

**IKKELINEÆR BØLGEANALYSE AV  
BUNNFAST SLANK SYLINDER**

av

**TRINE JELSTAD OLSEN**

**MASTEROPPGAVE**

*for graden*

**MASTER I ANVENDT MATEMATIKK OG MEKANIKK**

*(Master of Science)*



*Avdeling for mekanikk*

*Matematisk institutt, Universitetet i Oslo*

*Mai 2010*

*Det matematisk- naturvitenskapelige fakultet*

*Universitetet i Oslo*



**IKKELINEÆR BØLGEANALYSE AV  
BUNNFAST SLANK SYLINDER**

av

**TRINE JELSTAD OLSEN**



## Sammendrag

Diffraksjonsproblemet for en vertikal sylinder som skjærer en fri overflate er løst til og med tredje orden ved hjelp av perturbasjonsteori i langbølgeregimet i tråd med FNV teori.

Det ikkelineære hastighetspotensialet til bølgespredningen er beregnet numerisk i på sylindren og i feltet ved den frie overflaten. Beregningen stemmer godt overens med resultatene til FNV. Effekten av den ikkelineære bølgespredningen på overflatehevning, trykk, bølgekrefter og veltende moment på sylindren er analysert for innkommende monokromatiske bølger.

Spesielt er effekten av andre ordens bølgespredning på trykkfeltet langs sylindren og effekten av tredjeordens bølgespredning på overflatehevingen analysert. Det andreordens trykket på sylindren avtar langsomt og trenger ned til store dyp.

Det høyere harmoniske momentet på sylindren svinger i fase med den høyere harmoniske bølgelasten og effekten er at de forsterker hverandre.

FNVs teori gir gode estimater av utslaget til den tredjeharmoniske bølgekraften på sylindren, i sammenlikning med målinger utført av Huseby & Grue, mens den estimerte fasen til lasten avviker betydelig fra målinger. Avviket mellom den tredjeharmoniske bølgekraften estimert av FNV og Malenica & Molin består hovedsakelig i avvik i fasen til lastene.

Overflatehevning og bølgekrefter på sylindren i irregulær bølger er simulert ved hjelp av JONSWAP og Torsethaugens bølgespekter. De ikkelineære bølgekraftene på sylindren i simulerte havbølger er av samme størrelsesorden eller større enn første ordens bølgelast.



# Innhold

<b>Forord</b>	<b>III</b>
<b>1 Innledning</b>	<b>1</b>
1.1 Introduksjon . . . . .	1
1.2 Metode og gjennomføring . . . . .	3
<b>2 Randverdiproblemet</b>	<b>5</b>
<b>3 Regulære bølger mot en vertikal bunnfast sylinder</b>	<b>8</b>
3.1 Lineær analyse . . . . .	8
3.1.1 Lineær løsning . . . . .	9
3.2 Ikkelineær analyse . . . . .	15
3.2.1 Det ikkelineære randverdiproblemet . . . . .	16
3.2.2 Webertransformen . . . . .	20
3.2.3 Analytisk løsning av den Webertransformerte, $F_m(K)$ . . . . .	22
3.2.4 Anvendelse av Greens teorem . . . . .	23
3.2.5 Numerisk beregning av Webertransformparet $F_m(K)$ og $\Psi_m(R, Z)$ . . . . .	25
3.2.6 Numeriske resultater av komponentene $\Psi_m$ . . . . .	25
3.2.7 Asymptotiske uttrykk for komponentene $\Psi_m$ . . . . .	26
3.2.8 Evaluering av det fullstendige ikkelineære potensialet $\Psi$ i feltet . . . . .	28
3.3 Trykket på sylindere . . . . .	34
3.4 Overflatehevning i feltet og oppskylling på sylindere . . . . .	39
3.5 Hydrodynamiske bølgekrefter . . . . .	46
3.6 Moment . . . . .	55
3.7 Sammenlikning med diskusjon . . . . .	59
3.8 Supplerende figurer av overflatehevning . . . . .	62
<b>4 Irregulære bølger mot en vertikal bunnfast sylinder</b>	<b>65</b>
4.1 Lineær analyse . . . . .	66
4.2 Overflatehevning . . . . .	68
4.3 Ikkelineær analyse . . . . .	69

4.4	Bølgelaster på cylinderen i irregulære bølger . . . . .	70
4.5	Bølgespekter . . . . .	72
4.5.1	JONSWAP spekter . . . . .	75
4.5.2	Torsethaugen spekter . . . . .	75
4.5.3	Implementering . . . . .	78
4.6	Resultater fra simuleringen av irregulære bølger mot en slank vertikal cylinder	79
4.7	Figurer . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Konklusjon</b>	<b>90</b>
<b>A</b>		<b>93</b>
A.1	Besselutviklinger . . . . .	93
<b>B</b>		<b>95</b>
B.1	Hjelperelasjoner . . . . .	95
<b>C</b>		<b>97</b>
C.1	Lommelfunksjoner . . . . .	97
<b>D</b>		<b>99</b>
D.1	Numerisk evaluering av de ikkelineære potensialene $\Psi_m$ . . . . .	99
D.1.1	Behandling av singulariteter . . . . .	99
D.1.2	Nullpunkt i Besselfunksjoner . . . . .	100
D.1.3	Beregning av $F_m$ . . . . .	101
D.1.4	Resultater for $F_m(K)$ . . . . .	102
D.1.5	Beregning av $\Psi_m$ . . . . .	103
D.1.6	Implementeringsparametre og kommentarer til implementering . . . . .	104
D.2	Figurer . . . . .	104
D.3	Romberg integrasjon . . . . .	104
<b>E</b>		<b>110</b>
E.1	Høyere ordens moment . . . . .	110
<b>F</b>		<b>113</b>
F.1	Notasjon . . . . .	113



# Forord

Denne oppgaven er skrevet med støtte fra flere hold. I arbeidet med masteroppgaven vil jeg takke min veileder John Grue for veiledning og oppfølging.

I tillegg vil jeg gjerne takke professor Karsten Trulsen og professor emeritus Bjørn Gjevik for gode råd og stipendiater Odin Gramstad og Magnus Vartdal for støtte underveis. Sist men ikke minst vil jeg takke familie og gode venner som har støttet meg underveis og mine humørfylte medstudenter på lesesalen.

Trine Jelstad Olsen  
Oslo, Mai 2010



# Kapittel 1

## Innledning

### 1.1 Introduksjon

Beregning av bølgelaster på konstruksjoner til havs er av stor praktisk betydning for offshoreindustrien i forbindelse med sikkerheten og levetiden til konstruksjonen. Levetiden til konstruksjonen avhenger av at materialene kan motstå belastningene den blir utsatt for over lang tid og bestemmes ved hjelp av utmatningsanalyser. De kraftigste belastningene på konstruksjoner til havs er transiente, det vil si kortvarige i tid, men til gjengjeld kan de forårsake store utslag i responsen til konstruksjonen. Konstruksjonens sikkerhet avhenger av at den også kan motstå de kraftige og kortvarige bølgebelastningene som følge av sterk og ekstrem sjø.

Store plattformer og vindmøller til havs består ofte av vertikale sylindrer med radius av størrelsesorden  $a = 10\text{m}$  som stikker dypt ned i sjøen. Den naturlige perioden, eller resonansperioden, til en strekkstagplattform (TLP - Tension Leg Platform) kan være på mellom 3 – 5 sekunder i bevegelesene hiv, rulling og stamp. Store konstruksjoner som står fast på havbunnen i dypt vann med gravitasjonsunderstell (GBS - Gravity Based Structures) har ofte høy egenperiode på mellom 3 – 6 sekunder.

I en normal sjøtilstand på åpent hav er bølgeamplituden ofte av størrelsesorden  $A = 2\text{m}$  og bølgelengden  $\lambda$  på 100 – 200m og med bølgeperioder på 8 – 11 sekunder. I steil sjø kan derimot bølgeamplituden være av størrelsesorden  $A = 10\text{m}$ , mens bølgelengden  $\lambda$  kan være 200 – 400m og bølgeperioden 11 – 16 sekunder (Newman (1996a) [15]). Bølgesteillheten  $kA$  er et uttrykk for forholdet mellom bølgeamplituden og bølgelengden, er  $k = 2\pi/\lambda$  er bølgetallet.

Bølgene i både normal og steil sjø som beskrevet over er med andre ord lange i forhold til både sylinderradien og bølgeamplituden og dette karakteriseres som *langbølgeregimet* (Faltinsen et al. [24]).

I steil sjø kan TLP og GBS plattformer oppleve kortvarig resonant respons med store ut-

slag som oppstår raskt og dempes langsomt. Fenomenet er kjent som *ringing* og er observert og omtalt av blant andre Krogstad og Stansberg [19] og Huseby & Grue [23]. Ringing kan forekomme i bølgefelt uten bølgebrytning og med moderat bølgesteilhet, som beskrevet av Grue & Huseby [27].

Ringning oppstår med andre ord i et regime der bølgenes periode ligger langt over konstruksjonens egenperiode. Dette impliserer sterke ikkelineære effekter i bølgekreftene på sylindere med harmonier av minst tredje orden.

For en slank sylinder i lange havbølger som beskrevet over er sylinderradien mye mindre enn bølgelengden og ved Newman (1977, kapittel 2.13) [14] kan viskøse krefter neglisjeres til fordel for treghetskrefter på sylindere. Potensialteori kan dermed anvendes for å analysere effekten av havbølger på store offshore konstruksjoner.

Ledende ordens laster på slanke legemer i lange bølger kan ved hjelp av treghetsleddet i den velkjente Morisons likning [28] og tilnærmingen er vist blant annet av Grue et al. å stemme godt overens med målinger.

Da ringing er observert i lange bølger med  $kA \sim .15 - .30$  har det gitt opphav til teorier som bygger på perturbasjonstilnæringer i beregningen av høyere harmoniske laster. Vi skiller mellom *diffraksjonsregimet* der bølgeamplituden  $A$  er mye mindre enn bølgelengden,  $kA \ll 1$ , og *langbølgerregimet* der både bølgeamplituden og sylinderradien  $a$  er mye mindre enn bølgelengden  $ka \ll 1$ .

Andre ordens løsninger av i diffraksjonsregimet  $kA \ll 1$  som gitt av Chau & Eatock-Taylor [30] og Newman [16], heretter Newman (1996b), er veletablerte metoder for beregning av laster som kan forårsake *springing* i flytende strekkstagplattformer. Springing defineres som resonant vibrasjon i strekkstagplattformer som gir aksiale deformasjoner i fortøyningskablene.

Faltinsen & al. [24], heretter FNV, har introdusert en perturbasjonsteori i *langbølgerregimet* for estimering av tredje ordens og tredjeharmoniske laster på en slank sylinder i dypt vann. Teorien er utvidet for irregulære bølger av Newman [15] og vil heretter betegnes Newman (1996a). Faltinsen [6] har generalisert FNVs teori for slanke legemer med generelle tverrsnitt. Malenica & Molin [35], heretter M&M, har utviklet en tredje ordens perturbasjonsteori i *diffraksjonsregimet* og beregnet lastene opp til tredje orden i bølgeamplituden for en sylinder av tilfeldig radius. M&M tar hensyn til effekten av endelig dyp i problemet.

Fullstendig ikkelineær analyse av høyere ordens bølgelaster er utviklet av bl.a. Ferrant [cite](#) og Liu et al. [17].

For å etablere gyldigheten av de eksisterende perturbasjonsteoriene til FNV og M&M og den eksakte løsningsmodellen til Ferrant, har Huseby & Grue [23] utført eksperimenter for sammenlikning av teoriene.

Som følge av forenklingene i FNVs teori er den relativt enkel å implementere og brukes i utstrakt grad i industrien for å anslå høyere harmoniske laster på slanke legemer som kan forårsake ringing. DNV [4] og [3] anbefaler langbølgetilnærmingen til FNV for estimering av tredjeharmoniske laster som kan forårsake ringing i store konstruksjoner i diffraksjonsregimet. For beregning av første og andre ordens løsninger med tilhørende første og andre ordens laster anbefaler DNV bruk av fullstendige diffraksjonsmodeller.

## 1.2 Metode og gjennomføring

Formålet med denne avhandlingen er å se nærmere på metoden til FNV [24] og Newman (1996a) [15] og å utvide analysen av den ikkelineære bølgespredningen rundt en vertikal sylinder og effekten av denne.

Jeg utvider analysen til FNV for regulære bølger ved å beregne det ikkelineære hastighetspotensialet til tredje orden i sin helhet. I tillegg til å beregne bølgekreftene som virker på sylindren som presentert av FNV, undersøker jeg effekten av den lineære og den ikkelineære bølgespredningen på trykkfeltet, det veltende momentet og overflatehevningen i området nær sylindren.

I utvidelsen av Newmans artikkel (1996a) undersøker jeg effekten av bølgespredningen rundt en sylinder i irregulære havbølger ved å simulere havbølger ved hjelp av analytiske bølgespektre.

I kapittel 2 formulerer jeg randverdiproblemet for en slank bunnfast sylinder på dypt vann og presenterer forutsetningene for analysen i tråd med FNV. Kapittel 3 tar for seg perturbasjonsløsningen av randverdiproblemet for sylindren i regulære bølger. I avsnitt (3.1.1) utleder jeg den lineære perturbasjonsløsningen til FNV i detalj.

Avsnitt 3.2.1 tar for seg utviklingen av det ikkelineære randverdiproblemet i det indre området som beskrevet av FNV. I avsnitt 3.2.8 beskriver jeg metoden som benyttes i løsningen av det ikkelineære randverdiproblemet og presenterer mine beregninger av løsningen.

Løsningen av den ikkelineære overflatebetingelsen tilrettelegges ved hjelp av Webertransformen av de drivende funksjonene i den ikkelineære overflatebetingelsen. Bakgrunnen for Webertransformen og uttrykket for løsningen ved hjelp av den Webertransformerte er beskrevet i 3.2.2. Det ikkelineære potensialet som representerer den ikkelineære bølgespredningen rundt sylindren beregnes i sin helhet ved hjelp av Romberg integrasjon og løsningsprosedyren er forklart i detalj i tillegg D.1. Resultatene av mine beregninger av det ikkelineære potensialet og diskusjon av resultatene er presentert i avsnitt 3.2.6 og 3.2.7. I avsnitt 3.4 til 3.6 er effektene av det lineære og ikkelineære diffraksjonspotensialet på trykket, overflatehevningen, bølgekreftene og momentet på sylindren beregnet og presentert. Diskusjon av beregningene med figurer er inkludert i hvert respektive avsnitt. Sentrale

figurer er inkludert underveis i avsnittene.

I avsnitt 3.7 er FNVs tredjeordens teori i langbølgeregimet sammenliknet med Newmans (1996b) andreordens teori og Malenica & Molins tredjeordens teori i diffraksjonsregimet og med eksperimentelle målinger utført av Huseby & Grue.

I kapittel 4 går jeg gjennom Newmans (1996a) generalisering av FNVs metode for implementering i irregulære bølger. Variasjonen av overflatehevningen og bølgelastene i tidsplanet er simulert vha JONSWAP [4] og Torsethaugens [31] bølgespekter. Størrelsesorden av de høyereordens bølgekraftene relativ til de førsteordens bølgekraftene er sammenliknet for hver simulering.

Notasjonen er forklart i tillegg F.1.

## Kapittel 2

# Randverdiproblemet

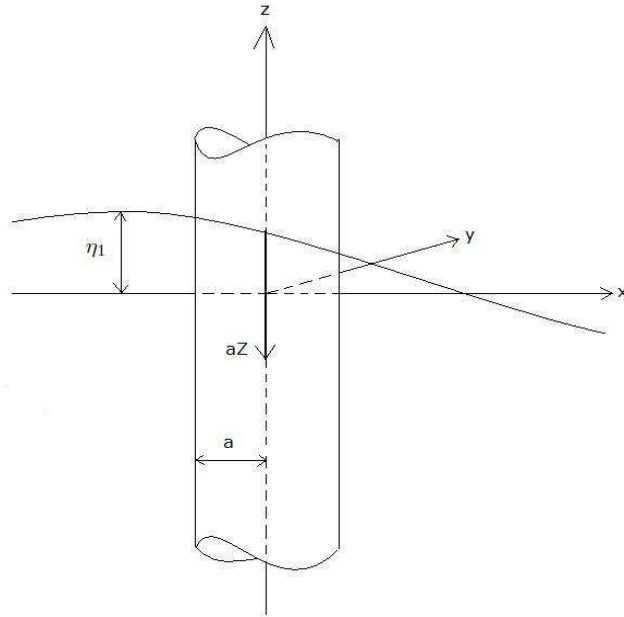
I dette kapitlet introduseres randverdiproblemet og perturbasjonsantagelsene som ligger til grunn for FNVs teori.

En sylinder med konstant radius  $a$  står fastmontert på havbunnen og skjærer gjennom den frie overflaten. Vi antar at vannets dybde  $h$  er mange ganger større enn bølgelengden slik at det kan tilnærmes med å være uendelig dypt ( $kh \rightarrow \infty$ ). Det kartesiske koordinatsystemet er definert i figur 2.1 der det horisontale  $xy$ -planet sammenfaller med stille vannsnivået. Den vertikale  $z$ -aksen sammenfaller med sylinderaksen og er positiv over stille vannsnivået. Origo ligger i skjæringspunktet mellom  $xy$ -planet og sylinderaksen. Den indre koordinaten  $Z$  er tegnet inn og forklares i avsnitt 3.2.1. Sylinderkoordinater  $(r, \theta, z)$  introduseres etterhvert der  $\theta = 0$  korresponderer med punktet  $(x, y, z) = (a, 0, 0)$  og den radielle koordinaten peker ut av sylinderflaten.

Fluidet som omgir sylinderen antas å være inkompressibelt, friksjonsfritt og virvelfritt slik at hastighetsfeltet kan beskrives ved hjelp av gradienten til hastighetspotensialet  $\mathbf{v} = \nabla\phi$ . Som i Huseby & Grue [23] kan viskøse krefter neglisjeres for tilstrekkelig høye Reynoldstall og så lenge bølgeamplituden ikke overgår sylinderdiameteren.

Vi betrakter diffraksjon av vannbølger rundt sylinderen som følge av regulære og irregulære innkommende bølger. Overflatehevningen og hastighetspotensialet rundt sylinderen uttrykkes ved hjelp av bølgeamplituden  $A$ , bølgetallet  $k = 2\pi/\lambda$ , vinkelfrekvensen  $\omega$  og tyngdens akselerasjon  $g$ . Bølgeamplituden og sylinderdiameteren antas å være av samme størrelsesorden og begge er små i forhold til bølgelengden slik at  $ka$  og  $kA$  er av orden  $\epsilon \ll 1$ . Dette kalles *langbølgeregimet*.

Fluiddomenet deles inn i et indre område der  $kr = \mathcal{O}(a)$  eller  $r/a = \mathcal{O}(1)$  og et ytre område som er definert ved  $kr = \mathcal{O}(1)$ . I det ytre domenet er lineær teori tilstrekkelig for å beskrive det innkommende bølgefeltet ved betingelsen  $kA \ll 1$ . Som følge av forutsetningen  $ka \ll 1$  vil effekten av bølgespredningen rundt sylinderen være begrenset til det indre området hvor



Figur 2.1: Skisse av sylinder med konfigurering av ytre og indre koordinatsystem.

det introduseres et sett med indre koordinater.

Randverdioproblemet for hastighetspotensialet  $\phi$  og overflatehevningen  $\eta$  består av Laplace' feltlikning (2.1) i hele fluiddomenet og grenseflatebetingelser ved den frie overflaten og på sylindere og er beskrevet i Newman (1977, kap. 4 og 6) [14]. Den materielt deriverede av trykket på overflaten er lik null  $Dp/dt = 0$ . I kombinasjon med (2.3) beskriver betingelsen (2.2) til ledende orden bølgekinematikken ved overflaten. Den dynamiske betingelsen (2.3) beskriver kreftene ved den frie overflaten og uttrykkes ved hjelp av Bernoullis trykklikning. Ved den frie overflaten  $z = \eta$  antar vi at trykket er konstant og lik det atmosfæriske trykket. Normalhastigheten er lik null på sylinderveggen (2.4) og hastighetsfeltet avtar mot null i dypet (2.5).

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad -\infty < z < \eta \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2\nabla \phi \cdot \nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla |\nabla \phi|^2 + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad z = \eta \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + gz = 0 \quad z = \eta \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad r = a \quad (2.4)$$

$$\phi \rightarrow 0 \quad z \rightarrow -\infty \quad (2.5)$$



Spredningskomponentene, under samlingsbetegnelsen  $\phi_{SS}$ , av hastighetspotensialet  $\phi$  representerer utgående bølger i fjernfeltet,  $r \rightarrow \infty$  slik at

$$\phi_{SS} \propto \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-ikr}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

ved hjelp av energibevaring Newman (1997, likning (6.128)). Det fullstendige randverdiproblemet (2.1)-(2.6) er kjent som diffraksjonsproblemet.

Den eksakte løsningen av diffraksjonsproblemet tilnærmes ved hjelp av perturbasjonsutvikling av løsningen i potenser av den dimensjonsløse perturbasjonsparameteren  $\epsilon \ll 1$ . I det tradisjonelle diffraksjonsregimet  $ka = \mathcal{O}(1)$  er sylinderadien av tilfeldig størrelsesorden og perturbasjonsutviklingen utføres i parameteren  $kA = \mathcal{O}(\epsilon)$ .

$$\phi = \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \phi^{(3)} + \dots \quad (2.7)$$

$$\text{og } \eta = \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \eta^{(3)} + \dots \quad (2.8)$$

der  $\phi^{(n)} = \mathcal{O}((kA)^n)$  og  $\eta^{(n)} = \mathcal{O}((kA)^n)$  og utviklingen er kjent som Stokesutvikling.

I langbølgeregimet der også  $ka \ll 1$  utvikles det i FNV en konsistent perturbasjonsutvikling i  $kA$  og  $ka$ . Det lineære diffraksjonspotensialet  $\phi^{(1)} = \phi_D$  deles i en komponent  $\phi_I$  som beskriver det innkommende bølgefeltet og  $\phi_S$  som beskriver bølgespredningen rundt sylinderen. I tillegg definerer vi den ikkelinære korreksjonen av spredningspotensialet  $\psi = \phi^{(2)} + \phi^{(3)}$  som er av ulike orden i  $kA$ , men av tredje orden i  $\epsilon$ . Det fullstendige hastighetspotensialet til og med orden av  $A^3$  og  $\epsilon^3$  skrives

$$\phi = \phi_D + \psi + \mathcal{O}(\epsilon^4) \quad (2.9)$$

Perturbasjonsutviklingen av overflatehevningen i langbølgeregimet skrives

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \dots \quad (2.10)$$

der  $\eta_n = \mathcal{O}(\epsilon^n)$ . Ved å sette inn perturbasjonsrekkene (2.9) og (2.10) i randverdiproblemet og sortere ledd i orden av  $\epsilon$  får vi veldefinerte randverdiproblem for hver av komponentene  $\phi_I$ ,  $\phi_S$ ,  $\psi$  og  $\eta_n$ . Orden av løsningene refererer til orden i  $A$ . Når dimensjoner betraktes antar vi at radius  $a$  og amplitude  $A$  er av størrelsesorden  $\epsilon$ , slik at  $k, \omega$  og  $g$  betraktes som  $\mathcal{O}(1)$  som i FNV. En viktig konsekvens av antagelsen  $A/a = \mathcal{O}(1)$  er at størrelser av ulik orden i  $A$  kan være av samme størrelsesorden, dvs i  $\mathcal{O}(\epsilon)$ .

## Kapittel 3

# Regulære bølger mot en vertikal bunnfast sylinder

### 3.1 Lineær analyse

Randverdiproblemet for det lineære diffraksjonspotensialet fremkommer ved linearisering av det ikkelineære randverdiproblemet (2.1)-(2.6). Lineariseringen baserer på antagelsen om at overflatehevingen er liten i forhold til bølgelengden og er gyldig for tilstrekkelig liten bølgesteilhet  $kA \ll 1$ . Overflatebetingelsene overføres fra den eksakte overflaten  $z = \eta$  til stille vannsnivået  $z = 0$  ved hjelp av Taylorutvikling av betingelsene om  $z = 0$ . For nærmere detaljer om linearisering av randverdiproblemet vises det til Newman (1997).

