tall byttet om til ”legg til i kolonner” når de kom til desimaltall. To microworldelever brukte standard addisjon for begge.

Fire microworldelever brukte ”legg til i kolonner” for begge. Standard addisjon ble ikke instruert (selv om det en sjelden gang kom opp til diskusjon), det virket trygt å anta at standard addisjon assimilerer addisjon av desimaltall og hele tall som en ordning i notasjoner. Treklosseelevene assimilerte desimaladdisjon til notasjonen om hele tall som en ordning.

Noe som måtte vurderes var graden av hvorvidt elevene lot seg påvirke av feltinstruksjonene, som var i konflikt med den forestillingen elevene hadde om matematikkundervisningen, den tradisjonelle måten. I figur 11 ser vi en oppgave sammen med elevenes respons. Treklosseelevene hadde en tendens til å tro at standard addisjon er den riktige måten å addere på, selv om andre måter gir andre svar. Bare en microworldelev sa seg enig i dette. På den annen side, de fleste var uenige i denne påstanden, og bare to treklossestudenter var uenig.

Children's Attitudes about Correctness of Unprescribed Methods

Statement		Response	Blocks	Microworld
This is the RIGHT way to add 8276 and 4185. Other ways might give the same answer, but they are not the right way:	$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1}\\ 8276\\ +\ 4185\\ \hline 12461 \end{array}$	Yes	5	1
		No	2	7
		Don't know	3	2

Note. *n* = 10 for each group.

Figur 11

Intervjuer:

De fire elevene som scoret høyest på pretesten og de fire elevene som scoret lavest på pretesten ble intervjuet etter instruksjon og posttest. Intervjuet fokuserte på elevenes forklaring på det de hadde uttrykt på posttest.

Nedre treklossegruppe. Elevene i denne gruppa ga forklaringer som i stor grad var prosessuelle, uten referanser til aktiviteten med klossene eller rammene rundt desimaltallsystemet. Følgende utdrag illustrerer en forklaring de ga. Elevene hadde subtrahert korrekt 7,31 – 6,4.

I: I was just wondering why you didn't do it this way (shows the student $\begin{array}{r} 7.31\\ -\ 6.4\\ \hline \end{array}$)? Why you did it that way ?…Why did you line up the seven and the six?

T: Well, I guess because, because you can't, well cause you need to line up the decimals, because you can't subtract. Well, its four minus, four minus one and decimal. And three minus six. But there's not another decimal, so you can't even do that. The decimals have to be lined up.

I: You mean the decimal points?

T: Yeah.

I: Ah. And you don't think it's correct if I say, "Okay, one minus four, I can't do that so I can borrow from here, and then make this an eleven. Eleven minus four is seven and then let's see. Twelve minus six is six. Then put a decimal here. And then say, six." That wouldn't be right?

T: Well, no, because you'd still have this decimal hanging there, and you wouldn't, you couldn't put that there because it wouldn't, then it would be seven point six point…six point seven [*i.e., 7.6.7*].

Nedre Microworldgruppe. To elever i gruppen med laveste skåre gikk glipp av to av tre dager med instruksjon av desimaltall, dagen da desimaltallsystemet i brøk ble introdusert og følgende dag med subtraksjon. Dette forklarer deres lave posttestresultat. Elevene i denne gruppa viste liten forståelse for desimaltall og hadde ikke forstått selv de enkleste beregninger som de hadde skriftlig besvart.

I: Which one (7.9 or 7.89) is bigger than which?
B: This one's bigger than that one [*pointing to 7.89*].
I: Seven point eight nine is bigger than seven point nine?
B: Yeah
I: Why?
B: Because you have an eight nine and you just have a nine there.
I: And?
B: And eight nine is bigger than nine.
I: Eight nine is bigger than nine. What place value is this? Where is this eight?
B: Tenths.
I: In the tenths? And this one here?
B: Is nine ones.

Øvre treklossegruppa:

Det var ingen bevis på at noen av de to øvre treklosseelevene hadde formet noen sammenheng mellom desimaltall, base-ti blokker, og notasjonskonvensjoner. Tydeligvis så modifiserte de prosedyren for hele tall når de møtte desimaltall. Leseren bør være klar over at eleven i følgende utdrag er fra den eleven med nest høyest totale posttestscore.

I: Remember the block stuff? What did you think of it?
J: Um, I thought it was pretty easy because we had done it in our math books before.
I: You did it in your math book? Did you do decimals in your math book?
J: No.
I: Did the blocks help you think about decimals and fractions with tenths and hundredths?
J: No, not really.
I: Not really, huh. So how was it that you learned about decimals? You know, to add and subtract them.
J: I don't know.
I: You don't know. What were you thinking? Did it make sense to you?
J: Well, I just thought about it as doing it without the decimal and then I just added the decimal at the end.
I: …So you just ignored the decimal and then treated it…
J: Yeah.
I: …like you always did before.

J: Sort of like dollars and cents.

I: Ah, I see.

J: So you don't have to worry about it.

[*Portion of excerpt omitted.*]

I: [*Discussing 7.31 – 6.4 =* _____.] Okay. Down here you wrote, let's see.... You wrote them up and down and then you crossed out the three and wrote thirteen. Could you tell me why?

J: Because I took one hundred away and then put it in the tens.

I: Are you putting a "d" or a "th" at the end? Are you saying hundred or hundredth?

J: Hundred.

I: With just a "d" at the end?

J: Yeah.

[*Portion of excerpt omitted.*]

I: Here you said "yes", that seven point eight nine is smaller than seven point nine.

J: Because, um, you would just have to put a zero here. So it would be seven point nine, zero.

I: Seven point nine, zero. Why would you put a zero there?

J: Um.

I: How would you read this number in hundreds, tens, ones, tenths, hundredths, stuff like that?

J: Um, seven hundreds, eight tens and nine ones.

I: That's seven point eight nine. It's seven hundreds, eight tens, and nine ones. Right?

J: Yeah.

I: Okay. And seven point nine?

J: Um, seven hundreds, nine tens, and zero one.

I: So this is the way to write seven hundred and ninety...seven nine with no zero at the end.

J: No.

I: No? But you told me that that is seven hundreds and nine tens....Is that right?

J: No.

I: No? Which one of these is smaller?

J: This one (7.9).

I: The seven point nine. What does that seven point nine stand for, what number?

J: Seven tens and nine ones.

Øvre Microworldgruppe:

De to øverste Microworldelevene viste anlegg for utregning av desimaltall og hadde en fornuftig kilde til konvensjoner. En av dem hadde relativt store feil, var uorganisert og hadde en slurvet skrift. Den andre som vi følgende får se et intervjuutdrag fra, hadde den høyeste posttestscoren.

I: Some people have said that they think that this problem should be written like this.

$$\begin{array}{r} 7.3\,1 \\ -\;\;6.4 \\ \hline \end{array}$$

So when you write it up and down, seven point three one take away six point four, it looks like this. They say you always have to line up the right hand side.

K: Well, not exactly. If you have a decimal point on this side, you got to…um…you got to match the decimal point with the…this…and this is the ones and this is the tens. So you're actually measuring up by the decimal point.

I: Well, it sounds like we have two rules that are in conflict. One is to always write…line things up on the right hand side, and the other is to always line up the decimal point. Are those different rules?

K: Yeah. Um…when you line them on up at the right hand side, you usually have two whole numbers which are ones and other…other numbers in front of it. And so when you're adding them or subtracting to the other, they all fit together. But…when you have a decimal point and there's this number…has a, a one, a number that is a hundredth and this one is only a tenth, you scoot it over to match…the decimal point.

I: Oh, I see. So lining up the decimal point is what keeps you from…

K: Messing up.

[*Portion of interview omitted.*]

I: Did you feel like you knew what you were doing?

K: Um-hum [*yes*].

I: When you were doing these problems, did you ever think about the, the blocks?

K: Yeah, sometimes. When I got stumped or stopped.

Klasseromobservasjon:

Elevene i Microworldgruppen responderte annerledes på instruksjonen enn elevene i treklossegruppa. Dette gjaldt blant annet åpenhet for nye metoder og perspektiver. Uansett så viste posttesten lite påvirkning på Microworldelevene, for eksempel når det gjaldt hvilken metode de foretrakk for hele talloperasjoner. Videoanalyser viste at disse elevene brukte ganske kreative metoder under instruksjonen. For eksempel så var det en elev som bestemte seg for å låne fra hvert tall fra utgangstallet, subtrahert innen kolonnene, og så overført innen der det var forskjell hvis tallet var større enn 1. Men på dette stadiet var ikke Microworldelevene trygge nok i sine nye metoder. Vi fant ingen standard bruk av notasjoner hos treklossestudentene, og kun der hvor de ble fortalt å gjøre det. Gjennom observasjoner ved instruksjon av treklosseelevene oppfattet Thompson at elevene ikke fattet poenget med instruksjonen. Han tolker ikke dette som at de har en naturlig bruk av base-ti blokker. Tvert i mot, så ser han det som et naturlig resultat av å gi dem friheten til å skape sine egne notasjonsmetoder, og de så sjelden begrensninger når det kom til å bruke notasjoner. Ved flere anledninger ble det klart at treklosser hadde begrenset verdi og begrenset elevenes handlinger og resonnement i forhold til korrespondanser mellom forutsetninger, meninger, og notasjonskonvensjonelle handlinger. En klasseaktivitet var å be en elev ”velg en kloss som står for en, deretter ta ut blokker som representerer 3,41.” En treklosseelev valgte en kube som sto for en og så ned på papiret og leste tre hundre og førti en. Hun puttet tre flate, fire lange og en singel, så på arket og tilbake på klossene, så fortsatte til neste oppgave. En elev fra Microworldgruppen startet på samme måte, valgte en kube fra menyen (til dataprogrammet), så la eleven tre flate for å lage tre hundre og førti en. Etter å ha lagt tre flate, så eleven på skjermen og sa: ”komma tre? Det var ikke det jeg ville… aha! En kube er en!” Dataprogrammets design tillot elevene å erfare anledninger hvor de innså nødvendigheten med å overholde sine forutsetninger og å begrense sine resonnementer i henhold til sine forutsetninger. Selv om treklosselæreren stadig orienterte elevene mot å korrespondere mellom det de gjorde med blokkene og det de skrev på papiret, viste treklosseelevene lite tegn på å måtte skrive ned den aktuelle representasjonen som de gjorde med klossene. Istedenfor så de på dette som to separate aktiviteter. Den eneste relasjonen mellom disse var ”i forbifarten”, faktaene om at det skrevne symbolet har en referanse til verden av klosser.

Elevene i Microworldgruppen gjorde stadig referanser til handlinger om symboler til handlinger om blokker. En grunn til dette kan være at oppmerksomheten alltid var rettet mot symbolene selv om intensjonen var å jobbe med blokkene. Microworldelevene jobbet med blokkene samtidig som de jobbet med notasjonenes motstykker. Dermed er sammenhengen mellom notasjon og materiell mer fremtredende.

Et alvorlig problem som dukket opp i studien var at elevene tydelig mislikte friheten til å kunne bruke sine egne metoder. Elevene i klossegruppen viste motstand gjennom instruksjonen mot å finne alternative metoder for å addere og subtrahere oppgaver. Ved en anledning spurte en elev; ”Kan vi ikke bare gjøre det på gamlemåten?”. Microworldelevene diskuterte ikke alternative metoder, men motstanden ble kraftig redusert i løpet av de syv dagene med instruksjon. Thompson kan ikke begrunne dette med at det har noe med instruktøren å gjøre. Dette fordi instruktøren selv måtte minne seg selv om at alle metoder var lov, uansett hvor utradisjonelle de var. En Microworldelev svarte på hvordan det var å jobbe på denne måten og svarte: ”Jeg liker det virkelig godt, på denne måten virker ting forståelig.

Men jeg er egentlig litt redd for å gjøre det på denne måten.” Elevens frykt var muligens: ”Neste år vil kanskje læreren si det er feil.” Når læreren til denne eleven forsikret om at dette ikke ville skje, så spurte han: ”Ville du har notert det som feil i begynnelsen av året?” Læreren svarte: ”Ja, det ville jeg.”

Begge gruppene adopterte raskt lignende notasjonsmetoder for addisjon med hele tall. Metaforen *kombiner mengdene* måtte tilpasses bildet av de eksisterende ordninger elevene hadde om notasjoner. I for eksempel subtraksjon var det betydelig variasjon i Microworldelevenes metoder; det var faktisk betydelige variasjoner innen det individuelle fra problem til problem. Det kom ingen tydelig foretrukket metode frem hos Microworldelevene, verken for subtraksjon med blokker eller for notasjonsordninger. Elevene i treklossegruppa brukte standard subtraksjon uansett om de hadde friheten til å bruke deres egen metode i fravær av klosser. Det var også vanlig å se elevene bruke standard subtraksjon i deres notasjonsordning, når de representerte sine handlinger med klosser, selv om deres standard subtraksjon ikke modellerte deres handling med klossene.

Drøfting:

Den vesentlig manglende innvirkningen av enten behandlingen av elevenes automatiserte metode, eller nøyaktigheten ved addisjon og subtraksjon med hele tall, er konsistent med tidligere studier. Du har de som prøver å lære gjennom tradisjonell notasjonsprosedyre (Resnick & Omanson, 1987) også har du de som prøver å la elevene konstruere sine egne notasjonsmetoder (Labinowicz, 1985; Wearne & Hiebert, 1988). Begge fremgangsmåtene påvirket et betydelig mindretall av elever i forhold til deres allerede automatiserte notasjonsmetoder for addisjon av hele tall, men når det kommer til treklossegruppa ser det ut til at effekten har vært helt syntaktisk.

Forskjellen på effekten av instruksjonen på metodene til subtraksjon og addisjon kan være så enkel som at begge er syntaktiske og konseptuelle, av ”legg til i kolonne”-metoden. Metoder i subtraksjon derimot, er komplekse, både notasjonsmessig og konseptuelt. En kompleks prosedyre som har blitt memorert rituelt er vanskeligere å gjøre om enn en enkel prosedyre. Dersom en elev memorerer en prosedyre på en meningsløs måte, så er det ekstremt vanskelig å få dem til å endre prosedyren, selv med utvidet og meningsfull opprydning. Det bør også nevnes at elevene som endret sin notasjonsmetode for å uttykke mening hadde en tendens til å bli mindre nøyaktige ved beregninger enn elever som allerede hadde automatisert korrekt metode og som forstsatte å bruke de. Nylig konstruerte metoder er ustabile. Elevene som brukte nye metoder hadde relativt liten tid til å få de automatisert.

Elever i treklossegruppa assimilerte tydeligvis instruksjonen på desimalutregning og operasjon med desimaltall til strukturer de allerede hadde utviklet for utregning med hele tall og hele talloperasjoner. Dette er konsistent med funnene i flere studier (Balacheff, 1990; Nesher & Peled, 1986; Resnick m.fl., 1989). Wearne og Hieberts fant at instruksjon, som var ganske lik denne studien, influerte fjerde, femte og sjette klasseelevers intensjon og evne til å analysere situasjoner i term av mening for symboler brukt i presentasjon av oppgaver. En kilde til avvik mellom resultater av denne studien med klosser og elevene til Wearne og Hieberts kan være lengden på instruksjoner. Elevene i denne studien brukte tre timer på desimalutregning, operasjon og desimaltall; elevene til Wearne og Hiebert brukte ni timer på dette tema. Og så var instruksjonen i denne studien strukturert med intensjonen at elevene skulle kunne generalisere deres tall- og operasjonssystem fra hele tall til desimaltall. Instruksjonen i Wearne og Hieberts studie begynte med desimaltall. Hva slags instruksjon de brukte i forhold til sammenhengen mellom utregning av hele tall og desimaltall kommer ikke klart frem av rapporten deres. Det er heller ikke klart fra deres rapport hvor mye oppmerksomhet de brukte på notasjonsmetoder generelt, og det er heller ikke klart hvilken oppmerksomhet som ble gitt til problemer knyttet til komplekse handlinger rundt notasjoner. Deres rapport inneholdt ikke addisjon som involverte regruppering, den inneholdt heller ikke subtraksjon. Det var forskjell mellom treklossegruppa og Microworldgruppa når det gjaldt utregningsmetoder med desimaltall, konseptet med utregning av desimaltall og holdninger ved bruk av notasjoner. Microworldelevene brukte oftere logiske og meningsfulle metoder ved bruk av notasjoner, og de svarte på spørsmål som hadde med desimalordning og desimalekvivalens på en slik måte at de prøvde å forstå prinsippet med desimaltall. De var ofte unøyaktig ved desimalsystem, men mange av deres forsøk var basert på en forståelse av prinsippet ved utregning. Microworldelevenes unøyaktighet på desimalutregning er konsistent i forhold til den ulike vekten som var, de fant en logikk i det nye materialet, men de har ikke klart å konsolidere denne logikken til en kognitiv struktur. Klahr og Siegler (1978) rapporterte et lignende funn, hvor elever ble mer raffinerte i forhold til konseptet og var mer unøyaktig i deres prediksjon enn yngre og mindre raffinerte barn. De eldre barna forsto bedre hva oppgavene gikk ut på, og de gjorde oppgavene mer komplekse for dem. Det tar lengre tid å konstruere en regel fra basis av forståelse, enn å måtte huske en regel som forenkler noe som motsatt ville vært en kompleks konseptuell oppgave (for eksempel det å linje opp desimaltall og fortsette som om det var hele tall).

Microworldelevenes ulikheter kan tolkes som et positivt bevis på at deres erfaring med instruksjon førte dem til å holde fast ved utradisjonelle ideer. Det kan virke merkelig å vurdere beregningsorienterte ulikheter som et positivt utfall. Uansett, sett at elevenes innledende bruk av notasjoner ofte er rituelt og ugjennomtrengelig å rydde opp i, og tatt i betraktning raffineringen av de notasjonsutfordringer som vi spurte om de kunne adressere eksplisitt, burde vi forvente at de ville bli forvirret når vi forandret kontrakten mellom dem og det de skulle gjøre på en dyp og grunnleggende måte. Det vi nå må forstå er hvordan ulikheter muligens kan bli løst med en stabil og prinsipiell ordning.

Selv om Microworldelevene oftere tok i bruk ny notasjon, så hadde verken treklossestudentene eller Microworldelevene konstruert desimaltall som et tallsystem. Uansett, Microworldelevene synes å holde fast ved disse ideene med en større forlengelse enn treklossestudentene. Microworldelevene kunne mer se for seg handlingene med klosser når de jobbet med notasjoner, men beviset fra flere oppgaver indikerte at mange av elevene ikke fullt ut hadde internalisert blokkene i seg selv som representanter for tallverdier. En annen sak er at studien var av for kort varighet. Selv om den var for kort for begge grupper, kan ikke det bortforklare det faktum at det ble observert forskjell i både holdninger og forståelse. Vi må ta hensyn til og ikke konkludere fra denne studien at bruk av treklosser som base-ti blokker, eller konkrete materialer generelt, er ineffektivt for å produsere forståelse av notasjonsmetoder. Til det er det for mange studier som viser det motsatte (For eksempel Fuson, 1990; Fuson and Briars, 1990; Sowell, 1989). Tvert om viser denne studien at vi repliserer tidligere studier. Vi spør om graden av elevers internaliserte måter å gjøre noe på, er distinktivt internalisert som konvensjoner.

Det er to ting å lære fra denne analysen og resultatet av studien. For det første; før elever kan bruke konkrete materialer produktivt, må de først forstå sin egen aktivitet, og så å forholde seg til å uttrykke sin forståelse på en meningsfull måte. For det andre; Konkrete gjenstander som et matematisk konsept kan bli brukt effektivt i sammenheng med å lære notasjonsmetoder, elevene må se at hver av dem reflekterer den andre. De må ende opp med å føle seg like begrenset med sine notasjonshandlinger som det de gjør med handlinger ved motsetninger i en konkret sammenheng.

3.2 Vladimir M. Sloutsky, Jennifer A. Kaminski, og Andrew F. Heckler

"The advantage of simple symbols for learning and transfer"

Et mål for vellykket læring er overføring av lært kunnskap til nye situasjoner. Men spontan overføring er vanskelig å oppnå. I denne forskningen argumenterer forfatterne for at læring og overføring kan bli lettere når kunnskapen er uttrykt i en abstrakt generisk form. Forskningsresultatene viser at bruk av perseptuelt rike konkrete symboler kan hindre læring. Det kommer også frem at bruk av konkreter kan gå på bekostning av læring og overføring, mens abstrakthet har fordeler.

Forskningsresultater viser at barn (Gentner & Medina, 1998) og voksne (Markman & Gentner, 1993) sannsynligvis merker en felles ikke perseptuell relasjon mellom objekter når disse objektene er perseptuelt sparsomme enn når de oppfattes som rike. Irrelevant konkrethet ved en representasjon som ikke er en del av det som skal læres (dvs. overflatefunksjoner) kan bli feilaktig tolket som en del av det som er lært, og dermed hindre overføring (Bassok & Olseth, 1995; Bassok, Wu, og Olseth, 1995, Ross, 1984, 1987, 1989).

Heckler med fler laget et prosjekt med tre eksperimenter hvor de undersøkte hvordan ulik grad av konkrethet virker inn på overføring og læring. Et mål for vellykket læring er som nevnt *overføring* av lært kunnskap til nye situasjoner. I eksperiment 1 og 2 lærte studentene to identiske domener, som var basert på samme algebraiske gruppe. Ett domene ble uttrykt i en abstrakt, generell form og den andre var uttrykt i en mer konkret form. I begge forsøkene ble overføringen størst når studentene først lærte i en abstrakt form for deretter å lære noe mer konkret, enn det motsatte. I eksperiment 3, lærte studentene samme algebraiske gruppe under varierende grad av konkrethet.

