Enhet i mangfold

Festskrift til

Johan Arnt Myrstad

i anledning 60-årsdagen

Kjære Frode.

Hjertelig takk for ditt bidrag og for at du alltid har vært en god venn og opponent, som hjelper til å holde også min tenkning frisk og ledig!

Arnt

ENHET I MANGFOLD

Festskrift til

Johan Arnt Myrstad

i anledning 60-årsdagen

Anita Leirfall og Thor Sandmel
redaktører

Unipub forlag

ISBN 978-82-303-1179-0

Produsert i samarbeid med Unipub

Trykk: AiT e-dit AS

Innhold/Contents

Tabula gratulatoria ix

Forord xi

Preface xiii

Introduction xv

En students møte med Arnt Myrstad
av Trygve Lavik 1

Three Dogmas of 'If'
av Rani Lill Anjum 5

Hvordan er det mulig å ha en gjenstand som sin?
Deduksjon i Kants rettslære
av Sven Arntzen 17

Desire as a Bipropositional Attitude
av Olav Asheim 41

"2+2=4" er misvisande
av Frode Bjørdal 55

Det er forskjell på skjønnlitteratur og faglitteratur
av Johannes Brodwall 67

Arv, miljø og valg
av Kristoffer Brodwall 69

The Schema of Quantity
av Mario Caimi 77

Kant om rettens videreføring: borgernes lydighetsplikt og de styrendes reformplikt
av Svein Eng 97

Newton: kreftenes geometri
av Olav Gundersen 107

Handlingens naturformidling: Davidson, Wittgenstein, Kant
av Stig Hareide 137

Mysterium og vitenskap
av Torger Holtsmark 153

Væren og den maieutiske lytting
av Lars Håberg 165

Scientific Essentialism, Causal Powers and Functional Kinds
av Trond Gansmo Jakobsen 185

Kantiansk anskuelse og høyere aritmetikk
av Herman Ruge Jervell 201

Time Out of Time: Towards an Expanded, Non-trivial and Unitary Theory of Time from Recent Advances in the Hadronic Sciences
av Stein Erik Johansen (hilsen til jubilanten side 217) 219

Et strukturalistisk syn på naturlige tall og deres representerbarhet
av Frode Kjosavik 273

Naturen i tenkningen
av Terje Kvilhaug 285

Tidens mote: En kamp mellom produsenter og konsumenter
av Trygve Lavik 313

Kants absolutte rom i *Gegenden* og rommet som *a priori* i *Kritik* En sammenstilling
av Anita Leirfall 325

Potensialitet i naturen
av Svein Anders Noer Lie 341

Discourse on the Method versus Orientation in Thinking
av Francoise Monnoyeur 367

Den som kun tar spøg for spøg, og alvor kun alvorligt... Om humor og alvor i en blodig hverdag
av Anton Myhra 375

Behovet for oppmerksomhet
av Elisabeth Myrstad 389

An Interpretation of the Causal Schema: On the Second Analogy and a Possible Theory of Reflection
av Jørgen Sandemose 395

Logic, Mathematics and Mathematical Logic An Attempt at a Clarification of Concepts
av Thor Sandmel 409

Deflationary Idealism and Kantian Subjectivity
av Camilla Serck-Hanssen 431

Hamann versus Kant – i all vennskapelighet
av Øystein Skar 447

On the Case Study Method
av Sigurd Tønnesen 455

Kant and Dependence Relations: Kant on the State's Right to Redistribute Resources to Protect the Rights of Dependents
av Helga Varden 467

Tid, rom og verdensmodeller Et transcendentalfilosofisk forsøk
av Truls Wyller 495

"2+2=4" er misvisande

Frode Bjørdal

Eg hevdar ikkje at det nokon gong er slik at to ting i tillegg til to andre ting ikkje vert fire ting. Grunnane til at eg finn at ein bruk av identitetsteiknet i uttrykket "2+2=4" er villeiande, heng saman med at eg er komen til at mange funksjonar er paradoksale. I samband med det har eg òg kome til at det fins paradoksale tal.

Det fylgjer ikkje av noko eg seier at ein ikkje kan utarbeide ein teori som er slik at det innan dei meir avgrensa rammene den er bygd opp innanfor vil vera slik at ei utleibar setning på forma "2+2=4" ikkje er villeiande. Dette kan til dømes skje om ein lagar ein Peano-aritmetikk med formasjonsreglar som er slik at om både "m" og "n" er termar, so er òg "m+n" ein term. Noko ein likevel lyt ta innover seg, er at ein slik Peano-aritmetikk vil vera ein særdeles veik teori, og ein som ikkje er på høgda med det som trengst i matematisk og vitskapleg praksis. Ein lyt òg, tenkjer eg, ta innover seg, at det å føresette tilsvarande ålmenne byggereglar for det å laga termar i dei sterkare mengdeteoretiske teoriar som me klårt treng, vil vera høgst unaturlig, om i det heile mogeleg.