Som forklart i FNV er endringer i det innkommende hastighetsfeltet av  $\mathcal{O}(1)$  over en horisontal avstand  $r = \mathcal{O}(\lambda)$  mens den tilsvarende lengdeskalaen for spredningspotensialet i det indre området  $r = \mathcal{O}(a)$  er proporsjonal med sylinder radien  $a$ . Gradienten  $\nabla \propto 1/r$  i de respektive områdene vil følgelig være av ulik størrelsesorden. Det innkommende hastighetsfeltet er proporsjonal med  $A = \mathcal{O}(\epsilon)$  og med at normalhastigheten på sylinderen er null haes det at  $\phi_S$  må være proporsjonal med  $\omega A a = \mathcal{O}(\epsilon^2)$ . Med dette er randverdiproblemet veldefinert for hver av de lineære komponentene  $\phi_I = \mathcal{O}(\epsilon)$  og  $\phi_S = \mathcal{O}(\epsilon^2)$ .

Diffraksjonsbetingelsen (2.4) på sylinderen uttrykkes dermed til ledende orden

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial r} = -\frac{\partial \phi_S}{\partial r}, \quad r = a. \quad (3.1)$$

Strålingsbetingelsen til det lineære spredningspotensialet i fjernfeltet er fra (2.6)

$$\phi_S \propto \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-ikr}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Spredningspotensialet er i fjernfeltet en radielt utgående bølge med amplitude som avtar som  $r^{-1/2}$ . Betingelsen er uttrykt i sylinderkoordinater der  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

### 3.1.1 Lineær løsning

En mulig løsning for det innkommende bølgefeltet som forplanter seg i positiv  $x$ -retning er beskrevet av Newman (1997)

$$\phi_I(x, z, t) = \operatorname{Re}\left\{\frac{gA}{\omega}e^{kz} e^{-i(kx-\omega t)}\right\} \quad (3.3)$$

med tilhørende overflatehevning

$$\eta_1 = \operatorname{Re}\{-iAe^{-i(kx-\omega t)}\} = -A \sin(kx - \omega t). \quad (3.4)$$

Potensialet (3.3) er kun gyldig for den lineære dispersjonsrelasjonen

$$\omega^2 = gk. \quad (3.5)$$

Ved å sette det lineære innkommende potensialet (3.3) inn i den eksakte grenseflatebetingelsen (2.2) blir andre- og tredjeordens ledd lik null gitt en korleksjon av dispersjonsrelasjonen

$$\omega^2 = gk(1 + k^2 A^2) + \mathcal{O}(k^3 A^3). \quad (3.6)$$

Det lineære potensialet  $\phi_I$  er derfor eksakt til og med ledd av orden  $A^3$  i dypt vann gitt korleksjonen (3.6) i dispersjonsrelasjonen. Det høyere ordens leddet i (3.6) bidrar ikke i analysen til FNV. De innkommende bølgene beskrevet av (3.3) er kjent som som tredje ordens Stokesbølger som forklart i Newman (1977). Overflatehevningen som følge av det innkommende bølgefeltet er kun gyldig til ledende orden og må korrigeres til høyere orden (se avsnitt 3.4).

Løsningen (3.3) kan med fordel beskrives i sylinderkoordinater som følge av geometrien til sylindren. Konversjonen mellom kartesiske og sylindriske koordinater er definert ved

$$x + iy = r e^{i\theta} \quad (3.7)$$

der  $x = r \cos \theta$  og  $y = r \sin \theta$ . Den eksponensielle faktoren i (3.3) som involverer den horisontale variabelen  $x$  omskrives ved hjelp av en Jacobi-Anger rekkeutvikling (3.8) gitt av C.C. Mei [13] (tillegg 4.A), og er en variant av en Taylorutvikling. Ved hjelp av utviklingen uttrykkes plane bølger som en sum av sylindriske bølger beskrevet ved hjelp av den første Besselfunksjonen  $J_m(kr)$  av orden  $m$ . Besselfunksjoner er oscillerende sylindrefunksjoner som ofte brukes for å beskrive bølgeløsninger i sylindriske koordinater og er inngående beskrevet av Watson [36]. Utviklingen er gitt ved

$$e^{-ikx} = e^{-ikr \cos \theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m(kr) e^{-im\theta}. \quad (3.8)$$

Vi deler summen i to ledd

$$\sum_{m=-\infty}^{-1} (-i)^m J_m(kr) e^{-im\theta} + \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m J_m(kr) e^{-im\theta},$$

og ”snur” den første summen slik at den kun involverer positive indekser  $m \geq 1$  ved hjelp av identiteten

$$J_{-m}(kr) = (-1)^m J_m(kr), \quad (3.9)$$

og ved at  $(-i)^{-m} = (-1)^m i^{-m}$  og  $(-i)^m = i^{-m}$ . Omskrivningen gir

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^{-m} J_{-m}(kr) e^{im\theta} + \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m J_m(kr) e^{-im\theta} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m i^{-m} (-1)^m J_m(kr) e^{im\theta} + \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m J_m(kr) e^{-im\theta}. \end{aligned}$$

Det første leddet i den andre rekken kan plukkes ut og de to rekkene kan legges sammen slik at vi får

$$\begin{aligned} J_0(kr) + \sum_{m=1}^{\infty} i^{-m} J_m(kr) (e^{im\theta} + e^{-im\theta}) \\ &= J_0(kr) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} i^{-m} J_m(kr) \cos m\theta \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^{-m} J_m(kr) \cos m\theta. \end{aligned} \quad (3.10)$$

$\epsilon_m$  er Jacobikonstanten (C.C. Mei)

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m > 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Med dette kan det lineære innkommende potensialet uttrykt i sylinderkoordinater

$$\phi_I = \operatorname{Re} \left\{ \frac{gA}{\omega} e^{kz+i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^{-m} J_m(kr) \cos m\theta \right\}. \quad (3.12)$$

Dette ser vi er det samme uttrykket som i FNV, likning (2.2). Det lineære spredningspotensialet bestemmes ved hjelp av Laplace' likning i sylindriske koordinater

$$\nabla^2 \phi_S = \frac{\partial^2 \phi_S}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_S}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_S}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi_S}{\partial z^2} = 0, \quad (3.13)$$

diffraksjonsbetingelsen (3.1) på sylindringen og strålingsbetingelsen (3.2). Vi antar at  $\phi_S$  oppfører seg som  $\phi_I$  med hensyn til den vertikale koordinaten  $z$  og tiden  $t$ .  $\phi_S$  skrives

$$\phi_S = \operatorname{Re} \left\{ \frac{Ag}{\omega} e^{kz+i\omega t} \beta(r, \theta) \right\}, \quad (3.14)$$

der  $\beta$  er en separabel funksjon av  $r$  og  $\theta$

$$\beta(r, \theta) = P(r)Q(\theta). \quad (3.15)$$

$P(r)$  og  $Q(\theta)$  er to vilkårlige funksjoner. Ved å substituere (3.14) inn i Laplace' likning får vi Helmholtz' likning som beskrevet av C.C. Mei [13]

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2} + k^2 \beta = 0. \quad (3.16)$$

Ved å sette inn separasjonen (3.15) omskriver vi Helmholtz' likning til

$$\frac{1}{P} \frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{1}{rP} \frac{dP}{dr} + k^2 = -\frac{1}{r^2 Q} \frac{d^2 Q}{d\theta^2}. \quad (3.17)$$

(3.17) er kun gyldig dersom uttrykkene på hver side av likhetstegnet er lik en separasjonskonstant, for eksempel  $-m^2$ . Differensiallikningen for  $Q(\theta)$  er

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\theta^2} = -m^2. \quad (3.18)$$

Separasjonskonstanten er valgt negativ slik at løsningen oscillerer med vinkelen  $\theta$ . Løsningen finnes ved hjelp av røttene  $r_o$  til den karakteristiske likningen  $r_o^2 = -m^2$  og er på formen

$$Q(\theta) = C_1 \cos m\theta + C_2 \sin m\theta \quad (3.19)$$

der  $C_1, C_2$  er konstanter. Som følge av sylindersens geometriske form er  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  og  $m$  må være et heltall. Sinus-leddet av løsningen er *antisymmetrisk* og kan ignoreres da løsningen skal være *symmetrisk* om  $x$ -aksen. Vi setter (3.18) inn i (3.17) slik at

$$\frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) P = 0. \quad (3.20)$$

Ved å introdusere koordinattransformasjonen

$$\hat{R} = kr, \quad (3.21)$$

omskrives (3.20) til

$$\frac{d^2 P}{d\hat{R}^2} + \frac{1}{\hat{R}} \frac{dP}{d\hat{R}} + \left(1 - \frac{m^2}{\hat{R}^2}\right) P = 0. \quad (3.22)$$

Likning (3.22) er kjent som Bessellikningen av orden  $m$  (Watson kap.3.1) med en løsning som består av Besselfunksjoner av første og andre type av tilsvarende orden. Da (3.22) er en annen ordens differensiallikning vil den ha to lineært uavhengige løsninger

$$P_m(kr) = B_m J_m(kr) + C_m Y_m(kr). \quad (3.23)$$

for hvert heltall  $m$ . Besselfunksjonen av andre type,  $Y_m$ , er en lineær kombinasjon av  $J_m$  og  $J_{-m}$  (Spiegel [32]).  $B_m$  og  $C_m$  er konstanter. Strålingsbetingelsen (3.2) og randbetingelsen (3.1) må benyttes for å oppnå den unike løsningen av spredningspotensialet.

Da  $m$  er et heltall kan løsningen (3.23) skrives som Besselfunksjonen av tredje type, kalt Hankelfunksjonen, som beskrevet av Gran [8]

$$H_m^{(n)}(kr) = J_m(kr) \pm iY_m(kr) \quad (3.24)$$

der  $n = 1, 2$  angir Hankelfunksjonen av henholdsvis første og andre type. Den asymptotiske ekspansjonen av Besselfunksjonene av orden  $m$  er definert i Spiegel [32] og gitt som

$$J_m(kr) \propto \frac{1}{\sqrt{kr}} \cos(kr + \varphi_m) \quad (3.25)$$

$$\text{og } Y_m(kr) \propto \frac{1}{\sqrt{kr}} \sin(kr + \varphi_m) \text{ når } kr \rightarrow \infty. \quad (3.26)$$

$\varphi_m$  er fasevinkelen  $-\pi(2m - 1)/4$ . Dersom vi velger løsningen

$$P_m(kr) = B_m J_m(kr) - iC_m Y_m(kr) \quad (3.27)$$

får vi den asymptotiske formen til (3.27) i fjernfeltet på formen

$$\begin{aligned} P_m(kr) &\propto \frac{1}{\sqrt{kr}} (\cos(kr + \varphi_m) - i \sin(kr + \varphi_m)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{kr}} e^{-i(kr + \varphi_m)}, \text{ når } kr \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Dette sikrer at  $\phi_S$  representerer en utgående bølge med amplitude som avtar i fjernfeltet. Betingelsen (3.2) er tilfredsstilt kun dersom vi velger løsningen (3.27). Ved å velge løsningen  $P_m \propto H_m^{(1)}$  vil  $P_m$  gå som  $e^{+ikr}$  i fjernfeltet og  $\phi_S$  vil representere en bølge som forplanter seg innover mot sylindren med amplitude som vokser med avstanden  $r$  fra sylindren.

Vi kan skrive løsningen (3.27) som

$$P_m(kr) = D_m H_m^{(2)}(kr) \quad (3.29)$$

der  $D_m$  er en konstant.

Uttrykkene til Besselfunksjonene av første og andre type er beskrevet i tillegg A.1. Besselfunksjonen av andre type er singularer i punktet  $kr \rightarrow 0$ . Det vil si at funksjonen ikke har en endelig verdi i grensen  $\lim_{kr \rightarrow 0} Y_m(kr) \rightarrow -\infty$ . Løsningen  $P_m$  skal anvendes i feltet  $r \geq a$  og bølgetallet  $k = 2\pi/\lambda$  er ulik null da den fysiske bølgelengden  $\lambda$  er endelig. Singulariteten i den imaginære delen av Hankelfunksjonen vil derfor ikke forårsake diskontinuiteter i den lineære løsningen av spredningspotensialet men vil fungere som en kilde for energien i den utgående bølgen som forklart av Gran [8]. Da  $P_m$  er en løsning av Bessellikningen for hver  $m$  vil også en uendelig sum av lineære kombinasjoner av  $P_m$  også være en løsning. Ved å sette inn løsningen av (3.15) i (3.14) får vi

$$\phi_S(kr, \theta, z, t) = \text{Re} \left\{ \frac{gA}{\omega} e^{kz + i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} D_m \cos m\theta H_m^{(2)}(kr) \right\}. \quad (3.30)$$

Konstanten  $C_1$  i (3.19) er slått sammen med konstanten  $D_m$  i (3.29). Diffraksjonsbetingelsen (3.1) brukes for å bestemme koeffisienten  $D_m$ . Ved hjelp av relasjonen  $d/dr = kd/d(kr)$  som medfører

$$k \frac{\partial \phi_I}{\partial(kr)} = -k \frac{\partial \phi_s}{\partial(kr)}, \quad r = a \quad (3.31)$$

får vi ved å sette inn (3.12) og (3.30) at

$$D_m = -\epsilon_m i^{-m} \frac{dJ_m(ka)}{d(ka)} \frac{1}{\frac{dH_m^{(2)}(ka)}{d(ka)}}. \quad (3.32)$$

Dermed får vi løsningen for det lineære spredningspotensialet

$$\phi_S = -Re \left\{ \frac{gA}{\omega} e^{kz+i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^{-m} \cos m\theta H_m^{(2)}(kr) \frac{J'_m(ka)}{H_m^{(2)'}(ka)} \right\}. \quad (3.33)$$

Apostroff' angir den deriverte med hensyn på argumentet. Det lineære spredningspotensialet, og dermed diffraksjonspotensialet  $\phi_D$  (3.33), er kun gyldig til ledende orden med den lineære dispersjonsrelasjonen (3.5). Det lineære diffraksjonspotensialet

$$\phi_D = Re \left\{ \frac{gA}{\omega} e^{kz+i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^{-m} \cos m\theta (J_m(kr) - H_m^{(2)}(kr) \frac{J'_m(ka)}{H_m^{(2)'}(ka)}) \right\} \quad (3.34)$$

er McCamy og Fuchs' [29] lineariserte løsning av diffraksjonsproblemet (2.1)-(2.6). Løsningen (3.34) er gyldig i diffraksjonsregimet for alle  $ka$ .

Vi følger FNVs teori og forenkler diffraksjonspotensialet ved å utvikle (3.34) i det indre området,  $kr \ll 1$  og deretter for  $ka \ll 1$ . Spredningspotensialet kan skrives

$$\phi_S = -Re \left\{ \frac{gA}{\omega} e^{kz+i\omega t} \hat{\phi}_S \right\}, \quad (3.35)$$

der

$$\hat{\phi}_S = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^{-m} \cos m\theta H_m^{(2)}(kr) \frac{J'_m(ka)}{H_m^{(2)'}(ka)}. \quad (3.36)$$

De første tre leddene av (3.36) er

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_S &\approx H_0^{(2)}(kr) \frac{J'_0(ka)}{H_0^{(2)'}(ka)} - 2i \cos \theta H_1^{(2)}(kr) \frac{J'_1(ka)}{H_1^{(2)'}(ka)} \\ &\quad - 2 \cos 2\theta H_2^{(2)}(kr) \frac{J'_2(ka)}{H_2^{(2)'}(ka)} + \dots \end{aligned} \quad (3.37)$$

Koeffisientfunksjonene av argument  $ka$  skrives om ved hjelp av definisjonen av den andre Hankelfunksjonen (3.24)

$$\frac{J'_m(ka)}{H_m^{(2)'}(ka)} = \frac{J'_m(ka)}{J'_m(ka) - iY'_m(ka)} = \frac{1}{1 - i \frac{Y'_m(ka)}{J'_m(ka)}}. \quad (3.38)$$

I første rekke skriver vi ut (3.37) ut ved å utvikle Besselfunksjonene av argument  $ka \ll 1$  under forutsetning om at sylinderadien er liten i forhold til bølgelengden. Besselfunksjonene utvikles individuelt ved hjelp av rekkeutviklingen definert av Spiegel [32] som er presentert og utført i tillegg A.1. Vi inkluderer kun ledende ordens bidrag i utviklingen av Besselfunksjonene i (3.38) av orden  $m = 0$  slik at

$$\frac{Y_0'(ka)}{J_0'(ka)} \approx \frac{\frac{2}{\pi ka}}{-\frac{ka}{2}} = -\frac{4}{\pi(ka)^2}, \quad (3.39)$$

og dermed

$$\frac{J_0'(ka)}{H_0^{(2)'}(ka)} \approx -i\frac{\pi}{4}(ka)^2 \dots \quad (3.40)$$

Her har vi brukt at  $(ka)^2 \ll 1$ . Likeledes finner vi koeffisientene for  $m = 1, 2$

$$\frac{J_1'(ka)}{H_1^{(2)'}(ka)} \approx i\frac{\pi(ka)^2}{4} \quad (3.41)$$

$$\text{og } \frac{J_2'(ka)}{H_2^{(2)'}(ka)} \approx i\frac{\pi(ka)^4}{2^5}. \quad (3.42)$$

Vi setter inn koeffisientene (3.40)-(3.42) i (3.37) og får

$$\hat{\phi}_S = -i\frac{\pi(ka)^2}{4} \left[ H_0^{(2)}(kr) + 2i \cos \theta H_1^{(2)}(kr) + \frac{(ka)^2}{4} \cos 2\theta H_2^{(2)}(kr) + \mathcal{O}((ka)^6) \right]. \quad (3.43)$$

Uttrykket for spredningspotensialet i det indre området  $kr \ll 1$  finner vi ved utvikling av Hankelfunksjonene av argument  $kr \ll 1$  som for koeffisienten (3.38). Til og med orden av  $(kr)^2 = \mathcal{O}(\epsilon^2)$  skriver vi utviklingen til Hankelfunksjonen av orden  $m = 0, 1, 2$

$$H_0^{(2)}(kr) \approx 1 - \frac{(kr)^2}{4} - i \left[ \frac{2}{\pi} \left( \ln \frac{kr}{2} + \gamma_E \left( 1 - \frac{(kr)^2}{4} \right) + \frac{(kr)^2}{2\pi} \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2 \ln \epsilon), \quad (3.44)$$

$$H_1^{(2)}(kr) \approx \frac{kr}{2} - i \left[ \frac{kr}{\pi} \left( \ln \frac{kr}{2} + \gamma_E \right) - \frac{2}{\pi kr} - \frac{kr}{2\pi} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (3.45)$$

og

$$H_2^{(2)}(kr) \approx \frac{(kr)^2}{8} - i \left[ \gamma_E \frac{(kr)^2}{4\pi} - \frac{4}{\pi(kr)^2} - \frac{1}{\pi} - \frac{3(kr)^2}{16\pi} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2 \ln \epsilon). \quad (3.46)$$

$\gamma_E \approx 0.5772156$  er Eulerkonstanten gitt av Spiegel og dukker opp i Besselfunksjonen av andre type  $Y_m$  som vist i tillegg A.1.

Uttrykket for (3.43) til og med orden av  $\epsilon^2$  er

$$\hat{\phi}_S = -\frac{(ka)^2}{2} \left( i\frac{\pi}{2} + \ln \frac{kr}{2} + \gamma_E \right) + i\frac{ka^2}{r} \cos \theta + \frac{k^2 a^4}{4r^2} \cos 2\theta + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (3.47)$$

Til ledende orden av  $\epsilon$  er (3.43)

$$\hat{\phi}_S = i\frac{ka^2}{r} \cos \theta. \quad (3.48)$$



Det innkommende potensialet (3.12) utvikles ved hjelp av Besselfunksjonen av første type  $J_m(kr)$  i det indre området  $kr \ll 1$ . Vi skriver

$$\phi_I = \text{Re} \left\{ \frac{gA}{\omega} e^{kz+i\omega t} \hat{\phi}_I \right\} \quad (3.49)$$

der  $\hat{\phi}_I = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^{-m} \cos m\theta J_m(kr)$  og utvikler  $\hat{\phi}_I$  ved hjelp av ekspansjonen av Besselfunksjonen gitt i tillegg A.1 til og med orden av  $\epsilon^2$ .

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_I &= J_0(kr) - 2i \cos \theta J_1(kr) - 2 \cos 2\theta J_2(kr) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= 1 - \frac{(kr)^2}{4} - ikr \cos \theta - \frac{(kr)^2}{2^2} \cos 2\theta + \mathcal{O}(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Det ledende ordens leddet i (3.49) er proporsjonal med amplituden  $A$  og bidraget fra 3.50 til orden  $\epsilon$  er

$$\hat{\phi}_I = 1 - ikr \cos \theta + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.51)$$

Det totale diffraksjonspotensialet i det indre området til og med orden av  $\epsilon^2$  skrives

$$\phi_D = \text{Re} \left\{ \frac{gA}{\omega} e^{kz+i\omega t} \left[ 1 - ik \cos \theta \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \right] \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (3.52)$$

Til ledende orden i amplituden  $A$  representerer spredningspotensialet (3.35) gitt ved (3.48) et dipolfelt i det horisontale planet. Dette kan vi gjøre tydeligere gjennom omskrivningen  $\frac{\cos \theta}{r} = \frac{r \cos \theta}{r^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$ . Ved å kombinere det ledende ordens uttrykket for spredningspotensialet (3.35) med det ledende ordens uttrykket (3.51) for det innkommende potensialet får vi det todimensjonale potensialet for uniform strøm forbi en sirkel som representerer tverrsnittet av sylindren.

Til og med orden av  $\epsilon^3$  er uttrykket for diffraksjonspotensialet gitt ved

$$\begin{aligned} \phi_D &= \text{Re} \left\{ \frac{gA}{\omega} e^{kz+i\omega t} \left[ 1 - ik \cos \theta \left( r + \frac{a^2}{r} \right) - \frac{1}{4} (kr)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (ka)^2 \left( \ln \frac{kr}{2} + \gamma_E + \frac{\pi i}{2} \right) - \frac{1}{4} k^2 \cos 2\theta \left( r^2 + \frac{a^4}{r^2} \right) \right] \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (3.53)$$

(3.52) og (3.53) er de samme som i artikkelen til FNV og representerer det lineære diffraksjonspotensialet i det indre området  $kr \ll 1 = \mathcal{O}(\epsilon)$  og for  $ka \ll 1 = \mathcal{O}(\epsilon)$ .

## 3.2 Ikkelineær analyse

Utviklingen av det lineære diffraksjonspotensialet til orden av  $\epsilon^3$  indikerer at ikkelineære effekter av samme orden i  $\epsilon$  men av høyere orden i amplituden  $A$  må inkluderes for at diffraksjonsløsningen/utviklingen skal være konsistent.

Da bølgeamplituden  $A$  betraktes som å være av samme størrelsesorden som cylinderradien  $a$  må også ikkelineære ledd inkluderes i spredningspotensialet for at analysen skal være konsistent i orden av  $\epsilon$ . Diffraksjonspotensialet til og med orden av  $\epsilon^3$  inneholder en korreksjon for ikkelineære effekter som følge av bølgespredningen rundt sylindere slik at

$$\phi = \phi_D + \psi + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (3.54)$$

som kapittel 2. Det ikkelineære potensialet  $\psi$  er av orden  $\epsilon^3$  eller  $\mathcal{O}(A^2a, A^3)$ . Randverdiproblemet for det ikkelineære spredningspotensialet er definert ved likning (2.1) til (2.6) i kapittel 2. Randverdiproblemet løses ved å introdusere normaliserte indre koordinater i den eksakte overflatebetingelsen (2.2) og ved hjelp av Webertransformasjon av de drivende funksjonene ved overflaten. Det ikkelineære potensialet løses i det indre området der  $r = \mathcal{O}(a)$  og effekten av potensialet er begrenset til dette området.

