

UNIVERSITETET I OSLO
Fysisk Institutt

**En teoretisk
studie av
nivåtetthetene til
^{45,46}Ti og ^{163,164}Dy**

Masteroppgave

Kristine Wikan

August 2010



Forord

Først og fremst vil jeg takke veilederne mine, Ann-Cecilie Larsen og Magne Guttormsen for all hjelp, selv midt i sommerferien. Magne er utrolig kunnskapsrik og Ann-Cecilie formelig gløder når hun snakker om kjernefysikk. Dere har inspirert meg og lært meg mye.

Jeg vil også takke resten av gruppa på SAFE for at jeg har hatt to flotte år som masterstudent, både faglig og ikke minst sosialt. Vi er en bra gjeng!

Dessuten vil jeg takke mi gode venninne Therese for at hun i alle disse år som jeg har studert ved Blindern, har svart på alle mine dumme spørsmål som jeg ikke har tort å spørre noen andre om. Og for at vi har samarbeidet så godt i mange av de fagene vi har hatt felles. I tillegg har vi tatt en kaffepause sammen nesten hver dag, og det er jo et herlig avbrekk når man sitter foran pcen hele dagen og jobber med oppgaven.

Ellers vil jeg takke resten av mine venner for forståelse over at jeg har vært vært så usosial under innspurten med oppgaven. En stor takk rettes også til kjæresten min for at han har vært klar med middagen når jeg kommer hjem sent fra lesesalen. Du har gjort livet lettere i en travel periode. Sist, men ikke minst vil jeg takke min nærmeste familie. Pappa for at han fikk meg interessert i fysikk og mamma for at hun alltid har hjulpet meg til å ta de riktige valgene her i livet. Av dere har jeg lært å være nysgjerrig, og det er det som har ført meg dit jeg er i dag.

Innhold

1	Innledning	9
2	Kjernens eksitasjonsmoder	13
2.1	Singelpartikkeleksitasjoner	13
2.2	Vibrasjoner	14
2.3	Rotasjoner	15
3	Nilssonmodellen	19
4	BCS-teori for kjerner	23
4.1	Introduksjon	23
4.2	Bølgefunksjonen	25
4.3	BCS-likningene	26
4.4	BCS-likningene for en ren parkraft	28
4.5	Eksiterte tilstander	29
5	Nivåtetthet og tilstandstetthet	31
5.1	Introduksjon	31
5.2	Ulike formler for nivåtettheten	32
5.3	Nivåtetthet og termodynamikk	34
6	Den kombinatoriske modellen	37
6.1	Beskrivelse av modellen	37
6.2	Fordeler og ulemper med modellen	40
7	Resultater	43
7.1	Den totale nivåtettheten	43
7.2	Nivåtettheten som funksjon av spinn	51
7.3	Spinnfordelingen	58
7.4	Nivåtettheten ved bindingsenergien	70
7.5	Brutte par og paritetsasymmetri	74
7.6	Entropi	82

7.7	Temperatur og varmekapasitet	85
8	Konklusjon	93
	Bibliografi	97

Figurer

2.1	Nøytronkonfigurasjonen til grunntilstanden for ^{17}O	14
2.2	Tidsutviklingen for ulike vibrasjonsmoder.	15
2.3	Definisjon av parameteren Ω	17
3.1	Sammenlikning av eksperimentelt bestemt skallskjema med et teoretisk.	21
3.2	Nilssondiagram for lette kjerner.	22
4.1	Skallmodellen og tilhørende magiske tall.	24
4.2	Illustrasjon av et nukleonpar.	25
6.1	Illustrasjon av \vec{R} , det kollektive angulærmomentet	38
7.1	Nilssondiagram for ^{46}Ti	44
7.2	For ^{46}Ti : Sammenlikning av teoretisk og eksperimentell nivåtetthet.	46
7.3	For ^{45}Ti : Sammenlikning av teoretisk og eksperimentell nivåtetthet.	47
7.4	Nilssondiagrammet for ^{164}Dy	48
7.5	For ^{164}Dy : Sammenlikning av teoretisk og eksperimentell nivåtetthet.	49
7.6	For ^{163}Dy : Sammenlikning av teoretisk og eksperimentell nivåtetthet.	50
7.7	Nivåtettheten til titanisotopene for to ulike spinnvinduer.	53
7.8	Nivåtettheten til ^{46}Ti for spinn 1, 2, 3, 4, 5 og 6	54
7.9	Nivåtettheten til ^{45}Ti for spinn 3/5, 5/2, 7/2 og 9/2.	54
7.10	Nivåtettheten til dysprosiumisotopene for to ulike spinnvinduer.	56
7.11	Nivåtettheten til ^{164}Dy for spinn 3, 4, 6, 8, 20 og 30.	57
7.12	Nivåtettheten til ^{163}Dy for spinn 7/2, 11/2, 15/2, 23/2, 29/2 og 35/2.	57
7.13	For ^{46}Ti : Spinnfordelingen for ulike eksitasjonsenergier	60
7.14	For ^{45}Ti : Spinnfordelingen for ulike eksitasjonsenergier	63

7.15	For ^{164}Dy : Spinnfordelingen for lave eksitasjonsenergier	66
7.16	For ^{164}Dy : Spinnfordelingen for høye eksitasjonsenergier. . . .	67
7.17	For ^{163}Dy : Spinnfordelingen for lave eksitasjonsenergier	68
7.18	For ^{163}Dy : Spinnfordelingen for høye eksitasjonsenergier. . . .	69
7.19	Nivåtettheten ved bindingsenergien i $^{163,164}\text{Dy}$	72
7.20	Gjennomsnittlig antall brutte nukleonpar i ^{46}Ti	75
7.21	Paritetsasymmetrien for ^{46}Ti	76
7.22	Gjennomsnittlig antall brutte par i ^{45}Ti	77
7.23	Paritetsasymmetrien for ^{45}Ti	78
7.24	Gjennomsnittlig antall brutte par i ^{164}Dy	80
7.25	Paritetsasymmetrien til ^{164}Dy	80
7.26	Gjennomsnittlig antall brutte par i ^{163}Dy	81
7.27	Paritetsasymmetrien til ^{163}Dy	81
7.28	Entropien til $^{45,46}\text{Ti}$ som funksjon av eksitasjonsenergi	83
7.29	Entropien til $^{164,164}\text{Dy}$ som funksjon av eksitasjonsenergi. . . .	84
7.30	Temperaturen til ^{154}Dy som funksjon av eksitasjonsenergi. . .	86
7.31	Temperaturen til ^{163}Dy som funksjon av eksitasjonsenergi . . .	87
7.32	Temperaturen til ^{46}Ti som funksjon av eksitasjonsenergi . . .	89
7.33	Temperaturen til ^{45}Ti som funksjon av eksitasjonsenergi . . .	90
7.34	Varmekapasiteten til ^{164}Dy og ^{163}Dy som funksjon av energi. .	91

Tabeller

3.1	Nilssonparametre i forbindelse med Nilssons hamiltonfunksjon	20
7.1	Parametre brukt i den kombinatoriske modellen	45
7.2	Parametre brukt for å komme fram til spinnfordelingen	58
7.3	For ^{46}Ti : Feilen til spinnfordelingen	59
7.4	For ^{45}Ti : Feilen til spinnfordelingen.	62
7.5	For ^{164}Dy : Feilen til spinnfordelingen.	64
7.6	For ^{163}Dy : Feilen til spinnfordelingen	65
7.7	Nivåtettheten ved bindingsenergien for $^{164,163}\text{Dy}$	71
7.8	Forholdet η mellom de ulike punktene for $\rho(B_n)$	72

Kapittel 1

Innledning

Atomkjernen, slik vi kjenner den i dag, ble oppdaget i 1911 av Ernest Rutherford. Selv om det er nesten 100 år siden, er det fortsatt mye vi ikke vet om kjernen fordi den er et utrolig komplekst kvantemekanisk system. Kjernen består av nukleoner som enten er protoner eller nøytroner. Nukleonene vekselvirker på en komplisert måte som ennå ikke kan forklares fullstendig. Imidlertid er det mange modeller som forsøker å beskrive kjernen. Skallmodellen kommer fram til mange størrelser og egenskaper ved kjernen ved å kun ta utgangspunkt i singelpartikkelbevegelser, som f.eks. energinivåer, spinn og paritet. I kontrast til å beskrive kjernen ved kun å ta utgangspunkt i singelpartikkelbevegelser, er det i tillegg kollektive egenskaper å ta hensyn til. En kjerne kan for eksempel både vibrere og rotere og det lar seg ikke forklare ut i fra å bare se på singelpartikkelbevegelser. Alle modeller som prøver å beskrive kjernen har sine begrensninger og det finnes ingen helhetlig modell som kan beskrive alle egenskapene til kjernen på en tilfredsstillende måte.

I denne masteroppgaven skal det benyttes en kombinatorisk modell [1] for å ekstrahere ulike egenskaper ved atomkjernen. Resultatene skal sammenliknes med eksperimenter gjort ved Oslo Cyclotron Laboroty (OCL) og/eller ulike teorier innenfor kjernefysikken. Det er særlig tre hovedfelt som skal studeres nærmere: nivåtettheten, termodynamiske egenskaper og spinnfordelingen. Jeg skal benytte fire kjerner i min studie: $^{163,164}\text{Dy}$ og $^{45,46}\text{Ti}$.

Disse fire kjernene ble valgt av flere årsaker. For det første finnes det eksperimentelle data fra disse kjernene. Dessuten befinner alle kjernene seg mellom to fylte skall i skallmodellen, og det er av slike kjerner man kan forvente å få en stor nivåtetthet, noe som gjør det enklere å studere kjernens termodynamiske egenskaper. Isotopene $^{163,164}\text{Dy}$ og $^{45,46}\text{Ti}$ skiller seg fra hverandre ved å befinne seg i ulike masseområder. Mens $^{163,164}\text{Dy}$ er veldig tunge kjer-

ner befinner titanisotopene seg i det lette/middels masseområdet og derfor kommer det til å bli interessant å se om egenskapene til de tunge kjernene skiller seg mye fra de lette. For både de tunge og de lette kjernene har jeg valgt å studere en kjerne med et odde massetall: ^{45}Ti og ^{163}Dy . For to og to nukleoner er det hensiktsmessig å danne et nukleonpar hvor de to nukleonene går i tidsreverserte baner i forhold til hverandre og får tilsammen $I = 0$. I grunntilstanden til en kjerne som består av et like antall protoner og nøytroner er det forventet at totalt spinn til hele kjernen lik null. En odde kjerne vil ha et nukleon som ikke er med i et nukleonpar, og derfor vil grunntilstanden få et spinn som er forskjellig fra null. En odde kjerne vil også skille seg fra like-like kjerner når det kommer til andre nukleære egenskaper, og derfor har jeg valgt å ta med to odde-like kjerner og to like-like kjerner i min oppgave.

Når en kjerne får tilført energi, dvs. eksiteres, kan det hende at noen nukleoner forflyttes til et annet energinivå. Nivåtettheten er et viktig aspekt ved kjernen og defineres som antall energinivåer per energienhet. Ved lave eksitasjonsenergi er nivåtettheten kjent, dessuten er nivåtettheten delvis kjent ved bindingsenergien, B_n , for enkelte kjerner. Ved lave eksitasjonsenergi kan man telle ved hjelp av spektroskopiske metoder hvor mange energinivåer som faller innunder hver energienhet. Når kjernen eksiteres til energi over noen få MeV blir nivåtettheten så stor at det er umulig å skille ut individuelle nivåer eksperimentelt og det sies at kvasi-kontinuum er oppnådd. I denne energiregionen er det lite eksperimentelle data. Et unntak er data fra eksperimenter utført ved OCL. I denne oppgaven kommer jeg til å sammenlikne nivåtettheten basert på eksperimenter og fra den kombinatoriske modellen. Den kombinatoriske modellen finner nivåtettheten ved å kombinere alle tilgjengelige proton- og nøytronorbitaler. Her skal det studeres om den helhetlige strukturen og finstrukturen er like for disse to måtene å komme fram til nivåtettheten på. Nivåtettheten ved bindingsenergien skal også studeres. Dette punktet er basert på antakelsen om at det er like mange nivåer med positiv paritet som med negative. Dette er ikke nødvendigvis tilfelle og derfor skal paritetsasymmetrien ved dette punktet studeres ved bruk av den kombinatoriske modellen.

Eksperimentelt har man funnet nivåtettheten for et lite spinnvindu, typisk $I \approx 2 - 6\hbar$. For å få en nivåtetthet som gjelder for alle spinn skaleres nivåtettheten slik at den går i gjennom punktet ved bindingsenergien. Skaleringen skjer ved å multiplisere nivåtettheten for det lille spinnvinduet med en funksjon: $Ae^{\alpha E}$, hvor E er eksitasjonsenergien, mens α bestemmer stigningen til nivåtettheten og A bestemmer størrelsen på nivåtettheten [2]. For at dette skal gi korrekt resultat, antar man at finstrukturen til nivåtettheten for

det lille spinnvinduet er den samme som for et større spinnvindu. Denne antakelsen skal studeres nærmere. Dersom det viser seg at finstrukturen i nivåtettheten er veldig forskjellig fra det lille spinnvinduet og det store, kommer dette til å ha stor betydning for fremtidige eksperimenter ved OCL.

En av de store fordelene med den kombinatoriske modellen er at man kan velge for hvilket spinnvindu man skal finne nivåtettheten. Derfor skal nivåtettheten fra den kombinatoriske modellen sammenliknes for spinnvinduet $2 - 6\hbar$ og $0 - 30\hbar$. Deretter skal det studeres om strukturen er den samme, og hvis den ikke er det skal feilen anslås.

Et viktig bidrag til nivåtetthetens finstruktur er oppbrytningen av nukleonpar. Der nukleonpar brytes, forventes det å være en stegstruktur i nivåtettheten. Stegstrukturen fra eksperimenter skal sammenliknes med resultater fra den kombinatoriske modellen. Det blir særlig interessant å se om selve stegene er ved samme energi ved det lille spinnvinduet og det store.

Selv om en kjerne har få partikler sammenliknet med f.eks. en gass, kan den fortsatt beskrives som et statistisk system. Det er her termodynamikk kommer inn i bildet. Det er ei god tilnærming å beskrive kjernen som et mikrokanonisk ensemble fordi kjernen er et isolert system uten termisk kontakt med sine omgivelser og den kan dessuten eksiteres til en veldefinert eksitasjonsenergi. Ved å ta utgangspunkt i nivåtettheten og at kjernen kan ses på som et mikrokanonisk ensemble, kan man ekstrahere entropi, temperatur og varmekapasitet. Deretter skal det studeres om de termodynamiske egenskapene for dysprosiumisotopene er forskjellige fra titanisotopene. Betydningen til odde partikkelen som ikke er med i et nukleonpar skal undersøkes for hva den har å si for disse størrelsene.

Videre skal spinnfordelingen studeres for ulike eksitasjonsenergier. Spinnfordelingen forteller oss hvordan de ulike spinntilstandene er distribuert for ulike eksitasjonsenergier. Eksperimentelt er spinnfordelingen kun målt for et lite eksitasjonsområde, men ved bruk av den kombinatoriske modellen skal også spinnfordelingen ved høye energier studeres. Spinnfordelingen sammenliknes fra den kombinatoriske modellen med et teoretisk uttrykk for spinnfordelingen [3]. I det teoretiske uttrykket inngår en parameter som kan finnes på flere måter, her skal det benyttes to ulike måter [3,4]. Disse parametrene skal studeres og brukes i forbindelse med spinnfordelingen. Deretter skal det studeres hvilken spinnfordeling som passer best overens med den fra den kombinatoriske modellen og for hvilke energier det er best overensstemmelse.

Teorien som den kombinatoriske modellen baserer seg på, gjennomgås i kapittel 2-5. Selve modellen beskrives i kapittel 6. Deretter kommer resultatene i kapittel 7 og den endelige konklusjonen i kapittel 8.

Kapittel 2

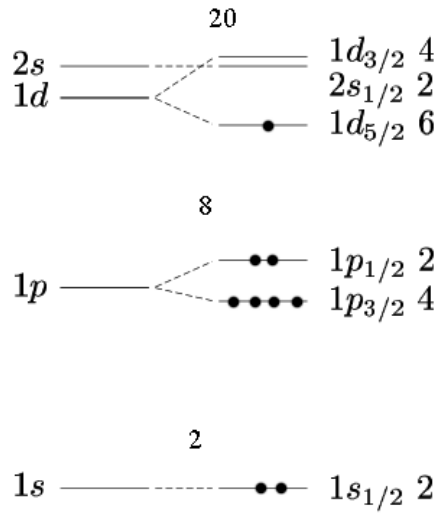
Kjernens eksitasjonsmoder

2.1 Singelpartikkeleksitasjoner

Skallmodellen for atomkjerner er basert på at nukleonene kun kan være i bestemte orbitaler der hver orbital har plass til $2j + 1$ nukleoner med ulikt kvantetall. Hver orbital kjennetegnes ved energien, hovedkvantetallet, en spektroskopisk betegnelse som gir verdien l , samt verdien på det totale angulærmomentet j . Ved visse nukleontall, “magiske” tall: 2, 8, 20, 28, 50, 82 og 126, er kjernen spesielt stabil og markerer at et helt skall er fylt. Slike kjerner er “magiske”. Dobbelmagiske kjerner er kjerner som har både proton- og nøytrontall som er magiske.

Det er hensiktsmessig for to nukleoner å danne et såkalt nukleonpar. For å studere singelpartikkeleksitasjoner ser man ofte på den odde partikkelen som ikke er med i et slikt par. For å eksitere kjernen uten å bryte et nukleonpar, kan den odde partikkelen eksiteres til en høyereliggende orbital. For ^{17}O er grunntilstanden med spinn og paritet lik $I^\pi = \frac{5}{2}^+ 1$ fordi det odde nøytronet befinner seg i $1d_{5/2}$ -orbitalen, se figur 2.1. For å eksitere denne kjernen kan den odde partikkelen flyttes i orbitalen som ligger over, dvs. $2s_{1/2}$ -orbitalen, noe som gjør at den første eksiterte tilstanden har $I^\pi = \frac{1}{2}^+$. Hvis man bryter et eller flere av nukleonparene i kjernen, gir det opphav til mange flere kombinasjonsmuligheter for singelpartiklene.

¹Spinn har egentlig enhet \hbar , men i denne oppgaven blir denne enheten for enkelthetskyld droppet.



Figur 2.1: Nøytronkonfigurasjonen til grunntilstanden for ^{17}O .

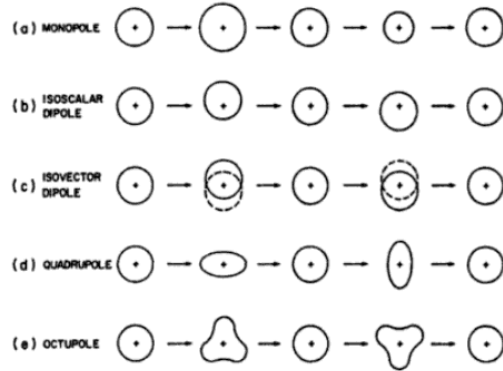
2.2 Vibrasjoner

I tillegg til singelpartikkelbevegelser kan en kjerne også ha kollektive bevegelser. Vibrasjoner er en viktig kollektiv bevegelse en kjerne kan ha, og vil generelt avhenge av kjernens massetall A . Ved å studere en dråpe av væske som vibrerer med høy frekvens, kan vi få en god idé om fysikken bak nukleære vibrasjoner.

For en kjerne med en sfærisk likevektsform der den gjennomsnittlige radien i denne likevektsformen uttrykkes ved R_{av} , uttrykker $R(t)$ i likningen under et punkt på overflaten til kjernen i retningen θ, ϕ [5]

$$R(t) = R_{av} + \sum_{\lambda \geq 1} \sum_{\mu = -\lambda}^{+\lambda} \alpha_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \quad (2.1)$$

ved tiden t . Funksjonene $Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$ er de såkalte sfærisk-harmoniske funksjonene, der hver sfærisk-harmoniske komponent vil ha en tidsavhengig vibrasjonsamplitude $\alpha_{\lambda\mu}(t)$. Parameteren $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4 \dots$ gir modene til vibrasjonene og beskriver et fonon av en bestemt type. Hvert fonon bærer λ enheter med angulærmoment. Dersom $\lambda = 0$ har man en monopol, og kjernens radius varierer. Siden denne vibrasjonsmoden innebærer en endring i kjernens volum, er den ikke tillatt. Dersom $\lambda = 1$ har man en dipol-vibrasjon, som innebærer forflytning av kjernens massesenter. En forflytning av massesenteret er heller ikke tillatt, og derfor er også denne vibrasjonsmoden for kjerner ulov-



Figur 2.2: Tidsutviklingen for ulike vibrasjonsmoder: (a) Monopol vibrasjon; (b) og (c) viser dipolvibrasjoner, hvor nøytronene og protonene vibrerer i henholdsvis samme fase og ulik fase; (d) viser en kvadrupolvibrasjon, hvor kjernen forandrer seg fra sfærisk, oblat (flattrykt ellipsoide), sfærisk og prolat (sammenklemt ellipsoide); (e) viser oktopolvibrasjoner. Figur hentet fra [6].

lig. Neste vibrasjonsmode, $\lambda = 2$, er en kvadrupol-vibrasjon. Å legge til en kvadrupolvibrasjon til grunntilstanden til en like-like kjerne, betyr å legge til to enheter av angulærmoment og den eksiterte tilstanden får spinn lik to og positiv paritet. Denne kvadrupoltilstanden er vanlig for alle like-like kjerner. Et annet vanlig fenomen for vibrerende like-like kjerner er en triplet av tilstander: 0^+ , 2^+ og 4^+ , ved dobbelt så høy energi som den første kvadrupoltilstanden. En visuell fremstilling av de ulike vibrasjonene som er nevnt, er vist i figur 2.2.

2.3 Rotasjoner

Rotasjoner kan bare bli observert i kjerner som har en ikke-sfærisk likevekts-tilstand. Disse kjernene er deformerte og har nukleontall mellom to lukkede skall i skallmodellen. Siden de fleste kjernene er deformerte, er det viktig å kjenne til hvilke parametre som kjennetegner dem. I dette kapittelet skal det for enkelhets skyld bare diskuteres andre ordens deformasjoner (dvs. kvadrupoldeformasjoner) der kjernen er representert ved en ellipsoide som roterer², og hvor kjernens form er konstant. Overflaten beskrives ved [5]:

$$R(\theta, \phi) = R_{av} \left[1 + \sum \beta_2 Y_{\lambda=2\mu=0}(\theta, \phi) \right]. \quad (2.2)$$

²Høyere ordens deformasjoner finnes også, slik som oktopol og heksadekapol deformasjoner

For sylinder-symmetriske kjerner er R uavhengig av ϕ . Parameteren β_2 betegner kvadrupoldeformasjonen:

$$\beta_2 = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{\Delta R}{R_{av}} \quad (2.3)$$

hvor ΔR er differansen mellom den store og den lille halvaksen til ellipsen. Dersom $\beta_2 < 0$ har man en oblat ellipsoide, mens $\beta_2 > 0$ betegner en prolat ellipsoide. Parameteren R_{av} er som før gjennomsnittsradien, og kan approksimeres ved $R_{av} = R_0 A^{1/3}$ (antatt at kjernen har en skarp overflate).

Alle legemer som roterer har et treghetsmoment, dette gjelder også kjerner. Kjernens treghetsmoment \mathcal{I} er en mellomting mellom treghetsmomentet til et rigid legeme og et fluid, $\mathcal{I}_{fluid} < \mathcal{I} < \mathcal{I}_{rigid}$, hvor

$$\mathcal{I}_{rigid} = \frac{2}{5} M R_{av}^2 (1 + 0.31\beta_2) \quad (2.4)$$

og

$$\mathcal{I}_{fluid} = \frac{9}{8\pi} M R_{av}^2 \beta_2. \quad (2.5)$$

der M er massen til kjernen. Dersom man betrakter kjernen som et rigid legeme, innebærer det at bindingsenergien mellom nukleonene er sterk, mens å se på kjernen som et fluid innebærer at nukleonene er svakt bundet sammen. Det finnes indikasjoner på at kjernen blir mer lik et fast legeme ved høy eksitasjonsenergi, og ved nøytron-separasjonsenergien er kjernen antatt å være et rigid legeme [1].