Om ein skal leggje til grunn ein matematisk grunnlagsteori som kan vera tilstrekkeleg til nytte for vitskap, og samstundes òg passande for den filosofiske refleksjon, so lyt me ha noko som er mykje sterkare enn Peano-aritmetikk. Om dette er der likevel einskilde røyster, som til dømes den predikative av røystene til Soloman Feferman, som ut frå nokre forståingar vil avvike. Men eg er klårt på linje med eit ovstort fleirtal, og ei velgrunna semje i dette. Her er det nok no til dags mest slik at det er den klassiske mengdelæra ZF (Zermelo-Fraenkel mengdelære), med eller utan utvalsaksiomet, som lenge har rådd grunnen, og som so å seia utgjer "gullstandarden" i samtidig matematikk, og òg i det meste av den filosofiske refleksjon omkring matematikken.

Når ein legg til grunn ZF som ein grunnlagsteori, so er det mellom anna fordi ein kan greia å kode det som førekjem i matematisk praksis på ein slik måte at det matematiske teoremet samt avleiinga tilsvarar eit teorem og ei avleiing innan ZF. Om dette ikkje allereie gjeld, so vil ein oppnå ei slik koding inn i ein teori ZFX, der X no er eit eller anna eksotisk aksiomatisk prinsipp som styrkar ZF. Det er sjeldan, eller nærmast aldri, tilfelle at ein treng noko meir enn ZF, eller ZFC (ZF med utvalsaksiomet) for å få til ei passande koding. Oftast treng ein berre mykje svakare prinsipp. Å avstemme slikt i forhold til mykje, mykje svakare mengdeteoriar, eller likeverdige delsystem av andreordens-aritmetikken til David Hilbert og Paul Bernays, er prosjektet til dei som fylgjer Harvey Friedman og Stephen Simpson i deira, etter kvart, særs vidgjetne prosjekt i *omvendt matematikk* ("reverse mathematics").

Korles vil eit naturleg tal sjå ut om me kodar det inn i ZF? Her vil nokre val vera opne. Om me vel å avgrense endelege ordinalar slik Ernst Zermelo gjorde, eller slik John von Neumann gjorde, og late dei i sin tur stå for dei naturlege tala, er opp til oss sjølve, so og seia. Slik sett vil der vera eit element av konvensjonalisme når me kodar matematiske setningar inn i ZF, eller tilsvarande grunnlagsteoriar. Nokre, som til dømes Paul Benaceraff, har nærmast sett dette som eit problem. Tanken er då at det er eit problem at me ikkje fær avklart kva eit naturleg tal i røynda er ved ei slik koding inn i ZF, sidan på lag einkvar likeforma omega-ordna sekvens kan spela same rolla som einkvar annan når det gjeld det å stå for dei naturlege tala. Dette vil eg ikkje gå særleg innpå her, men eg skal gje tre merknadar med kommentarar. For det første kan det vera at ein annan grunnlagsteori kunne unngå alle slike element av vilkårleg konvensjonalisme som den påpeikte. Dette er no noko som eg likevel ikkje trur let seg gjera, men eg skal ikkje gå inn på grunnane til det her fordi eg kjem kort tilbake til dette i neste avsnitt. For det andre kan det vera at naturlege tal, og andre tal, fins *sui generis*, og at slike lyt få vera med som urelement i ein passande grunnlagsteori. Eg synest, inntil eg eventuelt fær greie på andre grunnar som veg tyngre i den andre retninga, at ei slik oppfatning bør avvisast fordi ho vil stride mot den haldning at me skal vera ontologisk sparsame, slik William Ockham la vekt på det. For det tredje kan det godt vera slik at matematikk i botnen kort og godt er studiet av strukturar, og at det ikkje finst unike strukturar som framfor alle andre strukturar stend for noko slikt som naturlege tal. Eg trur at ei slik haldning som den siste i grunnen kan vera fruktbar. Eit slik strukturalistisk syn på den matematiske tenkinga har fått mykje vind i segla dei seinare åra, og eg har på fleire vis ein viss sans for det. Om ein vel eit slik strukturalistisk syn på den matematiske røyndomen, so kunne ein seia at "2+2=4" er misvisande fordi det i røynda ikkje fins (unike) naturlege tal som 2 og 4. Min innfallsvinkel til dette er ikkje av eit slikt sofistisk slag.

Korleis vil ein gå fram om ein vil kode setninga "2+2=4" inn i ZF? Fyrst vil ein gjera eit val med omsyn til kva objekt ein vil late stå for dei naturlege tala. Her kan ein til dømes velje mengda av endelege Zermelo-ordinalar som eit passande objekt. Då vil den tome mengda stå for talet null, og etterfylgjaren av eit naturleg tal m vil vera mengda som inneheld akkurat mengda m. Då vil me til dømes ha at 0=Ø, 1={Ø}, 2={{Ø}}. (Alternativ kunne me til dømes valt von Neumanns alternativ der 0=Ø, 1={Ø}, 2={Ø,{Ø}}={0,1}.)Me må mellom anna også gjera eit val med omsyn til korleis me ynskjer å framstille ordna par, om me ynskjer å utvikle talteori. Her kan me fylgja Norbert Wiener eller Kazimierz Kuratowski eller andre. Det er vårt val. Me kan til dømes seia at <a,b> per definisjon er eins mengda {{a},{a,b}}. Men me kunne altso valt andre framstillingar som er like so gode. Her er difor eit anna vilkårleg aspekt ved kvar koding, og eit som etter mitt syn gjer det vanskeleg å tru at ein kan greia å leggje til grunn ein teori som evnar å gjenreise den før-teoretiske trua på at omgrepa 'naturleg tal' og 'talteori' er presise (jfr. fyrste merknad i førre avsnitt).