### 3.2.1 Det ikkelineære randverdiproblemet

Randbetingelsen (2.4) på sylindere vil ved å sette inn (3.54) skrives

$$\psi_r = 0, \quad r = a. \quad (3.55)$$

Underindeks  $r$  brukes for å betegne den partielt deriverte med hensyn på argumentet  $r$ . Uttrykket på venstre side av den eksakte overflatebetingelsen (2.2) kan omskrives ved hjelp av (3.54) og den lineære dispersjonsrelasjonen (3.5) slik at

$$\phi_{tt} = (i\omega)^2 \phi_D + \psi_{tt} \quad (3.56)$$

$$\text{og } \phi_z = k\phi_D + \psi_z, \quad (3.57)$$

som gir

$$\phi_{tt} + g\phi_z = \psi_{tt} + g\psi_z. \quad (3.58)$$

Ved omskrivingen

$$2\nabla\phi \cdot \nabla\phi_t = \frac{\partial}{\partial t} |\nabla\phi|^2 \quad (3.59)$$

får vi eksakte overflatebetingelsen

$$\psi_{tt} + g\psi_z = -\frac{\partial}{\partial t} |\nabla\phi|^2 - \frac{1}{2} \nabla\phi \cdot \nabla(\nabla\phi)^2, \quad z = \eta. \quad (3.60)$$

Da  $\psi$  er av orden  $\epsilon^3$  vil høyre side av (3.60) bestå kun av bidrag fra det lineære diffraksjonspotensialet gitt ved (3.52). Produktene  $\nabla\phi \cdot \nabla\phi$  er beregnet i tillegg B.1 og er til ledende orden i  $\epsilon$

$$\nabla\phi_I \cdot \nabla\phi_I = \omega^2 A^2 e^{2kz} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (3.61)$$

$$\nabla\phi_I \cdot \nabla\phi_S = -\omega^2 A^2 e^{2kz} \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \omega t \cos 2\theta + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (3.62)$$

$$\text{og } \nabla\phi_S \cdot \nabla\phi_S = \omega^2 A^2 e^{2kz} \frac{a^4}{r^4} \sin^2 \omega t + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (3.63)$$

Første ledd på høyre side av (3.60) er ved hjelp av (3.61)-(3.63)

$$-\frac{\partial}{\partial t} |\nabla \phi|^2 = \omega^3 A^2 e^{2kz} \sin 2\omega t \left( \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\theta - \frac{a^4}{r^4} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (3.64)$$

Det andre leddet skrives

$$-\frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla |\nabla \phi|^2 = -2\omega^3 A^3 e^{3kz} \sin^3 \omega t \left( \frac{a^2}{r^3} \cos 3\theta - 2\frac{a^4}{r^5} \cos \theta + \frac{a^6}{r^7} \cos \theta \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (3.65)$$

Uttrykkene (3.64) og (3.65) skal evalueres ved den eksakte overflatehevningen  $z = \eta$ . Ved hjelp av Taylorutvikling får vi uttrykt

$$e^{nk\eta} = 1 + nk\eta + \mathcal{O}(\eta^2) \quad (3.66)$$

der  $n$  er et heltall og  $k\eta = \mathcal{O}(\epsilon)$  til ledende orden. Dersom vi setter (3.66) inn i høyresiden av overflatebetingelsen (3.60) får vi et uttrykk av  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  til ledende orden i  $A$  med et korreksjonsledd av  $\mathcal{O}(\epsilon^3)$  som kan neglisjeres. Høyresiden av overflatebetingelsen (3.60) kan dermed evalueres i  $z = 0$ .

I det indre området er  $r = \mathcal{O}(\epsilon)$  og (3.65) av orden  $\epsilon^2$  selv om uttrykket er proporsjonalt med  $A^3$ . De drivende leddene i overflatebetingelsen (3.60) er begrenset til det indre området. Dette er fordi de avtar med økende radiell avstand fra sylindere (raskere enn  $\phi_S$ ) og er av høyere orden i  $\epsilon$  når  $kr = \mathcal{O}(1)$ . Det er derfor hensiktsmessig å introdusere normaliserte koordinater i det indre området

$$R = \frac{r}{a}, \quad Z = \frac{-z + A \sin \omega t}{a}. \quad (3.67)$$

Den vertikale koordinaten er illustrert i figur 2.1. Planet  $Z = 0$  beveger seg vertikalt med første ordens overflatehevning  $\eta_1$  gitt ved (3.4) på sylindereaksen,  $x = 0$ , og er positiv for  $z < \eta_1$ . Definisjonen av det ikkelineære potensialet i indre koordinater er

$$\psi(r, \theta, z) \equiv \Psi(R, \theta Z), \quad (3.68)$$

og grenseflatebetingelsen på sylindereaksen uttrykkes ved

$$\Psi_R = 0, \quad R = 1. \quad (3.69)$$

Differensialoperatorene endres ved koordinattransformasjonen da  $Z = Z(t)$  er mens tiden  $t$  er uavhengig av  $Z$ .

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial Z} = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial Z} \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{A}{a} \omega \cos \omega t \frac{\partial}{\partial Z} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{A}{a} \omega \cos \omega t \frac{\partial}{\partial Z} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{A}{a} \omega \cos \omega t \frac{\partial}{\partial Z} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{A\omega^2}{a} \sin \omega t \frac{\partial}{\partial Z} + 2\frac{A\omega}{a} \cos \omega t \frac{\partial^2}{\partial Z \partial t} + \frac{A^2 \omega^2}{a^2} \cos^2 \omega t \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Venstre side av (3.60) blir derfor

$$\psi_{tt} + g\psi_Z = \Psi_{tt} + 2\frac{A\omega}{a} \cos \omega t \Psi_{Zt} - \frac{A\omega}{a} \sin \omega t \Psi_Z + \frac{A^2\omega^2}{a^2} \cos^2 \omega t \Psi_{ZZ} - \frac{g}{a} \Psi_Z, \quad (3.73)$$

og på høyre side får vi

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} |\nabla\phi|^2 - \frac{1}{2} \nabla\phi \cdot \nabla(\nabla\phi)^2 &= \omega^3 A^2 \sin 2\omega t \left( \frac{2}{R^2} \cos 2\theta - \frac{1}{R^4} \right) \\ &\quad - \omega^3 \frac{A^3}{a} \sin^3 \omega t \left( \frac{2}{R^3} \cos 3\theta + \left( -\frac{4}{R^5} + \frac{2}{R^7} \right) \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Ved å anvende den lineære dispersjonsrelasjonen  $\omega^2 = gk$  blir den fullstendige ikkelineære randbetingelsen på den frie overflaten

$$\begin{aligned} &\frac{a}{g} \Psi_{tt} + 2\omega \frac{A}{g} \cos \omega t \Psi_{Zt} - kA \sin \omega t \Psi_Z + \frac{kA^2}{a} \cos^2 \omega t \Psi_{ZZ} - \Psi_Z \\ &= \omega k a A^2 \sin 2\omega t \left( \frac{2}{R^2} \cos 2\theta - \frac{1}{R^4} \right) \\ &\quad - \omega k A^3 \sin^3 \omega t \left( \frac{2}{R^2} \cos 3\theta + \left( -\frac{4}{R^5} + \frac{2}{R^7} \right) \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Høyre side av (3.75) er evaluert i  $z = 0$  mens venstre side må evalueres i  $z = \eta$ .

Randverdiproblemet for  $\Psi$  består dermed av den tredimensjonale Laplacelikningen i sylinderkoordinater (3.13), overflatebetingelsen (3.75) og betingelsen på sylinderen (3.69). I tillegg må  $\Psi$  representere en utgående bølge i fjernfeltet  $R \rightarrow \infty$  og dermed tilfredsstillende betingelsen om at hastighetsfeltet  $\nabla\Psi$  avtar mot null i dypet og i fjernfeltet  $\lim_{(R^2+Z^2)^{1/2}} \nabla\Psi \rightarrow 0$ .

Gradienten definert i indre koordinater  $\nabla = \frac{\partial}{\partial R} \mathbf{i}_r + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{\partial}{\partial Z} \mathbf{i}_z$  gir en reduksjon av  $\mathcal{O}(1)$  da  $R = \mathcal{O}(1)$  og  $Z = \mathcal{O}(1)$  slik at gradienten  $\nabla\Psi$  er av samme orden som  $\Psi$ . De fire første leddene i (3.75) er derfor av én orden i  $\epsilon$  høyere og kan sløyfes til fordel for det dominerende femte leddet  $\Psi_Z$ . Den ikkelineære betingelsen (3.75) på den frie overflaten blir

$$\begin{aligned} \Psi_Z &= -\omega k A^2 a \sin 2\omega t \left( \frac{2}{R^2} \cos 2\theta - \frac{1}{R^4} \right) \\ &\quad + \omega k A^3 \sin^3 \omega t \left( \frac{2}{R^3} \cos 3\theta + \left( -\frac{4}{R^5} + \frac{2}{R^7} \right) \cos \theta \right) = \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Begge sider av likhetstegnet er nå av samme orden i  $\epsilon$ .

Venstre side av likningen (3.76) kan ikke evalueres ved stillevannsnivået ved hjelp av Taylorutvikling som det er gjort for høyresiden. I det indre området forstørres den vertikalt deriverte med en faktor  $1/a$  gitt ved  $\Psi_Z = -a\psi_z$ . Dersom  $\Psi_Z$  taylorutvikles om planet  $Z = \eta_1/a$  som korresponderer med  $z = 0$  får vi

$$\Psi_Z(Z = (-\eta + \eta_1)/a) \approx \Psi_Z + \frac{\eta}{a} \Psi_{ZZ} + \frac{\eta^2}{2a^2} \Psi_{ZZZ} + \mathcal{O}(1), \quad Z = \eta_1/a. \quad (3.77)$$

Hvert ledd i (3.77) vil være av samme størrelsesorden som det forrige og rekken vil divergere. Ved å sette inn første ordens tilnærming av overflatehevingen  $z = \eta_1$ , som korresponderer

med  $Z = 0$ , vil Taylorutviklingen ta formen

$$\Psi_Z((-\eta + \eta_1)/a) \approx \Psi_Z(0) - \frac{1}{a}(\eta - \eta_1)\Psi_{ZZ}(0) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.78)$$

Denne rekken konvergerer da  $\eta - \eta_1 = \mathcal{O}(\epsilon^2)$  og hvert suksessive ledd er en størrelsesorden  $\epsilon$  mindre enn det forrige. Dermed kan (3.76) evalueres i  $Z = 0$ .

Ved å betrakte randbetingelsen (3.76) kan løsningen antas å være på formen

$$\Psi(R, Z, \theta, t) = \sum_{m=0}^3 c_m(t)\Psi_m(R, Z) \cos m\theta, \quad (3.79)$$

der  $\Psi_m(R, Z)$  er ukjent og koeffisientene  $c_m(t)$  er gitt ved

$$c_0 = c_2 = \omega k A^2 a \sin 2\omega t, \quad (3.80)$$

$$c_1 = c_3 = \omega k A^3 \sin^3 \omega t. \quad (3.81)$$

Randverdioproblemet for  $\Psi_m$  er definert ved

$$\nabla^2 \Psi_m(R, Z) = 0, \quad \forall R, Z \quad (3.82)$$

$$\Psi_{mR} = 0, \quad R = 1 \quad (3.83)$$

$$\text{og } \Psi_m(R, Z) = 0, \quad (R^2 + Z^2)^{1/2} \rightarrow \infty. \quad (3.84)$$

Randbetingelsen på den frie overflaten  $Z = 0$  kan uttrykkes ved hjelp av funksjonen  $f_m(R)$  som er definert ved (3.76).

$$\Psi_{mZ}(R, 0) = f_m(R), \quad R \geq 1, \quad (3.85)$$

$$f_0 = \frac{1}{R^4}, \quad f_1 = -\frac{4}{R^5} + \frac{2}{R^7}, \quad f_2 = -\frac{2}{R^2}, \quad f_3 = \frac{2}{R^3} \quad (3.86)$$

$f_m$  er de drivende funksjonene i den ikkelineære betingelsen på  $\Psi$  på den frie overflaten.

De fire komponentene  $\Psi_m(R, Z)$   $m = 0, 1, 2, 3$  i det ikkelineære hastighetspotensialet (3.79) evalueres ved hjelp av Webertransformasjon av de drivende funksjonene  $f_m(R)$  i overflatebetingelsen (3.85) som i FNV.

Webertransformen og analytiske beregninger av  $F_m(K)$  utledes i avsnittene (3.2.2) og (3.2.3). Det vertikale integralet av komponenten  $\Psi_m$  dukker opp i beregningen av bølgekrefter og veltende moment på sylindren og beregnes vha Greens teorem i avsnitt (3.2.4). En utfyllende beskrivelse av metoden jeg bruker for å beregne løsningen av Webertransformparet er beskrevet i tillegg D.1.

Jeg presenterer og diskuterer de numeriske resultatene av  $\Psi_m(R, Z)$  i avsnitt 3.2.6. Resultatene av  $\Psi_m$  sammenliknes med resultatene til FNV og Newman & Lee [18]. Vi kan sammenlikne asymptoten i dypet  $Z \gg 1$  til den andre ordens komponenten  $m = 0, 2$  av det ikkelineære potensialet  $\Psi$  med Newmans (1996b) [16] andre ordens potensial i diffraksjonsregimet.

### 3.2.2 Webertransformen

Løsingen av randverdiproblemet i avsnitt 3.2.1 tilrettelegges som i FNVs ved å anvende en integraltransformasjon kjent som Webertransformen på de drivende funksjonene i (3.85).. Webertransformen er gitt av Davies [2] og kjernen i transformen består av sylindriske Bessel-funksjoner.

Vi antar at de drivende funksjonene  $f_m(R)$  kan skrives ved hjelp av en kontinuerlig sum av bølgetallskomponenter gitt ved det dimensjonsløse bølgetallet  $K$ .  $f_m(R)$  transformeres med andre ord over i det kontinuerlige bølgetallsrommet og løsningen av komponentene  $\Psi_m$  finnes ved hjelp av den transformerte  $F_m(K) = W^{-1}(f_m(R))$ .

Davies beskriver Webertransformen som en generalisert Hankeltransform. Inverstransformen fremkommer ved hjelp av Webers integralteorem som gitt av Watson [36]. Transformen kan anvendes på  $f_m(R)$  under forutsetning om at funksjonene avtar raskt og monotont med økende argument og domenet den anvendes i er radielt symmetrisk. Webertransformen av orden  $m$  av funksjonen  $f_m(R)$  er definert [2]

$$F_m(K) = \int_1^{\infty} f_m(R)W_m(K, R)R \, dR, \quad R \geq 1 \quad (3.87)$$

der  $W_m$  kjernen i transformparet,

$$W_m(K, R) = Y'_m(K)J_m(KR) - J'_m(K)Y_m(KR). \quad (3.88)$$

Den deriverte betegnes med  $'$  og utføres i (3.88) mhp argumentet  $K$ . Kjernen er en variasjon av  $W_m = Y_m(K)J_m(KR) - J_m(K)Y_m(KR)$ , som gitt i [2], og er tilpasset for å sikre at betingelsen på sylinderen (3.83) er oppfylt.

E.C. Titchmarsh [34] har bevist Webers integralteorem som angir inverstransformen for den opprinnelige kjernen. Zhang & Tong [20] har utledet inversjonsformelen for Webertransformen med den mer generelle kjernen

$$D_m(K, R) = J_m(KR)[\beta Y_m(bK) + \alpha K Y'_m(bK)] - Y_m(KR)[\beta J_m(bK) + \alpha K J'_m(bK)], \quad (3.89)$$

der  $\alpha, \beta$  og  $b$  er konstanter og  $R > b > 0$ . Den generaliserte Webertransformen av en funksjon  $f(R)$  er definert

$$F(K) = \int_b^{\infty} D_m(KR)f(R)R \, dR \quad (3.90)$$

og inverstransformen

$$f(R) = \int_0^{\infty} \frac{D_m(KR)}{Q_m^2(K)} K \left( \int_b^{\infty} D_m(K\hat{R})f(\hat{R})\hat{R} \, d\hat{R} \right) dK \quad (3.91)$$

eller

$$f(R) = \int_0^{\infty} \frac{D_m(KR)}{Q_m^2(K)} KF(K) dK \quad (3.92)$$

dersom  $f(R)$  er kontinuerlig og fluktuierer begrenset nær  $\hat{R} = R$ .  $m$  er reell og  $Q_m^2(K) = [\beta J_m(K) + \alpha K J'_m(K)]^2 + [\beta Y_m(K) + \alpha K Y'_m(K)]^2$ . Når  $\alpha = 0$  og  $\beta = 1$  får vi Webers opprinnelige integralteorem. Ved å sette inn  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$  og  $b = 1$  har vi at

$$D_m(K, R) = KY'_m(K)J_m(KR) - KJ'_m(K)Y_m(KR) = KW_m(K, R) \quad (3.93)$$

$$\text{og } Q_m^2(K) = K^2(J'_m(K)^2 + Y'_m(K)^2). \quad (3.94)$$

Relasjonen mellom de Webertransformerte  $F_m$  gitt i (3.87) og  $F$  i (3.90) er  $F(K) = KF_m(K)$ . Vi setter denne relasjonen inn i (3.91) får vi inverstransformen som korresponderer med transformen (3.87)

$$f_m(R) = \int_0^{\infty} F_m(K) \frac{W_m(K, R)}{J'_m(K)^2 + Y'_m(K)^2} K dK. \quad (3.95)$$

Løsningen av komponentene  $\Psi_m(R, Z)$  i (3.79) finner vi ved hjelp av separasjon av variable. Vi antar at  $\Psi_m(R, Z)$  kan skrives som den inverstransformerte av en funksjon  $g_m(K, Z)$  slik at

$$\Psi_m(R, Z) = U_m(R)V(Z) = W^{-1}(g_m(K, Z)) \quad (3.96)$$

og  $g_m(K, Z) = W(U_m(R)V(Z))$  der  $W$  og  $W^{-1}$  henholdsvis representerer Webertransformen og dens invers. Ved å sette inn (3.96) i Laplace' tredimansjonale likning i sylinderkoordinater likning får vi

$$U_m''(R) + \frac{1}{R}U_m'(R) + \frac{U_m}{V}V''(Z) = 0. \quad (3.97)$$

(3.97) er gyldig hvis og bare hvis hvert av uttrykkene som inneholder henholdsvis  $U_m(R)$  og  $V(Z)$  er lik en separasjonskonstant. Det er naturlig å velge separasjonskonstanten lik  $-K^2$ , gitt ved det dimensjonsløse bølgetallet, når det vertikale problemet løses

$$\frac{1}{U}U''(R) + \frac{1}{UR}U'(R) = -\frac{1}{V}V''(Z) = -K^2. \quad (3.98)$$

Ved hjelp av bunnkravet  $\Psi_m(R, Z) \rightarrow 0$  når  $Z \rightarrow \infty$  fra (3.84) har vi løsningen for den vertikale komponenten

$$V(KZ) = Be^{-KZ}. \quad (3.99)$$

$B$  er en konstant. Med dette får vi at

$$g_m(K, Z) = V(KZ) \int_1^{\infty} U_m(R)W_m(KR)R dR = V(KZ)W(U_m(R)) \quad (3.100)$$

ved definisjonen av Webertransformen (3.87). Den inverstransformerte av overflatebetingelsen (3.85) er

$$g_{mZ}(Z = 0) = -BKW(U_m(R)) = F_m(K), \quad (3.101)$$

og dermed er  $W(U_m(R)) = -F_m(K)/BK$ . Setter vi (3.101) inn i (3.100) har vi at

$$g_m(K, Z) = -\frac{1}{K}e^{-KZ}F_m(K). \quad (3.102)$$

Ved betingelsen (3.85) kan  $U_m$  uttrykkes  $U_m(R) = -f_m(R)/BK$ . Løsningen  $\Psi_m = U_mV$  er ugyldig da den ikke tilfredsstiller betingelsen på sylindere  $\Psi_m R = 0, R = 1$ . Løsningen må derfor uttrykkes ved hjelp av den inverstransformerte  $W^{-1}(g_m(K, Z))$  i (3.96). Vi får følgelig

$$\Psi_m(R, Z) = -\int_0^\infty F_m(K)e^{-KZ} \frac{W_m(K, R)}{J'_m(K)^2 + Y'_m(K)^2} dK. \quad (3.103)$$

Denne løsningen tilfredsstiller betingelsen på sylindere ved at  $W_{mR}(R = 1) = 0$  og betingelsen i fjernfeltet  $\Psi_m \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$  ved den asymptotiske formen på Besselfunksjonene gitt ved (3.25) og (3.26). På sylindere er  $R = 1$  slik at (3.103) kan forenkles ved å bruke Wronskideterminanten for Besselfunksjonene [32]

$$J_m(K)Y'_m(K) - J'_m(K)Y_m(K) = \frac{2}{\pi K}. \quad (3.104)$$

Dette gir uttrykket for  $\Psi_m$  på sylindere

$$\Psi_m(1, Z) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_m(K)e^{-KZ} \frac{K^{-1}}{J'_m(K)^2 + Y'_m(K)^2} dK. \quad (3.105)$$

Da hastighetsfeltet skal beregnes for  $R \geq 1$  vil uttrykket (3.103) for  $\Psi_m$  for alle  $R$  bli brukt i de videre beregningene.

### 3.2.3 Analytisk løsning av den Webertransformerte, $F_m(K)$

Integralet (3.87) kan løses ved hjelp av Lommelfunksjoner definert av Watson (s.345-351). Integralet er på formen

$$F_m(K) = \int_1^\infty W_m(K, R)R^{-n} dR, \quad (3.106)$$

der  $n > 1$  er et heltall. Løsningen er utledet i tillegg C.1 ved hjelp av Watsons identiteter

$$F_m(K) = \frac{2}{\pi}K^{n-1}[(n-m+1)S_{-n-1, m-1}(K) + \frac{m}{K}S_{-n, m}(K)]. \quad (3.107)$$

Lommelfunksjonen  $S_{n, m}(K)$  uttrykkes ved hjelp av en potensrekke bestående av ledd i avtagende potenser av  $K$ . Rekken konvergerer kun om den terminerer det vil si hvis og bare



hvis  $n + m$  eller  $n - m$  er et odd negativt heltall ifølge Watson. Vi kan skrive uttrykkene for  $F_m(K)$  ved hjelp av (3.107)

$$F_0(K) = \int_1^\infty R^{-3} W_0(K, R) dR = \frac{8}{\pi} K^2 S_{-4, -1}(K) \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} F_1(K) &= \int_1^\infty \left( -\frac{4}{R^4} + \frac{2}{R^6} \right) W_1(K, R) dR \\ &= \frac{2}{\pi} (-16K^3 S_{-5, 0}(K) - 4K^2 S_{-4, 1}(K) + 12K^5 S_{-7, 0}(K) + 2K^4 S_{-6, 1}(K)) \end{aligned} \quad (3.109)$$

$$F_2(K) = -2 \int_1^\infty R^{-1} W_2(K, R) dR = -\frac{8}{\pi K} S_{-1, 2}(K) \quad (3.110)$$

$$F_3(K) = 2 \int_1^\infty R^{-2} W_3(K, R) dR = \frac{12}{\pi} S_{-2, 3}(K) \quad (3.111)$$

Uttrykkene for  $F_2$  og  $F_3$  terminerer og er dermed nøyaktige og gitt ved

$$F_2(K) = -\frac{8}{\pi K^3} \quad (3.112)$$

$$\text{og } F_3(K) = \frac{12}{\pi K^3}. \quad (3.113)$$

$F_0(K)$  og  $F_1(K)$  kan evalueres analytisk ved hjelp av summasjon av rekkeuttrykkene gitt ved Lommelfunksjonene. FNV skisserer to ulike måter å evaluere  $F_1(K)$  på, og disse er forklart i deres artikkel [24]. Jeg skal beregne uttrykkene for  $F_m(K)$  numerisk ved hjelp av Romberg integrasjon og kontrollerer resultatene ved hjelp av de analytiske uttrykkene (3.112) og (3.113). I tillegg D.1 beskriver jeg nærmere metoden jeg bruker for å evaluere den Webertransformerte  $F_m$ .

### 3.2.4 Anvendelse av Greens teorem

Det vertikale integralet av komponentene  $\Psi_m(R, Z)$  på sylinderflaten  $R = 1$  dukker opp i beregningen av bølgestene og det veltende momentet på sylinderen som følge av det ikke-lineære potensialet  $\Psi$ . Som nevnt i artikkelen til FNV kan de vertikale kan beregnes analytisk ved hjelp av Greens teorem. Vi anvender Greens teorem på den tidsuavhengige komponenten (3.114) av  $\Psi$  og et hjelpepotensial (3.115) i fluiddomenet som omslutter sylinderen.

Vi kan bruke resultatene av den vertikale integrasjonen over  $\Psi_m$  for å bekrefte nøyaktigheten til de numeriske resultatene for  $\Psi_m(R = 1, Z)$ .

Fluiddomenet er definert av et kontrollvolum avgrenset av flaten  $S_c$ . Vi anvender Greens teorem på de tidsuavhengige potensialene

$$\varphi_1 = \Psi_m(R, Z) \cos m\theta, \quad (3.114)$$

$$\text{og } \varphi_2 = R^{-m} \cos m\theta. \quad (3.115)$$

der (3.114) er de tidsuavhengige komponentene i (3.79) og (3.115) er et hjelpepotensial. Vi kan bruke Greens teorem på potensialene  $\varphi_1, \varphi_2$  da de hver for seg tilfredsstillter Laplace'

tredimesjonale likning i sylinderkoordinater (3.13).

