

Masteroppgave

Modell av flytende soløy: Membran-vannbølge- effekter

Hydroelastisk modell for horisontal fleksibel membran på fri vannoverflate.

Ole Petter Maugsten

Fluidmekanikk: Energi, miljø og sikkerhet
30 studiepoeng

Matematisk institutt
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Ole Petter Maugsten

**Modell av flytende soløy:
Membran-vannbølge-effekter**

Hydroelastisk modell for horisontal
fleksibel membran på fri vannoverflate.

Veileder:
John Grue

Sammendrag

I denne masteroppgaven tar vi for oss koblingen mellom tynne elastiske membraner og bølger på frie vannoverflater. Membranens dynamikk blir modellerte med lineær elastisitetsteori. Bevegelsen drives av det påsatte strekket og av trykket fra vannet. Vannet beskrives med potensialteori. Bevegelsen til membranen og fluidet forbindes med grensebetingelser.

Gjennom Greens teorem formuleres integrallikninger for hastighetspotensialet over membranens rand. Vi regner radiasjonspotensialet og diffraksjonspotensialet hver for seg. Problemet i både to og tre dimensjoner blir formulert. Π -teoremet anvendes for å bestemme de dimensjonsløse parametrene for modellen.

Diskretiseringer av membranen i to og tre dimensjoner gir oss numeriske tilnærminger til løsningene for hastighetspotensialene. Med løsningene regner vi ut flere interessant størrelser som addert masse, dempning, eksitasjon og RAO. Effekter av porøsitet undersøkes. Koeffisienter for refleksjon og transmisjon blir også regnet.

Resultatene tyder på at det er spesielt to størrelser som bestemmer dynamikken i det koblede systemet. Det er forholdet mellom bølgelengde og lengden til membranen, og det er det dimensjonsløse strekket. Dersom strekket settes svært høyt finner vi at membranens oppførsel grenser til den av en helt stiv plate. En membran som er relativt avslappet åpner opp for flere interessante effekter. Effektene varierer med bølgelengdene til vannbølgene. For lange bølger vil de symmetriske modene ha betydelig RAO, men ikke de antisymmetriske. For korte bølger vil symmetriske og antisymmetriske moder få sammenliknbare RAO. Denne dynamikken er av betydning for membranens bevegelse under påvirkning av vannbølger. Størrelsene addert masse, dempning og eksitasjon forblir urørt av strekket til membranen.

Forord

Jeg vil først og fremst rette en takk til professor John Grue for hans verdifulle veiledning og rådgiving. Han har ikke bare hjulpet meg faglig, men også inspirert og motivert meg stort. Hans entusiasme for sitt fagfelt smitter. Jeg er heldig og takknemlig for å ha hatt muligheten til å lære av en så engasjert mentor.

En stor takk rettes også til Håvar Jacobsen og Karl Henrik McGuire for de gode diskusjonene og alle bidragene. Å sparre med dere har vært svært givende. Vi har vært et godt lag. Takk for en minneverdig tid under mastergraden.

Og til mine nærmeste venner og familie - deres støtte og oppmuntring har vært uvurderlig. Jeg er takknemlig for alle som har vært en del av denne reisen.

Innhold

| | |
|---|-----------|
| Sammendrag | i |
| Forord | ii |
| Innhold | iv |
| 1 Introduksjon | 1 |
| 2 Matematisk formulering og analytiske løsninger | 4 |
| 2.1 Membranen | 4 |
| 2.2 Potensialteori | 13 |
| 2.3 Randkrav | 17 |
| 2.4 Radiasjon | 19 |
| 2.5 Diffraksjon | 21 |
| 2.6 Bevegelseslikningen | 23 |
| 2.7 Dimensjonsanalyse | 25 |
| 2.8 Refleksjon og transmisjon | 26 |
| 2.9 Porøsitet | 28 |
| 2.10 Viskøs dempning | 30 |
| 3 Numerisk tilnærming | 33 |
| 3.1 Panelmetoden | 33 |
| 3.2 Diskretisering av geometrien | 33 |
| 3.3 Matriseformulering | 34 |
| 3.4 Verifisering | 36 |
| 4 Resultater | 37 |
| 4.1 Addert masse | 38 |
| 4.2 Dempning | 39 |
| 4.3 Eksitasjon | 40 |
| 4.4 Haskind | 41 |
| 4.5 Amplituderrespons | 42 |
| 4.6 Refleksjon og transmisjon | 44 |
| 4.7 Porøsitet | 46 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.8 | Kvadratisk membran | 50 |
| 4.9 | Addert masse | 50 |
| 4.10 | Dempning | 51 |
| 4.11 | Eksitasjon | 52 |
| 4.12 | Amplituderespons | 53 |
| 5 | Diskusjon | 55 |
| 5.1 | Membran i to dimensjoner | 55 |
| 5.2 | Refleksjon og transmisjon | 56 |
| 5.3 | Porøsitet | 57 |
| 5.4 | Kvadratisk membran | 58 |
| 5.5 | Videre forskningsperspektiver | 58 |
| 6 | Konklusjon | 60 |
| | Figurer | 62 |
| | Bibliografi | 64 |

Kapittel 1

Introduksjon

Flytende solkraft

Konseptet med flytende solkraft, også kjent som flytende fotovoltaikk (FPV), innebærer installasjon av solcellepaneler på vannflater i stedet for tradisjonelle installasjoner på land. Denne teknologien har fått oppmerksomhet på grunn av sitt potensiale til å redusere arealbruk og øke effektiviteten i energiproduksjonen [1]. Ideen om å plassere solcellepaneler på vannoverflater ble først utforsket på begynnelsen av 2000-tallet, med noen småskala prosjekter. Disse tidlige forsøkene var relativt beskjedne i omfang og fikk ikke bred oppmerksomhet.

Japan spilte en avgjørende rolle i å fremme flytende solteknologi i begynnelsen. Det første betydningsfulle prosjektet ble gjennomført i 2007 i Aichi. Dette prosjektet viste gjennomførbarheten av flytende solsystemer og vekket videre interesse for teknologien. Etter Japans suksess begynte andre land å utforske flytende solprosjekter. USA, Spania og Italia hoppet raskt på solcelle-toget i årene som kom. Mellomstore og store installasjoner begynte å komme rundt 2013. Rundt den tiden kom det en bølge med flytende solkraft i land over hele verden. Et bemerkelsesverdig eksempel er en 70 MW flytende solpark i Huainan, Kina, som ble verdens største ved ferdigstillelsen i 2017. Kapasiteten til flytende solinstallasjoner fortsatte å øke. I dag er Kina den største aktøren innen flytende solkraft.

Fremskritt innen teknologi, materialer og ingeniørvitenskap bidro til økt effektivitet og kostnadseffektivitet av flytende solsystemer. Innovasjoner i flyteplatedesign, forankringssystemer og utviklingen av mer holdbare og korrosjonsbestandige materialer forbedret levetiden og ytelsen til flytende solinstallasjoner. Forskjellige typer vannflater, inkludert reservoarer, dammer og vannbehandlingsanlegg, ble utnyttet for flytende solinstallasjoner. Noen prosjekter utforsket integrasjonen av flytende sol med vannkraftanlegg som gir en dobbel funksjonell infrastruktur. I tillegg ble flytende solsystemer implementert for formål utover elektrisitetsproduksjon, som reduksjon av fordamning og forbedring av vannkvalitet. Forsknings- og utviklingsinnsats

fortsetter å fokusere på å forbedre effektiviteten, holdbarheten og miljøpåvirkningen av flytende solteknologi. Ettersom bransjen modnes, forventes det at flytende sol vil bli en stadig viktigere del av det globale fornybare energilandskapet.

Tidligere akademisk arbeid

I 1998 skrev Cho og Kim om en tynn fleksibel membran neddykket under bølger på havet [2]. Interaksjoner mellom monokromatiske innkommende bølger og en horisontal, fleksibel membran ble undersøkt med todimensjonal lineær hydroelastisk teori. Først fant de analytiske uttrykk for diffraksjons- og radiasjonsproblemet for en horisontal membran. Videre utviklet de en flerdomene grenseelementmetode (BEM) for å løse likningene til systemet. Løsningen baserte seg på en diskret membranmodell og kildedistribusjon over hele fluidgrensen. Den teoretiske forutsigelsen ble deretter sammenlignet med en rekke eksperimenter utført i en todimensjonal bølgetank ved Texas A&M University. De målte at refleksjons- og transmisjonskoeffisientene fulgte trenden til de forutsagte verdiene i rimelig nok grad. Ved hjelp av dataprogrammet deres testet de ytelsen til overflate-monterte eller nedsenkede horisontale membranbølgebarrierer med ulike systemparametere og bølgekarakteristikker. Det viste seg at den horisontale, fleksible membranen kunne være en effektiv bølgebarriere hvis den er riktig utformet.

To år senere, i 2000, tok Cho og Kim arbeidet videre og introduserte porøsitet i membranen [3]. De regnet at fluidets vertikale hastighet på randen til membranen må følge bevegelsen til membranen, men med en justering for porøsiteten. Hvor mye gjennomstrømning som er tillatt blir bestemt av permeabiliteten. Dersom den går mot null blir membranen ugjennomtrengelig, og dersom den blir stor blir membranen uendelig porøs, og det blir som om membranen ikke er der. Det ble antatt at membranen var laget av et materiale med svært fine porer, slik at den normale hastigheten til væsken som passerte gjennom membranen var lineært proporsjonal med trykkforskjellen mellom de to sidene av membranen. De antok altså at Darcy's lineære lov gjelder. De påstod at denne modellen passer godt med eksperimenter for lave til moderate porøsiteter.

Mukhlis mfl. undersøkte i 2021 bevegelsene til en skalert modell av et membran-bur [4]. Modelltester med antatt modellskala på 1:27 ble utført i SINTEF Oceans slepetank, der burmodellen besto av et omsluttende stoff (eller en pose), en elastisk flyter, et forankringssystem og en intern vannmasse. Modellen ble forankret i en slepetank og ble utsatt for regelmessige bølger med ulike perioder og steilheter. Den første harmoniske komponenten av flyter- og posebevegelsene i tidsserier ble analysert, og bildeanalyse ble utført for sistnevnte. Flere interessante responser til membran-buret ble diskutert; bursetning, bølgeaktig bevegelse for posen og flyterbevegelser. Størrelsen på bursetningen avhengte av innkommende bølgeperiode og steilhet;

størrelsen økte som respons på en lengre og brattere bølge. Posen viste også en bølgeaktig bevegelse som bredde seg fra flyteren til bunndelen av buret og har tydelige konsekvenser for dynamikken til posens bunn og lastene på stoffet. Forenklete numeriske simuleringer ble utført ved hjelp av WAMIT, som antok et stivt bur. En sammenligning av flyterbevegelsene mellom modelltester og WAMIT-resultater viser viktigheten av å ta hensyn til de fleksible modene til pose og flyter ved hydrodynamisk analyse av et slikt bur.

Dempingen av tyngdedrevene overflatebølger er en viktig prosess knyttet til atmosfære-hav- og bølge-strømnings-dynamikk. I 2016 undersøkte Sutherland mfl. eksperimentelt dempingen av monokromatiske tyngdebølger på grunn av ulike overflatebelegg [5]. Overflatebeleggene var festet i rommet slik at de ikke kunne drive med bølgebevegelsen. De var valgt slik at bølgefrequensene brukt i eksperimentet førte til neglisjerbar bøyestivhet for å minimere eventuelle fleksible effekter. Bølgedempingsrater viste seg å være uavhengige av steilheten og typen dekke som ble brukt innenfor det testede parameterområdet. Resultatene samsvarte med den teoretiske dempingsraten for et uelastisk overflatebelegg.

Interessen for fortøyninger av soløyer har naturligvis vokst. I 2016 utførte Trapani beregninger på kreftene som virker på en membran ved hjelp av en numerisk løsningsmetode [6]. Denne løseren tok hensyn til både vind og strøm, i tillegg til bølgekreftene. Den høye fleksibiliteten til den tynne membranen skapte minimal motstand mot de kommende bølgene, noe som resulterte i minimal påvirkning på bølgedempingen. Resultatene under utfordrende værforhold viste at belastningen på fortøyningen ville være moderat sammenlignet med et bølgekraftverk.

Masterprosjektet

I forskningen rundt hydrodynamikken til fleksible geometrier har det blitt tydelig at fleksibiliteten til geometriene har betydelig innvirkning på bevegelsen i vann. Denne oppgaven tar sikte på å generalisere dynamikken til tynne, fleksible membraner til frie overflater. Målet er å formulere presise ligninger som beskriver bevegelsen av både vannet og membranen. Fokus ligger på å utforske denne dynamikken i to dimensjoner, samtidig som vi søker innsikt i eventuelle forskjeller når det utvides til tre dimensjoner.

Sentrale spørsmål som behandles inkluderer hvilke størrelser som er avgjørende for dynamikken, hvordan bølgetall påvirker bevegelsen, og hvilken rolle porøsitet spiller i denne sammenhengen. En annen vesentlig aspekt er å kvantifisere energidissipasjonen i grensesjiktet og å forstå hvordan denne påvirker systemets overordnede dynamikk. Gjennom en grundig undersøkelse søker oppgaven å avdekke likheter og forskjeller mellom to- og tredimensjonal dynamikk, og dermed bidra til en dypere forståelse av kompleksiteten i systemet.

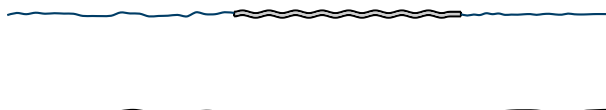
Kapittel 2

Matematisk formulering og analytiske løsninger

Vi ønsker å utforske forholdet mellom en tynn elastisk membran og vannoverflaten den ligger på. Som kontinuumsmekanikere beskriver vi bevegelsen til den elastiske membranen matematisk med en partiell differensiallikning. Denne likningen, som vi skal se, faller ut av antagelsen om lineær elastisitet. Samtidig beskriver vi vannets bevegelse med potensialteori. Det vil koke ned til å løse Laplacelikningen for et hastighetspotensial. For å kombinere disse differensiallikningene, setter vi felles grensebetingelser på membranens rand. Bevegelsen til membranen vil følge frekvensene til bølgene. Før vi dykker inn i koblingen mellom membranen og vannet, analyserer vi hver av dem separat. I denne oppgaven undersøker vi bevegelsene i både to dimensjoner og tre dimensjoner. La oss først rette fokus mot membranens vibrasjoner.

2.1 Membranen

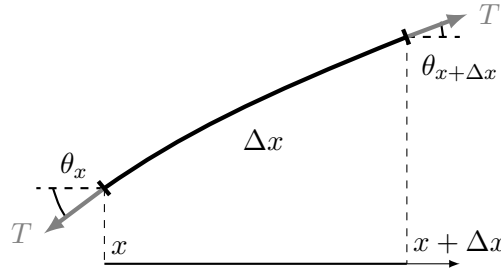
Vi tar først for oss bevegelsen til en tynn elastisk membran som om i vakuum. Membranen er såpass tynn at den kun motsetter seg strekk og ikke dreiemomenter. For eksempel er presenninger vanskelige å strekke, men enkle å bøye og krølle. På membranen legger vi på et strekk T . Dette strekket er en normalspenning som virker uniformt på membranen og er mye større enn de dynamiske spenningene. Vi vil raskt oppdage at dette tillater oss å modellere membranens bevegelse ved hjelp av bølgelikningen.



Figur 2.1: Skisse av membran på fri overflate.

To dimensjoner

Vi begynner med å velge et egnet koordinatsystem i to dimensjoner. Vi legger x -aksen langs horisontalplanet med $x = 0$ midt på membranen. Vi legger y -aksen langs vertikalen med $y = 0$ der vannet villet ligge i ro. Bøyningen til membranen betegner vi med W . Vi antar at utslagene er små. La oss undersøke et lite linjestykke av membranen.



Figur 2.2: Skisse av kreftene som virker på et flatestykke av membranen.

Linjestykket går fra x til $x + \Delta x$. Kraften fra strekket virker parallelt med membranen og utslagene er små. Det betyr at de vertikale kreftene på hver side av linjestykket kan skrives som

$$\begin{aligned} \sum F_y &= T \sin \theta_{x+\Delta x} - T \sin \theta_x \\ &\approx T \tan \theta_{x+\Delta x} - T \tan \theta_x \\ &= T \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - T \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_x. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ved å rekkeutvikle $\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_x + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_x \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2)$ kan vi fortsette å regne.

$$\begin{aligned} \sum F_y &\approx T \left(\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_x + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_x \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2) - \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_x \right) \\ &= T \left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_x \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2) \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Massen til linjestykket vårt er $m = \rho_m \Delta x \Delta h$ hvor ρ_m er membrantettheten og Δh er tykkelsen til membranen. Den vertikale akselerasjonen a_y til utslaget W må være den dobbeltderiverte i tid $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$. Nå kan vi bruke Newtons andre lov for den vertikale bevegelsen.

$$\begin{aligned} \sum F_y &= m a_y \\ T \left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_x \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2) \right) &= \rho_m \Delta x \Delta h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \\ T \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_x + \mathcal{O}(\Delta x) &= \rho_m \Delta h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nå lar vi lengden på linjestykket Δx gå mot null. Vi kan da skrive bevegelseslikningen som

$$\rho_m \Delta h \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2}. \quad (2.4)$$

Dette er den to dimensjonale bølgelikningen for bøyningen W . Vi skal straks se at grensebetingelsene er homogene. Derfor er første angrepslinje å lete etter separable løsninger. Utslaget W er en funksjon av x og t . Senere skal vi sende inn regulære bølger på membranen for å finne responsen. La oss koble ut tiden her på samme måte. Vi søker løsninger $W(x, t) = w(x)e^{i\omega t}$ hvor ω er svingefrekvensen i tid. Ved å substituere inn dette søket i likning (2.4) får vi

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{\rho_m \Delta h}{T} \omega^2 w(x). \quad (2.5)$$

Dette er et egenverdiproblem for w med egenverdier $k^2 = \frac{\rho_m \Delta h}{T} \omega^2$. Egenverdiene gir oss hvilke frekvenser membranene vil svinge på i rommet, så vi kaller de gjerne egenfrekvensene til membranen. Vi kan skrive problemet om til

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -k^2 w. \quad (2.6)$$

Denne likningen har generell løsning på formen

$$w(x) = A \cos kx + B \sin kx. \quad (2.7)$$

Det er på tide å sette grensebetingelser. Membranen vår har lengde L . Translasjon langs y (hiving) og rotasjon i xy -planet (stamping) blir håndtert senere, så vi lar endene være låste. Grensebetingelsene blir derfor $w(x = \frac{L}{2}) = w(x = -\frac{L}{2}) = 0$; altså

$$w\left(x = \frac{L}{2}\right) = A \cos\left(k\frac{L}{2}\right) + B \sin\left(k\frac{L}{2}\right) = 0 \quad (2.8)$$

$$w\left(x = -\frac{L}{2}\right) = A \cos\left(-k\frac{L}{2}\right) + B \sin\left(-k\frac{L}{2}\right) = 0 \quad (2.9)$$

eller

$$w\left(x = \frac{L}{2}\right) = A \cos\left(k\frac{L}{2}\right) + B \sin\left(k\frac{L}{2}\right) = 0 \quad (2.10)$$

$$w\left(x = -\frac{L}{2}\right) = A \cos\left(k\frac{L}{2}\right) - B \sin\left(k\frac{L}{2}\right) = 0. \quad (2.11)$$