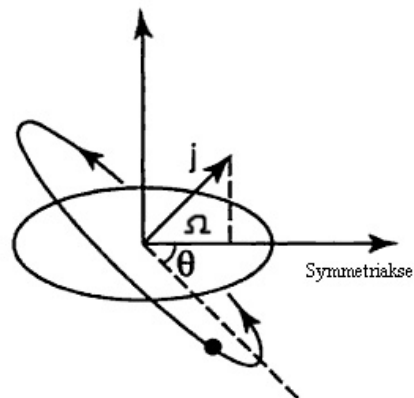
Den kinetiske energien til et roterende objekt er: $E_K = \frac{1}{2} \mathcal{I} \omega^2$ hvor \mathcal{I} er treghetsmomentet og ω er frekvensen. Kvantemekanisk blir dette:

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} R(R+1) \quad (2.6)$$

hvor rotasjonsangulærmomentet er

$$R(R+1) = I(I+1) - K^2 \quad (2.7)$$

hvor K er summen av projeksjonen til det totale angulærmomentet for nøytrone og protonene på symmetriaksen: $K = \Omega_p + \Omega_n$. Projeksjonen forklares ytterligere i figur 2.3. For like-like kjerner er I (totalt spinn) lik R og speil-symmetri fører til at bare partallsverdier av I er gyldige. Odde kjerner har et uparet nukleon, og for disse kjernene gjelder $I = j + R$ der j er det totale angulærmomentet til den odde partikkelen som ikke er paret.



Figur 2.3: Definisjonen av parameteren Ω med utgangspunkt i en singelpartikkelbane.

Man kan ha en kjerne som både vibrerer og roterer fordi det er mulig å bygge vibrasjonsbånd på et rotasjonsbånd. Det finnes to typer vibrasjoner: β_2 - og γ -vibrasjoner. Ved β_2 -vibrasjoner er det deformasjonsparameteren β_2 som oscillerer, mens sylinderens symmetri fortsatt er intakt. Ved γ -vibrasjoner ødelegges sylinderens symmetri.

Kapittel 3

Nilssonmodellen

Nilssonmodellen, eller den deformerte skallmodellen som den også kalles, gir en beskrivelse av singelpartikkelbevegelser i et ikke-sfærisk potensial. Siden Nilssonmodellen bygger på at nukleonene bare kan befinne seg i bestemte orbitaler, slik som i skallmodellen, skulle man tro at de samme kvantetallene var gyldige. Men i Nilssonmodellen er ikke de sfæriske kvantetallene l og j gode kvantetall når potensialet er deformert, fordi nukleoner med samme j , vil ikke nødvendigvis ha samme energi. Bare Ω (projeksjonen til j) og π (pariteten) er gode kvantetall.

Forskjellige Ω vil ha forskjellig energi. En lav verdi på Ω , f.eks. $1/2$, vil si at partikkelen går i en bane som er nesten parallell med symmetriaksen. Hvis kjernen er prolat, slik som i figur 2.3, vil det si at partikkelbanen går i en større omkrets enn om partikkelbanen hadde vært nesten vinkelrett på symmetriaksen (høy Ω -verdi). En lang bane fører til at bevegelsesmengden ikke er så stor, og dermed blir energien til denne partikkelen liten siden energien avhenger av bevegelsesmengden. En kortere bane har større bevegelsesmengde og dermed høyere energi.

I den sfæriske skallmodellen vil $f_{7/2}$ -orbitalen ($j = 7/2$) ha plass til åtte tilstander: $(2 \cdot \frac{7}{2} + 1) = 8$, hver tilstand med ulikt kvantetall m_j , hvor $j \leq m_j \leq j$. Er potensialet deformert, vil $f_{7/2}$ -orbitalen splittes opp i fire nye orbitaler hvor Ω kan ta verdiene $1/2$, $3/2$, $5/2$ og $7/2$, noe som betyr at det finnes $1/2(2j + 1)$ Ω -verdier. Men siden kjernen er symmetrisk om xy -planet, så vil både positive og negative verdier for Ω være gyldige. Og i dette tilfellet vil det si at vi får fire orbitaler med positiv Ω -verdi og fire med negativ verdi. De to orbitalene $-\Omega$ og Ω har omtrent den samme energien¹ og vi sier at Ω

¹Energien kan være litt forskjellig pga. forskyvning av massesenteret.

Tabell 3.1: Nilssonparametre i forbindelse med Nilssons hamiltonfunksjon [7].

Region	κ	μ
N, Z < 50	0.08	0
50 < Z < 82	0.0637	0.6
82 < N < 126	0.0637	0.42
82 < Z	0.0577	0.65
126 < N	0.0635	0.325

er to ganger degenert.

Hamiltonoperatoren for Nilssonmodellen med deformert harmonisk oscillatorbrønn og en spinn-bane kopplingsdel er gitt på formen [7]:

$$\hat{H}_{Nilss.} = -\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{1}{2}m[\omega_{\perp}^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) + \omega_z^2\hat{z}^2] + C\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{s}} + D\hat{\mathbf{I}}^2, \quad (3.1)$$

hvor ω_z er oscillatorfrekvensen i z-retning, og ω_{\perp} er oscillatorfrekvensen i xy-planet. Deformasjonen inngår i oscillatorfrekvensene. Konstanten C angir styrken på spinn-bane koplingen, og er gitt ved

$$C = -2\hbar\omega_0\kappa. \quad (3.2)$$

En sterk spinn-bane-kopling er nødvendig for å kunne reproducere de magiske tallene. Leddet $D\hat{\mathbf{I}}^2$ flytter nivåene med høy l -verdi nedover, se figur 3.1, og konstanten D er gitt ved

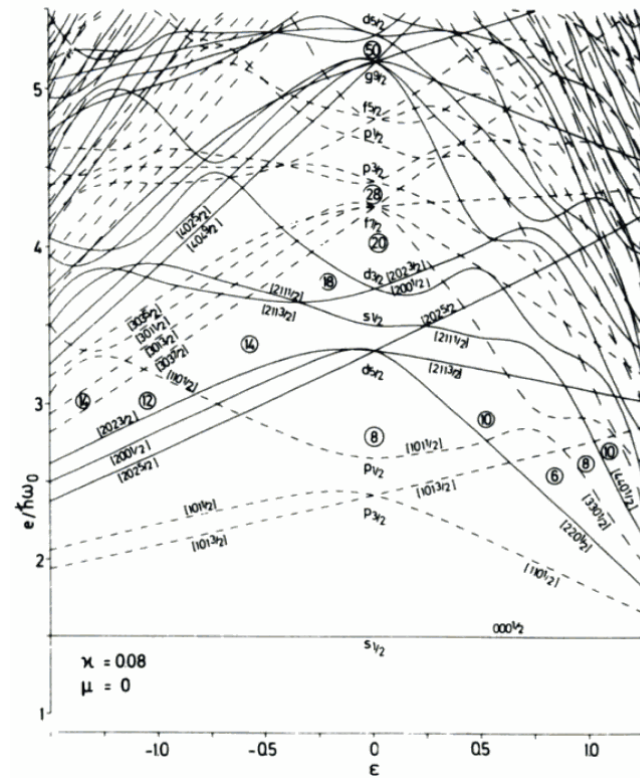
$$D = -\hbar\omega_0\kappa\mu. \quad (3.3)$$

Parametrene κ og μ varierer med masseområdet og hvilket skall som studeres, disse kalles for Nilssonparametre. Verdier som ofte brukes er gitt i fra tabell 3.1. Nilsson brukte opprinnelig $\kappa=0.05$ for alle skall og $\mu=0$ for $N = 0, 1, 2$; $\mu=0.35$ for $N = 3$; $\mu=0.45$ for $N=4, 5, 6$; og $\mu=0.4$ for $N=7$, slik som beskrevet i Nilssons originale artikkel [8].

I den originale versjonen brukte Nilsson $D\hat{\mathbf{I}}^2$ slik som i likning (3.1). Senere ble det funnet ut at for tilstander med stor N , ble nivåflyttingen så stor at følgende erstatning ble gjort:

$$D\hat{\mathbf{I}}^2 \implies D(\hat{\mathbf{I}}^2 - \langle \hat{\mathbf{I}}^2 \rangle_N), \quad (3.4)$$

hvor $\langle \hat{\mathbf{I}}^2 \rangle_N = \frac{1}{2}N(N+3)$ er forventningsverdien til gjennomsnittsverdien til $\hat{\mathbf{I}}^2$ for et skall med hovedkvantetall N .



Figur 3.2: Nilsson-diagram for lette kjerner. Figuren viser singelpartikkelenergien (egenfunksjonene til $H_{Nilss.}$) som funksjon av deformasjon ϵ ($\epsilon \approx 1.05\beta_2$). Stiplede linjer symboliserer negativ paritet, mens heltrukne linjer markerer positiv paritet. Tallene på linjene korresponderer til kvantetallene N , n_z , m_l og Ω hvor bare Ω og π er gode kvantetall. De andre kvantetallene blir gode kvantetall ved høye deformasjoner og blir derfor kalt asymptotiske kvantetall [7]. Tallene som er innringet markerer magiske tall for sfærisk potensiale og for endelige deformasjoner. To linjer/nivåer med samme Ω og π kan ikke krysses, og hvis to slike linjer kommer nært hverandre vil de frastøte hverandre og linjene bøyes. Figur hentet fra [7].

Kapittel 4

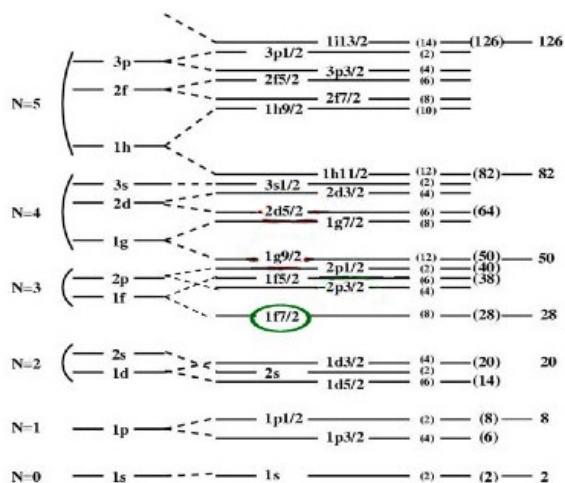
BCS-teori for kjerner

4.1 Introduksjon

BCS-teorien for atomer ble introdusert i 1957 av Bardeen, Cooper og Schrieffer [9] som en forklaring på superledning i enkelte metaller. Et nøkkelement i å forstå denne teorien bygger på at to elektroner kan danne et par, et såkalt cooperpar, på grunn av en effektiv tiltrekningskraft mellom dem. Et uparet elektron er et fermion og cooperpar oppfører seg veldig annerledes enn et uparet elektron, og fører til at parene kan kondensere til det samme energinivået ved lave temperaturer, på samme måte som bosoner ville ha gjort. Ved lave temperaturer vil de to elektronene i cooperparet forbli bundet og kan bevege seg gjennom metallet uten å oppleve resistans. Cooperparet er da i en superledende tilstand med et båndgap som separerer den superledende tilstanden fra de ikke-superledende tilstandene ved høyere energi og temperatur.

I 1958, ett år etter at BCS-teorien ble introdusert, ble denne teorien testet på kjerner. Bohr, Mottelson, Pines og Belyaev [10, 11] så at det var en likhet mellom energispektrene for superledere og like-like kjerner. For like-like kjerner er grunntilstanden separert fra de første eksiterte tilstandene med en størrelse 2Δ hvor Δ er pargapsparameteren, på samme måte som et båndgap separerer den superledende tilstanden fra normaltstanden til metallet. For like-like kjerner kan dette pargapet bestemmes ved BCS-teori, eller eksperimentelt ved å f.eks. se på forskjellen mellom bindingsenergien til en like-like kjerne og dens odde nabokjerne [12]:

$$\Delta_n = \frac{\pi N}{2} [B(N-1, Z) + B(N+1, Z) - 2B(N, Z)]. \quad (4.1)$$



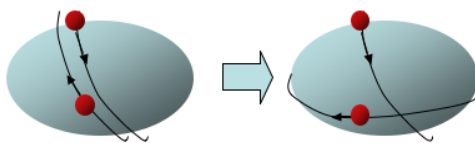
Figur 4.1: Skallmodellen og tilhørende magiske tall. $1f_{7/2}$ -orbitalen er ringet inn. Figur hentet fra [13].

Likningen over tar for seg energigapet til nøytroner hvor π_N er pariteten til det N -te nøytronet og $B(N)$ er bindingsenergien til et system med N nøytroner. Pargapet for protoner fås ved å bytte ut N med Z .

Pargapet er en av indikasjonene på at like nukleoner har en tendens til å danne par i analogi med cooperpar-dannelse for elektroner. Nukleonparing forekommer mellom to nukleoner i samme orbital med en gitt j -verdi. De to nukleonene beveger seg i tidsreverserte baner i forhold til hverandre og koples til $I = 0$.

Dette forklarer at grunntilstanden til alle like-like kjerner uten unntak er lik $I^\pi = 0^+$. De to nukleonene vekselvirker ved hjelp av den sterke kjerne-kraften som da har en parkomponent, noe som fører til at de to nukleonene må være veldig nær hverandre siden den sterke kjerne-kraften har kort rekkevidde.

For å bedre skjønne nukleonparing presenteres et eksempel hvor $1f_{7/2}$ -orbitalen studeres. Denne orbitalen er en del av oscillatorkvantetallet $N = 3$ og er såpass langt unna de andre orbitalene at den blir regnet som et eget skall (se figur 4.1). Hver tilstand for dette skallet er bestemt av egenverdiene $\hbar m_j$ til operatoren j_z og skallet har derfor plass til $2j + 1 = 2 \cdot 7/2 + 1 = 8$ tilstander, hver med ulik m_j -verdi: $-7/2, -5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2$ og $7/2$. Av disse åtte tilstandene kan det dannes fire par hvor ett par består av



Figur 4.2: Venstre: Et nukleonpar der de to nukleonene har motsatt spinn og går i tidsreverserte baner i forhold til hverandre. Høyre: Et brutt nukleonpar.

$(-m_j, +m_j)$, det vil si: $(-7/2, 7/2)$, $(-5/2, 5/2)$, $(-3/2, 3/2)$ og $(-1/2, 1/2)$.

For å eksitere en kjerne kan en bryte et nukleonpar. Til det trengs det en energi på minst 2Δ . Ett brutt par gir opphav til to *kvasipartikler*, hvor disse kvasipartiklene består av partikkel- og hullkomponenter med en viss okkupasjonsamplitude. Figur 4.2 viser et nukleonpar og et brutt nukleonpar.

Akkurat som med andre nukleære modeller, er heller ikke BCS-modellen perfekt. Bølgefunksjonen bevarer *ikke* partikkeltallet, og det er hovedproblemet med denne modellen. Den tar heller ikke hensyn til at også ulike nukleoner kan danne par, f.eks. et proton-nøytronpar. Dessuten sier BCS-teorien at kun like-like kjerner har et pargap, men ut i fra eksperimentelle data tror man at også odde kjerner har et pargap. Selv om den odde partikkelen ikke befinner seg i et par, så vil de andre nukleonene være paret, og det kreves fortsatt en energi på minst 2Δ å bryte et slikt par. I tillegg gjelder BCS-teorien kun for kjerner med åpne skall, altså for kjerner som befinner seg mellom to fylte skall i skallmodellen.

4.2 Bølgefunksjonen

BCS-grunntilstanden kan finnes ved bruk av variasjonsmetoden i kvantemekanikk¹ og den antas å være på følgende form [7]:

$$|BCS\rangle = \prod_{k>0} (u_k + v_k a_k^+ a_{\bar{k}}^+) |0\rangle \quad (4.2)$$

der $|0\rangle$ er vakuumtilstanden med ingen partikler tilstede. Parametrene a_k^+ og $a_{\bar{k}}^+$ er kreasjonsoperatører som kreerer en partikkel i henholdsvis tilstand k og \bar{k} , der \bar{k} er den konjugerte tilstanden til k . Produktet går over halve konfigurasjonsrommet, dvs. $k > 0$. Parametrene u_k og v_k er variasjonsparametre, og

¹Variasjonsmetoden kan det leses mer om i en hvilken som helst bok om kvantemekanikk, f.eks. *Introduction to Quantum Mechanics* av David J. Griffiths.

v_k^2 og u_k^2 representerer sannsynligheten for at en bestemt partilstand (k, \bar{k}) er henholdsvis okkupert eller ikke okkupert. Sannsynlighetsamplitudene v_k^2 og u_k^2 må bestemmes i henhold til variasjonsmetoden på en slik måte at energien når et minimum. Samtidig må normaliseringskravet være oppfylt:

$$|u_k^2| + |v_k^2| = 1. \quad (4.3)$$

I mange tilfeller kan den konjugerte tilstanden \bar{k} representere den tidsreverste tilstanden [7] til k :

$$|\bar{k}\rangle = T|k\rangle. \quad (4.4)$$

der T er tidsreversjonsoperatoren. Tilstandene $|k\rangle$ og $|\bar{k}\rangle$ kan f.eks. være representert ved en sfærisk basis:

$$|k\rangle = |nljm_j\rangle, \quad |\bar{k}\rangle = |nlj - m_j\rangle, \quad m_j > 0, \quad (4.5)$$

dvs. at et par (k, \bar{k}) består av to like nukleoner som går i motsatt vei i forhold til hverandre.

4.3 BCS-likningene

Hamiltonfunksjonen for et mangepartikkelsystem kan uttrykkes på mange måter, den varianten som er tatt med her beskriver kun en to-nukleon vekselvirkning og er beskrevet ved

$$H = T + V = \sum_{k_1 k_2} t_{k_1 k_2} a_{k_1}^+ a_{k_2} + \frac{1}{2} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} v_{k_1 k_2 k_3 k_4} a_{k_1}^+ a_{k_2}^+ a_{k_4} a_{k_3}. \quad (4.6)$$

Vekselvirkningsdelen V har to kreasjons- og to destruksjonsoperatorene. Denne delen er sett som en beskrivelse av en to-partikkel spredningshendelse (scattering event), hvor tilstandene k_3 og k_4 går over til tilstandene k_1 og k_2 . Hver indeks k_1, k_2, k_3 og k_4 går over alle mulige sett av verdier.

Variasjonsparametrene u_k og v_k er som nevnt tidligere bestemt ved variasjon av energien, men denne variasjonen må oppfylle kravet om at forventningsverdien til partikkeltallet, skal være lik antall nukleoner i kjernen:

$$\langle BCS | \hat{N} | BCS \rangle = 2 \sum_{k>0} v_k^2. \quad (4.7)$$

Dette kan oppnås ved å legge til $-\lambda \hat{N}$ til Hamiltonfunksjonen:

$$H' = H - \lambda \hat{N} \quad (4.8)$$

hvor λ er ferminivået. Med utgangspunkt i at forventningsverdien til partikkeltallet skal være lik N , kan λ bestemmes. Fluktuasjoner rundt partikkeltallet er gitt ved

$$(\Delta N)^2 = \langle BCS|N^2|BCS\rangle - \langle BCS|N|BCS\rangle^2 = 4 \sum_{k>0} u_k^2 v_k^2, \quad (4.9)$$

og må være små. Fra likning (4.2) og (4.6) finner vi forventningsverdien til H' , $\langle BCS|H'|BCS\rangle$. For å finne den laveste energitilstanden må $\langle BCS|H'|BCS\rangle$ (forventningsverdien til minimumsenergien) deriveres og settes lik null:

$$\delta \langle BCS|H'|BCS\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial v_k} + \frac{\partial u_k}{\partial v_k} \frac{\partial}{\partial u_k} \right) \langle BCS|H'|BCS\rangle = 0, \quad (4.10)$$

som fører til at vi får følgende sett av BCS-likninger [7]:

$$2\tilde{\epsilon}_k u_k v_k + \Delta_k (v_k^2 - u_k^2) = 0, \quad k > 0, \quad (4.11)$$

hvor energien

$$\tilde{\epsilon}_k = \frac{1}{2} \left(t_{kk} + t_{\bar{k}\bar{k}} + \sum_{k'} (v_{kk'kk'} + v_{\bar{k}k'\bar{k}k'}) v_{k'}^2 \right) - \lambda. \quad (4.12)$$

Pargapparameteren er:

$$\Delta_k = - \sum_{k'>0} v_{k\bar{k}k'\bar{k}'} u_{k'} v_{k'}. \quad (4.13)$$

Hvis $\tilde{\epsilon}_k$ og Δ_k er konstante kan en kombinere likning og (4.3) (4.11) og få løsningene til u_k^2 og v_k^2 ,

$$\begin{aligned} u_k^2 &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\tilde{\epsilon}_k}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_k^2 + \Delta_k^2}} \right) \\ v_k^2 &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\tilde{\epsilon}_k}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_k^2 + \Delta_k^2}} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dersom det ikke er noen vekselvirkning er Δ_k lik null, og $v_k^2 = 1$ for alle verdier av k , dvs. at alle partilstandene er okkupert. Den eneste mulige løsningen av (4.14) blir da

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tilde{\epsilon}_k}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_k^2 + \Delta_k^2}} \right) \quad (4.15)$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tilde{\epsilon}_k}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_k^2 + \Delta_k^2}} \right). \quad (4.16)$$

Sammen med $2 \sum_{k>0} v_k^2 = N$ gir disse likningene oss parametrene u_k og v_k , som er ikke-lineære og må løses ved hjelp av iterasjon. Ofte blir likning (4.16) satt inn i (4.13) og man får da pargaplikningen:

$$\Delta_k = \frac{1}{2} \sum_{k'>0} v_{k\bar{k}k'k'} \frac{\Delta_{k'}}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2}}. \quad (4.17)$$

4.4 BCS-likningene for en ren parkraft

En ren parkraft er ofte brukt for å beskrive kjerner ved hjelp av BCS-teori. En ren parkraft beskriver kun vekselvirkningen mellom to identiske nukleoner (dvs. enten to nøytroner eller to protoner) i samme orbital. Hamiltonoperatoren tar da følgende form:

$$H = \sum_{k>0} \epsilon_k (a_k^+ a_k + a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}}) - |G| \sum_{kk'>0} a_k^+ a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}'} a_{k'}, \quad (4.18)$$

hvor $|G|$ er styrken på vekselvirkningen mellom nukleonene i paret. Som følge av at det bare er parkraften det har blitt tatt hensyn til, blir BCS-likningene på en enklere form; blant annet blir pargapparameteren uavhengig av k :

$$\Delta = |G| \sum_{k>0} u_k v_k, \quad (4.19)$$

og $\tilde{\epsilon}_k$ blir

$$\tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k - \lambda - Gv_k^2 \quad (4.20)$$

hvor ϵ_k er singelpartikkelenergien for en bestemt orbital k . Singelpartikkelenergien kan finnes ved å studere et Nilsson-diagram, se f.eks. figur 3.2 i kapittel 3, eller hentes fra eksperimentelle data, og er avhengig av deformasjonen. Leddet Gv_k^2 i uttrykket over blir ofte satt til å være lik null. Sannsynlighetsamplitudene u_k^2 og v_k^2 kan nå uttrykkes ved singel- og kvasipartikkelenergien:

$$\begin{aligned} u_k^2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_k - \lambda}{\sqrt{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right) \\ v_k^2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_k - \lambda}{\sqrt{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

hvor kvasipartikkelenergien er gitt ved nevneren til uttrykket i parantesen. Dette uttrykket for sannsynlighetsamplitudene fører til at pargaplikningen kan uttrykkes på følgende form:

$$\Delta = \frac{G}{2} \sum_{k>0} \frac{\Delta}{\sqrt{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta^2}}, \quad (4.22)$$

Uttrykket er enkelt, men problemet er at styrken på vekselvirkningen G ikke lar seg bestemme eksperimentelt.

Innenfor én orbital er alle ϵ_k like. Alle v_k^2 og u_k^2 er også like (konstanter). Da får vi:

$$\Delta = G \sum_{k>0} u_k v_k = G u_k v_k \Omega \quad (4.23)$$

der Ω er antall tilstander. Videre får man ved bruk av likning (4.7):

$$2\Omega v_k^2 = N \quad \implies \quad v_k = \sqrt{\frac{N}{2\Omega}} u_k = \sqrt{1 - v_k^2} = \sqrt{1 - \frac{N}{2\Omega}}. \quad (4.24)$$

Ved å kombinere likning (4.23) og (4.24) ender vi opp med

$$\Delta = G u_k v_k \Omega = \sqrt{\frac{N}{2\Omega}} \sqrt{1 - \frac{N}{2\Omega}} G \Omega = G \sqrt{\frac{N}{2} \left(\Omega - \frac{N}{2} \right)}. \quad (4.25)$$

4.5 Eksiterte tilstander

En kjerne der nukleonene er arrangert i par bli eksitert på mange måter. Kjernen kan eksiteres til en vibrasjonstilstand eller en rotasjonstilstand. Begge disse måtene å eksitere en kjerne på, påvirker generelt ikke nukleonparene.² En tredje måte å eksitere en kjerne på, er å bryte opp et eller flere nukleonpar slik at vi får kvasipartikler. Det er denne eksitasjonsformen som blir diskutert i dette avsnittet.