Fluiddomenet avgrenset av flaten  $S_c$  er definert som volumet mellom sylinderen med radius  $R = 1$  og en fiktiv sylinder med radius  $R \rightarrow \infty$ , begge med dypgang  $Z \rightarrow \infty$ . Flatene som omslutter fluiddomenet består av  $S_B, S_1, S_2$  og  $S_3$  som henholdsvis representerer sylinderen med radius  $R = 1$  og  $Z \in [0, \infty)$ , planet ved overflaten  $Z = 0$  og  $R \in [1, \infty)$ , sideveggen  $R = \infty$  og  $Z \in [0, \infty)$ , og bunnflaten  $Z = \infty$  og  $R \in [1, \infty)$ . Normalvektoren peker ut av kontrollvolumet og differensialoperatorene er definert i indre koordinater med enhetsvektorer  $\mathbf{i}_R = \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_Z$ . På flatene  $S_B$  og  $S_2$  er normalvektoren henholdsvis  $\mp \mathbf{i}_R$ . På flatene  $S_1$  og  $S_3$  er normalvektoren gitt ved den indre vertikale koordinaten henholdsvis  $\mp \mathbf{i}_Z$ . Volumet av hele fluiddomenet denoteres  $V$  og flaten som begrenser volumet denoteres  $S_c = S_B + S_1 + S_2 + S_3$ .

Vi anvender divergensteoremet på potensialene  $\varphi_1$  og  $\varphi_2$  og Greens 1. og 2. teorem som gitt av Newman (1977, likning (4.71)) slik at

$$\int_V (\varphi_1 \nabla^2 \varphi_2 - \varphi_2 \nabla^2 \varphi_1) dV = \int_{S_c} (\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}) dS = 0 \quad (3.116)$$

der  $\partial/\partial n = \mathbf{n} \cdot \nabla$ . Grenseflatebetingelsen på sylinderflaten (3.83), overflaten (3.85) og langt unna sylinderen (3.84) anvendes og sammen med at  $\partial \varphi_2 / \partial n = 0$  på  $S_1, S_2$  og  $S_3$  forsvinner integralene over  $S_2$  og  $S_3$ . De gjenstående leddene er

$$0 = \int_{S_B} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} dS - \int_{S_1} \varphi_2 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial Z} \right) dS. \quad (3.117)$$

Innsatt (3.114) og (3.115) og integrasjonsgrensene haes

$$\begin{aligned} 0 &= -m \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \Psi_m(1, Z) \cos^2 m\theta dZ d\theta \\ &\quad - \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \cos^2 m\theta R^{-m} \frac{\partial \Psi_m(R, Z)}{\partial Z} \Big|_{Z=0} R dR d\theta \end{aligned} \quad (3.118)$$

Ved å bruke overflatebetingelsen (3.85) og at

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 m\theta d\theta = \left[ \frac{1}{2m} \sin m\theta \cos m\theta + \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi \quad (3.119)$$

haes

$$\int_0^\infty \Psi_m(1, Z) dZ = -\frac{1}{m} \int_1^\infty R^{-m+1} f_m(R) dR. \quad (3.120)$$

Innsatt for  $m = 1, 2$

$$\int_0^\infty \Psi_1(1, Z) dZ = \frac{2}{3} \quad (3.121)$$

$$\int_0^\infty \Psi_2(1, Z) dZ = \frac{1}{2}. \quad (3.122)$$

For  $m = 3$  er

$$\int_0^\infty \Psi_3(1, Z) dZ = -\frac{1}{6} \quad (3.123)$$

### 3.2.5 Numerisk beregning av Webertransformparet $F_m(K)$ og $\Psi_m(R, Z)$

De fire komponentene  $\Psi_m(R, Z)$   $m = 0, 1, 2, 3$  i det ikkelineære hastighetspotensialet (3.79) beregnes numerisk ved hjelp av Webertransformparet (3.87) og (3.103). For at beregningene skal ha god nøyaktighet må vi analysere integrandene i transformparet. En utfyllende beskrivelse av metoden jeg bruker for å tilrettelegge den numeriske løsningen av Webertransformparet er beskrevet i tillegg D.1. I den numeriske løsningen benytter vi en forbedret trapesmetode kalt Romberg integrasjon [25] som hentydet av FNV. Integrasjonsskjemaet er presentert i tillegg D.3.

Komponentene  $\Psi_m$  i (3.79) evalueres i dypet  $0 \leq Z \leq 50$  langs cylinderen og i feltet  $1 \leq R \leq 20$  ved overflaten gitt ved  $Z = 0$ . Med dette kan vi evaluere det fullstendige ikkelineære potensialet (3.79) i dypet og i feltet. Med beregningen av komponentene i (3.79) kan vi analyserer effekten av den ikkelineære bølgespredningen på trykket i dypet langs cylinderen og på overflatehevingen i feltet nær cylinderen.

### 3.2.6 Numeriske resultater av komponentene $\Psi_m$

Figurene 3.1 og 3.2 viser de dimensjonsløse komponentene  $\Psi_m$  plottet som funksjoner av  $Z$  for  $Z \leq 4$  på cylinderen  $R = 1$ . Vi ser av figurene at samtlige komponenter har sine maksimum ved første ordens overflateheving  $Z = 0$ . I figur 3.2 er komponentene  $\Psi_1(1, Z)$  og  $\Psi_2(1, Z)$  sammen med punkter lest av i figur 3 i artikkelen til FNV. Vi kan observere fullstendig overensstemmelse mellom FNVs resultater og resultatene beregnet i denne avhandlingen.

Komponentene  $\Psi_m$  for  $m = 1, 2, 3$  avtar raskt mot null og dermed er effekten av disse neglisjerbar i en dybde av størrelsesorden  $Z = \mathcal{O}(1)$ , det vil si i en dybde  $z = \mathcal{O}(a)$ .

Vi kan observere at komponenten  $\Psi_0(1, Z)$  som er assosiert med det andreharmoniske leddet i  $\Psi$  (3.79) avtar mer langsomt med dybden.  $\Psi_0$  er dermed den dominerende komponenten i det ikkelineære potensialet i dypet  $Z \gg 1$ . Dette er beskrevet ved hjelp av asymptotene til de fire komponentene i avsnitt (3.2.7). Komponentens assosiert med  $m = 0$  i (3.79) er uavhengig av  $\theta$  slik at effekten av  $\Psi$  er konstant rundt cylinderen ved store dyp  $Z \ll 1$ . Effekten av det andre ordens spredningspotensialet, ved komponenten  $m = 0$ , avtar dermed mer langsomt og trenger ned til større dyp enn effekten av det lineære potensialet  $\phi_S$  som avtar eksponensielt i dypet. Dette er vist i avsnitt 3.3.

Den tredjeordens tredjeharmoniske komponenten av det ikkelineære potensialet (3.79) går som

$$-\frac{1}{4}\omega k A^3 \sin 3\omega t (\cos \theta \Psi_1(R, Z) + \cos 3\theta \Psi_3(R, Z)). \quad (3.124)$$

	trino.m	Newman & Lee	Avvik (%)
$\Psi_0(1, 0)$	-0.5971	-0.5755	1.3
$\Psi_1(1, 0)$	0.7904	0.8004	3.7
$\Psi_2(1, 0)$	0.7982	0.8091	1.4
$\Psi_3(1, 0)$	-0.4849	-0.4925	1.5

Tabell 3.1

mens den andre harmoniske komponenten går som

$$\omega k A^2 a \sin 2\omega t (\Psi_1(R, Z) + \cos 2\theta \Psi_3(R, Z)). \quad (3.125)$$

For å anslå den maksimale effekten av den andre- og tredjeharmoniske komponenten i feltet er de tidsuavhengige komponenten  $\Psi_1 + \cos 2\theta \Psi_3$  og  $\Psi_0 + \cos 3\theta \Psi_3$  plottet ved overflaten  $Z = 0$  i  $\theta = \pi$  i figur 3.3.  $\theta = 0$  korresponderer med lo-siden av sylindere. Vi observerer at komponentene assosiert med det tredjeharmoniske leddet avtar raskt med dypet og er neglisjerbare i en avstand  $R > 5$  fra sylinderveggen. Effekten av den tredjeharmoniske komponenten av det ikkelineære potensialet er dermed begrenset til det indre området  $R = \mathcal{O}(1)$ . Komponentene assosiert med det andreharmoniske leddet i  $\Psi$  avtar mer langsomt men er av neglisjerbar størrelsesorden i et dyp  $R > 10$ .

Det vertikale integralet av komponentene  $m = 1, 2, 3$  beregnes ved hjelp av trapesmetoden og sammenliknes med resultatene (3.121), (3.122) og (3.123). Avviket er størst for komponenten  $\Psi_2$  og er på 1.42% av den analytiske løsningen (3.122).

Feilestimatet til Rombergskjemaet, forklart i tillegg D.3, er størst for komponenten  $\Psi_1$  og er på  $1.82 \cdot 10^{-4}$ .

Dette indikerer meget god nøyaktighet i beregningene.

Utslaget til komponentene  $\Psi_m(R = 1, Z = 0)$  ved overflaten  $Z = 0$  er sammenliknet med resultatene beregnet av Newman & Lee [18] i tabell 3.1. Avviket er gitt i prosent av resultatene til Newman & Lee. Vi observerer at resultatene av beregningene i denne avhandlingen (scriptet *trino.m*) stemmer godt overens med utslagene funnet av Newman & Lee.

### 3.2.7 Asymptotiske uttrykk for komponentene $\Psi_m$

Dersom vi antar at komponentene av det ikkelineære potensialet på sylindere går som en negativ potens av argumentet  $Z$

$$\Psi_m(1, Z) \sim CZ^{-q}, \quad Z \gg 1 \quad \text{og} \quad q > 0 \quad (3.126)$$

har vi at

$$Z^q \Psi_m(1, Z) \sim C. \quad (3.127)$$

$C$  og  $q$  er konstanter. Ved å observere for hvilke  $p$  kurven (3.127) oppfører seg som en konstant,  $C$ , kan asymptoten for  $\Psi_m$  bestemmes. Konstanten  $C$  bestemmes deretter ved å observere plott av  $Z^q \Psi_m(1, Z)$ .

Alternativt kan vi anta at  $\Psi_m \propto Z^{-q}$  som i (3.126) og skrive

$$\ln(\Psi_m(1, Z)) \sim -q \ln Z. \quad (3.128)$$

$\Psi_m(1, Z)$  kan plottes mot  $Z$  med logaritmiske skalaer og når kurven oppfører seg lineært med argumentet  $Z$  angir stigningstallet  $-q$  potensen til asymptoten. Konstanten  $C$  bestemmes som for den første metoden, ved å observere plott av  $Z^q \Psi_m(1, Z)$ .

Asymptotene til komponenten  $\Psi_m$  når  $Z \gg 1$  er

$$\Psi_0(1, Z) \sim -\frac{3}{10} Z^{-3/5}, \quad (3.129)$$

$$\Psi_1(1, Z) \sim \frac{13}{6} Z^{-3}, \quad (3.130)$$

$$\Psi_2(1, Z) \sim \frac{1}{2} Z^{-3} \quad (3.131)$$

$$\text{og } \Psi_3(1, Z) \sim -\frac{1}{5} Z^{-5}. \quad (3.132)$$

Asymptoten (3.129) til komponenten  $\Psi_0$  er illustrert i figur 3.4. I figur 3.4a er logaritmen til  $\Psi_0(1, Z)$  plottet som en funksjon av  $Z$  sammen med logaritmen til asymptoten (3.129). De to kurvene er omtrent fullstendig sammenfallende.

Uttrykkene (3.130) og (3.131) bekrefter overensstemmelsen med FNVs resultater.

Newman (1996b) [16] har beregnet det andreordens andreharmoniske potensialet  $\phi_2$  i diffraksjonsregimet  $ka = \mathcal{O}(1)$ , og presenterer den asymptotiske formen til potensialet

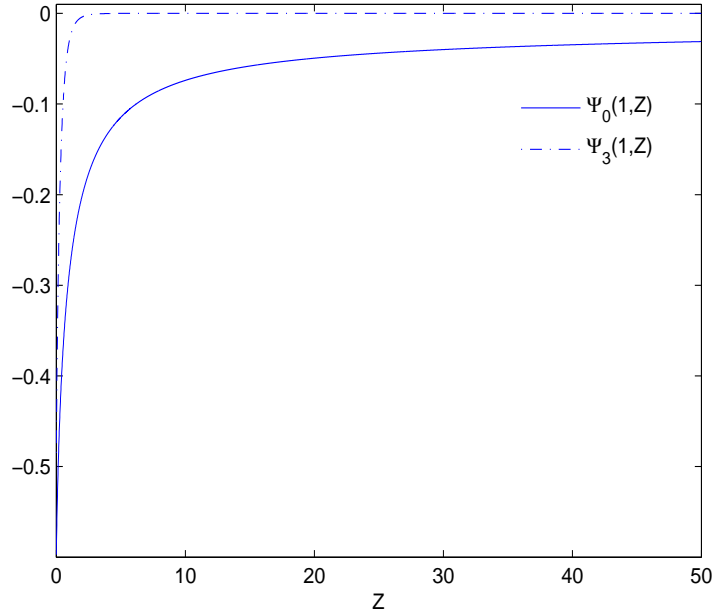
$$\phi_2 \sim -\frac{z}{R(R+x)}, \quad z \rightarrow -\infty \quad (3.133)$$

der  $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ . Når  $z \ll 1$  på cylinderen er asymptoten til Newmans  $\phi_2$  gitt ved

$$\phi_2 \sim -\frac{1}{z}. \quad (3.134)$$

Den asymptotiske formen til det andreharmoniske potensialet ved hjelp av FNVs teori er gitt ved komponentene  $m = 0, 2$  i (3.79) og avtar som den dominerende komponenten  $\Psi_0$  i dypet.

For sammenlikning er den dimensjonsløse andreharmoniske komponenten av potensialet (3.79) plottet i figur 3.4b sammen med asymptoten funnet i (3.129) og den asymptotiske løsningen (3.134) til Newman (1996b) (multiplisert med en konstant for å gjøre løsningene sammenliknbare). Vi observerer at FNVs andreharmoniske diffraksjonspotensial avtar mer langsomt i dypet enn Newmans andreharmoniske diffraksjonsløsning.



Figur 3.1: Komponentene  $\Psi_0$  og  $\Psi_3$  plottet som funksjoner av  $Z$  på sylinderen  $R = 1$ .  $Z = 0$  korresponderer med overflatehevingen  $z = \eta_1$  som følge av det innkomende bølgefeltet.

### 3.2.8 Evaluering av det fullstendige ikkelineære potensialet $\Psi$ i feltet

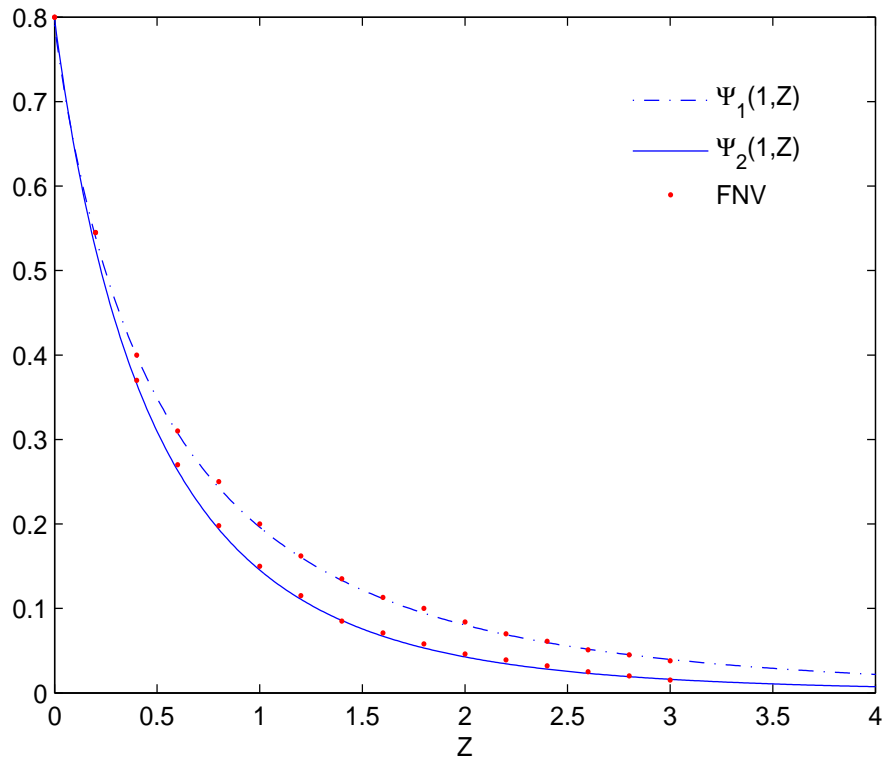
Ekvipotensiallinjene, eller konturlinjene, til det ikkelineære hastighetspotensialet  $\Psi$  (3.79) er illustrert i figurene 3.5 og 3.6 i det horisontale planet  $Z = 0$ . Hver konturlinje med verdi  $C$  illustrerer funksjonen  $\Psi = C$  der  $C$  er en konstant. Aksene er dimensjonsløse og er definert som  $X = R \cos \theta$  og  $Y = R \sin \theta$  med origo i senteraksen til sylinderen og benevnningen til ekvipotensiallinjene er  $[m^2/s]$ .

Konturlinjene til potensialfeltet idet den innkommende bølgen skjærer sylinderaksen,  $\eta_1(\omega t = \pi/2)$  er illustrert i figur 3.5, og idet noden  $\eta_1(\omega t = \pi)$  treffer sylinderaksen i figur 3.5.

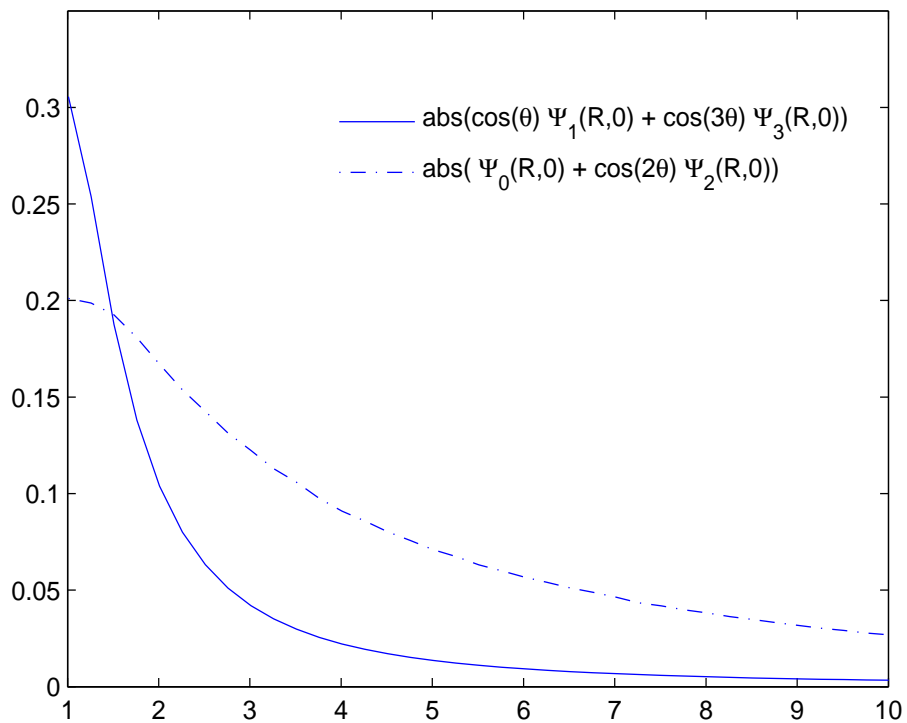
Det ikkelineære potensialfeltet beskriver en multipol. Vektorfeltet  $\nabla\psi$  beskriver hastighetsfeltet og står normalt på ekvipotensiallinjene og peker i retning fra negative til positive skalarverdier.

Når første ordens bølgebuk  $\eta_1(\omega t = 3\pi/2)$  treffer sylinderaksen er hastighetsfeltet likt som i figur 3.5 men rettet motsatt vei. Verdiene av feltlinjene indikerer at hastigheten som følge av spredningspotensialet  $\Psi$  er størst nær sylinderveggen og avtar raskt ut i feltet. Effekten av den ikkelineære spredningen rundt sylinderen er størst når bølgekammen og bølgebuken til førsteordens innkommende bølge treffer sylinderaksen.

Vi observerer som forventet at hastighetsfeltet er symmetrisk om  $X$ -aksen.

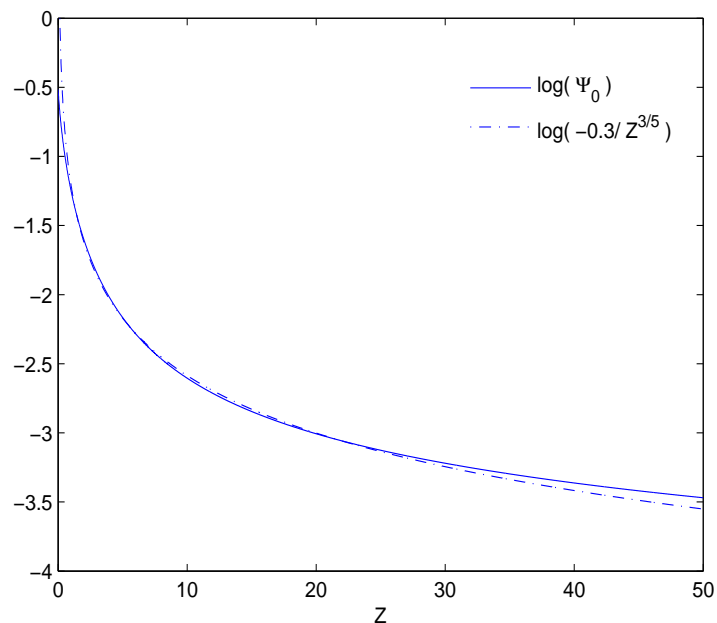


Figur 3.2:  $\Psi_1(1, Z)$  og  $\Psi_2(1, Z)$  plottet mot  $Z$ .  $\Psi_m$  er dimensjonsløs. Punkter lest av figur 3 i FNV er plottet inn.  $Z$  er den indre koordinaten som beveger seg vertikalt med første ordens innkommende overflatehevning  $\eta_1$ .

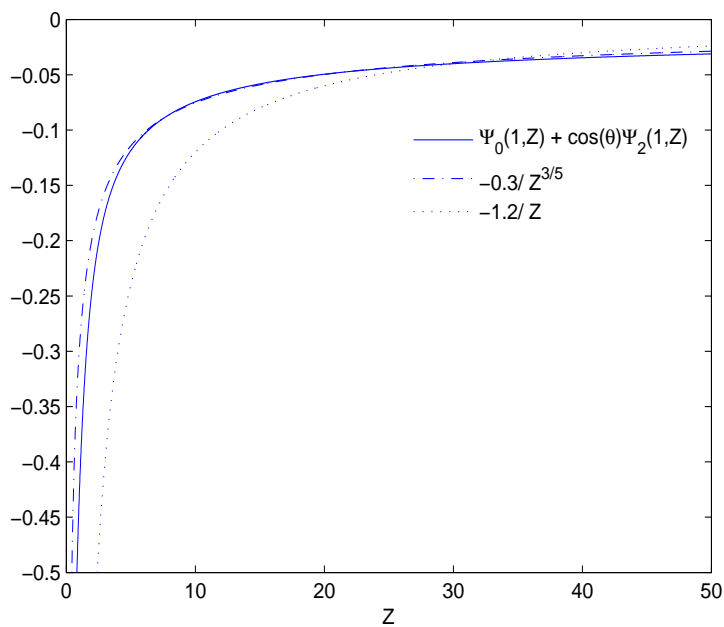


Figur 3.3: De dimensjonsløse komponentene i (3.79) plottet i ut feltet  $R \geq 1$  ved overflaten  $Z = 0$  i  $\theta = \pi$ .



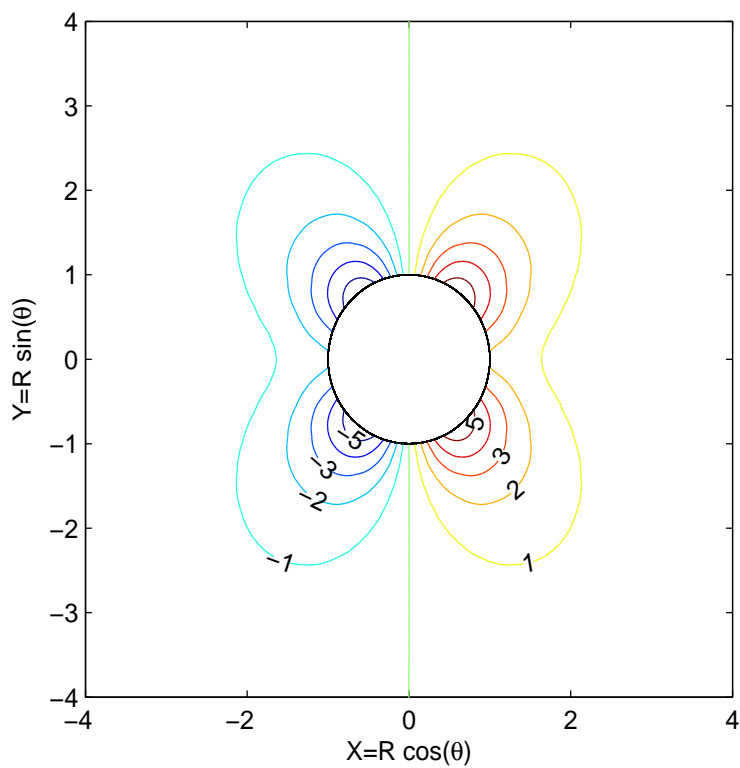


(a) Logaritmen til  $\Psi_0(1, Z)$  og logaritmen til asymptoten (3.129) plottet mot  $Z$ .