Vi kan konstruere to nye likeverdige likninger ved å addere og subtrahere krav (2.10) og (2.11).

$$\cos\left(k\frac{L}{2}\right) = 0, \quad \sin\left(k\frac{L}{2}\right) = 0 \quad (2.12)$$

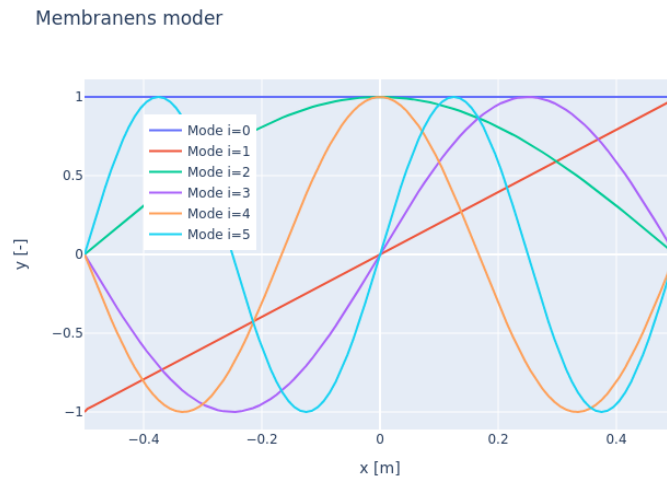
Dette gir oss egenfrekvenser $k_n^{(1)} = \frac{\pi}{L}(2n - 1)$ for de symmetriske modene $w_n^{(1)}$, og $k_n^{(2)} = \frac{\pi}{L}(2n - 2)$ for de antisymmetriske modene $w_n^{(2)}$. Heltallet n kalles ofte modusnummeret og ligger i \mathbb{N}_1 . Dersom vi tar med hiving og stamping, vil hele membranens bevegelses kunne skrives som

$$w(x) = A_0 + B_0x + \sum_n A_n w_n^{(1)} + \sum_n B_n w_n^{(2)}. \quad (2.13)$$

For å bestemme koeffisientene kunne en satt initialbetingelser, men vi skal koble membranen til bevegelsen til vannet, så vi lar uttrykket stå som det gjør inntil videre. Mer generelt kan vi skrive tøyningene som

$$w(x) = \sum_i \xi_i w_i(x). \quad (2.14)$$

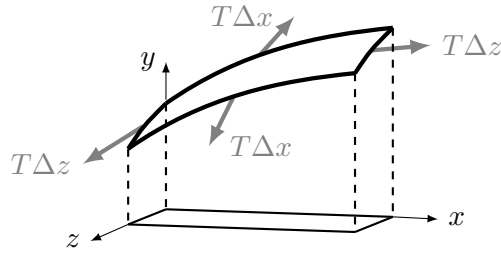
I likningen (2.14) har vi ett felles uttrykk for alle modene membranen kan bevege seg på. Nå skiller vi ikke mellom stive og fleksible moder på noen annen måte enn med indeksen i . Koeffisientene ξ_i gir størrelsen på utslaget til mode i . I figur 2.3 er et utvalg av membranens moder presentert.



Figur 2.3: Membranens moder i to dimensjoner. Mode 0 og 1 er stive. Alle andre er fleksible. Her vises alle moder opp til $n = 5$.

Rektangulær membran

Nå går vi over til tre dimensjoner. Vi lar aksekorset ligge slik som tidligere for x og y , og setter $z = 0$ på midten av membranen. Det betyr at y beskriver vertikalen, imens x og z beskriver horisontalplanet. I tre dimensjoner vil T være en spenning (kraft per lengde) som virker på alle kantene til et flatestykke av membranen.



Figur 2.4: Skisse av kreftene som virker på et flatestykket av membranen.

Som vist i figur 2.4 vil kraften som virker på hver kant være produktet av spenningen T og lengden på kanten. Vinkelen mellom membranen og x -aksen kaller vi θ . Vinkelen mellom membranen og z -aksen kaller vi φ .

$$\begin{aligned} \sum F_y &= \Delta z T \sin \theta_{x+\Delta x} + \Delta x T \sin \varphi_{z+\Delta z} - \Delta z T \sin \theta_x - \Delta x T \sin \varphi_z \\ &\approx \Delta z T \tan \theta_{x+\Delta x} + \Delta x T \tan \varphi_{z+\Delta z} - \Delta z T \tan \theta_x - \Delta x T \tan \varphi_z \\ &= T \left[\Delta z \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} + \Delta x \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)_{z+\Delta z} - \Delta z \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_x - \Delta x \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)_z \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nå rekkeutvikler vi de deriverte om x og z

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_x + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_x \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (2.16)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)_{z+\Delta z} = \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)_z + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)_z \Delta z + \mathcal{O}(\Delta z^2) \quad (2.17)$$

og setter inn.

$$= T \left[\Delta z \Delta x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_x + \Delta x \Delta z \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)_z + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta z^2) \right] \quad (2.18)$$

Nå har vi at membranens masse er $m = \rho_m \Delta x \Delta z \Delta h$. Vi kan igjen bruke Newtons andre lov for den vertikale bevegelsen.

$$\begin{aligned} \sum F_y &= m a_y \\ T \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_x + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)_z + \mathcal{O}(\Delta x \Delta z) \right] &= \rho_m \Delta h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Vi lar Δx og Δz gå til null. I tre dimensjoner vil altså bevegelseslikningen ta form

$$\begin{aligned}\rho_m \Delta h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= T \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \rho_m \Delta h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= T \nabla^2 W,\end{aligned}\tag{2.20}$$

hvor ∇^2 er Laplace operatoren. Dette er den flerdimensjonale bølgelikningen. La oss ta for oss eksempelet med en rektangulær membran. Da lønner det seg å bruke kartesiske koordinater. Vi kan igjen lete etter separable løsninger $W(x, z, t) = \chi(x)\zeta(z)e^{i\omega t}$. Da får vi to egenverdiproblemer henholdvis for $\chi(x)$ og $\zeta(z)$.

$$\frac{d^2 \chi}{dx^2} = -k_x^2 \chi, \quad \frac{d^2 \zeta}{dz^2} = -k_z^2 \zeta.\tag{2.21}$$

Igjen lar vi de stive modene ta seg av forflytningen av endepunktene, så vi låser randen. Grensebetingelsene blir altså $W(x = -L/2) = W(x = L/2) = W(z = -L/2) = W(z = L/2) = 0$. Vi kjenner allerede løsningene fra betraktningene i to dimensjoner.

$$\begin{aligned}\chi(x) &= A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x - \frac{\pi}{L}x\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x - \frac{2\pi}{L}\right) \\ \zeta(z) &= A_m \cos\left(\frac{2\pi m}{L}z - \frac{\pi}{L}z\right) + B_m \sin\left(\frac{2\pi m}{L}z - \frac{2\pi}{L}\right).\end{aligned}\tag{2.22}$$

Dersom vi inkluderer de fleksible modene får vi

$$\begin{aligned}\chi(x) &= A_0 + B_0 x + \sum_n A_n \chi_n^{(1)} + \sum_n B_n \chi_n^{(2)} \\ \zeta(z) &= A_0 + B_0 z + \sum_m A_m \zeta_m^{(1)} + \sum_m B_m \zeta_m^{(2)}.\end{aligned}\tag{2.23}$$

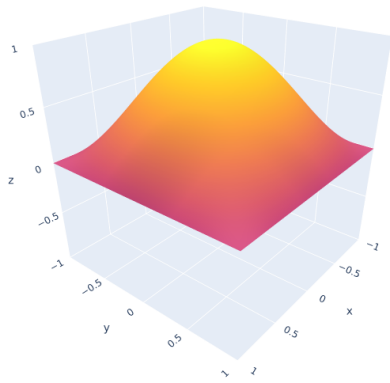
Mer kompakt, kan vi skrive

$$w(x, z) = \sum_i \xi_i w_i(x, z).\tag{2.24}$$

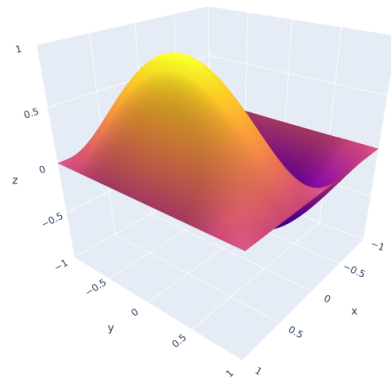
Vi trenger en regel for å hoppe mellom modustallene n og m .

$$\begin{cases} n = 0, & m = \frac{i}{2} & \text{hvis } i \text{ er partall,} \\ n = \frac{i+1}{2}, & m = 0 & \text{hvis } i \text{ er oddetall.} \end{cases}\tag{2.25}$$

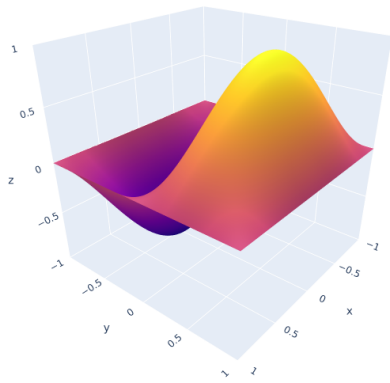
På neste side ser vi et utvalg av de uendelig mange fleksible modene til en kvadratisk membran med låste ender.



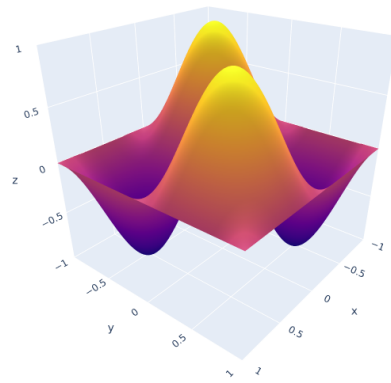
(a) $m=1, n=1$



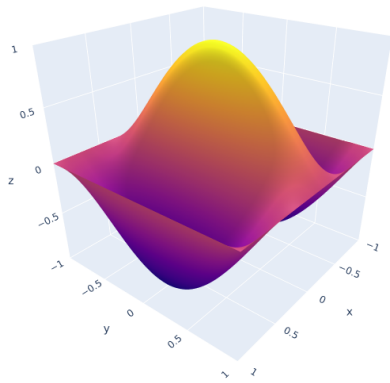
(b) $m=2, n=1$



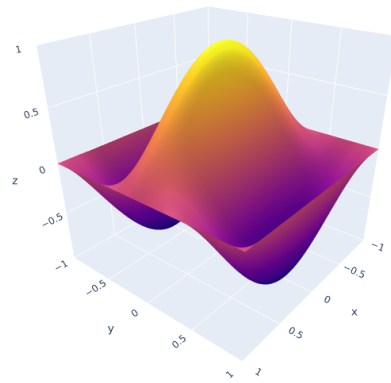
(c) $m=1, n=2$



(d) $m=2, n=2$



(e) $m=3, n=1$



(f) $m=1, n=3$

Figur 2.5: Her ser vi noen av de mange fleksible modene til en kvadratisk membran med låste ender.

Sirkulær membran

En annen geometri av interesse er sirkulære membraner. Bevegelseslikningen endrer seg ikke, men det er i dette tilfellet lurt å bruke polare koordinater. Da bruker vi radiusen r og vinkelen θ i stedet for x og z . I polarkoordinater skriver vi Laplace operatoren som $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$. Vi kan nok en gang lete etter separable løsninger for bøyningen $W(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)e^{i\omega t}$. Da faller det ut to likninger som henholdsvis beskriver radiell og tangensiell oppførsel til membranen. Den tangentielle likningen blir

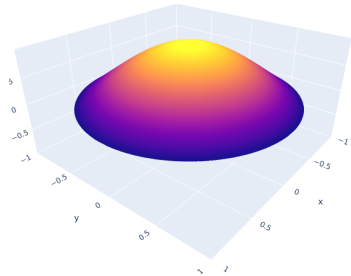
$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -k_\theta^2\Theta. \quad (2.26)$$

Denne likningen er vi godt kjent med nå og den har løsninger $\Theta(\theta) = A \sin k\theta + B \cos k\theta$. Denne gangen stiller vi et annet krav en tidligere. Vi er nødt til å kreve at løsningene er periodiske $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$. Dette gir egenverdiene $k_\theta \in \mathbb{N}_1$. Den radielle oppførselen er noe mer komplisert enn den tangensiale

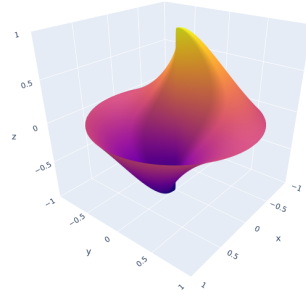
$$r \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\rho\omega^2}{T} r R = 0. \quad (2.27)$$

Dette er Bessels differensial likning av nullte orden. Vi må ha at membranens utslag ved $r = 0$ er endelig, så løsningen for vårt problem er Besselfunksjonen av første type $R = J_0(r)$. Vi må også kreve at membranens ender er låste. Det betyr at egenverdiene k_r er de som gir Besselfunksjonen $J_0(r = d/2) = 0$, der d er diameteren til membranen. Disse verdiene finner vi i oppslagsverk som for eksempel *numpy* tilbyr.

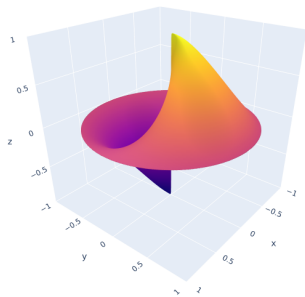
I figur 2.6 på neste side ser vi et utvalg av de fleksible modene til en sirkulær membran med låste ender. Heltallene m og n gir variasjoner i henholdsvis radiell og tangensiell retning. I radiell retning vil m svare til m 'te løsning k_r . I tangensiell retning vil n svare direkte til n 'te løsning k_θ .



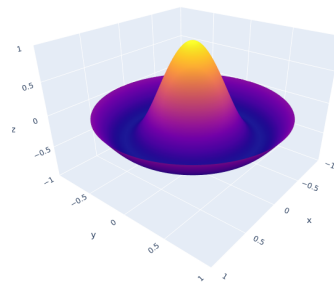
(a) $m=2, n=1$



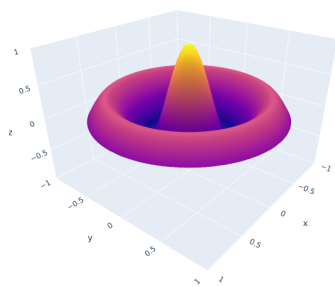
(b) $m=2, n=2$



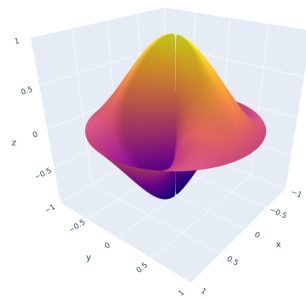
(c) $m=2, n=3$



(d) $m=3, n=1$



(e) $m=4, n=1$



(f) $m=2, n=4$

Figur 2.6: Her ser vi noen av de mange fleksible modene til en sirkulær membran med låste ender.

2.2 Potensialteori

I denne modellen, jobber vi med et fluid som er inkompressibelt, friksjonsfritt og virvelfritt. Det innebærer at det eksisterer et hastighetspotensial ϕ for strømmingen som oppfyller Laplace likningen $\nabla^2\phi = 0$. Hastighetsfeltet \mathbf{u} kan avledes av potensialet ved $\mathbf{u} = \nabla\phi$. Volumet til fluidet \mathcal{V} er avgrenset av en lukket flate \mathcal{S} . Fluidet er uendelig dypt. Dersom vi har to Laplaciske størrelser ϕ og φ må følgende flateintegral være null [7].

$$\int_{\mathcal{S}} \left(\phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (2.28)$$

Likning (2.28) er en form for Greens teorem. Trikket er å bytte φ med en Greenfunksjon G . Den representerer ett punkts innflytelse på systemet. Greenfunksjonen vil være Laplacisk i hele \mathcal{V} , men singularært i ett punkt $\bar{\mathbf{x}}$. Singulariteter representerer kilder til strømming. For å håndtere singulariteten, deler vi flaten det integreres over i to; en flate som omslutter fluidet \mathcal{S} og en flate som omslutter singulariteten \mathcal{S}_ϵ . Vi kan omformulere likning (2.28) ved å la \mathcal{S}_ϵ bli uendelig liten. Da får vi tre utfall. Enten ligger singulariteten utenfor fluidet, på randen til fluidet eller inne i fluidet. I to dimensjoner blir likningen

$$\int_{\mathcal{S}} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = \begin{cases} 0, & \bar{\mathbf{x}} \notin \mathcal{V} \\ \pi\phi, & \bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{S} \\ 2\pi\phi, & \bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{V} \end{cases} \quad (2.29)$$

I tre dimensjoner blir likningen

$$\int_{\mathcal{S}} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = \begin{cases} 0, & \bar{\mathbf{x}} \notin \mathcal{V} \\ -2\pi\phi, & \bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{S} \\ -4\pi\phi, & \bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{V} \end{cases} \quad (2.30)$$

Målet med denne formuleringen er å løse disse integrallikningene for hastighetspotensialet ϕ gitt en geometri som er med på å bestemme randen. Vi bruker to koordinatsystemer; ett for feltpunkter $\mathbf{x} = (x, y, z)$ og ett for kildepunkter $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Integralene våre er uavhengige av hvilke koordinater vi bruker ettersom Greenfunksjonen $G(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$, som vi snart skal se på, er symmetrisk under bytte av variabler. Det er ved å velge å integrere over kilde-koordinatsystemet at vi kan tolke hastighetsfeltet som gitt av en singularitets-distribusjon. Geometriens innflytelse på hastighetsfeltet til fluidet blir altså gitt ved en kontinuerlig distribusjon av singulariteter. I resten av denne oppgaven kommer vi til å søke distribusjoner på randen til geometrien; altså $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{S}$. Etter å ha løst integrallikningen over kildepunktene $\bar{\mathbf{x}}$, sitter vi igjen med et hastighetspotensial $\phi(\mathbf{x})$ som funksjon av feltkoordinatene.

Greenfunksjonen til et system bestemmes etter differensiallikningen som skal løses og grensebetingelsene. I vårt tilfellet er det Laplace-likningen som skal løses for ϕ . Grensebetingelsene ser vi på i neste seksjon (2.3). Vi skal se at Greenfunksjonen er satt til å oppfylle samme randkrav som hastighetspotensialene på flere delflater. I to dimensjoner er bølge-Greenfunksjonen

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) &= \ln rr_1 + \operatorname{Re}\{f_1\} + i \operatorname{Re}\{f_2\} \\
r &= \sqrt{(\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2} \\
r_1 &= \sqrt{(\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} + y)^2} \\
f_1 &= -2e^Z (E_1(Z) + \ln Z - \ln(-Z)) \\
f_2 &= 2\pi e^Z \\
Z &= \nu(\bar{y} + y) - i\nu(\bar{x} - x).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Det logaritmiske leddet $\ln r$ representerer et sluk og er singulært. Det neste leddet $\ln r_1$ er speilbildet til sluket og sørger for at de logaritmiske bidragene forsvinner ved $y = 0$. De siste to leddene $\operatorname{Re}\{f_1\} + i \operatorname{Re}\{f_2\}$ tar seg av bølgene som lages av geometriens bevegelse på overflaten. Disse leddene er eksponentielt avtakende fra $y = 0$ langs vertikalen. Bølgetallet ν er frekvensen til tyngdebølgene i rom.