Når me har tatt avgjerder med omsyn til kva me meiner med "naturleg tal" og "ordna par", so er det meste einfelt når det gjeld det å framstille talteori i ZF. Me treng ikkje å gå inn i dei tekniske detaljane. Dette er gjort allereie, og det er velkjent i vide krinsar. Om no N er den mengda i ZF som stend for dei naturlege tala etter den kodinga me har valt, så vil me med kjende rekursive prinsipp på passande vis greia å avgrensa funksjonen + som ein som tek oss til dei naturlege tala N frå N^2, som er mengda av ordna par av naturlege tal, eller det "Cartesiske produktet" av N.

I klassisk mengdeteori er det slik at ein ålment vil skriva "f(x)=y" i staden for "$<x,y> \in f$" når f er ein funksjon. Ein slik skrivemåte som den første i førre setning har vel helst pedagogiske opphav. Setninga i vårt eksempel, d.e. "2+2=4" er eigentleg uttrykk for ei spesiell mellomskrift som stend for $+(<2,2>)=4$. Altso vil setninga me her i hovudsak drøftar etter dette i klassisk mengdeteori tilsvara $<<2,2>,4> \in +$. Det siste uttrykket uttrykker det at det ordna paret, som har det ordna paret <2,2> som første medlem og 4 som det andre medlem, er eit medlem av plussfunksjonen.

I ein teori som omgjeng paradoksa på ein slik måte som ZF prøver på, so vil det aldri vera slik at det kan vera eit teorem at p samstundes som det er eit teorem at ikkje-p. Men no trur no eg at den haldning til paradoksale fenomen som ligg til grunn i ZF, og i liknande teoriar, er djupt feilaktige og utilstrekkelege, og kanskje mest å likna med det å halde for øyrene, og feste på skylappar, av di det fins noko som ein ikkje vil høyra på, og noko som ein ikkje vil sjå. Samstundes må ein vera rettvis nok til å sjå at ZF og liknande teoriar har vore særs fruktbare. Det må alltid vera slik at nokre problem lyt venta for å finne ei eventuell avklåring, og at ein då i mellomtida fær halde på med noko anna som er viktig. Dei paradoksale fenomena er vanskelege problem, og eg trur at det er fyrst i våre dagar at me har fått avgrensa metodar som gjer det mogeleg å sjå disse fenomena i meir avklåra lys.

Eg meiner at det i dei paradoksale fenomena sjølve ligg ei djupn som i høg grad vil koma til å kasta lys over dei matematiske grunnlagsproblema, og i stort mon, både filosofisk og matematisk sett, på overraskande måtar. Den mest presise utlegninga eg so langt har publisert skriftleg frå mi eiga forsking omkring dette, ligg føre i artikkelen eg publiserte i LOGICA-Årboka ("The LOGICA Yearbook") frå 2005. Dei som ynskjer å gå meir inn i saka for å forstå meir av kva eg tenker om dette, lyt sjå der, og eventuelt be om å få utdrag frå meir utførlege, og enno skriftleg upubliserte, arbeid, om interessa då vert fenga. Mykje av dette er allereie publisert munnleg i innlegg eg over, etter kvart, lengre tid har halde ved Seminaret for Matematisk Logikk ved Matematisk Institutt ved Universitetet i Oslo.

Minimalistisk liberalisme, heretter ל (her nyttar eg den Hebraiske bokstaven "lamed" som avstutting), har ei rekkje særeigne kjenneteikn. La meg liste opp nokre: (0) Språket til ל er jamt likt med det klassisk mengdeteoretiske, men der er nokre skilnadar som eg her berre peikar på. ל har ikkje eit primitivt identitetsteikn. Språket til ל inneheld ein sanningsoperator, samt eit sannings-predikat og eit nummereringspredikat. Medlemskapsteiknet "$\in$" er avgrensa som ei avstutting for applikasjon. Mengdeparantesane "{" og "}" let seg ikkje, som i ZF, eliminera. Dette er mellom anna eit uttrykk for at ל ikkje er ein førsteordens teori. I ein viss forstand er ל ein uordna teori. (Språket til ל kan sjølvsagt utvidast på ulike vis, for eksempel for å inkludere urelement.) (1) Om ei setning er eit teorem i klassisk predikatlogikk i språket til ל, so er den setninga også eit teorem i ל. (2) Om ei setning er eit teorem i ל, so er ikkje negasjonen av den setninga eit teorem i klassisk predikatlogikk. (3) Om $A(x)$ er ein formel med berre x fri, so vil $\forall x(A(x) \supset x \in \{x:A(x)\})$ vera eit teorem i ל. (4) Om $A(x)$ er ein formel med berre x fri, so vil $\forall x(x \in \{x:A(x)\} \supset A(x))$ vera eit teorem i ל. (5) Det fylgjer til dømes at om $R=\{x:x \notin x\}$, so vil det vera eit teorem i ל at $R \in R$, men det vil også vera eit teorem i ל at $R \notin R$! (Eg må leggje til at der sjølvsagt er ei rekkje meir grunnleggande aksiomatiske prinsipp i ל som fører til mellom anna dette. Men i denne artikkelen skal me ikkje gå inn på detaljar omkring aksiomatiske aspekt ved ל. Dei som er interesserte lyt sjå i stykket eg nemnde i førre avsnitt.