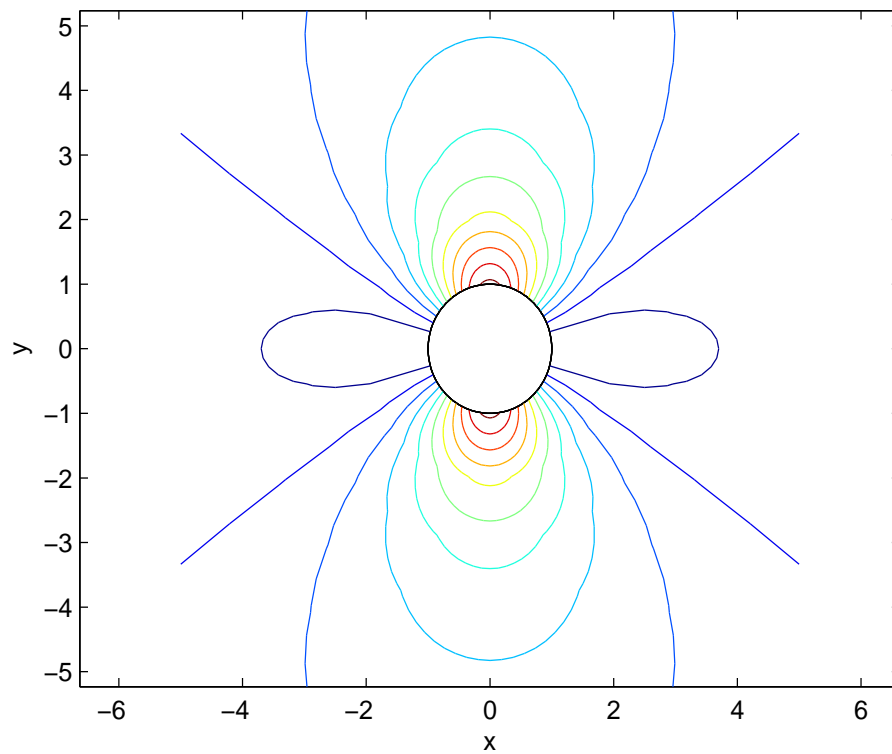


(b)  $\Psi_0(1, Z) + \cos\theta\Psi_2(1, Z)$  plottet mot  $Z$  sammen med asymptoten (3.129) og asymptoten (3.134) til Newmans (1996b) andreordens potensial.

Figur 3.4



Figur 3.5: Ekviskalarlinjene til det ikkelineære potensialet  $\Psi$  gitt ved (3.79) plottet i planet  $Z = 0$  idet bølgekammen til første ordens overflatehevning  $\eta_1$  treffer sylinderaksen,  $\omega t = \pi/2$ . Aksene representerer den indre radielle koordinaten  $R = r/a$  og dimensjonen til ekviskalarlinjene  $m^2/s$  er dimensjonen til potensialet.



Figur 3.6: Som figur 3.5. Ekviskalarlinjene i planet  $Z = 0$  idet noden  $\eta_1(\omega t = \pi)$  (null nedkryssing) treffer sylinderaksen.

### 3.3 Trykket på sylindringen

Det hydrodynamiske trykket på sylindringflaten brukes i beregningen av bølgekreftene på sylindringen. Vi skal bruke diffraksjonspotensialene funnet ved hjelp av FNVs teori til å beregne trykket på sylindringen og se på hvordan første-, andre- og tredjeordens komponent av trykket avtar i dypt langs sylindringen.

Bernoullis trykklikning er gitt ved

$$p(r = a, \theta, z, t) = -\rho\left(\phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + gz\right)_{r=a}. \quad (3.135)$$

Bidrag i trykklikningen av høyere orden enn  $\epsilon^3$  neglisjeres i beregningen av trykket. Dette er konsistent med FNVs teori i orden av perturbasjonsparameteren  $\epsilon$ . Leddene som bidrar i (3.135) til og med orden av  $\epsilon^3$  er

$$p(a, \theta, z, t) = -\rho\left(\phi_{Dt} + \psi_t + \frac{1}{2}(\nabla\phi_D \cdot \nabla\phi_D + 2\nabla\phi_D \cdot \nabla\psi) + gz\right)_{r=a} + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (3.136)$$

I beregningen av bidragene fra  $\phi_D$  brukes diffraksjonspotensialet (3.53) og hjelpeuttrykkene utregnet i tillegg B.1.

Leddene i (3.136) som involverer kun det lineære diffraksjonspotensialet er gitt ved

$$\begin{aligned} (\phi_{Dt})_{r=a} &= \operatorname{Re}\{i\omega\phi_D\} \\ &= gAe^{kz} \left( -\sin\omega t \left[ 1 + \frac{(ka)^2}{2} \left( \ln \frac{ka}{2} + \gamma - \frac{1}{2} - \cos 2\theta \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \cos\omega t \left[ 2ka \cos\theta - \pi \frac{(ka)^2}{4} \right] \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4), \end{aligned} \quad (3.137)$$

og

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\nabla\phi_D|_{r=a}^2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}\phi_{D\theta}^2 + \phi_{Dz}^2\right)_{r=a} \\ &= \frac{1}{2}gkA^2e^{2kz} \left( 2(1 - \cos 2\omega t) \sin^2\theta + \cos^2\omega t \right. \\ &\quad \left. + 2ka \sin 2\omega t (\cos\theta - \sin\theta \sin 2\theta) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (3.138)$$

Ved hjelp av Taylorutviklingen

$$e^{kz} = e^{-kaZ + k\eta_1} = e^{-kaZ} \left( 1 + k\eta_1 + \frac{1}{2}(k\eta_1)^2 \right) \quad (3.139)$$

kan (3.137) og (3.138) uttrykkes i indre koordinater.

Den tidsderiverte av det ikkelineære potensialet uttrykkes vha differensialoperatoren (3.71) i indre koordinater

$$\psi_t = \Psi_t + \frac{A\omega}{a} \cos\omega t \Psi_Z \quad (3.140)$$

der

$$\begin{aligned} (\Psi_t)_{R=1} &= 2gk^2A^2a \cos 2\omega t (\Psi_0(1, Z) + \cos 2\theta \Psi_2(1, Z)) \\ &+ \frac{3}{4}gk^2A^3 (\cos \omega t - \cos 3\omega t) (\cos \theta \Psi_1(1, Z) + \cos 3\theta \Psi_3(1, Z)). \end{aligned} \quad (3.141)$$

Ved å benytte rekkeutviklingen (3.139) og definisjonen av den vertikalt deriverte (3.70) i indre koordinater blir

$$(\nabla \phi_D \cdot \nabla \psi)_{r=a} = 2\frac{A\omega}{a} \sin \theta \sin \omega t \Psi_\theta - \frac{A\omega}{a} \cos \omega t \Psi_Z + \mathcal{O}(\epsilon^4) \quad (3.142)$$

Det siste leddet i (3.140) kanselleres mot det tilsvarende leddet i (3.142) slik at

$$(\psi_t + \nabla \phi_D \cdot \nabla \psi)_{r=a} = \Psi_t + 2\frac{A\omega}{a} \sin \theta \sin \omega t \Psi_\theta + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (3.143)$$

der

$$\begin{aligned} (\Psi_\theta)_{R=1} &= 2\omega k A^2 a \sin 2\omega t \sin 2\theta \Psi_2(1, Z) \\ &+ \omega k A^3 \sin^3 \omega t (\sin \theta \Psi_1(1, Z) + 3 \sin 3\theta \Psi_3(1, Z)). \end{aligned} \quad (3.144)$$

### Illustrasjon av trykket på sylindere med kommentarer

Som beskrevet i avsnitt 3.2.8 avtar komponentene  $m = 1, 2, 3$  av det ikkelineære hastighetspotensialet  $\Psi$  (3.79) raskt i dypet. Den andreharmoniske komponenten av (3.79) assosiert med  $m = 0$  avtar mer langsomt i dypet. Dette har innvirkning på den andreharmoniske trykket på sylindere da den inneholder bidrag fra det ikkelineære potensialet. Ved å betrakte komponentene som inngår i trykket (3.137)-(3.144) ser vi at den relative betydningen av andre og tredje ordens trykk-komponenter er proporsjonale med henholdsvis  $k^2A^2a$  og  $k^2A^3$  og øker med økende bølgesteilhet  $kA$ . Det tredjeordens trykket er av lik orden i  $\epsilon$  som det andreordens trykket men avtar mye raskere i dypet enn det første og andreharmoniske trykket og er neglisjerbart i et dyp av orden  $z = \mathcal{O}(a)$ . Dette er som følge av den asymptotiske formen til komponentene  $\Psi_1$  og  $\Psi_3$  gitt i (3.130) og (3.132).

Absoluttverdien av første og andre ordens komponenter av trykket i  $\theta = \pi$  er plottet i figur 3.7 idet bølgekammen til første ordens innkommende bølge treffer sylindereaksen. Skaleringen er slik at komponentene er gjort uavhengige av amplituden  $A$  og vertikalaksen er dimensjonsløs.  $ka$  er 0.3142. Første ordens trykk er dermed av  $\mathcal{O}(1)$  mens andre ordens trykk er av  $\mathcal{O}(ka)$ . Trykket er plottet på lo-siden av sylindere,  $\theta = \pi$ . Jeg bruker notasjonen til Chau & Eatock-Taylor [30] slik at  $p^{(1)}$  og  $p_1^{(2)}$  første- og andre ordens trykk som følge av det lineære potensialet, mens  $p_2^{(2)}$  er andreordens trykk som følge av det ikkelineære potensialet. Første og andre ordens trykk er av henholdsvis første og andre harmoni.

Vi observerer at trykk-komponentene har størst utslag ved den frie overflaten. Ledende ordens trykk, gitt ved hjelp av komponenten (3.137), avtar eksponensielt med dypet og er i figur

3.7 dominerende i et dyp  $z > -15a$ . Andre ordens komponent  $p_1^{(2)}$  gitt ved hjelp av (3.138) avtar raskere enn første ordens komponent i dypet mens trykk-komponenten  $p_2^{(2)}$  trenger ned til og er dominerende i et større dyp  $z < -15a$ . Dette skyldes komponenten  $m = 0$  i det ikkelineære potensialet som avtar som (3.129) i dypet.

Chau & Eatock-Taylor har illustrert liknende resultater for det andreordens trykket  $p_2^{(2)}$  på en sylinder i endelig vandyp i diffraksjonsregimet.

Grunnen til at trykk-komponenten  $p_2^{(2)}$  faller nær overflaten i figur 3.7 er at funksjonene  $\Psi_2$  og  $\Psi_0$  som inngår i uttrykket for  $|p_2^{(2)}|$  har motsatt fortegn.

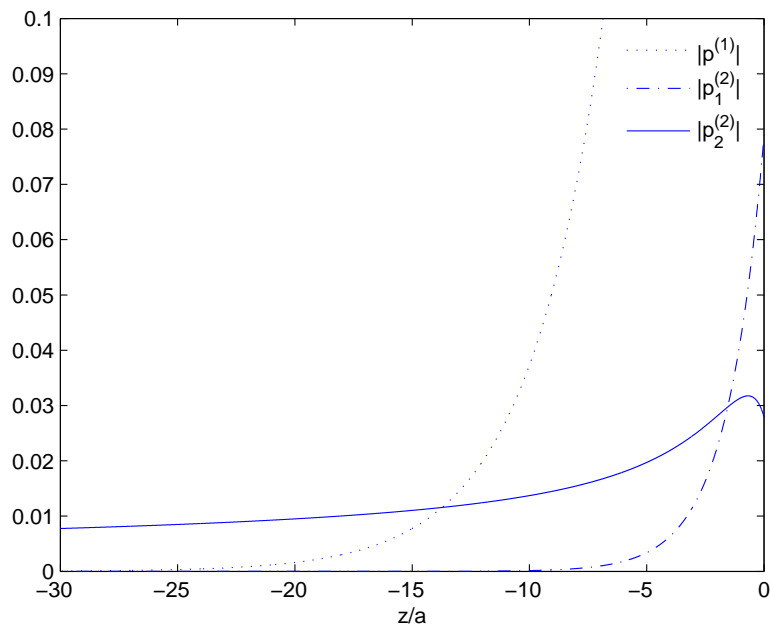
I figurene 3.8a og 3.8b er første- og andreordens trykk-komponenter plottet for henholdsvis  $ka = 0.1571$  og  $ka = 0.2094$  på lo-siden av sylindren. Vi observerer at den andreordens trykk-komponenten  $p_2^{(2)}$  er dominerende i dypet  $z < -28a$  for  $ka = 0.2094$  mens den er dominerende et dyp  $z < -40a$  for  $ka = 0.1571$ . Størrelsesorden av de andreordens trykk-komponentene minker med minkende  $ka$ .

Som følge av at komponenten  $p_2^{(2)}$  i (3.141) er uavhengig av  $\theta$  vil den ikke bidra til den integrerte horisontale lasten på den bunnfestede sylindren.

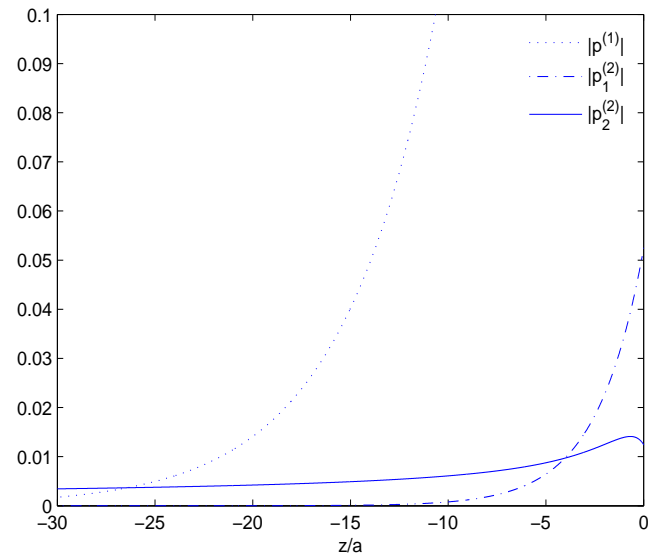
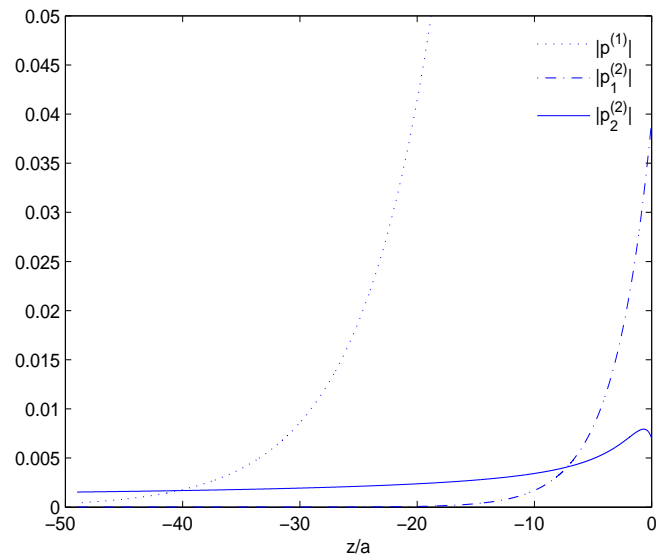
Det andreharmoniske trykkfeltet vil derimot bidra til en trykkkraft som virker i hiv-retning og kan forårsake resonant vibrasjon, *springing*, i en strekkstagplattform (TLP) eller spenningsfortøyde monotårn.

Det sakte avtagende andre harmoniske trykket/feltet  $|p_2^{(2)}|$  (identifisert her) oppstår som følge av nærværet av sylindren i regulære tredje ordens Stokesbølger på dypt vann. Slike trykkfelt er observert på havbunnen i uforstyrrede bølgefelt generert av (hav)vind. Longuet-Higgins & Ursell forklarer fenomenet med (at) ikkelineær interaksjon mellom motsatt propagerende bølgetog med veldig liten bølgelengde  $\mathcal{O}(1cm)$  og av samme frekvens som produserer lange bølger ( $\mathcal{O}(100m)$ ) av dobbel frekvens. Disse ikkelineære bølgene setter opp raskt fluktuerende trykkfelt som kan observeres mer enn 5km under havoverflaten, Farell & Munk [33], og som forårsaker mikroseismer dvs små skjelvninger på havbunnen.

Det langsomt avtagende andre harmoniske trykket/feltet  $|p_2^{(2)}|$  oppstår som følge av nærværet av sylindren i regulære tredje ordens Stokesbølger på dypt vann. Slike trykkfelt er observert på havbunnen i uforstyrrede bølgefelt generert av havvind. Longuet-Higgins & Ursell [21] forklarer fenomenet med ikkelineær interaksjon mellom motsatt propagerende bølgetog med av samme frekvens som produserer lange bølger av dobbel frekvens. Disse ikkelineære bølgene setter opp raskt fluktuerende trykkfelt som kan observeres mer enn 5km under havoverflaten, Farell & Munk [33], og som forårsaker mikroseismiske vibrasjoner på havbunnen.



Figur 3.7: Første og andreordens komponenter av trykket på sylindren som funksjoner av  $z$  i punktet  $\theta = \pi$  idet første ordens innkommende bølgekam treffer sylindreraksen  $\eta_1(\omega t = \pi/2)$ .  $ka = 0.3142$  og vertikalaksen er dimensjonsløs.

(a)  $ka = 0.1571$ (b)  $ka = 0.2094$ 

Figur 3.8: Som i figur 3.7



### 3.4 Overflatehevning i feltet og oppskylling på sylindren

Overflatehevningen i det indre området rundt sylindren består av den første ordens innkommende komponenten  $\eta_1$  gitt i 3.4 og den andre og tredje korreksjonen  $\eta_2$  og  $\eta_3$  til og med tredje orden i  $\epsilon$ .  $\eta_1$  er førsteharmonisk i tid og komponentens bølgelengde er mye større enn cylinderradien.

Den dynamiske overflatebetingelsen (2.3) inneholder produktledd av hastighetspotensialet  $\phi$  og komponentene av overflatehevningen uttrykkes i det indre området ved hjelp av utviklingen (3.139). Vi kan dermed se at komponentene  $\eta_2$  og  $\eta_3$  vil inneholde andre- og tredjeharmoniske komponenter.

Under eksperimenter har Huseby & Grue [23] observert at den høyere-harmoniske overflatehevningen er den mest synlige i feltet som følge av bølgespredningen rundt sylindren. Dette motiverer til å undersøke nærmere den høyere ordens bølgeløsningen ved hjelp av FNVs teori i det indre området.

Den tredjeharmoniske overflatehevningen har en bølgelengde på en niendedel av bølgelengden til den innkommende førsteordens bølgen. De tredjeharmoniske bølgekomponentene er dermed korte, og har kortere periode, i forhold til den innkommende bølgen og vi ønsker å undersøke om disse kan ha en uttalt amplitude som er større enn de andreharmoniske i steile bølger.

Overflatehevningen er gitt ved den dynamiske betingelsen (2.3) og evalueres på den frie overflaten

$$\eta = -\frac{1}{g}(\phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2), \quad z = \eta. \quad (3.145)$$

Perturbasjonsutviklingen (2.10) av overflatehevningen settes inn i (3.145) og ledd av korresponderende orden  $\epsilon^n$  benyttes for å finne komponentene  $\eta_n$ . Den dynamiske betingelsen skal evalueres i  $z = \eta$  hvilket gir implisitte uttrykk for komponentene  $\eta_n$ . Ved Taylorutvikling av  $e^{kz}|_{z=\eta}$  om  $z = 0$  har vi at

$$e^{k\eta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k\eta)^n}{n!} = 1 + k\eta + \frac{(k\eta)^2}{2} + \mathcal{O}(\eta^3) \quad (3.146)$$

kan overflatehevningen uttrykkes eksplisitt til angitt/konsistent orden av  $\epsilon$ . Insatt perturbasjonsutviklingen (2.10) av  $\eta$  får vi

$$e^{k\eta} = 1 + k\eta_1 + k\eta_2 + \frac{(k\eta_1)^2}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (3.147)$$

Den første komponenten av overflatehevningen skyldes det innkommende bølgefeltet og er gitt i (3.4). På sylinderaksen  $x = 0$  har vi at

$$\eta_1 = A \sin \omega t. \quad (3.148)$$

I og med at bølgelengden antas å være mye større enn sylinderadien  $ka \ll 1$  kan første ordens overflatehevning antas å være tilnærmet konstant på sylinderen  $r = a$  og i det indre området  $r = \mathcal{O}(a)$  ved hvert tidssteg. Den andre komponenten av overflatehevingen inneholder bidrag fra første og andre ordens ledd i det lineære diffraksjonspotensialet (3.52)

$$\eta_2 = -\frac{1}{g}(\phi_{Dt} + \frac{1}{2}|\nabla\phi_D|^2)_{z=\eta} \quad (3.149)$$

Vi følger FNV og beregner  $\eta_2$  ved hjelp av (3.147), relasjonene (3.61) til (3.63) og den lineære dispersjonsrelasjonen (3.5) og får

$$\eta_2 = -kA\left(r + \frac{a^2}{r}\right) \cos \omega t \cos \theta - \frac{1}{2}kA^2 \cos 2\omega t + kA^2\left(\frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta - \frac{1}{2}\frac{a^4}{r^4}\right) \sin^2 \omega t. \quad (3.150)$$

Som en utvidelse av FNVs artikkel ønsker vi å undersøke effekten av den ikkelineære bølgespredningen på overflatehevingen som en utvidelse av FNVs artikkel. Effekten av det ikkelineære potensialet  $\psi$  kommer inn i den tredje komponenten  $\eta_3$  og er uttrykt ved

$$\begin{aligned} \eta_3 &= -\frac{1}{g}(\phi_{Dt} + \psi_t + \frac{1}{2}|\nabla\phi_D|^2 + \nabla\phi_D \cdot \nabla\Psi)_{z=\eta} = \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= -\frac{1}{g}\left(\phi_{Dt} + \Psi_t + \frac{1}{2}|\nabla\phi_D|^2 + \frac{\omega A}{a} \sin \omega t \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta \Psi_R \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega A}{r} \sin \omega t \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta \Psi_\theta\right)_{z=\eta} = \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (3.151)$$

(3.151) inneholder ledd proporsjonale med  $Aa^2$ ,  $A^2a$ ,  $A^3$  og  $A^4/a$  og harmonier opp til  $3\omega t$ . Uttrykket er konsistent i orden av  $\epsilon^3$  på tross av at det inneholder en fjerdeordens komponent. Det er beregnet ved hjelp av FNVs teori som er konsistent til og med orden av  $\epsilon^3$  og bidraget fra en femte Fourierkomponent i det ikkelineære potensialet vil være av orden  $\epsilon^4$ .

$$\begin{aligned} \phi_{Dt} &= gA\left[-\sin \omega t \left(\frac{(ka)^2}{2}\left(\gamma - \frac{1}{2} - \cos 2\theta\right)\right) - \frac{\pi(ka)^2}{4} \cos \omega t \right. \\ &\quad \left. - \sin \omega t \left(k\eta_2 + \frac{(kA)^2}{2} \sin^2 \omega t\right)\right] = \mathcal{O}(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (3.152)$$

og

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\nabla\phi_D|^2 &= \frac{gkA^2}{2}\left[2kA \sin \omega t \left(\sin^2 \omega t \left(\cos^2 \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^2\right) + \cos^2 \omega t\right) \right. \\ &\quad \left. + \sin 2\omega t \left(\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \left(-\frac{kr}{2} \left(1 + \left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta\right) + \frac{ka^2}{r}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin \theta \sin 2\theta \frac{kr}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \left(1 + \frac{a^4}{r^4}\right) + \cos \theta kr \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\right)\right] \quad (3.153) \\ &= \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned}$$

Leddene som inneholder  $\Psi_t$  og  $\Psi_\theta$  er kjent og gitt i likning (3.141) og (3.144).  $\Psi_R$  er uttrykt ved

$$\begin{aligned}\Psi_R &= \omega k A^2 a \sin 2\omega t (\Psi_{0R}(R, Z) + \cos 2\theta \Psi_{2R}(R, Z)) \\ &+ \omega k A^3 \sin^3 \omega t (\cos \theta \Psi_{1R}(R, Z) + \cos 3\theta \Psi_{3R}(R, Z))\end{aligned}\quad (3.154)$$

der de partielt deriverte komponentene  $\Psi_{mR}$  er ukjent i feltet  $R \geq 1$ . På sylindren  $R = 1, r = a$  forsvinner leddet i (3.151) som involverer  $\Psi_R$  og dermed er hele uttrykket kjent og komponentene er skrevet ut i avsnitt 3.3. Komponentene  $\Psi_m(R, Z)$  evalueres i  $Z = 0$  som tilsvarer  $z = \eta_1$ .