Det høyere gjennomsnittlige resultat for deltakere i matte som deretter hadde naturfag enn for deltakere på prosjektet som hadde naturfag og deretter matte, tyder på at læring av matematikk tilrettela for deres læring av naturfag, mens læring av naturfag ikke tilrettelegger for læring av matematikk. Fordi begge domener var nye, tyder disse data på at kunnskapen presentert i et mer abstrakt, generisk format legger til rette for tilegnelse av kunnskap presentert i et mer perseptuelt rikt, konkret format. Det kan imidlertid motargumenteres ved at den observerte forskjellen i overføringen kan stamme fra andre forskjeller mellom domenene. Spesielt var det en forskjell i måten domenene ble lagt frem på, og dessuten ble naturfaget presentert i et dynamisk format, mens matematikken ble presentert i et statisk format.

Resultatene av forsøk 1 og 2 indikerer at overføring av læring er lettere når innledende læring i grunndomenet innebærer objekter som er mer abstrakte og generelle enn i det domenet hvor det skal læres. Resultatene tyder videre på at konkrete gjenstander ikke bare hindrer overføring, men læring i seg selv. For å undersøke effekten av konkreter på læring, ble eksperiment 3 gjennomført.

De tre rapporterte eksperimentene avslørte flere sentrale regelmessigheter. Eksperiment 1 indikerte at overføring av læring mellom to relativt like domener (for eksempel, ytelse i det andre domenet etter å ha lært av det første domenet) var større da det i det første domenet ble brukt mer abstrakte, generiske representasjoner enn når det ble brukt perseptuelt rike, konkrete representasjoner. Eksperiment 2 innebar ekstra kontroll, og kom fram til de samme funnene.

Eksperiment 3 indikerte at bruk av perseptuelt rike, konkrete materialer hindrer læring. De tre rapporterte eksperimentenes resultater presenterer nye funn som indikerer at irrelevante konkrete materialer påvirker både læring og overføring på negativ måte.

Det er verdt å merke seg at senere forskning (Goldstone & Sakamoto, 2003) indikerer at perseptuelt rike representasjoner letter konkret læring av komplekse prinsipper. Men Goldstone og Sakamoto brukte konkrete representasjoner for å kommunisere relevante aspekter av informasjon som skal læres (representasjonene som ble brukt var maur og epler, i motsetning til mer abstrakt representasjoner hvor en kunne brukt prikker). I motsetning til Goldstone og Sakamotos eksperimenter, brukte forskerne i denne rapporten konkrete materialer som ikke kommuniserer relevante aspekter av ”det som skal læres”. Resultater fra Goldstone og Sakamoto og denne rapportens tre eksperimenter tyder på at for å lette læring, må konkrete representasjoner fange viktige aspekter av ”det som skal læres”, ellers vil konkrete representasjoner hindre, heller enn lette læring.

Flere faktorer kan forklare disse effektene av irrelevant konkrethet på læring og overføring. For det første engasjerer konkrete representasjoner automatisk det sansemessige systemet mens det hindrer en dypere konseptuell behandling. Videre kan perseptuelt rike, konkrete representasjoner øke ulikheten mellom enheter i begge domener, og dermed begrense strukturell tilpasning, som kan være viktig for utvinning av underliggende relasjonelle fellestrekk. Noen forskningsfunn viser at perseptuelt sparsomme representasjoner er mer sannsynlig å understreke en ikke-perseptuell relasjon mellom enheter enn perseptuelt rike representasjoner (Gentner & Medina, 1998; Gentner & Rattermann, 1991; Markman & Gentner, 1993). For det andre kan irrelevante aspekter ved en konkret representasjon være feilaktig tolket som en del av ”det som skal læres”.(Bassok & Olseth, 1995; Bassok, Wu, og Olseth, 1995, Ross, 1984, 1987, 1989). I tillegg kan konkrete objekter ha begrenset refererende fleksibilitet, fordi de er mer sannsynlig at de blir tolket som enheter enn som symboler (DeLoache, 2000; Uttal, Liu, og DeLoache, 1999, se også Goldstone & Sakamoto, 2003), og som et resultat mestrer ikke elevene å overføre kunnskap de har lært om konkrete enheter til mer abstrakte enheter.

Det faktum at irrelevant konkrethet ble funnet å hindre både læring og overføring kan ha viktige implikasjoner for vår forståelse for læring av komplekse domener, spesielt for matematikk og naturfag. Den dominerende oppfatningen i det pedagogiske miljøet har vært at perseptuelt rike konkreter, og underholdende materialer er nyttige for tilegnelse av kunnskap og for overføring av denne kunnskapen til andre situasjoner (Ball, 1992; Cobb, Yackel, & Wood, 1992). Denne forskningsrapporten antyder at selv om dette synet kan virke tiltalende, kan det være svært begrenset. For å lette læring, må perseptuelt rike konkrete representasjoner kommunisere relevante aspekter av det som skal læres. Men selv da kan det være en ulempe for læring og overføring (jamfør Goldstone & Sakamoto, 2003). I tillegg tyder resultatene av denne forskningen indirekte på at læring av matematikk, som er full av abstrakte enheter representert som generiske symboler, kan legge til rette for læring av naturfag, som er full av mer perseptuelt rike, konkrete enheter.

For å undersøke overføring, konstruerte forskerne i denne rapporten to kunstige og isomorfiske domener i stedet for å bruke eksisterende. Dette for å eliminere potensielle forkunnskaper, forventninger, eller erfaringer studentene hadde på tvers av domener. De konkrete materialene ble manipulert ved å øke det perseptuelle inntykket på symboler som viser enheter i hvert domene. Det første mer abstrakte domenet (heretter "matte") ble presentert for deltakerne som et symbolsk språk hvor tre typer symboler kombineres for å gi et resulterende symbol. Det andre mer konkrete domenet (heretter "naturfag") involverte interaksjonen mellom tre tredimensjonale gjenstander. Objektene gikk dynamisk mot hverandre og slo seg sammen til et resulterende objekt. I eksperiment 1 og 2 undersøkte forskerne effekten av perseptuell rikdom på overføring, eller en forbedring av læring og resultater i et domene etter å ha lært det andre domenet. I eksperiment 3 ble effekten av perseptuell rikdom på læring undersøkt.

EKSPERIMENT 1:

Målet med eksperimentene var å undersøke overføring av læring på tvers av de to beslektede kunstige domenene. Deltakerne lærte både matematikk og naturfag. Halvparten av deltakerne lærte matematikk først, og den andre halvparten lærte naturfag først. Overføring ble målt ved å sammenlikne gjennomsnittlige testresultater på ett domene som en funksjon av tidligere læring i det andre domenet. Testspørsmålene testet studentenes evne til å overføre sine kunnskaper til nye og komplekse problemer.

Metode:

Deltakere: 30 bachelor-studenter fra Ohio State University deltok i forsøket.

Design og materialer: Eksperimentet besto av fire faser presentert over 1 time: (1) trening i domenet X, (2) test i domenet X, (3) opplæring i domenet Y, og (4) test i domenet Y. Deltakerne ble tilfeldig utvalgt til en bestemt rekkefølge av læring (det vil si matte – deretter - naturfag eller naturfag - deretter - matte). Eksperimentet hadde en 2X2 rekkefølge med blandet design. Domenene matte vs. naturfag. Så matte – deretter – naturfag vs. naturfag – deretter - matte. Opplæring og testing i det første domenet ble fulgt av opplæring og testing i det andre domenet. Etter testing ble deltakerne bedt om å rangere likheten av de to domenene på en skala fra 1 til 5. En skåre på 1 indikerer at domenene var helt ulike, og en vurdering på 5 indikerer at domenene ble oppfattet som identiske.

Testresultater for matematikk og naturfag ble sammenlignet på tvers av to vilkår, matte – deretter - naturfag og naturfag – deretter - matte. Målet med opplæringen var å lære de fire spesifikke reglene presentert i figur 12, og egenskapene til disse reglene med opplæring i begge beslektede domener. Alle regler ble presentert en om gangen og de ble nevnt eksplisitt.

For example, when a specific rule was presented in the math domain, the students were told that a combination of symbol "★" and symbol "❁" always results in symbol "🌢," with the operation being written as follows: ★, ❁ → 🌢. A rule such as commutativity was not stated explicitly as "commutativity" but was rather shown as explicit examples: "★, ❁ gives the same result as ❁, ★."

(1) What can go in the blanks to make a correct statement?

____, ★, ____, ❁ → ❁ ?

Choose from the following: (a) 🌢 and 🌢, (b) ★ and ★, (c) ❁ and ❁, and (d) 🌢 and ★.

(2) Find the resulting symbol:

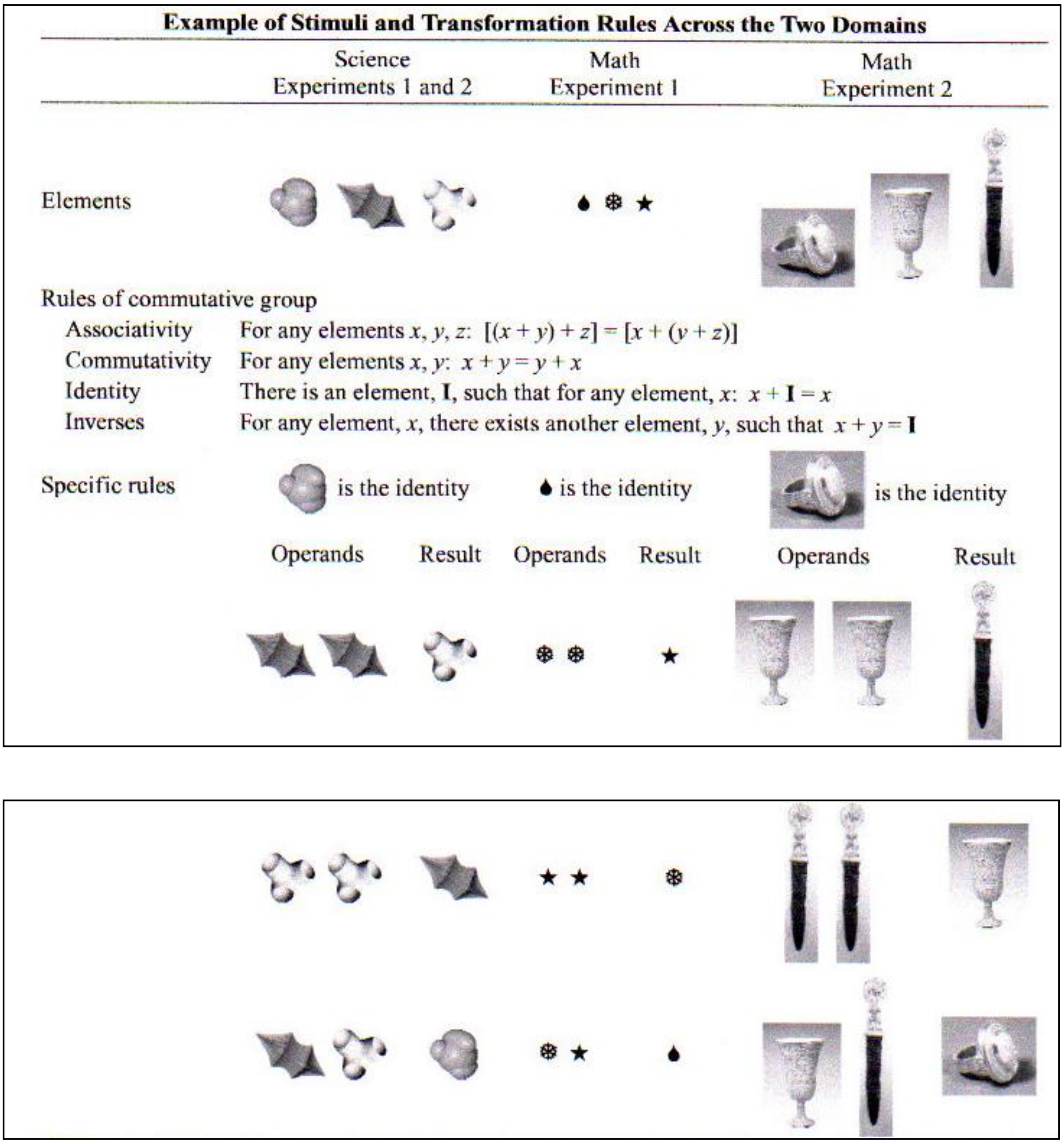
★, ❁, ❁, 🌢 → _____.

(3) Do the following statements have the same results?

❁, 🌢, 🌢, ❁ → ? and ❁, 🌢, ❁, ★ → ?

For both domains, the test questions were completely isomorphic and were presented in the same order.

Figur 12



Figur 13

I naturfagsdomenet ble reglene presentert på samme måte, bortsett fra at objekter i stedet for symboler ble vist (se figur 13 for eksempler på gjenstander), og operasjoner ble presentert som dynamisk samspill av disse objektene. Presentasjon av hver regel ble etterfulgt av en minnesjekk med tilbakemeldinger. Testing bestod av tyve flervalgsoppgaver som var utformet for å måle deltakernes evne til å anvende lærte regler for nye problemer. Ingen av testspørsmålene brukte eksempler som ble presentert under trening. Hvert testspørsmål hadde bare ett riktig svar, og de fleste av spørsmålene krevde at studentene benyttet nødvendige regler. Noen av spørsmålene var vesentlig mer komplisert enn de som ble presentert i opplæringen. For begge domener var testspørsmålene helt beslektede og ble presentert i samme rekkefølge.

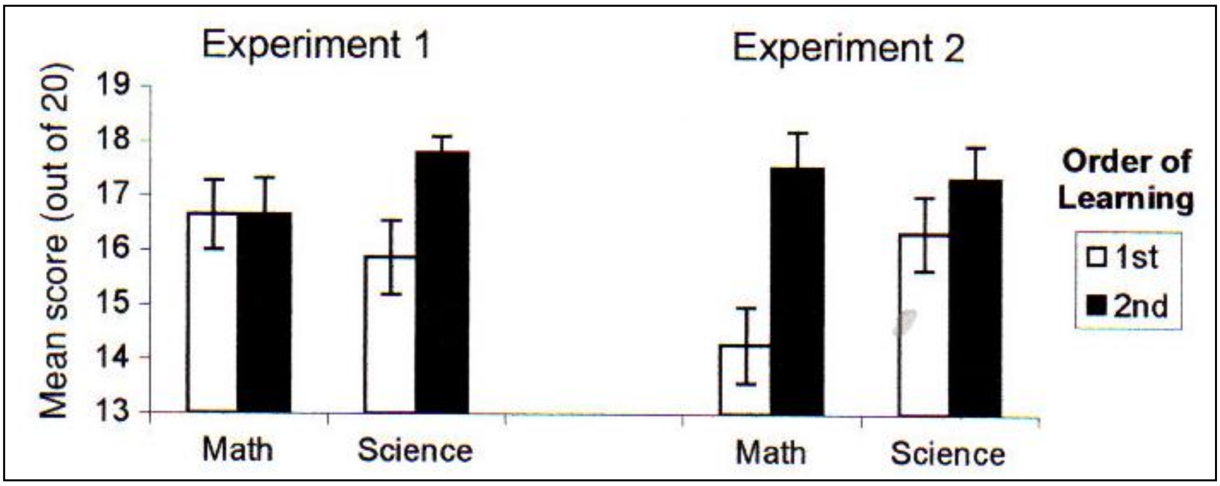
Prosedyre:

Deltakerne ble testet individuelt. Trening og testing ble presentert på en dataskjerm som elevene styrte og forskeren tok opptak av deltakernes svar. Presentasjonen av de to domenene ble fortalt gjennom to ulike historier. Den kunstige matematikken ble presentert som et symbolsk språk oppdaget i et arkeologisk funn. Symboler for forskjellige kategorier måtte virke sammen for å gi et resulterende symbol. Det kunstige naturfaget ble forklart som et fenomen observert på en planet utenfor vårt solsystem. Gjenstander fra ulike grupper av figurer samhandlet og dannet en resulterende form. Presentasjonen av det kunstige naturfaget inkluderte filmklipp som demonstrerer interaksjonen med to eller flere gjenstander som kommer i kontakt, og samspillet resulterer i framveksten av et nytt objekt.

Resultater og Diskusjon:

Deltakernes rangeringer av de to domenenes likhet bekreftet at de to domener ble sett på som nærmest identiske. På en likhetsskala fra 1 *(helt ulikt)* til 5 *(strukturelt identiske),* hadde deltakerne på matematikk – deretter - naturfag et gjennomsnitt på 4,6 og gjennomsnittet gitt av deltakerne på naturfag – deretter - matte var også 4,6. Dataene på læring og overføring på tvers av domener er presentert til venstre på Figur 14. Det var viktig at domenene skulle være nært identiske for å kunne sammenligne resultater på overføring og læring i de ulike oppgavene.

Deltakerne i matte – deretter - naturfag utførte betydelig bedre på naturfagstesten enn deltakerne i naturfag – deretter - matte. Samtidig var det ingen forskjell i matematikkskårene. Det kan imidlertid hevdes at den rapporterte interaksjonen skyldes høy nøyaktighet i matematikk. Fordi deltakerne oppnådde en ”takeffekt” i mattetestene, var det lite rom for forbedring som følge av å lære naturfag. For å undersøke denne muligheten, utførte forskerne en egen analyse på studenter som viste lavere læringsskåre (dvs. færre enn 16 elementer korrekt) i det domenet som ble lært først. Resultatene tyder på at i motsetning til forklaring om takeffekten, var samspillet enda tydeligere for studenter med lavere skårer.



Figur 14.

Den høyere gjennomsnittlige poengsum i naturfag for deltakere i matte – deretter - naturfag enn for naturfag – deretter - matematikk tyder på at læring av matematikk legger til rette for læring av naturfag, mens læring av naturfag ikke tilrettelegger for læring av matematikk. Fordi begge domener var nye, tyder dataene på at kunnskapen presentert i et mer abstrakt, generisk format letter tilegnelse av kunnskap presentert på et mer perseptuelt rikt og konkret format. Det kan imidlertid argumenteres for at den observerte forskjellen i overføringen kan stamme fra andre forskjeller mellom domenene. Spesielt var det en forskjell i bakgrunnshistorien når domenene ble presentert. En annen viktig faktor var at naturfag ble presentert på en dynamisk måte, mens matematikk ble presentert mer statisk. Dette problemet ble sett på i eksperiment to. Dersom de observerte forskjellene i læring stammer fra de konkrete materialene, og ikke fra utenforliggende forhold, bør innføring av matematikk i et mer konkret format enn i naturfag føre til en svekkelse eller en reversering av overføringseffektene funnet i eksperiment 1.

EKSPERIMENT 2:

Metode:

Deltakere: Tretti bachelor-studenter fra Ohio State University deltok i forsøket.

Materialer, Design, og prosedyre: Materialene som ble brukt var de samme som i eksperiment 1, med en avgjørende forskjell; de matematiske symbolene ble erstattet av bilder av 3D-objekter som vist i Tabell 1. Hvert bilde var et bestemt identifiserbart objekt, og derfor var materialene brukt i matte i eksperiment 2 mer konkrete enn materialene i naturfag som bestod av ukjente objekter. Utformingen av eksperimentet var identisk med eksperiment 1.

Resultater og Diskusjon:

Testresultater er presentert til høyre i figur 1. Som i forsøk 1 lærte studentene med suksess i begge domenene. Men denne gangen var læring av matematikk først mindre vellykket enn læring av naturfag først. Videre ble reversering av overføringen fra eksperiment 1 funnet (se til høyre panel i figur 14): I motsetning til i eksperiment 1 der læring av matematikk tilrettela for læring i naturfag, la læring av naturfag i dette eksperimentet til rette for læring av matematikk. Matteskårene for studentene i naturfag – deretter - matte var høyere enn for studentene i matematikk – deretter - naturfag.

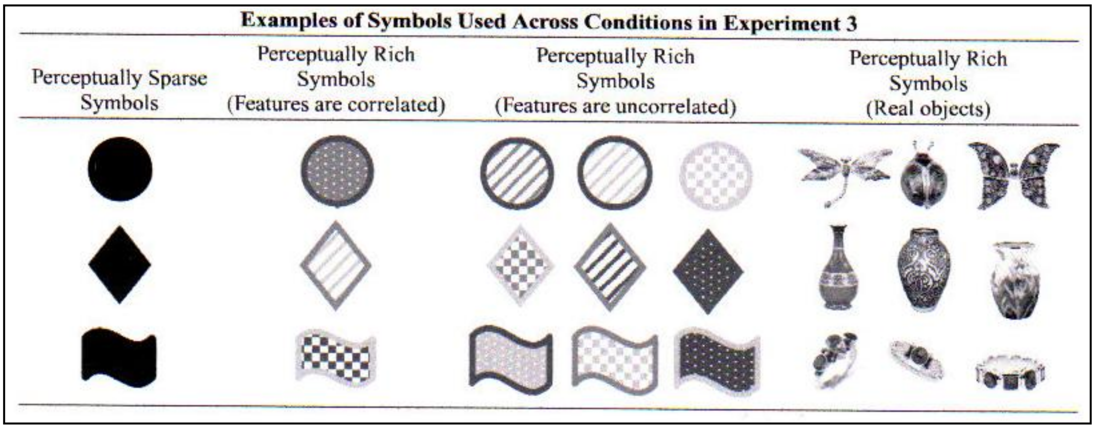
Resultatene av forsøk 1 og 2 indikerer at overføring av læring er lettere når innledende læring i det første domenet innebærer objekter som er mer abstrakte og generelle enn omvendt. Videre resultater tyder på at de konkrete gjenstandene ikke bare hindrer overføring, men også læring i seg selv. For å undersøke effekten av konkreter på læring, gjennomførte forskerne eksperiment tre.