Korleis unngår ein so at alt fell i grus? Lykelen er her mellom anna at modus ponens ikkje held som ein ålment gyldig slutningregel i ל. I staden har ל 8 andre slutningsreglar som ein kan syne at i fullt mon erstattar den rolla modus ponens spelar i det klassiske rameverket. Eg har nemnd disse "modus maximus", "modus subiunctio", "modus antecedentiae", "modus assent", "modus occident", "modus Barcan", "modus attestor" og "modus minor". Sams for dei er at det no ikkje er tilstrekkeleg, som i slutningsregelen modus ponens, å visa til at noko er avleibart for å støtte opp om det at noko anna er avleibart. Eg seier at ei setning p er ei maksime i ל om det er slik at p er eit teorem i ל og det ikkje også er slik at ikkje-p er eit teorem i ל. Eg seier at ei setning p er ein minor i ל om p er eit teorem i ל og også ikkje-p er eit teorem i ל. (Eit setningsskjema kallast eit minorskjema om nokre instansar er minorer, og eit maksimalt skjema om det ikkje er eit minorskjema.) Slutningsregelen modus maximus seier no at om båe p og $p \supset q$ er maksimer, so er også q ei maksime. Modus antecedentiae seier at om p er ei maksime og $p \supset q$ ein minor (teorem) so er q ein minor (teorem). Modus subiunctio seier at om p er ei minor og $p \supset q$ ei maksime so er q eit teorem (minor eller maksime). Modus assent seier at om q er ei maksime (minor) so er også Tq ei maksime (minor). (Her er T sanningsoperatoren.) Modus occident seier at om ikkje-T-ikkje q er ei maksime (minor) so er også q ei maksime (minor). Modus Baracan seier at om $\forall xTA(x)$ er ei maksime, so er også $T\forall xA(x)$ ei maksime. Merk at dette kan ikkje styrkast. Det finst situasjonar der $\forall xTA(x)$ er ein minor og ikkje-$T\forall xA(x)$ er ei maksime! Dette fører òg til at modus attestor, som seier at om $T\exists xA(x)$ er eit teorem (maksime eller minor) so er også $\exists xTA(x)$ eit teorem (maksime eller minor) ikkje kan styrkast på det nærliggjande vis.

I avgrensinga av disse slutningsreglane ligg det til grunn ein semantisk teori som eg ikkje kan gå inn på i detalj her. Grovt sett kan ein seia at der er eit sterkt samband til det som ut frå den nyare litteraturen om paradoksale fenomen kan kallast ein Herzberger-Gupta prosess, og som vert nytta til dømes innanfor den sokalla revisjonære sanningsteorien ("the revisionary theory of truth") til Anil Gupta og Nuel Belnap. Ein viktig skilnad er at me i ל held eit fokus på mengdeabstraksjon i staden for det å fokusere berre på sanningsomgrepet. Ein annan avgjerande skilnad er den at me reknar ei setning som sann, i semantikken for ל, om, og berre om, setninga er ubunden under tillåsingsordinalen ("the closure ordinal"). Tillåsningsordinalen me refererer til her vil vera i slekt med den som kjem fram i den type konstruksjon Saul Kripke gjorde bruk av, og som vart vidareført på ulike måtar av Hans Herzberger, Anil Gupta og andre. Å få til ei slik avgrensing på det reint semantiske nivået er greitt. Det å få det til på det syntaktiske nivået krev at ein gjer bruk av ei ikkje-predikativ tilnærming i avgrensinga av kva det vil seia at noko kan provast i ל. Men ei slik avgrensing let seg altso gjennomføra, og med framgangsmåtar som er pålitelege om ein i det minste tenkjer at ZF+ "det fins minst ein utilgjengeleg kardinal" er konsistent. Men det er nok ingen i ZF-tradisjonen som tvilar på det siste.

Eit interessant trekk ved ל er at teorien støtter ein Leibniziansk type definisjon av identitet. Me kan syna at om $\forall y(b\in y\supset c\in y)$, so kan b og c erstatta einannan alle stadar, og det i ei maksimal tyding. Me kan òg syne at dette er ein ekvivalensrelasjon, og på eit vis som minnar om ei liknande utleiing av Bertrand Russell og Alfred Whitehead i Principia Mathematica, om eg hugsar rett. Me definerer difor i ל uttrykket "b=c" ved å seia at det er einstydande med "$\forall y(b\in y\supset c\in y)$".

Det er også eit sentral resultat i ל at identitetsforhold er ikkje-paradoksale. Med dette meiner eg her at om b=c er eit teorem i ל, so er det ei maksime i ל at b=c, og, òg, om $b\neq c$ er eit teorem i ל, so er det ei maksime i ל at $b\neq c$.