For å kunne illustrere overflatehevningen  $\eta_3$  i feltet rundt sylindren må vi beregne den deriverte  $\Psi_R$ . Komponentene  $\Psi_{mR}$  i  $\Psi_R$  kan tilnærmes numerisk ved hjelp av en endelig differansemetode. Den romlige deriverte  $\Psi_R$  i  $R = 0$  er kjent ved betingelsen (3.83). Det ikkelineære potensialet er definert ved hjelp av den diskrete indre horisontale koordinaten  $R$ .  $R$  er diskretisert i  $n$  punkter med konstant steglengde  $h = R_{i+1} - R_i$ . I de indre punktene bruker vi en sentrert differansemetode som beskrevet av Langtangen [12]

$$\Psi_{mR}(R_i) \approx \frac{1}{2h} (\Psi_m(R_{i+1}) - \Psi_m(R_{i-1})). \quad (3.155)$$

I endepunktet tilnærmes  $\Psi_{mR}(R_n)$  ved hjelp av en baklengs, eller oppvind, differansemetode

$$\Psi_{mR}(R_n) \approx \frac{1}{h} (\Psi_m(R_n) - \Psi_m(R_{n-1})). \quad (3.156)$$

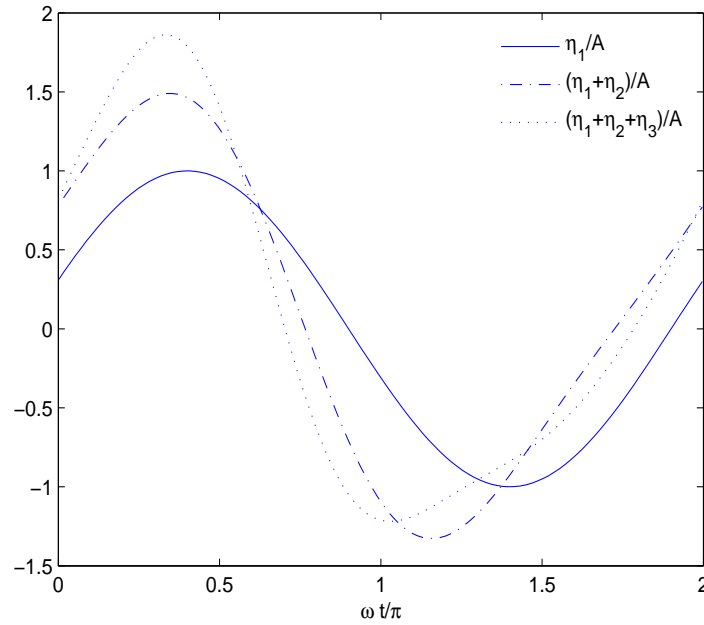
### Kommentarer til resultater og figurer av overflatehevningen

Den andre komponenten (3.150) av overflatehevningen inneholder andre ordens korreksjon i det innkommende bølgefeltet og effekten av det lineære spredningspotensialet  $\phi_S$ . Leddet i (3.150) som er uavhengig av  $r$  er den velkjente andre ordens korreksjonen i den innkommende overflatehevningen for Stokesbølger på dypt vann beskrevet av Newman (1977, likning (6.37)). Korreksjonen bidrar til å gjøre bølgekammen steilere og bølgebuken flatere i den innkommende overflatehevningen. Bidragene som følge av bølgespredningen avtar som  $r^{-1}$  eller raskere ut i feltet.

Newman & Lee [18] har brukt FNVs teori til å beregne overflatehevningen på sylindren, oppskylling, til tredje orden i  $\epsilon$ . Den andre komponenten  $\eta_2$  (3.150) av overflatehevningen er sammenliknet med andre ordens overflatehevning ved hjelp av konvensjonell diffraksjonsanalyse beregnet med programmet WAMIT (se [1]). Andre ordens overflatehevning ved hjelp av diffraksjonsanalyse består av et ledd  $\eta_q$  som inneholder kvadratiske ledd av det lineære potensialet og  $\eta_p$  som består av bidrag fra det andreordens potensialet. Newman & Lee får god overensstemmelse mellom overflatehevningen  $\eta_2$  og det kvadratiske leddet  $\eta_q$  på sylindren.

I figur 3.9 er summen av første, andre og tredje komponent  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  og  $\eta_3$  av overflatehevningen plottet som funksjoner av tiden på lo-siden av sylinderen over én syklus av fundamentalperioden. Utslagene på vertikalaksen er skalert med  $A$  og er dimensjonsløse. Bølgesteilheten er  $kA = ka = 0.2094$ . Korreksjonen  $\eta_2$  hever bølgehøyden i den samlede overflatehevningen. Korreksjonens minimumsverdi sammenfaller med midtnoden ( $\omega t = \pi/2$ ) i første ordens overflatehevning og øker bølgesteilheten. Den tredje komponenten  $\eta_3$  bidrar også til å øke bølgesteilheten i den totale overflatehevningen.

Den tredjeharmoniske delen av overflatehevningen  $\eta_3$  avtar ut i feltet som  $r^{-2}$  og som



Figur 3.9: Total overflatehevning til og med  $\mathcal{O}(\epsilon^3)$  som funksjon av tiden plottet på lo-siden av sylinderen,  $(r, \theta) = (a, \pi)$ . Overflatehevningen er skalert med  $A$  og vertikalaksen er dimensjonsløs. Radius  $a$  og bølgeamplitude  $A$  er  $10m$  og bølgesteilheten er  $kA = 0.3142$ .

komponentene  $\Psi_m(R, 0)$  illustrert figur 3.3. Bølgeløsningen til og med orden av  $\epsilon^3$  beregnet ved hjelp av FNVs teori er dermed veldig lokal og gir et bilde av overflatehevningen for  $r < 5a$ .

Jeg har valgt å visualisere overflatehevningen i feltet for bølgesteilheten  $kA = ka = 0.3142$  for å fremheve utslagene som følge av de høyereordens komponentene av overflatehevningen. Utslagene er av betydelig mindre størrelsesorden for lavere verdier av bølgesteilheten.

Ekviskalarlinjene, eller konturlinjene, til korreksjonen  $\eta_3$  og den tredjeharmoniske komponenten  $\eta_{3H}$  av overflatehevningen er plottet i figur 3.10 i planet  $Z = 0$  idet første or-

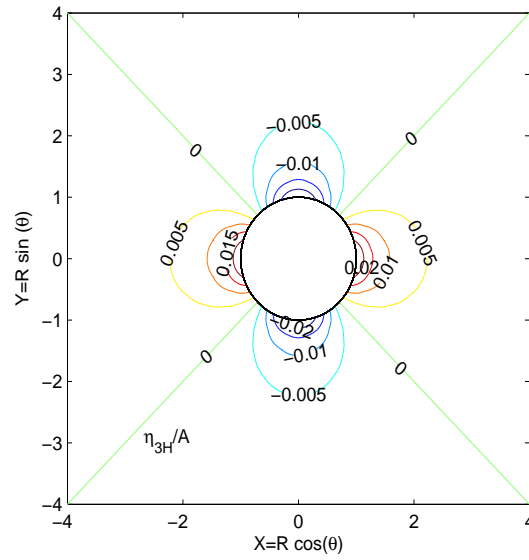
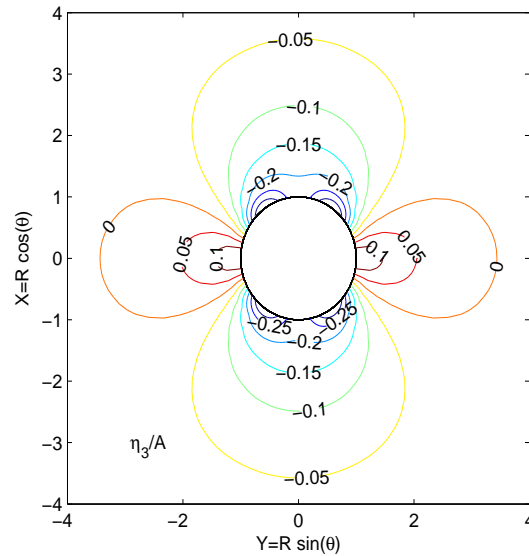
dens innkommende bølgekam treffer sylindren. Konturlinjene angir overflatehevningen som høydekvoter over  $xy$ -planet og verdiene til linjene er gjort dimensjonsløse ved skaleringen med  $A$ . Vi ser at den tredjeharmoniske komponenten av den tredje korreksjonen  $\eta_3$  av neglisjerbar størrelsesorden i feltet  $R > 1$ . Overflatehevningen som inneholder bidrag fra det ikkelineære potensialet  $\eta_3$  er begrenset til et område  $R < 3$ . Korreksjonen  $\eta_3$  er symmetrisk om både  $x$  og  $y$ -aksen for  $\omega t = \pi/2$ .

Den samlede overflatehevningen  $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3$  i planet  $Z = 0$  er illustrert i tillegg 3.8 ved tidsstegene  $\omega t = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$  og  $3\pi/2$ . Første ordens innkommende overflatehevning og dens korreksjon er tilnærmet konstant i det indre området og påviker i liten grad variasjonen av overflatehevningen. Figurene illustrerer dermed hovedsakelig effekten av bølgespredningen rundt sylindren.

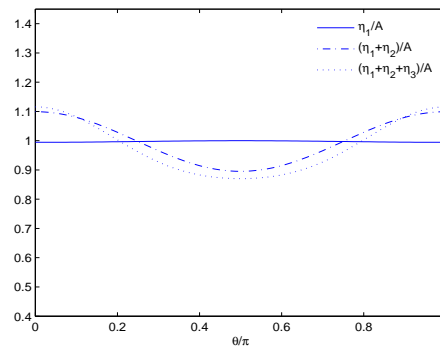
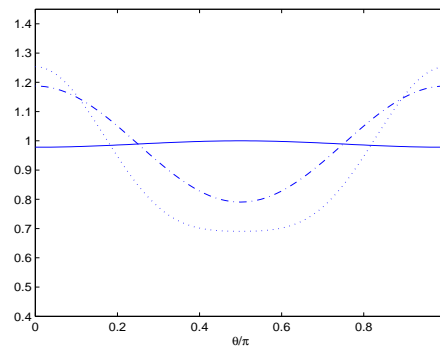
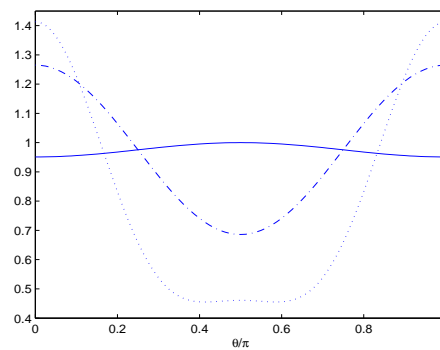
(profilen til overflatehevningen på tvers av forplantningsretningen)

Figur 3.15 og 3.16 viser at overflatehevningen på le-siden av sylindren er lavere like bak sylindren, ved  $\theta = 0$ , enn mot sidene  $\theta \rightarrow \pm\pi/2$  når  $\omega t = \pi/4$  like før første ordens bølgekam treffer sylindren. Det motsatte er tilfelle i figur 3.17 når første ordens bølgekam treffer sylindreraksen og i figur 3.18 like etter at bølgekammen har forlatt sylindren. Dersom vi følger linjen  $X = 2$  i figur 3.18 ser vi at overflatehevningen ved  $Y = 0$ , dvs like bak sylindren, er merkbart høyere ( $\eta \sim 1.5A$ ) enn for  $|Y| > 1$  ( $\eta \sim 1.2A$ ). Når den nedkryssende noden  $\eta_1(\omega t = \pi)$  treffer sylindreraksen (figur 3.19) er overflatehevningen langs linjen  $X = 2$  jevn.

Grue, Bjørshol og Strand [10] har i modelleksperiment dokumentert effekten av bølgespredning på overflatehevningen ved en sylinder utsatt for lange bølger. I deres figur 7 viser Grue et al. at overflatehevningen i  $yz$ -planet i skyter opp ved en avstand  $x = 2a$  bak sylindren. Effekten er sterkest for den instantane bølgesteilheten  $k\eta_{max} = 0.3406$ . Figur 3.11 viser oppskyllingen (maksimal overflatehevning) rundt omkretsen på sylindren idet første ordens bølgekam passerer sylindren. Amplituden  $A$  og cylinderradien  $a$  er satt til å være like store slik at  $ka = kA$ .  $\theta = 0$  angir le-siden av sylindren mens  $\theta = \pi$  angir lo/vær-siden og overflatehevningen er symmetrisk om  $x$ -aksen. Korreksjonene  $\eta_2$  og  $\eta_3$  i overflatehevningen blir stadig viktigere/mer betydningsfulle med økende bølgesteilhet. Når bølgesteilheten er  $kA = 0.3142$  er det maksimale utslaget av overflatehevningen  $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3$  på sylindren 41% større enn anslått av lineær teori.

(a) Tredje komponent  $\eta_3/A$ (b) Tredjeharmonisk komponent  $\eta_{3H}/A$ 

Figur 3.10: Feltplott av overflatehevningen til tredje komponent  $\eta_3$  og tredjeharmonisk komponent  $\eta_{3H}$  av overflatehevningen idet bølgeakken  $\omega t = \pi/2$  til første ordens innkommende bølge  $\eta_1$  treffer sylinderaksen. Overflatehevningen er illustrert ved hjelp av konturlinjer. Bølgesteilhet  $kA = ka = 0.2094$ . Aksene er dimensjonsløse og gitt ved den indre horisontale koordinaten  $R = r/a$ . Utslagene til overflatehevningen er skalert med  $A$  og er angitt ved verdiene på linjene. Overflatehevningen er symmetrisk om  $x$ -aksen.

(a)  $kA = 0.1047$ (b)  $kA = 0.2094$ (c)  $kA = 0.3142$ 

Figur 3.11: Oppskylling på sylindren for ulike  $kA$  idét bølgekammen til første ordens innkommende bølge treffer sylindreraksen  $\omega t = \pi/2$ .  $\theta/\pi = 0$  er le-siden og  $\theta/\pi = 1$  er lo-siden på sylindren. Vertikalaksen er dimensjonsløs ved normaliseringen med  $A$ .

### 3.5 Hydrodynamiske bølgekrefter

Vi ønsker å beregne de høyereharmoniske bølgekreftene som kan forårsake ringing i sylindren og undersøke størrelsesorden av disse i forhold til første- og andreharmoniske laster. Bølgekraften på sylindren som følge av diffraksjonspotensialet  $\phi$  er kjent som den eksiterende kraften, eller trykk-kraften, på sylindren og er beskrevet for det lineære tilfellet av Newman (1977, kapittel 6.18).

Vi beregner bølgekreftene på sylindren ved hjelp av Bernoullis trykklikning beregnet i kappittel 3.3. Trykket integreres over sylinderflaten og vi uttrykker den totale trykk-kraften på sylindren som

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \iint_{S_B} p(r=a) \mathbf{n} \, dS \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\eta} p(r=a) \mathbf{n} \, a \, dz \, d\theta, \end{aligned} \quad (3.157)$$

der  $S_B$  er sylindrens overflate og normalvektoren på sylindren peker ut av fluidet,  $\mathbf{n} = -\mathbf{i}_r$ . Den horisontale kraften som virker i positiv  $x$ -retning skrives

$$\begin{aligned} F_x &= -a \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\eta} p(r=a) \cos \theta \, dz \, d\theta \\ &= \rho a \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\eta} \left( \phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + gz \right)_{r=a} \cos \theta \, dz \, d\theta \end{aligned} \quad (3.158)$$

da  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}_r = -\cos \theta$ . Bidrag (3.158) fra det ikkelineære potensialet skyldes komponentene  $m = 1, 2$  da de andre komponentene er symmetriske i  $\theta$  og forsvinner i integralet rundt sylindren.

Vi følger metoden beskrevet av FNV og bestemmer først lastfordelingen per lengdeenhet  $dz$ , kalt differensiallasten, som er definert

$$F'_n(z) = -a \int_0^{2\pi} p(r=a) \cos \theta \, d\theta. \quad (3.159)$$

Apostroff ' uttrykker den deriverte mhp argumentet  $z$  og  $n$  henviser til orden av differensiallasten i amplituden  $A$ . Differensiallasten inngår i beregningen av den totale eksiterende kraften og momentet på sylindren.

Differensiallasten kan brukes for å anslå bølgekreftene på en trunkert sylinder ved å anta at trykket ved overflaten er likt for en sylinder med endelig og en sylinder med uendelig dypgang.

Den øvre grensen  $z = \eta$  i (3.158) varierer med  $\theta$  slik at det vil være nyttig å dele den vertikale integrasjonen av (3.158) i ulike intervaller. I beregningen av bølgekreftene som følge



av det lineære potensialet kan (3.158) dekomponeres i to vertikale intervaller slik at

$$\begin{aligned} F_x(z) &= \rho a \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^0 \left( \phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 \right)_{r=a} \cos \theta \, dz d\theta \\ &+ \rho a \int_0^{2\pi} \int_0^\eta \left( \phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + gz \right)_{r=a} \cos \theta \, dz d\theta. \end{aligned} \quad (3.160)$$

Det hydrostatiske trykket er symmetrisk om sylindren og bidrar kun til den integrerte bølgekraften i sjiktet over  $z = \eta_1$  der høyere ordens overflatehevning varierer (med  $\theta$ ) rundt sylindren. Det siste integralet beregnes dermed med en partisjon i  $z = \eta_1$ . Da  $\eta_1$  er uavhengig av  $\theta$  kan integrasjonsrekkefølgen i (3.160) byttes om og kreftene evalueres vha differensiallastene (3.161) og (3.163) under planet  $z \leq \eta_1$ .

Som vi har sett i avsnitt 3.2.8 er effekten av komponentene  $m = 1, 2$  i det ikkelineære potensialet er relativt grunn (figur 3 FNV) og varierer vesentlig/raskt nær overflaten er det naturlig med en partisjon ved  $Z = 0$  ( $z = \eta_1$ ) i beregningen av bidragene fra det ikkelineære potensialet.

Den lokale lasten som virker over planet  $z = 0$  som følge av det lineære potensialet vil være av høyere orden enn lasten som virker på sylindren under stille vannsnivået  $z < 0$  og kan ses på som *punktlaster* da de virker konsentrert over et forholdsvis lite område på sylinderflaten. Bølgeasten som følge av det ikkelineære potensialet anses i sin helhet som en punktlast pga potensialets grunne effekt.

Lastenes orden refererer til orden i amplituden  $A$ . Samtidig betraktes lastkomponentenes orden i  $\epsilon$  og lastberegningen er konsistent til og med orden av  $\epsilon^5$ . Kun ledd som gir bidrag til integralet over  $\theta$  skrives ut. Første ordens differensiallast skyldes den tidsderiverte av det lineære diffraksjonspotensialet (3.137) i trykklikningen og skrives

$$\begin{aligned} F'_1(z) &= \rho a \int_0^{2\pi} \phi_{Dt} \cos \theta \, d\theta \\ &= \rho g k A a e^{kz} \int_0^{2\pi} 2a \cos \omega t \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= 2\pi \rho g k A a^2 e^{kz} \cos \omega t = \mathcal{O}(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (3.161)$$

Dette kjenner vi igjen som treghetsleddet i Morisons likning [28]

$$dF = \dot{U}(m_{11} + \rho V). \quad (3.162)$$

$\dot{U} = \mathbf{i} \cdot \nabla \phi_{It}$  er den lokale horisontale akselerasjonen og den adderte massen per lengdeenhet  $m_{11} = \rho \pi a^2 dz$  for en sylinder er lik sylinderens egen masse per lengdeenhet  $V = \pi a^2 dz$ .  $\rho$  er fluidets tetthet.

Andre ordens komponent av differensiallasten skyldes kvadratiske ledd av det ikkelineære potensialet i trykklikningen og beregnes vha (3.138) slik at

$$\begin{aligned}
F'_2(z) &= \frac{1}{2}\rho a \int_0^{2\pi} |\nabla\phi_D|^2 \cos\theta \, d\theta \\
&= \rho g k^2 A^2 a^2 e^{2kz} \sin 2\omega t \int_0^{2\pi} (\cos\theta - \sin\theta \sin 2\theta) \cos\theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\pi \rho g k^2 A^2 a^2 e^{2kz} \sin 2\omega t = \mathcal{O}(\epsilon^4).
\end{aligned} \tag{3.163}$$

Rekkeutviklingen (3.139) kan benyttes til å uttrykke første og andre ordens differensiallast i indre koordinater for å vise utviklingen av differensiallastene over stille vannsnivået. Dette er vist i artikkelen til FNV.

Tredje ordens komponent av differensiallasten inneholder lineære ledd av det ikkelineære potensialet

$$F'_3(z) = \rho a \int_0^{2\pi} (\psi_t + \nabla\phi_D \cdot \nabla\psi)_{r=a} \cos\theta \, d\theta \tag{3.164}$$

og beregnes vha (3.143). Kun komponenten  $m = 1$  i den tidsderiverte  $\Psi_t$  og  $m = 2$  i produktledet gir bidrag til den tredjeordens differensiallasten. Ved hjelp av (3.141) og (3.144) får vi

$$\begin{aligned}
F'_3(Z) &= \rho a \int_0^{2\pi} \left( \frac{3}{2}\omega^2 k A^3 \sin 2\omega t \sin \omega t \Psi_1(1, Z) \cos^2\theta + \right. \\
&\quad \left. 4\omega^2 k A^3 \sin \omega t \sin 2\omega t \Psi_2(1, Z) \sin\theta \sin 2\theta \cos\theta + \mathcal{O}(\epsilon^4) \right) d\theta \\
&= \frac{\pi}{2} \rho g k^2 A^3 a (\cos \omega t - \cos 3\omega t) \left( \frac{3}{2}\Psi_1(1, Z) + 2\Psi_2(1, Z) \right) = \mathcal{O}(\epsilon^4)
\end{aligned} \tag{3.165}$$

Komponentene i (3.165) av det ikkelineære potensialet er evaluert i avsnitt 3.2.8 og er av neglisjerbar størrelsesorden for  $Z > 4$ .