EKSPERIMENT 3:

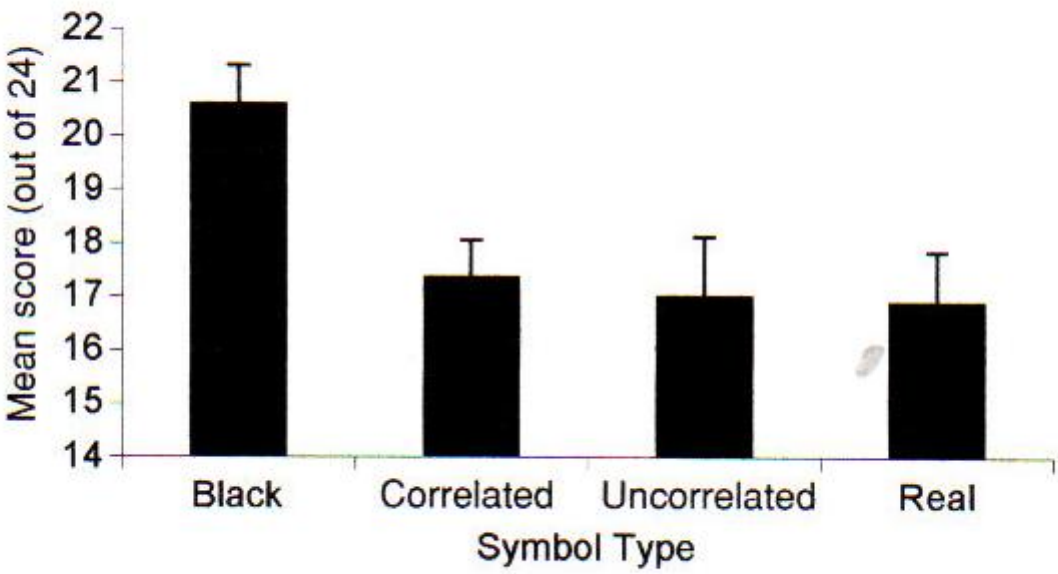
Metode:

Deltakere: Åttien bachelor-studenter fra Ohio State University deltok i forsøket.

Materialer, Design, og prosedyre: Historien og treningen var identisk med matteforsøk 1 og 2. Men symbolene varierte som vist i figur 15. Deltakerne ble tilfeldig valgt til en av fire ulike måter å presentere symboler på: (1) perseptuelt sparsomme svarte symboler, (2) perseptuelt rike korrelerte symboler, (3) perseptuelt rike ukorrelerte symboler, og (4) perseptuelt rike virkelige objekter. De perseptuelt rike, korrelert og ukorrelerte symbolene hadde fire dimensjoner: form, farge, mønster og mønsterfarge. De perseptuelt rike, korrelerte symbolene hadde farge og mønster av skyggelegging som korrelerte med deres form (for eksempel, sirkler alltid var røde, mens diamanter var grønne). De ukorrelerte symbolenes relevante trekk var form, mens farge og mønster av skyggelegging varierte. De perseptuelt rike, korrelerte og ukorrelerte symbolene var inkludert for å undersøke om tilfeldig varians gjør læring vanskelig (i så tilfelle skal de korrelerte symbolene lokke fram bedre læring enn ukorrelerte symboler) eller om perseptuell rikdom i seg selv gjør læring vanskelig (i så fall bør det være liten eller ingen forskjell mellom de korrelerte og ukorrelerte forhold). De virkelige objektene var like de som brukes i forsøk 1 og 2 (se tabell 15 for eksempler). Prosedyrer for opplæring og testing var identiske med de som brukes i forsøk 1 og 2.



Figur 15



Figur 16

Resultater og diskusjon:

Læringsresultatene presenteres i figur 16. I alle testene viser elevene over gjennomsnittlig ytelse. Viktigere var at det var signifikante forskjeller mellom deltakere som ble testet. Studentene som ble testet på de sorte symbolene utførte testene vesentlig bedre enn de med ukorrelerte symboler og de med reelle objekter. Videre utførte den sorte symbolgruppen marginalt bedre enn de i den korrelerte symbolgruppen. Samtidig var det ingen forskjell mellom de perseptuelt rike symbolgruppene. De to siste funnene er av største betydning, fordi de indikerer at perseptuell rikdom hindrer læring.

Generell diskusjon:

De tre rapporterte eksperimentene avslører flere sentrale lovmessigheter. Eksperiment 1 indikerte at overføring av læring mellom to beslektede domener (for eksempel ytelse i det andre domenet etter å ha lært av det første domenet) var større da det i det første domenet ble brukt mer abstrakte, generiske representasjoner enn når det ble brukt perseptuelt rike, konkrete representasjoner. Forsøk 2 repliserte disse funnene. Eksperiment 3 indikerte at bruk av perseptuelt rike, konkrete materialer hindrer læring. Samlet sett presenterer de tre rapporterte resultatene nye funn som indikerer at irrelevante konkrete læringsmaterialer negativt påvirker både læring og overføring.

Merk som nevnt at senere forskning (Goldstone & Sakamoto, 2003) indikerer at perseptuelt rike representasjoner letter læring av komplekse prinsipper. Men Sakamoto og Goldstone brukte konkrete representasjoner til å kommunisere relevante aspekter av det som skulle læres. I motsetning til Goldstone og Sakamotos eksperimenter, brukte denne forskningen konkrete materialer som ikke kommuniserer relevante aspekter av det som skal læres. Til sammen tyder resultater fra Goldstone og Sakamoto og disse eksperimentene på at for å lette læring, må konkrete representasjoner fange viktige aspekter av kunnskapen som skal læres, ellers vil konkrete representasjoner hindre heller enn lette læring.

Den dominerende oppfatningen i det pedagogiske miljøet har vært at perseptuelt rike konkreter og underholdende materiale er nyttige for tilegnelse av kunnskap og overføring av denne kunnskapen til andre situasjoner (Ball, 1992; Cobb, Yackel, & Wood, 1992). Denne forskningen antyder at dette synet kan være svært begrenset. For å lette læring må konkrete representasjoner kommunisere relevante aspekter av det som skal læres. Men selv da kan representasjonene være en ulempe for læring og overføring (jf. Goldstone & Sakamoto, 2003). I tillegg tyder resultatene av denne forskningen indirekte på at læring av matematikk, som bruker abstrakte enheter representert av generiske symboler, kan legge til rette for læring av naturfag, som bruker mer konkrete enheter.

3.3 David H. Uttal, Linda L. Liu og Judy S. DeLoache

”Taking a hard look at concreteness: Do concrete objects help young children learn symbolic relations?”

Evnen til å forstå og manipulere symboler er en av de viktigste milepælene i menneskets utvikling. Symboler gjør at vi tenker på ideer og konsepter etter at de slutter å være direkte oppfattet. Symbolsystemer som språk formidler informasjon til andre, slik at læring skal skje uavhengig av direkte persepsjon eller erfaring. Symboler som tall hjelper oss å manipulere fysiske størrelser, noe som gjør det mulig å utføre operasjoner på abstrakte representasjoner av mengder. Gitt betydningen av symboler, er det ikke overraskende at mye forskning har vært viet til å forbedre barns forståelse av symboler. Utviklingspsykologer har vanligvis karakterisert yngre barns tanker som relatert til "her og nå" og viser til at når barn blir eldre er de i stand til resonnementer utover deres direkte erfaring (Bruner, 1966; Piaget, 1951; Vygotsky, 1934/1962, Werner & Kaplan, 1963).

Ideen om konkret forut for abstrakt tenkning ligger i hjertet av mange fremtredende teorier om utvikling. Antakelsen om at små barns tenkning fokuserer på konkrete egenskaper har ført til ytterligere antakelser om barns forståelse av symboler. Ved hjelp av konkrete objekter i undervisningen er barn ment å øve på å tenke objekter sett bort fra deres fysiske virkelighet, og å legge grunnlaget for evnen til å bruke å forstå abstrakte symboler. Bruner (1966) beskrev denne opplæringsprosessen som å lære og "tømme” begrepets konkrete sensoriske egenskaper for å gripe de abstrakte egenskaper".

I denne artikkelen argumenterer forfatterne for et annet perspektiv på rollen konkreter har for barns tenkning. Det kan være en forenkling å se på utvikling av barnas tidlige tenkning som fra konkret til abstrakt, og i hvilken grad gjenstander er egnet for instruksjon av små barn kan være overvurdert. Forfatterne stiller spørsmål om konkrete materialer nødvendigvis øker barnas forståelse av symboler og abstrakte begreper. Videre foreslår de at konkreter er et tveegget sverd; Konkreter kan hjelpe små barn til å oppdage symbolske relasjoner, men kan også gjøre det vanskeligere for dem å forstå abstrakte begreper som representeres av symbolske objekter. Til støtte for denne påstanden går forfatterne gjennom forskning på barns forståelse av symbolske forbindelser i flere domener. De begynner imidlertid med en kort diskusjon av det tradisjonelle teoretiske grunnlag for å anta at konkreter er av største betydning i utviklingen av små barns forståelse av symbolske forbindelser. Forfatterne ser også gjennom arbeidet til noen teoretikere som har utfordret denne antakelsen.

Symboler og generell kognitiv utvikling:

Tanken på at barna best forstår symboler gjennom konkrete objekter er avledet delvis fra arbeidet til mange klassiske utviklingsteoretikere. Tilegnelse av symbolsk kompetanse ses på som en prosess fra konkret til abstrakt. Utviklingen av tenkning er først forankret i den konkrete virkelighet, og siden er tenkningen ikke hemmet av kontekst. Sigel (1993) beskrev denne utviklingsmessige progresjonen som barnets forsøk på ”å skille seg selv mentalt fra det pågående her og nå, projisere seg for et mer abstrakt nivå, for deretter å transformere den mottatte kommunikasjonen i et symbol – eller - tegnsystem ”. Resultatet av denne progresjonen er at begrepene hos eldre barn er ikke lenger er direkte, ikoniske fremstillinger av deres opprinnelige møte med konkrete forekomster av et objekt, de er abstraksjoner basert på den opprinnelige stimulus. Følgelig har utviklingen ofte blitt karakterisert som barnas kamp for å overskride sitt grunne og kortsiktig syn på verden (Bruner, 1966; Piaget, 1951; Werner & Kaplan, 1963). Ideen om at små barns tenkning er basert på konkrete konsepter er gjennomgående i nesten alle klassiske teorier om kognitiv utvikling generelt, og symbolsk utvikling spesifikt. Inhelder og Piaget (1955 og 1958) blant andre, vurderte det å bruke abstrakt, hypotetisk informasjon uten referanse til mer konkret informasjon, til å være et kjennetegn på den kvalitative formell-operasjonelle resonnering. Evnen til å utføre logisk deduktiv resonnering fra falske påstander (dvs. uavhengig av virkeligheten) er en test av typen abstrakt tenkning karakteristisk for Piagets stadium av formelle operasjoner. Gitt et sett med utsagn som "Hvis mus er større enn hunder og hunder er større enn elefanter," har små barn vanligvis problemer med å gjøre den riktige deduksjon "da er mus er større enn elefanter." Siden ingen av disse relasjonene eksisterer i virkeligheten, står små barna uten et konkret grunnlag for å resonnere og løse problemet (Moshman & Franks, 1986).

Det er barns forsøk på å stole på kjente, ekte relasjoner mellom enheter som gjør kontrafaktiske resonnementer spesielt vanskelig for dem. Når barn tenker på en ekte mus og en ekte hund, har de problemer med mentalt å snu den vanlige størrelsesrelasjonen mellom dem. I samsvar med dette har Dias og Harris (1988, 1990) vist at små barn gjør det bedre når kontrafaktiske ressonneringsoppgaver er presentert på en ”late – som - måte” snarere enn på en bokstavelig måte. For eksempel presenterte de barn for par av premisser som tydelig krenket barnas kunnskap om den virkelige verden: "Alle katter bjeffer" og "Rex er en katt." Dias og Harris fant at barn oftere svarte riktig "ja" på spørsmålet, ”Bjeffer Rex?" da de først ble bedt om å late som de var på en annen planet eller når eksperimentator presenterte premissene med "liksom -intonasjon." I enkelte situasjoner blir barns konkrete syn på den virkelige verden er et hinder for deres evne til å utføre abstrakte resonnementer. I studier av tidlig kategorisering beskrev Bruner, Goodnow, og Austin (1956) utvikling av begreper som perseptuelt - konseptuell. Barn tenker først på objekter bare i forhold til egenskaper som er direkte tilgjengelig, men kan senere begynne å vurdere objektenes abstrakte egenskaper. Barn kan for eksempel først kategorisere fugler og flaggermus sammen fordi de oppfatter den viktigste felles funksjonen å være flygende skapninger. Etter hvert blir barn oppmerksom på det abstrakte grunnlaget i kategoriene. For eksempel innser de at ikke bare at fugler og flaggermus hører hjemme i egne kategorier, men at pingviner som ikke kan fly for eksempel hører til i fuglekategorien.

I henhold til dette synet lærer barn å stole mindre på konkrete fysiske attributter for kategorisering og mer på den underliggende strukturen av kategoriene. Tilsvarende utvidet Vygotsky ideen om konkrethet gjennom to linjer av studier. Først introduserte Vygotsky begrepet situasjonell tenkning. Han mener at barn viser et skifte i hvordan de klassifiserer objekter. Tematiske kategorier som for eksempel bie og honning, fanger flyktige, men viktige relasjoner mellom objekter i en felles innstilling i stedet for dypere struktur som definerer de systematiske relasjoner mellom objekter av like slag. Progresjon til taksonomisk kategorisering som for eksempel bie, fly og gresshoppe krever at barnet avviser viktige trekk fra objektene i favør av de dypere likhetene. I andre del av studien foreslo Vygotsky at barn lærer å vurdere dypere likheter mellom objekter gjennom lek. Han viste til at når barn leker, finner de ofte en erstatning av konkrete objekter for objekter i den virkelige verden (for eksempel en stokk til en hest). Han antar at disse konkrete objektene i hovedsak tjener som symboler fordi leken stripper dem fra deres typiske identitet. Dermed blir barn i stand til å se det fysiske objektet som adskilt fra sin abstrakte betydning eller identitet.

Ideen om å gå fra det konkrete til det abstrakte har også blitt brukt til utvikling og forståelse av symboler. Werner og Kaplan (1963) begrepsfestet utvikling som et helhetlig til analytisk skifte der små barn først ivaretar fysiske og kjemiske stimuli fra miljøet. Senere blir disse omgjort til stimulustegn eller signaler av barnet i utvikling. Dersom for eksempel små barn blir presentert for tallet "3" kan de feste seg ved konkrete egenskaper ved stimulus for eksempel, tretallets krumning og symmetri. På den annen side, ville eldre barn sannsynlig være i stand til å analysere eller fokusere på dypere, abstrakte symbolske betydningen av tallet.

Implikasjoner ved konkret til abstrakt skifte:

Teoretikere som foreslår et konkret til abstrakt skifte, tar ikke nødvendigvis til orde for et rigid, dikotomt syn på tidlig versus senere utvikling. Dessverre er det slik at denne forenklede antakelsen ofte har gjort at yngre barn drar nytte av, og faktisk krever konkret instruksjon. Ball (1992) mente som følge av dette at konkreter i seg selv er bra, og at abstrakter er ikke hensiktsmessig for unge elever. Konkreter har dermed kommet til å bli ansett som et universalmiddel for å bedre små barns læring av abstrakte symboler og begreper. Lærere har ofte antatt at abstrakt eller symbolsk informasjon best kan kommuniseres ved å gjøre informasjonen konkret. Forskere har i det senere blitt skeptiske til å ta den pedagogiske verdien av konkreter for gitt. Forestillingen om et rigid konkret til abstrakt skifte har stadig blitt utfordret ettersom forskning viser at yngre barn ikke drar nytte av konkreter så mye som tidligere antatt (Simons & Keil, 1995; Uttal, Scudder, og DeLoache, 1997). Teorier som støtter utvikling fra konkret til abstrakt antar vanligvis ikke bare at konkret tenkning går forut abstrakt tenkning, men at det utelukker det. Simons og Keil (1995) gikk så langt som å foreslå at barns kognitive utvikling muligens faktisk prosesserer i et abstrakt - til- konkret skifte. De hevdet at barn først kan lære å lage kausale forklaringer av hendelser på et abstrakt nivå, fordi de mangler spesifikke fysiske kunnskaper om hendelsene. Et eksempel: Barn som forklarer funksjonen til et kamera kan beskrive dets evne til å fange "korte fragmenter” av virkeligheten, men kan ikke formidle en mekanistisk forståelse for hvordan lyset kommer inn i objektivet og hvordan de ulike delene i kameraet samhandler. Med andre ord kan barn i sine tidligste årsaksforklaringer være generelle og abstrakte fremfor konkrete fordi de mangler domenespesifikke kunnskaper som kreves for å beskrive de spesifikke komponentene i kameraet. Simons og Keil (1995) sammenfattet sitt synspunkt om at, «selv om uvitenhet om fysiske komponenter i et system kan være til hinder for en konkret forklaring på systemets oppførsel, er det fullt mulig å generere en prinsipiell, abstrakt forklaring uten noen kunnskap om de fysiske komponenter". Dermed understrekte de at selv om små barns forklaringer er abstrakte, er de ikke uvitende. Lignende argumenter for små barns evne til å tenke i abstrakte termer ble presentert av Gelman og Wellman (1991). De foreslo at barn forstår at enkelte objekter har en indre "essens" som er forskjellig fra det ytre ved objektene. Som Simons og Keil (1995), hevdet de at denne forståelsen kan eksistere i fravær av detaljert vitenskapelig forståelse av essensen. Gelman og Wellman testet barnas forståelse av skillet mellom "innside - utside" ved å bruke en kategoriseringsoppgave. Barn ble presentert for gjenstander hvor de enten kunne velge det paret som har samme utside (for eksempel en appelsin og en oransje ballong) eller par som deler den samme innsiden (for eksempel, en appelsin og en sitron). I motsetning til ideen om at konkrete objekter utøver primær innflytelse på barns objektkategorisering, fant de at barn så unge som tre år korrekt kunne rapportere om at appelsiner og sitroner "ser like ut" og at appelsiner og oransje ballonger "deler den samme utsiden". Små barns forståelse av objektene er dermed ikke nødvendigvis bundet til det eksterne utseende. Gelman og Wellman argumenterte for at barns forståelse av skillet mellom innside og utside viser at de ikke åpenbare og abstrakte objekters egenskaper også er tilgjengelig for barn. Deres funn understreket behovet for å stille spørsmål ved den ukvalifiserte karakterisering av små barns tenkning som konkret.

Vanskeligheten som barna har i å oversette konkrete representasjoner av gjenstander til abstrakt kunnskap er oppsummert av Ball (1992) som sier at konkrete objekter ikke kan garantere forståelse av abstrakte begrep. I tråd med dette synet bemerket Sigel (1993) at oppnåelsen av abstrakte representasjoner krever at barna er aktive agenter i å skape dem. Sigel foreslår at ”barn oppnår abstrakte representasjoner av objekter gradvis gjennom handlinger som distanserer, eller som separerer barnet kognitivt fra det umiddelbare atferdsmessige miljøet". Disse distanseringshandlingene hjelper barn å forstå at symboler står for referansegrupper ved å kreve at barn danner mentale representasjoner som er abstrakte, mer enn håndgripelige. Med andre ord er oversettelse av abstrakt kunnskap fra konkrete uttalelser ikke uunngåelig.

I prosjektet beskrevet under, ville forskerne Uttal, Liu og DeLaoche spesielt utforske symbolsk utvikling gjennom et sett med oppgaver designet for å tappe barnas forståelse av symbol - referent- relasjoner. Vanskelighetene barna har i å fullføre disse oppgavene kaster lys over spørsmålet om konkrete objekter faktisk legger til rette for barns læring av symbolske forbindelser.

Barns bruk av skalamodeller:

Mye av forskernes arbeid har fokusert på barns forståelse av skalamodeller brukt som symboler. Denne typen symbol, og de oppgavene barna blir bedt om å utføre har flere fordeler i forhold til å arbeide med svært små barn. Resultatene har implikasjoner som strekker seg til barns forståelse av andre typer symboler. Resultatene av flere studier indikerer tydelig at forholdet mellom hvor konkret et symbol er, og dets virkning på barns forståelse av symbolske forhold er langt mer kompleks og interessant enn tidligere antatt. Den grunnleggende oppgaven forskerne har brukt er ganske enkel: Barn blir bedt om å bruke en modell for å finne en leke som er gjemt i rommet modellen representerer. I de fleste versjoner av oppgaven, ser modellen ut som rommet. Veggene har de samme fargene, modellen og rommet er innredet med svært like, og riktig skalerte møbler i samme romlige ordninger. For eksempel er det en miniatyrsofa i modellen, en sofa i fullstørrelse i rommet og begge er dekket med samme tekstiler.

Oppgavene startet med en omfattende orientering som ble utviklet for å hjelpe barna å begripe forholdet mellom modellen og rommet. Først viste eksperimentator barna de to lekene som ville bli skjult. En av lekene var en miniatyr hund, som het "Lille Snoopy", den andre var en hund i full størrelse som ble kalt "Store Snoopy". Eksperimentator viste barna sammenhengen mellom modellen og rommet. Eksperimentator sa: "Dette er Store Snoopys store rom. Store Snoopy har mange ting på rommet sitt." Deretter navnga eksperimentator alle møblene og gjenstandene, og viste barna modellen. «Dette er Lille Snoopys lille rom. Han har alle de samme tingene på rommet sitt som Store Snoopy. Eksperimentator benevnte igjen alle møbler og elementene og pekte ut korrespondanse mellom hvert element i modellen, og det tilsvarende element i rommet. For å gjøre dette bar eksperimentator hvert element fra modellen inn i rommet. Miniatyrmøblene ble plassert ved siden av tilsvarende møbler i det store rommet med forklaring som ” Se, dette er Store Snoopys store sofa, og her er Lille Snoopys lille sofa. De er helt like”. Deretter forsøkte eksperimentator å kommunisere at det var en sammenheng mellom handlinger i modellen og handlinger i rommet. Eksperimentator fortalte at Store Snoopy og Lille Snoopy liker å gjøre de samme tingene. "Når Store Snoopy sitter på stolen sin, pleier Lille Snoopy også å sitte på stolen sin”.