I tre dimensjoner er bølge-Greenfunksjonen [8][9]

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) &= (R^2 + (\bar{y} - y)^2)^{-1/2} + \nu F(X, Y) - 2\pi i \nu e^{-Y} J_0(X) \\
R &= \sqrt{x^2 + z^2}, \quad X = \nu R, \quad Y = \nu|\bar{y} + y| \\
F(X, Y) &= (X^2 + Y^2)^{-1/2} - \pi e^{-Y} (H_0(X) + Y_0(X)) \\
&\quad - 2 \int_0^Y e^{t-Y} (X^2 + t^2)^{-1/2} dt.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Denne gangen representerer det første leddet i Greenfunksjonen en kilde. Leddet $(R^2 + (y - \bar{y})^2)^{-1/2}$ er hyperbolsk og singulært. Det neste leddet tar seg av speilingen med $\nu (X^2 + Y^2)^{-1/2}$. Resten av funksjonen bestemmer de genererte bølgene. J_0 er Besselfunksjonen av første type og nullte orden. Y_0 er Besselfunksjonen av andre type og nullte orden. H_0 er Struvefunksjonen av første type og nullte orden. Legg merke til at bølgeoppførselen til bølge-Greenfunksjonen i tre dimensjoner avtar med R^2 . Dette kommer av at energien til bølgene brer seg utover på en sirkel fra kilden.

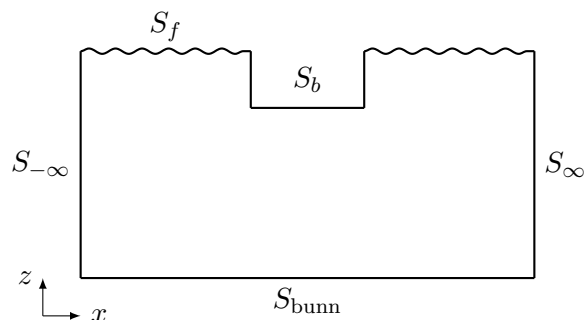
Problemet med å bestemme hastighetspotensialet ϕ brytes inn i to delproblemer; radiasjonsproblemet og diffraksjonsproblemet. I radiasjonsproblemet tar vi for oss bølgene og strømmingene som genereres av geometriens bevegelse på stille sjø. I dette problemet får vi bidrag fra hver mode j . Det lønner seg å skrive radiasjonspotensialet som $\text{Re}\left\{i\omega \sum_j \xi_j \phi_j\right\}$, hvor ω er svingefrekvensen i tid, ϕ_j er j 'te modes bidrag til det totale hastighetspotensialet, og ξ_j gir størrelsen på bidraget. Ettersom membranen er svært tynn, kan vi se bort fra translasjon langs horisontalen.

I diffraksjonsproblemet tar vi for oss spredningen av innkommende bølger rundt en geometri som er låst fast. Vi beskriver de innkommende bølgene med potensialet ϕ_0 og spredningen med ϕ_s . Diffraksjonspotensialet blir summen av disse bidragene $\phi_D = \phi_0 + \phi_s$. De innkommende bølgene kan selvfølgelig komme med ulike amplituder A . Denne blir i vår analyse en prefaktor for diffraksjonspotensialet ϕ_D .

Vi superponerer radiasjon og diffraksjon på følgende måte.

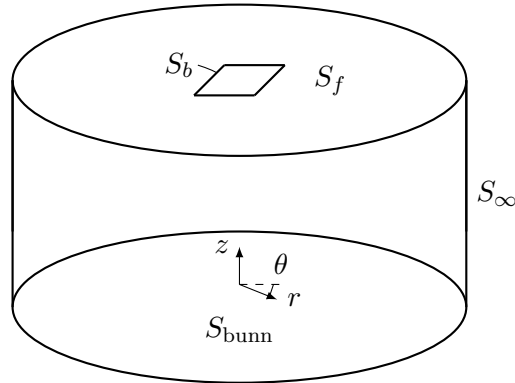
$$\phi = \text{Re} \left\{ \left(i\omega \sum_j \xi_j \phi_j + A\phi_D \right) e^{i\omega t} \right\} \quad (2.33)$$

Fra hver bevegelsesmode j tilhører det et hastighetspotensial ϕ_j . Indeksene vil variere mellom to og tre dimensjoner. I to dimensjoner har vi to stive moder og i tre dimensjoner har vi tre. Vi har alltid uendelig mange fleksible moder. Når vi løser integrallikningen tar vi radiasjon og diffraksjon hver for seg. Trikket da er å bryte opp integralflaten \mathcal{S} i delflater og sjekke bidragene fra hver flate. La oss først se på flaten som omslutter fluidet i to dimensjoner. I figur 2.7 er delflatene illustrert. Den våte flaten til geometrien kaller vi S_b . Videre integrerer vi over den frie havoverflaten S_f . Den frie overflaten strekker seg uendelig langt ut til de vertikale flatene S_∞ og $S_{-\infty}$. Disse flatene forbinder den frie overflaten med bunnen av havet S_{bunn} .



Figur 2.7: Skisse av den lukkede integralflaten \mathcal{S} i to dimensjoner og delflatene vi deler integralet inn i. Aksekorset ligger ikke i origo, men illustrerer retningene.

La oss nå se på integralflaten som omslutter fluidet i tre dimensjoner. Delflatene er illustrert i figur 2.8. Igjen kaller vi geometriens våte flate S_b . Den frie overflaten S_f strekker seg nå radielt utover i evigheten. Der finner vi flaten S_∞ som forbinder den frie overflaten med havbunnen S_{bunn} .



Figur 2.8: Skisse av den lukkede integralflaten \mathcal{S} i tre dimensjoner og delflatene vi deler integralet inn i. Aksekorset ligger ikke i origo, men illustrerer retningene.

Årsaken til at det lønner seg å bryte opp integralflaten \mathcal{S} som vist i to og tre dimensjoner er at bidragene fra mange av delflatene forsvinner helt. Dette forenkler integrallikningene betydelig. La oss se nærmere på randkravene som tillater forenklingen.

2.3 Randkrav

Akkurat i denne delen (2.3) bytter vi koordinatsystem fra kildepunkter $\bar{\mathbf{x}}$ til feltpunkter \mathbf{x} for å unngå rotete notasjon.

Her er det spesielt viktig å påpeke at flatenormalene alltid peker ut av fluidet. For tyngdebølger på den frie havoverflaten gjelder det dynamiske randkravet og det kinematiske randkravet. Her bruker vi η for overflatehevingen til vannet.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \text{på } y = \eta \quad (\text{Kinematisk randkrav}) \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta = 0, \quad \text{på } y = \eta \quad (\text{Dynamisk randkrav}) \quad (2.35)$$

Vi antar at steilheten til bølgene er liten $A\nu \ll 1$, så randkravene kan lineariseres om $y = 0$. Vi neglisjerer andre ordens effekter og finner

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \text{på } y = 0 \quad (\text{Kinematisk randkrav}) \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0, \quad \text{på } y = 0 \quad (\text{Dynamisk randkrav}). \quad (2.37)$$

Vi kan nå kombinere disse to kravene med substitusjon for overflatehevingen η til ett krav

$$-\omega^2 \phi + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad \text{på } y = 0. \quad (2.38)$$

Dette kalles gjerne overflatebetingelsen. Bølge-Greenfunksjonen oppfyller samme randkrav på den frie overflaten.

$$-\omega^2 G + g \frac{\partial G}{\partial y} = 0, \quad \text{på } y = 0. \quad (2.39)$$

Havbunnen S_{bunn} ligger uendelig langt ned i havgapet. Her vil hastighetspotensialet dø ut og vi kan ikke ha noen gjennomstrømning. Den vertikale hastighetskomponenten må altså være null.

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \text{når } y \rightarrow -\infty \quad (2.40)$$

Igjen har Greenfunksjonen samme randkrav som potensialet ϕ .

$$\frac{\partial G}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \text{når } y \rightarrow -\infty. \quad (2.41)$$

I fjernfeltet vil hastighetspotensialet oppfylle *radiasjonsbetingelse*.

$$\begin{aligned} \phi_j &\rightarrow A_j^\pm e^{\nu y \mp i\nu x}, & x &\rightarrow \pm \\ \phi_s &\rightarrow A_s^\pm e^{\nu y \mp i\nu x}, & x &\rightarrow \pm \\ \phi_0 &\rightarrow \frac{i\omega}{g} e^{\nu y - i\nu x}, & x &\rightarrow \pm \end{aligned} \quad (2.42)$$

Fra [10] har vi den asymptotiske oppførselen til bølge-Greenfunksjonen i fjernfeltet

$$G \rightarrow 2\pi i e^{\nu(y+\bar{y}) \mp i\nu(x-\bar{x})}, \quad x - \bar{x} \rightarrow \pm. \quad (2.43)$$

På geometrien må fluidet følge randens bevegelse. I diffraksjonsproblemet er randen låst, så

$$\frac{\partial \phi_D}{\partial n} = 0, \quad \text{på } S_b. \quad (2.44)$$

Den retningsderiverte i flatenormalretning er på geometrien $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial y}$ for en uendelig tynn membran. I radiasjonsproblemet beveger membranen seg i alle modenes retning $\frac{\partial \phi_R}{\partial n} = \frac{\partial W}{\partial t}$ [11][12]. Med $\phi_R = \sum_j i\omega \xi_j \phi_j e^{i\omega t}$ og $W = \sum_j \xi_j w_j e^{i\omega t}$ kan vi skrive kravet som

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = w_j, \quad \text{på } S_b. \quad (2.45)$$

Når det kommer til Greenfunksjonen, så kan vi ikke stille samme krav som for ϕ . Greenfunksjonen er nødvendigvis singular på randen for at integralformulering skal fungere.

I tre dimensjoner er det kun randkravet på randen S_∞ i fjernfeltet som endrer seg. Vi har ikke lenger to linjeintegraler på hver side av geometrien som i to dimensjoner. Nå er det et flateintegral som vist i figur 2.8. På denne flaten er $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$, så ikke overraskende blir radiasjonskravet

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} &\sim r^{-1/2} e^{i\nu r}, \quad r \rightarrow \infty \\ \frac{\partial \phi_s}{\partial r} &\sim r^{-1/2} e^{i\nu r}, \quad r \rightarrow \infty \\ \frac{\partial G}{\partial r} &\sim r^{-1/2} e^{i\nu r}, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Årsaken til at faktoren $r^{-1/2}$ skal med er at energien til bølgene brer seg utover på en sirkel med radius $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Den asymptotiske oppførselen til Greenfunksjonen kjenner vi fra [13].

Videre i teksten er vi tilbake til integraler over kildepunktene.

2.4 Radiasjon

I radiasjonsproblemet er fluidet i ro før vi setter bevegelse i alle membransens moder. La oss sette radiasjonspotensialet inn i integrallikningen i to dimensjoner.

$$\int_S \left(\phi_j \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \right) dS = \pi \phi_j \quad (2.47)$$

Vi anvender randkravene våre for å evaluere integralene over delflatene. Vi begynner med den frie overflaten S_f .

$$\begin{aligned} \int_{S_f} \left(\phi_j \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \right) dS &= \int_{S_f} \left(\phi_j \frac{\partial G}{\partial y} - G \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dS \\ &= \int_{S_f} \left(\phi_j \frac{\omega^2}{g} G - G \frac{\omega^2}{g} \phi_j \right) dS = 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Ettersom Greenfunksjonen oppfyller samme randkrav som radiasjonspotensialet på den frie overflaten forsvinner hele integranden der. La oss sjekke havbunnen.

$$\int_{S_{\text{Bunn}}} \left(\phi_j \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \right) dS = \int_{S_{\text{Bunn}}} \left(-\phi_j \frac{\partial G}{\partial y} + G \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dS = 0 \quad (2.49)$$

På havbunnen forsvinner integranden ettersom de deriverte av potensialet og Greenfunksjonen blir forsvinnende små. Så var det fjernfeltene.

$$\begin{aligned} \int_{S_{-\infty}} \left(\phi_j \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \right) dS &= \int_{S_{-\infty}} \left(-\phi_j \frac{\partial G}{\partial x} + G \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) dS \\ &= \int_{S_{-\infty}} \left(-\phi_j(i\nu)G + G(i\nu)\phi_j \right) dS = 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \int_{S_{\infty}} \left(\phi_j \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \right) dS &= \int_{S_{\infty}} \left(\phi_j \frac{\partial G}{\partial x} - G \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) dS \\ &= \int_{S_{\infty}} \left(\phi_j(-i\nu)G - G(-i\nu)\phi_j \right) dS = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Det er kun på randen til geometrien at integranden ikke forsvinner.

$$\int_{S_B} \left(\phi_j \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \right) dS = \int_{S_B} \left(\phi_j \frac{\partial G}{\partial n} - G w_j \right) dS = \pi \phi_j \quad (2.52)$$

Vi ser nå at radiasjonsproblemet (2.47) kan forenkles til en integrallikning kun over geometriens flate S_b .

$$-\pi \phi_j + \int_{S_b} \frac{\partial G}{\partial n} \phi_j dS = \int_{S_b} G w_j dS \quad (2.53)$$

Når vi går over til tre dimensjoner vil integrasjonen over fjernfeltet endre seg. Da er det kun over flaten S_∞ ettersom $S_{-\infty}$ kun eksisterer i to dimensjoner.

$$\begin{aligned} \int_{S_\infty} \left(\phi_j \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \right) dS &= \int_{S_\infty} \left(\phi_j \frac{\partial G}{\partial r} - G \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \right) dS \\ &= \int_{S_\infty} \left(\phi_j \left(i\nu - \frac{1}{2}r^{-1} \right) G - G \left(i\nu - \frac{1}{2}r^{-1} \right) \phi_j \right) dS = 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Integranden forsvinner i fjernfeltet i tre dimensjoner også. Da blir integrallikningen

$$2\pi\phi_j + \int_{S_b} \frac{\partial G}{\partial n} \phi_j dS = \int_{S_b} G w_j dS. \quad (2.55)$$

Hastighetene U_j til membranen kan skrives som

$$U_j(t) = \text{Re}\{i\omega\xi_j e^{i\omega t}\}. \quad (2.56)$$

Ved integrasjon av Bernoulli trykket fra radiasjonspotensialet kan vi finne at kreftene som virker på membranen kan beskrives ved

$$F_i(t) = \sum_j \left(-\dot{U}_j a_{ji} - U_j b_{ji} \right) \quad (2.57)$$

Det er altså ett ledd som følger akselerasjonen og ett som følger hastighetene til membranen. Koeffisientene a_{ji} til akselerasjonsleddet kalles *addert masse*; naturlig nok fordi leddet må komme i tillegg til masse-leddet $-\dot{U}_j M_{ji}$ i Newtons andre lov. Koeffisientene b_{ji} til hastighetsleddet gir *dempning*. Det kalles dempning fordi det kommer foran hastighetsleddet. Det er altså ikke en konservativ kraft. Dette kommer av at energi går til å lage utstrålte bølger. Koeffisientene er definert som følger

$$\rho \int_{S_b} \phi_j w_i dS = a_{ij} + b_{ij}/i\omega. \quad (2.58)$$

2.5 Diffraksjon

I diffraksjonsproblemet sender vi bølger inn mot membranen og ser på spredningen samtidig som membranen holdes i ro. La oss sette diffraksjonspotensialet inn i integrallikningen i to dimensjoner.

$$\int_S \left(\phi_D \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_D}{\partial n} \right) dS = \pi \phi_D \quad (2.59)$$

La oss undersøke integralet over hver av delflatene. Nå får vi bruk for randkravene våre. Vi begynner med den frie overflaten S_f .

$$\begin{aligned} \int_{S_f} \left(\phi_D \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_D}{\partial n} \right) dS &= \int_{S_f} \left(\phi_D \frac{\partial G}{\partial y} - G \frac{\partial \phi_D}{\partial y} \right) dS \\ &= \int_{S_f} \left(\phi_D \frac{\omega^2}{g} G - G \frac{\omega^2}{g} \phi_D \right) dS = 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

Ettersom Greenfunksjonen oppfyller samme randkrav som radiasjonspotensialet på den frie overflaten forsvinner hele integranden der. La oss sjekke havbunnen.

$$\int_{S_{\text{Bunn}}} \left(\phi_D \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_D}{\partial n} \right) dS = \int_{S_{\text{Bunn}}} \left(-\phi_D \frac{\partial G}{\partial y} + G \frac{\partial \phi_D}{\partial y} \right) dS = 0 \quad (2.61)$$

På havbunnen forsvinner integranden ettersom de deriverte av potensialet og Greenfunksjonen blir forsvinnende små. Så var det fjernfeltene.

$$\begin{aligned} \int_{S_\infty} \left(\phi_D \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_D}{\partial n} \right) dS &= \int_{S_\infty} \left(\phi_D \frac{\partial G}{\partial x} - G \frac{\partial \phi_D}{\partial x} \right) dS \\ &= \int_{S_\infty} \left(\phi_D (-i\nu) G - G (-i\nu) \phi_D \right) dS = 0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

På S_∞ forsvant integranden, men på $S_{-\infty}$ får vi

$$\begin{aligned} \int_{S_{-\infty}} \left(\phi_D \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_D}{\partial n} \right) dS &= \int_{S_{-\infty}} \left(-\phi_D \frac{\partial G}{\partial x} + G \frac{\partial \phi_D}{\partial x} \right) dS \\ &= \int_{S_{-\infty}} \left(-\phi_s (-i\nu) G + G (-i\nu) \phi_s \right) dS \\ &\quad + \int_{S_{-\infty}} \left(-\phi_0 (-i\nu) G + G (i\nu) \phi_0 \right) dS = -2\pi \phi_0. \end{aligned} \quad (2.63)$$

På $S_{-\infty}$ fikk vi et bidrag, men integralet kunne evalueres eksakt. Ved siste overgang bruker vi bare integrallikningen for ϕ_0 evaluert i fluidet [13]. Det er kun på randen til geometrien at integralet vil forenkles noe.

$$\int_{S_B} \left(\phi_D \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_D}{\partial n} \right) dS = \int_{S_B} \left(\phi_D \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = \pi \phi_D \quad (2.64)$$

Vi ser nå at diffraksjonsproblemet (2.59) kan forenkles til en integrallikning kun over geometriens flate S_b .

$$-\pi\phi_D + \int_{S_b} \frac{\partial G}{\partial n} \phi_D dS = -2\pi\phi_0 \quad (2.65)$$

Når vi går over til tre dimensjoner vil integralet over S_∞ endres som nevnt i forrige seksjon (2.4) for radiasjon.

$$\begin{aligned} \int_{S_\infty} \left(\phi_D \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_D}{\partial n} \right) dS &= \int_{S_\infty} \left((\phi_0 + \phi_s) \frac{\partial G}{\partial r} - G \frac{\partial}{\partial r} (\phi_0 + \phi_s) \right) dS \\ &= \int_{S_\infty} \left(\phi_s i\nu G - G i\nu \phi_s \right) dS + \int_{S_\infty} \left(\phi_0 \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \right) dS \\ &= \int_{S_\infty} \left(\phi_0 \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \right) dS \\ &= 4\pi\phi_0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

I siste overgang bruker vi igjen at dette er integrallikningen for hastighetspotensialet ϕ_0 evaluert i fluidet. I tre dimensjoner får vi derfor at integrallikningen kan skrives

$$2\pi\phi_D + \int_{S_b} \frac{\partial G}{\partial n} \phi_D dS = 4\pi\phi_0. \quad (2.67)$$

Vi kan igjen integrere Bernoulli trykket fra potensialet vi finner; denne gangen diffraksjonspotensialet.

$$F_j(t) = -\rho \operatorname{Re} \left\{ \int_{S_b} \frac{\partial}{\partial t} A(\phi_D e^{i\omega t}) w_j dS \right\} = \operatorname{Re} \{ A X_j e^{i\omega t} \} \quad (2.68)$$

Størrelsen X_j kalles *eksitasjonen* og gir kraften på geometrien fra diffraksjonspotensialet. Denne kraften kommer altså fra en ytre påvirkning av innkommende bølger og spredning.

$$X_j = -i\omega\rho \int_{S_b} (\phi_0 + \phi_s) w_j dS. \quad (2.69)$$

Siden ϕ_s oppfyller samme randkrav som ϕ_j på den frie overflaten, bunnen og i fjernfeltet kan det vises at

$$X_j = -i\omega\rho \int_{S_b} \left(\phi_0 w_j + \phi_j \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \right) w_j dS. \quad (2.70)$$

Dette er en av Haskinds relasjoner og er en eksakt omformulering av (2.69) [7].