Tidlegare såg me at om R er Russells mengde, so er $R\in R$ eit teorem i ל, og det er òg slik at $R\notin R$ er eit teorem i ל. Me såg òg at "2+2=4" vert representert som $<<2,2>,4>\in +$ under ei eller anna koding inn i ZF. So lenge me avgrensar oss til dei naturlege tala, eller dei rasjonelle, vil slike kodingar under ל fullt kunne harmonere med det biletet vi har ut frå ei tilsvarande ZF-koding. Men i matematisk og vitskapleg praksis, og i den filosofiske tenkinga omkring det, eller med det, matematiske, lyt ein gå vidare og gi ei avgrensing til dømes også av dei reelle tala. Om me til dømes fylgjer dei liner Dedekind trakk opp, so er vegen vidare til dei reelle tala då rimeleg klår. Me avgrensar først heiltala, og so dei rasjonale tala med ein eller anna klassisk framgangsmåte. Når me so har dei rasjonale tala Q og har avgrensa "__er større enn... i høve til Q", so let me mengda **R** av reelle tal vera mengda av alle undermengder X av Q som er slik at (i) X er ei ekte delmengde av Q, (2) X er ei ikkje-tom delmengde av Q, (3) X har ikkje noko største element i høve til Q og (4) om b er med i X og c er med i Q og b er større enn c i høve til Q, so er c med i X. Det me har avgrensa her er soleis dei kjende Dedekind-snitta som nyttast i klassisk mengdelære for å avgrensa noko som kan stå for dei reelle tala.

Det som berre er mildt overraskande, om i det heile, er at ei slik avgrensing vel kan gjerast også i ל, og me fær alle dei tradisjonelle reelle tala du berre ynskjer å be om. Men det som klårt overraskar er at der no vil vera paradoksale reelle tal! La talteikn med ”Q” som opphøgd merkeskrift stå for dei rasjonalt avgrensa naturlege tala. Me kan no til dømes drøfte mengda $\Delta=\{x:x\in Q\&((x<2^Q\&R\in R)\vee((x<0^Q\&R\notin R))\}$, der R igjen er Russells mengde som avgrensa ovanfor. Lat $b\simeq c$ tyde at b og c er koekstensjonale, dvs. $\forall x(x\in b\equiv x\in c)$. La det reelle talet null vera gitt ved $0=\{x:x\in Q\ \&\ x<0^Q\}$. Det viser seg, på måtar eg ikkje kan gå inn på her, men som kan vera ei høveleg oppgåve for nokre av lesarane, at ל no provar at $\Delta\simeq 0$ og ל også provar $\Delta\simeq 2$. Samstundes har me òg at ל provar $\Delta\not\simeq 0$ samt at ל provar $\Delta\not\simeq 2$!

Me kan innan ל på ulike vis avgrensa oss til berre det å vurdera klassiske ikkje-paradoksale mengder ved å fokusere på ulike avgrensa mengder i ל. I dette arbeidet har det i samband med slike undersøkingar no vist seg at ל har minst same konsistensstyrke som ZF, i den tyding at om ל er konsistent so er også ZF konsistent. Dette kan me ikkje gå nærare innpå her. La meg berre seia at konsistensargumentet (eller kanskje betre: ”ikkje-trivialiseringsargumentet”) for ל kan utførast med berre ei lita utviding av ZF.

Eg trur at me lyt vera mest mogeleg opne for dei paradoksale objekta for å vinne eit meir avklåra bilete av den matematiske røyndomen. Det er fleire grunnar til det. Ein grunn er at me ut frå eit slikt perspektiv er i stand til å avvisa Cantors hierarki av ulike gradar av endeløyse (riksmål: ”uendelighet”). Cantors teorem i klassisk mengdelære, som seier at det ikkje kan finnast ein funksjon frå ei endelaus mengde til eiga potensmengde, vert i ל i staden ommynta til eit paradoksalt fenomen. Dette var noko eg allereie i ein tidleg versjon var merksam på, og sidan argumenterte for i stykket mitt i LOGICA-årboka frå 2004. Men ein betra og meir klårgjerande argumentasjon for dette vert gitt i stykket eg hadde med i den fylgjande LOGICA-årboka. Eg finn eit slik syn som dette langt meir tilfredsstillande, og av ei rekkje grunnar. Mange grunnar heng i sterk grad saman med slike tankar som også Skolem gjorde seg i samband med det som gjerne vert kalla ”Skolems paradoks” i våre dagar. Men nokre andre er nærskylde med tankar Frederic Fitch gjorde seg med omsyn til det filosofisk naudsynlege i det å ha eit språk som, på ein passande måte, kan greia å vera sitt eige metaspråk.