Eksperimentator illustrerte også korrespondanse ved å plassere lekene på aktuelle steder modellen og i rommet.

Den siste delen av orienteringen involverte et forsøk hvor et leketøy ble plassert på et sted i enten modellen eller rommet, og barnet ble bedt om å plassere tilsvarende leketøy i riktig plassering i den tilsvarende lokasjonen. For eksempel plasserte eksperimentator Lille Snoopy på bordet i modellen og sa, "Lille Snoopy sitter på bordet sitt. Kan du sette Store Snoopy på samme sted på sitt rom?"

Testen fulgte umiddelbart etter orienteringen. På hver av enkelttestene gjemte eksperimentator først leken på ulike gjemmesteder i modellen. Eksperimentator påkalte barnets oppmerksomhet idet han gjemte leken ved å si ”Se, nå legger Lille Snoopy seg her”. Barna ble fortalt at en assistent skulle gjemme Store Snoopy på samme sted i det store rommet. Eksperimentator og barnet entret deretter rommet, og barnet ble bedt om å finne Store Snoopy. På hvert forsøk forsøkte eksperimentator å minne barnet om forholdet mellom modellen og rommet ved å si: "Husk, Lille Snoopy gjemmer seg på samme sted som Store Snoopy." Hvis barnet ikke kunne finne den leken, ble hun eller han oppmuntret til å fortsette å søke på andre steder, og eksperimentator minnet barnet igjen om at leken var på "samme sted" som den andre leken. Økende grad av eksplisitte hint ble gitt frem til leketøyet ble funnet, men et søk ble regnet som korrekt bare dersom barnet fant leketøyet på det første stedet som han eller hun søkte.

Etter at barnet hadde funnet leketøyet på hver test, ble hun eller han brakt tilbake til modellen, og ble bedt om å finne igjen miniatyrleketøyet. Dette søket ga en minnesjekk som var kritisk for å tolke eventuelle vanskeligheter barna kan ha hatt med å finne leken i rommet. Dersom barna var i stand til å finne miniatyrleketøyet i modellen, så kunne vanskeligheter som de hadde med å finne leketøyet i rommet ikke tilskrives ”å glemme” hvor leken var i modellen. I stedet ville de som hadde vanskeligheter reflektere at de ikke forsto at plasseringen av miniatyrleketøyet i modellen (symbolet) kunne brukes til å finne de større lekene i det store rommet (referenten).

Flere aspekter av denne oppgaven er viktige når det gjelder konkreters rolle i barns innsikt i symbol – referentrelasjoner. Det første viktige er at modellen er et konkret objekt (eller sett av objekter). Symbolene som er involvert i oppgaven er konkrete. Selve modellen, og møblene i modellen, er håndgripelige, manipulerbare kopier av større virkelige objekter. Dermed kan hvert element både være et reelt objekt og en symbolsk representasjon av noe annet enn seg selv.

For det andre forutsetter vellykkede resultater at barnet forstår å bruke et symbolsk forhold - forholdet mellom modellen og rommet. For å løse oppgaven, må barnet forstå at plasseringen av leken i modellen angir plasseringen i rommet. Det konkrete ved modellen er nyttig for barna bare hvis det hjelper dem å forstå istedenfor - forholdet mellom modellen og rommet.

For det tredje kreves det at barna løser en tilsynelatende kjent oppgave (søker etter en leke) på en ny måte. Vanligvis leter små barn etter skjulte objekter basert på tidligere erfaring. Som voksne leter de ofte der hvor de sist så objektet (DeLoache & Brown, 1983). For å løse denne oppgaven må barna legge til side denne innøvde strategien og i stedet stole på den informasjon et symbol gir. Modelloppgaven gir oss dermed mulighet til å undersøke barnas første bruk av et nytt symbol system.

Resultatene av denne forskningen på barns bruk av modeller fører til en sentral konklusjon: Barns suksess er avhengig av hvordan de forstår at modellen er en symbolsk representasjon av det arealet som den representerer. Når denne forståelsen er tatt bort (for eksempel ved å sette inn en 5-minutters forsinkelse), har ikke barna grunnlag for å bruke modellen. Selv om modellen er en svært konkret representasjon av rommet, er det ikke nok til å sikre suksess. Håndgripelighet kan hjelpe barn til å se likheten mellom det tilsiktede symbolet og den tiltenkte referenten, men å oppfatte denne likheten alene er ikke nok. Barn må fortsatt finne den "som er istedenfor" - forholdet mellom et objekt og et annet. Konkrethet og håndgripelighet alene vil ikke sikre at barn forstår denne sammenhengen.

Forklare barns opptreden: Hypotesen om dobbel representasjon:

Hvorfor er små barns forståelse av forholdet mellom modellen og rommet så skjør? Resultatene av disse studiene tyder ironisk nok på at konkretheten av modellen er en del av problemet. Resultatene tyder på at konkrete objekter som er interessante og attraktive som objekter faktisk kan være vanskeligere for små barn å bruke som symbolske representasjoner enn materialer som er mindre interessante som objekter i seg selv. Denne tolkningen fremhever den doble natur påvirkning av konkreter har på barns prestasjoner. Mens konkrethet kan hjelpe barn til å oppfatte likheter mellom symboler og deres referansegruppe, kan det også gjøre det vanskeligere for dem å tenke på et symbolsk forhold mellom de to. En skalamodell som den som brukes i oppgaven beskrevet over, har en dobbel natur. Den er både et symbol og et objekt (eller sett av objekter) med en svært høy grad av fysisk fremtoning. For å bruke en modell som et symbol, må barna inneha egenskapen *dobbelt representasjon* (DeLoache, 1989, 1995 og Uttal et al. 1997). De må representere selve modellen som et objekt, og samtidig som et symbol for det den representerer.

I modelloppgaven må barnet danne en meningsfull mental representasjon av modellen som et miniatyrrom hvor lekene kan være skjult og funnet, og barnet må samhandle fysisk med det. Samtidig må barnet representere modellen som et begrep i et abstrakt, "istedenfor"- forhold, og han eller hun må bruke forholdet som et grunnlag for å trekke slutninger. Ifølge den doble representasjonshypotesen (DeLoache, 1989, 1995) er det slik at jo mer fremtredende et symbol er som et konkret objekt, desto vanskeligere er det å forstå det som et symbol for noe annet enn seg selv. Jo mer tiltrukket små barn er av en modell som et interessant objekt, jo vanskeligere blir det for dem å oppdage dets forhold til rommet det representerer. Den doble representasjonshypotesen fører til flere interessante spådommer. For eksempel tyder det på at faktorer som reduserer barnas oppmerksomhet til modellen som et interessant objekt bør øke barnets syn på modellen som et symbol.

I en studie ble to og et halvt år gamle barns tilgang til modellen redusert ved å plassere den bak et vindu (DeLoache, 1998). Barna kunne fortsatt se plasseringen av leketøy i modellen, men de kunne ikke ha direkte kontakt med modellen. Denne manipulasjonen førte til bedre ytelse. Faktorer som øker barnas oppmerksomhet til modellen som et objekt skal føre til en nedgang i bruken av modellen. Denne forutsigelsen ble bekreftet. Å la tre år gamle barn leke med modellen i 5 til 10 minutter før de ble bedt om å bruke den som et symbol førte til en reduksjon i ytelse når barna ble bedt om å bruke modellen til å finne leken i rommet (DeLoache, 1998).

Et annet funn som støtter den doble representasjonshypotesen gjelder barns bruk av fotografier, istedenfor modellen for å finne leken fysisk. To og et halvt år gamle barn, som ofte gjør det svært dårlig i standard modelloppgaven, utfører oppgaven mye bedre når et fotografi blir substituert for modellen (DeLoache, 1991; DeLoache & Burns, 1994). Et fotografi kan en anses som mindre konkret enn en modell, da modellen er en tredimensjonal representasjon, mens bildet er todimensjonalt. To og halvt - åringene gjorde det bedre med et fotografi enn barn på samme alder gjorde med modellen. Disse resultatene tyder på at et konkret objekt som en modell, kan være vanskeligere å bruke enn et fotografi som er mindre konkret.

Dessverre har forskning ikke bekreftet de forventede fordelene ved effektiv bruk av manipulasjonsobjekter. Flere studier har vist, i beste fall inkonsekvente eller svake fordeler for manipulasjonsobjekter i forhold til mer tradisjonelle teknikker for å lære barn matematikk (Hall, 1992; Resnick & Omanson, 1987; Wearne & Hiebert, 1988). Longitudinelle og intensive studier på bruken av manipulasjonsobjekter i klasserom har vist at barn ofte ikke klarer å etablere forbindelser mellom manipulasjonsobjekter og informasjon som manipulasjonsobjekter er ment å kommunisere (Sowell, 1989). Forskerne i denne artikkelen tror at noe av grunnen til at manipulasjonsobjekter har vært mindre vellykket enn håpet kan ligne på problemer som svært like de som yngre barn møter når du bruker en skalamodell. Det er minst to generelle likheter mellom det som er krav som stilles for å lykkes i modelloppgaven og hva som kreves for å kunne bruke et manipulasjonsobjekt. For det første er det mulig at forholdet mellom et manipulasjonsobjekt og hva det er ment å representere, ikke er transparent for små barn. Konkretheten på et manipulasjonsobjekt eller på modellen, garanterer ikke at barn vil forstå at det er ment å representere noe annet enn seg selv. Modellen er ekstremt konkret, og foreldre blir overrasket når det viser seg hvor vanskelig oppgavene er for intelligente, interesserte barn. Den andre likheten mellom barns vansker med vår modell og med manipulasjonsobjekter er at dobbelt representasjon er relevant for begge. Modellen som manipulasjonsobjekt har en dobbel natur. Den er ment å bli brukt som representasjon av rommet, men den er også et objekt i kraft av seg selv. I neste avsnitt går forfatterne gjennom en del vanskeligheter barn møter når de bruker manipulasjonsobjekter. Dette er vanskeligheter som er parallelle med yngre barns problemer med skalamodellen og som er i tråd med den doble representasjonens perspektiv.

Anvendelse av hypotesen om dobbel representasjon og symboler:

Forfatternes perspektiv på den doble natur ved symbolske representasjoner kan kobles direkte til andre typer symboler, inkludert de som vanligvis brukes i amerikanske klasserom. Ideen om at konkrete representasjoner er det som best fremmer små barns læring er svært populært i tidlig skolegang. Ett domene hvor forfatternes perspektiv er direkte relevant er tidlig matematikkdidaktikk. Full kompetanse i matematikk krever beherskelse av komplekse begreper som addisjon og subtraksjon i tillegg til mestring av symbolene som brukes til å representere disse begrepene. Lærere og forskere har bemerket i mange år at ingen av delene er en enkel oppgave for små barn. For det første kan begreper være vanskelig å forstå for små barn hvis de ikke forstår symbolene som brukes til å representere disse begrepene. For det andre er symboler vanskelig å undervise barn som mangler en forståelse av begrepene symbolene representerer. Betydelig innsats har vært viet til å gjøre de første erfaringer innen matematikken mer interessant og mer meningsfylt for små barn (Hiebert & Carpenter, 1992; Stevenson og Stigler, 1992).

Mange forsøk på forbedring har involvert det som ofte kalles manipulativer. Dette er konkrete, håndgripelige objekter som pinner og blokker som brukes til å representere matematiske begreper eller symboler. Barn oppfordres til å jobbe med matematiske problemer med manipulasjonsobjekter ved å kombinere enheter eller grupper av manipulasjonsobjekter og representere deler av problemene. Den teoretiske begrunnelsen for bruk av manipulasjonsobjekter er utledet fra den mer generelle oppfatningen om den iboende betydningen av konkreter i tidlig læring. Håpet har vært at barn ved hjelp av konkrete objekter kan lære implisitte eller uformelle matematiske begreper som ellers ville være utilgjengelige. For eksempel kan barn få implisitt innsikt om begrepet divisjon ved å dele en kake eller godteri mellom seg. Læreren kan da få barna til å gjenskape denne prosessen i klasserommet gjennom bruk av manipulasjonsobjekter. Argumentet har vært at manipulasjonsobjekter gir lærere og barn en ”vei rundt” den tilsynelatende ikke-transparente funksjonen matematiske symboler har. Manipulasjonsobjekter har vært løsningen for barn i et bredt spekter av aldre og ferdighetsnivåer (Kennedy & Tipps, 1994; Tooke, Hyatt, Leigh, Synder, & Borda, 1992). Manipulasjonsobjekter har blitt innarbeidet i læreplanen for National Council of Teachers of Mathematics:

Barn forstår betydning av tall gradvis. For å oppmuntre til videre forståelse kan lærerne tilby opplevelser i klasserommet der elevene først manipulerer fysiske objekter og deretter bruker språket for å sette ord på sin tenkning. Dette aktive engasjement i og uttrykk for fysiske manipulasjoner oppfordrer til å reflektere over sine handlinger, og å til å konstruere sin egne meninger. I alle situasjoner skal arbeidet med tallsymboler på en meningsfull måte knyttes til konkrete materialer. (1989, p. 38) (1989, s. 38.)

Dessverre har som nevnt ikke forskning på bruk av manipulasjonsobjekter bekreftet de forventede fordelene. Longitudinelle og intensive studier på bruken av manipulasjonsobjekter i klasserommet har vist at barn ofte ikke klarer å etablere forbindelser mellom manipulasjonsobjekter og informasjon som manipulasjonsobjektene er ment å kommunisere (Sowell, 1989). Forfatterne tror at en del av årsaken til at manipulasjonsobjekter har vært mindre vellykket enn ønsket, kan sammenlignes med problemene som de yngre barna møter når de bruker en skalamodell. Det er minst to generelle likheter mellom modelloppgaven og hva som kreves for å bruke et manipuleringsobjekt på en effektiv måte. Den første likheten er at forholdet mellom et manipuleringsobjekt og hva det er ment å representere, muligens ikke er transparent for små barn. Konkretheten på manipuleringsobjektet, eller på modellen garanterer ikke at barn forstår at det er ment å representere noe annet enn seg selv. Modellen er som nevnt ekstremt konkret, og oppgavene er vanskelige for intelligente og interesserte barn. Forfatterne tror at liknende problemer kan oppstå når eldre barn blir bedt om å bruke manipulasjonsobjekter. For læreren kan forholdet mellom manipuleringsobjekter og et mer abstrakt begrep være enkle og direkte. Men forholdet kan være ukjent for små barn, særlig hvis forholdet ikke er påpekt eksplisitt. Den andre likheten mellom barns vansker med modellen og med manipulasjonsobjekter er at dobbelt representasjon er relevant for begge. For modellen har manipulasjonsobjektene en dobbel natur. De er ment å bli brukt som representasjoner av noe annet, men de er også objekter i seg selv. I neste avsnitt går forfatterne gjennom en del vanskeligheter barn møter når en bruker manipulasjonsobjekter. Vanskeligheter som er parallelle med yngre barns problemer med skalamodellen og som er i tråd med den doble representasjonen perspektiv.

Hva manipulasjonsobjekter er ment å representere:

Fra en lærers synspunkt er målet med å bruke et manipulasjonsobjekt å gi støtte i læring av generelle matematiske begreper. Men dette gir ingen garanti for at barna skal se manipulasjonsobjektene på denne måten. Tidligere arbeid om bruk av manipulasjonsobjekter har dokumentert en rekke eksempler på misforhold mellom lærernes forventninger og elevenes forståelse. Når små barn lærer å utføre matematiske operasjoner ved hjelp manipulasjonsobjekter, kan kunnskap om de to måtene å løse problemene forbli innkapslet. Det vil si at barn ofte ikke klarer å se sammenhengen mellom å løse matematiske problemer via manipulasjonsobjekter og løse de samme eller lignende problemer via abstrakte symboler (se Uttal et al., 1997).

Bevis for at barn ofte ikke klarer å trekke forbindelser mellom manipulasjonsobjekter og mer tradisjonelle former for matematiske symboler kommer fra Resnick og Omansons intensive studier av barns bruk av manipulasjonsobjekter og deres forståelse av matematiske begreper (1987). Resnick og Omanson evaluerte systematisk elever i tredjeklasse sin evne til å løse problemer både med og uten manipulasjonsobjekter. Mye av arbeidet med klosser, som er en systematisk sett av manipulasjonsobjekter som er utviklet for å hjelpe barn å tilegne seg forståelse av titallssystemet. De fleste av barna forsto og så ut til å trives med klossene. Dessverre ble ikke barnas kunnskap om blokkene relatert til deres forståelse av lignende typer problemer uttrykt i mer formelle matematiske termer. Barna mestret ikke å løse de samme problemene med skrift, som de hadde klart med blokkene. For eksempel hadde barna som mestret å bruke klosser til å løse subtraksjonsproblemer som involverer to eller tre sifre, problemer med å løse enklere skriftlige problemer. Faktisk var det slik at barn som hadde best resultat med klossene hadde dårligst resultat på de vanlige oppgavene.

Åpenbart kan ikke manipulasjonsobjekter garantere suksess med skriftlige symboler. Andre forskere har gitt ytterligere bevis for at det ene ikke veier opp for det andre når det gjelder konkrete og mer abstrakte former for matematiske uttrykk. For eksempel undersøkte Hughes (1986) små skolebarns evne til å bruke enkle blokker eller konkreter til å løse addisjon og subtraksjonsproblemer. Det som er mest interessant med denne studien og for denne diskusjonen, er at barna eksplisitt ble bedt om å trekke forbindelser mellom løsninger med konkrete objekter og de som involverer mer abstrakte, skriftlige problemer. Barna ble bedt om å bruke konkreter til å representere de underliggende konseptene som ble uttrykt i de skriftlige problemene. For eksempel, barna ble bedt om å bruke konkreter til å løse skriftlige problemer, for eksempel ”1 + 7 =?”. Samlet presterte barna dårlig. Uansett om de kunne løse de skriftlige problemer, hadde de problemer med å bruke konkretene. Dessuten viste barnas feil at de ikke klarte å gjøre bruk av klossene de så ikke de skriftlige symbolene som to alternative former for det samme matematiske uttrykk. Mange barn tok instruksjonene bokstavelig og brukte klossene til fysisk " å stave ut" de skriftlige problemene. For eksempel lagde de en linje av konkreter til å representere "1" og to kryssende linjer for å representere "+" og så videre. Disse resultatene markerer igjen at barn kan behandle løsninger med manipulasjonsobjekter og de som involverer skrevet matematiske symboler som kognitivt atskilte enheter.

Forskningen på barns forståelse av manipulasjonsobjekter fremhever også de vilkår hvor manipulasjonsobjekter er sannsynlig å være effektive. Resultatene i flere studier tyder på at manipulasjonsobjekter er mest effektive når de brukes til å forsterke, snarere enn å erstatte instruksjoner som involverer skriftlige symboler. I disse tilfellene har lærere trukket bestemte tilknytninger mellom barns bruk av manipulasjonsobjekter og de relaterte begreper i skriftlig form. Wearne og Hiebert (1988) viste til en studie hvor de fokuserer på brøk. På alle stadier av programmet, trekker læreren spesifikke koblinger mellom rnanipulasjonsobjekter og skriftlig symbolske uttrykk. Manipulasjonsobjektene brukes som en bro til det skriftlige uttrykk snarere enn som erstatning eller råstoff for skriftlige symboler. Manipulasjonsobjektene fungerte som et stillas for læring av skriftlige symboler ved at en gradvis førte barna bort fra de konkrete egenskaper ved manipulasjonsobjektene til de mer ukjente egenskapene til skriftlige symboler. Fokus på dette og lignende vellykkede programmer er på forholdet mellom manipulasjonsobjekter og andre former for matematiske uttrykk.

Bokstaver som et Symbolsystem:

Spørsmålene om barns erverving av symboler er også relevante for den tidlige utviklingen av lesing. Når barn lærer å lese må de mestre forholdet mellom et abstrakt symbolsystem og dets referansegruppe. Forutsetningen om et konkret til abstrakt skifte fører videre til antakelsen om at små barn ville dra nytte av det abstrakte systemet av bokstaver dersom det ble forvandlet til en konkret form som de lettere kunne forstå.

Forskning på symbolsystemer gir ytterligere bevis mot ideen om at konkret og abstrakt tenkning utvikles uavhengig. Å forstå bokstaver er vanskelig fordi bokstaver er ikke-ikoniske symboler. I motsetning piktogrammer, det er ingenting iboende i strukturen av bokstaver som gjenspeiler hva de representerer. Bialystok (1992) foreslo at barn må gi avkall på på de spesifikke perseptuelle egenskapene til objektene for å forstå dem som symboler. Tilegnelsen av symboler fremkommer i tre stadier. Barn lærer først et sett av symboler uten å forstå deres forhold til hva de representerer. For eksempel kan de være i stand til muntlig gjengivelse av en sekvens av symboler (for eksempel telle i en serie eller resitere alfabetet). I den andre fasen har barn en tendens til å anta at forholdet mellom symboler og referansegruppe er ikoniske og analoge. For eksempel kan de tro at ordet "maur" er kortere enn ordet "elefant" fordi maur er mindre enn elefanter. Når barn endelig får full symbolsk kompetanse i Bialystoks tredje etappe, er de i stand til å forstå at symboler kan være ikke-ikoniske og ikke-analoge (for eksempel "bil" er kortere enn "banan", selv om bilene er større enn bananer). Bialystok (1992) viste dermed at tilegnelsen av symboler som bokstaver og tall forekommer i en gradvis prosess i tre trinn, ikke som et brått konkret til abstrakt skifte.

Ifølge hypotesen om dobbel representasjon, kan forsøk på å gjøre alfabetets bokstaver fargerike og engasjerende som objekter avlede oppmerksomheten fra barnet evne til å se bokstavene som symboler. De fysiske egenskaper på bokstavene kan faktisk forvirre symbol - referent forholdet.

Implikasjoner:

Denne gjennomgangen av barns forståelse og bruk av konkrete symboler har flere viktige implikasjoner for bruk av konkrete objekter i pedagogiske sammenhenger. Disse konsekvensene vektlegger at konkrete objekter kan hjelpe små barn til å forstå symbol - referent relasjoner, men at det endelige målet må være å hjelpe barna å forstå mer abstrakte relasjoner.