2.6 Bevegelseslikningen

Tidligere har vi studert membranens bevegelse i vakuum, og vi fant at denne kunne bevege seg gjennom fleksible moder med gitte frekvenser i tillegg til de rigide modene. Videre så vi på hvordan vi kan beskrive bevegelsen til fluider med frie overflater hvor vilkårlige geometrier fikk ligge på toppen. I radiasjonsproblemet fikk geometrien lage bølger på stille vann. I diffraksjonsproblemet ble innkommende bølger spredt rundt en låst geometri. Nå skal vi kombinere hva vi har lært om membranen og vannet til en bevegelseslikning som beskriver responsen til alle bevegelsesmodene for ulike innkommende bølger. Måten å gå frem på her er å sette opp likning (2.4) for membranens bevegelse i vakuum og legge på trykket $p(x, t)$ fra vannet som et inhomogent bidrag. Dette trykket knytter vi til potensialteorien for vannet gjennom Bernoullis lineariserte likning for trykket i et virvelfritt felt

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + gW \right). \quad (2.71)$$

Nå setter vi opp bevegelseslikningen til membranen i to dimensjoner, men denne gangen med trykket p

$$\rho_m \Delta h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = p. \quad (2.72)$$

Fra undersøkelsen i seksjon (2.1) husker vi $\frac{\partial W}{\partial t} = i\omega W$ og $\frac{\partial W}{\partial x} = ikW$. Dette kan vi sette inn i likningen sammen med uttrykket (2.71) for trykket.

$$(-\rho_m \Delta h \omega^2 + Tk^2) W = -\rho (i\omega \phi + gW) \quad (2.73)$$

Nå skriver vi ut membranens tøyning med sine bevegelsesmoder og tilsvarende for hastighetspotensialet ϕ

$$\sum_j \left(-\rho_m \Delta h \omega^2 + Tk^2 + \rho g \right) \xi_j w_j = -i\omega \rho \left(A\phi_D + \sum_j i\omega \xi_j \phi_j \right). \quad (2.74)$$

Vi rydder opp

$$\sum_j \left[\left(-\rho_m \Delta h \omega^2 + Tk^2 + \rho g \right) w_j - \rho \omega^2 \phi_j \right] \frac{\xi_j}{A} = -i\omega \rho \phi_D. \quad (2.75)$$

Vi utnytter ortogonaliteten til modene ved å multiplisere inn prøvofunksjoner w_i og integrere over membranens overflate S_b .

$$\sum_j \int_{S_b} \left[\left(-\rho_m \Delta h \omega^2 + Tk^2 + \rho g \right) w_j w_i - \rho \omega^2 \phi_j w_i \right] dS \frac{\xi_j}{A} = -i\omega \rho \int_{S_b} \phi_D w_i dS \quad (2.76)$$

Vi kan skrive om bevegelseslikningen (2.76) på dimensjonsløs form ved å skalere med ρg .

$$\sum_j \int_{S_b} \left[\left(-\omega^2 \frac{\rho_m \Delta h}{\rho g} + \frac{T k^2}{\rho g} + 1 \right) w_j w_i - \frac{\omega^2}{g} \phi_j w_i \right] dS \frac{\xi_j}{A} = -\frac{i\omega}{g} \int_{S_b} \phi_D w_i dS \quad (2.77)$$

Vi kan skrive likning (2.76) noe mer kompakt

$$\sum_j [K_{ij} + c_{ij} - \omega^2 (M_{ij} + a_{ij}) + i\omega b_{ij}] \frac{\xi_j}{A} = X_i \quad (2.78)$$

hvor vi har definert følgende størrelser.

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int_{S_b} T k^2 w_i w_j dS \\ c_{ij} &= \int_{S_b} \rho g w_i w_j dS \\ M_{ij} &= \int_{S_b} \rho_m \Delta h w_i w_j dS \\ a_{ij} &= \operatorname{Re} \left\{ \rho \int_{S_b} \phi_i w_j dS \right\} \\ b_{ij} &= \frac{1}{i\omega} \operatorname{Im} \left\{ \rho \int_{S_b} \phi_i w_j dS \right\} \\ X_i &= -i\omega \rho \int_{S_b} \phi_D w_i dS \end{aligned} \quad (2.79)$$

Disse seks størrelsene er av stor fysisk betydning. Stivhetsmatrisen K_{ij} gir oss størrelsen på den gjenopprettende kraften fra strekket T . Matrisen c_{ij} gir oss oppdriftskreftene og er naturlig nok avhengig av det fortrenkte volumet til membranen. Massematrisen M_{ij} er alltid med ettersom dette er en omformulering av Newtons andre lov. I tillegg til membranens masse, får vi bidrag fra den adderte massen a_{ij} som ofte tolkes som delen av fluidet som akselereres opp med geometrien. Dempningen b_{ij} får vi på grunn av de radierte bølgene som tar energi vekk fra bevegelsen til membranen. Legg merke til at dempningskraften ligger 90° ute av fase i forhold til de andre leddene. Kraften X_i kjenner vi igjen som eksitasjonen.

Vi kan slå sammen størrelsene i (2.79) til én integraloperator $[C_{ij}]$. Da kan vi skrive likning (2.76) svært kompakt.

$$[C_{ij}] \frac{\xi_j}{A} = X_i \quad (2.80)$$

Ved å invertere $[C_{ij}]$ kan vi løse for $\frac{\xi_j}{A}$ eller amplituderresponsen som den også kalles (forkortes RAO fra engelsk). Denne gir det relative utslaget til hver bevegelsesmode.

2.7 Dimensjonsanalyse

Hvordan påvirker egentlig de ulike parameterene systemet vårt? Gjennom beskrivelsene våre av membranen og vannet, har vi måttet sette noen parametere. Membranen vår har tykkelse Δh , og vi har satt på et strekk T . Tettheten til membranen betegnet vi med ρ_m . Da vi løste egenverdiproblemet for membranens svingninger fant vi egenfrekvensene k . Disse var omvendt proporsjonale med lengden på platen L . Vannets tetthet skriver vi som ρ . Bølgene på vannet er tyngdedrevet med akselerasjonen g og hver bølge har et bølgetall ν og amplitude A .

Tilsammen spenner disse 8 parameterene 3 dimensjoner. Med dimensjoner mener vi her lengde \tilde{L} , tid \tilde{T} og masse \tilde{M} . Buckingham's Π -teorem forteller oss at de 8 parameterene kan reduseres ned til $8 - 3 = 5$ dimensjonsløse parametere eller π -grupper [14]. Disse kan vi finne ved å sette opp en dimensjonsmatrise \mathcal{D} og undersøke nullrommet.

$$\mathcal{D} = \begin{array}{c} \tilde{L} \\ \tilde{M} \\ \tilde{T} \end{array} \begin{array}{c} \Delta h \\ T \\ \rho_m \\ k \\ \rho \\ g \\ \nu \\ A \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette lar seg redusere til

$$\sim \begin{array}{c} \tilde{L} \\ \tilde{M} \\ \tilde{T} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ønsker vektorene som spenner nullrommet. Det gir størrelsene

$$\Delta h^{\alpha_1} T^{\alpha_2} \rho_m^{\alpha_3} k^{\alpha_4} \rho^{\alpha_5} g^{\alpha_6} \nu^{\alpha_7} A^{\alpha_8}$$

som oppfyller

$$\alpha_1 - \alpha_4 - 2\alpha_6 - \alpha_7 + \alpha_8 = 0, \quad \alpha_2 + \alpha_6 = 0, \quad \alpha_3 + \alpha_5 - \alpha_6 = 0.$$

Dette er et underbestemt system hvor vi står fritt til å sette krav selv. Trikket ligger i å sette lurre krav. Her foreslår vi fem krav som gir følgende dimensjonsløse grupper.

$$G_1 = \Delta h k, \quad G_2 = \frac{\nu}{k}, \quad G_3 = \frac{T k^2}{\rho g}, \quad G_4 = \frac{\rho_m}{\rho}, \quad G_5 = A \nu$$

G_1 gir sideforholdene til geometrien. G_2 gir forholdet mellom lengden på bølgene og lengden på membranen νL . G_3 er det dimensjonsløse strekket. G_4 gir viktigheten av massen til membranen. G_5 er steilheten til bølgene. Steilhet er ikke viktig i det lineære regime, men noe viktig i det ikke-lineære. I praksis vil vi kun variere lengdene til bølgene og strekket på membranen. Det svarer til G_2 og G_3 .

2.8 Refleksjon og transmisjon

Når en vannbølge når en geometri, som for eksempel en tynn elastisk membran, vil den delvis reflekteres tilbake og delvis transmittes forbi. La oss betegne amplituden til refleksjonen med \hat{R} og amplituden til transmisjonen med \hat{T} . Vi har derfor følgende tilnærminger i fjernfeltene.

$$\begin{aligned}\phi &\approx \frac{ig}{\omega} e^{ky} \left(A e^{-ikx} + \hat{R} e^{ikx} \right), & x \rightarrow -\infty \\ \phi &\approx \frac{ig}{\omega} \hat{T} e^{ky-ikx}, & x \rightarrow \infty\end{aligned}\quad (2.81)$$

Vi får bruk for

$$\phi_0 = \frac{ig}{\omega} e^{ky-ikx}, \quad \phi_R = \sum_j i\omega \xi_j \phi_j, \quad \frac{\partial \phi_R}{\partial n} = \sum_j i\omega \xi_j w_j \quad (2.82)$$

og at bølge-Greenfunksjonen i to dimensjoner oppfører seg som

$$G \approx 2\pi i e^{k(\bar{y}+y) \mp ik(\bar{x}-x)}, \quad \bar{x} - x \rightarrow \pm\infty. \quad (2.83)$$

Vi kan finne uttrykk for *refleksjonskoeffisienten* \hat{R}/A ved å sette opp integrallikningen for det totale hastighetspotensialet ϕ evaluert i fluidet. Det kan vi gjøre i praksis ved å sette sammen likningene for radiasjon og diffraksjon som vi allerede har undersøkt.

$$2\pi\phi(\mathbf{x}) = \int_{S_b} A\phi_D \frac{\partial G}{\partial n} dS + 2\pi A\phi_0 + \int_{S_b} \left(\phi_R \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_R}{\partial n} \right) dS \quad (2.84)$$

Vi lar $x \rightarrow -\infty$ og setter inn uttrykkene i (2.82).

$$\begin{aligned}2\pi \frac{ig}{\omega} e^{ky} \left(A e^{-ikx} + \hat{R} e^{ikx} \right) &= \int_{S_b} A\phi_D k 2\pi i e^{k(\bar{y}+y)-ik(\bar{x}-x)} dS \\ &+ 2\pi A \frac{ig}{\omega} e^{ky-ikx} \\ &+ \sum_j \int_{S_b} (i\omega \xi_j \phi_j k - i\omega \xi_j w_j) 2\pi i e^{k(\bar{y}+y)-ik(\bar{x}-x)} dS\end{aligned}\quad (2.85)$$

Vi kan stryke ϕ_0 på hver side.

$$\begin{aligned}2\pi \frac{ig}{\omega} \hat{R} e^{ky+ikx} &= Ak 2\pi i \int_{S_b} \phi_D e^{k(\bar{y}+y)-ik(\bar{x}-x)} dS \\ &+ 2\pi i \sum_j \int_{S_b} i\omega \xi_j (\phi_j k - w_j) e^{k(\bar{y}+y)-ik(\bar{x}-x)} dS\end{aligned}\quad (2.86)$$

Videre kan vi forkorte ved å multiplisere inn $\omega/(2\pi igA)$ på hver side.

$$\begin{aligned} \frac{\hat{R}}{A} e^{ky+ikx} &= \frac{\omega k}{g} \int_{S_b} \phi_D e^{k(\bar{y}+y)-ik(\bar{x}-x)} dS \\ &+ ik \sum_j \int_{S_b} (k\phi_j - w_j) \frac{\xi_j}{A} e^{k(\bar{y}+y)-ik(\bar{x}-x)} dS \end{aligned} \quad (2.87)$$

Integralet går over kildepunktsystemet, så vi kan også forkorte e^{ky+ikx} .

$$\frac{\hat{R}}{A} = \frac{\omega k}{g} \int_{S_b} \phi_D e^{k\bar{y}-ik\bar{x}} dS + ik \sum_j \int_{S_b} (k\phi_j - w_j) \frac{\xi_j}{A} e^{k\bar{y}-ik\bar{x}} dS \quad (2.88)$$

Der har vi uttrykt refleksjonskoeffisienten gjennom diffraksjonen og radia-sjonen.

Tilsvarende kan vi finne uttrykk for *transmisjonskoeffisienten* \hat{T}/A . Denne gangen lar vi $x \rightarrow \infty$.

$$2\pi\phi(\mathbf{x}) = \int_{S_b} A\phi_D \frac{\partial G}{\partial n} dS + 2\pi A\phi_0 + \int_{S_b} \left(\phi_R \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_R}{\partial n} \right) dS \quad (2.89)$$

Vi setter igjen inn (2.82).

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{ig}{\omega} \hat{T} e^{ky-ikx} &= \int_{S_b} A\phi_D k 2\pi i e^{k(\bar{y}+y)+ik(\bar{x}-x)} dS \\ &+ 2\pi A \frac{ig}{\omega} e^{ky-ikx} \\ &+ \sum_j \int_{S_b} (i\omega\xi_j\phi_j k - i\omega\xi_j w_j) 2\pi i e^{k(\bar{y}+y)+ik(\bar{x}-x)} dS \end{aligned} \quad (2.90)$$

Vi forkorter ved å multiplisere inn $\omega/(2\pi igA)$.

$$\begin{aligned} \frac{\hat{T}}{A} e^{ky-ikx} &= \frac{\omega k}{g} \int_{S_b} \phi_D e^{k(\bar{y}+y)+ik(\bar{x}-x)} dS \\ &+ e^{ky-ikx} \\ &+ ik \sum_j \int_{S_b} (k\phi_j - w_j) \frac{\xi_j}{A} e^{k(\bar{y}+y)+ik(\bar{x}-x)} dS \end{aligned} \quad (2.91)$$

Integralet går over kildepunktsystemet, så vi kan igjen forkorte e^{ky+ikx} .

$$\frac{\hat{T}}{A} = 1 + \frac{\omega k}{g} \int_{S_b} \phi_D e^{k\bar{y}+ik\bar{x}} dS + ik \sum_j \int_{S_b} (k\phi_j - w_j) \frac{\xi_j}{A} e^{k\bar{y}+ik\bar{x}} dS \quad (2.92)$$

Koeffisientene \hat{R}/A og \hat{T}/A gir oss tall på hvor mye energi som passerer membranen. Det er et kjent fenomen at lange bølger ofte ikke reflekteres.

2.9 Porøsitet

Lineær modell

Darcys lov er en grunnleggende modell for porøse mediers fysikk. Den beskriver forholdet mellom gjennomstrømming av vann i et porøst medie og trykkfallet over mediet [15][16]. Når det gjelder en porøs membran i kontakt med vann, illustrerer Darcys lov hvordan porøsiteten i membranen skaper en dempet kobling mellom bølgene i væsken og membranens bevegelser. Ofte ser man den lineære formen for Darcys modell.

$$-\sigma \Delta p = V \quad (2.93)$$

Den setter et lineært forhold mellom trykkfallet $\Delta p = p_0 - p$ og gjennomstrømnings-hastighetene til fluidet $V = \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial t}$. Proporsjonalitetskonstanten σ er en permeabilitet-parameter som beskriver hvor porøst mediet er. Dersom σ går mot null, blir mediet ugjennomtrengelig. Vi bruker $p_0 = 0$ som referanse-trykk.

$$\begin{aligned} -\sigma(p_0 - p) &= V \\ \sigma p &= \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial t} \\ -\sigma \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial t} \\ -i\omega \rho \sigma \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial n} - i\omega W \end{aligned} \quad (2.94)$$

Ved å dekomponere det totale hastighetspotensialet i radiasjonspotensialet og diffraksjonspotensialet, får vi satt randkrav på membranen i hvert av problemene.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} &= w_j - i\omega \rho \sigma \phi_j, \quad (\text{Radiasjon}) \\ \frac{\partial \phi_D}{\partial n} &= -i\omega \rho \sigma \phi_D, \quad (\text{Diffraksjon}) \end{aligned} \quad (2.95)$$

La oss se hvordan dette endrer radiasjonsproblemet i to dimensjoner.

$$\begin{aligned} -\pi \phi_j + \int_{S_b} \frac{\partial G}{\partial n} \phi_j dS &= \int_{S_b} G \frac{\partial \phi_j}{\partial n} dS \\ -\pi \phi_j + \int_{S_b} \left(\frac{\partial G}{\partial n} + i\omega \rho \sigma G \right) \phi_j dS &= \int_{S_b} G w_j dS \end{aligned} \quad (2.96)$$

La oss se hvordan dette endrer diffraksjonsproblemet i to dimensjoner.

$$\begin{aligned} -\pi \phi_D + \int_{S_b} \frac{\partial G}{\partial n} \phi_D dS &= \int_{S_b} G \frac{\partial \phi_D}{\partial n} dS - 2\pi \phi_0 \\ -\pi \phi_D + \int_{S_b} \left(\frac{\partial G}{\partial n} + i\omega \rho \sigma G \right) \phi_D dS &= -2\pi \phi_0 \end{aligned} \quad (2.97)$$

Kvadratisk modell

I den kvadratiske modellen til Taylor er forholdet mellom trykkfallet og hastighetene ikke-lineært [17][18].

$$|V|V = -\sigma\Delta p \quad (2.98)$$

Det går ikke an å substituere dette rett inn i likningene våre ettersom radiasjonen og diffraksjonen ikke er uavhengige i denne modellen. Vi kan derimot rekkeutvikle i tid og finne ledende ordens oppførsel. En generell funksjon $f(\tau)$ kan vi tilnærme med en Fourier rekke som følger.

$$f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\tau} d\tau, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{in\tau} d\tau \quad (2.99)$$

La oss se på diffraksjon. Hastighetene ved membranen er

$$V_D = \text{Re} \left\{ \frac{ig}{\omega} A \frac{\partial \phi_D}{\partial n} e^{i\omega t} \right\} = \frac{g}{\omega} A \frac{\partial \phi_D}{\partial n} \cos \tau \quad (2.100)$$

hvor $\tau = \omega t + \tau_0$ og τ_0 er et passende faseskifte. Med $f(\tau) = |V_D| V_D$ finner vi at

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{4}{3\pi}, \quad c_{-1} = \frac{4}{3\pi}, \quad (2.101)$$

$$c_2 = 0, \quad c_{-2} = 0, \quad c_3 = \frac{4}{15\pi}, \quad c_{-3} = \frac{4}{15\pi}, \dots \quad (2.102)$$

Dersom vi kun tar med ledende orden i denne rekka, får vi

$$|V_D| V_D \approx \frac{8}{3\pi} \left(A \frac{g}{\omega} \right)^2 \left| \frac{\partial \phi_D}{\partial n} \right|^2 \cos \tau. \quad (2.103)$$

Den reelle komponenten til trykket er

$$\text{Re}\{-\sigma\Delta p\} = \text{Re}\{-i\omega\rho\sigma\phi_D\} = -\omega\rho\sigma |\phi_D| \cos \tau. \quad (2.104)$$

Vi setter størrelsene i (2.103) og (2.104) like og får

$$\frac{8}{3\pi} \left(A \frac{g}{\omega} \right)^2 \left| \frac{\partial \phi_D}{\partial n} \right|^2 = -\omega\rho\sigma |\phi_D|. \quad (2.105)$$

Integrallikningen for hastighetspotensialet gjelder som alltid.

$$-\pi\phi_D + \int_{S_b} \phi_D \frac{\partial G}{\partial n} dS = \int_{S_b} G \frac{\partial \phi_D}{\partial n} dS - 2\pi\phi_0 \quad (2.106)$$

Likning (2.105) og (2.106) kan løses med iterative metoder som for eksempel fikspunktiterasjon eller Newtons metode. Vi kan regne radiasjonspotensialet på helt tilsvarende måte.