Fordi bølgefunksjonen til BCS-grunntilstanden ikke er eksakt, er det ikke mulig å bestemme den eksakte formen til de eksiterte tilstandene, men ved å bruke de såkalte Bogoliubov-operatorene kan en få ei god tilnærming.

²Noen ganger kan nukleonparene brytes når kjernen blir eksitert til en rotasjonstilstand. Dette fenomenet kalles backbending. Det er flere teorier på hvorfor dette skjer, en er at det skjer når ett eller flere nukleonpar er på linje med rotasjonsaksen. En slik opplinjering reduserer parkraften, og ved en veldig høy rotasjon kollapser parkonfigurasjonen. Det oppbrutte paret deltar da i rotasjonen.

Bogoliubov-operatorene som kreerer en kvasipartikkel i tilstand k eller \bar{k} er gitt ved

$$\begin{aligned}\alpha_k^+ &= u_k a_k^+ - v_k a_{\bar{k}} \\ \alpha_{\bar{k}}^+ &= u_k a_{\bar{k}}^+ + v_k a_k,\end{aligned}\quad (4.26)$$

altså en lineær kombinasjon av de vanlige kreasjons- og annihilasjonsoperatorene, der u_k og v_k er okkupasjons sannsynlighetene. Vi ser ut i fra likningen at kvasipartiklene har en blanding av partikkel- og hullegenskaper. Bogoliubov-operatorene som annihilierer en kvasipartikkel i tilstand k eller \bar{k} er gitt ved:

$$\begin{aligned}\alpha_k &= u_k a_k - v_k a_{\bar{k}}^+ \\ \alpha_{\bar{k}} &= u_k a_{\bar{k}} + v_k a_k^+.\end{aligned}\quad (4.27)$$

Operatorene $\alpha_{k_1}^+ |\Psi\rangle$ og $\alpha_{\bar{k}_1}^+ |\Psi\rangle$ kreerer en-kvasipartikkeltilstandene:

$$\alpha_{k_1}^+ |BCS\rangle = a_{k_1}^+ \prod_{k \neq k_1} (u_k + v_k a_k^+ a_{\bar{k}}^+) |0\rangle \quad (4.28)$$

$$\alpha_{\bar{k}_1}^+ |BCS\rangle = a_{\bar{k}_1}^+ \prod_{k \neq k_1} (u_k + v_k a_k^+ a_{\bar{k}}^+) |0\rangle \quad (4.29)$$

hvor kvasipartikkelenergien er

$$E_k = \sqrt{\tilde{\epsilon}_k^2 + \Delta_k^2} \geq \Delta_k. \quad (4.30)$$

Disse tilstandene beskriver en kjerne med et odde antall nukleoner, hvor alle partiklene er i et par bortsett fra den ene odde partikkelen. Tilstanden kan være grunntilstanden, eller en eksitert tilstand. Å ødelegge et par som gir opphav til to kvasipartikler, k_1 og k_2 , uttrykkes:

$$\alpha_{k_1}^+ \alpha_{k_2}^+ |BCS\rangle = a_{k_1}^+ a_{k_2}^+ \prod_{k \neq k_1, k_2} (u_k + v_k a_k^+ a_{\bar{k}}^+) |0\rangle, \quad k_2 \neq \bar{k}_1, \quad (4.31)$$

og

$$\alpha_{k_1}^+ \alpha_{\bar{k}_1}^+ |BCS\rangle = \prod_{k \neq k_1} (u_k + v_k a_k^+ a_{\bar{k}}^+) (-v_{k_1} + u_{k_1} a_{k_1}^+ a_{\bar{k}_1}^+) |0\rangle, \quad k_2 = \bar{k}_1. \quad (4.32)$$

Disse to-kvasipartikkeltilstandene beskriver eksitasjoner i et like-like system, hvor alle partiklene er paret bortsett fra to. Eksitasjonsenergien tilfredsstiller:

$$E_{k_1} + E_{k_2} \geq 2\Delta. \quad (4.33)$$

Den første eksiterte tilstanden i et like-like system som skyldes parbrytning, ligger altså minst 2Δ høyere enn grunntilstanden.

Kapittel 5

Nivåtetthet og tilstandstetthet

5.1 Introduksjon

Nivåtettheten $\rho(E)$ til en kjerne med nukleontall A og eksitasjonsenergi E er definert som antall nukleære energinivåer i energiintervallet $(E, E + dE)$ dividert med dE . Nivåtettheten har derfor enhet MeV^{-1} . Tilstandstettheten $\omega(E)$ tar for seg antall nukleære *tilstander* i $(E, E + dE)$ dividert med dE . Altså tar $\omega(E)$ hensyn til degenerasjonen til hvert energinivå. Hvert energinivå har $(2j + 1)$ tilstander. Tilstandstettheten er proporsjonal med nivåtettheten og en spinnavhengig faktor:

$$\omega(E) \propto \rho(E) (2\langle I(E) \rangle + 1) \quad (5.1)$$

hvor $\langle I(E) \rangle$ er gjennomsnittlig totalt angulærmoment ved eksitasjonsenergi E . For å regne ut nivåtettheten må en bestemme alle egenverdiene til den nukleære hamiltonoperatoren, og telle hvor mange av disse som faller innenfor intervallet $(E, E + dE)$.

Nivåtettheten er en karakteristisk egenskap for alle kjerner som kan brukes til å få direkte informasjon om kjernens termodynamiske egenskaper. Nivåtettheten øker med økende eksitasjonsenergi, og deformerte kjerner med åpne skall har større nivåtetthet enn sfæriske kjerner nær lukkede skall. Ved å plote nivåtettheten som funksjon av eksitasjonsenergien, kan det for noen kjerner ses en stegstruktur ved enkelte energier. En slik struktur representeres ved en brå økning i nivåtettheten innenfor et veldig lite energiintervall. Denne strukturen kan komme av at et nukleonpar brytes som igjen gir opphav til kvasipartikler, slik som diskutert i forrige kapittel. Et par brytes ved en eksitasjonsenergi større eller lik pargapet, som igjen gir opphav til flere frihetsgrader som fører til at $\rho(E)$ øker. Såkalte skalleffekter kan også resultere i en trappetrinnsstruktur. Ved et lukket skall må partiklene overkomme et

skallgap for å ha tilgang til mange nivåer, på samme måte som å overkomme pargapet i like-like kjerner.

5.2 Ulike formler for nivåtettheten

Bethe utledet et uttrykk for nivåtettheten som funksjon av eksitasjonsenergi allerede i 1936 [14], hvor han tok utgangspunkt i en fermigass. En fermigass består av ikke-vekselvirkende fermioner som oppfyller Paulis eksklusjonsprinsipp. Bethes uttrykk for nivåtettheten er:

$$\rho(E) = \frac{\sqrt{\pi}}{12a^{1/4}E^{5/4}} \exp\left(2\sqrt{aE}\right) \quad (5.2)$$

hvor a er nivåtetthetsparameteren¹, som måles i MeV^{-1} .

Bethes enkle formel for $\rho(E)$ tar ikke hensyn til at nukleonene vekselvirker. I tillegg antok han en jevn fordeling av singelpartikkelorbitaler, altså ingen skallgap. Til tross for disse manglene ved Bethes formel, beskriver den nivåtettheten ved høye eksitasjonsenergier tilfredsstillende [14]. Det finnes flere forbedringer og utvidelser av Bethes formel, en som ofte brukes i dag er [15]:

$$\rho(E) = \frac{\exp\left(2\sqrt{a(E-E_1)}\right)}{12\sqrt{2}\sigma a^{1/4}(E-E_1)^{5/4}}. \quad (5.3)$$

Formelen tar hensyn til at nukleoner vekselvirker og danner nukleonpar som fører til at energiskalaen blir flyttet (skiftet) med en størrelse E_1 , hvor E_1 og a er frie parametre. På grunn av dette blir formelen også kalt den tilbakeskiftede fermigassmodellen. Spinn-cutoffparameteren σ er også inkludert i uttrykket der σ er lik sentroiden til spinnfordelingen ved en gitt eksitasjonsenergi. Parameteren σ blir ofte definert på to måter. Egidy og Bucurescu (E&B) definerer den slik [15]:

$$\sigma^2 = \frac{\mathcal{I}_{rigid}}{\hbar^2} T = 0.0146A^{5/3}T. \quad (5.4)$$

Parameteren \mathcal{I}_{rigid} er treghetsmomentet til et rigid legeme og kan relateres til A , mens T er temperaturparameteren (målt i MeV) som kan relateres til

¹En vanlig måte å uttrykke denne parameteren på er ved $a = \frac{\pi^2}{6}(g_p + g_n)$ hvor g_p og g_n er singelpartikkelnivåtetthetsparametre for protoner og nøytroner og som er forventet å være proporsjonal med massetallet A . En eksperimentell gjennomsnittsverdi er $a \approx A/8\text{MeV}^{-1}$. Denne måten å uttrykke a på tar ikke hensyn skalleffekter og fungerer derfor best ved høye eksitasjonsenergier hvor skalleffektene uansett forsvinner. Formelen er dessuten nytteløs for kjerner med magiske tall.

E via relasjonen:

$$E - E_1 = aT^2 - T \implies T = \frac{1}{2a} + \frac{\sqrt{1 + 4a(E - E_1)}}{2a}, \quad (5.5)$$

slik at likning (5.4) blir

$$\sigma^2 = 0.0146A^{5/3}T = 0.0146A^{5/3} \frac{1 + \sqrt{1 + 4a(E - E_1)}}{2a}. \quad (5.6)$$

Gilbert og Cameron (G&C) definerte spinn-cutoffparameteren på en annen måte, nemlig ved å ta utgangspunkt i et *reduisert* treghetsmoment, slik at parameteren blir som følger [4]:

$$\sigma^2 = 0.0888A^{2/3}aT. \quad (5.7)$$

I denne formelen er temperaturen er definert ved

$$T = \sqrt{\frac{U}{a}} = \sqrt{\frac{E - E_1}{a}}. \quad (5.8)$$

Her er E_1 forskjellig fra E_1 som blir brukt i Egidy og Bucurescus formel. Parameteren E_1 blir uttrykt ved:

$$E_1 = C_1 + E_{par} \quad (5.9)$$

hvor $C_1 = 6.6A^{-0.32}$ MeV, mens $E_{par} = \Delta_p + \Delta_n$ er summen av pargapparameteren for protoner og nøytroner. Vi at C_1 varierer lite med hensyn på A og derfor er det stort sett E_{par} som gir det største bidraget.

En helt annen måte å uttrykke nivåtettheten på, og som ikke inkluderer spinn-cutoffparameteren direkte er ved den konstante temperaturformelen. Formelen er gitt ved [4]:

$$\rho(E) = \frac{1}{T} \exp\left(\frac{E - T_0}{T}\right), \quad (5.10)$$

hvor de frie parametrene T og E_0 representerer en konstant temperatur og et energiskift. Denne formelen gjelder for energier mellom 0-10 MeV.

For å få en nivåtetthet som er avhengig av både eksitasjonsenergi og spinn multipliseres $\rho(E)$ med spinnfordelingen $g(E, I)$ [3]:

$$g(E, I) = \exp[-I^2/2\sigma^2] - \exp[-(I+1)^2/2\sigma^2] \approx \frac{2I+1}{2\sigma^2} \exp[-I(I+1)/2\sigma^2], \quad (5.11)$$

Man får da at den totale nivåtettheten som funksjon av energi og spinn er

$$\rho(E, I) \approx \rho(E) \frac{2I + 1}{2\sigma^2} \exp[-I(I + 1)/2\sigma^2]. \quad (5.12)$$

Det er viktig å merke seg at det finnes andre måter å uttrykke nivåtettheten på. Et utvalg av slike metoder er: midlere felt approksimasjoner [16], skallmodell monte Carlo beregninger [17] og kombinatoriske modeller, f.eks. [18] og ikke minst den som skal benyttes i denne oppgaven [1].

5.3 Nivåtetthet og termodynamikk

Ved hjelp av nivåtettheten eller tilstandstettheten kan en bestemme ulike termodynamiske egenskaper til kjernen, f.eks. entropien, temperaturen og varmekapasiteten. Disse størrelsene kan finnes ved å anta at kjernen er representert ved et mikrokanonisk ensemble. Et mikrokanonisk ensemble er en samling av mange isolerte systemer med fiksert total energi E og konstant antall partikler. Et mikrokanonisk ensemble beskriver kjernen godt siden kjernen kan ses på som et isolert system fordi den sterke kjernekräften har veldig kort rekkevidde, og derfor vil ikke kjernen normalt dele sin eksitasjonsenergi med omgivelsene.

Entropien for et system i et mikrokanonisk ensemble er definert ved

$$S(E) = k_B \ln \Omega(E) \quad (5.13)$$

hvor $\Omega(E)$ er multiplisiteten til tilgjengelige tilstander ved en gitt energi E . Multiplisiteten er direkte proporsjonal til tilstandstettheten per energienhet slik at

$$\Omega(E) = \omega(E) \Delta E \quad (5.14)$$

Nivåtettheten på sin side er proporsjonal med tilstandstettheten og en spinnavhengig faktor, se likning (5.1). Man kan derfor erstatte $\omega(E)$ med $\rho(E)/\rho_0$ der ρ_0 er nivåtettheten til de første tilstandene i en like-like kjerne. Uttrykket for entropien blir ikke helt korrekt og kalles da vanligvis for kvasientropi fordi den spinnavhengige faktoren er ikke nødvendigvis konstant med hensyn på energi. Uttrykket for kvasientropien blir seende slik ut:

$$S(E) = k_B \ln \frac{\rho(E)}{\rho_0} = k_B \ln \rho(E) - k_B \ln \rho_0 = \ln \rho(E) - S_0, \quad (5.15)$$

hvor Boltzmanns konstant k_B er satt til å være lik 1. Konstanten S_0 er med på å oppfylle termodynamikkens tredje lov: Når temperaturen $T \rightarrow 0$ skal

også entropien $S \rightarrow 0$.

Ved å bruke uttrykket for entropien og termodynamikkens første lov, kan den mikrokanoniske temperaturen bli utledet:

$$\frac{1}{T(E)} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{\rho(E)} \frac{\partial \rho(E)}{\partial E}. \quad (5.16)$$

Variasjonene i entropi som funksjon av eksitasjonsenergi, vil også gi variasjoner i nivåtettheten som funksjon av temperatur. Det forventes en trappe-trinnsstruktur i nivåtettheten der nukleonpar har blitt brutt, mens temperaturen som funksjon av eksitasjonsenergi, er forventet å minke der et par blir brutt fordi energi går med til å bryte nukleonpar i stedet for å øke temperaturen. Videre kan formelen for temperatur brukes for å utlede et uttrykk for varmekapasiteten:

$$C_V(E) = \left(\frac{\partial T(E)}{\partial E} \right)_V^{-1} \quad (5.17)$$

hvor kjernens volum er satt til å være konstant. Dette er en god antakelse fordi vekselvirkningen mellom nukleonene er så sterk.

Kapittel 6

Den kombinatoriske modellen

Modellen [1] som er benyttet i denne oppgaven er utviklet ved OCL av Magne Guttormsen og modifisert av undertegnede. Modellen er implementert i dataprogrammet `combi.c` og regner ut nivåtettheten ved å kombinere alle tilgjengelige orbitaler.

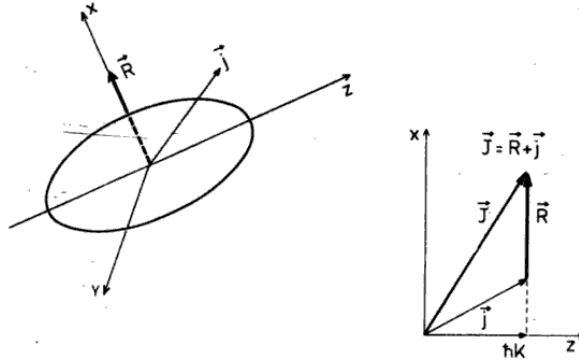
6.1 Beskrivelse av modellen

For hver kjerne som skal studeres, krever modellen visse inputparametre. Disse parametrene blir brukt for å lage et Nilssonskjema, og omfatter blant annet Nilssonparameterene κ og μ , kvadrupoldeformasjonen og selvfølgelig protontallet og massetallet til kjernen som skal studeres. Nilssonskjemaet som blir laget vil bl.a. ha informasjon om hovedkvantetallet N , summen av projeksjoner for protoner og nøytroner K , pariteten π og I . Fermivånet blir regnet ut i programmet, ved først å regne ut BCS-parameteren v som beskrevet i avsnitt 4.3 og deretter bruke parameteren sammen med betingelsen om at proton- og nøytrontallet N og Z skal være konstant:

$$\begin{aligned} N &= 2 \sum_{\Omega} v_{\Omega}^2(\lambda_n) \\ Z &= 2 \sum_{\Omega} v_{\Omega}^2(\lambda_p). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Med utgangspunkt i singelpartikkelenergiene fra Nilssonmodellen, e_{sp} , og pargapene (gitt som inputparameter til modellen) er det nå mulig å lage eksitasjonsenergiene til BCS-kuasipartiklene:

$$e_{qp} = \sqrt{(e_{sp} - \lambda)^2 + \Delta^2}. \tag{6.2}$$



Figur 6.1: Illustrasjon av \vec{R} , det kollektive angulærmomentet for en deformert kjerne. Spinnvektoren \vec{j} er angulærmomentet til det siste uparede nukleonet (valensnukleonet) mens $\vec{J} = \vec{I}$ viser det totale nukleære angulærmomentet. Symmetriaksen er gitt ved z-aksen. Figur hentet fra [19].

Alle singelpartikkelorbitaler med energi opp til en maksimal eksitasjonsenergi blir inkludert og det er også tatt med alle konfigurasjoner fra null brutte nukleonpar til tre brutte nukleonpar som gir maksimalt åtte kvasipartikler for en odde-odde kjerner. Med utgangspunkt i kvasipartikkelenergiene blir grunntilstanden til kjernen funnet. For like-like kjerner blir grunntilstanden satt til å være lik 0^+ , mens for en odde kjerne blir grunntilstanden satt til å være lik kvasipartikkelkonfigurasjonen som gir lavest energi. Annen informasjon om grunntilstandet blir også bestemt slik som paritet og spinn.

Med singelpartikkelenergiene til kvasipartiklene bestemt, blir det nå lagt til vibrasjoner og rotasjoner. Den første eksiterte 0^+ - eller 2^+ -tilstanden, samt den første oktopolvibrasjonstilstanden (3^-), mates inn i programmet og deretter bygges rotasjoner og vibrasjoner på kvasipartikkelenergiene. Rotasjonsenergiene E_{rot} legges på slik som beskrevet i avsnitt 2.3:

$$E_{rot} = A_{rot}R(R + 1)$$

der R er rotasjonskvantetallet som øker med 1 eller 2 for henholdsvis odde eller like-like kjerner. En visuell fremstilling av R ses i figur 6.1. Parameteren A_{rot} er rotasjonsparameteren som i modellen fremstilles ved

$$A_{rot}(E) = A_{gs} + \left(\frac{A_{rigid} - A_{gs}}{E_{rigid}} \right) E \quad (6.3)$$

hvor A_{gs} er rotasjonsparameterens verdi nær grunntilstanden, mens A_{rigid} er parameterens verdi hvis kjernen utelukkende kan ses på som et rigid legeme.

Parameteren A_{gs} kan finnes ved å studere Table of Isotopes [20]: Man finner energien til en av de laveste tilstandene og dividerer med $R(R+1)$ til denne tilstanden. F.eks. for ^{46}Ti er den tredje laveste tilstanden en 4^+ -tilstand med energi 2.01 MeV. Da blir A_{gs} lik $E/R(R+1) = 2.01/4(4+1) = 0.148$ MeV. En kjerne kan ses på som et rigid legeme for eksitasjonsenergi over E_{rigid} hvor vi har antatt at $E_{rigid} = S_n$ (nøytronsepareringsenergi) [1]. Ved å bruke likning (2.4) fra avsnitt 2.3 kan A_{rigid} bestemmes:

$$A_{rigid} = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}_{rigid}} = \frac{5\hbar^2}{4MR_{av}^2(1+0.31\beta)}. \quad (6.4)$$

der \mathcal{I}_{rigid} er treghetsmomentet til et rigid legeme. Vibrasjonsenergiene E_{vib} blir lagt til ved

$$E_{vib} = \hbar\omega_{vib}\nu \quad (6.5)$$

som er beskrevet ved fonontallet ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) og oscillatorkvantenergiene $\hbar\omega_{vib}$.

Den totale eksitasjonsenergi blir da en sum av kvasipartikkelenergi, rotasjonsenergi og vibrasjonsenergi:

$$E = E_{qp}(\Omega_p, \Omega_n) + A_{rot}R(R+1) + \hbar\omega_{vib}\nu, \quad (6.6)$$

hvor den totale kvasipartikkelenergi E_{qp} er en sum av alle singelpartikkelenergi til kvasipartiklene e_{qp} pluss en restvekselvirkning V :

$$E_{qp}(\Omega_p, \Omega_n) = \sum_{\Omega'_p, \Omega'_n} (e_{qp}(\Omega'_p) + e_{qp}(\Omega'_n) + V(\Omega'_p, \Omega'_n)). \quad (6.7)$$

Parametrene Ω_p og Ω_n betegner spinnprojeksjonen til henholdsvis protoner og nøytroner på symmetriaksen. Funksjonen V er restvekselvirkningen og er beskrevet ved en tilfeldig gaussisk distribusjon med bredde 50 keV som er sentrert rundt 0 keV. Den totale eksitasjonsenergi er veldefinert fordi det antas at kjernen kan beskrives som et mikrokanonisk ensemble.

Koden går så gjennom alle mulige kombinasjoner av proton- og nøytronorbitaler $\{\Omega'_p, \Omega'_n\}$ hentet fra Nilsson-diagrammet. Det er viktig med alle mulige kombinasjoner for å komme fram til den totale nivåtettheten. For å finne nivåtettheten som funksjon av eksitasjonsenergi telles antall nukleære energinivåer innenfor et energiintervall på 0.240 MeV og divideres med energiintervallet.

For å komme fram til det totale spinnet for hvert nivå brukes relasjonen:

$$I(I+1) = R(R+1) + K^2, \quad (6.8)$$

hvor K er summen av projeksjonene på symmetriaksen for nøytronet og protonet:

$$K = \sum_{\Omega'_p, \Omega'_n} \Omega'_p + \Omega'_n. \quad (6.9)$$

I likning (6.8) er R og K kjente størrelser. For hver energi innenfor energiintervallet blir det telt opp hvor mange tilstander som har en bestemt spinnverdi. Denne informasjonen brukes videre for å lage spinnfordelingen. I tillegg til nivåtettheten og spinnfordelingen kan modellen også brukes til å finne gjennomsnittlig antall brutte par som funksjon av eksitasjonsenergi. Dette blir bestemt ved å se på alle konfigurasjonene innenfor energiintervallet på 0.24 MeV og telle opp hvor mange av de konfigurasjonene som har ett brutt par, to brutte par osv. Det blir tatt hensyn til om parene er nøytron - eller protonpar.

6.2 Fordeler og ulemper med modellen

Fordeler

- Modellen er rask og enkel å bruke.
- Modellen gir informasjon om spinnfordelingen som funksjon av eksitasjonsenergi.
- Man kan enkelt velge hvilket spinnvindu som skal studeres, i motsetning til de fleste eksperimenter hvor spinnvinduet er begrenset i utgangspunktet.

Ulemper

- I modellen er pargapet antatt å være konstant. Imidlertid finnes det indikasjoner på at pargapet minker som funksjon av eksitasjonsenergi, og ved tilstrekkelig høy eksitasjonsenergi kan pargapet gå mot null.
- Bare kvadrupoldeformasjoner beskrevet ved deformasjonsparameteren β_2 blir tatt hensyn til. Men kjernens deformasjon kan også bestå av høyere ordens deformasjoner.
- Modellen inkluderer ikke spesielle egenskaper ved kjerner, f.eks. tas det ikke hensyn til at noen kjerner kan oppføre seg som en ansamling

av alfa-partikler, en såkalt alfa-cluster. I disse kjernene har to og to protoner og nøytroner gått sammen og dannet alfa-partikler, slik at kjernen bare består av alfa-partikler. En slik kjerne vil ha en nivåtetthet som er mye lavere enn hva den kombinatoriske modellen foreslår fordi en alfa-clusterkjerne er veldig sterkt bundet og det vil derfor kreves høy eksitasjonsenergi for å bryte løs en enkelt partikkel.

- Siden modellen er basert på BCS-teori, gjelder den i utgangspunktet kun for ikke-magiske kjerner.