1. Konkreter er ikke et universalmiddel. Den viktigste konsekvensen av studien er at konkreter alene ikke er tilstrekkelig til å hjelpe barna å lære symbolske relasjoner. Under de rette omstendigheter kan konkrete objekter hjelpe barn å få en første innsikt i symbol -referent relasjoner. Dersom objektene ikke er eksplisitt knyttet til mindre konkrete representasjoner, forblir trolig kunnskap om deres bruk innkapslet. De beste konkrete objekter kan godt være de som er designet for å bli mindre nødvendig eller relevant etter hvert som barn forstår de mer abstrakte representasjonene.

2. Konkreter er et tveegget sverd. Denne gjennomgangen av forskning tyder på at konkreter både kan hjelpe og hindre små barns forståelse av forholdet mellom symbolene og deres tiltenkte referansegruppe. På den ene siden kan konkreter legge til rette for barns bruk av symboler. Konkrete gjenstander får generelt oppmerksomhet og er mer interessant for små barn. For det andre er noen symbol - referent relasjoner mer opplagt med konkrete gjenstander som symboler. For eksempel kan barn ofte løse matematiske problemer med manipulasjonsobjekter før de kan løse tilsvarende problemer med mer abstrakte matematiske symboler. På den annen side kan egenskaper som gjør konkrete objekter interessant for små barn samtidig gjøre dem vanskelig for små barn å overse. Hvis et objekt er for interessant som en gjenstand i seg selv, kan barn få problemer med å bruke den som et symbol for noe annet. Dette tyder på at de beste konkrete gjenstander er de som er interessante nok som objekter for

å engasjere små barns oppmerksomhet, men ikke så attraktive som å gjøre det vanskelig å fokusere på forholdet mellom objektet og det er beregnet referent. Dermed kan faktisk manipulasjonsobjekter som er valgt spesielt fordi de er interessante og attraktive for små barn virke mot sin hensikt.

Observasjoner av konkreter brukt i andre land har støttet ideen om at et godt manipulasjonsobjekt ikke nødvendigvis er iboende interessant. For eksempel i Japan bruker barn samme sett med manipulasjonsobjekter gjennom hele barneskolen. Stevenson og Stigler (1992) har gjennomført flere tverrnasjonale sammenligninger av matematikk prestasjoner i Asia og USA, og har observert følgende: Japanske lærere bruker de samme elementene i regnestykket flere ganger gjennom hele barneskolen. Amerikanske lærere søker variasjon. De kan bruke pinner i én leksjon, M & M's, brikker, eller plastdyr i en annen. Det amerikanske syn er at gjenstander bør varieres for å opprettholde barnas interesse. Det asiatiske syn er at bruk av en rekke figurative materialer kan forvirre barn, og dermed gjøre det vanskeligere for dem å bruke gjenstander for representasjon og løsning av matematikk problemer.

3. Konkrete objekter er ikke en erstatning for instruksjon. Vår gjennomgang viser klart at instruksjonene er en kritisk del av å lære om symbol - referent relasjoner, uavhengig av om symbolene er konkrete eller abstrakte. Forskning på barns bruk av matematiske manipulasjonsobjekter har demonstrert at konkrete gjenstander bistår barnas forståelse av mer abstrakte symboler bare når eksplisitte koblinger er gjort mellom de to formene for symbolske uttrykk. Barn kan ikke forventes å gjøre disse koblinger på egenhånd. Konkrete gjenstander bør betraktes som et potensielt nyttig hjelpemiddel til opplæring, men bare i kombinasjon med god instruksjon og opplæring.

Konklusjoner:

Det å mestre symbolsystemer er en av de viktigste og mest utfordrende oppgaver i barndommen. Det er ikke overraskende at lærere og foreldre har forsøkt å gjøre oppgaven enklere ved å gi barn med sett av konkrete gjenstander som tilsynelatende virker for å gjøre oppgaven med å lære symbol systemer enklere. Til tross for den kritikken som er tatt opp her, menes ikke at bruk avkonkreter for læring av symbol -referent relasjoner er iboende galt. Konkrete gjenstander kan hjelpe små barn, i alle fall til å begynne med for å få innsikt i grunnleggende forhold mellom et symbol og referent. Konkrete gjenstander kan gi et stillas som en forståelse for hvordan mer abstrakte relasjoner kan bygges.

Som diskutert ovenfor oppstår problemene med konkrete objekter bare når konkrete objekter blir brukt som en erstatning snarere enn et stillas, for en forståelse av mer abstrakte symboler. Konkreter som er spesielt attraktive som objekter kan være spesielt skadelig i denne forbindelse, ved å fokusere barnas oppmerksomhet på objektene i seg selv i stedet for på hva symbolene var ment å representere. Det å gjøre konkreter interessant og engasjerende for små barn kan faktisk forringe det endelige målet med å hjelpe barna å forstå relasjonen mellom abstrakte symboler og begreper. I det hele er det viktig å vurdere både fordeler og ulemper ved å bruke konkrete gjenstander for å hjelpe barn å lære symbolske relasjoner.

3.4 Snorre Ostad

”Hvorfor har barn matematikkvansker? Et streiftog i ukjent landområde”

Ostad hadde frem til 1990 i en rekke år foretatt systematisk registrering av sine erfaringer knyttet til elever med spesifikke matematikkvansker. En av hans oppgaver var å diagnostisere elevene i faglig utvikling. De første årene var Ostad sitt arbeid preget av tradisjonelle metoder, med stor vekt på systematikk og konkretisering ved hjelp av helkonkret materiell. Resultatene av arbeidet viste imidlertid ikke til forventningene. En sterk og ensidig bruk av konkreter syntes å bidra til at prestasjonsforskjellen mellom de flinkeste og de svakeste elevene ble større og større.

I matematikk vil bruk av konkreter vurderes ut fra kriterier som knytter seg til overføring. Ostad stiller to spørsmål i denne sammenhengen. ”Resulterer bruk av helkonkret materiell i at eleven får tankeredskaper som funksjonelle i forhold til andre lignende oppgaver hvor eleven også har anledning til å benytte helkonkret materiell?” Dette benevnes som den horisontale dimensjonen (dvs. fra helkonkreter til tilsvarende helkonkreter, eller fra symboler til tilsvarende symboler). I matematikk som er preget av rene symboler er det like aktuelt å stille spørsmål om arbeidet med helkonkret materiell resulterer i at eleven får tankeredskaper som er funksjonelle i den vertikale dimensjonen. Den vertikale dimensjonen vil si at arbeid med helkonkreter fører til gode tankeredskaper i arbeidet med symboler.

Behandlingsopplegget nevnt ovenfor viste nedslående resultater. De positive effektene viste seg spesielt i den horisontale dimensjonen hvor elevene ble bedre i å løse matematikkoppgaver ved hjelp av konkreter. Når det gjelder den vertikale dimensjonen var overføring av læring svak, eller direkte negativ. Det var slik at behandlingsopplegget muligens bidro til å forsterke elevenes problemer innenfor sentrale emner innen faget. Dette var spesielt i arbeidet med rene symboler når elevene ikke lenger fikk benytte helkonkreter som hjelpemidler.

Elevenes vansker i matematikkfaget syntes ikke å være et resultat av at elevene hadde for få konkrete erfaringer. Problemet var heller at bruk av konkreter ikke syntes å resultere i læring i den vertikale dimensjon for elever med matematikkvansker.

Da dette innlegget ble publisert i 1990 var resultatene overraskende og uventet. Ostad skriver at disse funnene i forhold til tidligere forskning hvor effekten av konkreter er positiv, neppe er realiteten. Ostad hevder videre at den systematiserte registreringen av erfaringer i arbeidet med elevene gir en bekreftelse på at arbeid med konkretisering bør ha en plass i matematikkopplæringen. Det er imidlertid viktig å tenke på hvordan er bruker konkretisering. Å satse ensidig på konkreter synes ikke være hensiktsmessig for elever med matematikkvansker. Ostad stiller spørsmål om en kan oppnå en større grad av positiv overføring dersom den tradisjonelle helkonkretiseringen følges opp av systematisk avkonkretisering. Avkonkretisering blir av Ostad (1988) beskrevet som en prosess der man gradvis fjerner karakteristiske kjennetegn ved konkretene slik at de fysiske representasjonene stadig blir mindre konkrete. I denne undersøkelsen var de fysiske representasjonene taktile representasjoner påtenkt blinde barn, men det kan trekkes paralleller til andre typer konkrete representasjoner. I intervallet mellom helkonkreter og rene symboler finner vi konkreter i ulik grad som er en del av avkonkretiseringen. Som en konsekvens av dette ble oppmerksomheten rettet mot hvordan disse elevene benytter de konkrete erfaringene som redskaper for tenkningen og får mer og mer symbolsk karakter.

Ostad har ulike hypoteser om forestillingers funksjonalitet. Han skriver blant annet at forestillingenes funksjonalitet er en funksjon av forestillingenes tyngdeperspektiv, og forestillingenes rigiditetsperspektiv. En tung forestilling er i følge Ostad preget av stor likhetsgrad med den tilsvarende sanseerfaringen, eller virkeligheten, og bærer med seg alle egenskapene som er representert ved for eksempel farge, form, tykkelse, høyde, lengde og antall. En lett forestilling er derimot preget av liten likhetsgrad med den tilsvarende sanseerfaringen, og har derfor representasjonspreg (jamfør punkt 1.3.2). Forestillingen inkluderer få elementer og er ”lett” fordi den har kvittet seg med de fleste egenskapene fra sanseerfaringen. En utpreget rigid forestilling har i følge Ostad en statisk struktur. Forestillingene bærer preg av å være rene hukommelsesbilder, der enkeltegenskapene er sterkt knyttet til den tilsvarende sanseerfaringen i motsetning til en forestilling som er dynamisk i bruken.

Ostad tenker det muligens ikke har vært nok fokus på forskning knyttet til arbeid med rene tall og symboler. Han mener også at det er avgjørende at en ikke har maktet å utforme årsaksteorier på en slik måte at de har latt seg operasjonalisere i forhold til praktiske behandlingsopplegg.

Ostad tenker at bruk av konkreter som årsak til elevers vansker i matematikk kan forklares på flere måter. Skyldes dette erfaringene som elevene høster i slik opplegg? Eller skyldes det at andre og mer relevante erfaringsformer får for lav prioritering? Dette undersøker han videre i MUM- prosjektet.

3.5 **Evelyn J. Sowell**

"Effects of manipulative materials in mathematics instruction"

Ved bruk av meta-analyse og resultatene av 60 studier som er kombinert og sammenslått har effektiviteten av matematikkundervisning med manipulative materialer blitt undersøkt. Elever rangert etter alder fra barnehage til høyskole er studert, og studien tar også for seg varierte temaer innenfor matematikk. Resultatene viser at matematisk fremgang øker gjennom langvarig bruk av konkrete instruksjonsmaterialer og at studenters holdninger til matematikk øker i positivitet når de har undervisning med konkreter, forutsatt at læreren har kunnskaper om bruken av dem. Undervisning med bilder og diagrammer ser ikke ut til å avvike i effektivitet fra undervisning med symboler.

Undervisning med manipulative materialer har en lang historie. På nittenhundretallet, anfektet Pestalozzi bruken av dem, og manipulative materialer var inkludert i lærerplanene i 30-årene. På 60-tallet begynte den virkelige vektleggingen av bruk av konkrete objekter, og billedlige representasjoner ble en del av matematikkundervisningen. Gjennom 60- og 70-tallet, sammenlignet forskere utfall av undervisning med bruk av konkreter eller billedlige materialer, sammenlignet med utfallet av undervisning uten slikt materiell. Resultatene var ofte blandet. Noen sammenligningsfunn favoriserte de som brukte konkreter, mens andre mente de som ikke brukte konkreter ga bedre resultater. Meningen med denne studien er å integrere funnene fra forskning i forhold til effektiviteten av elevers fremgang og holdninger til å bruke manipulative materialer i matematikkundervisning. Manipulative materialer inkluderer både konkrete og billedlige representasjoner i denne studien.

Relaterte tester:

Noen tidligere tester på manipulativer summerer enkelt og greit funnene, og etterlater leseren til å tegne sin egen konklusjon av resultatet (Beougher, 1967; Brousseau, 1973; Fitzgerald, 1972; Kieren, 1969). Andre tester fant at manipulative materialer er gunstige for yngre barn, men unødvendig for eldre barn (Fennema, 1972; Friedman, 1978; Wilkinson, 1974), eller at elevene lærte matematikk på en god måte i en forskningssetting hvor manipulative materialer er vanlig, men at annen meningsfull undervisning også fungerer (Vance and Kieren, 1971). I 1977 slapp Suydam og Higgins en omfattende gjennomgang i en studie av aktivitetsbasert læring i matematikkundervisningen. Forskningen ble gjort i barnehage og frem til 8. klasse (grade 8). Denne studien gikk imot tidligere forskning på bruk av manipulative materialer, og viser at det fører til større fremgang å bruke konkrete materialer enn ikke å bruke det, uansett alder i grunnskolen. Hver av disse anmelderne brukte ”box – score”- tilnærming for å komme frem til sine konklusjoner. Den presenterte studien er gjort med metaanalyse for å samle funn fra studier på effektiviteten av manipulative behandlinger.

Definisjoner:

I denne studien ble følgende definisjoner brukt:

Konkret betyr at elever arbeidet direkte med materialer, for eksempel tallpinner, verdipinner, geobrett, papirbretting, eller andre manipulative materialer under tilsyn av en behandlingsansvarlig.

Billedlig vil si at elever så animerte audiovisuelle presentasjoner, observerte demonstrasjoner med konkrete materialer av behandlingsansvarlig, eller brukte bilder i trykt materialet.

Abstrakt eller symbolsk var at elever gjorde blyant og papirarbeid fra en tekstbok i elementær- og midtveis i grunnskkolen, eller hørte på forelesninger og leste fra tekstbok på høyskolenivå.

Prestasjonsmåling ble tatt umiddelbart etter tiltak og var kategorisert i forhold til omfanget av hvilke av egenskaper som ble målt:

Ervervelse av generelle målsettinger i matematikk ble utledet dersom oppnåelse på et generelt område av matematisk innhold var målt. Selv om det ble brukt forskerkonstruerte instrumenter, brukte mange av studiene matematiske ledd fra standardiserte tester som California Achievment Tests eller Stanford Early School Achievment Test.

Ervervelse av spesifikke målsettinger i matematikk ble utledet dersom fremgang på spesifikke matematiske områder ble indikert. Disse områdene ble målt med instrumenter konstruert av forskere, spesielt for denne oppgaven, mens noen få studier brukte kommersielt konstruerte instrumenter.

Mål på *inngripende tiltak* ble utført fra tre uker til to år etter intervenering.

Mål på *overføring* krevde at elevene kunne bruke matematiske konsepter på en annen måte enn det de opprinnelig ble opplært til.

Elevenes *holdninger* ble målt via skalaer som uttrykte hvor godt elevene likte matematikk

Forskerspørsmål:

Følgende spørsmål ble undersøkt: Hvordan er effekten av å bruke konkrete materialer sammenlignet med effekten av abstrakt undervisning på (a) ervervelse av generell matematisk kunnskap? (b) ervervelse av spesifikke kunnskaper? (c) inngripende tiltak? (d) overføring? (e) holdninger til matematikk?

De samme forskerspørsmålene ble konstruert for å sammenligne billedlig og abstrakt undervisning, samt for sammenligning med undervisning med konkreter og billedlig undervisning. Innenfor disse store spørsmålene, ble ytterligere forskerspørsmål lagd for å sammenligne effekten av noen typer konkreter og egenskaper som varierte mellom forskningene, som for eksempel lengde av intervensjon, alder på elevene, matematiske temaer og annet.

Metode:

Utvalg av studier:

Kan leses ved å gå tilbake til artikkelen

Overblikk over data:

Av 60 studier som gikk innenfor kriteriene i denne studien, var 17 studier fra barnehage til 2. klasse, 17 fra 3-4. klasse, 9 fra 5-6 klasse, 11 fra 7-9 klasse og 6 fra høyere utdanning. Seks studier ble gjennomført på to tilstøtende klassetrinn. Tiden for selve feltforskningen varierte fra 1-72 uker, med snitt på 6. Tolv studier hadde behandling i et år eller mer, fem studier hadde behandling på 20-24 uker, sju studier på 15-16 uker, 10 studier på 6-8,5 og 26 studier på 1-5,8 uker.

På grunn av den varierende behandlingstiden, var det forventet at omfanget av matematiske temaer var vidt. Av 60 studieanalyser, brukte 12 pensum for hele skoleåret. Studier som involverte behandling i 20-24 uker inkluderte en stor del av skoleårets pensum, som bevis på det store antall temaer som nevnes i rapporten. Studier med kortere behandlingstid fokuserte ofte på enkelte temaer som for eksempel multiplikasjon, klokkelære, inndeling av subtraksjon, og så videre. Hvis forskere rapporterte data fra forskjellige populasjoner på samme rapport, telte disse som separate studier. Til slutt endte det opp med at studien inkluderte 38 rapporter, 3 upubliserte rapporter, og 19 avhandlinger, totalt 60 studier. Studiene som er inkludert her er tilgjenglig hos vedkommende forfatter.

Dataanalyser:

Kan undersøkes ved å gå til artikkelen.

Resultater:

Konkreter versus abstrakte instruksjonsforhold:

Effektene for fremgang, inngripende tiltak, overføring og holdninger ved sammenligning av konkret undervisning og abstrakt undervisning er vist i tabell 1 og 2. En positiv mean indikerer at konkrete instruksjonsforhold ga bedre resultater, mens en negativ betyr at abstrakt instruksjon førte til bedre prestasjoner.

For både generelle og spesifikke kunnskaper og instruksjon som enten var av konkret eller av abstrakt karakter, fant forskeren at lengden av intervensjon hadde sammenheng med fremgangen. Når intervensjonen varte et skoleår eller lenger, var resultatene signifikant høyere for instruksjonsforhold som benyttet seg av konkrete objekter. Instruksjon som hadde kortere varighet viste ingen signifikant forskjell.

De tretten studiene med inngripende tiltak kunne ikke grupperes i homogene grupper. Derfor, selv om det var moderat effekt av mean for de inngripende tiltakene, var det ikke signifikant. Fire studier involverte overføring produsert et nonsignifikant resultat.

Holdninger i forhold til matematikk var relatert til instruksjonsforhold avhengig av sentrale designelementer. Til sammenligning der hvor elevene var tilfeldig oppdelt i grupper, eller intervensjonen tilfeldig var delt i grupper, viste elevenes holdninger en favorisering av konkrete instruksjonsforhold. Når dette ikke var tilfeldig, viste elevene holdninger som var negative, og de likte bedre instruksjon som var av abstrakt karakter

Mean Effects for Acquisition in Concrete Versus Abstract Instructional Conditions

Comparisons	Description of effect-size group No.	Outliers	End values	Mean[a]
Acquisition of broadly stated objectives				
Treatment school year or longer (Grades 1–4)	10	–0.20, –0.43, 0.89, 1.07	0.10 – 0.53	0.29*
Treatment less than a school year				
Grades K–1	2	None	0.43 – 0.62	0.52
Grades 4–6	5	None	–0.42 – 0.16	–0.21
Grades 7–9	4	0.89	0.13 – 0.35	0.26
Postsecondary	1	None	0	
Acquisition of specific objectives				
Treatment school year or longer (Grades 1, 2, 6)	4	None	1.54 – 2.24	1.86*
Treatment 16–24 weeks (Grades 1, 5, 6)	6	None	–0.37 – 0.08	–0.07
Treatment less than 16 weeks				
Grade 2	3	None	–0.52 – 0.34	(–0.06)
Grade 3	11	None	–0.63 – 1.3	(–0.38)
Grades 4–5	5	0.21	–0.03 – 0.53	0.30
Grades 6–9	9	None	–0.39 – 0.56	0.02
Postsecondary	2	None	–0.35 – 0.48	(0.07)

[a]Entries in parentheses are mean effects for heterogeneous data.
*$p < .05$.

Figur 17

Mean Effects for Retention, Transfer, and Attitudes in Concrete Versus Abstract Instructional Conditions

Comparisons	Description of effect-size group No.	Outliers	End values	Mean[a]
Retention (Grades 1, 3, 4, 7, 8, P)	13	None	–0.26 – 1.80	(0.38)
Transfer (Grades 3, 6)	4	–0.81	–0.02 – 0.48	0.18
Attitudes				
Random assignment to grades/treatments; treatments 6 wks or longer (Grades 4, 5/6, 7/8, P)	5	None	0.28 – 0.59	0.41*
Random assignment to grades/treatments; treatments less than 6 wks (Grades 2, 7)	3	None	0.95 – 1.72	1.35*
Nonrandom assignment to grades/treatments (Grades 1, 5/6, 7, 9)	5	–1.33	–0.07 – (–0.67)	–0.34*

Note. P = postsecondary.
[a]Entry in parentheses is mean effect for heterogeneous data.
*$p < .05$.

Figur 18

Billedlig versus abstrakt instruksjonsforhold:

Effekten for billedlig versus abstrakte instruksjonsforhold er vist i tabell 3. Det var færre billedlige - abstrakte sammenligninger, enn konkret- abstrakte sammenligninger og ingen signifikante effekter ble funnet.

Mean Effects for Achievement and Attitudes in Pictorial Versus Abstract Instructional Conditions

Comparisons	Description of effect-size group No.	Outliers	End values	Mean[a]
Achievement				
Acquisition of broadly stated objectives (Grade 6)	3	1.77	0.13 – 0.30	0.21
Acquisition of specific objectives (Grades 2–3, 7/8, 5–9, P)	14	None	–0.23 – 1.11	(0.265)
Retention (Grades 3, 9)	2	None	–0.09 – 0.87	0.39
Transfer (Grade 6)	1	None	0.55	
Attitudes (Grades 5/6, 7/8)	3	2.22	–0.28 – 0.17	–0.07

Note. P = postsecondary.
[a]Entry in parentheses is mean effect for heterogeneous data.