2.10 Viskøs dempning

Vi lager en modell for grensesjiktet slik at vi kan estimere energidissipasjonen \dot{D} fra friksjonsvirkningen.

$$\dot{D} = \int_S \int_{-\infty}^0 \tau \frac{\partial u}{\partial y} dy dS \quad (2.107)$$

Likning (2.107) gir energidissipasjonen ved å summe bidragene i hele vannsøyla under membranen [19]. Funksjonen u er horisontal hastigheten i grensesjiktet. Størrelsen τ er skjærspenningen i fluidet og skrives

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.108)$$

Med substitusjon finner vi derfor

$$\dot{D} = \int_S \int_{-\infty}^0 \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy dS. \quad (2.109)$$

For å evaluere dette integralet trenger vi uttrykk for u . Vi antar at grensesjiktstykkelsen δ er mye mindre enn platelengden L . Da kan vi tilnærme grensesjiktet som under innflytelse av en uendelig lang plate. Kanteffektene vil utgjøre en liten korreksjon på energi-dissipasjon. Å bestemme hastighetsfeltet under en uendelig lang svingende plate er kjent som Stokes andre problem. Vi søker hastighetsfelter $\mathbf{u} = u(y, t)\mathbf{i}$ som er drevet av platen. Da lar Navier-Stokes seg redusere til

$$x :: \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.110)$$

Vi kobler ut tiden som alltid $u = u_0(y)e^{i\omega t}$.

$$i\omega\rho u_0(y) = \mu \frac{\partial^2 u_0(y)}{\partial y^2}. \quad (2.111)$$

Denne likningen har løsninger

$$u_0 = C_0 e^{y\sqrt{i\omega\rho/\mu}} + C_1 e^{-y\sqrt{i\omega\rho/\mu}}. \quad (2.112)$$

Legg merke til at vi har med roten av i i eksponentene. Ettersom $\sqrt{i} = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$ får vi både eksponentiell vekst og svingninger i løsningene. Vi bestemmer konstantene ved å sette grensebetingelser. La oss dekomponere hastighetene for refleksjon og diffraksjon.

$$u_0 = \sum_j u_j + u_D \quad (2.113)$$

Grensebetingelsene endrer seg fra radiasjonsproblemet til diffraksjonsproblemet. I radiasjonsproblemet, må fluidet hefte seg til geometrien. Hastighetene u_j må også dø ut uendelig langt nede i havgapet. Dette skriver vi som

$$u_j(y = 0) = U_{x,j}, \quad u_j(y \rightarrow -\infty) = 0. \quad (2.114)$$

Da får vi de spesielle løsningene

$$u_j = U_{x,j} e^{-y^*} \cos(\omega t - y^*), \quad y^* = y / \sqrt{2\mu / (\rho\omega)} \quad (2.115)$$

med fristrøms-hastighetene $U_{x,j}$ gitt som ved $\frac{\partial \phi_R}{\partial x}$.

For diffraksjon må grensebetingelsene vurderes litt nøyere. På geometrien, må vi ha heft. I diffraksjonsproblemet står membranen i ro, så hastigheten u_D settes til null ved $y = 0$. Diffraksjonspotensialet ϕ_D dør ut ved bunnen av havet ettersom den går som $\sim e^{ky}$, men vi kan ikke sette hastigheten null der også. Da ville vi fått den trivielle løsningen $u_D = 0$. La oss betegne en karakteristisk lengde L^* som beskriver hvor fort potentialet dør ut.

$$L^* = 1/\nu$$

Vi antar at grensesjiktstykkelsen δ er mye mindre enn denne lengden L^* som potentialet ϕ_D trenger på å endre seg i betydelig grad i vertikalretning. Vi kan da tillate oss å kreve at hastigheten u_D må grense mot $U_{x,D}$ når $y \rightarrow -\infty$ der $U_{x,D} = A \frac{\partial \phi_D}{\partial n}$. Energitalpet utenfor grensesjiktet er neglisjerbart fordi skjæret er så lite der. Vi fører opp grensebetingelsene

$$u_D(y = 0) = 0, \quad u_D(y \rightarrow -\infty) = U_{x,D}.$$

Da får vi løsninger

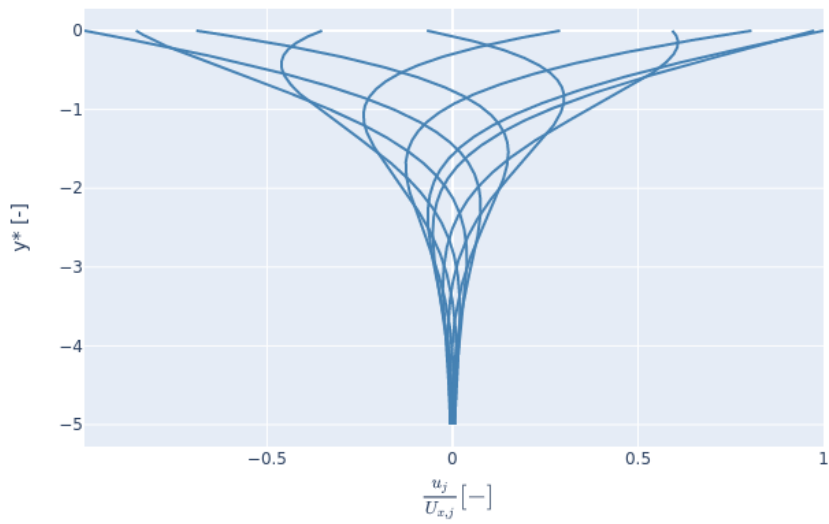
$$u_D = U_{x,D} \left[\cos(\omega t) - e^{-y^*} \cos(\omega t - y^*) \right].$$

Nå har vi den totale horisontalhastigheten i grensesjiktet. Da kan vi substituere inn i likning (2.109) for å finne energidissipasjonen.

Legg merke til at \dot{D} er en funksjon av tid. For å finne den gjennomsnittlige dissipasjonen kan vi midle uttrykket over en periode. Integralet av $\cos^2(\omega t)$ over en periode er $1/2$. Gjennomsnittet finner vi dermed ved å halvere (2.109).

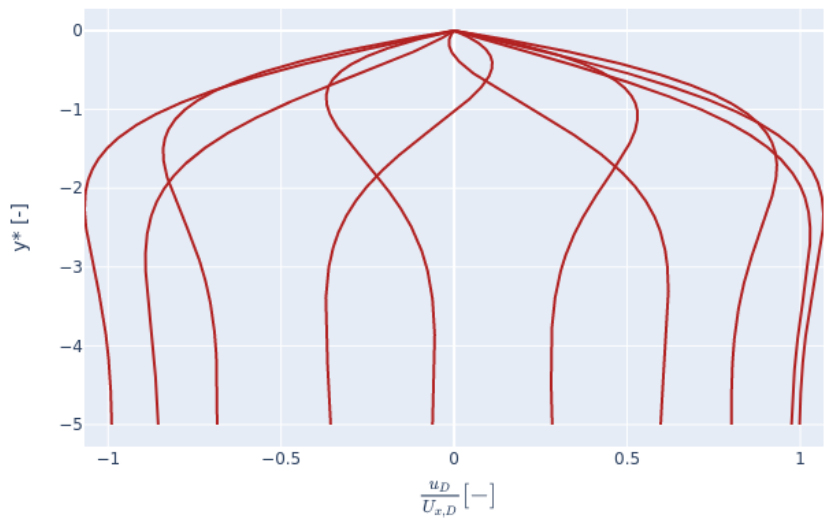
På neste side ser vi hastighetsprofilene i grensesjiktet for radiasjon og diffraksjon.

Grensesjikt - Radiasjon



Figur 2.9: Grensesjiktets hastighetsprofil for radiasjon.

Grensesjikt - Diffraksjon



Figur 2.10: Grensesjiktets hastighetsprofil for diffraksjon.

Kapittel 3

Numerisk tilnærming

I forrige kapittel undersøkte vi hvordan vi kunne sette opp problemet med å finne bevegelsen til membranen og vannet med matematikk. Vi fant integrallikningformuleringer for radiasjonspotensialet og diffraksjonspotensialet. Vi fant også ut hvordan vi kunne koble de til membranens bevegelse gjennom trykket. Disse likningene er vanskelige, om ikke umulige, å løse eksakt. I dette kapitlet skal vi undersøke hvordan vi kan tilnærme oss løsningene med numeriske metoder.

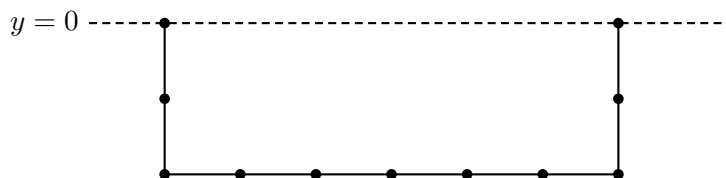
3.1 Panelmetoden

Vi har gjennom Greens teorem sett at både radiasjonsproblemet og diffraksjonsproblemet lar seg beskrives med integrallikninger over membranens rand S_b . For å tilnærme oss disse likningene med numerikk kan vi diskretisere randen med N paneler og summe bidragene. Vi jobber med to aksekors, så vi er nødt til å diskretisere randen i begge koordinatsystemene. Som vi skal se vil dette lede til matriselikninger for hastighetspotensialene på hvert panel. Denne tilnærmingen kalles gjerne panelmetoden. Panelmetoden har vist seg å være en nyttig tilnærming for å utforske og forstå strømmingsegenskaper rundt geometrier, og den gir oss en effektiv numerisk løsning for slike fysiske systemer.

3.2 Diskretisering av geometrien

Vi jobber med en veldig tynn membran. Det vil si at den horisontale utstrekningen er mye større enn den vertikale. Allikevel kan vi ikke sette dypgangen til eksakt null. Det vil resultere i ufysiske bidrag til integrallikningen fra speilet til Greenfunksjonen.

I to dimensjoner vil membranen bestå av to vertikale linjestykker for sidene og ett linjestykke for bunnen. Diskretiseringen er så enkel som å dele linjestykkene inn i flere mindre linjestykker eller paneler. Dette ser vi i figur 3.1. Hastighetspotensialene evalueres på midten av hvert panel.



Figur 3.1: Skisse av mulig diskretisering av den lukkede integralflaten S_b i to dimensjoner. Punktene viser endepunktene til panelene. Her er det eksempelvis $N_s = 2$ sidepaneler og $N_b = 6$ bunnpaneler.

Diskretiseringen av membranen lar seg generalisere svært enkelt til tre dimensjoner. Diskretisering av z -aksen er helt analog med x -aksen.

3.3 Matriseformulering

Vi jobber med to koordinatsystemer; feltpunktene \mathbf{x} og kildepunktene $\bar{\mathbf{x}}$. Vi må angi koordinatene til panelene våre i begge systemene. Vi lar panelene få $m = N$ koordinater i kildesystemet og $n = N$ koordinater i feltsystemet. Greenfunksjonen er en funksjon av punkter i begge koordinatsystemene. Vi evaluerer Greenfunksjonen på $m \times n = N \times N$ punkter, og verdiene lagres i en matrise. Dette gjør at multiplikasjon med Greenfunksjonen kan sees på som en matrise-multiplikasjon. Integralene våre går over kildepunktene.

Vi diskretiserer integrallikningen for radiasjonsproblemet.

$$\begin{aligned}
 -\pi\phi_j + \int_{S_b} \frac{\partial G}{\partial n} \phi_j dS &= \int_{S_b} G w_j dS \\
 -\pi\phi_j + \sum_{m=1}^N \phi_{j,m} \int_{S_m} \frac{\partial G}{\partial n} dS &= \sum_{m=1}^N w_{j,m} \int_{S_m} G dS \\
 (-\Pi + \mathcal{A})\phi_j &= \mathcal{B}w_j
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Vi diskretiserer integrallikningen for diffraksjonsproblemet.

$$\begin{aligned}
 -\pi\phi_D + \int_{S_b} \frac{\partial G}{\partial n} \phi_D dS &= -2\pi\phi_0 \\
 -\pi\phi_D + \sum_{m=1}^N \phi_{D,m} \int_{S_m} \frac{\partial G}{\partial n} dS &= -2\pi\phi_0 \\
 (-\Pi + \mathcal{A})\phi_D &= -2\pi\phi_0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Vi har introdusert diagonalmatrisen Π , og Greenfunksjonsmatrisene \mathcal{A} og \mathcal{B} . For å sette opp disse matrisene, må vi kunne evaluere integralet av Greenfunksjonen og integralet av dens deriverte over hvert panel. Siden Greenfunksjonen er singulær på randen S_b , kan vi ikke bruke midtpunkts-metoden. Da vil Greenfunksjonen gå til uendelig. Vi trenger en annen integrasjonsregel. Vi bruker heller Gaussisk kvadratur av høyere orden. For å evaluere integralet av en generell funksjon $f(x)$ over et intervall $[a, b]$ på en effektiv måte, kan vi tilnærme integralet ved å evaluere funksjonen ved nøye utvalgte punkter og deretter veie bidragene riktig. Gauss-kvadraturregelen med to punkter x_1 og x_2 tillater oss å gjøre dette på en god måte. Regelen er gitt ved følgende formel.

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \quad (3.3)$$

Her er c_1 og c_2 vektorer som bestemmer størrelsen på bidragene fra de respektive punktene x_1 og x_2 . Nå har vi to ukjente evalueringspunkter og to ukjente vektorer. For å finne disse ukjente verdiene, velger vi punktene x_1 og x_2 og vektene c_1 og c_2 slik at Gauss-kvadraturregelen er eksakt for tredjegradspolynomer. Det gir

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{b-a}{2}, & c_2 &= \frac{b-a}{2} \\ x_1 &= \frac{b+a}{2} + \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}, & x_2 &= \frac{b+a}{2} - \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ved å bruke disse verdiene for c_1 , c_2 , x_1 og x_2 , kan vi effektivt tilnærme integralet av $f(x)$ over intervallet $[a, b]$ ved å beregne $c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$.

Etter å ha løst integrallikningene, får vi evalueringer av hastighetspotensialet $\phi(\mathbf{x})$ på hvert panel. Dersom vi vil løse bevegelseslikningen, uttrykker vi følgende størrelser som summer over panelene.

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int_{S_b} T k^2 w_i w_j dS \approx \sum_n T k^2 w_i(\mathbf{x}_n) w_j(\mathbf{x}_n) dS_n \\ c_{ij} &= \int_{S_b} \rho g w_i w_j dS \approx \sum_n \rho g w_i(\mathbf{x}_n) w_j(\mathbf{x}_n) dS_n \\ M_{ij} &= \int_{S_b} \rho_m \Delta h w_i w_j dS \approx \sum_n \rho_m \Delta h w_i(\mathbf{x}_n) w_j(\mathbf{x}_n) dS_n \\ a_{ij} &= \operatorname{Re} \left\{ \rho \int_{S_b} \phi_i w_j dS \right\} \approx \operatorname{Re} \left\{ \rho \sum_n \phi_i(\mathbf{x}_n) w_j(\mathbf{x}_n) dS_n \right\} \\ b_{ij} &= \frac{1}{i\omega} \operatorname{Im} \left\{ \rho \int_{S_b} \phi_i w_j dS \right\} \approx \frac{1}{i\omega} \operatorname{Im} \left\{ \rho \sum_n \phi_i(\mathbf{x}_n) w_j(\mathbf{x}_n) dS_n \right\} \\ X_i &= -i\omega \rho \int_{S_b} \phi_D w_i dS \approx -i\omega \rho \sum_n \phi_D(\mathbf{x}_n) w_i(\mathbf{x}_n) dS_n \end{aligned} \quad (3.5)$$

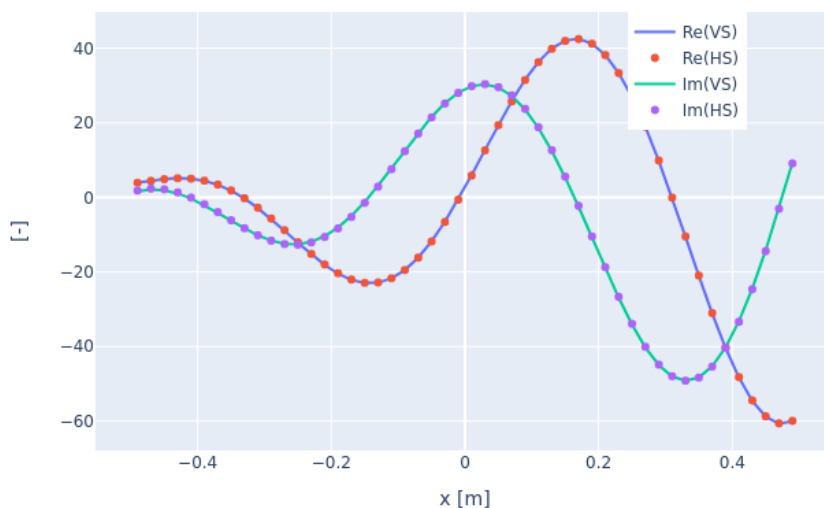
3.4 Verifisering

Greens teorem gjelder for alle Laplaciske størrelser i domenet \mathcal{V} . Som en sjekk på at integralikningen er implementert riktig, kan vi sende inn en kjent Laplacisk størrelse og sammenlikne venstre og høyre side. Et hastighetspotensial det ikke er tvil om skal tilfredstille likningen er potensialet ϕ_0 for de innkommende bølgene. I figur 3.2 ser vi eksempelvis venstre og høyre side av integrallikningen for et gitt Laplacisk potensial ϕ_0 og en mulig diskretisering av membranen.

$$\pi\phi_0 + \int_{S_b} \frac{\partial G}{\partial n} \phi_0 dS = \int_{S_b} G \frac{\partial \phi_0}{\partial n} dS \quad (3.6)$$

Legg merke til at det ikke er minus foran første ledd. Det er fordi det er et bidrag $-2\pi\phi_0$ fra integralet over S_∞ .