Det liberalistiske synet inneber altso at det fins berre tellbart uendelege mengder. Når ein ut frå klassisk mengdelære tenkjer noko anna, so er det av di ein ikkje på høveleg vis kunne taka omsyn til at det fins paradoksale mengder, og dette skapte, etter mitt syn, nærmast ei slags hildring som diverre har fått generasjonar av matematikarar og filosofar til feilaktig å tenkje at det fins ulike gradar av endeløyse. I det liberalistiske rameverket vert dette annleis, og Cantors

Teorem held ikkje her. Ut frå det liberalistiske synet fins det berre tellbart uendelege mengder, og då vert sjølvsagt Skolem-Löwenheim-teoremet også tømt for sitt mest interessante interessant innhald. Ei fylgje er at det sokalla Skolems "paradoks" vert oppløyst. Det same gjeld kontinuumsproblemet. Alt dette grev samstundes også vekk grunnen under dei støttepunkt Hilary Putnam nyttar i sitt modellteoretiske argument mot metafysisk realisme, og me kan ut frå den liberalistiske grunnlagsteorien med godt samvit gjere svært realistiske føresetnadar i vår filosofiske tenking.

Det er elles verdt å framheva, at dei føresetnadane som ligg til grunn i Giuseppe Vitalis konstruksjon av ikkje-målbare mengder er av ein sånn karakter at slike mengder vert beint fram paradoksale når ein legg til grunn ei mest mogeleg omgripande avgrensing av objekt som kan vera reelle tal. Dette inneberer også at det med rette vidgjetne Banach-Tarski-"paradokset" vert blokkert under ei slik tilnærming, for då vil dei rette utvalsprinsippa mangle på sentrale stadar. (Eg heldt eit upublisert foredrag, *The Banach-Tarski Paradox in the bialethic Framework of CAPTION*, om dette ved LOGICA 2004 konferansen i Hejnice, Tsjekkia i juni 2004, og også tidlegare den våren ved Filosofisk Forum i Oslo.)

Om me då legg til grunn at også paradoksale reelle tal må få høyre til, men sjølvsagt på tilpassa og avgrensa vis som me held styr på, so har me i vår mengde R av reelle tal, avgrensa på eit klårt Dedekinsk vis, også slike paradoksale tal som Δ. Når me no søkjer å avgrensa ein plussfunksjon + frå R^2 til R, so må denne også verka på til dømes $(<2,\Delta>)$. Men her vil me då få at ל provar $<<2,\Delta>,4> \in +$, ל provar $<<2,\Delta>,2> \in +$, ל provar $<<2,\Delta>,4> \notin +$ og ל provar $<<2,\Delta>,2> \notin +$! Gitt det eg sa ovanfor om at identitetssetningar i ל er ikkje-paradoksale, kan me soleis ikkje innanfor rammene til ל skrive "$2+\Delta=4$", eller meir ålment altso avstutta slike uttrykk for det å falle inn i ekstensjonen for ein funksjon med ei identitetssetning. Det avgjerande reint systematisk sett er sjølvsagt ikkje kva symbol som vert brukte. Men det er i våre dagar naturleg å halde oss til den tradisjonelle bruken av identitetsteiknet, som Robert Recorde byrja med å bruke på midten av sekstenhundretalet. Men i visse samband lyt me altso bryte med standard teiknbruk, og det er fordi det ikkje eigentleg er identitet som speler den avgjerande rolla, men noko anna, at det vert foreslått her for situasjonar der det kan vera trong for det. I det siste stykket mitt som eg nemnde, gjorde eg bruk av symbolet ≎ som ei alternativ forkorting, for då vil ikkje maksimaliteten i identitetsteorien forhindra oss frå å skriva $2+\Delta ≎ 4$ og $2+\Delta ≎ 2$, samt negasjonane av disse setningane, som alle er teorem i ל.

Dette er bakgrunnen for det eg skreiv i tittelen. Vår tilnærming bør vera følgjerett, so av dei same grunnane som dei eg har peikt på må me, i det minste når det ut frå samanhengen er fare for mistydingar, skrive, til dømes, "2+2≎4" i staden for "2+2=4".

Eg tenkte ei tid at ל er kontradiktorisk og konsistent. Kontradiktorisk av di ל kan ha eit teorem p samstundes som at også ikkje-p er eit teorem i ל. Konsistent av di ל aldri har eit teorem på forma ”p og ikkje-p”. På visse måtar kunne ein ut frå det tenkje at ל høyrer med til sokalla ”para-konsistente” tenkjemåtar. Betre er det nok å sjå på dette som ei slags Hegeliansk syntese mellom para-konsistente tilnærmingar og tilnærmingar i tradisjonen frå Saul Kripke, Peter Woodruff, Hans Herzberger og andre. Para-konsistente tilnærmingar oppfyller ikkje slike viktige og passande krav som ל oppfyller, og dei er både logisk og matematisk sett fattige om samanlikna med ל. Det same kan seiast med omsyn til tilnærmingane i den andre tradisjonen eg nemnde.

No tenkjer eg annleis. Eg tenkjer at ei setning p i systemet ל er kontradiktorisk med ei setning q om, og berre om, det at p er eit teorem i ל inneberer at q ikkje er eit teorem, og, omvendt, det at q er eit teorem i ל inneberer at p ikkje er eit teorem i ל.