Figur 19

Konkret versus billedlig instruksjonsforhold:

Effekten for konkret versus billedlige instruksjonsforhold er vist i tabell 4. Det var relativt lite effekter av konkret - billedlig, bortsett fra på ervervelsen av spesifikke kunnskaper. Denne effekten var liten og ikke signifikant.

Mean Effects for Achievement and Attitudes in Concrete Versus Pictorial Instructional Conditions

Comparisons	Description of effect-size group			
	No.	Outliers	End values	Mean
Achievement				
Acquisition of broadly stated objectives (Grades 4, 7/8)	2	None	0.23 – 0.89	0.56
Acquisition of specific objectives (Grades 1–8, P)	16	None	–0.42 – 0.55	0.09
Retention (Grades 3–4)	2	None	–0.16 – 0.17	0.01
Transfer (Grades 3, 6)	3	None	–0.10 – 0.07	0.04
Attitudes (Grades 2, 7/8)	2	None	0.08 – 0.63	0.13

Note. P = postsecondary.

Figur 20

Diskusjon:

Effekten av manipulative materialer vises best i sammenligning med langvarig bruk av konkrete materialer med symbolsk instruksjon. Intervensjon i et skoleår eller mer ga positiv effekt som var moderat til stor på grunnskolenivå. Dette omfatter de spesifikke matematikkunnskapene og hele det matematiske pensum for flere forskjellige klassetrinn. Dette bekrefter funnet som er fremlagd av Suydam og Higgins (1977).

Funnene angående holdninger produserte resultater som viste et skille mellom tilfeldig eller ikke tilfeldig valg av intervensjon. Videre undersøkelse av dataene viste at der hvor studiene med konkrete instruksjonsforhold ble foretrukket, hadde behandlingsadministratorene omfattende trening. De var enten professorer eller grunnskolelærere som hadde vært med i langvarig trening. I studier hvor abstrakte instruksjonsforhold ble foretrukket, kom informasjonen om behandlingsadministratorene ikke tydelig frem. Studiene som er analysert hadde behandlingsansvarlige med ulike bakgrunner, alt fra matematikkinteresserte til lærere som hadde noe erfaring. Selv om disse observasjonene muligens bare er en funksjon av rapportert informasjon og kontroll av varians gjennom tilfeldige prosedyrer kombinert med velforberedte behandlingsadministratorer, har dette muligens ført til forskjellen i elevenes holdninger.

Signifikante forkjeller ble ikke funnet i verken billedlig-abstrakt eller konkret - billedlig sammenligninger. I noen tilfeller kan andre faktorer enn uavhengige variabler brukt i denne studien ha gjort det mulig å oppnå homogene grupper.

Gitt informasjonen rapportert i de fleste studier, kunne ikke denne meta - analysen besvare spørsmål om hvilke situasjoner manipulativer kan være hensiktsmessig. Det var heller ikke mulig å finne ut hvilke manipulativer som er mer hensiktsmessig i spesielle situasjoner. Forskere holder på med å finne ut av disse spørsmålene.

4 Analyse

4.1 Innledning

Konkreter brukes i matematikkundervisningen på alle skoler over hele landet. Det er blitt en kulturell betingelse og selvfølgelighet at konkreter er en del av elevers vei til matematikkforståelse. Konkreter brukes for at elever skal kunne få en visuell forståelse av matematiske prinsipper. Dersom man for eksempel bruker klosser for å representere et matematisk regnestykke, får man et visuelt bilde på mengden, samt at man kan kontrollere om man har fått riktig svar. Konkretenes funksjon er å manipulere abstrakte prinsipper i matematikken på en fysisk måte. Altså å overføre det abstrakte til noe konkret. Man kan tenke seg bruk av konkreter som en glidende overgang fra det konkrete til det abstrakte. Når man jobber med for eksempel tallet 4, kan man jobbe helt konkret med fire klosser. Man kan etter hvert bruke halvkonkreter, for eksempel en illustrasjon av fire klosser. Så kan man gå over i noe enda mer abstrakt som fire streker, hvor hver strek kan tenkes å symbolisere en kloss, dette kaller vi halvabstrakter. Målet er å nå den helt abstrakte tenkemåten ved å bruke tallsymbolet “4” eller ordet "fire". Konkreter er i barnas nærvær hvor enn de befinner seg, det være seg i en skolesituasjon eller i fritiden. Om barnet bruker fingrene, finner steiner på bakken eller forholder seg til lærerens pedagogiske materiale, er fysiske konkreter rundt barnet til enhver tid. Det kan virke uunngåelig at barn skal møte matematikken uten konkreter som en del av veien mot matematikkforståelse. Allerede de første leveårene ser man at barna forholder seg til mengder og begreper i møte med objekter rundt seg. Dette var også vår forforståelse i møte med barn både i barnehage og på skole. Barn har behov for å støtte seg til fysiske gjenstander for å få en forståelse av abstrakte tenkemåter. Vi startet vårt litteratursøk for å finne optimal bruk av konkreter i undervisningssammenheng. Det hele ble som nevnt langt mer interessant da vi fant ut at ulike forskere stiller seg kritisk til bruken av konkreter. Vi hadde som utgangspunkt at konkreter utelukkende gagner barns opplæring og at konkreter er en effektiv og lønnsom vei til kunnskap. Når barna begynner på skolen blir de presentert for konkreter i en systematisk form. Lærere bruker konkreter for at elevene skal kunne forstå matematikk og de symbolene matematikken representerer. De er ment å fungere som en representasjon for mer abstrakte tenkemåter. Konkreter kan være for eksempel steiner, klosser, figurer, streker eller frosker på et ark. Som lærer er det mange hensyn å ta ved utvelgelse av konkreter. Valg av konkreter bør derfor overveies i større grad i undervisningssammenheng, enn man skulle tro. Hvordan konkretene ser ut og hvordan de anvendes kan være med på å styre barns innlæringsevne og forståelse av matematikkfaget. Man bør med andre ord stille krav til konkretene. Videre i analysen diskuteres blant annet mulige krav som gjør at konkretene best mulig kan legge til rette for læring.

4.2 Konkretenes relevans

Et av mange krav som forskerne handler om konkretenes relevans. Med relevans menes det at konkretene bør representere noe av det som skal læres, direkte eller indirekte. Det at konkretene er relevante betyr at konkretene ikke har for mange irrelevante aspekter ved seg som kan forstyrre innlæringsprosessen. Som Goldstone og Sakamoto sier bør konkretene representere noe av det som skal læres på det abstrakte plan og ikke lærdom om konkretene i seg selv. Konkretene med irrelevante egenskaper kan ha begrenset refererende effekt, fordi de er mer sannsynlig å bli tolket som enheter enn som symbolverdi (Goldstone og Sakomoto, 2003). Man skal bruke konkreter for en videre forståelse rundt matematikk. Det bør altså foreligge en generaliseringseffekt, og på den måten kan konkretene være til nytte på flere plan og ikke bare i en her - og - nå situasjon. Goldstone og Sakomoto sier videre at for eksempel frosker ikke har noen iboende egenskaper for det de skal representere i matematikken, men de har til gjengjeld mange irrelevante aspekter som farge, størrelse og lignende. En prikk vil i så måte være en langt bredere representasjon enn en frosk. En prikk er en mer relevant konkret på den måten at den antakelig representerer noe abstrakt i barnets kognitive tankestruktur. Et eksempel er barna referert til i Uttal m.fl. De forsøkte å løse de samme problemene med skrift, som de hadde klart med klosser. Barna som mestret å bruke klosser til å løse subtraksjonsproblemer som involverte to eller tre sifre, hadde problemer med å løse enklere skriftlige problemer, og det var slik at barn som hadde best resultat med klossene hadde dårligst resultat på de vanlige oppgavene. Det viste seg at barna tok instruksjonene bokstavelig og brukte klossene til fysisk " å stave ut" de skriftlige problemene. For eksempel lagde de en linje av konkreter til å representere "1" og to kryssende linjer for å representere "+" og så videre. Disse resultatene markerer igjen at barn kan behandle løsninger med manipulasjonsobjekter og det som involverer skrevne matematiske symboler som kognitivt atskilte enheter. Thompson kom frem til lignende resultater. Han mener at bruk av konkreter versus bruk av pc, gjør det vanskeligere å koble notasjonene med de fysiske objektene. Et interessant spørsmål er om konkreter gjør det praktisk vanskeligere å gjøre bruk av notasjoner, eller om det er at overføring ikke skjer når elevene bruker av konkrete klosser og deretter skal overføre de fysiske handlingene til skriftlige symboler?

Sloutsky m.fl. bruker studenter i sin forskning og mener at resultatet kan overføres til andre aldersgrupper. Vi tror man bør være forsiktig med å konkludere med dette. Konkretenes relevans for det som skal læres bør endres med alder. I barnehagen teller man elefanter, elevene teller pinner i første klasse, deretter kanskje penger og så prikker. Til slutt går man over til den totale abstrakte tankemåten som tallene representerer. Vi mener at bruken av konkreter bør tilpasses ut fra barnets kognitive ståsted. Mer om dette under punkt 4.3. Sloutsky m.fl. har funnet ut at jo flere forstyrrelseselementer konkretene har, jo mindre lærer man om matematiske begreper og konsepter. Deres mål var å undersøke effekten av "irrelevant konkrethet" på læring og overføring. Det er grunn til å tro, i motsetning til mer abstrakte og generelle fremstillinger, at konkreter og perseptuelt rike representasjoner ikke letter overføring (jamfør Bassok & Holyoak, 1989). Selv om konkrete materialer kan bli mer interessante og engasjerende enn de mer abstrakte, generiske materialene, kan de første ha begrenset refererende fleksibilitet. Dette kan være fordi perseptuelt rike, konkrete enheter mer sannsynlig blir vurdert som gjenstander, enn symboler som representerer andre enheter. Det er lett å bruke en prikk som symbol på en bil, en fugl eller et tog, mens det er vanskeligere å bruke en bil som et symbol på en fugl. Derfor kan kunnskap samlet fra perseptuelt rike gjenstander være mindre anvendbar enn kunnskap fra mer abstrakte, generiske enheter. De sistnevnte gjør det muligens enklere å overføre konkrete erfaringer til abstrakte matematiske mentale representasjoner enn den første. Det overnevnte er støttet av en rekke studier, blant annet av Uttal som sier at ifølge den hypotesen om dobbel representasjon (DeLoache, 1989, 1995) er det slik at jo mer fremtredende et symbol er som et konkret objekt, desto vanskeligere er det å forstå det som et symbol for noe annet enn seg selv. Jo mer tiltrukket små barn er av en modell som et interessant objekt, jo vanskeligere blir det for dem å oppdage dets forhold til rommet det representerer (DeLoache, 2000, Uttal m.fl., 1999). Som lærer bør man etter beste evne bruke konkreter som fremmer læring og som gir elevene størst utbytte. Mer om dette under punkt 4.2.3.

Konkreter bør som sagt ha få irrelevante aspekter ved seg, ifølge flere av de forskningsrapportene vi har beskrevet. Altså kan konkreter som fremstår som veldig interessante avlede eleven fra det som faktisk skal læres. Dette er viktige læringsaspekter med tanke på at elevene skal konstruere sine egne tankestrukturer rundt interaksjonen med konkretene. Labinowicz sier at elevene ikke må kopiere den kunnskapen som er der ute, men aktivt være med på å skape sine egne tankeprosesser. Dette gjøres i kontinuerlig samhandling med omgivelsene. Dersom elevene bruker konkreter som ikke representerer noe, kan tankene ta veier som vi ikke ønsker. Den kunnskapen som skal konstrueres bør være en individuell forståelse av det som skal læres, og dersom konkretene ikke leder eleven mot noe representativt eller noe som gjør at eleven skaper de riktige tankestrukturer om det som skal læres, så vil ikke eleven ha noen konstruktiv brukseffekt av konkretene.

4.2.1 Avledende konkreter

Som skrevet under forrige punkt sier Sloutsky m.fl. at konkreter som barna bruker bør være relevante i forhold til det de skal representere. Jo flere forstyrrelseselementer man bruker jo vanskeligere kan innlæringen bli. Det blir stadig en balansegang mellom å bruke konkreter som fanger barnets oppmerksomhet, men som ikke avleder den. Sloutsky m.fl. ønsket å se på effekten av hva slik avleding kunne føre til. Konkreter bør se forskjellig ut avhengig av hvilken alder barnet er i. Jo yngre barnet er, jo mer interessant må objektet være og konkretene må inneholde mer tiltrekningskraft for å fange barnets oppmerksomhet. Her må det vurderes i hvilken grad konkretene ikke tar for mye av oppmerksomheten i seg selv. De må ha en overføringseffekt som ikke nødvendigvis er bevisst fra barnets side. Fra egen praksis kan vi nevne et av mange eksempler på bruk av konkreter hvor den matematiske undervisningsmetodikken ligger gjemt i en fortellerform. Matematikkfortellinger er en vanlig metode hvor konkreter kan brukes, og som i større grad ble implementert i barnehagene etter at matematikk kom som et eget fagområde i Rammeplanen for barnehagene. Det kan for eksempel være en fortelling hvor den voksne bruker fem biler som utgangspunkt. Den voksne gjentar hvor mange biler som kjører til butikken, når de kom dit, eller hvor mange ledige parkeringsplasser det finnes. Man kan lage fortellingen så komplisert som situasjonen tillater. For eksempel ved å legge til flere biler eller at noen biler måtte hjem, hvor mange biler er igjen. Dette er et eksempel som fokuserer på benevning av antall og begreper, men fremgangsmåten er ikke nødvendigvis overførbar til alle situasjoner. Er man i skogen med små barn og finner en edderkopp, og de voksne spør hvor mange ben edderkoppen har, kan det hende at entusiasmen mot funnet av edderkoppen overstyres av interessen for antall ben. Da har oppmerksomheten eller uønskede forstyrrelseselementer til konkretene overstyrt brukseffekten. Disse utenforliggende forstyrrelseselementene hos konkretene bør avta i tråd med at tenkningen til barna blir mer abstrakt og i tråd med den kognitive utviklingen. I studien til Sloutsky og medarbeidere fant de at irrelevante egenskaper ved konkreter hindret studentenes læring, og det kan virke som konkretene med mange egenskaper fører til at studentene fikk tunge mentale forestillinger (Ostad, 1990). Alder har nok innvirkning på hvordan irrelevante egenskaper på konkreter virker inn på overføring og læring. Det kan hende at det for yngre barn er vanskelig å forholde seg til konkreter med mange interessante egenskaper da disse fører til at barna ser på konkretene som gjenstander med verdi i seg selv (jamfør hypotesen om dobbelt representasjon) og dermed glemmer oppgaven de skal utføre, eller spørsmålet som er stilt. For eldre barn og studenter er det muligens slik at avledende egenskaper på konkreter kan føre til at studentene får vanskeligheter med å danne seg mentale representasjoner som er oppgaverelevante og som dermed gjør at studentene har problemer å løse oppgavene på riktig måte.

Flere faktorer kan forklare effektene av irrelevant konkrethet for læring og overføring. For det første kan konkrete representasjoner automatisk engasjere det perseptuelle systemet og dermed forhindre en dypere konseptuell prosessering. Videre kan rike konkrete representasjoner øke ulikhetene mellom enhetene i de ulike fagene og dermed gjøre det vanskeligere for strukturell tilpasning, som kan være viktig for å få frem underliggende relasjonelle fellestrekk. En del forskning viser at perseptuelt sparsomme representasjoner mer sannsynlig vil understreke en ikke-perseptuell forbindelse mellom enheter enn perseptuelt rike representasjoner. (Gentner & Medina, Gentner & Rattermann, Markman & Gentner, i Sloutsky m.fl., 2005). For det andre kan irrelevante aspekter ved en konkret representasjon bli tolket feil, og kan oppfattes som en del av det man skal lære. Dersom barnet sitter igjen med lærdom som ikke har noen relevans til matematikkfaget, vil overføringen til videre forståelse bli redusert. Til slutt kan konkrete objekter ha begrenset henvisende fleksibilitet fordi de lett kan bli tolket som noe med verdi i seg selv, istedenfor som et symbol for antall eller andre matematiske symboler. Resultatet er at elevene ikke klarer å overføre kunnskapen de har lært om konkrete enheter til mer abstrakte enheter. Dermed kan det se ut som at irrelevant bruk av konkreter hindrer læring. Dette er viktige implikasjoner med tanke på bruk av konkreter i komplekse fag som matematikk og naturfag, og læring og forståelse av disse.

Uttal m.fl. viser som Thompson og Sloutsky m.fl., at man skal bruke konkreter med forsiktighet. Konkreter er som et tveegget sverd, sier de. Altså er de positive til å bruke konkreter, bare man bruker riktige konkreter og på riktig måte. Uttal sier som Sloutsky m.fl.at konkretene ikke bør være for interessante. Holm (2002) skriver at konkrete handlinger er det viktigste for kognitiv utvikling, men formidler lite om hvordan konkretene bør brukes eller hvordan de bør stimulere til generaliserbar betydning. I modelltesten blir dette muligens et problem for resultatet. Mens en konkret i vanlig undervisningssammenheng for eksempel kan ha farger og størrelser som forstyrrelseselementer, er modelleksemplet til Uttal m.fl. så interessant for barna, at det er fare for at det overskygger det de ønsket å belyse. Det at barna ikke finner frem i den store modellen er interessant, men at det er slik at barn ikke kan overføre forståelsen de får i matematikkundervisningen til andre situasjoner kan diskuteres. Det kan bli for mange inntrykk å ta inn over seg for å klare oppgaven. Alderen til disse barna er gjennomsnittelig 17 måneder. Med tanke på barnas lave alder kan det være interessant å diskutere om barna kognitivt var i stand til å løse modelloppgavene, og hvor dedikert barna var for å få det til. Uttal skriver ikke om barnas motivasjon, eller hvor stort ønske barna hadde for å mestre oppgavene. Uttal skriver at de måtte minne barna om at det lille rommet representerte det store, og at Lille Snoopy lå her eller der i det lille rommet. Disse stadige påminnelsene kan tyde på at barna hadde problemer med å forstå oppgaven de ble bedt om å utføre. Når så små barn kommer inn i et stort rom kan det bli for mange inntrykk å ta inn over seg. Barn kan bli avledet av settet med objekter, og nye inntrykk kan overstyre oppgavene barna skal utføre. Uttal og co har imidlertid fått frem et viktig aspekt ved bruk av konkreter med for mange egenskaper. Hypotesen om dobbelt representasjon er illustrerende for å forklare hvordan barn tenker når konkretene har avledende egenskaper.

Bruk av konkreter, uansett størrelse, form eller farge, må ha egenskaper ved seg som gjør at eleven forstår hva konkretiseringsmaterialet skal representere. Dersom barnet blir *for* opptatt av egenskapene ved konkretene vil denne forståelsen svekkes og barnet avledes fra den opprinnelige funksjonen konkretene skulle ha.

4.2.2 Hensynet til individet

I konkretene er det som nevnt ofte lagt til oppmerksomhetsfangende egenskaper som ikke nødvendigvis fungerer optimalt for alle elever. Elever har en ulik oppfattelse av hva som er interessant, og hva som appellerer er individuelt. I følge det konstruktivistiske læringssynet konstrueres kunnskap aktivt av den tenkende personen i samhandling med omgivelsene. Mennesker opplever en og samme situasjon ulikt (von Glaserfield, 2002). Dersom konkretene ikke har irrelevante aspekter ved seg, vil sannsynligheten for og nå en bredere elevmasse øke.

Da trenger man ikke tenke på eller ta hensyn til hva som vil appellere til hver enkelt elev. Nøytraliteten til konkretene gjør at det er større mulighet for og nå en bredere elevmasse enn om man bruker konkreter som fanger elevenes oppmerksomhet på et felt som eleven kanskje ikke har noen interesse for. Som eksempel på dette vil semikonkreter av biler i en lærebok trolig appellere til gutter i større grad enn til jenter. På samme måte vil det å bygge med klosser fange interessen til de som liker nettopp klosser. Her må man også være bevisst ved at man ikke bruker konkreter som avleder, jamfør forrige punkt.

Vi har tidligere i oppgaven skrevet om interaksjonisme (Imsen, 1998) som betegner subjektets aktive konstruering av egen læring. Læringen foregår som en vekselvirkning mellom individet og omgivelsene. Et interaksjonistisk syn på utviklingen innebærer at individet selv er med på å forme det miljø som påvirker det. Barn er individualister. Ved å bruke konkreter som ikke nødvendigvis fanger alle elevers motivasjon, vil ikke alle kunne profitere på samme måte som ved bruk av konkreter som er nøytrale. Det er altså ingen selvfølgelighet at konkreter som er ment å motivere, nødvendigvis motiverer alle barn på samme måte. Allikevel åpner konkreter for større individuelle tolkninger enn for eksempel lærerens tavleundervisning. Ved tavleundervisning er elevene passive observatører av blant annet konvensjoner som tar utgangspunkt i lærerens tankestruktur. I følge konstruktivistsk læringsteori er det å forstå matematikk, det å forstå hvorfor en opererer på en spesiell måte, og ikke på andre. I tillegg vet man hvorfor og hvordan resultatene man får er utledet fra operasjonene som er utført. Dersom elever produserer svar for å tilfredsstille læreren, er svarene ofte tilfeldige og uten en dypere forståelse for de utførte matematiske operasjonene (von Glaserfield, 2002). Elever som løser oppgaver basert på sin egen forståelse vil ikke svare tilfeldig. Svarene de kommer frem til gir mening for dem på det nivået de befinner seg. Det vi ønsker er at barna skal skape sin egen forståelse, tankemåter og løsningsmetoder innen matematikk. Det er i større grad opp til eleven selv å konstruere sin egen forståelse av konkretenes anvendelsesfunksjon.