Kapittel 7

Resultater

7.1 Den totale nivåettheten

I dette delkapittelet skal den kombinatoriske modellen benyttes til å finne nivåettheten. Kjernene som skal studeres er ^{45}Ti og ^{46}Ti samt ^{163}Dy og ^{164}Dy . Inputparametre brukt i den kombinatoriske modellen er hentet fra [12, 20–24]. Enkelte av parametrene ble justert for at resultatene skulle stemme bedre overens med eksperimentelle data fra OCL (Oslo Cyclotron Laboratory) [1, 25].

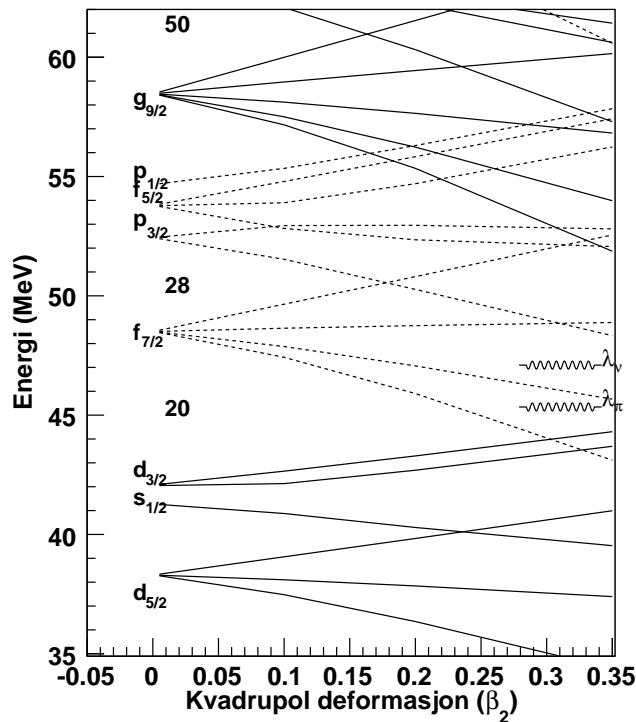
Titanisotopene

Isotopen ^{46}Ti er en like-like kjerne, og består av 22 protoner og 24 nøytroner. Nilssonskjemaet for denne kjernen vises i figur 7.1 hvor ferminivået for protonene og nøytronene er tegnet inn. Pargapsparametrene til ^{46}Ti er $\Delta_p = 1.728$ MeV og $\Delta_n = 1.830$ MeV [12]. Disse pargapsparametrene ble redusert. Kjernen ^{46}Ti har som nevnt 22 protoner, og 24 nøytroner. Siden 20 er et magisk tall og representerer et lukket skall, har kjernen to protoner og fire nøytroner utenfor dette skallet. Ved å studere figur 4.1 i avsnitt 4.1 ser vi at disse befinner seg i $1f_{7/2}$ -orbitalen. Hvis deformasjonen i denne kjernen hadde vært null, ville avstanden mellom $1f_{7/2}$ -orbitalen og $2p_{3/2}$ -orbitalen vært ganske stort, og derfor ville også skallgapet være stort. Imidlertid er ^{46}Ti deformert med ϵ lik 0.317. Ved deformasjoner er $1f_{7/2}$ -orbitalen splittet i fire og $2p_{3/2}$ splittet i to. Dessuten er ikke avstanden mellom nivåene så store lengre, altså er skalleffektene av mye mindre betydning. Dette fører til at det kan være nyttig å redusere pargapsparameteren Δ for protonene og nøytronene. Begge pargapsparametrene ble redusert med 0.35 MeV, fordi denne reduksjonen ga best mulig overensstemmelse med eksperimentelle

data. Andre viktige parametere for ^{46}Ti finnes i tabell 7.1.

Sammenlikningen mellom den kombinatoriske modellen og eksperimentelle data ses i figur 7.2. Man ser at ved $E \approx 3$ MeV er det en trappetrinnstruktur fordi her brytes det første nukleonparet og nivåtettheten øker drastisk. Man ser også at for energier lavere enn 3.5 MeV er det få nivåer tilstede, et er selvsagt ved grunntilstanden ($E = 0$ MeV) i tillegg til 2^+ -tilstanden ved 0.889 MeV og en eksitert 0^+ ved 2.611 MeV. Generelt er overensstemmelsen mellom modellresultatet og dataene god.

Isotopen ^{45}Ti har 23 nøytroner, og er derfor en odde kjerne. Nilssonskjemaet



Figur 7.1: Nilsson diagram for ^{46}Ti med Nilssonparametre $\mu = 0.32$ og $\kappa = 0.066$. Ferminivået for protoner og nøytroner er tegnet inn som to bølgete linjer. Betegnelsen på de sfæriske orbitalene er merket, likeså de magiske tallene 20, 28 og 50. Orbitaler med negativ paritet har stiplet linje mens orbitaler med positiv paritet er representert ved heltrukne linjer.

Tabell 7.1: Parametre brukt i den kombinatoriske modellen [12, 20–24].

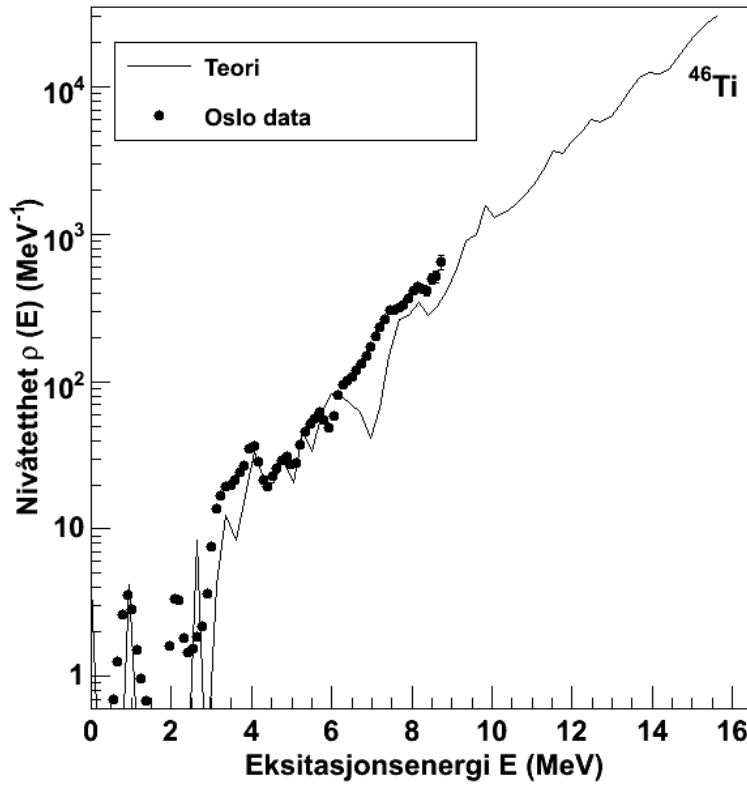
Kjerne	ϵ_2	Δ_p (MeV)	Δ_n (MeV)	κ	μ	A_{rot} (MeV)	λ_p (MeV)	λ_n (MeV)
^{46}Ti	0.317	1.378	1.480	0.066	0.32	0.148	45.325	47.044
^{45}Ti	0.250	0.892	1.922	0.066	0.32	0.075	55.401	56.365
^{164}Dy	0.348	0.875	0.832	0.0637	0.42	0.012	43.030	48.767
^{163}Dy	0.300	0.661	0.875	0.0635	0.42	0.0125	43.215	48.721

er veldig likt som for ^{46}Ti . Denne isotopen er ustabil og har en halveringstid på 185 min. Kjernen har fem nukleoner som befinner seg utenfor $N, Z = 20$ -skallet. Nukleonene er parret, bortsett fra det 23. nøytronet som er uparet. Det totale angulærmomentet til grunntilstanden er lik $I^\pi = 7/2^-$. Hovedkvantetallet er estimert ved $\hbar\omega_0 = 1.2 (41A^{-1/3})$ MeV, dvs. at avstanden mellom singelpartikkelnivåene er skalert med 1.2 for å passe bedre med de eksperimentelle dataene. Denne skaleringen er ikke nødvendig for ^{46}Ti , noe som er uventet. En mulig forklaring er at ^{45}Ti er nabokjernen til ^{44}Ti , som er en alfa-clusterkjerne som består av 11 alfa-partikler. Kun ett ekstra nøytron skiller altså ^{45}Ti for å være en alfa-cluster. Isotopen ^{46}Ti derimot har to nøytroner på utsiden av ^{44}Ti og disse gir kanskje hvorfor ^{45}Ti og ^{46}Ti trenger ulik skalering. Dessuten vet vi også at ^{45}Ti er nærmere en magisk kjerne enn ^{46}Ti , dette kan også være av betydning.

Vibrasjonskvanteenergien til ^{45}Ti $\hbar\omega_{vib} = 2.611$ MeV, er hentet fra den første 0^+ -vibrasjonstilstanden i ^{46}Ti . Pargapene til protonene og nøytronene ble funnet i [12], hvor pargapet til nøytronene er gjennomsnittet av Δ_n for ^{44}Ti og ^{46}Ti . Informasjon om andre parametre brukt for utregning av nivåtettheten finnes i tabell 7.1.

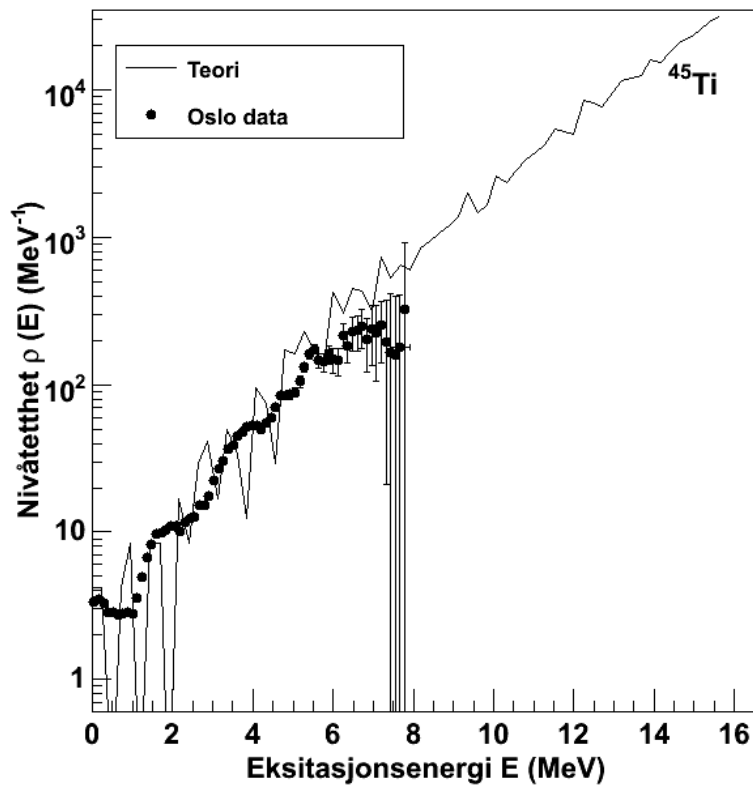
Sammenlikningen mellom den kombinatoriske modellen og eksperiment ses i figur 7.3, og det ses at overensstemmelsen med eksperimentelle data er god. Ved å sammenlikne nivåtettheten til ^{45}Ti med ^{46}Ti , ses det at det er mange flere nivåer i ^{45}Ti fordi nivåtettheten for ^{45}Ti alltid er generelt litt høyere enn for ^{46}Ti . I ^{46}Ti er den første eksiterte tilstanden ved 889 keV, mens i ^{45}Ti er den ved 36.7 keV og det er hele fem nivåer innenfor 889 keV [20]. Alle disse nivåene skyldes det uparede nøytronet. Dette uparede nøytronet er også skyld i at nivåtettheten til ^{45}Ti er større enn ^{46}Ti .

I sammenlikningen mellom nivåtettheten fra den kombinatoriske modellen og eksperimenter ved OCL vil hverken modellen eller eksperimenter gi det



Figur 7.2: For ^{46}Ti : Sammenlikning av resultatet fra den kombinatoriske modellen og eksperimentelle data.

eksakte resultat. Som nevnt i innledningen vil nivåtettheten funnet i eksperimenter basere seg på at de fleste tilstandene har spinn i området $\approx 2 - 6$, noe som gir en nivåtetthet som er lavere enn hva den skulle ha vært. Nivåtettheten blir derfor skalert til å gå i gjennom den totale nivåtettheten ved nøytronbindingsenergien, $\rho(B_n)$. Men det finnes ulike sett av parametre for å komme fram til ulike verdier av $\rho(B_n)$, noe som vil gi en usikkerhet opp til en faktor to. Størrelsen $\rho(B_n)$ og ulike verdier den kan ha skal studeres nærmere i avsnitt 7.4.

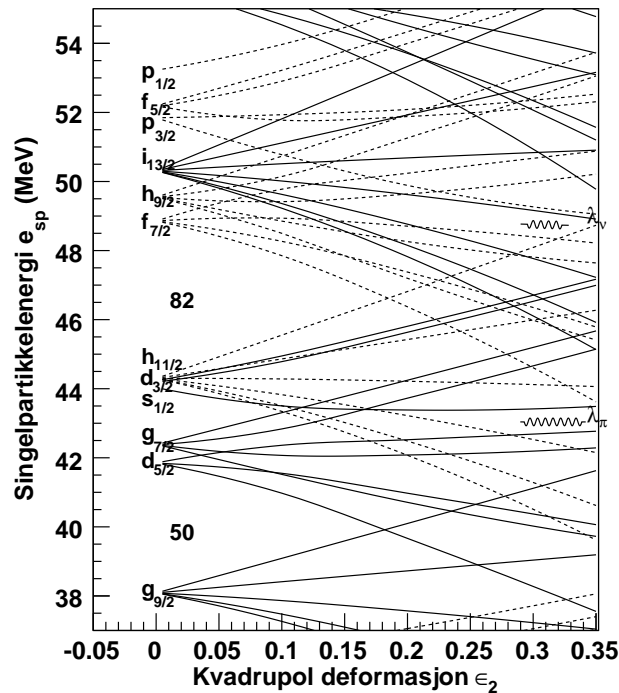


Figur 7.3: For ^{45}Ti : Sammenlikning mellom resultatet fra den kombinatoriske modellen og eksperimentelle data.

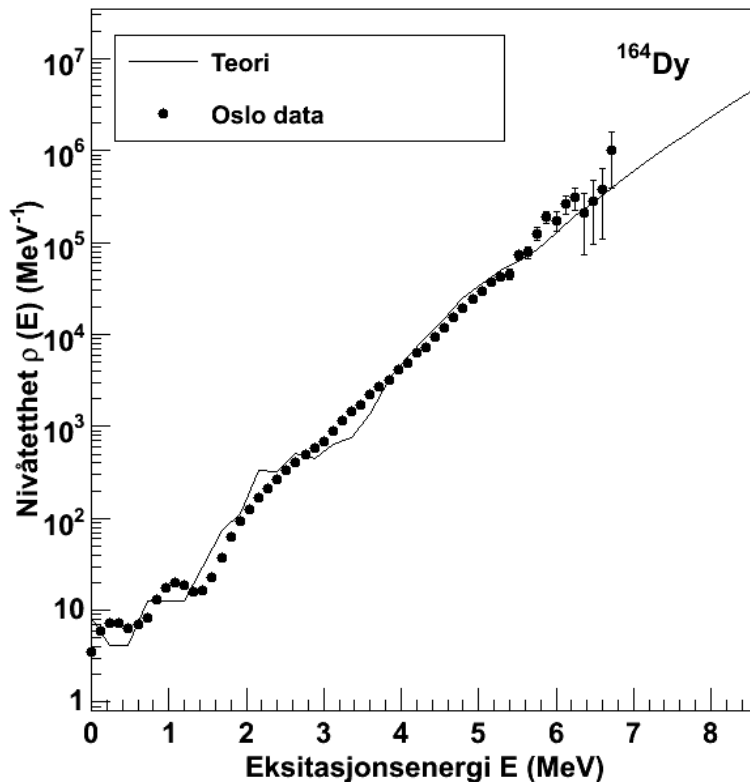
Dysprosiumisotopene

Dysprosium er et grunnstoff med 66 protoner og er et av de sjeldne jordartelementene. ^{164}Dy er en stabil isotop, og siden kjernen er en like-like kjerne har grunntilstanden spinn og paritet lik $I^\pi = 0^+$. Nilssondiagrammet til denne kjernen ses i figur 7.4. Ved å sammenlikne dette Nilssondiagrammet med diagrammet for ^{46}Ti ser vi at det er mange flere tilgjengelige orbitaler for kvasipartiklene til dysprosium. Andre parametre brukt for ^{164}Dy er gitt i tabell 7.1. Deformasjonen er hentet fra [21], pargapene ble funnet i [23, 24] og A_{gs} ble regnet ut ved å studere Table of Isotopes [20].

^{163}Dy er en stabil isotop med $I^\pi = \frac{5}{2}^-$ i grunntilstanden. Parametre brukt for denne kjernen framkommer av tabell 7.1, hvor Δ_n for nøytroner er tatt til



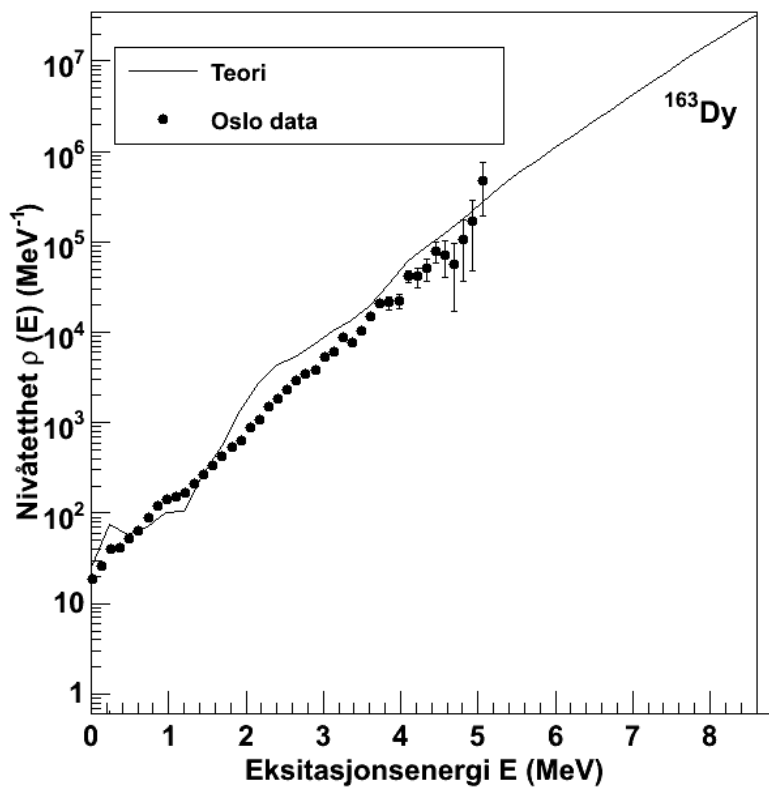
Figur 7.4: Nilssondiagrammet for ^{164}Dy som har Nilssonparametre $\kappa = 0.0637$ og $\mu = 0.42$. Ferminivåene er markert med bølgete linjer. De sfæriske orbitalene er merket. Orbitaler med negativ paritet har stiplet linje, mens heltrukne linjer er orbitaler med positiv paritet.



Figur 7.5: For ^{164}Dy : Sammenlikning av resultatet fra den kombinatoriske modellen og data fra OCL.

å være gjennomsnittet av Δ_n til ^{164}Dy og ^{162}Dy , hvor Δ_n er hentet fra [23,24].

Figur 7.5 og 7.6 sammenlikner nivåtettheten for dysprosiumisotopene fra den kombinatoriske modellen med data fra H.T. Nyhus et al. [25]. Man ser at eksperiment og teori stemmer rimelig godt overens, og i figur 7.5 som viser nivåtettheten til ^{164}Dy kan man observere parbrytningen godt (trappetrinnsstruktur i nivåtettheten). Det er vanskelig å observere like tydelig trappetrinnsstruktur for ^{163}Dy fordi nivåtettheten er så høy at den “overskygger” trappetrinnsstrukturen. Akkurat som for titanisotopene, gjelder det også for dysprosiumisotopene at den odde kjernen har høyest nivåtetthet. Dette er fordi ^{163}Dy har et uparet nøytron som gir opphav til flere frihetsgrader, som igjen fører til at nivåtettheten blir større enn den fra ^{164}Dy .



Figur 7.6: For ^{163}Dy : Sammenlikning av resultatet fra den kombinatoriske modellen og data fra OCL.

7.2 Nivåtettheten som funksjon av spinn

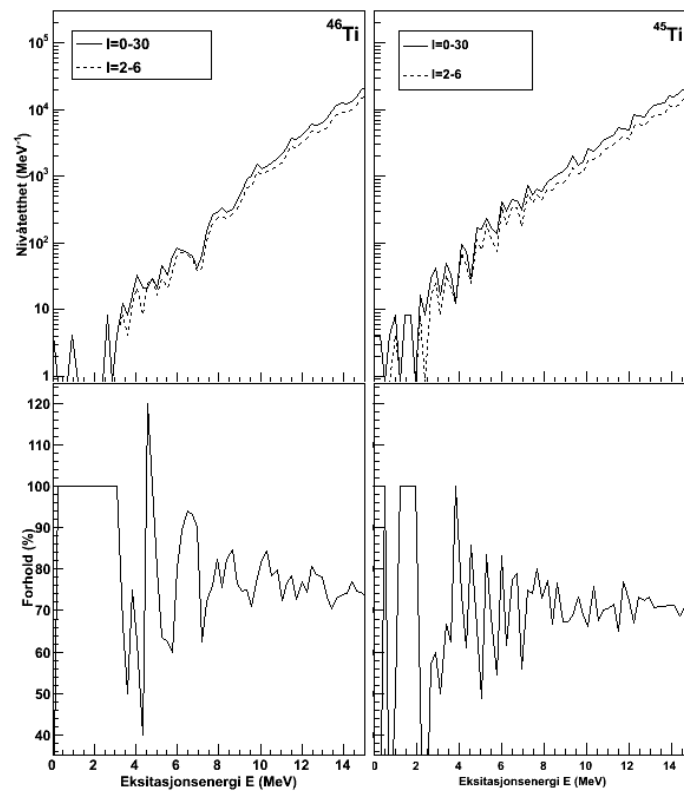
Det totale spinnvinduet til den kombinatoriske modellen er $I = 0 - 30$, og i nivåtetthetene som er vist i de foregående plottene tas alle spinnene i dette spinnvinduet med. Ved eksperimenter gjort ved OCL er spinnvinduet typisk $I \approx 2 - 6$. I dette avsnittet skal vi se på nivåtettheten ved disse to ulike spinnvinduene og estimere feilen som gjøres ved å ha et lite spinnvindu i stedet for et stort. Det skal også studeres om nivåtetthetens struktur er den samme for det lille spinnvinduet og det store. I tillegg skal det studeres hvilke ulike spinnverdier som finnes ved forskjellige eksitasjonsenergier og hvilket spinn som bidrar til høyest nivåtetthet.

Titanisotopene

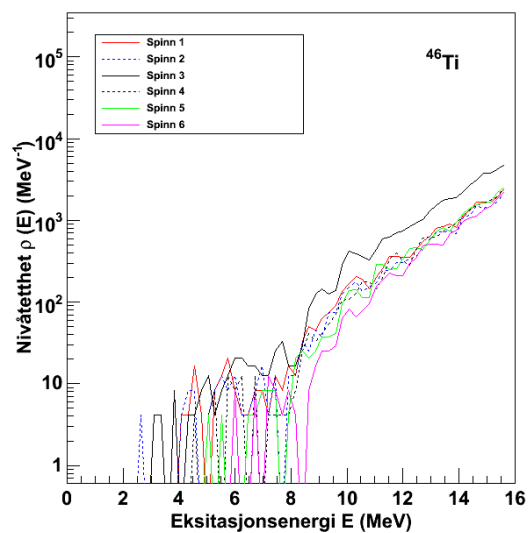
Figur 7.7 viser nivåtettheten for et lite spinnvindu: $I = 2 - 6$ og et stort spinnvindu: $I = 0 - 30$ for begge titanisotopene. Det er også plottet forholdet mellom nivåtettheten for det lille spinnvinduet og det store. Her ser vi at for ^{46}Ti og ved energier høyere enn 8 MeV, så er nivåtettheten for spinn 2 - 6 ca. 80% av nivåtettheten der alle spinn mellom 0 og 30 er tatt med. Det samme gjelder for ^{45}Ti . For lave eksitasjonsenergier fluktuerer forholdet mellom de to spinnvinduene noe og det kan komme av det finnes en del spinn mindre enn 2 som følgelig ikke er med i nivåtettheten for det lille spinnvinduet. For høye eksitasjonsenergier har det største spinnvinduet størst nivåtetthet fordi det eksisterer flere tilstander med spinn høyere enn 6. Selv om nivåtettheten er størst for det store spinnvinduet er det interessant å legge merke til at strukturen til nivåtettheten for begge spinnvinduene er mer eller mindre den samme. Humpene i nivåtettheten som er forårsaket av parbrytning skjer ved samme energi for begge spinnvinduene og ved 8 MeV og høyere er det svært små forskjeller i strukturen. Ved OCL blir nivåtettheten funnet for det lille spinnvinduet og deretter blir nivåtettheten ganget opp for å gå i gjennom punktet $\rho(B_n)$, noe som antas å være korrekt siden strukturen er såpass lik. Dette resultatet fra den kombinatoriske modellen er derfor viktig.