Den integrerte lasten som virker på sylinderen under stille vannsnivået (3.160) som følge av det lineære diffraksjonspotensialet er

$$\begin{aligned}
&\rho a \int_{-\infty}^0 (\phi_{Dt} + \frac{1}{2}|\nabla\phi_D|^2)_{r=a} \cos\theta \, d\theta dz \\
&= \int_{-\infty}^0 (F'_1(z) + F'_2(z)) \, dz \\
&= 2\pi \rho g A a^2 \cos \omega t + \frac{1}{4}\pi \rho g k A^2 a^2 \sin 2\omega t.
\end{aligned} \tag{3.166}$$

Det andre integralet i (3.160) evalueres først under planet  $z < \eta_1$ . Bidraget fra førsteordens differensiallast gir punktlasten

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_1 &= \int_0^{\eta_1} F'_1(z) \, dz = 2\pi \rho g k A a^2 \cos \omega t \left( \eta_1 + \frac{k\eta_1^2}{2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^6) \\
&= \pi \rho g k A^2 a^2 \left( \sin 2\omega t + \frac{kA}{4} (\cos \omega t - \cos 3\omega t) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^6).
\end{aligned} \tag{3.167}$$

Vertikalkomponenten er skrevet ut vha rekkeutviklingen (3.147). Tilsvarende beregnes punktlasten som følge av andreordens differensiallast

$$\begin{aligned}\tilde{F}_2 &= \int_0^{\eta_1} F_2'(z) dz = \frac{1}{2}\pi\rho g k^2 A^2 a^2 \sin 2\omega t \eta_1 + \mathcal{O}(\epsilon^6) \\ &= \frac{1}{4}\pi\rho g k^2 A^3 a^2 (\cos \omega t - \cos 3\omega t) + \mathcal{O}(\epsilon^6).\end{aligned}\quad (3.168)$$

I området  $\eta_1 < z < \eta$  er  $z \leq \mathcal{O}(\epsilon^2)$  slik at trykkkomponentene assosiert med  $\phi$  gir bidrag av orden  $\epsilon^6$  til den integrerte lasten. Trykkgradienten i dette området er hydrostatisk til ledende orden  $\nabla p \approx \nabla(-\rho g z)$  slik at  $p(z) \approx -\rho g z + C$ . Ved å sette inn randbetingelsen  $p(z = \eta) = 0$  på den frie overflaten får vi det ledendeordens trykket

$$p(z) = -\rho g(z - \eta) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad \eta_1 < z < \eta. \quad (3.169)$$

Den integrerte lasten som virker mellom første ordens og eksakt overflatehevning er vha (3.169)

$$\begin{aligned}\tilde{F}_0 &= \rho g a \int_0^{2\pi} \int_{\eta_1}^{\eta} (z - \eta) \cos \theta dz d\theta = -\frac{1}{2}\rho g a \int_0^{2\pi} (\eta^2 - 2\eta\eta_1 + \eta_1^2) \cos \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\rho g a \int_0^{2\pi} (\eta - \eta_1)^2 \cos \theta d\theta.\end{aligned}\quad (3.170)$$

Ved å bruke at  $\eta - \eta_1 = \eta_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)$  blir

$$\tilde{F}_0 = -\frac{1}{2}\rho g a \int_0^{2\pi} \eta_2^2 \cos \theta d\theta + \mathcal{O}(\epsilon^6) \quad (3.171)$$

der  $\eta_2$  er gitt ved (3.150). På sylindren er

$$\eta_2(r = a) = -2kAa \cos \omega t \cos \theta - \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t + kA^2 \sin^2 \omega t \cos 2\theta. \quad (3.172)$$

Ved å inkludere leddene som gir bidrag til integralet over  $\theta$  får vi

$$\begin{aligned}\tilde{F}_0 &= -\frac{1}{2}\rho g a \int_0^{2\pi} (2k^2 A^3 a \cos^3 \omega t \cos^2 \theta - 4k^2 A^3 a \cos \omega t \sin^2 \omega t \cos 2\theta \cos^2 \theta) d\theta + \mathcal{O}(\epsilon^6) \\ &= -\frac{1}{2}\pi\rho g k^2 A^3 a^2 (\cos \omega t + \cos 3\omega t) + \mathcal{O}(\epsilon^6).\end{aligned}\quad (3.173)$$

Punktlasten gitt ved andre integral i (3.160) er summen av (3.167), (3.168) og (3.173).

$$\begin{aligned}\tilde{F}_x^{(D)}(t) &= \rho a \int_0^{2\pi} \int_0^{\eta} (\phi_{Dt} + \frac{1}{2}|\nabla\phi_D|^2 + gz)_{r=a} dz \\ &= \pi\rho g k A^2 a^2 \sin 2\omega t - \pi\rho g k^2 A^3 a^2 \cos 3\omega t + \mathcal{O}(\epsilon^6)\end{aligned}\quad (3.174)$$

Indeks  $(D)$  betegner lasten som følge av det lineære diffraksjonspotensialet  $\phi_D$ . Den integrerte lasten på sylindren som følge av det lineære potensialet  $\phi_D$  er dermed

$$F_x^{(D)}(t) = 2\pi\rho g A a^2 \cos \omega t + \frac{5}{4}\pi\rho g k A^2 a^2 \sin 2\omega t - \pi\rho g k^2 A^3 a^2 \cos 3\omega t + \mathcal{O}(\epsilon^6). \quad (3.175)$$

Den integrerte kraften som følge av det ikkelineære potensialet,  $F_x^{(\psi)}$ , evalueres vha differensiallasten (3.165) på intervallet  $0 \leq Z < \infty$ , dvs under planet  $z = \eta_1$ . Integralet av funksjonene  $\Psi_1(1, Z)$  og  $\Psi_2(1, Z)$  over  $Z$  er evaluert vha Greens teorem i avsnitt 3.2.4. Bidraget fra  $\psi$  til lasten for  $z > \eta_1$  er av  $\mathcal{O}(\epsilon^6)$ . Variabelskiftet fra den globale vertikale koordinaten  $z$  til den lokale indre koordinaten  $Z$  gir differensialhøyden  $dz = -a dZ$  og integrasjonsgrensene snus slik at  $-a \int_{\infty}^0 dZ = a \int_0^{\infty} dZ$ . Dermed kan vi skrive

$$\begin{aligned} F_x^{(\psi)}(t) &= \rho a \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\eta_1} (\psi_t + \nabla \phi_D \cdot \nabla \psi) \cos \theta \, dz d\theta \\ &= a \int_0^{\infty} F_3'(Z) \, dZ \\ &= \pi \rho g k^2 A^3 a^2 (\cos \omega t - \cos 3\omega t) + \mathcal{O}(\epsilon^6). \end{aligned} \quad (3.176)$$

Som følge av at effekten av differensiallasten (3.165) er grunn kan den integrerte lasten (3.176) vurderes som en punktlast på lik linje med punktlasten (3.174). Den samlede punktlasten er summen av (3.175) og (3.176) og er gitt ved

$$\tilde{F}_x(t) = \pi \rho g k A^2 a^2 \sin 2\omega t + \pi \rho g k^2 A^3 a^2 (\cos \omega t - 2 \cos 3\omega t) + \mathcal{O}(\epsilon^6). \quad (3.177)$$

Det tredjeharmoniske bidraget i (3.175) og (3.176) svinger i fase og forsterker hverandre i den samlede tredjeharmoniske lasten i (3.177). Uttrykket for den samlede integrerte kraften på sylinderen er

$$F_x(t) = \pi \rho g \cos \omega t (2Aa^2 + k^2 A^3 a^2) + \frac{5}{4} \pi \rho g k A^2 a^2 \sin 2\omega t - 2\pi \rho g k^2 A^3 a^2 \cos 3\omega t. \quad (3.178)$$

### Diskusjon av differensiallastene

Første ordens differensiallast er ekvivalent med treghetskraften i Morisons likning og er av orden  $Aa^2$  dvs  $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ . Andre og tredje ordens differensiallast er proporsjonale med hhv  $A^2 a^2$  og  $A^3 a$  som begge er av størrelsesorden  $\epsilon^4$ . Dette understreker viktigheten av å inkludere det tredje ordens potensialet i lastberegningene. Samtlige differensiallaster har sine maksimum ved den frie overflaten og avtar monotont i dypet, men mens de til første og andre orden, gitt ved (3.161) og (3.163), avtar eksponensielt avtar tredje orden mye raskere med dypet og er neglisjerbar i et dyp  $Z = \mathcal{O}(1)$ .

### Diskusjon av de integrerte lastene

Den totale integrerte lasten over hele vannsøylen (3.178) er proporsjonal med  $Aa^2 = \mathcal{O}(\epsilon^3)$  til ledende orden og svinger med fundamentalfrekvensen til det innkommende bølgefeltet. Første ordens komponent er også uavhengig av bølgetallet  $k$ . Den andreharmoniske og andreordens komponenten i (3.178) er av orden  $\epsilon^4$  og skyldes det lineære diffraksjonspotensialet.

Den består av bidrag fra den vertikalt fordelte lasten under stille vannsnivået (3.166) og punktlasten (3.167). Det første bidraget er imidlertid bare en fjerdedel av bidraget fra punktlasten.

Tredjeordens last i (3.178) er proporsjonal med  $A^3 a^2 = \mathcal{O}(\epsilon^5)$  og består av en førsteharmonisk og en tredjeharmonisk komponent. Lasten virker lokalt nær overflaten som en punktlast og den tredje harmoniske komponenten består av like store bidrag fra det lineære og det ikke-lineære potensialet. Siden (3.174) og (3.176) begge virker konsentrert nær den frie overflaten kan de legges sammen som en samlet punktlast (3.177).

Den tredjeharmoniske komponenten har negativt fortegn og oppnår første maksutslag på sylinderaksen,  $x = 0$ , før første ordens innkommende bølgekam, gitt ved  $\eta_1$ , treffer sylinderaksen. Den tredje ordens tredjeharmoniske lasten har maksimum/minimum utslag når den førsteharmoniske lasten har hhv sine minimum/maksimum.

Bidraget til den integrerte lasten som virker over første ordens overflatehevning, (3.173), skyldes utelukkende det lineære potensialet.

I den samlede punktlasten (3.177) svinger leddene med ulike harmonier av fundamental-frekvensen slik at faseforskyvningen mellom leddene er avhengig av tiden. I løpet av en fundamentalperiode forsterker og kansellerer de hverandre ved ulike tidspunkt som vist i figur 3.12. Fasen til bølgekreftene på sylinderen beregnet ved hjelp av FNVs teori er uavhengige av bølgetallet  $k$ .

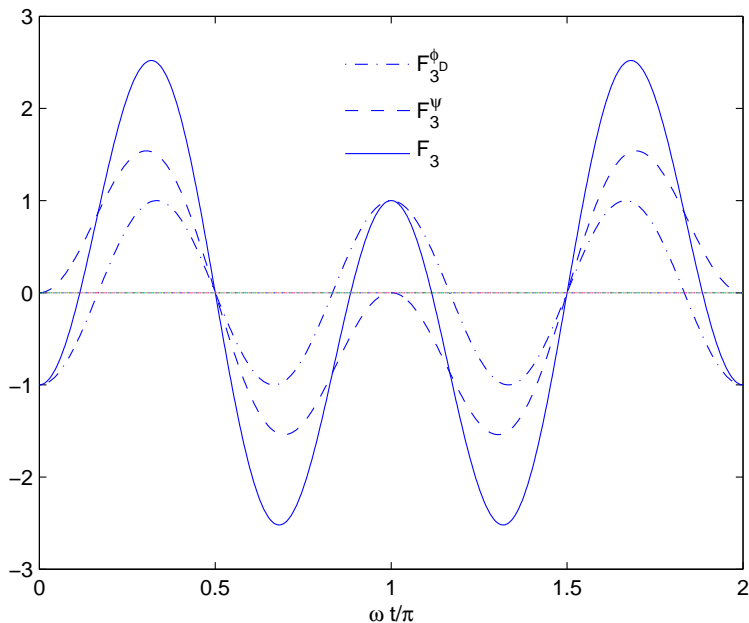
### Kommentarer til figurer

I figur 3.12 er komponentene av 3.ordens last på sylinderen (3.177) plottet som funksjoner av tiden over en syklus av fundamentalperioden. Figuren korresponderer med figur 4 i FNV. Bidraget fra det lineære potensialet er gitt ved siste ledd i (3.174) og bidraget fra det ikke-lineære potensialet ved (3.176). Komponentene er gjort dimensjonsløse med skaleringen  $\pi \rho g k^2 A^3 a^2$  slik at vertikalaksen er dimensjonsløs, og utslaget til komponenten som følge av det lineære potensialet er 1. Maksimalutslaget til komponenten (3.176) er 1.54 ved  $\omega t \sim 0.306$  og for den totale tredjeordens lasten er maksimalutslaget 2.52 ved  $\omega t \sim 0.318$ .

I figur 3.13 er totale punktlaster (3.177) ved ulike  $kA$  plottet over en periode til første ordens bølge. Figuren korresponderer med figur 5 i FNV. Totale punktlaster skyldes bidrag fra det totale diffraksjonspotensialet  $\phi$  og virker konsentrert nær den frie overflaten. Punktlasten er skalert med  $\pi \rho g k A^2 a^2$

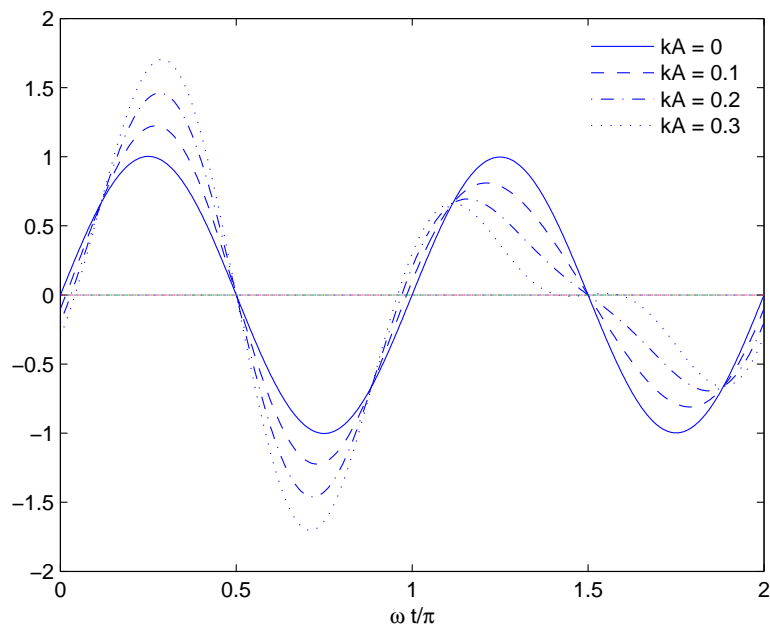
$$\frac{\tilde{F}_x}{\pi \rho g k A^2 a^2} = \sin 2\omega t + kA(\cos \omega t - 2 \cos 3\omega t) \quad (3.179)$$

slik at den representerer andre ordens punktlast når  $kA \rightarrow 0$  og vertikalaksen er dimensjonsløs. Den dominerende delen av punktlasten (3.179) er andreharmonisk. Maksimalutslagene til den



Figur 3.12: Tredje ordens komponenter av bølgelasten (3.178) (-) som funksjon av tiden over en syklus av fundamentalperioden til det innkommende bølgefeltet. Komponentene er skalert med  $\pi\rho g k^2 A^3 a^2$  slik at utslagene langs vertikalaksen er dimensjonsløse. Utslaget av komponenten i (3.174) (-) som følge av det lineære potensialet er 1. Komponentene som følge av det ikkelineære potensialet er gitt ved (3.176) (-).

totale punktlasten øker proporsjonalt med økningen i  $kA$ . Størrelsesorden av utslagene til den samlede punktlasten sammenliknes enkelt med andre ordens punktlast. Den samlede høyere ordens punktlasten har betydelig større maksimalutslag enn andre ordens punktlast. I løpet av fundamentalperioden oscillerer punktlasten gjennom to fulle sykluser sentrert om  $\omega t = \pi/2$  da innkommende bølgekam passerer sylinderaksen. Komponentene i punktlasten forsterker hverandre i løpet av den første halvdel av fundamentalperioden og kansellerer hverandre i løpet av den andre halvdel/ når første ordens bølgebuk passerer sylinderen reduseres den ikkelineære punktlasten.



Figur 3.13: Totale punktlaster gitt ved (3.177) for ulike  $kA$  over en syklus av fundamentalperioden til det innkommende bølgefeltet. Lasten er skalert med  $\pi\rho gkA^2a^2$  slik at utslaget er dimensjonsløst og den heltrukne linjen ( $kA = 0$ ) er andre ordens komponent.

**Forhold mellom maksimalutslagene av de totale lastene i (3.178)**

Vi ønsker å sammenlikne størrelsesorden av bølgekreftene på sylindren i regulære bølger med størrelsesorden av kreftene i irregulære bølger. For å legge til rette for sammenlikningen betraktes maksimalutslagene til hver av lastkomponentene i (3.178) og forholdene mellom komponentene. Forholdene mellom lastkomponentene er dimensjonsløs og vil gi et inntrykk av størrelsen til de høyere ordens kreftene relativ til den første ordens kraften. Vi refererer til første ordens last som  $F_1$ , andre ordens last som  $F_2$  og tredje ordens last som  $F_3$ , der orden av lasten er orden i amplituden  $A$ .

Tabell 3.2 viser forholdet mellom første ordens last og henholdsvis andre og tredje ordens last (3.178) for ulike  $kA$ . Forholdet mellom cylinderradien og bølgelengden  $ka$  er satt til å være lik bølgesteilheten  $kA$ . Av tabell 3.2 ser vi at utslagene til høyere ordens og -harmoniske laster øker med økende bølgesteilhet som vist i figur 3.13.

$kA = ka$	$F_1/F_2$	$F_1/F_3$
0.052	30.6	289.0
0.105	15.3	72.4
0.126	12.7	50.3
0.157	10.2	32.2
0.209	7.64	18.1
0.314	5.09	8.04
0.419	3.82	4.52

Tabell 3.2: Forhold mellom totale krefter i orden av bølgeamplituden  $A$  på sylindren i regulære bølger gitt i likning (3.178). Første ordens kraft:  $F_1$ , andre ordens kraft:  $F_2$  og tredje ordens kraft:  $F_3$ .



### 3.6 Moment

Ringning i en strekkstagplattform til havs er assosiert med aksial avbøyning i forankringssene til plattformen og kan skyldes høyere harmoniske moment som virker på sylindere. Som det påpekes i FNVs artikkel vil tredje ordens differensiallast som beveger seg vertikalt med  $\eta_1$  bidra til en fjerdeharmonisk momentkomponent. Dette motiverer til å beregne det høyere harmoniske momentet om en fast akse på sylindere og til å anslå størrelsesorden av momentet relativ til de høyereharmoniske lastene på sylindere.

Det veltende momentet på sylindere om den horisontale  $y$ -aksen med hensyn til origo  $(x, y, z) = 0$  kan beregnes konsistent ved hjelp av FNVs teori opp til og med tredje orden i  $\epsilon$  og tredje harmoni. Uttrykket for den fjerdeharmoniske komponenten som følge av det tredjeordens diffraksjonspotensialet er beregnet i tillegg E.1. Det fullstendige fjerdeharmoniske momentet vil inneholde bidrag fra et fjerdeharmonisk diffraksjonspotensial. Som følge av at diffraksjonspotensialet beregnet ved hjelp av FNVs teori er begrenset til tredje harmoni er ikke uttrykket for momentet beregnet med denne teorien konsistent.

Det veltende momentet beregnes på en sylindere med endelig dypgang  $h$  ved hjelp av FNVs teori. Dette kan vi forsvare ved å anta at trykkfeltet nær overflaten er omtrent likt for en sylindere av endelig som for en sylindere av uendelig dypgang. Dypvannsteori er gyldig for  $h > \lambda/2$ , det vil si  $kh \geq \pi$  ved Newman (1977) [14].

Momentvektoren er definert av Newman (1977) som

$$\mathbf{M} = \iint_{S_B} p(r = a)(\mathbf{r} \times \mathbf{n})dS, \quad (3.180)$$

der  $S_B$  er overflaten til sylindere. Normalvektoren på sylindereflaten er definert  $\mathbf{n} = -\mathbf{i}_r$  og posisjonsvektoren  $\mathbf{r}$  fra origo til et tilfeldig punkt på sylindereflaten skrives

$$\mathbf{r} = a\mathbf{i}_r + \theta\mathbf{i}_\theta + z\mathbf{i}_z. \quad (3.181)$$

I kartesiske koordinater får vi

$$\mathbf{r} \times \mathbf{n} = z \sin \theta \mathbf{i} - z \cos \theta \mathbf{j} + 2\theta \mathbf{k}, \quad (3.182)$$

og dermed momentet på sylindere om  $y$ -aksen med hensyn til origo

$$M_y = -a \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{\eta} p \cos \theta \, d\theta \, z \, dz. \quad (3.183)$$

Da første ordens innkommende overflatehevning  $\eta_1$  er uavhengig av  $\theta$  kan momentkomponentene som virker under overflatehevningen  $z = \eta_1$  beregnes ved hjelp av differensiallastene i avsnitt 3.5. Vi kan uttrykke momentet som virker under overflaten  $\eta_1$  som

$$M_y = \int_{-h}^{\eta_1} F'(z)z \, dz. \quad (3.184)$$

Integralet (3.184) deles opp med en partisjon i  $z = 0$  som for beregningen av bølgestene på sylinderen. Vi beregner komponentene av momentet som følge av første ordens differensiallast og får at

$$\int_{-h}^0 F_1'(z)z dz = 2\pi\rho gkAa^2 \cos\omega t \left( \frac{h}{k}e^{-kh} - \frac{1}{k^2}(1 - e^{-kh}) \right) = \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (3.185)$$

og

$$\int_0^\eta F_1'(z)z dz = \frac{1}{2}\pi\rho gkA^3a^2(\cos\omega t - \cos 3\omega t) + \mathcal{O}(\epsilon^6) = \mathcal{O}(\epsilon^5). \quad (3.186)$$

Likeledes beregner vi komponenten til konsistent orden i  $A$  som følge av andre ordens differensiallast

$$\int_{-h}^0 F_2'(z)z dz = \frac{1}{2}\pi\rho gk^2A^2a^2 \sin 2\omega t \left( \frac{h}{2k}e^{-2kh} - \frac{1}{4k^2}(1 - e^{-2kh}) \right) = \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (3.187)$$

Resterende bidrag er av fjerde orden eller høyere og er beregnet i tillegg E.1.

Momentet om et annet fast punkt på sylinderen, betegnet  $\mathbf{M}_1$ , kan beregnes ved hjelp av momentet om origo, betegnet  $\mathbf{M}_0$ . Dersom  $\mathbf{r}_0$  er posisjonsvektoren fra origo til et tilfeldig punkt på sylinderflaten og  $\mathbf{r}_1$  er posisjonsvektoren fra et annet fast referansepunkt til det samme tilfeldige punktet har vi at

$$\mathbf{M}_0 = \iint_{S_B} p \mathbf{r}_0 \times \mathbf{n} dS. \quad (3.188)$$

Dermed kan vi skrive momentet  $\mathbf{M}_1$  som

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= \iint_{S_B} p (\mathbf{r}_0 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)) \times \mathbf{n} dS \\ &= \mathbf{M}_0 + \iint_{S_B} p (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (3.189)$$

Momentet på sylinderen om bunnpunktet  $(x, y, z) = (0, 0, -h)$  og om  $y$ -aksen kan dermed uttrykkes ved hjelp av momentet (3.183). Vi kan skrive

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = h\mathbf{i}_z \quad (3.190)$$

slik at vi får

$$M_{y1} = M_{y0} - ah \int_0^{2\pi} \int_{-h}^\eta p \cos\theta d\theta dz. \quad (3.191)$$

### Diskusjon av resultat og kommentar til figurer

Momentkomponentene (3.185), (3.186) og (3.187) er av samme størrelsesorden i  $\epsilon$  som de korresponderende lastene i (3.175) som følge av første ordens diffraksjonspotensial. Andre- og tredjeordens momentkomponent (3.187) og (3.186) er omtrent halvparten så store som andre-

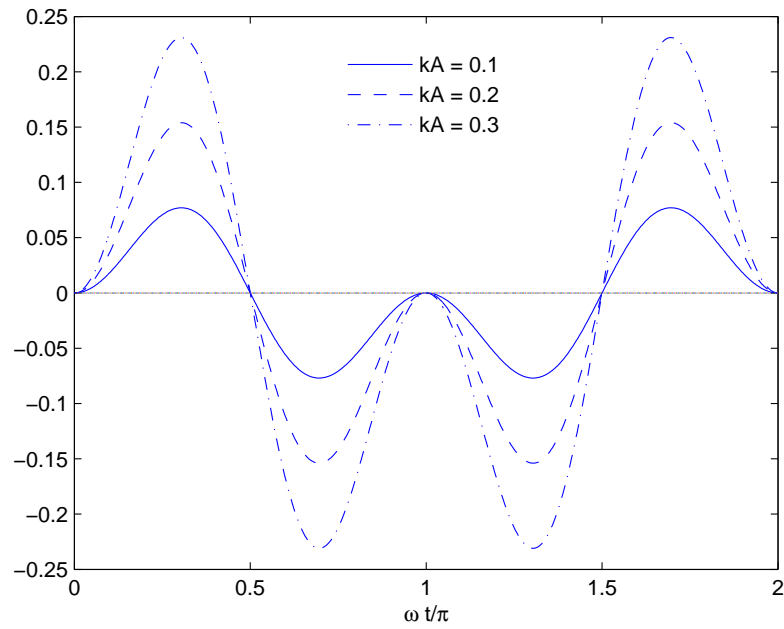
og tredjeordens laster i (3.175). Som for bølgesteillene virker det ledende ordens momentet som er gitt ved (3.185) under stille vannsnivået  $z = 0$ . Det tredje ordens momentet (3.186) er av en orden  $\epsilon^2$  mindre enn momentet som virker under stille vannsnivået (3.185) og (3.187), men virker til gjengjeld konsentrert nær den frie overflaten og svinger raskere i tiden.

Den tredje ordens momentkomponenten gitt ved (3.186) er plottet i figur(3.14) over en syklus av fundamentalperioden for ulike verdier av  $kA$ . Komponentene er normalisert med  $\pi\rho gA^2a^2$  slik at utslagene langs vertikalaksen er dimensjonsløse og komponentene av lineært avhengig av bølgesteillheten. Utslagene av momentkomponenten øker følgelig med økende bølgesteillhet.