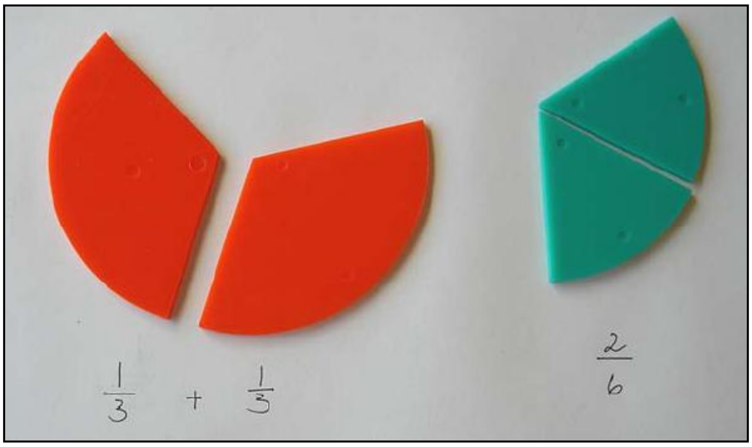
Thompson er også opptatt av barns frihet i matematikkundervisningen. Han ønsker at barn skal lære matematikk uten matematiske konvensjoner, altså helt uten gitte føringer for hvordan matematikken skal læres. Dette henger sammen med konstruktivistisk tankemåte. I et konstruktivistisk læringssyn legger man vekt på elevens eget ansvar for læring, og tenker at opplevelse av å forstå gir en motivasjon til videre utforskning og læring (von Glaserfield, 2002). Vi kan se fra egen erfaring at barn har ulike behov i ulike situasjoner. Enkelte barn kan ha behov for mer frihet som gjør at de for eksempel i større grad kan gjøre egne valg. Andre barn derimot har større behov for å veiledes og ha klare holdepunkter for det de skal gjøre. Friheten i matematikkopplæringen er et individuelt anliggende, som det bør tas hensyn til fra lærerens side. Barn har forskjellig behov og selv om elevene individuelt bidrar til at denne prosessen skal forekomme blir også lærerens rolle viktig for hvordan dette skal skje. Mer om dette under neste punkt.

4.2.3 Lærerens rolle

Som nevnt er det en dypt forankret og utbredt oppfatning i utdanningssamfunnet at læring og overføring kan forenkles gjennom bruk av konkrete materialer, som inkluderer både fysiske manipulasjonsobjekter og konkrete momentantvalg av abstrakte begreper. For eksempel uttalte 84 % av matematikklærere på videregående skole at de har tro på at konkrete materialer har fasiliterende effekter på læring (Howard, Perry, og Tracey, i Sloutsky, Kaminski og Heckler, 2005). Lærere er viktige bidragsytere for elevers effekt av innlæring. Dette fordi de kan støtte, hjelpe og være til stede når eleven trenger det. Samtidig bør barna ha frihet til å finne egne løsningsmetoder. Thompson skriver at barn bør ha frihet til å konstruere sine egne tankestrukturer av det som skal læres. Mange av dem som støtter seg til det konstruktivistiske læringssynet mener dette er en nødvendig arbeidshypotese for en lærer som ønsker at elevene skal utvikle god matematikkforståelse (Von Glaserfield, 2002). Elevene skal skape sine erfaringer, og på den måten vil forståelsen bedres og utvikles. Pedagogikken sier imidlertid også noe om hvordan barn har behov for faste holdepunkter, strukturelle føringer og en slags veiviser for å komme til neste steg. I andre sammenhenger, som gjelder barns utvikling, er vi opptatt av at barn skal ha noen føringer for hva de skal gjøre og hvordan de skal oppføre seg. Har vi en iboende egenskap til å kunne forstå matematikk helt uten føringer, hjelp eller konvensjoner? Von Glaserfield skriver at vi har konsensusdomener, som er en uskrevne avtaler for å oppnå felles forståelse på et område. Det kan være slik at vi er avhengige av disse konsensusdomenene i undervisningssammenheng i matematikk, nettopp fordi konvensjonene i dette faget er så sterke og komplekse. Det er viktig at lærer og elev forstår hverandre, og har et felles utgangspunkt for at eleven skal lære på best mulig måte. For å lykkes med dette, er det sentralt for elevenes utvikling at læreren setter seg inn i tankestrukturen eleven har, og utviklingsnivået eleven befinner seg på (Steffe, 2002). Vår vurdering er at det må være ganske forvirrende for barn om de ikke har noen holdepunkter å forholde seg til i matematikkundervisningen. Matematikk er et komplekst fag og vi tror ikke elevene takler faget så bra uten noen matematiske konvensjoner. Imidlertid trenger ikke matematikkundervisningen å befinne seg i et av disse ytterpunktene. Som lærer bør man reflektere rundt hvilken undervisningsmetode som til enhver tid er mest hensiktsmessig. En lærer bør også ha fokus på hva som gir best læringsutbytte for gruppen og enkeltindividet. Utviklingen av hvordan matematikk bør undervises går mot større frihet for elevene. Barn skal kunne skape sine egne forståelser og danne sine egne strategier. Thomspson skriver at microworldelevene ikke gjorde det så bra fordi de ble forvirret av sine tidligere lærte konvensjoner mot den friheten de nå fikk. Det er interessant å spørre seg om det var denne striden som påvirket resultatet og ikke det at elevene fikk *for* mye frihet? Struktur og forutsigbarhet er essensielt for å sikre trygghet hos barn. Og med trygghet er sannsynligheten større for å lykkes. Vi er avhengige av trygge rammer for å håndtere vanskelige prosesser. Thomspson beskriver det som et problem at elevene mislikte denne enorme friheten. Barna hadde allerede en tankestruktur som de måtte omorganisere gjennom den friheten de fikk. Piaget kaller denne prosessen for ekvilibrasjon når barn må reorganisere sin tankestruktur (Labinowicz, 1985). Dette kan føre til desekvilibrasjon, noe som Piaget beskriver som forvirring eller frustrasjon. Piaget påpeker at denne frustrasjonen ikke trenger å være negativ, men en naturlig del av utviklingen. Det bør være en balansegang mellom friheten elever får, og lærerens styring for at elevene skal ha mest mulig utbytte av undervisningen. På den måten opplever elevene den tryggheten de trenger i rammene som læreren setter, i tillegg til at de må få mulighet til å styre sin egen læring så langt det er mulig.

Labinowicz skriver at barn ikke får mulighet til å reflektere rundt det riktige svaret i stor nok grad og at lærere invenerer altfor tidlig. Lærere bør la barn bruke mer tid på å undre. Lærere bør også bruke mer tid til å reflektere rundt det å finne de riktige spørsmålene til barna. Piaget kom allerede i 1971 med en advarsel om at man skal være forsiktig med å bruke konkreter på en tankeløs måte. Barn må bruke konkretene med rettledning og samhandling fra en voksen. Lærere bør kunne la barna få tid til å etablere sine egne tankestrukturer. I Thompsons studie får elevene tid til å reflektere rundt svarene. Dette for at barna skal kunne danne sin egen forståelse og egne konvensjoner av matematiske prinsipper. Labinowicz og Piaget støtter Thompson om at barn trenger tid før deres egne individuelle konvensjoner sitter naturlig. I Thompsons studie kunne kanskje en intervenering på et tidligere stadium utelukket dette? Elever blir utsatt for konvensjonelle føringer helt fra starten av. Spørsmålet er imidlertid om disse føringene er der også for å lette matematikkundervisningen for elevene. Konvensjoner er nødvendige, men det kan vurderes i hvor stor grad frihet i opplæringen gagner elevene på sikt, og på hvilken måte friheten brukes i undervisningen for at elevene skal utfolde seg og konstruere sin egen forståelse på best mulig måte. Thompson sier videre at Microworldelevene viste tydelig at de prøvde å forstå logikken i notasjonene eller i desimaltallsystemet. Dette viser at elevene var interesserte i å lære, men at for stor frihet i organiseringen av undervisningen kan ha medvirket til forvirring hos elevene.

Dersom man velger konkreter som er hensiktsmessig, og konkretene har en viss relevans for det som skal læres, kan det avledes fra undersøkelsene at konkreter kan ha en nyttefunksjon i matematikkopplæringen. Lærere vi har snakket med har vansker med å forstå at bruk av konkreter ikke nødvendigvis fremmer læring. De kan ikke forstå at konkreter kan være et begrensende hjelpemiddel. Slike innvendinger kan si noe om manglende overveielse ved valg av konkreter. Lærere virker rimelig enige om at representasjoner kan være hensiktsmessig for å lette forståelsen av det som skal læres. Skal vi tro ”Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen” vil elever med enkle hjelpemidler enkelt kunne se med det blotte øye at deres tanke om at 1/3 + 1/3 ikke er lik 2/6, noe som er en ganske vanlig feil (se figur 21). Ofte trenger elever noen enkle hjelpemidler for å strukturere tankene. Da blir flere sanser tatt i bruk. De får en visuell representasjon som gjør at de får knagger å henge lærdommen på. Bildet under er et eksempel på hvordan konkreter eller bilder har nær relevans til etablering av forståelse.



Figur 21

På denne måten får barna et fundament i tidlig innlæring som hjelper på den abstrakte tankestrukturen. Dette fundamentet kan plasseres i Piagets kategorisering av tenkningens fire stadier. Han mener barna må gjennom en fysisk kontekst før de kan overføre tankene til mer abstrakte strukturer. Det er på denne måten Piaget mener konkreter bør være en del av prosessen for å nå en abstrakt forståelse av matematiske prinsipper. Lærere må være behjelpelige i denne prosessen. De kan være støttespillere i elevenes interaksjon med konkretene. En utfordring kan være at lærere bruker konkreter som hvilepute i sin undervisning; Dersom elevene får bruke konkreter som hjelpemiddel for sin forståelse, kan prosessen til en viss grad gå av seg selv. Det er viktig at lærere er til stede for elevene i prosessen mot abstrakt forståelse. Wood & Bruner (1976) sin teori om" Støttende stillas" kan være et viktig holdepunkt for lærere. Bruner mente at barnet selv skal være med på å bestemme hva det vil lære, mens læreren skal være til stede og støtte barnet. Etter hvert som eleven blir sikrere på sine handlinger, blir stillaset sakte tatt vekk og barnet skal klare seg selv. Stillaset bør fremdeles være tilgjengelig om barnet har behov for det. Olga Herbjørnsen sier i sin bok "Rom, form og tall" (1998) at problemer som går igjen med bruk av konkretiseringsmateriell er at elevene ser det som virkelighetsfjernt og tungvint. Hun sier videre at fordi materiellet bare hører hjemme i undervisningssituasjonen, kan det bidra til å forsterke en avstand mellom skolematematikk og bruksområdet faget har utenfor skolen. Her er det viktig at læreren er med på å skape og understreke denne koblingen. Herbjørnsen sier det ganske treffende; "Det må ikke bli slik at det å bygge med klosser gjør eleven flink til å bygge med klosser". Her kan vi trekke parallell til Ostad (1990) som fant ut at elever ble bedre til overføring av konkrete erfaringer med objekter i den horisontale dimensjonen.

Piaget skriver at for å forstå noe må man bearbeide og transformere kunnskapen. Barnets aktivitet begrenser seg ikke bare til handlinger eller objekter; aktiviteten vil senere involvere refleksjoner rundt disse handlingene for å konstruere ideer. Læreren kan være behjelpelig i denne prosessen. Det er ikke slik at barna nødvendigvis griper det en lærer forsøker å forklare. Det barna lærer er ikke et fotografi av det som undervises, skriver Labinowicz. Barna kan kanskje fokusere på kun en del av det som undervises, eller de kan forandre det som undervises slik at det passer inn i deres perspektiv på virkeligheten. For å undervise barn på det nivået de befinner seg, trenger man innsikt i deres eksisterende perspektiver (jamfør Steffe, 2002). Labinowicz mener at lærere må være med på å skape en forståelse mellom konkretene og hva de skal representere.

4.3 Overføring

Et mål for vellykket læring er overføring, eller evnen til å bruke tilegnet kunnskap utenfor den lærte situasjonen. Spontan overføring er derimot vanskelig å oppnå, selv for relativt enkel kunnskap (Detterman, i Sloustky, Kaminski og Heckler, 2005). Hvilke faktorer hindrer eller letter overføring? Selv om relevante konkreter kan lette læring, må vi stille spørsmål om konkretenes virkning på overføringen (for eksempel Goldstone & Sakamoto, 2003).

Ostad skiller mellom horisontal og vertikal overføring av kunnskap, og mener å ha funnet ut at overføring av kunnskap på det horisontale planet er nyttig for barna, mens på det vertikale planet skjer ikke overføring som et resultat. Det er vanskelig å forstå at om man stadig blir bedre på det horisontale plan ikke skal profittere på det vertikale plan. Jo bredere og dypere forståelse man har for å komme et skritt videre i utvikling, jo lettere må det være å komme til neste nivå. Det må sies at Ostads forskning er gjort på barn med matematikkvansker. Man skal kanskje være tilbakeholden med å trekke en slutning om at dette gjelder normalt presterende barn også. Barn som har vanskeligheter med matematikk har som regel avkodningsproblemer allerede. Ostad er kritisk til egen forskning. Han sier det er altfor mye forskning som taler for at bruk av konkreter er hensiktsmessig. Det Ostad ønsker å formidle er at man allikevel bør tenke på hva salgs typer konkreter man bruker i hvilke sammenhenger. Det er ikke nødvendigvis slik at bruk av konkreter fremmer læring. Bruken av konkretene bør være gjennomtenkt. Både metode og hvordan konkretene ser ut er viktig for overføringsverdien. Med hvordan konkretene ser ut, menes for eksempel relevans for det som skal læres og graden av ikonisitet, som bør stemme overens med barnets mentale utvikling. Mens mange forskere er opptatt av at elevene gradvis skal tilegne seg abstrakte forestillinger om konkretenes gjenstander, sier Ostad at elevene bør gjennomføre en avkonkretisering.

De fem studiene varierer med tanke på utvalg, metode og fokus på ulike aspekter ved bruk av konkreter. Allikevel synes vi å se en klar fellesnevner ved alle studiene. Barn er i stadig utvikling og de må stadig tilegne seg ny kunnskap. Denne kunnskapen er ikke en statisk lærdom, den må kunne anvendes i nye situasjoner og på nye måter. Enten man kaller det overføring, generalisering eller avkonkretisering dreier det seg om hvorvidt eleven klarer å benytte de innlærte ferdigheter i andre lignende eller nye situasjoner, enten på samme eller på høyere nivå. Det er nettopp denne overføringsproblematikken som er felles for alle forskningsrapportene vi har beskrevet. Overføring, eller å gå fra det konkrete til det abstrakte, er noe Piaget også poengterer som sentralt for barns utvikling. Han skriver at fysiske objekter er viktig for forståelsen av ulike matematiske konsepter. Konkreter er utgangspunkt for forståelse på et høyere nivå. Dette støttes også av Labinowicz som sier at konkreter kan skape rike mentale forestillinger som grunnlag for matematisk abstraksjon. Dersom en elev kontinuerlig bruker en konkret vil den mentale aktiviteten relatert til matematisk abstrakt kunnskap skapes (refleksiv abstraksjon), noe som Piaget mener er en viktig influering på kunnskap. Allikevel ser det ut til at overføring er utfordringen elevene møter i følge forskningen. Om man utfordrer elevene med den samme indirekte målsettingen, er det forventet at man får relativt like resultater. De forskjellige overføringsproblemene i de ulike forskningsrapportene kan kort oppsummeres slik; Thompson skriver at barna ikke kunne overføre kunnskapen om treklosser til kunnskap om notasjon eller symbolbruk. Konkretiseringsmateriellet gjorde at barna ble for opptatt av klossene og klarte ikke å se sammenhengen med de symboler vi bruker i matematikk. Sloutsky m.fl. mener at altfor interessante objekter forstyrrer overføring av kunnskap til andre fag. I matematikk hvor man brukte perseptuelt rike konkreter, hadde de liten nytteeffekt i naturfag. I Uttal m.fl. sin studie er utfordringen om små barn mestrer å overføre kunnskap om det lille rommet til det store rommet. Dersom barna ikke klarte dette kunne det tyde på overføringsproblemer fra noe konkret til noe større og abstrakt. Ostad er også inne på overføring som den mulige problematikken ved bruk av konkreter; det vertikale plan. Alle forskerne skriver om generalisering som begrunnelse for begrenset innlæringsprosess. Da er det ikke så overraskende at resultatene er noenlunde de samme. Tester man barn ved bruk av irrelevante konkreter, eller konkreter som avleder barnets oppmerksomhet fra det som er den opprinnelige oppgaven, er det slik at mange av barna får vanskeligheter med å løse de matematiske regnestykkene. Dersom man hadde brukt konkreter som hadde vært relevante for det som skal læres så hadde kanskje resultatet vært noe annerledes. Irrelevante konkreter kan være med på å svekke overføringsprosessen, altså fra bruk av konkreter til abstrakte tankestrukturer. Det kan ha betydning hvor relevante konkretene er, som beskrevet under punkt 4.2.

4.3.1 Overføring i et tids- og utviklingsperspektiv

I Thompsons forskningsrapport er det slik at Microworldelevene gjorde flere feil, som viste seg for eksempel ved unøyaktighet. Thomspson begrunner dette med at elevene ennå ikke har klart å overføre det logiske til en mer kognitiv struktur. De viste til flere meningsfulle metoder som beviser dette. Thompson mener altså at mye av problemet lå i at Microworldelevene allerede hadde innarbeidet seg en konvensjon som de hadde vanskeligheter med å legge vekk. Blant annet sier han at nylig konstruerte metoder er ustabile. Thompson mener at dette kan være begrunnelsen til at microworldelevene viste svakere resultater. Thompson mener som Piaget at læring tar tid. Han sier også som nevnt tidligere at barn trenger å bruke tid og at de barna som lærer best ofte er de som er mest forvirret underveis. Labinowicz støtter seg også til tanken om at barn har lov og gjøre feil som en del av utviklingen.

Barn går i gjennom stadier i utviklingen, jamfør Piagets utviklingsmodell. I et kognitivt utviklingsforløp befinner barna deg på ulike stadier alt etter hvilken alder de er i. Med denne viten i bakhånd er det konstruktivt å reflektere over når barn profitterer på bruk av konkreter. Man bør muligens ikke presentere barn for de samme konkretene gjennom hele oppveksten. Barna profiterer ulikt på forskjellige typer konkreter etter hvilket kognitivt ståsted de befinner seg på. Som nevnt tidligere bruker asiatiske lærere perseptuelt fattige konkreter, og amerikanske lærere ulike figurative eller perseptuelt rike konkreter. Det kan være at begge disse læringsformene har elementer ved seg som påvirker forståelsen og den matematiske utviklingen. Det kan være avgjørende å bruke riktig konkret til rett tid og med en individuell bruksfølsomhet.

I Sloutsky m.fl. sin studie har de funnet ut at eldre barn ikke profitterer på perseptuelt rike konkreter. Dette kan tolkes slik at jo lengre du er kommet kognitivt, jo mer innlæringsmessig forstyrrende er de irrelevante aspektene ved konkreter. At man teller epler fungerer på yngre barn, men det vil være mindre hensiktsmessig å bruke epler i matematiske regnestykker på eldre barn som allerede har utviklet en abstrakt kognisjon. Ikke bare mindre hensiktsmessig, sier Sloutsky og co men det kan til og med hindre læring. Det overordnede målet med å bruke konkreter må være at konkretene gir barnet en utviklingsprofitt. Barnet får en logisk fremstilling av noe som ellers kan være uforståelig.

Konkreter blir brukt som illustrasjon for en høyereliggende abstrakt forståelse. Poenget med å bruke konkreter må hele tiden være å finne gode representasjoner som er klargjørende for eleven. Det gjelder å presentere elevene for konkreter som er en god illustrasjon uansett hvor de befinner i utvikling. Det kan for eksempel være klosser, bilder eller tall. Målet må være å få elevene til å oppleve en affinitet mellom bruk av konkreter og abstrakt forståelse. Det bør altså være en balanse mellom opplevelsen av det som konkret iakttas og overføring til alminnelig forståelse. Læreren har en utfordring med å finne riktige konkreter i forhold til hvor i utvikling eleven er. Man må forsøke å danne en bro ved å finne hensiktsmessige representasjoner som fører til den abstraherte forståelsen. I møte med eleven nytter det ikke å terpe på de rene matematikksymbolene dersom man ikke oppnår forståelse. Da bør læreren gi eleven manipulativer eller representasjoner. Ved dette bruker vi et forståelsesverktøy som ligger i begreper, bilder, symboler også videre for å etablere overføring. Man bør unngå å terpe på bruk av konkreter dersom man ser at eleven ikke oppnår forståelse gjennom disse. Konkreter har ingen selvfølgelig overføringsverdi i seg selv og man skal være oppmerksom på at ikke alle konkreter har en profitterende effekt på alle elever. Elevene er i stadig utvikling og på samme måte må konkretene utvikles i takt med elevenes kognisjon. Denne balansegangen kan være vanskelig å finne for læreren. Det blir en kontinuerlig vurdering av hvilke konkreter som er hensiktsmessige til hvilken tid. I tillegg til dette må også læreren ta individuelle hensyn, og sette seg inn i den enkelte elevens utviklingsnivå (Steffe, 2002). Det kan være store behovsforskjeller på konkretbruk mellom trinnene, men det kan også være stor forskjell på hvilke konkreter hver enkelt elev profiterer på innenfor samme trinn.