Verifikasjon



Figur 3.2: Venstre og høyre side av integrallikningen for potensialet til de innkommende bølgene.

Kapittel 4

Resultater

Gjennom de to forrige kapitlene har vi fått formulert dynamikken mellom havbølger og soløyer med potensialteori og integrallikninger. Vi har sett hvordan vi kan diskretisere geometrien, og samtidig da likningene. Løsere av systemet har blitt implementert i Python. Ettersom integrallikningene på diskre form blir matriselikninger, og disse skal løses flere ganger for ulike høyresider, har matrisene blitt LU-dekomponert for å minke antallet aritmetiske operasjoner i programmene. Dette er viktig ettersom geometrien krever høy oppløsning, spesielt i tre dimensjoner, for at løsningene skal være fornuftige. Programmene har også blitt parallelisert for å minke beregningstiden av samme årsak. Deler av kodene er også vektorisert.

Fra Π -teoremet fikk vi fem dimensjonsløse parametere. Tre av disse parametere er i praksis låst. I lineær teori er steilheten til bølgene antatt svært liten; $A\nu \ll 1$. For alle simuleringer er forholdet mellom lengden av membranen L og tykkelsen Δh konstant. Vi velger å bruke samme tetthet ρ_m for membranen hele tiden, så forholdet til vannets tetthet ρ er også konstant. Det betyr at det, i følge Π -teoremet, skal være to parametere som bestemmer dynamikken i systemet. Det er forholdet mellom lengden på membranen og lengden på havbølgene ν/k og forholdet mellom strekket og membranlengden $Tk^2/(\rho g)$ som bestemmer. Med dette i bakhodet, velger vi å presentere de interessante størrelsene i systemet for ulike bølgetall ν og strekk T .

Vi begynner med å se på oppførselen til en to-dimensjonal membran. Den har vi gitt følgende standard parametere. Dersom ikke noe annet presiseres, er det disse parameterene som gjelder.

| L | Δh | N_b | N_s | ν | N_{moder} |
|--------|------------|-------|-------|--------------------------------|--------------------|
| 1.000m | 0.001m | 100 | 1 | $(10^{-4}, 10^1)\text{m}^{-1}$ | 10 |

Tabell 4.1: Oversikt over de standard simuleringsparameterne membranlengde L , tykkelse Δh , antall bunnpaneler N_b , antall sidepaneler N_s , spenn på bølgetall ν og antall moder N_{moder} .

I de følgende figurene ser vi resultater for ulike bevegelsesmoder. Dersom vi hadde illustrert alle modene, ville figurene blitt uleselige. Vi velger å se på følgende moder.

- | | |
|-----------------------|---------------------------|
| 0. Hiving | 1. Stamping |
| 2. Første symmetriske | 3. Første antisymmetriske |
| 4. Andre symmetriske | 5. Andre antisymmetriske |

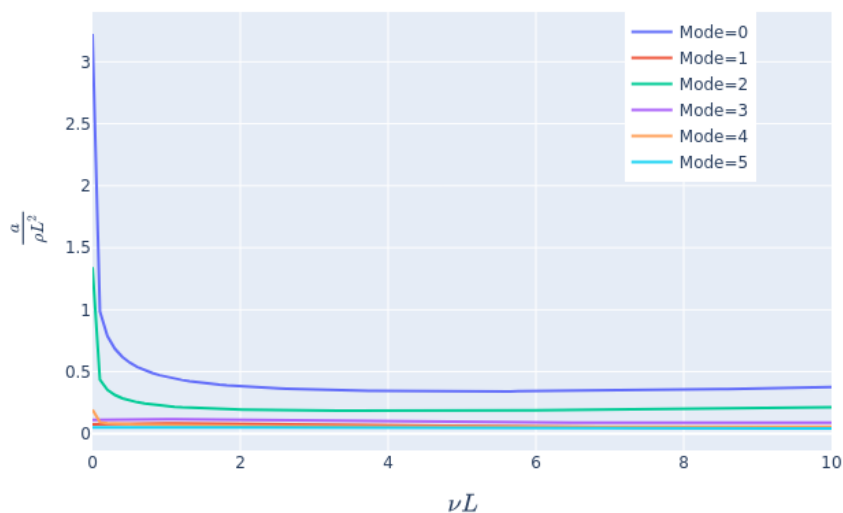
4.1 Addert masse

I figur 4.1 ser vi koeffisientene til den adderte massen til en membran som funksjon av bølgetallet til havbølgene. Felles for alle moder er at den adderte massen øker eksponentielt når bølgelengdene blir veldig store.

Hiving er den moden som gir mest addert masse. Første fleksible mode gir nest størst addert masse. Vi ser fra grafen at den adderte massen minker med egenfrekvensen k til membranen.

Det er flere fleksible moder som har større koeffisient for addert masse enn det stamping gir.

Addert masse



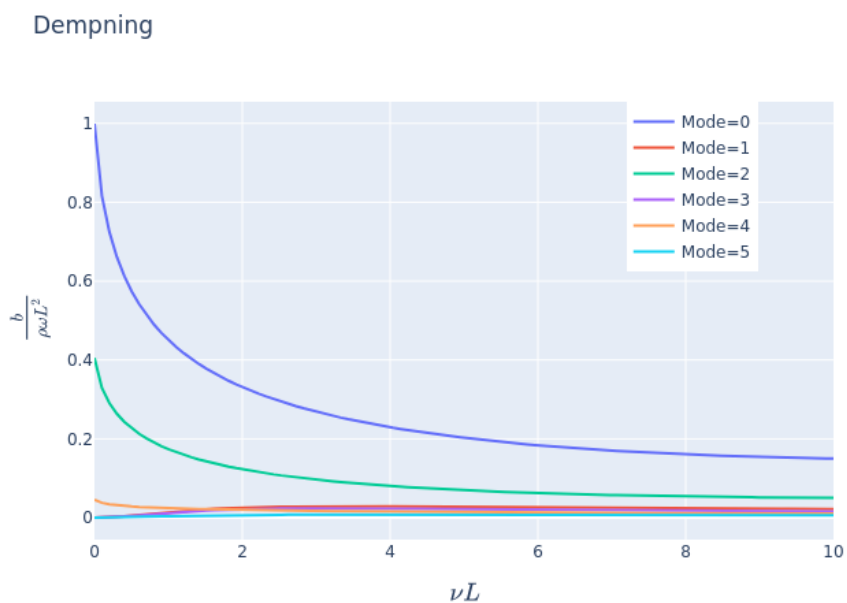
Figur 4.1: Addert masse for membran i to dimensjoner.

4.2 Dempning

I figur 4.2 ser vi koeffisientene til dempningen til en membran som funksjon av bølgetallet til havbølgene. For alle bølgetall er det hiving som gir størst dempning. Dempningen for hiving konvergerer til $b/(\rho\omega L^2) = 1$ når bølgelengdene blir store.

Den nest største dempningskoeffisienten kommer fra første fleksible mode. Det er en symmetrisk mode. Dempningen er omtrent halvparten så stor som for hiving.

Dempningen ved stamping er betydelig mindre enn for hiving og første symmetriske svingning. For lange bølger går dempningen til null for stamping.

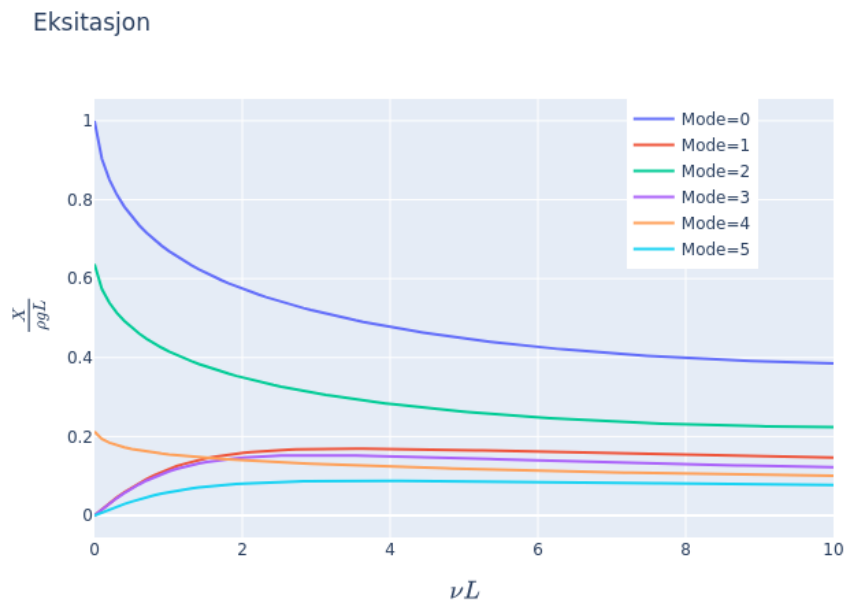


Figur 4.2: Dempning for membran i to dimensjoner.

4.3 Eksitasjon

I figur 4.3 ser vi den beregnede eksitasjonen $X/(\rho g L)$ for de ulike modene. Eksitasjonen er størst for hiving. For hivingen, konvergerer eksitasjonen til 1 når bølgene blir lange. For lange bølger er de symmetriske modene mest betydningsfulle. De antisymmetriske modene og stamping går til null.

For kortere bølger vil eksitasjonen til de antisymmetriske modene øke til de er sammenliknbare med de symmetriske.

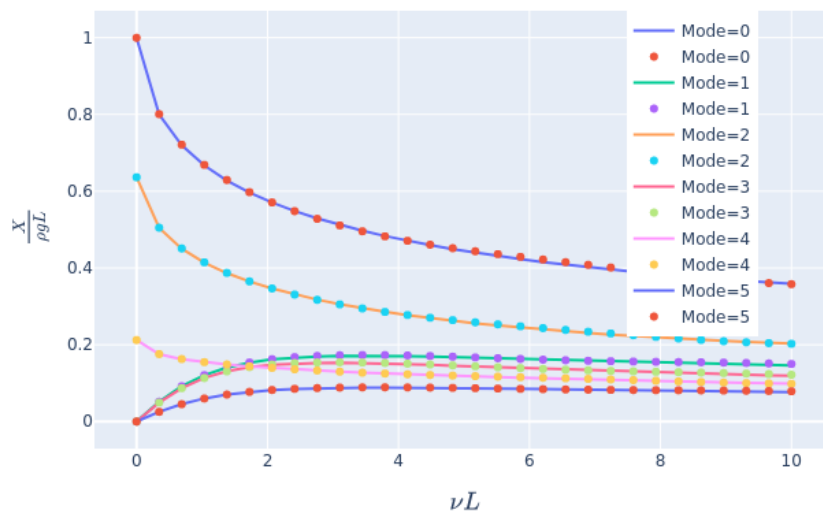


Figur 4.3: Eksitasjon for membran i to dimensjoner.

4.4 Haskind

I figur 4.4 ser vi den beregnede eksitasjonen for et utvalg av moder. Hver mode er verifisert gjennom Haskind-relasjonen. Linjene representerer eksitasjonen beregnet ved direkte trykkintegrering, mens punktene viser eksitasjonen beregnet med Haskinds uttrykk.

Eksitasjon (Haskind)



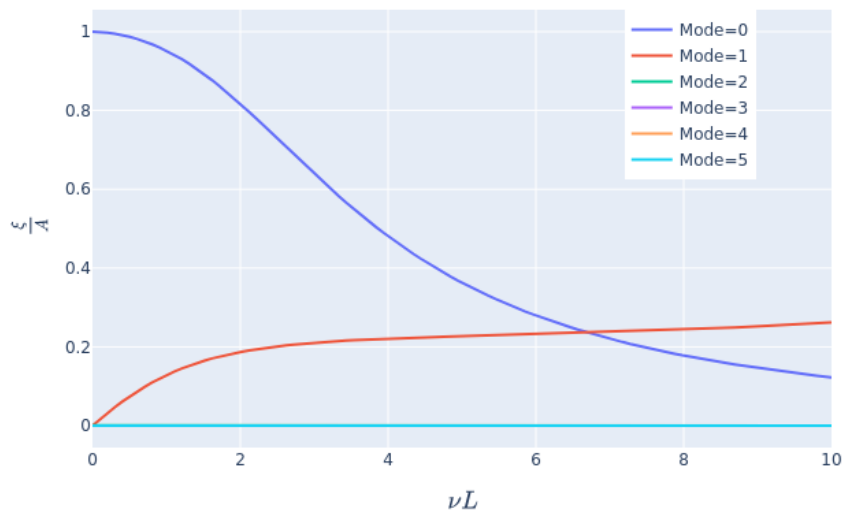
Figur 4.4: Eksitasjon for membran i to dimensjoner med Haskind relasjon.

4.5 Amplituderrespons

Responsen (RAO) til systemet endrer seg mye med strekket T . La oss først se på responsen til en relativt stiv membran. I figur 4.5 ser vi RAO til en slik membran. Det første vi legger merke til er at responsen til de fleksible modene blir forsvinnende små når strekket er stort.

For de stive modene, får vi klar respons. Hivingen gir, for bølger med lengde på størrelse med platen eller større, størst respons. Den konvergerer mot 1 når bølgene blir lange. For stamping får vi mer respons jo kortere bølger som sendes inn. De lengste bølgene gir ingen stamping.

Amplitude-respons



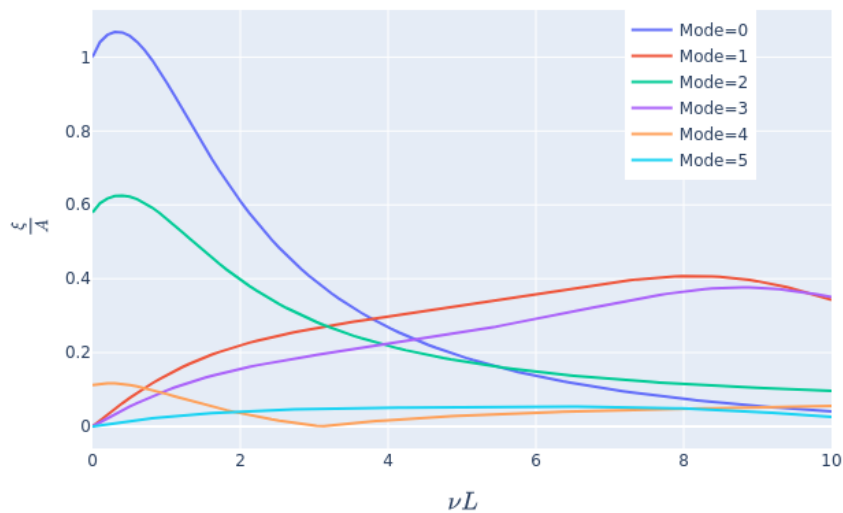
Figur 4.5: Responsen til en relativt stiv membran. Strekket er $T/\rho g = 10^2 \text{m}^2$.

La oss nå se på responsen til en relativt slapp membran med lite strekk T . I figur 4.6 ser vi responsen til en slik membran. Umiddelbart ser vi mye mer dynamikk. Responsen ved hiving er ganske lik som for en stivere membran, men for lange bølger får vi mer enn 1 i utslag. For de korte bølgene blir responsen lavere enn for en stivere membran.

Stampingen følger samme generelle trend som for en stivere membran, men for korte bølger får vi mer utslag.

For de fleksible modene, ser vi en trend for de symmetriske modene og en trend for de antisymmetriske. For responsen til de symmetriske modene får vi stort utslag ved lange bølger og lite utslag ved korte bølger. For de antisymmetriske så er det omvendt. Da får vi stort utslag ved de korte bølgene og lite utslag ved de lange bølgene.

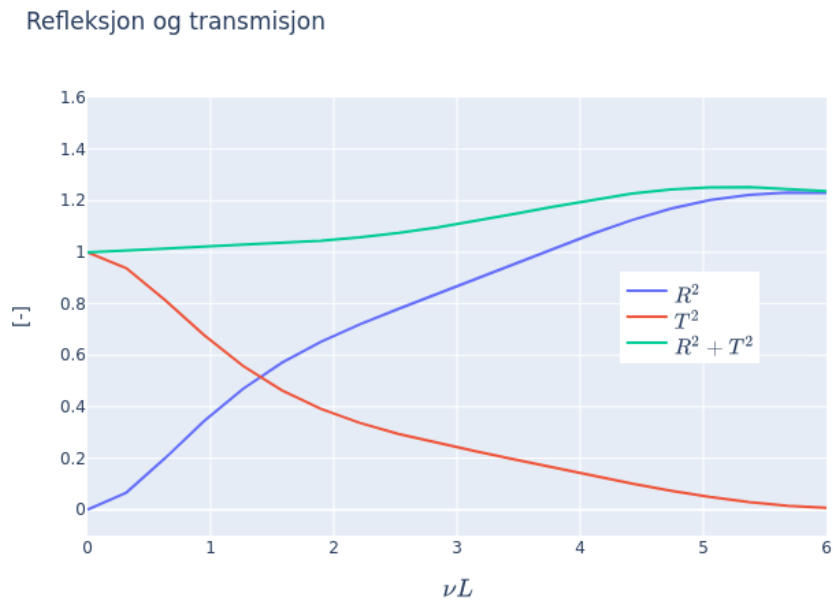
Amplitude-respons



Figur 4.6: Responsen til en slapp membran. Strekket er $T/\rho g = 10^{-2}\text{m}^2$.