I figur 7.8 er nivåtettheten til ^{46}Ti for ulike spinn plottet og vi ser klart ut i fra figuren at nivåtettheten er størst ved $I = 3$. Fra og med spinn 5 og høyere synker nivåtettheten drastisk. Dette har sammenheng med at for kjerner i det lette/middels masseområdet, slik som ^{46}Ti , er det få tilstander etter denne spinnverdien og ved spinn 6 er nivåtettheten merkbart lavere. Dette støtter opp om resultatet over som sier at nivåtettheten for det lille spinnvinduet er ca. 80% av nivåtettheten der spinn 0-30 er tatt med. I figur 7.9 er nivåtettheten for ^{45}Ti for fire ulike spinn plottet. Ut i fra figuren ses

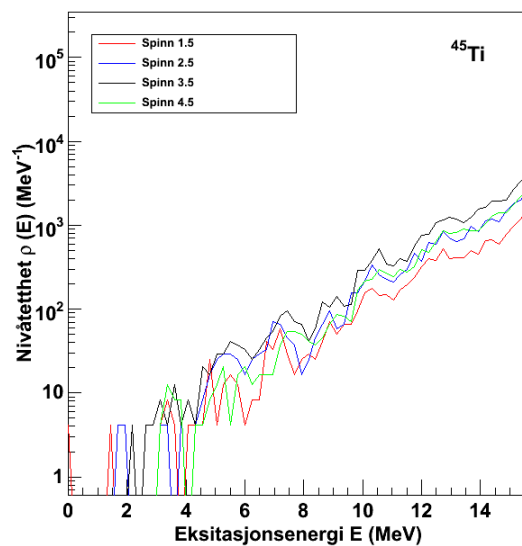
det at det er flest nivåer ved $I = 7/2$, altså omtrent samme spinnverdi som for ^{46}Ti . Dette er å forvente siden det tross alt er snakk om to naboisotoper.



Figur 7.7: Øverst: Nivåtettheten for spinnvinduet $I = 0 - 30$ og $I = 2 - 6$ for ⁴⁶Ti (venstre) og ⁴⁵Ti (høyre). Nederst: Forholdet mellom nivåtettheten til det lille spinnvinduet og det store for ⁴⁶Ti (venstre) og ⁴⁵Ti (høyre).



Figur 7.8: Nivåtettheten til ^{46}Ti for spinn 1, 2, 3, 4, 5 og 6 .

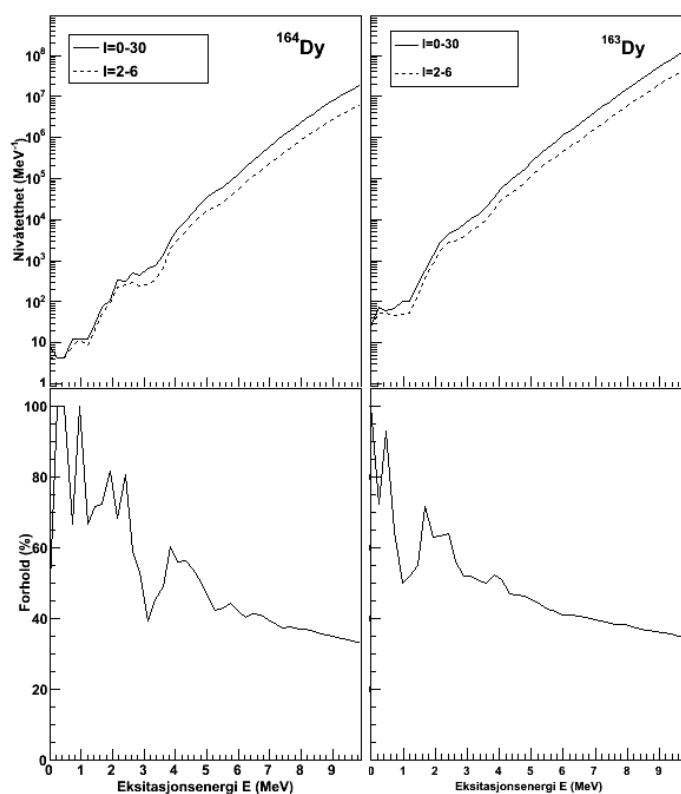


Figur 7.9: Nivåtettheten til ^{45}Ti for spinn 3/5, 5/2, 7/2 og 9/2.

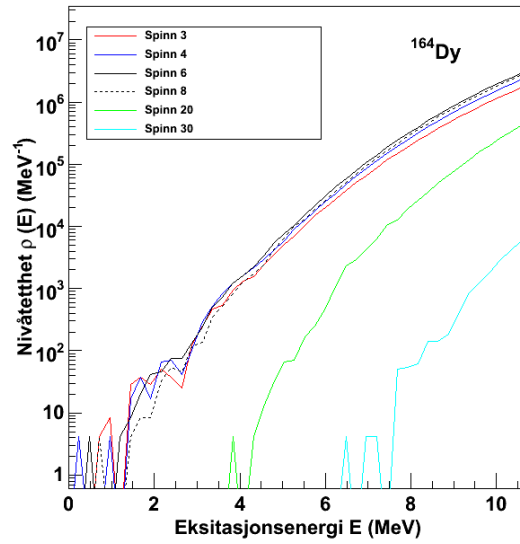
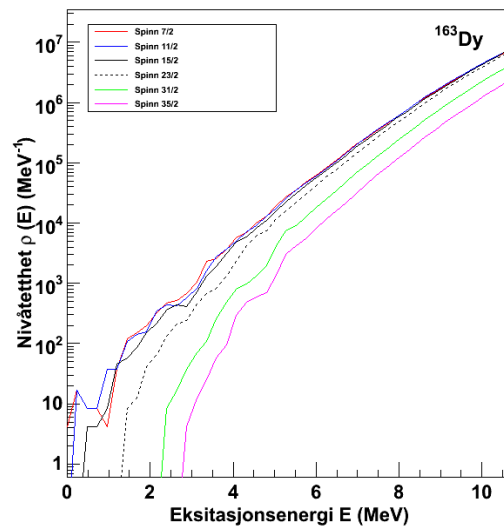
Dysprosiumisotopene

I figur 7.10 vises nivåtettheten til dysprosiumisotopene for et lite spinnvindu ($I = 2 - 6$) og et stort spinnvindu ($I = 0 - 30$). Man ser at det eksiterer mange tilstander med spinn høyere enn 6 i motsetning til titanisotopene, og når eksitasjonsenergi er rundt 9 MeV, så er nivåtettheten for det lille spinnvinduet bare rundt 25% av verdien for det store spinnvinduet. I likhet med titanisotopene ses det at selv om det store spinnvinduet forårsaker den høyeste nivåtettheten så er strukturen til nivåtettheten den samme for de to spinnvinduene. Noe som også er interessant å merke seg for det lille spinnvinduet er at man ser finstrukturer mye bedre, se for eksempel ved 3 MeV for ^{164}Dy der to nukleonpar brytes. Dette skyldes at det er så få spinn-tilstander tilgjengelig i det lille spinnvinduet.

Figur 7.11 viser nivåtettheten til ^{164}Dy for ulike spinn, hvor det framkommer av figuren at $I = 6$ generelt gir den høyeste nivåtettheten. Dette resultatet er en tankevekker siden eksperimentene gjort ved OCL typisk har et spinnvindu på $I \approx 2 - 6$. I motsetning til titanisotopene ser vi at også høye spinn bidrar betydelig til nivåtettheten. Til og med 30 gir bidrag til nivåtettheten, men bare ved høye eksitasjonsenergi. Figur 7.12 viser nivåtettheten for ulike spinn i ^{163}Dy . Her er det litt vanskelig å se hvilket spinn som gir høyest nivåtetthet, både spinn $7/2$, $11/2$ og $15/2$ gir høy nivåtetthet. Siden naboisotopen, ^{164}Dy , hadde at spinn 6 ga den høyeste nivåtettheten, forventer man at en liknende spinnverdi, dvs. spinn $11/2$ eller $15/2$ vil gi den høyeste nivåtettheten i ^{163}Dy . Man ser at også høye spinn, som f.eks. $35/2$, vil fortsatt bidra betydelig til nivåtettheten akkurat som for ^{164}Dy .



Figur 7.10: Øverst: Nivåtettheten for spinnvinduet $I = 0 - 30$ og $I = 2 - 6$ for ¹⁶⁴Dy (venstre) og ¹⁶³Dy (høyre). Nederst: Forholdet mellom nivåtettheten til det lille og det store spinnvinduet for ¹⁶⁴Dy (nederst) og ¹⁶³Dy (høyre).

Figur 7.11: Nivåtettheten til ^{164}Dy for spinn 3, 4, 6, 8, 20 og 30 .Figur 7.12: Nivåtettheten til ^{163}Dy for spinn 7/2, 11/2, 15/2, 23/2, 29/2 og 35/2.

7.3 Spinnfordelingen

I dette kapitlet skal spinnfordelingen til de fire ulike kjernene studeres. Det innebærer at spinnfordelingen fra den kombinatoriske modellen skal sammenliknes med spinnfordelingen tatt fra likning (5.11)

$$g(E, I) \approx \frac{2I + 1}{2\sigma^2} \exp \left[-I(I + 1) / 2\sigma^2 \right],$$

hvor to parametriseringer av spinn-cutoffparameteren σ undersøkes: den ene foreslått av Egidy og Bucurescu (E&B), formel (5.6), og den andre foreslått av Gilbert og Cameron (G&C), likning (5.7) beskrevet i seksjon 5.2. Det er verdt å merke seg at både E&B og G&C sin formel for σ har sine svakheter: G&C sin formel tar ikke hensyn til skalleffekter [4] og E&Bs formel tar utgangspunkt i at kjernen er et stivt legeme noe som ikke er korrekt. Her skal det studeres hvilken spinn-cutoffparameter som gir den spinnfordelingen som passer best overens med spinnfordelingen fra den kombinatoriske modellen. Parametre nødvendig for å komme fram til de to ulike σ -parametrene finnes i tabell 7.2.

Spinnfordelingen til de to titanisotopene

I figur 7.13 vises spinnfordelingene i ^{46}Ti fra den kombinatoriske modellen og formelen for $g(E, I)$ der de to ulike spinn-cutoffparametrene ligger til grunn. Spinnfordelingen studeres for ulike eksitasjonsenergier. Generelt ser vi at spinn-cutoffparameteren til Gilbert og Cameron gir en spinnfordeling der sentroiden både er høyere og skiftet til et lavere spinn i forhold til spinnfordelingen som stammer fra Egidy og Bucurescus parameter. Dessuten ser vi at E&Bs fordeling er bredere enn den som stammer fra G&C.

Vi ser at sentroiden flytter seg lite for ulike eksitasjonsenergier. I G&Cs spinnfordeling ved 6 MeV er sentroiden rundt spinn 2 mens ved 15 MeV er den

Tabell 7.2: Parametre brukt for å komme fram til spinnfordelingen for ^{45}Ti , ^{46}Ti , ^{164}Dy og ^{163}Dy .

Kjerne	Gilbert&Cameron		Egidy&Bucurescu	
	E_1 (MeV)	a	E_1 (MeV)	a
^{45}Ti	0.862	5.761	-0.900	5.623
^{46}Ti	0.920	5.872	0.765	5.315
^{163}Dy	0.242	17.653	-0.531	18.270
^{164}Dy	0.416	17.747	0.310	18.12

rundt spinn lik 3. Entropiformelen for kjerner med utgangspunkt i nivåtettheten har en liten feil fordi man antar at den gjennomsnittlige spinnverdien, $\langle I \rangle$, er konstant for alle eksitasjonsenergier. Leddet der den gjennomsnittlige spinnverdien inngår er $(2\langle I \rangle + 1)$. Entropien er

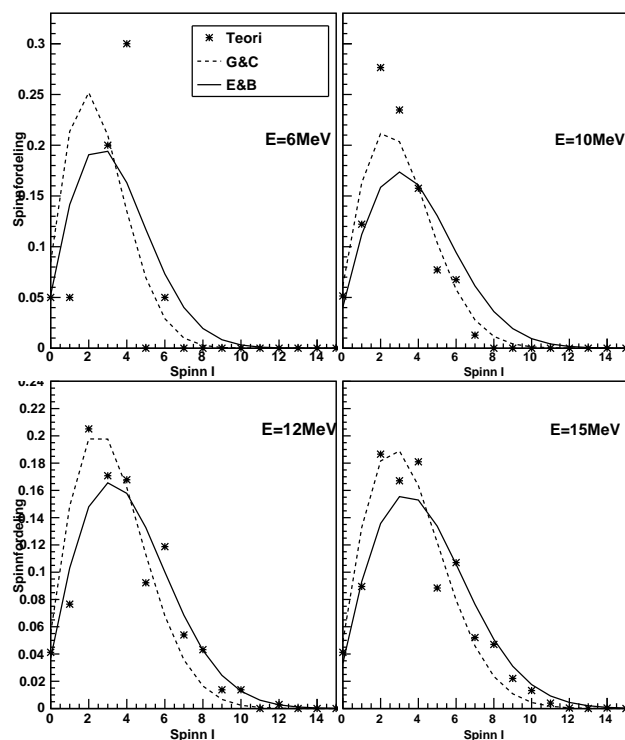
$$S(E) = k_B \ln \left(\frac{\rho(E)(2\langle I(E) \rangle + 1)}{\rho_0(2\langle I_0 \rangle + 1)} \right)$$

hvor $\langle I_0 \rangle$ er gjennomsnittsverdien til spinnnet ved de første nivåene. Ser ut i fra likningen at: $S(15)_{\langle I \rangle=3} - S(15)_{\langle I \rangle=2} = \ln(2 \cdot 3 + 1) - \ln(2 \cdot 2 + 1) = 0.34$. Dette betyr at entropien ved 15 MeV er $0.34k_B$ høyere enn hva den ville ha vært hvis $\langle I \rangle$ var lik 2 ved denne energien. Hvis entropien ved 15 MeV er stor, blir dette en veldig liten feil.

Ved noen energier er det ut i fra figuren vanskelig å se om Egidy og Bucurescu eller Gilbert og Camerons spinn-cutoffparameter stemmer best overens med den kombinatoriske modellen, derfor har jeg for disse energiene tatt den kvadratiske gjennomsnittsfeilen (root mean square) av den relative feilen. Den relative feilen for hver spinnverdi er punktet til enten E&B eller G&C dividert med punktet til den kombinatoriske modellen. Hvis det for en spinnverdi forekommer at E&B eller G&C punkt sammenfaller med punktet til modellen, blir følgelig den relative feilen lik én. Er punktene separert med en stor avstand vil den relative feilen bli enten over én eller under én. Når så den relative feilen er funnet for hver spinnverdi ekstraheres den kvadratiske gjennomsnittsfeilen. For 10 MeV er den kvadratiske gjennomsnittsfeilen bare tatt med opp til spinn 7, fordi spinnfordelingen til den kombinatoriske modellen er lik null for spinn 8 og høyere. For 12 MeV er den kvadratiske gjennomsnittsfeilen tatt med opp til spinn 10. Tabell 7.3 viser en oversikt over den kvadratiske gjennomsnittsfeilen til den relative feilen for E&Bs og G&Cs spinn-cutoffparameter for 10 og 12 MeV. Ut i fra denne tabellen ser vi at for 10 MeV er det G&Cs spinn-cutoffparameter som gir den spinnfordelin-

Tabell 7.3: For ^{46}Ti : Den kvadratiske gjennomsnittsfeilen (rms) til den relative feilen for spinnfordelingen ved bruk av E&Bs eller G&Cs spinn-cutoffparameter.

E (MeV)	σ	rms
10	E&B	1.376
10	G&C	0.464
12	E&B	0.316
12	G&C	0.496



Figur 7.13: For ^{46}Ti : Sammenlikning av spinnfordelingen fra den kombinatoriske modellen (stjerner) og spinnfordelingen gitt ved formel (5.11) for σ foreslått av Egidy og Bucurescu (heltrukken linje), og σ foreslått av Gilbert og Cameron (stiplet linje).

gen som passer best overens med spinnfordeingen fra modellen. Ved 12 MeV er det E&Bs parameter som gir best overensstemmelse. For 15 MeV trenger man ikke å regne ut den kvadratiske gjennomsnittsfeilen, her ser man ut i fra figur 7.13 at E&Bs parameter stemmer best overens med resultatene fra modellen. For 6 MeV er det vanskelig å si hvilken parameter som stemmer best overens, det er såpass få spinntilstander at spinnfordelingen fra den kombinatoriske modellen ser ikke ut som en fordeling, men mer som noen få tilfeldige punkter og derfor ble det meningsløst å ta den kvadratiske gjennomsnittsfeilen til den relative feilen. For eksitasjonsenergi lavere enn 6 MeV er det enda færre spinntilstander og følgelig er det ingen hensikt å ta med slike eksitasjonsenergi.

Det er forventet at E&B sin formel stemmer best ved høye eksitasjonsenergi-er, fordi formelen tar utgangspunkt i at kjernen er et rigid legeme. At kjernen er rigid er antatt å være oppfylt ved S_n , nøytronseparasjonsenergien, som for ^{46}Ti er ved 13.2 MeV, altså en ganske høy eksitasjonsenergi. For lave eksitasjonsenergi-er er det forventet at G&Cs spinn-cutoffparameter gir den spinnfordelingen som passer best overens med modellens, fordi G&Cs parameter har tatt utgangspunkt i at kjernen har et redusert treghetsmoment. Problemet med ^{46}Ti er at det er så få spinn-tilstander tilgjengelig ved lave eksitasjonsenergi-er.

Noe som også er interessant å merke seg med figur 7.13 er en såkalt like-odd spinneffekt som framkommer i resultatene fra den kombinatoriske modellen. Det vil si at de like spinnverdiene har en generelt høyere spinnfordeling enn de odde verdiene. Denne effekten er i figuren spesielt synlig ved 6 MeV og 10 MeV. Denne like-odd spinneffekten gjelder kun for like-like kjerner, og Egidy foreslo at spinnfordelingen må modifiseres pga. dette [3]

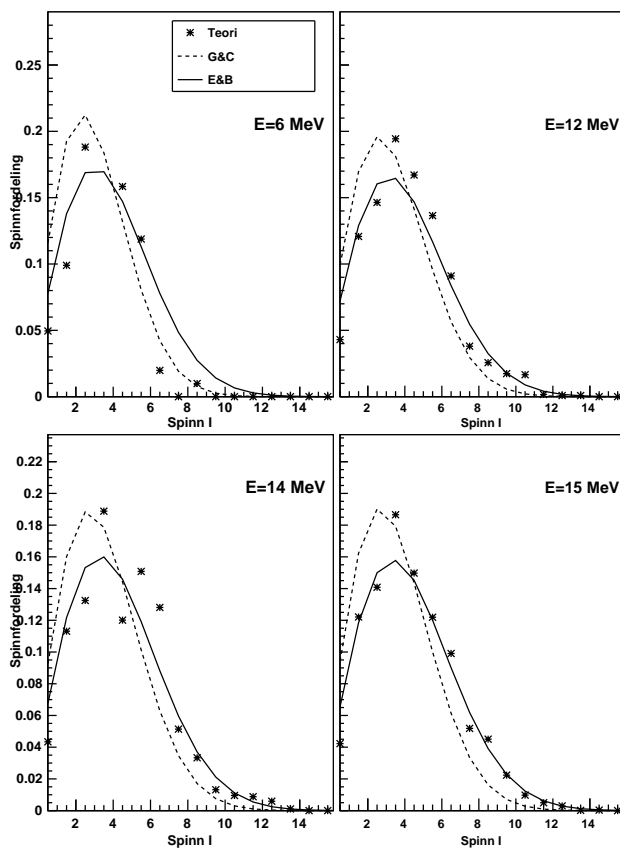
$$g(E, I)_{\text{like-like}} = g(E, I) (1 + x), \quad (7.1)$$

hvor $x = +0.227$ for partallige spinnverdier, $x = -0.227$ for oddetalls spinnverdier og $x = +1.02$ når spinnet er null. Denne effekten skyldes sannsynligvis parvekselvirkninger og er predikert å forsvinne ved høye eksitasjonsenergi-er [3].

Figur 7.14 tar for seg spinnfordelingene i ^{45}Ti . Spinnfordelingene er veldig like de fra ^{46}Ti og sentroiden er ved samme spinn, det vil si rundt spinn 2 for 6 MeV og 3 for 15 MeV. Igjen er det vanskelig å trekke en konklusjon om hvilken spinn-cutoffparameter som gir den spinnfordelingen som passer best med den kombinatoriske modellen, så også her må man se på den kvadratiske gjennomsnittsfleien av de relative feilene som blir gjort for hvert spinn. Resultatene er vist i tabell 7.4. Ut i fra tabellen ser man at G&Cs spinn-cutoffparameter gir den spinnfordelingen som passer best overens med den kombinatoriske modellen ved 6 MeV. For høyere eksitasjonsenergi-er passer E&Bs parameter best. For 15 MeV trenger man ikke å se på rms-verdien for å finne ut hvilken spinn-cutoffparameter som passer best, her holder det å se på figur 7.14 for å skjønne at E&Bs parameter er den beste.

Tabell 7.4: For ^{45}Ti : Den kvadratiske gjennomsnittsfeilen (rms) til den relative feilen for spinnfordelingen ved bruk av E&Bs eller G&Cs spinn-cutoffparameter.

E (MeV)	σ	rms
6	E&B	1.157
6	G&C	0.788
12	E&B	0.303
12	G&C	0.583
14	E&B	0.337
14	G&C	0.602



Figur 7.14: For ^{45}Ti : Sammenlikning av spinnfordelingen fra den kombinatoriske modellen (stjerner) og spinnfordelingen gitt ved formel (5.11) for σ foreslått av E&B (heltrukken linje), og σ foreslått av G&C (stiplet linje).

Spinnfordelingen til de to dysprosiumisotopene

Figur 7.15 viser spinnfordelingen til ^{164}Dy for $E = 2, 3, 4$ og 6 MeV ved likning (5.11) for spinn-cutoffparameteren foreslått av E&B, spinn-cutoffparameteren foreslått av G&C og ved den kombinatoriske modellen. Det første man legger merke til med denne figuren, er at det er *mange* flere spinntilstander i ^{164}Dy , enn det det er i titanisotopene. Dessuten ser vi også at sentroiden til fordelingene generelt har en høyere spinnverdi enn for titanisotopene.

Ved å ta utgangspunkt i de teoretiske fordelingene, ser vi også her at sentroiden er skiftet til et høyere spinn ved høye eksitasjonsenergier. Ved 3 MeV gir E&Bs fordeling en sentroide på spinn lik 5 , mens ved 11 MeV er sentroiden skiftet til 7 MeV. Dette støtter resultatet fra avsnitt 7.2 der vi kom fram til at spinn 6 ga den høyeste nivåettheten. Resultatet støtter også opp feilen som gjøres når entropien til kjernen utledes basert på antakelsen om at gjennomsnittlig spinn er konstant for alle eksitasjonsenergier. Det at det gjennomsnittlige spinnet er lik 7 ved 11 MeV i stedet for 5 gjør at $S(11)_{\langle I \rangle=7} - S(11)_{\langle I \rangle=5} = 0.31k_B$. Denne differansen er svært liten, tatt i betraktning at entropien ved 11 MeV sannsynligvis er ganske stor.