ל viser seg å gi eit slags uttømande bilete av den matematiske røyndomen. Det syner seg, og på eit overraskande vis som heng nøye saman med Currys paradoks, at enten er ei setning q eit teorem i ל, eller so er setninga ikkje-q eit teorem i ל! (Her er det avgjerande at ein har ein særskilt semantikk i fokus når ein avgrensar avleiingsomgrepet.) Dette synest sjølvsagt å strida mot Gödels sentrale resultat! Men det gjer ikkje det. Hugs at me ovanfor påpeikte at avgrensinga av kva det vil seia at noko kan provast i ל skjer på eit ikkje-predikativt vis. ל er difor ikkje ein rekursivt aksiomatiserbar teori, og Gödels tilnærmingsmåte kan difor ikkje brukast på det fulle systemet ל. I staden kan likevel Gödels innfallsvinkel nyttast for å vise at om du trur du har funne alle gyldige aksiomatiske prinsipp for ל, so tek du feil. I ein viss forstand inneber dette at ”erkjenninga” av sanninga til ”Gödels setning” for eit fragment av ל kan ”gjerast” av ל sjølv.

Gitt dette at kvar setning p er slik at p er eit teorem i ל eller ikkje-p er eit teorem i ל, og gitt vår avgrensing av kva det vil seia at to setningar i ל er kontradiktoriske i avsnittet før det førre, so fylgjer det at ei setning p er kontradiktorisk med ikkje-p om, og berre om det ikkje er slik at båe p er eit teorem i ל og også ikkje-p er eit teorem i ל. Når p er eit teorem i ל, og også ikkje-p er eit teorem i ל, seier eg at p og ikkje-p er *komplementære*. Dette er for å avgrensa ein viktig skilnad, og her gjeld det ikkje berre ord. Eit sentralt trekk med alle tilnærmingar til paradoksa vil, og lyt naudsynleg, vera, at visse ord, slik me nyttar dei i den daglege talen, må få ei justert tyding i den grunnlagsteorien som vert utarbeidd. I den liberalistiske tilnærminga som eg fremjar, ser me dette klårt i samband med det forhold at dei logiske konnektiva fær ei tyding i paradoksale samband som skil seg frå den me til vanleg legg til grunn, til dømes i introduksjonskurs i logikk eller i vår daglege tale. Det er slik at negasjonen av løgnarsetninga ikkje greier å uttrykkje noko som er kontradiktorisk med løgnarsetninga, ut frå mitt synspunkt. Løgnarsetninga og negasjonen av løgnarsetninga er komplementære setningar, og ikkje kontradiktoriske med einannan. Negasjon, samt konjunksjon og andre konnektiv, verkar på eit ørlite anna vis i slike paradoksale situasjonar. Nokre vil i dette samband finne det høveleg å samanlikna med Saul Kripkes skilje mellom "choice-negation" og "exclusion-negation", og der er både fellestrekk og viktige skilnadar her. I samband med dette kan ein sjølvsagt drøfta om det er konnektiva som fær ei anna meining enn me trudde dei hadde, eller om det er orda i vår daglege tale som har noko andre tydingar enn dei me var overtydde om. Eg trur det siste må vera tilfelle, men det dreg med seg det første. Me må kunne leggje til grunn at ein grunnlagsteori yter daglegtalen mest mogeleg rettferd, men samstundes lyt ein sjå at paradoksale fenomen opptrer i daglegtalen.

Eg hugsar vår kjære Hans Skjervheim i undervisning fortalte om ein gong Arne Næss la ut om si skeptiske haldning, og i det samband òg byrja å problematisere kontradiksjonsprinsippet. Var Arne Næss kanskje i gong med å bu seg til ein samtale med Egil Wyller? I alle fall var det visst slik at ei klok kvinne tilstades sa: "Men då vert du som ei gulrot!" Arne Næss svarte ikkje på dette fekk me høyre, men byrja å plystre! Sambandet her er det at Aristoteles i bok gamma i Metafysikken liknar dei som nektar på kontradiksjonsprinsippet med grønsaker. Kvifor det? Jau, han tenker at dei som seier at det er noko som både er sant og ikkje er sant må motseie seg sjølv, fordi dei føreset at det dei sjølve seier må gjelde. Det er på fleire vis ein svært interessant argumentasjonsstruktur Aristoteles nyttar her, og ein som i våre dagar ofte på sett og vis vert samanfatta med uttrykk som "pragmatisk inkonsistens" eller "performativ inkonsistens". Mange har drøfta slike argumentasjonsstrukturar, og i norsk filosofi er doktoravhandlinga til Gunnar Skirbekk ei god kjelde ut frå ein slik tankemåte. Sjølv vart eg so og seia bergteken av denne slags argumentasjonsform på grunn av Hans Skjervheim, og det vart etter kvart slik at den tyske transcendentalpragmatikken var fokus for meg ei tid. Ein artikkel av Wolfgang Kuhlmann var eit viktig tildriv i dette. Kor som er, so vart det slik at eg fekk reisehøve til Frankfurt am Main, på eit sokalla DAAD-stipend, i studieåret 85/86. Det året vart, om du vil, vigd til eit studium av den nemnde tankefiguren åt Aristoteles, eller det transcendentalpragmatikarane kallar ei refleksiv sistegrunngjeving ("reflexive Letztbegründung"). Eg fekk gode høve til å snakke ein god del med både Karl-Otto Apel og Wolfgang Kuhlmann då, og det var kjekt at Arne Johan Vetlesen var der samstundes på DAAD-stipend det året. Vetlesen snakka stort sett med Jürgen Habermas og sikkert lite eller omtrent inkje med Apel, og for meg var det motsett.