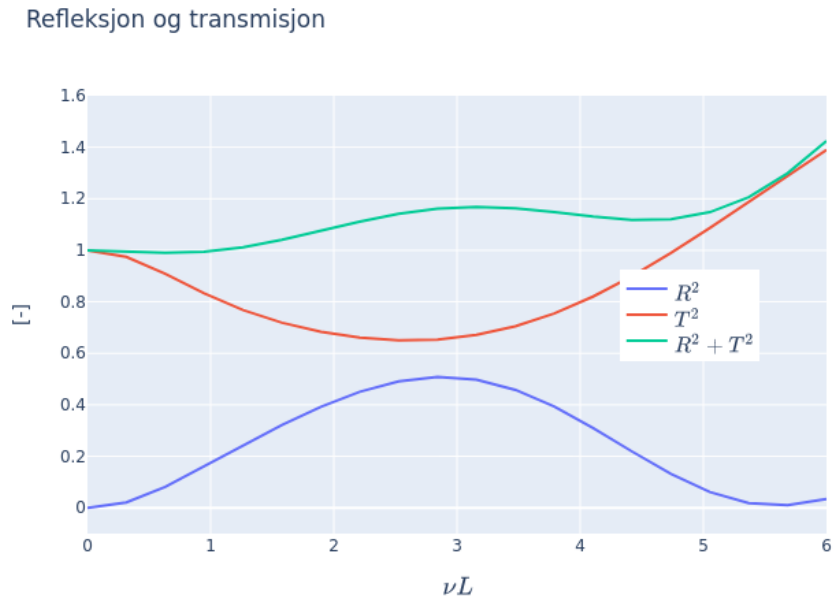
4.6 Refleksjon og transmisjon

I figur 4.7 ser vi koeffisienter for refleksjon og transmisjon. Det er satt på et stort strekk $T/\rho g = 10^2 \text{m}^2$. Vi ser at de korte bølgene blir reflektert, og de lange bølgene blir transmittert. Refleksjonen blir størst et sted mellom $\nu L = 1$ og 2.



Figur 4.7: Koeffisienter for refleksjon og transmisjon for en membran med strekk $T/\rho g = 10^2 \text{m}^2$.

I figur 4.8 ser vi koeffisienter for refleksjon og transmisjon. Det er satt på et lite strekk $T/\rho g = 10^{-2}\text{m}^2$. Vi ser at de korte bølgene blir reflektert, og de lange bølgene blir transmittert. Økningen i refleksjonen blir utsatt til et sted mellom $\nu L = 2$ og 3. For høyere bølgetall blir beregningene usikre.

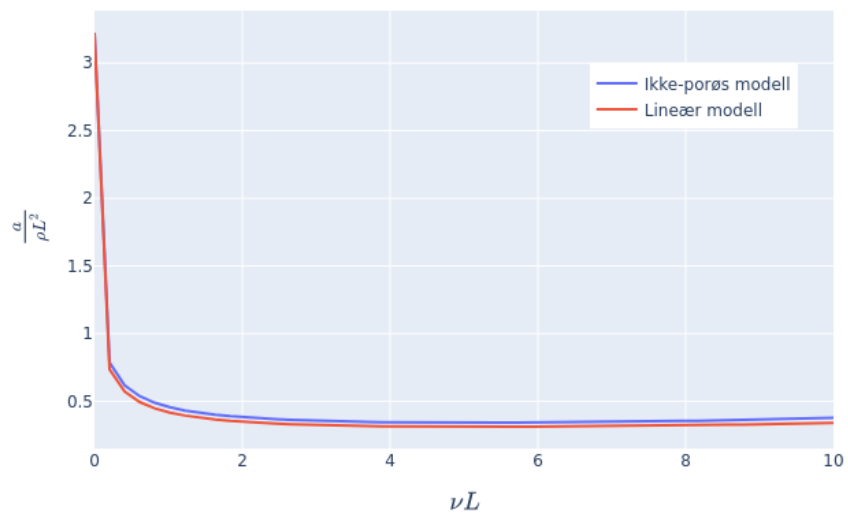


Figur 4.8: Koeffisienter for refleksjon og transmisjon for en membran med strekk $T/\rho g = 10^{-2}\text{m}^2$.

4.7 Porøsitet

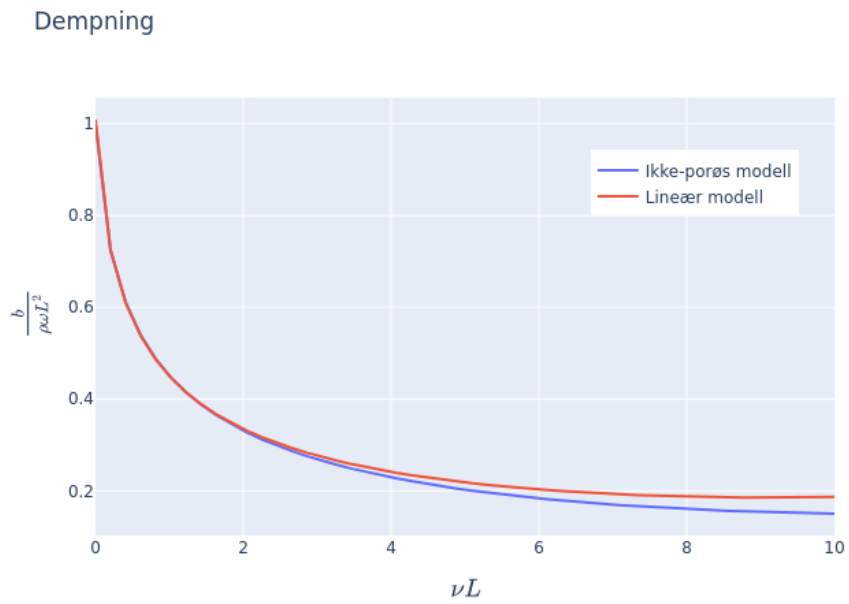
For alle grafer som viser effekten av porøsitet, vises kun endringen i moden for hiving. Det er observert at de andre modene følger samme trend. I figur 4.9, ser vi at den adderte massen går ned dersom vi inkluderer den lineære modellen til Darcy for porøse medier.

Addert masse



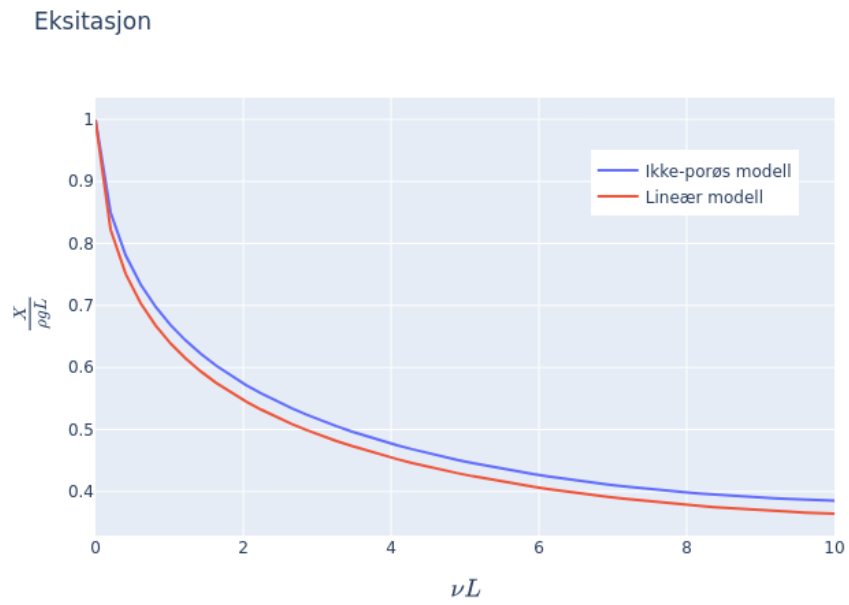
Figur 4.9: Addert masse for hiving med og uten porøsitet.

Lineær porøsitet fører til at dempningen går opp. Dette er mest tydelig for korte bølger.



Figur 4.10: Dempning for hiving med og uten porøsitet.

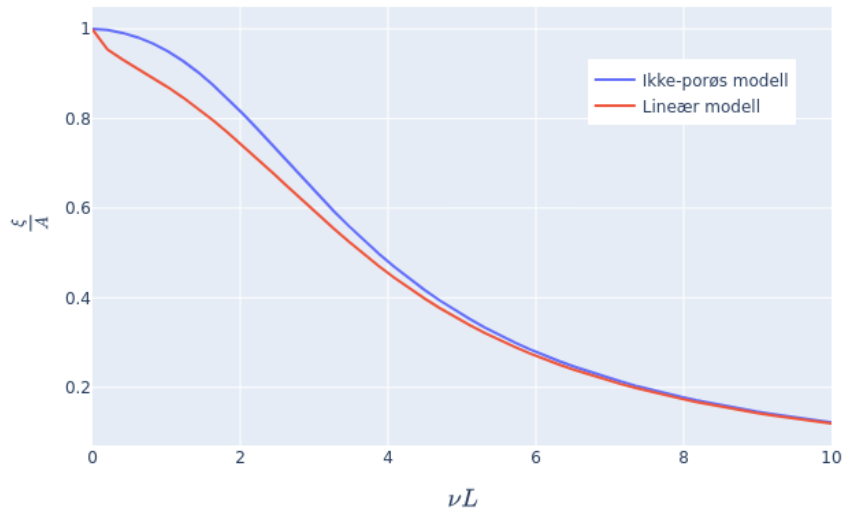
Eksitasjonen går ned dersom vi inkluderer lineær porøsitet.



Figur 4.11: Eksitasjon for hiving med og uten porøsitet.

Responsen i moden for hiving går ned med porøsiteten. Resultatet er vist for en relativt stiv membran med strekk $T/\rho g = 10^2 \text{m}^2$.

Amplitude-respons



Figur 4.12: Amplitude-respons for hiving med og uten porøsitet.

4.8 Kvadratisk membran

Nå går vi over til tre dimensjoner. Her vil indeksen til modene endre seg. Vi har nå tre stive moder. Vi lister hvilke moder som tilhører hvilken indeks her.

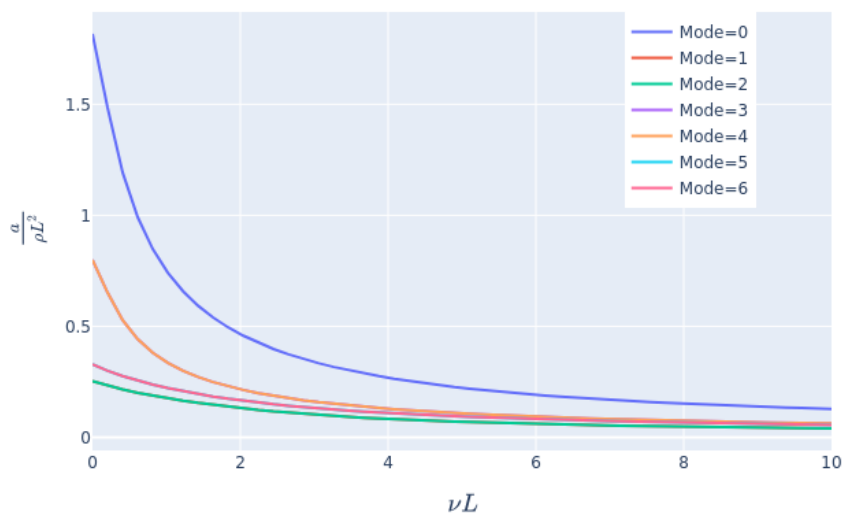
- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|------------|
| 0. Hiving | 1. Stamping | 2. Rulling |
| 3. Første symmetriske langs x | 4. Første symmetriske langs z | |
| 5. Første antisymmetriske langs x | 6. Første antisymmetriske langs z | |

Standardparameterne er de samme som i to dimensjoner forutenom et par. Antall sidepaneler er nå satt til null. Dypgangen er så liten at sidepanelene bidrar minimalt til utregningene av størrelsene av interesse. Antall bunnpaneler er satt til 35×35 . Det er altså mange flere paneler i tre dimensjoner.

4.9 Addert masse

Hiving gir størst koeffisient for addert masse. Stamping og rulling gir mindre enn de første fleksible modene. De gir også like mye pga symmetri. De første symmetriske modene gir nest størst addert masse. De første antisymmetriske gir litt mindre. Slik går det i tur med høyere egenfrekvenser.

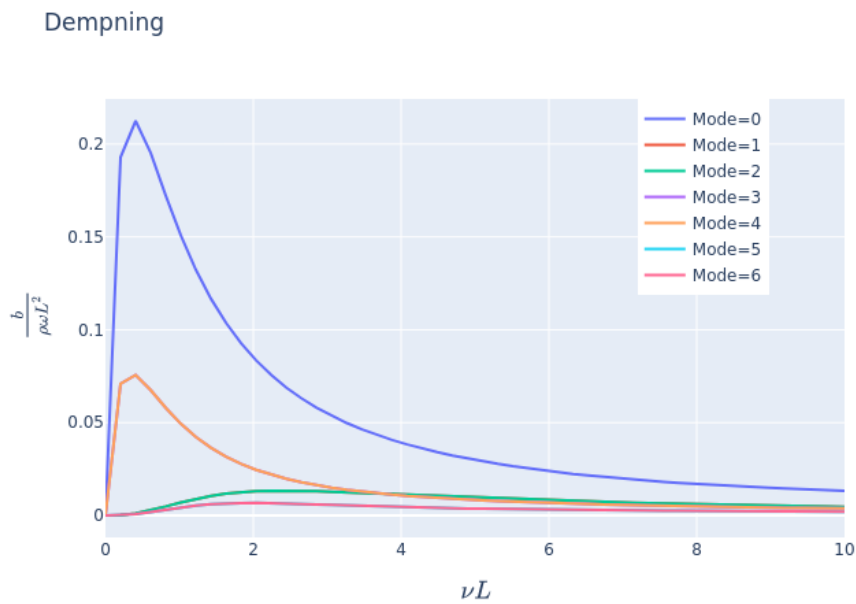
Addert masse



Figur 4.13: Addert masse for en kvadratisk membran.

4.10 Dempning

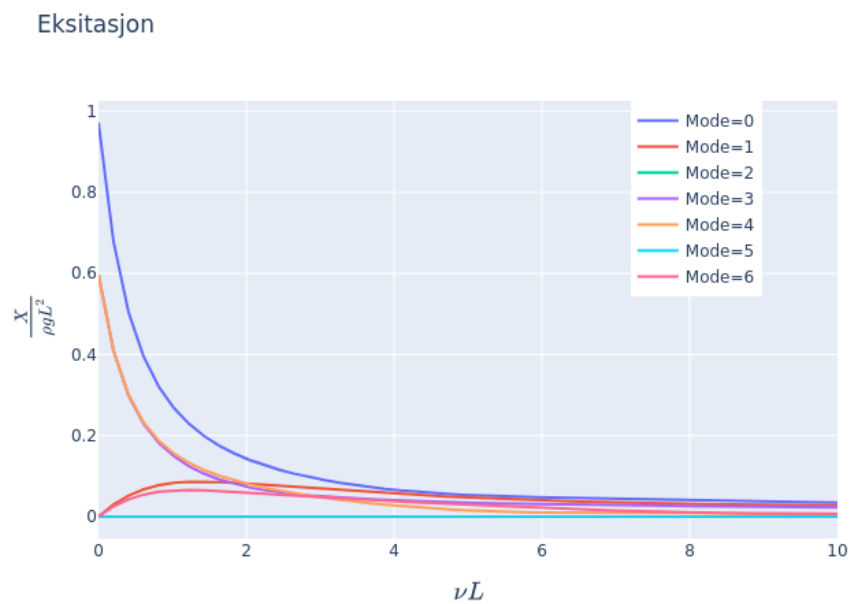
Koeffisienten for dempning er størst for hiving. Koeffisientene for de første symmetriske i hver retning (x og z) er like store og nest størst. For de lange bølgene er det disse modene som bidrar til dempning. Generelt gir de symmetriske modene dempning for de lange bølgene. Det gjør ikke de antisymmetriske. For korte bølger, vil både symmetriske og antisymmetriske moder ha sammenliknbare dempningskoeffisienter.



Figur 4.14: Dempning for en kvadratisk membran.

4.11 Eksitasjon

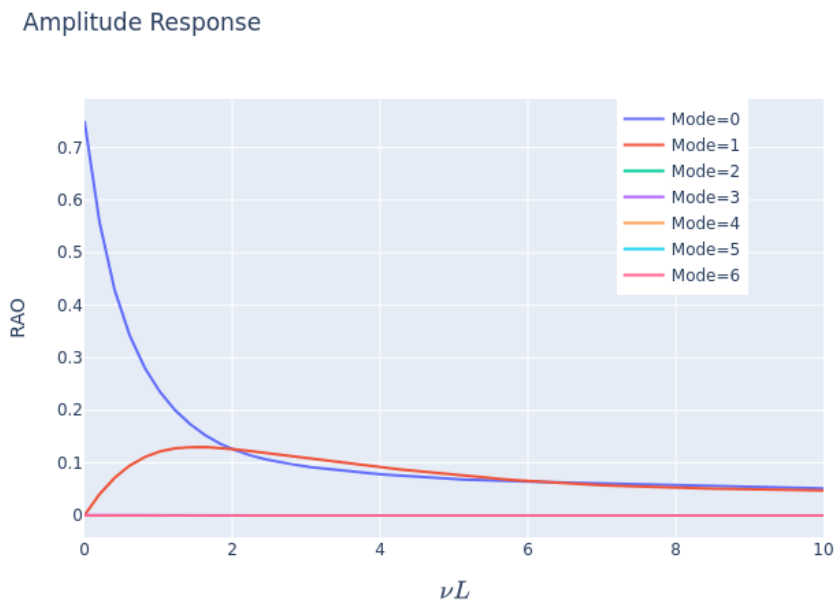
For lange bølger er det hivingen og de symmetriske modene som blir eksitert. Hivingen er størst. For korte bølger blir alle modene eksitert i sammenliknbar grad.



Figur 4.15: Eksitasjon for en kvadratisk membran.

4.12 Amplituderespons

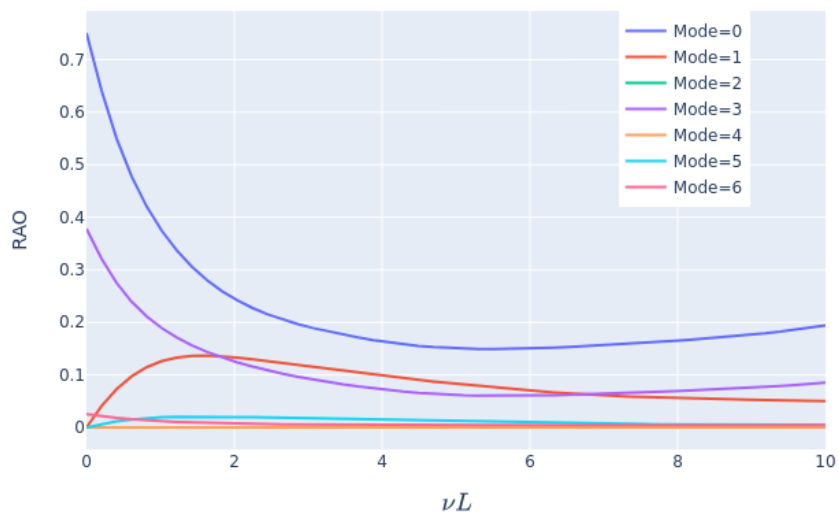
Responsen for de ulike modene endrer seg mye med strekket. Vi ser først på responsen til en stiv kvadratisk membran. Figur 4.16 viser at responsen til de fleksible modene dør helt ut dersom strekket settes høyt. For lange bølger har hiving alt å si for bevegelsen. Når bølgene blir kortere får stamping også spille en rolle.