Ut i fra figur 7.15 og ved eksitasjonsenergi lik 2 MeV er det vanskelig å si noe om spinnfordelingen siden det er så tilstander tilgjengelig. Går vi litt opp i eksitasjonsenergi er det vanskelig å se hvilken spinn-cutoffparameter som passer best fordi vi får en like-odd effekt i spinnfordelingen som gjør at fordelingen fluktuerer mye. For å bedre skjønne hvilken σ som passer best, presenteres tabell 7.5 som tar for seg den kvadratiske gjennomsnittsfeilen til de relative feilene. Ut i fra tabellen ser vi at rms-verdiene for de to spinn-cutoff parameterene er ganske like, men ved 3 MeV passer E&Bs parameter bedre enn G&Cs parameter, men dette resultatet behøver ikke å stemme med virkeligheten siden det er vanskelig å si noe om spinnfordelingen i det hele

Tabell 7.5: For ^{164}Dy : Den kvadratiske gjennomsnittsfeilen (rms) til den relative feilen for spinnfordelingen ved bruk av E&Bs eller G&Cs spinn-cutoffparameter.

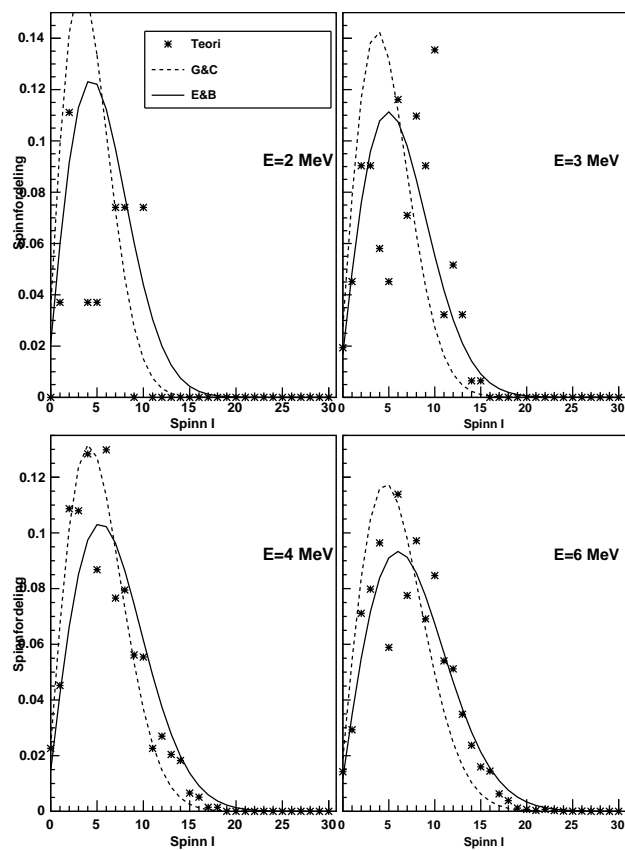
E (MeV)	σ	rms
3	E&B	0.597
3	G&C	0.819
4	E&B	0.493
4	G&C	0.397

Tabell 7.6: For ^{163}Dy : Den kvadratiske gjennomsnittsfeilen (rms) til den relative feilen for spinnfordelingen ved bruk av E&Bs eller G&Cs spinn-cutoffparameter.

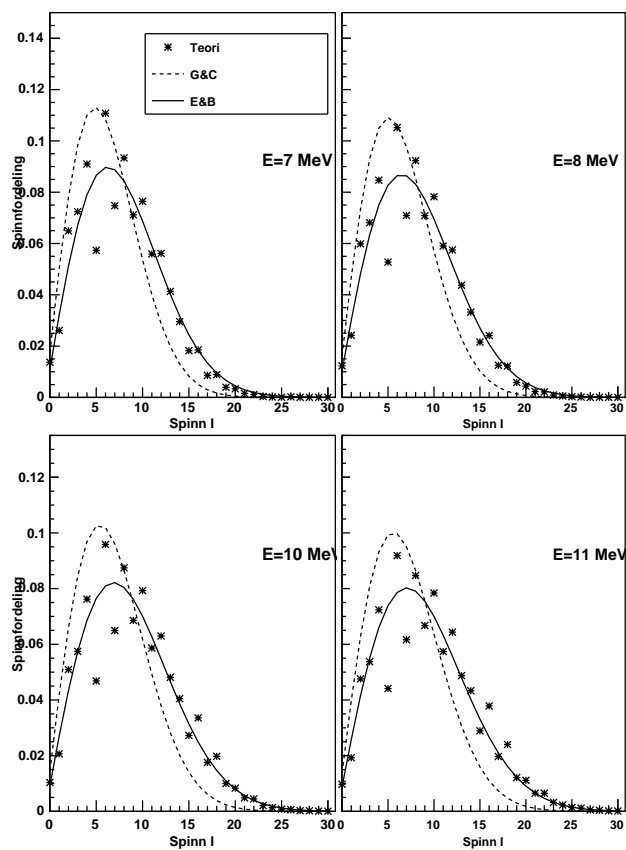
E (MeV)	σ	rms
2	E&B	0.589
2	G&C	0.323
3	E&B	0.736
3	G&C	0.662

tatt på grunn av at så få spinn er tilgjengelige ved denne eksitasjonsenergien. Ved 4 MeV gir den kombinatoriske modellen en bedre spinnfordeling, fordi det her er flere spinn tilgjengelig. Ut i fra tabellen kan man se at G&Cs spinn-cutoffparameter er den beste å bruke for denne energien siden denne er basert på et redusert treghetsmoment, noe som er tilfelle ved lave eksitasjonsenergi. For 6 MeV ses det ut i fra figur 7.15 at E&Bs parameter gir best overensstemmelse med den kombinatoriske modellen. Figur 7.16 viser spinnfordelingen til ^{164}Dy for høyere eksitasjonsenergi, $E = 7, 8, 10$ og 11 MeV. Man ser tydelig at her er det Egidy og Bucurescus spinn-cutoff-parameter som gir best overensstemmelse med den kombinatoriske modellen, fordi ved disse høye eksitasjonsenergiene oppfører kjernen seg mer som et rigid legeme. Det er likevel et like avvik i overensstemmelsen ved $I \approx 6$, hvor G&Cs parameter ser ut til å stemme bedre.

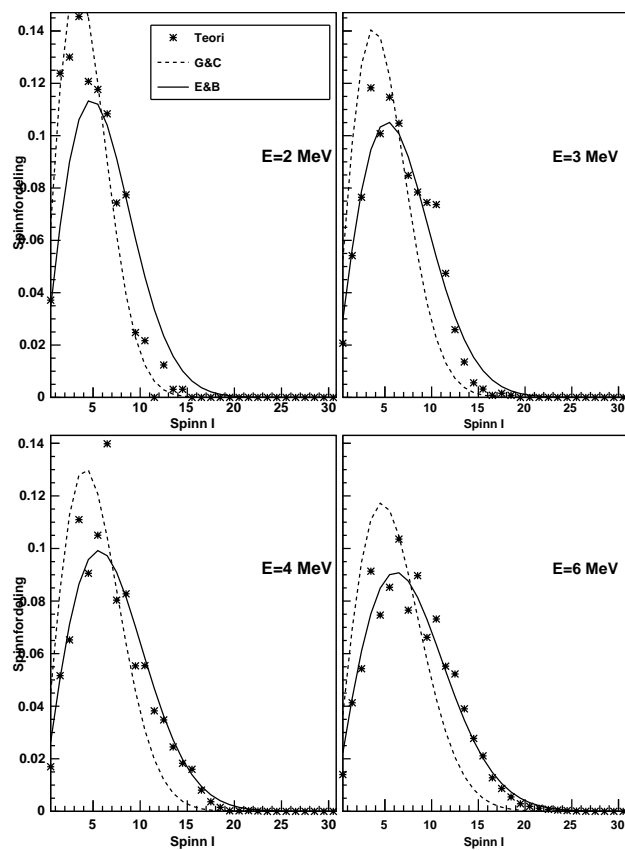
Figur 7.17 og 7.18 viser spinnfordelingen til ^{163}Dy for ulike eksitasjonsenergi. Her ser man at for eksitasjonsenergi mellom 2 og 3 er det vanskelig å observere hvilken spinn-cutoffparameter som har best overensstemmelse med den kombinatoriske modellen, derfor henvises det til tabell 7.6 som viser den kvadratiske gjennomsnittsfeilen av den relative feilen. Ut i fra tabellen forstår vi at både ved 2 og 3 MeV er det G&Cs spinn-cutoffparameter som gir det beste resultatet. Ved høyere eksitasjonsenergi er det klart E&Bs spinn-cutoff-parameter som passer best, det ser vi ved å studere figur 7.17 og 7.18. Generelt ser vi at for den odde kjernen passer E&Bs parameter best for en litt lavere eksitasjonsenergi enn for den like-like nabokjernen. Dette er fordi den odde kjernen har en lavere nøytronseparasjonsenergi enn sin like-like nabo, og vi vet at E&Bs parameter passer best ved $E > \approx S_n$.



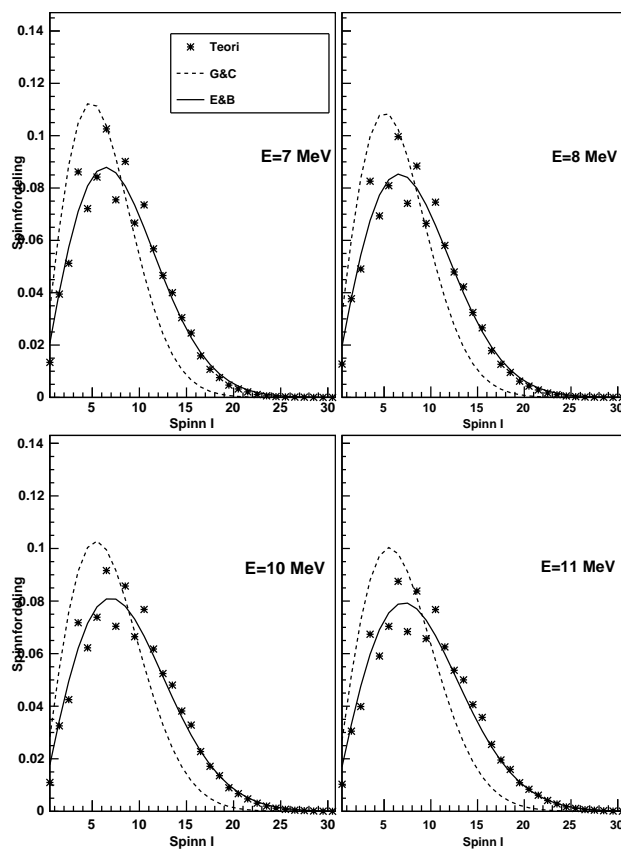
Figur 7.15: For ^{164}Dy : Sammenlikning av spinnfordelingen fra den kombinatoriske modellen (stjerner) og spinnfordelingen gitt ved formel 5.11 og σ foreslått av Egidy og Bucurescu (linje) og σ^2 foreslått av Gilbert og Cameron (stiplet linje) for eksitasjonsenergier (i MeV) 2, 3, 4 og 6.



Figur 7.16: For ^{164}Dy : Sammenlikning av spinnfordelingen fra den kombinatoriske modellen (punkter) og spinnfordelingen gitt ved formel 5.11 og σ foreslått av E&B (linje) og σ foreslått av G&C (stiplet linje) for eksitasjonsenergier (i MeV) 7, 8, 10 og 11.



Figur 7.17: For ^{163}Dy : Sammenlikning av spinnfordelingen fra den kombinatoriske modellen (stjerner), spinnfordelingen gitt ved formel 5.11 for σ foreslått av Egidy og Bucurescu (linje) og σ foreslått av Gilbert og Cameron (stiplet linje) for eksitasjonsenergi (i MeV) 2, 3, 4 og 6.



Figur 7.18: For ^{163}Dy : Sammenlikning av spinnfordelingen fra den kombinatoriske modellen (stjerner), spinnfordelingen gitt ved formel 5.11 for σ foreslått av E&B (linje) og σ foreslått av G&C (stiplet linje) for eksitasjonsenergi (i MeV) 7, 8, 10 og 11.

7.4 Nivåtettheten ved bindingsenergien

I forrige avsnitt så vi at spinn-cutoffparameteren ligger til grunn for den teoretiske spinnfordelingen. Men denne parameteren kan også brukes til å finne nivåtettheten ved bindingsenergien, forutsatt at man kjenner bindingsenergien. For å få en idé om hvilken spinn-cutoffparameter som stemmer best overens med nivåtettheten fra den kombinatoriske modellen, studeres nivåtettheten ved bindingsenergien B_n . Nivåtettheten ved B_n er basert på antakelsen om at det er like mange tilstander med positiv paritet som det er ved negativ paritet, noe som ikke er helt korrekt. For å ekstrahere nivåtettheten studeres nøytroninnfangningsreaksjoner. Hvis man da vil finne nivåtettheten ved bindingsenergien til en kjerne med A nukleoner, undersøkes data fra reaksjonen der en target-kjerne ($N - 1$ nøytroner) fanger et nøytron og sender ut γ -kvanter; (n, γ) . Dersom man f.eks. vil studere kjernen ^{163}Dy , må en se på nøytroninnfangning på targetkjernen ^{162}Dy og ha kjennskap til data fra reaksjonene. Særlig viktige størrelser er D , avstanden mellom nøytronresonansene, og usikkerheten til D . Begge disse størrelsene kan finnes i [21].

For s-bølge nøytroninnfangning hvor $l = 0$ er parameteren D gitt ved

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{2} \left[\rho \left(B_n, I = I_t + \frac{1}{2} \right) + \rho \left(B_n, I = I_t - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (7.2)$$

der I_t er spinn til targetkjernen. Med utgangspunkt i denne likningen og spinnfordelingen blir likningen for $\rho(B_n)$ lik:

$$\rho(B_n) = \frac{2\sigma^2}{D} \frac{1}{(I_t + 1) \exp(- (I_t + 1)^2 / 2\sigma^2) + I_t \exp(- I_t^2 / 2\sigma^2)} \quad (7.3)$$

Her kan man bruke enten E&Bs eller G&Cs spinn-cutoff parameter. Det finnes ikke eksperimentelle data på D for $^{45,46}\text{Ti}$, derfor blir kun nivåtettheten ved bindingsenergien for dysprosiumisotopene undersøkt.

I den kombinatoriske modellen blir spinn til en bestemt tilstand bestemt ut i fra formelen $I(I + 1) = R(R + 1) + K$ som beskrevet i kapittel 6. Siden den kombinatoriske modellen gir en spinnfordeling, er det interessant å studere likning (7.2) nærmere. La oss anta at parameteren D og targetspinn er kjent, da kan likningen brukes for å finne $\rho(B_n)$. Hvis targetkjernen er en like-like kjerne, så er targetspinn lik null og vi kan ut i fra likningen for D bestemme ρ ved B_n :

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{2} \rho \left(B_n, I = \frac{1}{2} \right). \quad (7.4)$$

Tabell 7.7: Nivåtettheten ved bindingsenergien for $^{164,163}\text{Dy}$ og nødvendige størrelsen man må ha for å komme fram til $\rho(B_n)$.

Kjerne	B_n (MeV)	D (eV)	dD (eV)	Gilbert&Cameron		Egidy&Bucurescu		Kombimodellen
				σ	$\rho(B_n)$ (MeV $^{-1}$)	σ	$\rho(B_n)$ (MeV $^{-1}$)	$\rho(B_n)$ (MeV $^{-1}$)
^{163}Dy	6.27	62	5	5.23	$8.98(12) \cdot 10^5$	6.732	$1.47(17) \cdot 10^6$	$4.39(0) \cdot 10^5$
^{164}Dy	7.658	6.8	0.6	5.49	$1.74(22) \cdot 10^6$	6.91	$2.59(29) \cdot 10^6$	$7.99(0) \cdot 10^6$

I den kombinatoriske modellen kan man undersøke spinnfordelingen ved B_n for targetkjernen, og vekt faktoren w for $I = 1/2$ kan ekstraheres slik at uttrykket over blir

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{2} \rho(B_n) w \left(\frac{1}{2} \right) \quad (7.5)$$

og nivåtettheten ved bindingsenergien blir dermed:

$$\rho(B_n) = \frac{2}{D w \left(\frac{1}{2} \right)}. \quad (7.6)$$

Er targetspinnet forskjellig fra null får vi:

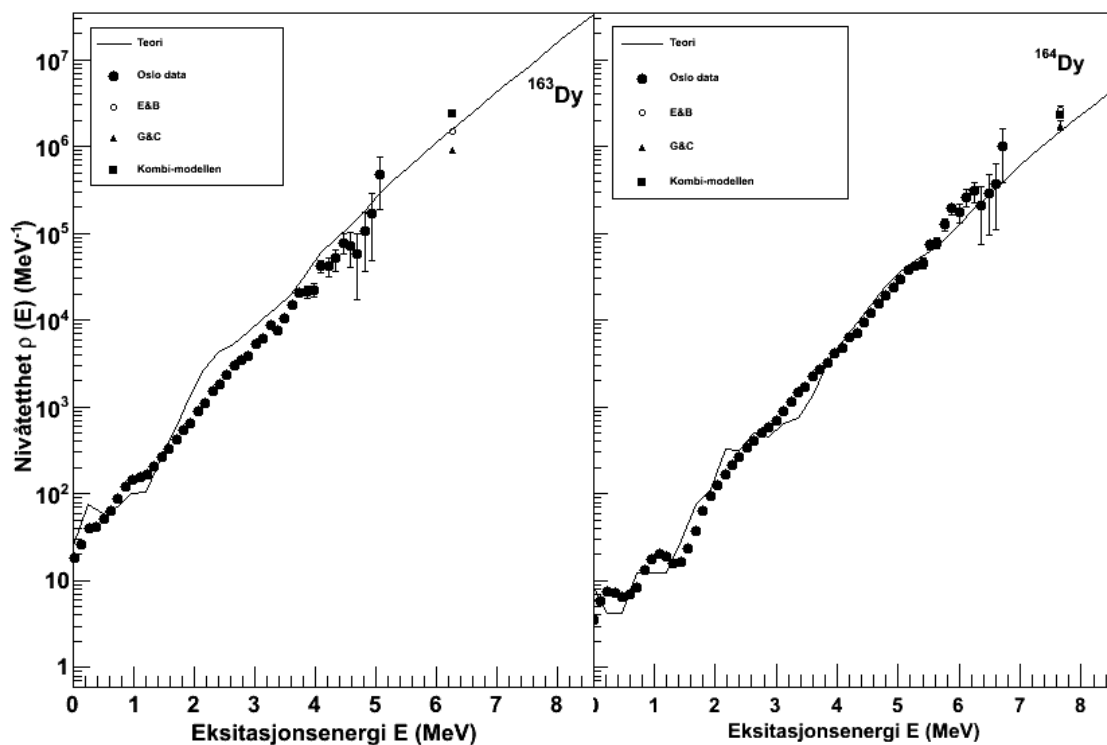
$$\rho(B_n) = \frac{2}{D} \frac{1}{w \left(I_t + \frac{1}{2} \right) + w \left(I_t - \frac{1}{2} \right)}. \quad (7.7)$$

Nivåtettheten ved bindingsenergien for dysprosiumisotopene og nødvendige størrelser man må ha for å komme fram til $\rho(B_n)$ er oppgitt i tabell 7.7. I figur 7.19 vises nivåtettheten ved bindingsenergien til ^{164}Dy og ^{163}Dy hvor både E&Bs og G&Cs spinn-cutoffparameter ligger til grunn, samt spinnfordelingen fra den kombinatoriske modellen, se likning (7.7) og (7.6). Merk at $\rho(B_n)$ fra spinnfordelingen til modellen *ikke* sammenfaller med grafen i figuren. Dette er fordi $\rho(B_n)$ blir funnet på bakgrunn av aksperimentelle data pluss den teoretiske vekt faktoren, mens selve grafen for nivåtettheten blir funnet utelukkende fra teorien til den kombinatoriske modellen. Vi vet at E&Bs spinn-cutoffparameter burde være den mest korrekte å bruke for energier nær bindingsenergien og høyere og dette ser ut til å stemme for ^{163}Dy fordi her er det omtrent overlapp mellom $\rho(B_n)$ og grafen fra den kombinatoriske modellen. For ^{164}Dy ser det derimot ut til at G&Cs parameter gir den $\rho(B_n)$ som passer best med resultatet fra den kombinatoriske modellen. Men vi ser også at nivåtettheten fra modellen ligger litt under eksperimentelle data ved $E > 5$ MeV.

Tabell 7.8: Forholdet η mellom de ulike punktene for $\rho(B_n)$ og $\rho(B_n)$ fra den kombinatoriske modellen.

Kjerne	$\eta_{G\&C}$	$\eta_{E\&B}$	η_{kombi}
^{163}Dy	0.587	0.966	1.54
^{164}Dy	1.14	1.70	1.50

Forholdet mellom de ulike punktene for $\rho(B_n)$ og resultatet fra den kombinatoriske modellen presenteres i tabell 7.8. Ut i fra tabellen ser vi at for ^{163}Dy er det nesten fullstendig overlapp mellom punktet som baserer seg på E&Bs parameter og $\rho(B_n)$ fra modellen, forholdet er nesten lik én. Tabel-



Figur 7.19: Nivåtettheten til $^{163,164}\text{Dy}$, hvor det i hver figur er merket tre punkter for $\rho(B_n)$. De ulike punktene baserer seg på spinnfordelingen fra den kombinatoriske modellen, spinn-cutoff parameteren fra E&B og spinn-cutoffparameteren fra G&C.

len forteller oss videre at for ^{164}Dy er forholdet mellom punktet som baserer seg på G&Cs parameter og punktet fra modellen, på 1.14. Vi ser også at $\rho(B_n)$ basert på spinnfordelingen fra den kombinatoriske modellen avviker med rundt 50% i forhold til resultatet fra modellen.

7.5 Brutte par og paritetsasymmetri

I dette avsnittet skal gjennomsnittlig antall brutte par og paritetsfordelingen studeres. Mye av strukturen i nivåtettheten kan forstås ved å studere gjennomsnittlig antall brutte par. Vi vet f.eks. at ved den energien et par brytes vil vi se en “hump” i nivåtettheten, og at denne energien tilsvarer $\approx 2\Delta$. Når det kommer til paritetsasymmetrien er dette et mål på hvor mange tilstander som finnes med positiv og negativ paritet innenfor et energiintervall. Paritetsasymmetrien, α , kan finnes ved:

$$\alpha = \frac{\rho_+ - \rho_-}{\rho_+ + \rho_-} \quad (7.8)$$

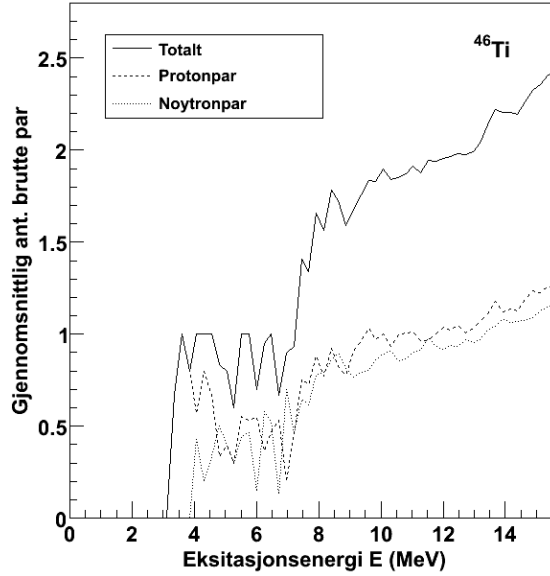
hvor ρ_+ og ρ_- er nivåtettheten for henholdsvis positive og negative pariteter. Der paritetsasymmetrien er lik en eller minus en, betyr der at alle nivåene har den samme pariteten, og der den er null betyr det at like mange nivåer har positive og negative paritetsverdier. I eksperimenter gjort ved OCL blir det antatt at nivåtettheten ved bindingsenergien, $\rho(B_n)$, har en paritetsasymmetri lik null. Den totale nivåtettheten blir normalisert til å gå i gjennom dette punktet. Derfor er det særlig interessant å undersøke paritetsfordelingen til den kombinatoriske modellen ved akkurat dette punktet for å se om den virkelig er null.

Brutte par og paritetsasymmetri for titanisotopene

Figur 7.20 viser gjennomsnittlig antall brutte par i ^{46}Ti som funksjon av eksitasjonsenergi. Man ser at ett protonpar brytes ved ≈ 3 MeV ($2\Delta_p$) som svarer til den første humpen i nivåtettheten og et nøytronpar brytes ved litt under 4 MeV. To par brytes ved rundt 7 MeV (4Δ) som svarer til den andre humpen. Resultatene er naturligvis i overensstemmelse med verdien på par-gapene.

Figur 7.21 viser paritetsasymmetrien til ^{46}Ti . For flere lave eksitasjonsenergi-er under 3 MeV ses det at α ofte er lik en. Ved $E = 0$, altså grunntilstanden er $\alpha = 1$, fordi grunntilstanden har positiv paritet. Neste topp med $\alpha = 1$ er 2^+ -tilstanden ved 0.889 MeV. Ved høyere eksitasjonsenergi-er enn 3 MeV er det omtrent like mange positive og negative tilstander. Ved bindingsenergien B_n , altså 13.2 MeV er det en paritetsasymmetri på 0.08, derfor forventes det at $\rho(B_n)$ som baserer seg på at paritetsasymmetrien er lik null, gir en liten feil.