Alle forskerne som er kritiske på området har et poeng i det de legger frem, det være seg bruk av konkreter med irrelevante aspekter, overføringsproblemer eller konvensjonsproblematikk. Sowell ville undersøke effekten av å bruke konkreter og foretok en metaanalyse av over seksti studier for å vurdere en eventuell nytteverdi. Hun kom blant annet frem til at jo lenger du bruker konkretiseringsmateriell, jo større ser effekten ut til å være. Effekten er ikke nødvendigvis synlig ved kortvarig bruk, sier Sowell. Det er i grunn et viktig poeng når vi ser på innovasjonstiden Thompson, Heckler og co og Uttal m.fl. har brukt. I følge Sowell må man bruke konkretiseringsmateriell i en lengre periode for å få et resultat av betydning. Det som er felles med de tidligere nevnte forskerne er at innovasjonstiden har vært begrenset. Thompson er åpen for at tidsaspektet vil kunne ha påvirket resultatene. Det kan spekuleres i om resultatene ville vært annerledes dersom man hadde forlenget studiene.

4.4 Motivasjon

Konkreter som motivasjon har stor akkvisisjon for eleven som vi ikke bør undervurdere. Allerede i barnehagen bruker barnehagepersonalet konkreter for å fange barnets interesse. Matematikk inneholder en masse begreper som ”under”, ”over”, ”firkant”, sirkel” osv. For barn i barnehagealder gjelder det å bruke begrepene naturlig og gjerne med mange gjentakelser. Dette gjøres best med bruk av konkreter i barnets dagligdagse situasjoner. Leken blir derfor en naturlig arena for å få integrere som utgangspunkt for læring. For er det ikke slik at konkreter er konkreter så lenge de er objekter som stimulerer læring? Dersom et barn leker med klosser og barnet har med seg en voksen som til stadighet benevner klossens form (firkant), så vil barnet etter hvert lære at benevnelsen på denne formen er firkant. På samme måte som at den voksne kan si at dukken ligger på sengen, bak huset eller har gjemt seg inni skapet. Barn utvikler begreper og lærdom med bruk av konkreter allerede i barnehagen. Når det gjelder motivasjon, tror vi at barn trenger noe som fanger deres oppmerksomhet for å kunne opprettholde interessen for det som skal læres. Det er på samme måte i skolen og med eldre barn. Har man en tallinje, klosser eller matematiske figurer å jobbe med, så blir det mer interessant og lettere å holde motivasjonen oppe. Nå er det en realitet at mange barn i liten grad er i stand til å løse matematiske oppgaver på det abstrakte plan. Barn kan få mye støtte ved å få svaret visualisert. Det er som nevnt vanlig for barn å benytte fingrene dersom de skal finne svaret på fem pluss to. Andre barn finner hjelpemidler som pinner eller steiner for å løse oppgaver. Barn er selv aktive for å løse oppgaver med konkreter som hjelpemiddel. På et eller annet tidspunkt må det imidlertid skje en avkonkretisering som ledd mot den abstrakte tankestruktur, begreper som Ostad er inne på. Det kan godt hende at våre forskere har et poeng i at læringseffekten er sterkere med ”uinteressante” konkreter, men barn skal gå på skole i mange år, ikke bare i et intensivt forskningsforsøk. Da må man som lærer tenke igjennom hvordan man legger opp undervisningen, både variert og interessant. Tar man frem monotone, perseptuelt fattige konkreter år etter år kan det hende at motivasjonen ville dalt med årene. Et kinesisk ordtak eksemplifiserer det vi vil si i denne sammenheng: ”Det du leser glemmer du, det du hører husker du, det du gjør forstår du!” Dette støttes også av teorien om at forståelsen av et ord blir utvidet etter hvert som erfaringene knyttet til ordet blir flere. Vi har også nevnt tidligere at tanken om læring og forståelse er et resultat av den lærendes egen aktivitet heller enn passiv mottakelse og instruksjon (von Glaserfield, 1984). Konkreter kan hjelpe oss å forstå, og man husker kanskje lettere hva læreren sa. Og i tillegg opprettholdes motivasjonen og man skaper et godt fundament for begripelse og videre kognitiv prosess.

En utfordring i denne sammenheng, er tanken om bruk av konkreter som støtte kun for svakere elever eller elever i lavere klassetrinn. (Herbjørnsen, 1998). Herbjørnsen sier at elever ser på arbeid med konkreter som nedverdigende. En problematisk holdning er at de som bruker konkretiseringsmateriell ikke er så flinke i matematikk. Denne holdningen kan grunne i at konkretiseringsmateriell i mange sammenhenger først og fremst brukes på de lavere klassetrinnene. I så måte blir det en utfordring å skaffe materiell som egner seg for høyere klassetrinn, men som også blir allment akseptert blant eldre elever.

4.5 Konkreter i utvikling

I Thompsons studie settes en gruppe som bruker treklosser opp mot en gruppe som bruker pc (Microworld). Da er det naturlig å se på hva som egentlig er konkrete manipulativer. Begrepet semikonkret ligger et sted imellom konkreter og abstrakter. For eksempel tegninger, streker eller lignende (Ostad, 1992). Mens konkreter ofte er tredimensjonale, er halvkonkreter todimensjonale, men fremdeles visuelle manipulativer uten notasjonsbruk. På en datamaskin kommer vi enda lenger mot de tredimensjonale konkretene. De har dybde, bevegelse og en grafisk fremstilling som er veldig nært opp mot det som tradisjonelt er konkreter. En studie ble utført hvor én gruppe brukte pinner og en annen brukte grafisk fremstilte pinner på en pc for å se om det utgjorde noen forskjell. Her ble det vektlagt at fremstillingen skulle være så identiske som mulig. Denne studien viste ingen forskjell mellom gruppene (Clements og McMillen, 1996). De konkrete representasjonene som fremkommer på en pc-skjerm er ikke fysiske, men spørsmålet er om den taktile virksomheten, har noe å si for innlæringen. Vi mener grenselandet mellom det som kalles konkret og ikke, viskes noe ut ved bruk av pc. I så tilfelle vil en pc bidra med noe ekstra som bruk av konkreter ikke kan, for eksempel å vise notasjoner mens man holder på. I Thompsons studie beskrives en gruppe som bruker de tradisjonelle treklossene. Treklossene blir imidlertid fortsatt brukt hos Microworldelevene, i en mer moderne form. I en mer moderne form som har flere muligheter og på den måten gjør at elevene profitterer bedre. Dersom vi ser for oss stadiene i matematikkopplæringen, så har det tradisjonelt vært slik at man har gått fra konkret via halvkonkret til abstrakt. Ved bruk av konkreter vil elevene ikke kunne knytte notasjonene til det som det faktisk skal representere, mener Thompson. Innlæringen av notasjonsbruk kommer antakelig lettere dersom man har forståelse for mengder og matematiske begrep. Vi ønsker vel heller ikke at barn skal kunne tolke bokstaven ”A” samtidig som de lærer å bruke den? Det er naturlig at elevene bør kunne bruke konkreter som støtte for innlæringen, ikke minst gjennom motivasjon. Når elever er med på et forskningsprosjekt vil de antakelig yte det maksimale til tross for at innlæringen inneholder svarte prikker eller monotone uspennende objekter. Den daglige matematikkinnlæringen trenger i større grad et fokus på hvordan matematikk skal læres. Vi har erfaring med bruk av penger som en del av matematikkopplæringen. Man trekker fra, lurer på om man har råd til…, hva koster…, osv. Når man gjør dette med svarte prikker er vår erfaring at resultatet blir langt dårligere, og barnet hadde mistet konsentrasjonen raskere. Da snakker vi om konkreter som har en relevans til det som skal læres. Eleven vet hva penger er og hva de representerer, og som sagt har mange av de refererte forskerne vært inne på at konkretene ikke bør ha unødvendige egenskaper som forstyrrer det som skal læres. Pc`n har fått stor innplass i skolen. Det er antakelig ikke forskningsmessig bred eller lang nok erfaring på hvilken effekt dette har på barns utvikling. En av oss har brukt mye pc som en del av matematikkundervisningen og det kan se ut til at forståelsen til barna bedres. Det var også en stor entusiasme når det var pc-bruk og barna var veldig motiverte. Pc ser ut til å få stadig større plass i skolen og i barnas hjem. Den samme utfordringen vi har beskrevet tidligere i forhold til irrelevante konkreter er også en utfordring ved bruk av pc. I mange pedagogiske programvarer brukes det mye farger, musikk, lyder og animasjoner for å fange barnas interesse. Disse irrelevante elementene kan virke mot sin hensikt for matematikkopplæring, ved pc-bruk som ved fysiske objekter. Konkreter er i utvikling både gjennom bruk, utseende og oppfølging. Det vi bør finne ut av og vite mer om er hva slags konkreter som gir best læringsutbytte enten det er klosser, konkreter med interessefangende aspekter eller pc.

5 Avslutning

Det å bruke konkreter i matematikkundervisningen er som det fremgår av vår oppgave noe omstridt. Årsaken til at det er dette kan ha noe med hva man leter etter, eller hvordan man evaluerer det man har funnet. Det er mer forskning på tema som vi med våre begrensninger ikke har hatt anledning til å undersøke. Vi er åpne for at fordypning i flere forskningsrapporter kunne frigjort flere tanker og aspekter enn de vi har kommet frem til i denne litteraturstudien.

Bruk av konkreter kan hjelpe barn å forstå matematikk på et abstrakt nivå. Det er noen sentrale elementer som bør vurderes for og best mulig få til denne forståelsen. Resultater fra forskning vi har lagt til grunn kan tyde på at hensynet til individet og lærerens presentasjon av konkretene kan være med på intensivere innlæringen. Hva slags konkreter som brukes synes også å gjøre en forskjell. Konkretenes egenskaper kan hjelpe barnet, men kan også avlede barnets læring. Bruken av konkrete gjenstander bør ses i sammenheng med hvor i utviklingen barna er. Tidsperspektivet er essensielt ettersom ulike konkreter brukes på forskjellige steder i utviklingen. Motivasjon er også en faktor som bør vurderes. Mange barn trenger motivasjon for de operasjoner som skal utføres, samtidig som motivasjonen ikke må bli overflødig slik at oppmerksomheten blir deviert.

Vi hadde en forforståelse om at bruk av konkreter er nyttige komponenter for å styrke barns utvikling og forståelse av matematiske fenomener. Det var både overraskende og interessant å lese gjennom aktuell litteratur og gjøre funn av kritiske innvendinger som sa noe om positive og negative sider ved bruk av konkreter. På bakgrunn av dette har vi etablert mer nyansert og reflektert kunnskap om bruk av konkrete materialer for å fremme styrket læring. Selv om vårt syn er mer fasettert, er det vanskelig å konkludere med noe. Forskningen gir indikasjoner på hvilke overveielser som kan gjøres ved bruk av konkrete objekter i matematikkundervisningen. Allikevel synes ikke forskningen vi har lagt til grunn å gi noen klare svar. Bruk av konkreter med riktig valgte representasjoner til rett tid, kan tyde på at de er nyttige og virkningsfulle elementer i matematikkundervisningen. Men det er usikkerhet rundt hvilke egenskaper ved konkretene som er relevante for optimal utvikling.

Vi har prøvd å forholde oss til forskningen på en så redelig og nøytral måte som mulig. Vår underbygde oppfatning samsvarer med de som mener konkreter er en viktig implikasjon for det som skal læres i matematikk. Selv forskere som stiller seg kritiske er enige i at bruk av konkreter er hensiktsmessig under visse forutsetninger. Tanken om at konkreter bør være en bro fra den konkrete tankestrukturen til den abstrakte, har vært en tanke som teoretikere har skrevet om i lang tid. Piaget skrev i 1974 at barns abstrakte oppgaver i algebra i det formelloperasjonelle stadiet avhenger av tidligere erfaringer med konkrete objekter og fortløpende refleksjon rundt disse erfaringene. Han bruker ordet *avhengig*, som om det er en nødvendighet for å lykkes. Gjennomgang av de fem forskningsprosjektene viser imidlertid at vi ikke bør bruke konkreter ukritisk. Det er en mulighet for at barn til en viss grad er avhengig av konkreter i undervisningen. Hva slags konkreter, hvordan de bør brukes og lærerens oppfølging er kanskje områder som bør få mer fokus? Det kan være gunstig for lærere å få dypere innsikt på temaet. Selv om man skulle mene at læringsutbyttet uansett er til stede ved bruk av konkreter, vil kanskje de fleste ved refleksjon kunne se nytten av å være selektiv og kritisk i sine vurderinger rundt bruk av konkrete hjelpemidler i undervisningen.

Det overordnede målet i forhold til å bruke konkreter må være at de har en læringseffekt. Konkreter har alltid blitt brukt, brukes i dag og vi tror at bruken alltid vil ha en plass i matematikkopplæringen til barn og unge. Matematikk er integrert i nesten alt vi gjør og det er vanskelig å sette et skille mellom det som skjer i klasserommet og det som barnet omgås med i livet for øvrig. Det må være en målsetting å forene disse arenaene på en forståelig måte for barnet. Vi bruker matematikk i dagliglivet og det er en forutsetning at man har forståelse for enkle matematiske prinsipper for å takle hverdagen best mulig.

Vår problemstilling var å finne ut hva forskningslitteraturen sier om bruk av konkreter. Vi mener vi å ha fått noen indikasjoner på at det er usikkerhet rundt hva slags konkreter som gir best avkastning. Det fordrer mer fremstående forskning på hvilke kvaliteter konkretene bør inneha for å genere best mulig overføring. Vi har gjennom denne litteraturstudien sett antydning til noen svar. Vi ser som nevnt imidlertid ikke bort fra at vi kunne ha frigjort andre tanker og refleksjoner rundt bruken av konkreter dersom vi hadde hatt tid og ressurser til å gjøre bruk av flere litteraturkilder.

Denne studien avdekker at det er usikkerhet rundt bruk av konkreter. Det er ønskelig med mer forskning som støtte til hvordan matematikkfaget struktureres og organiseres. En systematisk forskning på hva slags konkreter som er best tjenelig for overføring etterspørres.

Litteraturliste

Bassok, M. og Holyak, K.J. (1989). Interdomain tranfer between isomorphic topics in algebra and physics. *Journal of Experimental Psycology: Learning, Memory & Cognition*, 15, 153-166.

Befring, E. (2007). *Forskningsmetode med etikk og statistikk.* Oslo. Det norske samlaget.

Christophersen, K-A. (2002). Metaanalyse: Syntesedanning av forskningsresultater. *Innføring i forskningsmetode.* Lund, T. (red.). Oslo. Unipub forlag og forfatteren.

Clements, D.H. og McMillen, S. (1996). Rethinking Concrete Manipulatives. *Teaching Children Mathematics*, 2(5), 270-279.USA, National Council of Teachers of Mathematics.

Frostad, P. (1995). *Konkretiseringsmateriell – veien til innsikt?* Tangenten 2/ 1995. Bergen. Caspar forlag AS.

Gall, M.D, Gall, J.P. Borg, W.R. (2007). *Educational Research. An Introduction*. 8.oppl. USA. Pearson Education, Inc.

Goldstone, R.L. og Sakamoto, Y. (2003). The transfer of abstract principles governing complex adaptive systems. *Cognitive Psychology* 46, s.414–466.

Holm, M. (2002). *Opplæring i matematikk. For elever med matematikkvansker og andre elever.* 4.oppl. 2007. Oslo. J.W. Cappelens Forlag a.s.

Kvale, S. og Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju.* 2. utg. Oslo. Gyldendal Akademisk.

Labinowicz, E. (1985). *Learning From Children. New Beginnings for Teaching Numerical Thinking. A Piagetian Approach.* Canada. Addison-Wesley Publishing Company

Herbjørnsen, O. (1998). *Rom, form og tall*, Tano Aschehoug.

Ostad, S.A. (1988). *Bilder til å kjenne på. Utvikling og empirisk utprøving av taktile representasjoner med sikte på den grunnleggende matematikkopplæringen for blinde elever.* Oslo. Forlaget fag og kultur.

Ostad, S.A. (1992). Fra det konkrete til det symbolske. Matematikkopplæring i representasjonsanalytisk perspektiv. *Nordisk tidsskrift for Spesialpedagogikk* 4/1992.

Ostad, S.A. (1990). Hvorfor har barn matematikkvansker? Streiftog i et ukjent landområde. *Spesialpdagogikk – Perspektiver*.Tøyen. Universitetsforlaget.

Piaget, J.A. og Inhelder, B.(1971). *Mental Imagery in the Child. A study of the development of imaginal representation.* London. Routledge & Kegan Paul.

Sloutsky,V., Kaminski, J.A., og Heckler,A.F. (2005) The advantage of simple symbols for learning and transfer. *Psychonomic Bulletin & Review 2005, 12 (3), 508-513.*

Sowell, E. J. (1989). Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 20, nr.5, s.498-505.

Steffe, L.P. (2002). The Constructivist Teaching Experiment: Illustrations and Implications. I *Constructivism in Mathematics Education*. Hingham, MA, USA. Kluwer Academic Publishers.

Tangenten 4/2007 – 1/2003 – 1/2000 – 1/2010 – 2/1995, Caspar forlag.

Thompson, P.W. (1992). Notations, Conventions, and Constraints: Contributions to Effective Uses of Concrete Materials in Elementary Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol.2. Mars.

Uttal, D.H., Liu L.L. og DeLoache, J.S. (1999). Taking a hard look at concreteness: Do concrete objects help young children learn symbolic relations? C. S. Tamis-LeMonda (Ed.) *Child psychology: A handbook of contemporary issues* (pp. 177-192). Philadelphia: PA: Psychology Press

Von Glaserfield, E. (2002). *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Hingham, MA, USA. Kluwer Academic Publishers.

Von Glaserfield, E. (1984). An introduction to Radical Constructivism. I Watzlawick. P. (ed.) *The invented reality*. New York: Norton, s.17-40.

Von Glasefield, E. (1987). Preliminaries to any Theory of Representation. I Claude Janvier (Ed.) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, s. 215-225. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Vygotsky, L. (1986). *Thought and Language*. Newly revised and edited by Alec Kozulin. USA. The Massachusetts Institute of Technology.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. USA. President and Fellows of Harvard College.

Elektroniske kilder:

Ingierd, Helene: "Humaniora, samfunnsfag, juss og teologi" (Sist oppdatert: 10. mai 2010). De nasjonale forskningsetiske komiteer. [Online]. Tilgjengelig på http://etikkom.no/no/FBIB/Introduksjon/Innforing-i-forskningsetikk/Humaniora-samfunnsfag-juss-og-teologi/. [Lastet 29.mai 2011].

Kunnskapsdepartementet (2006) *Rammeplan for barnehagens innhold og oppgaver.* http://www.regjeringen.no/upload/KD/Vedlegg/Barnehager/Rammeplan_2011/KD_bokmal_Rammeplan_2011_web.pdf

Store Norske Leksikon, http://www.snl.no/Sokrates/gresk_filosof (hentet 11.april, 2011).

Thorseth, May: "Referanser" (Sist oppdatert: 17. juni 2009). De nasjonale forskningsetiske komiteer. [Online]. Tilgjengelig på http://etikkom.no/no/FBIB/Temaer/Redelighet-og-kollegialitet/Referanser/. [Lastet 29.mai 2011].

Utdanningsdirektoratet (2010). Matematikk for alle,… men alle behøver ikke å kunne alt. Idédokument. 01.06.2010. Hentet 05.05.2011 fra http://www.udir.no/upload/Rapporter/2010/Matematikk_for_alle_2.pdf'

Utdanningsdirektoratet (2006). *Læreplanverket for kunnskapsløftet (LK06)*. Hentet 05.05. 2011 fra http://www.udir.no/grep/Lareplan/?laereplanid=1101832

Vedlegg 1

FIGURE 4.2

Questions to Ask When Evaluating a Report of a Quantitative or Qualitative Research Study

Introduction

1. Are the research problem, methods, and findings appropriate given the researchers' institutional affiliation, beliefs, values, and theoretical orientation?
2. Do the researchers express a positive or negative bias in describing the subject of the study (e.g., an instructional method, program, curriculum, person)?
3. Is the literature review section of the report sufficiently comprehensive? Does it include studies that you know to be relevant to the problem?
4. Are hypotheses, questions, or objectives explicitly stated, and if so, are they clear?
5. Do the researchers make a convincing case that each research hypothesis, question, or objective was important to study?
6. (Quantitative) Is each variable in the study clearly defined?
7. (Qualitative) Is the measure of each variable consistent with how the variable was defined?

Research Procedures

8. (Quantitative) Did the sampling procedures produce a sample that is representative of an identifiable population or of your local population?
9. (Quantitative) Did the researchers form subgroups that would increase understanding of the phenomena being studied?
10. (Qualitative) Did the sampling procedure result in a case or cases that were particularly interesting and from whom much could be learned about the phenomena of interest?
11. (Qualitative) Was there sufficient intensity of data collection?
12. Is each measure in the study sufficiently valid for its intended purpose?
13. Is each measure in the study sufficiently reliable for its intended purpose?
14. Is each measure appropriate for the sample?
15. Are the research procedures appropriate and clearly described so that others could replicate them if they wished?

Research Results

16. Were appropriate statistical techniques used, and were they used correctly?
17. (Qualitative) Did the report include a thick description that brought to life how the individuals responded to interview questions or how they behaved?
18. (Qualitative) Did the researchers triangulate their data sources and data-collection methods to test the soundness of their findings?
19. (Qualitative) Did clearly stated hypotheses or concepts emerge from the data that were collected?

Discussion of Results

20. Do the results of the data analyses support what the researchers conclude are the findings of the study?
21. Do the researchers provide reasonable explanations of the findings?
22. Do the researchers relate their findings to relevant theory and previous research?
23. Do the researchers appropriately qualify the generalizability of their findings?
24. Do the researchers reflect on their values and perspectives and how these might have influenced the study outcomes or steps that were taken to minimize their effect?
25. Do the researchers suggest further research to build on their findings or to answer questions that were raised by their findings?
26. Do the researchers draw reasonable implications for practice from the findings?

Note: Questions that apply specifically to quantitative research or to qualitative research are so noted. Otherwise questions apply to both types of research.

Source: Adapted from Appendixes 4 and 5 in: Gall, J. P., Gall, M. D., & Borg, W. R. (2005). *Applying educational research* (5th ed., pp. 534–543). Boston: Allyn & Bacon.