Figur 4.16: Responsen til en stiv kvadratisk membran. Strekket er $T/\rho g = 10^2 \text{m}^2$.

Figur 4.16 viser responsen til de ulike modene dersom strekket settes lavt. Vi ser nå, mye mer dynamikk enn for en stiv membran. De fleksible modene er med på å justere responsen til de stive modene. Første symmetriske fleksible mode er betydelig. Den får omtrent halve uslaget av hva hiving får. De andre fleksible har ikke sammenliknbare respons. Stamping spiller en rolle som vanlig. Beregningene for høye bølgetall blir unøyaktige.

Amplitude Response



Figur 4.17: Responsen til en stiv kvadratisk membran. Strekket er $T/\rho g = 10^{-1}\text{m}^2$.

Kapittel 5

Diskusjon

Vi har modellert dynamikken mellom tynne membraner plassert på frie overflater av fluider ved å anvende lineær hydroelastisk teori. Ved å anta små deformasjoner i membranen og små amplituder for vannbølgene, har vi rettferdiggjort valget om å negligere andre ordens ikke-lineære effekter. Resultatene fra slike modeller gir oss innsikt i den ledende ordenens oppførsel. Det er avgjørende å være oppmerksom på begrensningene til vår modell når vi nå drøfter resultatene.

I kapittel 3 tilnærmet vi løsningene til integrallikningene med numeriske metoder. Med tilnærmede løsninger kunne vi regne ut interessante størrelser som addert masse, dempning, eksitasjon, RAO, refleksjon og transmisjon. Vi kan studere dynamikken i systemet ved å variere viktige parametere. Fra II-teoremet vet vi at det er bølgelengder og strekk som bestemmer. La oss først undersøke oppførselen til membranen i to dimensjoner. Vi er spesielt interessert i innvirkningen til de fleksible modene.

5.1 Membran i to dimensjoner

Vi kan tenke på koeffisientene for addert masse og dempning som vektorer som bestemmer innflytelsen de har på bevegelsen til membranen. Det er tydelig av figur 4.1 at hiving har den største koeffisienten for de adderte massene. Samtidig viser grafen at den første symmetriske moden har omtrent halvparten så stor koeffisient som hiving. Disse to modene har koeffisienter som er betydelig større enn koeffisientene til de andre modene. Det er interessant å merke seg at den første fleksible moden har større koeffisient enn en stiv mode som stamping. Dette er et tegn på viktigheten av membranens fleksibilitet.

Dette mønsteret gjentar seg. Hiving dominerer også dempningen som vi ser i figur 4.2. Den første symmetriske moden har igjen omtrent halvparten så stor koeffisient. Nok en gang kan vi merke oss at en fleksibel mode får større koeffisient enn en stiv mode som stamping. Legg merke til at dempingsko-

effisienten for hiving ikke konvergerer mot null for lange bølger. Dette er en ufysisk oppførsel, og kommer av at dette er en modell i to dimensjoner. I tre dimensjoner observerer vi ikke dette. Riktig oppførsel ser vi i figur 6.24 i [7].

Hiving utgjør den mest betydelige eksitasjonen. Det ser vi i figur 4.3. Det er åpenbart at hiving spiller en sentral rolle i systemets dynamikk. Fra eksitasjonsgrafen kan vi ensee en tendens blant de fleksible modene. For lange bølger blir kun de symmetriske modene eksitert. Korte bølger eksiterer alle membranens moder. I figur 4.4 ser vi eksitasjonen beregnet gjennom Haskinds relasjon (2.70). Vi ser at beregningene samsvarer, noe som styrker resultatene.

Strekket viser seg å være ubetydelig for addert masse, dempning og eksitasjon. Det er klart fra integralene som definerer dem. De er uavhengig av strekket. Derimot er strekket kritisk for responsen (RAO) til modene. Figur 4.5 viser at responsen til de fleksible modene blir neglisjerbar ved høye strekk. I slike tilfeller opptrer responsen kun i de stive modene, som forventet. Ved lavt strekk forventes derimot økt respons i de fleksible modene, som demonstrert i figur 4.6. I samme graf er trenden til de fleksible modene klar. Lange bølger gir betydelig respons i de symmetriske modene. På åpent hav har de lange bølgene mest energi. Korte bølger vil bryte dersom de blir for energirike og amplituden blir for stor. Det tyder på at symmetriske moder er spesielt interessante. På den andre siden vil korte bølger gi stor respons for antisymmetriske moder. Korte bølger gir også respons til stamping. Endringer i responsen for hiving og stamping er små ved varierende strekk. Kurvene for stort og lite strekk følger omtrent samme mønster, selv om lavt strekk finjusterer responsen. Spesielt kan lavt strekk resultere i økt hiving sammenlignet med en stiv membran, noe som kan oppfattes som bemerkelsesverdig.

De fleksible modene har en stor betydning. Generelt sett er det lavfrekvente moder som er av særlig relevans. Økende egenfrekvens fører til redusert addert masse, dempning og eksitasjon.

5.2 Refleksjon og transmisjon

Refleksjon er interessant av tekniske årsaker. Generelt blir korte bølger reflektert når de møter frie geometrier imens lange bølger går rett forbi. Det samme observerer vi for vår membran. I Figur 4.7 presenteres koeffisientene for refleksjon og transmisjon for en relativt stiv membran. Det er tydelig at refleksjonen overstiger transmisjonen for bølger med bølgelengde rundt $\nu L \simeq 1.5$. Dette indikerer at for bølger som er kortere enn dette blir mesteparten av energien reflektert tilbake.

I Figur 4.8 undersøker vi koeffisientene for refleksjon og transmisjon for en mer fleksibel membran. Her observerer vi effekter av de fleksible modene, og det er spesielt interessant å merke seg at økningen i refleksjon nå oppstår ved kortere bølgelengder sammenlignet med en stiv membran. Dette anty-

der at de fleksible modene gjør det mulig for kortere bølger å passere forbi membranen.

Det er imidlertid viktig å påpeke at koeffisientene for de aller korteste bølgene kan være feilberegnet, som indikert av summen $|\hat{R}/A|^2 + |\hat{T}/A|^2$. Der- som denne summen overstiger 1, indikerer det at energien i systemet ikke er bevart. For å forbedre nøyaktigheten av disse beregningene, kan det være hensiktsmessig å øke oppløsningen på membranen. Det går selvsagt på be- kostning av beregningstid.

5.3 Porøsitet

I grafene med porøs membran, ser vi at fine porer gir små justeringer i de forskjellige størrelsene. Vi begrenser diskusjonen her til å fokusere på endringer ved hiving, men det antas at de andre modene oppfører seg på en lignende måte. Figur 4.9 viser den adderte massen for en ugjennomtrengelig membran og en membran med små porer. For alle bølgetall observerer vi at porøsiteten resulterer i en justering nedover i den adderte massen, noe som er i tråd med forventningene. Intuitivt kan vi forestille oss at mindre vann må akselereres i takt med membranens bevegelse når porøsiteten øker.

I Figur 4.10 presenteres dempningen for membraner med og uten porøsi- tet. Vi observerer at dempningskoeffisientene øker når porøsiteten introduse- res, og denne effekten forsterkes med kortere bølgelengder. Dette samsvarer med forventningen om at en porøs membran dempes mer enn en ugjennom- trengelig membran.

Eksitasjonskraften reduseres når membranen er porøs. Det fremgår av Figur 4.11. Endringer i dempning og eksitasjon er viktig for den tekniske utformingen av soløyer.

Figur 4.12 viser responsen i hiv-moden for membraner med og uten po- røsitet. Responsen reduseres, og dette resultatet er av stor betydning for modelleringen av flytende soløyer. En lav respons indikerer at membranen utsettes for mindre påkjenninger sammenlignet med en ugjennomtrengelig membran. Dette betyr at det kreves mer kraft for å skade en porøs membran enn en solid membran.

Vi har benyttet Darcys lineære modell i beregningene våre. Det er viktig å påpeke at denne modellen er gyldig kun for geometrier med fin porøsitet, der kanalene må være svært små. I den virkelige verden er kanalene ofte ikke små nok til at den lineære modellen er fullt ut gyldig. Til tross for dette kan vi forvente at en kvadratisk modell vil gi justeringer i samme retning som den lineære Darcy-modellen.

5.4 Kvadratisk membran

La oss gå over til tre dimensjoner. Vi undersøker oppførselen til en rektangulære membran. I figur 4.13, der koeffisientene for addert masse er presentert, ser vi tydelig at den mest betydningsfulle koeffisienten tilhører hivingen. Fra samme graf ser vi også at alle de første fleksible modene, uansett om de er symmetriske eller antisymmetriske, har større koeffisient enn det stamping og rulling har. Akkurat som i to dimensjoner ser vi tegnet på at fleksibilitet er viktig.

I figur 4.14 blir dempningskoeffisientene illustrert. Når det gjelder lange bølger, er de mest betydningsfulle koeffisientene knyttet til hivingsbevegelsen og den første symmetriske moden. Som forventet reduseres dempningen til null for svært lange bølger. På den annen side, for korte bølger dominerer hivingsbevegelsen, men til og med denne er svært begrenset. Dette indikerer at det er relativt lite dempningseffekt ved korte bølgelengder.

Hiving utgjør den mest betydelige eksitasjonen. Det ser vi i figur 4.15. Fra eksitasjonsgrafen kan vi nok en gang se en trend blant de fleksible modene. For lange bølger blir kun de symmetriske modene eksitert. Korte bølger eksiterer alle membranens moder.

I figur 4.16 ser vi responsen til en rektangulær membran med stort strekk. Akkurat som i to dimensjoner ser vi at responsen til de fleksible modene er så god som null.

Dynamikken blir mer interessant når strekket reduseres, som illustrert i figur 4.17 for en avslappet membran. Her observerer vi en økt respons fra de fleksible modene, som også bidrar til økt respons i hiving-moden for mellomlange og korte bølger. Den første symmetriske modene får stor respons for lange bølger, noe som er av betydning for membranens bevegelse. For kortere bølger forblir forholdet mellom hiving og første symmetriske mode lik, men membranen får et betydelig utslag for stamping.

5.5 Videre forskningsperspektiver

I denne oppgaven har vi gjort flere interessante funn knyttet til den ledende oppførselen til membranen. En grundigere studie av den sirkulære membranen ville være ønskelig for å oppnå en mer inngående forståelse. Spesielt har porøsiteten i tre dimensjoner vist seg å være en fascinerende faktor som fortjener ytterligere utforskning.

Det er essensielt å påpeke at selv om teoretiske modeller gir verdifulle innsikter, er det nødvendig å teste disse modellene eksperimentelt. Eksperimenter spiller en avgjørende rolle i å validere og forbedre våre teoretiske antakelser. Derfor er spørsmålet om bølgelengder og strekk også relevante i laboratorie. Er disse parameterene like viktige som våre funn antyder? Påvirker de membranen på en lignende måte som våre teoretiske modeller

indikerer?

En utforskning av bølgelengder og strekk i laboratorieeksperimenter vil kunne bidra til å bekrefte eller avkrefte våre teoretiske funn. Dette vil ytterligere styrke validiteten av våre konklusjoner og gi et mer helhetlig bilde av hvordan membranen reagerer under ulike påvirkninger. På denne måten kan vi utvide vår forståelse av membranens oppførsel og potensielt identifisere nye aspekter som tidligere ikke ble vurdert.

Kapittel 6

Konklusjon

Vår analyse av den todimensjonale og tredimensjonale dynamikken til membraner på frie overflater har resultert i flere betydningsfulle funn.

Bølgetall og strekk viser seg å være de sentrale parameterne som styrer membranens oppførsel. Endringer i disse parameterne har markante konsekvenser for systemets dynamikk, og det er avgjørende å ta dem med i betraktning ved analyse og tolkning av resultatene.

En tydelig trend ble identifisert for de fleksible modene, der symmetriske moder ble viktige for lange bølger, mens antisymmetriske moder ble betydningsfulle for korte bølger.

Responsten til membranen (RAO) er svært sensitiv for endringer i strekket. Dette understreker viktigheten av å grundig vurdere strekket som en vesentlig variabel ved evaluering av responsten til membransystemet. Koeffisientene som representerer addert masse, dempning og eksitasjon forblir imidlertid uavhengige av strekket.

Vi observerte også at lavere strekk på membranen resulterte i mindre refleksjon hos bølger med kortere bølgelengder. Dette førte til færre reflekterte bølger i systemet.

Innføring av porøsitet i membranen viser seg å øke dempingen, noe som kan ha betydelige implikasjoner for langtidseffekter og energitap i systemet. Samtidig reduserer porøsitet påkjenningene på membranen. Denne observasjonen peker mot potensielle fordeler for membranens levetid og motstandsdyktighet, spesielt under påvirkning av eksterne belastninger.

Samlet sett gir disse funnene en dypere forståelse av den koblede dynamikken til membraner og frie overflater, og de legger et grunnlag for videre utforskning og anvendelser av denne teknologien.

Figurer

| | | |
|------|--|----|
| 2.1 | Skisse av membran på fri overflate. | 4 |
| 2.2 | Skisse av kreftene som virker på et flatestykke av membranen. | 5 |
| 2.3 | Membranens moder i to dimensjoner. Mode 0 og 1 er stive. Alle andre er fleksible. Her vises alle moder opp til $n = 5$. . . | 7 |
| 2.4 | Skisse av kreftene som virker på et flatestykket av membranen. | 8 |
| 2.5 | Her ser vi noen av de mange fleksible modene til en kvadratisk membran med låste ender. | 10 |
| 2.6 | Her ser vi noen av de mange fleksible modene til en sirkulær membran med låste ender. | 12 |
| 2.7 | Skisse av den lukkede integralflaten \mathcal{S} i to dimensjoner og delflatene vi deler integralet inn i. Aksekorset ligger ikke i origo, men illustrerer retningene. | 15 |
| 2.8 | Skisse av den lukkede integralflaten \mathcal{S} i tre dimensjoner og delflatene vi deler integralet inn i. Aksekorset ligger ikke i origo, men illustrerer retningene. | 16 |
| 2.9 | Grensesjiktets hastighetsprofil for radiasjon. | 32 |
| 2.10 | Grensesjiktets hastighetsprofil for diffraksjon. | 32 |
| 3.1 | Skisse av mulig diskretisering av den lukkede integralflaten S_b i to dimensjoner. Punktene viser endepunktene til pane- lene. Her er det eksempelvis $N_s = 2$ sidepaneler og $N_b = 6$ bunnpaneler. | 34 |
| 3.2 | Venstre og høyre side av integrallikningen for potensialet til de innkommende bølgene. | 36 |
| 4.1 | Addert masse for membran i to dimensjoner. | 38 |
| 4.2 | Dempning for membran i to dimensjoner. | 39 |
| 4.3 | Eksitasjon for membran i to dimensjoner. | 40 |
| 4.4 | Eksitasjon for membran i to dimensjoner med Haskind relasjon. | 41 |
| 4.5 | Responsen til en relativt stiv membran. Strekket er $T/\rho g =$ 10^2m^2 | 42 |
| 4.6 | Responsen til en slapp membran. Strekket er $T/\rho g = 10^{-2} \text{m}^2$. | 43 |
| 4.7 | Koeffisienter for refleksjon og transmisjon for en membran med strekk $T/\rho g = 10^2 \text{m}^2$ | 44 |

| | | |
|------|--|----|
| 4.8 | Koeffisienter for refleksjon og transmisjon for en membran med strekk $T/\rho g = 10^{-2}\text{m}^2$ | 45 |
| 4.9 | Addert masse for hiving med og uten porøsitet. | 46 |
| 4.10 | Dempning for hiving med og uten porøsitet. | 47 |
| 4.11 | Eksitasjon for hiving med og uten porøsitet. | 48 |
| 4.12 | Amplitude-respons for hiving med og uten porøsitet. | 49 |
| 4.13 | Addert masse for en kvadratisk membran. | 50 |
| 4.14 | Dempning for en kvadratisk membran. | 51 |
| 4.15 | Eksitasjon for en kvadratisk membran. | 52 |
| 4.16 | Responsen til en stiv kvadratisk membran. Strekket er $T/\rho g = 10^2\text{m}^2$ | 53 |
| 4.17 | Responsen til en stiv kvadratisk membran. Strekket er $T/\rho g = 10^{-1}\text{m}^2$ | 54 |

Bibliografi

- [1] ESMAP World Bank Group og SERIS. *Where Sun Meets Water: Floating Solar Market*. Washington, DC: Addison Wesley, 2018.
- [2] I. H. Cho og M. H. Kim. “Interactions of a Horizontal Flexible Membrane With Oblique Incident Waves”. I: *Journal of Fluid Mechanics* (1998).
- [3] I. H. Cho og M. H. Kim. “Interactions of Horizontal Porous Flexible Membrane With Waves”. I: *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering* (2000).
- [4] M. Mukhlas mfl. “Bag and Floater Motions of a Fabric Membrane Cage”. I: *Journal of Fluids and Structures* (2021).
- [5] G. Sutherland mfl. “The Attenuation of Monochromatic Surface Waves Due to the Presence of an Inextensible Cover”. I: *Wave Motion* (2016).
- [6] K. Trapani og D. L. Millar. “Hydrodynamic Overview of Flexible Floating Thin Film PV Arrays”. I: *Offshore Energy and Storage Symposium* (2016).
- [7] J. N. Newman. *Marine Hydrodynamics*. MIT Press, 2017.
- [8] J. N. Newman. “Algorithms for the Free-Surface Green function”. I: *Journal of Engineering Mathematics* (1984).
- [9] J. N. Newman. “An Expansion of the Oscillatory Source Potential”. I: *Applied Ocean Research* (1984).
- [10] J. Grue. “Topics in Marine Hydrodynamics with Numerical Methods and MATLAB Scripting”. I: *Lecture notes* (2023).
- [11] A. A. Korobkin og T. I. Khabakhpasheva. “Regular Wave Impact onto an Elastic Plate”. I: *Journal of Engineering Mathematics* (2006).
- [12] D. M. Skene mfl. “Modelling Water Wave Overwash of a Thin Floating Plate”. I: *Journal of Fluid Mechanics* (2015).
- [13] J. Nossen, J. Grue og E. Palm. “Wave Forces on Three-Dimensional Floating Bodies with Small Forward Speed”. I: *Journal of Fluid Mechanics* (1991).
- [14] J. D. Logan. *Applied Mathematics*. John Wiley & Sons, 2013.

- [15] J. Dokken, J. Grue og L. P. Karstensen. “Wave Analysis of Porous Geometry with Linear Resistance Law”. I: *Journal of Marine Science and Application* (2017).
- [16] B. Molin. “Hydrodynamic Modeling of Perforated Structures”. I: *Applied Ocean Research* (2010).
- [17] J. S. Dokken, J. Grue og L. P. Karstensen. “Wave Forces on Porous Geometries with Linear and Quadratic Pressure-Velocity Relations”. I: *The 32nd International Workshop on Water Waves and Floating Bodies* (2017).
- [18] E. Mackay, H. Liang og L. Johanning. “A BEM Model for Wave Forces on Structures with Thin Porous Elements”. I: *Journal of Fluids and Structures* (2020).
- [19] F. White. *Viscous Fluid Flow*. McGraw Hill, 2022.