For å kunne si noe om denne feilen må vi tilbake til uttrykket for nivåtettheten ved bindingsenergien, likning (7.2) i avsnitt 7.4. Dette uttrykket



Figur 7.20: Gjennomsnittlig antall brutte nukleonpar i ^{46}Ti som funksjon av eksitasjonsenergi.

ble funnet ved å ta utgangspunkt i D og spinnfordelingen. En formel som i tillegg tar hensyn til en paritetsasymmetri som er forskjell fra null, er gitt ved [26, 27]:

$$\frac{1}{D} = \rho(B_n)g(B_n, I = I_t \pm 1/2)P(B_n, \pi_t), \quad (7.9)$$

hvor π_t er pariteten til targetkjernen og $P(E, \pi_t)$ [27] er paritetens projeksjonsfaktor. Deretter definerer vi nivåtettheten av nivåene med den samme pariteten π_g som grunntilstanden ρ_g , og nivåtettheten av nivåer med paritet motsatt i forhold til grunntilstanden som ρ_s . Da får vi:

$$P_g = P(E, \pi = \pi_g) = \frac{\rho_g}{\rho} = \frac{1}{1 + \xi} \quad (7.10)$$

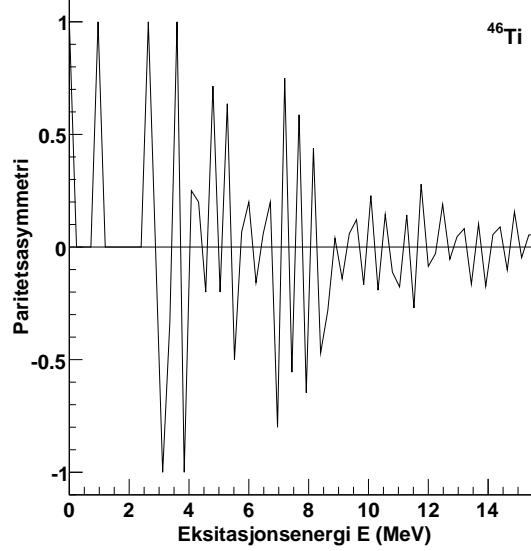
$$P_s = P(E, \pi = \pi_s) = \frac{\rho_s}{\rho} = \frac{1}{1 + 1/\xi}, \quad (7.11)$$

hvor ξ er definert ved

$$\xi = \frac{\rho_s}{\rho_g}. \quad (7.12)$$

Vi ser at $\xi = 1$ hvis paritetsasymmetrien er lik null. Videre har vi:

$$\rho_s + \rho_g = \rho \quad \text{og} \quad P_g + P_s = 1, \quad (7.13)$$



Figur 7.21: Paritetsasymmetrien for ^{46}Ti som funksjon av eksitasjonsenergi.

Vi kan nå omskrive likningen for D , avstanden mellom resonansene:

$$\frac{1}{D} = \rho(B_n)g(B_n, I = I_t \pm 1/2)P_g(B_n) = \rho(B_n)g(B_n, I = I_t \pm 1/2)\frac{1}{1 + \xi}, \quad (7.14)$$

slik at den totale nivåtettheten ved bindingsenergien inkludert paritetsasymmetrien blir:

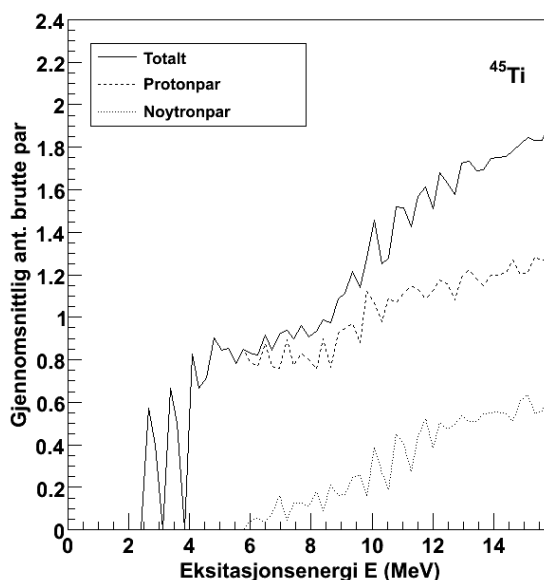
$$\rho(B_n) = \frac{\sigma^2}{D} \frac{1 + \xi}{(I_t + 1) \exp(-I_t^2/2\sigma^2) + I_t \exp(-I_t^2/2\sigma^2)}. \quad (7.15)$$

Vi ser ut i fra denne likningen at uttrykket for $\rho(B_n)$ blir lik uttrykket gitt ved formel (7.2) dersom $\xi = 1$. Siden isotopen ^{46}Ti har en paritetsasymmetri på 0.08 vil ikke ξ bli lik én. Og siden grunntilstanden til targetkjernen ^{45}Ti har negativ paritet får vi at ξ kan uttrykkes

$$\xi = \frac{\rho_s}{\rho_g} = \frac{\rho_+}{\rho_-} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}. \quad (7.16)$$

Siden $\alpha = 0.08$ får vi at $\xi = 1.17$. Dermed får vi at forholdet mellom $\rho(B_n)$ for $\xi = 1.17$ og $\xi = 1$ (dvs. $\alpha = 0$) er

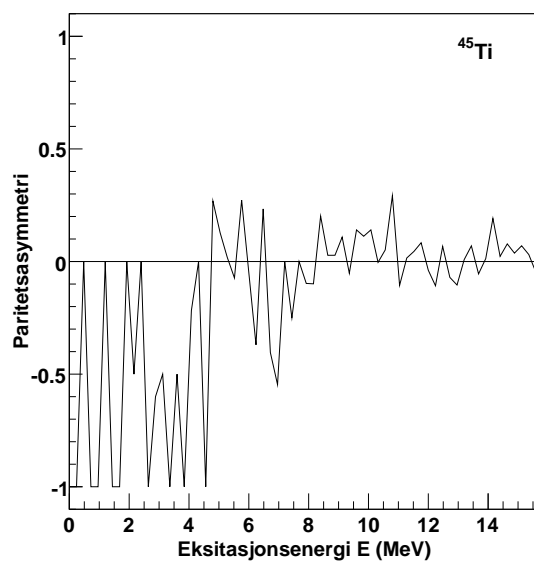
$$\frac{\rho(B_n)_{\xi=1.17}}{\rho(B_n)_{\xi=1}} = \frac{1 + 1.17}{1 + 1} = 1.086.$$



Figur 7.22: Gjenomsnittlig antall brutte par i ^{45}Ti som funksjon av eksitasjonsenergi.

Det vil si at på grunn av at paritetsasymmetrien ikke er null, vil punktet ved bindingsenergien få en verdi som er 8.6% høyere enn det verdien ville ha vært hvis paritetsasymmetrien hadde vært null.

Gjenomsnittlig antall brutte par i ^{45}Ti som funksjon av eksitasjonsenergien er vist i figur 7.22. Ut i fra figuren ser man at det første protonparet brytes ved 2.5 MeV ($\approx 2\Delta$), som er litt høyere enn verdien på pagapet for protoner. Det første nøytronparet brytes ved 6 MeV, altså ved rimelig høy energi, mye høyere enn $2\Delta_n$. Dette skyldes sannsynligvis at det uparede nøytronet til en viss grad hindrer at andre nøytronpar brytes fordi dette nøytronet gjør at færre tilstander er tilgjengelige for andre nøytroner på grunn av Pauli prinsippet. Paritetsasymmetrien til ^{45}Ti er vist i figur 7.23. For denne kjernen observeres det at for energier mindre enn ≈ 4.5 MeV, så er det flere negative paritetstilstander enn positive. Dette resultatet er motsatt i forhold til ^{46}Ti hvor det var flest positive paritetstilstander for lave eksitasjonsenergien. Resultatet lar seg forklare hvis man studerer hvilke orbitaler som er tilgjengelige. Bindingsenergien til ^{45}Ti er på 9.53 MeV og paritetsasymmetrien ved dette punktet er på 0.14. Siden paritetsasymmetrien *ikke* er lik null blir $\xi = 0.75$, noe som betyr at nivåtettheten ved bindingsenergien blir 88% av i forhold til $\rho(B_n)$ dersom paritetsasymmetrien hadde vært null: $\rho(B_n)_{\xi=0.75}/\rho(B_n)_{\xi=1} = 0.88$.



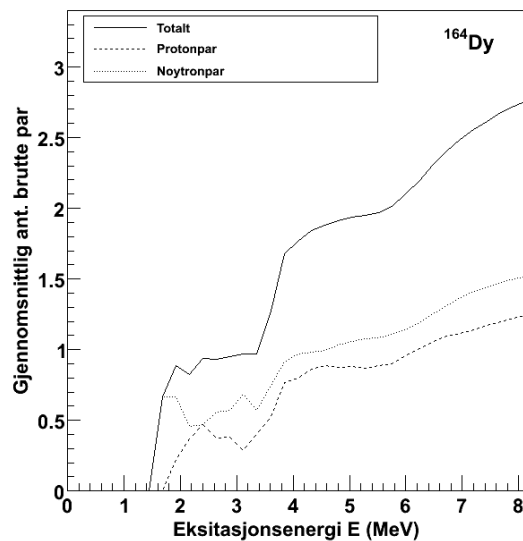
Figur 7.23: Paritetsasymmetrien for ^{45}Ti som funksjon av eksitasjonsenergi.

Brutte par og paritetsasymmetri for dysprosiumisotopene

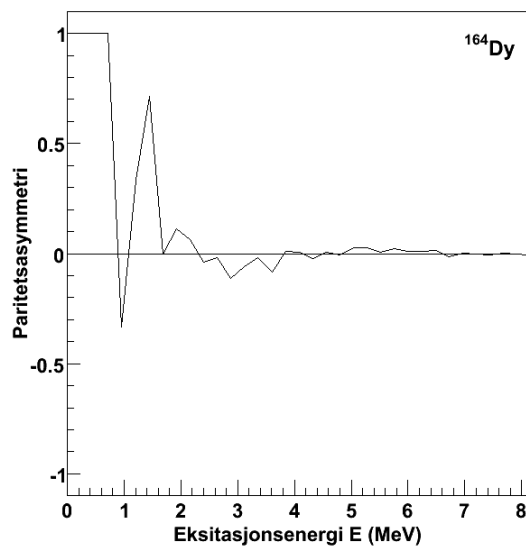
Figur 7.24 viser gjennomsnittlig antall brutte nukleonpar i ^{164}Dy som funksjon av eksisjonsenergi. Det ses av figuren at ved ca. 1 MeV brytes et protonpar og ved ca. 1.5 MeV brytes et nøytonpar. Videre ses det at maksimalt antall brutte par er tre, noe som tilsvarer seks kvasipartikler. For høyere eksitasjonsenergier hadde man forventet at flere nukleonpar hadde blitt brutt.

Paritetsfordelingen til ^{164}Dy er vist i figur 7.25. Man ser at paritetsfordelingen er omtrent null fra ca. 4 MeV og oppover, det vil si at det er like mange positive paritetstilstander i nivåtettheten som negative. Ved bindingsenergien, $B_n = 7.58$ MeV, er paritetsasymmetrien lik -0.0038 , altså svært nært null.

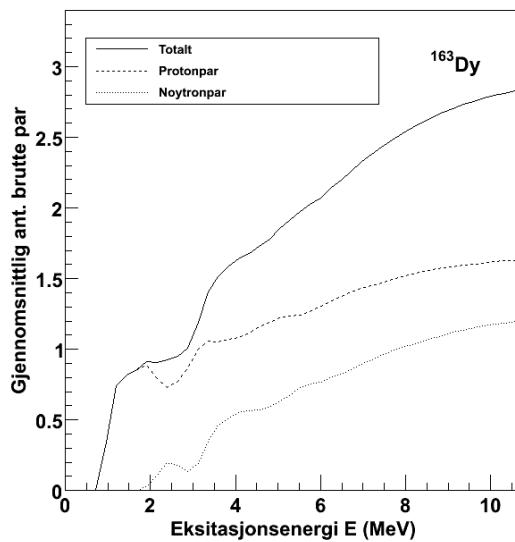
Figur 7.26 viser gjennomsnittlig antall brutte par i ^{163}Dy . Ved ≈ 1.3 MeV brytes et protonpar, mens ved ≈ 2.4 MeV brytes et nøytronpar. Paritetsfordelingen for ^{163}Dy kan ses i figur 7.27. Man ser at negative paritetstilstander dominerer opp til ca. 4 MeV. Fra 4 MeV og høyere er det like mange positive paritetstilstander som negative og paritetsasymmetrien ved bindingsenergien er på 0.012. For begge dysprosiumisotopene er paritetsasymmetrien så liten at nivåtettheten ved bindingsenergien får en endring på 3%, noe som er ubetydelig i forhold til punktets usikkerhet.



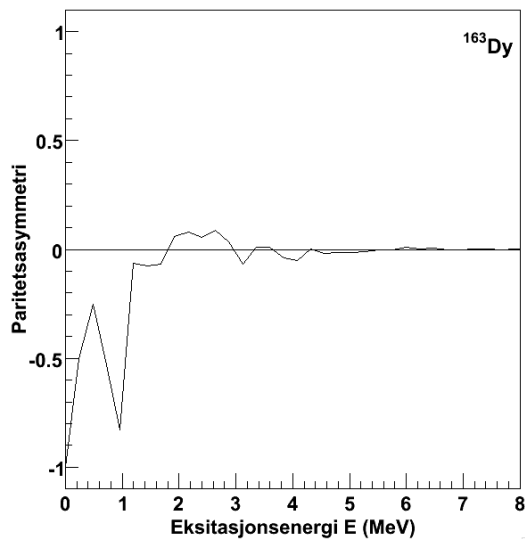
Figur 7.24: Gjennomsnittlig antall brutte par i ^{164}Dy som funksjon av eksitasjonsenergi.



Figur 7.25: Paritetsasymmetrien til ^{164}Dy som funksjon av eksitasjonsenergi.



Figur 7.26: Gjennomsnittlig antall brutte par i ^{163}Dy som funksjon av eksitasjonsenergi.



Figur 7.27: Paritetsasymmetrien til ^{163}Dy som funksjon av eksitasjonsenergi.

7.6 Entropi

Med utgangspunkt i et mikrokanonisk ensemble diskutert i avsnitt 5.3 kan entropien som funksjon av eksitasjonsenergi til kjernen finnes. Entropien er et mål på uorden, altså her hvor mange måter nukleonene kan organisere seg på ved en gitt eksitasjonsenergi E . Dette vil reflektere antall kvasipartikler tilstede i kjernen ved forskjellige energier. Vi husker fra avsnitt 5.3 at entropien er lik

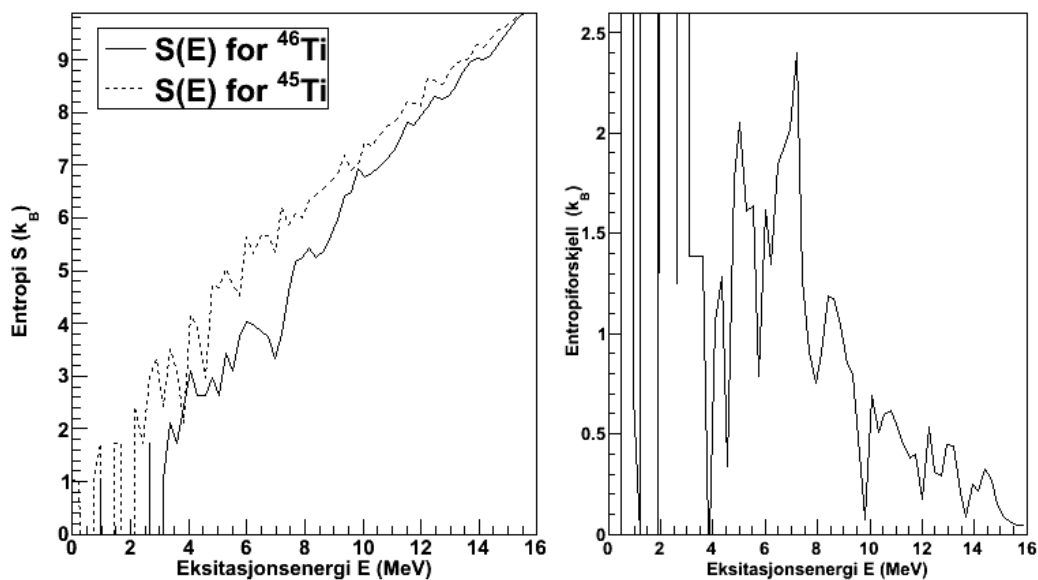
$$S(E) = k_B \ln \left(\frac{\rho(E)}{\rho_0} \right),$$

hvor ρ_0 er nivåettheten til de første nivåene i kjernen. Denne parameteren kan man regne seg fram til ved å studere Tables og Isotopes [20] for ^{46}Ti og ^{164}Dy og den er på henholdsvis 1.49 MeV^{-1} og 12.4 MeV^{-1} når det er tatt utgangspunkt i de tre første nivåene.

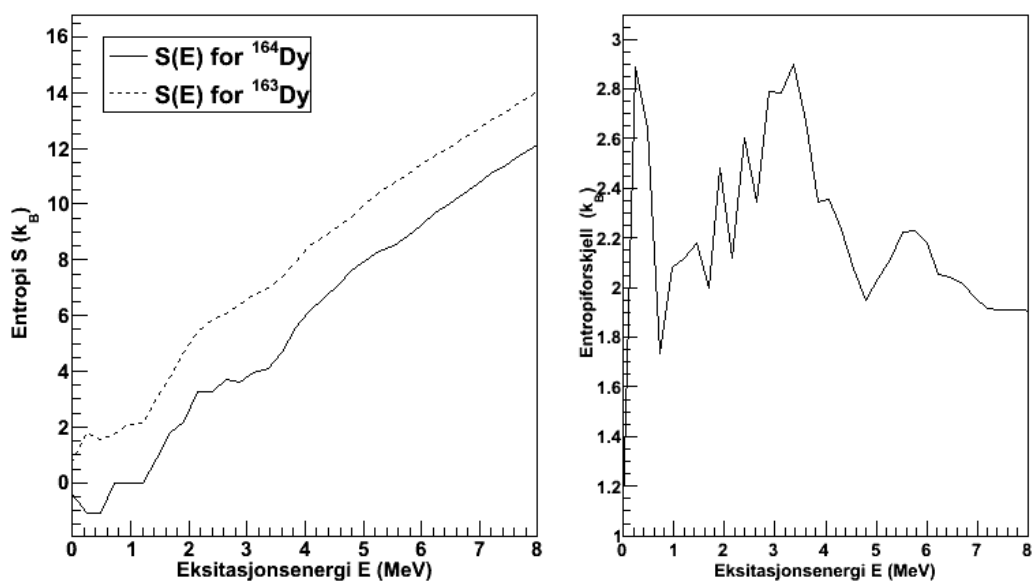
Energiintervallet, ΔE , er av stor betydning for hvordan entropien blir seende ut. Hvis ΔE er for liten kan det være at enkelte energiintervaller ikke har noen tilstander. Dette hender særlig ved lave eksitasjonsenergier hvor det kan være langt mellom nivåene. Der det ikke er noen nivåer vil nivåettheten bli null og følgelig vil det bli δ -funksjoner i entropien. For å sørge for at entropigrafen blir noenlunde glatt, må ΔE være stor nok, men ikke for stor fordi da kan man gå glipp av viktige strukturer i entropigrafen. I denne oppgaven er ΔE satt til å være 0.240 MeV .

Figur 7.28 tar for seg entropien til titanisotopene. Man ser at den odde titanisotopen, ^{45}Ti , generelt har høyere entropi enn like-like kjernen ^{46}Ti . Den høye entropien til ^{45}Ti skyldes at denne isotopen har et uparet nøytron, og det er dette nøytronet alene som bidrar til høyere entropi. Der nivåettheten er lik null er entropien tilegnet verdien $-400k_B$ fordi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$. Det forekommer noen uendeligheter før oppbrytningen av nukleonpar tar til. Ut i fra figuren ser vi at entropien øker der et nukleonpar brytes og det betyr at for de to kvasipartiklene som er et resultat av at et nukleonpar brytes er det altså mange flere nivåer som er tilgjengelig. Høyredelen av figuren viser $\Delta S = S_{\text{odd}} - S_{\text{like}}$, altså entropien til ^{45}Ti minus entropien til ^{46}Ti . Det er meget store fluktuasjoner for $E < 4 \text{ MeV}$, fordi ved noen energier er entropien $-400k_B$ for den ene isotopen, men ikke for den andre. Den gjennomsnittlige entropiforskjellen mellom energiene 4.5 MeV og 16 MeV er på $0.55 k_B$. For $E > 6 \text{ MeV}$ blir entropiforskjellen mindre, dette kan tolkes som at det uparede nøytronet får mindre og mindre å si ved høye eksitasjonsenergier.

Figur 7.29 viser entropi og entropiforskjellen til de to dysprosiumisotopene. Også her ser vi at den odde dysprosiumisotopen har høyere entropi enn sin like-like nabo på grunn av at den odde isotopen har et uparet nøytron. Vi ser at entropiforskjellen fluktuerer mye mellom 2 og $3k_B$, for deretter å bli mer stabil for høyere energier. Kanskje entropiforskjellen hadde blitt mindre ved høyere eksitasjonsenergier, akkurat som for titanisotopene. Den gjennomsnittlige entropidifferansen mellom 0 og 8 MeV er $2.2 k_B$, altså høyere enn titanisotopene. Dette er fordi det uparede nøytronet for ^{45}Ti har færre orbitaler tilgjengelig enn det uparede nøytronet i ^{163}Dy , og dermed mye mindre spillerom. I eksperimentelle målinger er entropidifferansen for dysprosiumisotopene funnet til å være $1.7k_B$ [28], altså noe lavere enn resultatet fra den kombinatoriske modellen.



Figur 7.28: Venstre: Entropien til ^{45}Ti og ^{46}Ti . Høyre: Entropien til ^{45}Ti minus entropien til ^{46}Ti . Enheten på begge y-aksene er k_B (Boltzmanns konstant).



Figur 7.29: Venstre: Entropien til ^{164}Dy og ^{163}Dy . Høyre: Entropien til ^{163}Dy minus entropien til ^{164}Dy .

7.7 Temperatur og varmekapasitet

I dette avsnittet skal temperaturen og varmekapasiteten til de fire kjernene studeres. Det går selvfølgelig ikke an å finne temperaturen med et vanlig termometer siden kjernen er et mikroskopisk system. I stedet må vi se på kjernens termodynamiske egenskaper som kan ekstraheres ut i fra nivåettheten. Ved å anta at kjernen kan beskrives som et mikrokanonisk ensemble, kan temperaturen finnes ved å derivere entropien funnet i forrige avsnitt

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}. \quad (7.17)$$

Den matematiske definisjonen av den deriverte til $S(E)$ med hensyn på energien er:

$$\frac{dS}{dE} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(E+h) - S(E)}{h}, \quad (7.18)$$

hvor h er steglengden. Hvis vi bruker en Taylorutvikling for $S(E)$, kan vi skrive:

$$S(E+h) = S(E) + hS'(E) + \frac{h^2 S''(E)}{2} + \dots \quad (7.19)$$

Den deriverte blir da en topunktsformel:

$$S'(E) \approx \frac{S(E+h) - S(E)}{h} \approx S' + \frac{hS''(E)}{2} + \dots \quad (7.20)$$

I vårt tilfelle er steglengden lik energiintervallet ΔE , som har verdien 0.240 MeV. Feilen i deriveringsformelen er da proporsjonal med ΔE .