Men det er litt viktig for meg å få seia at i grunnen var det nok logikaren i meg som var drivkrafta også då. Eg enda opp med å skrive ein del arbeidsmanuskript som eg seinare redigerte saman til manuskriptet "Eine Kritik der Tranzendentalpragmatik", og som ein del er kjende med av di det har sirkulert noko. (Tanken var den gongen å ta doktorgraden i Tyskland, og eg vart godteken som doktorand i Frankfurt, men dei planane endra seg.) Men her er det slik at eg kom til ei heller kritisk haldning til dei transcendentalpragmatiske freistnadane på å gje ei slags sistegrunngjeving av til dømes kontradiksjonsprinsippet. Det eg kom til er at ein kan nekte på det at ingen påstand er både sann og falsk, utan at det er i strid med den føresetnad at uttrykket ein bruker for å uttrykke dette er sann og ikkje falsk. Ei slik nekting vil, om me legg til grunn vanlige logiske føresetnadar, uttrykkje det same som at det fins påstandar som er både sanne og falske. Men det kan ein godt seia utan at det er noka pragmatisk eller performativ konflikt mellom det som vert sagt og noko som skildrar det at det vert sagt, slik som det er om einkvan i sinne brøler at han ikkje er sint. Det siste dømet syner etter mitt syn at transcendentalpragmatikarane i grunnen er mykje på villspor når dei freistar å grunngje eit slags naudsyn i omstende som vert påviste ved å fastslå at der er ein slik samanstøyt, eller inkonsistens, mellom det som vert sagt og noko som skildrar det at det vert sagt.

Det er naturleg å leggje til her at på denne tida var ikkje dei parakonsistente tilnærmingane so utvikla og kjende som i dag, og dei var ukjende for meg då. Ei bok som eg leste det året er den til Nicholas Rescher og Robert Brandom, men den gir vel helst eit noko anna og meir uforståeleg bilete av saka. Det som interesserer meg i dette no er å sjå at der er ei linje ein kan følgje i utviklinga, og i nokon grad er det overraskande.

La meg til slutt seia at uttrykket "komplementær" er eit som eg er nøgd med også fordi eg tenkjer at me skal ikkje på førehand utelukka at det fins tilsvarande fenomen i den fysiske røyndomen. I det samband var det ikkje tilsikta at den store danske fysikaren Niels Bohr nytta den same termen omkring einskilde kvantefysiske hendingar, men det gjer meg ikkje noko at der er eit slikt samanfall. Ein av dei tinga som fær meg til å tenkje i retning av det fysiske, er at ikkje-målbare mengder fell utanfor den predikative matematikken, slik Soloman Feferman avgrensar han, og han, som predikativist ved høvet, drøfter dette svært særlig av di der er freistnadar på å gjera bruk av ikkje-målbare mengder i samband med slike hendingar. Jamfør i dette samband med det eg skreiv ovanfor om det umogelege resultatet åt Stefan Banach og Alfred Tarski. Eg er ikkje no i stand til å ta ei fast stilling til i kva grad eit slikt prosjekt som ville gå ut på å røkje etter om komplementaritet, i mi tyding, også fins i den fysiske røyndomen, har mykje for seg. For å få betre inntak i noko slikt ville eg trenge å ha ei meir presis avklaring av nøyaktig kva i matematikk som trengs for å uttrykke kvantefysikk og fysikk elles, og i termar som er presisert i det minste i høve til klassisk mengdeteori. Noko slikt fins ikkje i dag. Tvert om er det slik at det første problemet i David Hilberts liste over uløyste problem var det å gje ei aksiomatisering av fysikken. Problemet er ikkje noko mindre i dag, når ein ikkje eingong veit kva som skal aksiomatiserast! Der er mange uløyste, djupe og vanskelege problem her. Ein kan i dette samband merke seg at både fysikarar og matematikarar arbeider oftast, og av naturlege og svært forsvarlege grunnar, på svært uformelle vis i høve til dei meir formelle krava ein må halde på i matematisk og filosofisk logikk. Men det forhold at paradoksale fenomen også trer inn i slike meir verdslike strukturar som dei reelle tala, der sambandet til dei mykje enklare paradoksale fenomena er gøymde, so å seia, er uansett, slik eg ser det, av stor interesse i dette. Galilei sa som kjent at naturen er skriven i matematikkens språk. Men om det då er slik at komplementaritet i grunnen høyrer til i matematikken, og til og med i so sentrale delar som i mengda av reelle tal, so skal me, tenkjer eg, også vera so fordomsfrie at me er opne for at motsvarande komplementaritet også er noko som kan hende fins i den fysiske røyndomen.[1]

[1] Eg vil takke Dagfinn Føllesdal for nokre nyttige merknadar. Dei fekk meg til å gjera endringar i framstillinga som eg trur stykket vann seg på.