En annen måte å finne den deriverte på, er å evaluere den deriverte på begge sider av et valgt punkt:

$$\begin{aligned} S(E+h) &= S(E) + hS'(E) + \frac{h^2 S''(E)}{2} + \frac{h^3 S'''(E)}{6} + O(h^4) \\ S(E-h) &= S(E) - hS'(E) + \frac{h^2 S''(E)}{2} - \frac{h^3 S'''(E)}{6} + O(h^4), \end{aligned} \quad (7.21)$$

og så for hver av disse likningene finne $\frac{h^3 S'''(E)}{6}$. Da får man to uttrykk for den tredje-deriverte, og man setter de uttrykkene lik hverandre og dermed kan man ekstrahere $S'(E)$:

$$S'(E) = \frac{S(E+h) - S(E-h)}{2h} - \frac{h^2 S'''(E)}{6} + O(h^3). \quad (7.22)$$

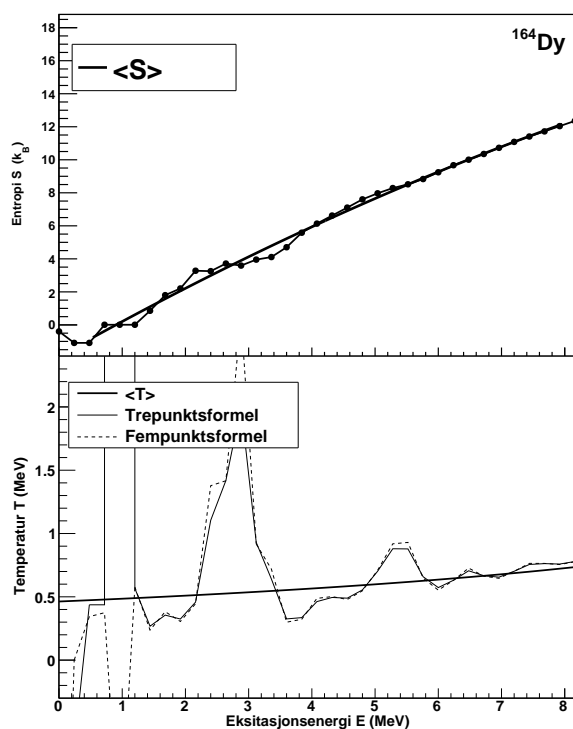
Her er $h^2 S'''(E)/6$ trunkerings feilen og $O(h^3)$ er den dominerende feilen. Dette uttrykket for den deriverte er en trepunktsformel og en bedre tilnærming

enn topunktsformelen (7.20). En annen og enda bedre måte å derivere på er ved en såkalt fempunkts-formel, hvor man evaluerer den deriverte ved å ta utgangspunkt i to punkter på hver side av et valgt punkt. Ved å ta utgangspunkt i Taylorrekker, uttrykkes formelen ved:

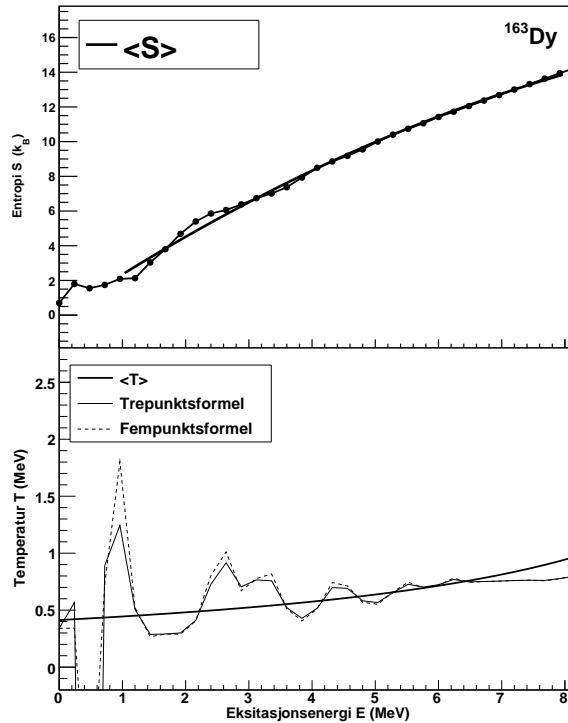
$$S'(E) \approx \frac{-S(E + 2h) + 8S(E + h) - 8S(E - h) + S(E - 2h)}{12h}, \quad (7.23)$$

hvor trunkteringsfeilen går som h^2 og den dominerende feilen som h^4 . Ulempen er at de to første og de to sistene punktene i entropien ikke blir tatt med i derivasjonen.

I dette avsnittet har jeg brukt trepunktsformelen og fempunktsformelen for å derivere $S(E)$ og komme fram til temperaturen. For dysprosimisotopene kan temperaturen observeres i figur 7.30 og 7.31. Man ser at for begge disse to isotopene så øker temperaturen etterhvert som eksitasjonsenergien øker,



Figur 7.30: Øverst: Entropien til ^{164}Dy , der den heltrukne linjen markerer gjennomsnittsentropien. Nederst: Temperaturen og gjennomsnittstemperaturen til ^{164}Dy .



Figur 7.31: Øverst: Entropien til ^{163}Dy der gjennomsnittsentropien er markert ved en heltrukken linje. Nederst: Temperaturen og gjennomsnittstemperaturen til ^{163}Dy .

bortsett fra ved noen energier der temperaturen synker for så å øke igjen. Den fallende temperaturen ved enkelte energier kan være et tegn på at nukleonpar brytes. Dette kan tyde på at energien går med på å bryte et par i stedet for å øke temperaturen. Vi ser også at for noen energier går temperaturen mot uendelig. Ved noen lave energier ser vi også at temperaturen er negativ. Dette er kjent for små systemer og systemer som ikke er i likevekt, og behøver ikke å bety at temperaturen ikke er definert for kjernen. I stedet får vi en temperatur som oppfører seg annerledes enn det vi er vant med.

For dysprosiumisotopene ser vi at gjennomsnittsentropien mellom $0.5 < E < 8$ MeV går som et andreordens polynom. For ^{164}Dy passer gjennomsnittsentropien (målt i enhet k_B) inn i formelen:

$$\langle S \rangle = -0.0490E^2 + 2.16E - 0.90. \quad (7.24)$$

der E er tallverdien til eksitasjonsenergien. Og dermed blir gjennomsnittstemperaturen lik

$$\langle T \rangle = \frac{1}{\langle S'(E) \rangle} = \frac{1}{-0.0979E + 2.16} \text{MeV} \quad (7.25)$$

med enhet MeV. For ^{163}Dy får vi at gjennomsnittsentropien går som

$$\langle S \rangle = -0.086E^2 + 2.42E + 0.009, \quad (7.26)$$

altså ganske likt som ^{164}Dy . Ved å derivere gjennomsnittsentropien ender vi opp med gjennomsnittstemperaturen som er

$$\langle T \rangle = \frac{1}{\langle S'(E) \rangle} = \frac{1}{-0.17E + 2.42} \text{MeV}. \quad (7.27)$$

Ved å ta utgangspunkt i formelen for gjennomsnittstemperaturen til de to dysprosiumisotopene, ses det at ^{163}Dy har høyere temperaturer enn ^{164}Dy for $E > 3.6$ MeV og lavere for $E < 3.6$ MeV.

Entropien og temperaturen til titanisotopene vises i figur 7.33 og 7.32. Det er på langt nær like mange nivåer i titanisotopene som i dysprosiumisotopene, noe som resulterer i at entropigrafen får en diskontinuerlig form. Dette igjen fører til at temperaturen blir uendelig mange steder, og både trepunktformelen og fempunktsformelen for derivasjon gir ikke gode resultater. I tillegg ser vi at ved noen energier er temperaturen negativ. Dette gjør det vanskelig å si noe om temperaturen til titanisotopene. Ellers kan man ut i fra figurene si at temperaturen varierer veldig. Temperaturen er basert på bare noen få kvasipartikler så store fluktuasjoner er forventet. Ved å anta at gjennomsnittsentropien følger et andre ordens polynom,

$$\langle S \rangle = -0.0088E^2 + 0.843E - 1.01,$$

kan vi ved å bruke formelen for temperatur si at gjennomsnittstemperaturen følger

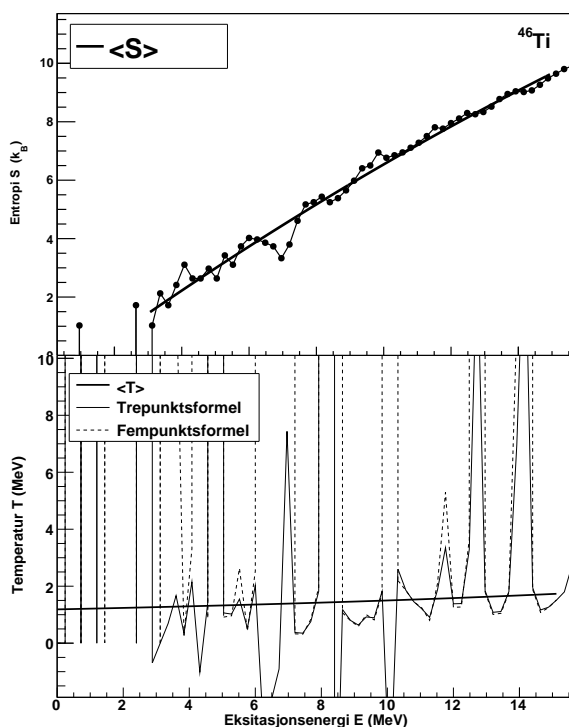
$$\langle T \rangle = \frac{1}{\langle S'(E) \rangle} = \frac{1}{-0.0176E + 0.843} \text{MeV}.$$

Det betyr at ved 0 MeV er gjennomsnittstemperaturen lik 1.19 MeV, mens ved 10 MeV er $\langle T \rangle$ lik 1.5 MeV. For ^{45}Ti går det på samme måte som for ^{46}Ti an å si noe om gjennomsnittstemperaturen. Ved å ta utgangspunkt i andre ordens polynomet mellom $2 < E < 15$ som er vist i figur 7.33, er gjennomsnittstemperaturen for dette eksitasjonsvinduet lik

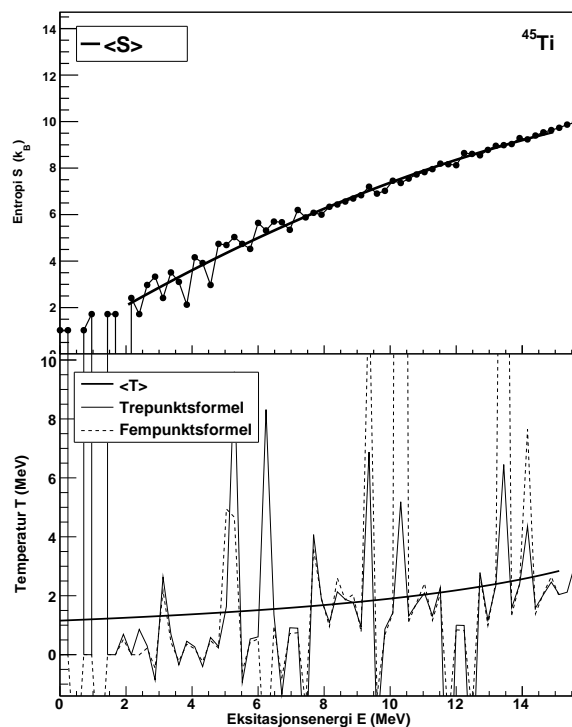
$$\langle T \rangle = \frac{1}{\langle S'(E) \rangle} = \frac{1}{-0.034E + 0.866} \text{MeV},$$

noe som betyr at temperaturene er generelt høyere enn for ^{46}Ti ved energier over 1.4 MeV.

Nå som temperaturen til de fire kjernene er funnet, kan vi gå videre med å finne varmekapasiteten. For et mikrokanonisk system, husker vi at varmekapasiteten der volumet er satt til å være konstant er gitt ved $C_V = \frac{\partial T}{\partial E}$. Vi ser at denne deriveringen av $T(E)$ vil gi opphav til negative områder i varmekapasiteten når $T(E)$ synker. Siden det var så mange flukturasjoner og uendeligheter i temperaturen til titanisotopene er det kun varmekapasiteten til dysprosiumisotopene som blir funnet her. Siden det spiller så liten rolle om temperaturen ble funnet ved hjelp av en trepunktsformel eller en fempunktsformel, ble trepunktsformelen benyttet for å finne temperaturen, og deretter ble trepunktsformelen brukt for å finne varmekapasiteten med bakgrunn på temperaturen. Resultatet ses i figur 7.34. For begge isotopene ser vi at varmekapasiteten fluktuerer kraftig rundt 0 MeV og noen steder er varme-

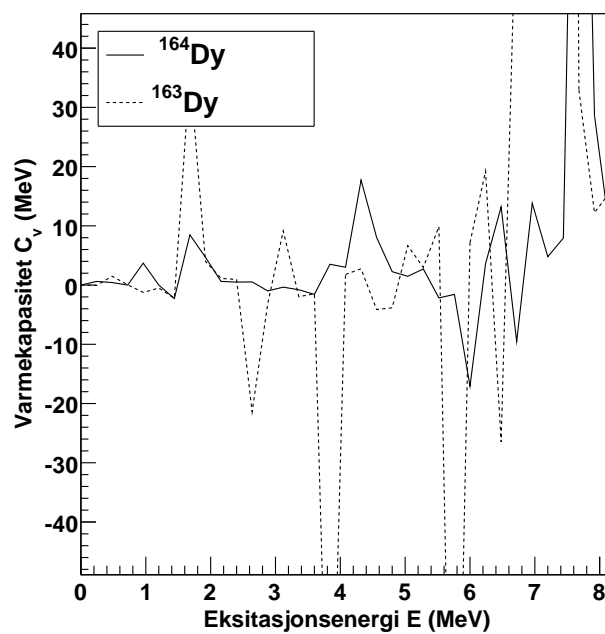


Figur 7.32: Øverst: Entropien til ^{46}Ti , hvor den heltrukne linjen markerer gjennomsnittsentropien. Nederst: Temperaturen og gjennomsnittstemperaturen.



Figur 7.33: Øverst: Entropien til ^{45}Ti der gjennomsnittsentropien er markert med en heltrukken linje. Nederst: Temperaturen og gjennomsnittstemperaturen til ^{45}Ti .

kapasiteten negativ. Fluktuasjonene reflekterer den varierende temperaturen. Negative verdier kan tolkes som oppbrytningen av nukleonpar. Vi ser at ^{164}Dy har en negativ varmekapasitet ved 1.5 MeV og ved denne energien brytes et nøytronpar, se figur 7.24. Ved eksitasjonsenergi 2.6 MeV for ^{163}Dy er også varmekapasiteten negativ, det kan komme av at rundt denne energien brytes to nukleonpar, se figur 7.26. De negative verdiene til varmekapasiteten har midlertidig ikke entydig korrespondanse til der det skjer par-oppbrytning. På grunn av de store fluktuasjonene og de negative verdiene i varmekapasiteten oppfører ikke varmekapasiteten seg slik vi er vant med. Det er fordi termodynamiske modeller blir ofte brukt på større systemer, typisk gasser med partikkeltall i størrelsesorden Avogadros tall $\approx 10^{23}$, og da blir kjernen med sine nukleoner et lite system i forhold.



Figur 7.34: Varmekapasiteten til ^{164}Dy og ^{163}Dy som funksjon av energi.

Kapittel 8

Konklusjon

I denne masteroppgaven har nivåtettheten til $^{163,164}\text{Dy}$ og $^{45,46}\text{Ti}$ blitt estimert ved hjelp av en kombinatorisk modell. Denne modellen baserer seg på å kombinere tilgjengelige proton- og nøytronorbitaler og telle opp hvor mange som befinner seg innenfor et energiintervall på 0.240 MeV. Nivåtettheten fra den kombinatoriske modellen har blitt sammenliknet med nivåtettheten fra eksperimenter gjort ved OCL. Det er en generelt god overensstemmelse mellom modellen og dataene, men finstrukturen har variert noe. Modellen reproducerer stegstrukturer observert eksperimentelt der det skjer oppbrytning av nukleonpar. Både modellen og eksperimentelle data viser at odde-like kjerner har større nivåtetthet enn sin like-like nabokjerne, dette er på grunn av det uparede ekstra nukleonet i odde-like kjernen. Når det kommer til forskjellen mellom nivåtettheten til dysprosiumisotopene og titanisotopene, har vi sett at dysprosiumisotopene gir den høyeste nivåtettheten, fordi disse isotopene har flere orbitaler tilgjengelig, lavere pargapparametre og befinner seg lengre fra fylte skall enn hva de to titanisotopene gjør.

Ved eksperimenter ved OCL finner man typisk nivåtettheten for spinnvinduet $I \approx 2 - 6$ for deretter å skalere nivåtettheten slik at den går i gjennom punktet $\rho(B_n)$. På denne måten blir nivåtettheten gjeldende for alle spinnene en kjerne kan ha. Ved å gjøre det på denne måten antar man at strukturen i nivåtettheten er den samme for både det lille og det store spinnvinduet. For å studere dette litt nærmere er den kombinatoriske modellen blitt benyttet for å se om strukturen i nivåtettheten er den samme for spinnvinduet $2 - 6$ og $0 - 30$. Det var små variasjoner i strukturen, men stort sett var den lik. Det var ingen tvil om at parbrytning fant sted ved samme energi for de to spinnvinduene. For det største spinnvinduet er stegstrukturen noe svakere enn for det mindre spinnvinduet. Dette skyldes at det er færre spinntilstander tilgjengelig for kvasipartiklene i det lille spinnvinduet.

Nivåtettheten ble også studert ved ett og ett spinn for å finne ut hvilket spinn som bidro til høyest nivåtetthet. For titanisotopene var det $I \approx 3$ som ga den høyeste nivåtettheten, denne verdien er godt innenfor det eksperimentelle. For dysprosiumisotopene derimot, ga $I \approx 6$ den høyeste nivåtettheten og denne verdien er bare såvidt innenfor det eksperimentelle spinnvinduet.

Videre ble nivåtettheten fra den kombinatoriske modellen benyttet til å studere kjernens termodynamiske egenskaper. Her ble antakelsen om at kjernen kan bli representert ved et mikrokanonisk ensemble benyttet, og størrelser som entropi, temperatur og varmekapasitet ble ekstrahert. Siden det er såpass få nivåer i titanisotopene ble resultatene vanskelige å tolke. I temperaturgrafene var det store fluktasjoner og til og med negative verdier. For dysprosium derimot, var det ikke så mange fluktasjoner og temperatur som funksjon av eksitasjonsenergi ble en glattere kurve. Gjennomsnittstemperaturen fulgte formelen $\langle T \rangle = \frac{1}{aE+b}$ der a og b er konstanter. Varmekapasiteten derimot, fluktuerte en del. Gjennomsnittsentropien til dysprosium- og titanisotopene går som et andregradspolynom som funksjon av eksitasjonsenergi. Det uparede nukleonet fører til at de odde isotopene har større entropi enn sin like-like naboer. Entropiforskjellen mellom den odde kjernen og den like kjernen for titanisotopene minker ved økende eksitasjonsenergi. Dette tyder på at entropien som skyldes den odde partikkelen får mindre å si ved høye eksitasjonsenergier. Entropiforskjellen mellom de to dysprosiumisotopene var større enn for titanisotopene. Dette kan forklares med at det uparede nukleonet i ^{163}Dy har flere tilstander tilgjengelig enn det odde nøytronet i ^{45}Ti .

Videre ble spinnfordelingen studert for de fire utvalgte kjernene. Spinnfordelingen fra den kombinatoriske modellen ved flere ulike eksitasjonsenergier ble sammenliknet med en teoretisk spinnfordeling. Den teoretiske spinnfordelingen baserer seg på en spinn-cutoffparameter som kan bestemmes på flere måter. Den ene spinn-cutoff parameteren brukt i denne oppgaven er basert på utregninger gjort av von Egidy og Bucurescu, mens den andre parameteren er basert på utregninger gjort av Gilbert og Cameron. For dysprosiumisotopene ved høye eksitasjonsenergier ($E \gg S_n$), var det ingen tvil om at E&Bs parameter ga den spinnfordelingen som passet best overens med den kombinatoriske modellen. Dette er ikke overraskende siden E&Bs parameter baserer seg på treghetsmomentet til et rigid legeme, og kjernen er forventet å nærme seg et rigid legeme ved eksitasjonsenergier rundt nøytronseparasjonsenergien. Ved lave eksitasjonsenergier var det vanskelig å se om E&Bs eller G&Cs parameter ga den spinnfordelingen som passet best overens med den fra modellen, fordi det var så få spinn tilgjengelig, men likevel viste det seg at

det stort sett var G&Cs parameter som ga den spinnfordelingen som passet best med den fra den kombinatoriske modellen. I titanisopene er det generelt få tilstander og spinnfordelingen fra den kombinatoriske modellen avvek fra en glatt kurve. Likevel kunne man også for titanisopene se at E&Bs spinn-cutoffparameter ga den spinnfordelingen som stemte best overens med den fra den kombinatoriske modellen ved energier høyere og rundt $E = S_n$, mens for lavere energier var det stort sett G&Cs parameter som ga best overensstemmelse.

Spinn-cutoffparameteren sammen med andre parametre blir ikke bare brukt for å finne spinnfordelingen, men kan også brukes til å finne nivåtettheten ved bindingsenergien, $\rho(B_n)$. For dysprosiumisotopene ble det studert hvilken av de to ulike $\rho(B_n)$ som estimeres fra de to ulike spinn-cutoffparametrene og sammenliknet punktene med nivåtettheten fra den kombinatoriske modellen. Man skulle kanskje forvente at E&Bs parameter ga det mest korrekte punktet, siden kjernen er antatt å være rigid ved bindingsenergien. Men det var kun for ^{163}Dy at E&Bs parameter ga best overensstemmelse, for ^{164}Dy passet $\rho(B_n)$ basert på G&Cs parameter best overens med den kombinatoriske modellen. Dette skyldes først og fremst usikkerheter knyttet til både den kombinatoriske modellen og utregningen av $\rho(B_n)$.

Kjernen er et utrolig komplekst system og det finnes ingen helheltlig modell som beskriver alle kjernens egenskaper tilfredsstillende. I denne oppgaven har det blitt vist at den kombinatoriske modellen gir fornuftige resultater for de to titan- og dysprosiumisotopene som har blitt studert, til tross for at modellen er enkel. Grunnen til dette, er at modellen inkluderer de viktigste frihetsgradene ved de eksitasjonsenergiene som benyttet i denne oppgaven.

Bibliografi

- [1] N.U.H. Syed et al., Phys. Rev. C **80**, 044309 (2009).
- [2] A. Schiller et al., NIM **A447**, 498 (2000).
- [3] T. von Egidy og D. Bucurescu, Phys. Rev. C **80**, 05310 (2009).
- [4] A. Gilbert og A. G. W. Cameron, Can. J. Phys. **43**, 1446 (1965).
- [5] K. S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, (John Wiley & Sons Inc., 1988).
- [6] Samuel Shaw Ming Wong, *Introductory nuclear Physics*, (Wiley-VCH, 1998).
- [7] Peter Ring og Peter Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, (Springer, 2005).
- [8] S.G. Nilsson, Mat. Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. **22**, No. 16 (1955).
- [9] J. Bardeen, L.N. Cooper, og J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [10] A. Bohr, B. R. Mottelson og D. Pines, Phys. Rev. **110**, 936 (1958).
- [11] S. T. Belyaev, Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vid. Selsk. **31**, 11 (1959)
- [12] J. Dobaczewski et al., Phys. Rev. C **63**, 024308 (2001).
- [13] Ph. A. Martin og F. Rothen, *Many-body problems og quantum field theory*, (Springer, 2002).
- [14] H. A. Bethe, Phys. Rev. **50**, 332 (1936).
- [15] T. von Egidy og D. Bucurescu, Phys. Rev. C **72**, 044311 (2005); Phys. Rev. C **73**, 049901(E) (2006).

- [16] P. Demetriou, S. Goriely, Nucl. Phys. **A695**, 95 (2001).
- [17] Y. Alhassid, S. Liu, og H. Nakada, Phys. Rev. Lett. **99**, 162504 (2007).
- [18] S. Hilaire, J. P. Delaroche, og M. Girod, Eur. Phys. J **A12**, 169 (2001).
- [19] S. B. Patel, *Nuclear Physics: An Introduction*, (New Age International, 1991).
- [20] R. Firestone og V. S. Shirley, *Table of Isotopes*, Vol. II (Wiley, New York, 1996).
- [21] RIPL-1: Handbook for calculations of nuclear reaction data, IAEA, Vienna, Report No. IAEA-TECDOC-1024 (1998); RIPL-2: Handbook for calculations of nuclear reaction data, IAEA, Vienna, Report No. IAEA-TECDOC-1506 (2006).
URL: <http://www-nds.iaea.org/RIPL-2/>
- [22] D.C.S. White et al., Nucl. Phys. **A260**, 189 (1976).
- [23] A. Bohr og B. Mottelson, *Nuclear Structure*, Vol. I (Benjamin, New York, 1969)
- [24] G. Audi og A.H. Wapstra, Nucl. Phys. **A595**, 409 (1995).
- [25] H. T. Nyhus et al., Phys. Rev. C **81**, 024325 (2010).
- [26] A. C. Larsen et al., under bearbejdelse.
- [27] D. Mocolj et al., Phys. Rev. C **75**, 045805 (2005).
- [28] M. Guttormsen et al., Phys. Rev. C **63**, 044301 (2001).