Vi observerer at det første maksimale utslaget til den tredjeordens momentkomponenten oppstår ved  $\omega t \sim 0.31$  som er tilnærmet samtidig med maksimalutslaget til den tredjeordens lasten i (3.177). Det dimensjonsløse utslaget til (3.186) uavhengig av  $ka$  er 0.77 og dermed omtrent en tredjedel av utslaget til den samlede tredjeordens lasten. Dermed vil maksimalutslagene til det tredjeordens momentet om  $y$ -aksen med hensyn til origo og den tredjeordens lasten forsterke hverandre. Vi ser at den tredjeharmoniske delen av det tredjeordens tredjeharmoniske momentet er nøyaktig en fjerdedel av den tilsvarende komponenten av punktlasten (3.177) og at disse komponentene svinger i fase.

Retningen av momentet er definert slik at når det totale momentet om  $y$ -aksen er positivt vil det oppstå strekk på lo-siden av sylindren og omvendt får vi strekk på le-siden av sylindren når momentet er negativt.

Den fjerdeharmoniske momentkomponenten beregnet i avsnitt E.1 er av  $\mathcal{O}(\epsilon^6)$  og en størrelsesorden  $\epsilon$  mindre enn den tredjeharmoniske momentkomponenten. På tross av at den fjerdeharmoniske komponenten av det lokale momentet er liten sammenliknet med det ledende ordens momentet kan den ha innvirkning på ringing i en strekkstagplattform med egenfrekvens som ligger godt over fundamentalfrekvensen til det innkommende bølgefeltet ved at den oscillerer med den firedobbelte av fundamentalfrekvensen.



Figur 3.14: Tredje ordens momentkomponent (3.186) over en syklus av fundamentalperioden for ulike  $kA$ . Komponenten er normalisert med  $\pi\rho gA^2a^2$  slik at utslagene langs vertikalaksen er dimensjonsløse og komponenten av lineært avhengig av bølgesteilheten.

### 3.7 Sammenlikning med diskusjon

Resultatene fra avsnitt 3.5 sammenliknes med de teoretiske resultatene til Newman [16] og Malenica & Molin [35] og de eksperimentelle målingene til Huseby & Grue [23].

Newman (1996b) [16] har beregnet andre ordens bølgelaster på en vertikal sylinder i diffraksjonsregimet  $kA \ll 1$  for korte og lange bølgelengder. Lastene beregnet i lang bølgelengde-regimet på uendelig dyp er sammenliknbare med resultatene i avsnitt (3.5).

Malenica og Molin, heretter M&M, har utledet en tredje ordens perturbasjonsløsning av diffraksjonsproblemet under betingelsen  $kA \ll 1$ . I diffraksjonsregimet er cylinderradien  $a$  av opptil samme orden som bølgelengden  $ka = \mathcal{O}(1)$ . Randverdi-problemet formuleres til hver orden i  $kA$  og er mye mer komplisert for de høyere ordens løsningene enn den lokale overflatebetingelsen (3.76) som driver den høyere ordens løsningen  $\psi$  i FNVs teori.

I diffraksjonsregimet Taylorutvikles randbetingelsene for de høyere ordens potensialene om stille vannsnivået mens dette ikke er mulig for overflatebetingelsen (3.76) i lang bølgelengde-regimet. Overflatebetingelsen (3.76) til det ikkelineære potensialet  $\psi$  løses på den oscillerende overflaten  $z = \eta_1$ .

På tross av ulikheter i perturbasjonsbetingelsene bør M&Ms resultater konvergere mot FNVs når  $ka \rightarrow 0$  og  $kH > 3$ .

Huseby & Grue, heretter H&G, har ved hjelp av eksperimenter i bølgetank undersøkt bølgelaster opp til og med syvende harmoni på en bunnfestet slank sylinder i regulære Stokesbølger. Bølgesteilleten er variert opp til 0.24 og målingene er utført i langbølgerregimet  $ka \ll 1$ . H&G har sammenliknet målingene med perturbasjonsteoriene til FNV og M&M og med den fullt ikkelineære modellen til Ferrant [7].

Vi utfører sammenlikningen av FNVs teori med M&M og H&Gs teori i referansesystemet definert av H&G. I H&Gs referansesystem skrives første ordens innkommende overflateheving på formen

$$\eta_1 = A \cos(kx - \omega t) = \text{Re}\{Ae^{i(kx - \omega t)}\} \quad \text{med fase } \arg(\eta_1) = 0. \quad (3.192)$$

Bølgekreftene er skrives i harmonier av fundamentalfrekvensen

$$F = \text{Re}\{F_1 e^{i\omega t} + F_2 e^{2i\omega t} + F_3 e^{3i\omega t} \dots\} \quad (3.193)$$

der underindeks angir orden av lasten i amplituden  $A$ . I dette referansesystemet kan den første ordens lasten i (3.178) skrives

$$\frac{F_1^{(FNV)}}{\rho g A a^2} = 2\pi e^{i\pi/2} \quad (3.194)$$

ka	$ F_2^{(FNV)} $	$ F_2^{(N)} $
0.166	0.65	0.57
0.204	0.80	0.6
0.245	0.96	0.59
0.315	1.23	0.52
0.378	1.48	0.5

Tabell 3.3: Utslag av andre ordens last ved hjelp av FNV teori (3.195)

som er faseforskjøvet  $\pi/2$  relativ til første ordens innkommende bølge. Likeledes kan vi uttrykke andre ordens last i (3.178)

$$\frac{F_2^{(FNV)}}{\rho g A^2 a} = \frac{5}{4} \pi k a e^{i\pi/2}. \quad (3.195)$$

Den tredjeharmoniske lasten skrives

$$\frac{F_3^{(FNV)}}{\rho g A^3} = 2\pi k^2 a^2 e^{i\pi/2}. \quad (3.196)$$

Fasene til samtlige laster (3.194), (3.195) og (3.196) er konstant lik  $\pi/2$  og er uavhengige av bølgetallet  $k$ . Indeks ( $FNV$ ) brukes for å angi lastene beregnet ved hjelp av FNV teori.

### Andre ordens potensial og last

Den fullstendige andre ordens lasten i (3.178) ved hjelp av FNV teori skyldes det lineære diffraksjonspotensialet og lasten er i fase med første ordens innkommende bølge.

I publikasjonen til H&G er andre ordens lastutslag i langbølgeregimet  $ka \ll 1$  som beregnet av Newman (1996b) sammenliknet med målingene gjort av H&G for ulike  $ka$ . De dimensjonsløse utslagene til FNVs andreharmoniske bølgelast er beregnet ved hjelp av (3.195) og presentert i tabell 3.3. Utslagene og er svært konservative i sammenlikning med resultatene presentert i figur 9 i H&G. Lastutslagene er kun av sammenliknbar størrelsesorden for  $ka = 0.166$  der utslaget ved hjelp av FNV teori er 14% større enn ved hjelp av Newmans diffrakjonsløsning. For  $ka = 0.204$  er avviket på 33.5% av Newmans anslag.

Fasen  $\arg(F_2^{(FNV)})$  avviker betraktelig fra fasen til den andreharmoniske lasten målt av H&G og den andreharmoniske lasten anslått av Newman (1996b) for alle  $ka$  og  $kA$ .

### Tredje ordens last

M&M beregner en tredjeharmonisk last av tredje orden i amplituden  $A$  som består av tre komponenter; som følge av trippelprodukter av første ordens potensial, produkter av første og andre ordens- og lineære ledd som følge av tredje ordens potensial. Den tredje ordens lasten beregnet i avsnitt (3.5) består av tilsvarende komponenter. I figur 8 i M&M er de reelle og

ka	$ F_3^{(FNV)} $	$ F_3^{(MM)} $	$arg(F_3^{(MM)})$
0.250	0.3927	0.3833	-1.8416
0.203	0.2589	0.2583	-1.3164
0.166	0.1731	0.1720	-0.9505
0.150	0.1414	0.1634	-0.6508

Tabell 3.4: Utslag og faser til tredje ordens tredje harmoniske laster ved hjelp av FNV og M&M teori.

imaginære delene av deres tredje ordens last plottet for  $ka < 0.25$  og for  $kH = 8$  hvilket sikrer at sammenlikningen er gyldig. Den tredje ordens tredje harmoniske lasten gitt av M&M kan deles i en reell og en imaginær del

$$F_3^{(MM)} = Re \{ (Re - i Im) e^{3i\omega t} \} = |F_3^{(MM)}| Re \left\{ e^{3i\omega t + i arg(F_3^{(MM)})} \right\} \quad (3.197)$$

der tallverdiene for  $Re$  og  $Im$  leses av henholdvis figur 8(a) og 8(b) i M&M.

Utslaget er dermed uttrykt

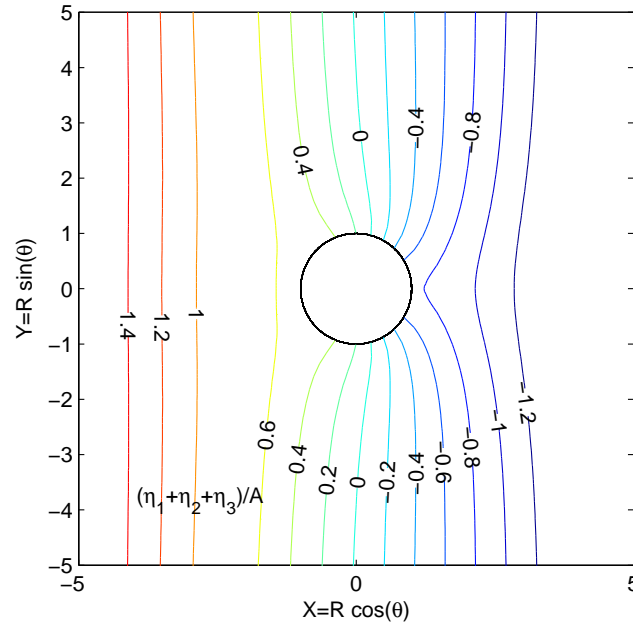
$$|F_3^{(MM)}| = \sqrt{Re^2 + Im^2} \quad \text{og fasen} \quad arg(F_3^{(MM)}) = \tan^{-1} \left( \frac{-Im}{Re} \right). \quad (3.198)$$

der  $(MM)$  brukes for å angi lasten til M&M og underindeks angir orden av lasten. I tabell 3.4 er utslagene og fasen til tredje ordens last ved hjelp av M&Ms teori beregnet og sammenliknet med utslagene ved hjelp av FNVs teori for ulike  $ka$ . Fasen til  $F_3^{(MM)}$  er avhengig av bølgetallet  $k$ . For de utvalgte verdiene av  $ka$  kan vi observere god overensstemmelse mellom utslagene ved hjelp av de to teoriene for  $0.166 < ka \leq 0.25$ .

I H&G sammenliknes utslagene ved hjelp av de to teoriene med målinger for  $ka$  opp til 0.378. H&G viser god overensstemmelse mellom begge teoriene og målingene for alle  $ka$  og for liten til moderat bølgesteilhet  $kA$ . Når bølgesteilheten er stor er den tredjeharmonisk bølgekraften beregnet ved de to teoriene konservative. Dette betyr at teoriene overestimerer utslagene av bølgelasten.

Som vist i tabell 3.4 avviker fasen til tredje ordens kraft  $F_3^{(FNV)}$  vesentlig fra fasene anslått av M&M. Avviket mellom fasene er gjennomsnittlig på 1.6530 radianer, det vil si større enn  $\pi/2$ , midlet over komponentene presentert i tabellen. H&G viser at M&Ms faser stemmer godt overens med målinger.

Ved sammenlikning av de imaginære delene av den tredje ordens lasten for  $ka \leq 0.05$  viser M&M konvergens av resultatene for  $ka < 0.025$  og konkluderer med at gyldigheten til FNV er strengt begrenset. M&M anslår at gyldigheten til FNV teori uttrykt ved hjelp av  $ka$  minker med kvadratet av orden av den lasten teorien anslår. Det er kjent at første ordens last som korresponderer med Morisons treghetsledd gir god tilnærming til diffraksjonslaster for  $ka < 0.5$ .



Figur 3.15: Overflatehevningen  $\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \mathcal{O}(\epsilon^4)$  idet den oppkryssende noden  $\eta_1(\omega t = 0)$  av første ordens innkommende bølge treffer sylinderaksen. Overflatehevningen er skalert med  $A$  slik at verdiene på konturlinjene er dimensjonsløse. Bølgesteilheten er  $ka = ka = 0.3142$ . Aksene er dimensjonsløse.

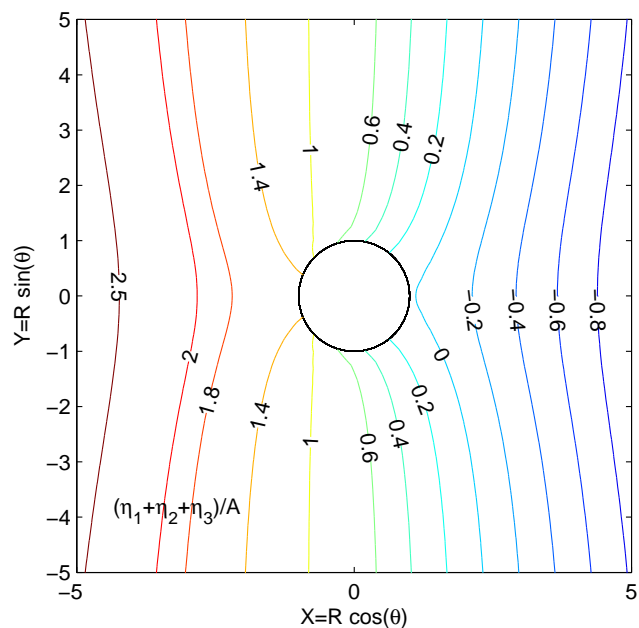
Andre ordens last har dermed begrenset gyldighet  $ka < 0.5/4$  og tredje orden  $ka < 0.5/9$ . Ved eksplisitt sammenlikning anslår M&M at gyldigheten til den tredje ordens løsningen til FNV er begrenset ytterligere.

Fasen til komponentene av den tredjeharmoniske lasten i (3.177) har betydning for tidspunktet maksutslaget til lasten oppstår.

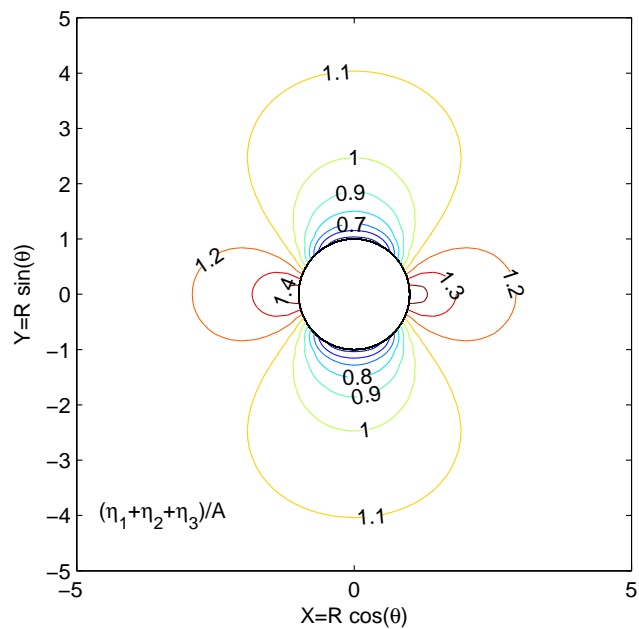
Fasen bestemmer når de ulike komponentene av lasten som har samme frekvens svinger i fase og forsterker hverandre eller svinger ute av fase og svekker/demper hverandre. Avhengig av fasen til hver komponent kan kreftene på sylinderen forsterke eller kansellere hverandre ut. Fasen har liten eller ingen betydning over et lenger tidsperspektiv f.eks. i forbindelse med beregning av utmatning.

### 3.8 Supplerende figurer av overflatehevning

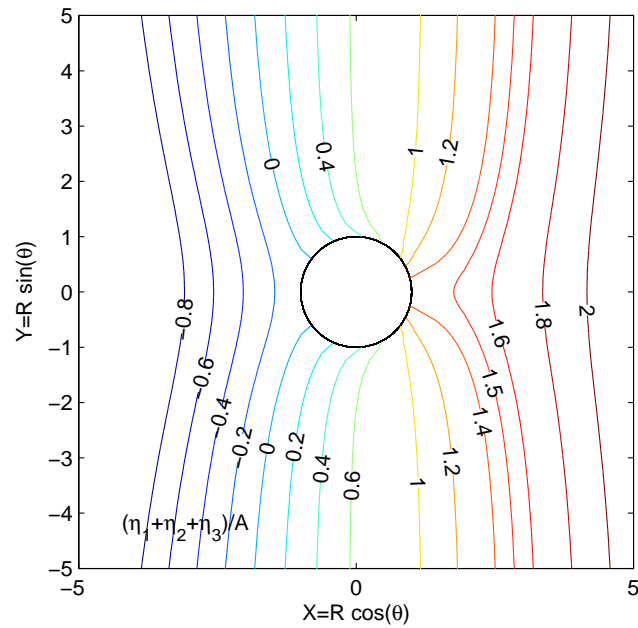




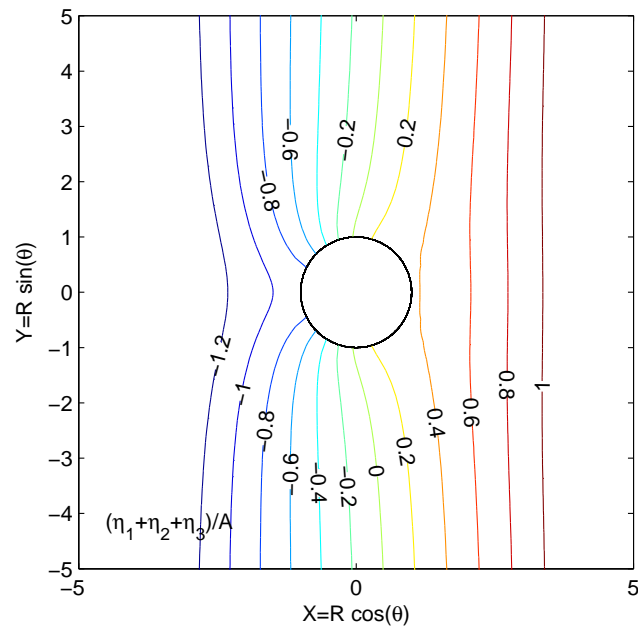
Figur 3.16: Som i figur 3.15, for  $\omega t = \pi/4$ .



Figur 3.17: Som i figur 3.15, for  $\omega t = \pi/2$ .



Figur 3.18: Som i figur 3.15, for  $\omega t = 3\pi/4$ .



Figur 3.19: Som i figur 3.15, for  $\omega t = \pi$ .

## Kapittel 4

# Irregulære bølger mot en vertikal bunnfast sylinder

Vi har hittil analysert effektene av lange regulære bølger mot en slank sylinder på dypt vann. Et regulært bølgefelt beskrives ved hjelp av én bølgekomponent med konstant amplitude og fase og som forplanter seg i en bestemt retning. Ute på sjøen er havoverflaten tilfeldig sammensatt av mange bølgekomponenter som forplanter seg i ulike retninger med ulike amplituder, frekvenser og faser. Overflaten kan beskrives ved hjelp av irregulære bølger og det lineære uforstyrrede bølgefeltet kan skrives som en sum av lineære bølgekomponenter. Bølgekomponentene omtales også som *spektralkomponenter* av ulike frekvenser.

Newman [15], heretter Newman (1996a), har utvidet FNVs teori for implementering i irregulære bølger. Ved å se bort fra ledd i den ikkelineære overflatebetingelsen (2.2) som inneholder differansen mellom enkeltfrekvenser viser Newman (1996a) hvordan det innkommende bølgefeltet kan beskrives konsistent som summen av lineære komponenter. Høyere ordens komponenter inneholder både summen og differansen mellom tilstøtende enkeltfrekvenser som er henholdsvis høyfrekvente og lavfrekvente. De lavfrekvente komponentene bidrar ikke til høyfrekvente krefter som er vist å forårsake ringing (FNV og Newman (1996a)). Derfor kan lavfrekvente komponenter neglisjeres. Newman viser at den ikkelineære betingelsen ved den frie overflaten (2.2) og dermed det ikkelineære potensialet  $\psi$  kan uttrykkes ved hjelp av det lineære innkommende bølgefeltet på sylinderaksen. Resultatene illustreres i Newman (1996a) ved hjelp av et bølgefelt som består av 5 bølgekomponenter i langbølgeregimet.

Metoden til Newman (1996a) går ut på å generalisere det lineære diffraksjonspotensialet (3.53) ved å uttrykke det og dermed den ikkelineære overflatebetingelsen (3.76) ved hjelp av det innkommende potensialet  $\phi_I(x=0, y=0)$  på sylinderaksen.

Vi følger artikkelen til Newman i generaliseringen av FNVs teori for irregulære bølger. I avsnitt 4.1 presenteres løsningen av randverdi-problemet definert i kapittel 2 til ledende or-

den. Overflatehevningen opp til og med andre orden i  $\epsilon$  beregnes i avsnitt 4.2 og løsningen av det ikkelineære randverdiproblemet er presentert i avsnitt 4.3. Bølgelastene på sylindere beregnes i avsnitt 4.4.

I tillegg til å gå gjennom utledningen i Newman (1996a) har jeg implementert teorien for et irregulært bølgefelt simulert ved hjelp av et JONSWAP bølgespekter [4] og Torsethaugen bølgespekter [31] med 1000 bølgekomponenter.

JONSWAP-spekteret brukes for å generere en tilfeldig sjøtilstand som består av vindgenererte bølger. Torsethaugen bølgespekter er dobbelt-toppet og brukes for å simulere havoverflaten som består av vindgenererte bølger i tillegg til dønninger.

## 4.1 Lineær analyse

Det lineære innkommende bølgefeltet beskrevet av (3.3) er en løsning av det linearisert randverdiproblemet i kapittel 2. Da (3.3) er en løsning er også summen av  $N$  løsninger,

$$\phi_I = \sum_{n=1}^N \operatorname{Re}\left\{\frac{gA_n}{\omega_n} e^{k_n z - ik_n x + i\omega_n t}\right\}, \quad (4.1)$$

en løsning av det lineariserte randverdiproblemet i 2.  $A_n$  er den komplekse amplituden som inneholder utslaget til overflatehevningen  $|A_n|$  og faseforskyvningen  $\epsilon_n = \arg(A_n)$ . Frekvensen  $\omega_n$  og bølgetallet  $k_n$  tilfredsstiller den lineære dispersjonsrelasjonen  $\omega_n^2 = gk_n$  for hver  $n$ . Som i avsnitt 3.1.1 tilfredsstiller hver komponent  $\phi_{In}$  i (4.1) overflatebetingelsen (2.2) til og med tredje orden i  $A$  gitt en korleksjon i dispersjonsrelasjonen  $\omega_n^2 = gk_n(1 + (k_n A_n)^2 + \mathcal{O}((k_n A_n)^3))$ .

For at vi skal kunne beskrive det innkommende bølgefeltet ved hjelp av summen av lineære komponenter må (4.1) tilfredsstille den ikkelineære overflatebetingelsen (2.2). Ved å sette inn ulike komponenter av (4.1) i (2.2) vil vi få høyere ordens bidrag på høyresiden av (2.2). Eksempelvis kan vi sette inn to spektralkomponenter  $\phi_{I1}$  og  $\phi_{I2}$  med frekvenser henholdsvis  $\omega_1$  og  $\omega_2$  i (2.2). Det andre ordens leddet som inneholder  $(\nabla\phi \cdot \nabla\phi)$  blir

$$\nabla\phi_{I1} \cdot \nabla\phi_{I2} = \omega_1\omega_2 e^{(k_1+k_2)z} \operatorname{Re}\{A_1 A_2^* e^{i(-k_1+k_2)x + i(\omega_1-\omega_2)t}\}, \quad (4.2)$$

ved hjelp av identiteten for to komplekse uttrykk  $C_1$  og  $C_2$

$$\operatorname{Re}\{C_1\}\operatorname{Re}\{C_2\} = \frac{1}{2}(\operatorname{Re}\{C_1 C_2\} + \operatorname{Re}\{C_1 C_2^*\}). \quad (4.3)$$

\* betegner den kompleks konjugerte.

Bidraget i det andre ordens leddet av (2.2) vil kun bestå av en lavfrekvent komponent som (4.2) for ethvert par av frekvenskomponenter. Likeledes kan det vises at tredje ordens ledd i (2.2) heller ikke inneholder høyfrekvente komponenter.

Newman konkluderer med at andre- og tredjeharmoniske laster i langkammede irregulære

bølger skyldes bølgediffraksjonen rundt sylindere og ikke høyere ordens effekter i det innkommende bølgefeltet. Det innkommende bølgefeltet beskrives dermed som (4.1) til og med tredje orden.

En komponent av det komplekse innkommende potensialet på sylindreraksen  $x = 0$  med frekvens  $\omega$  og amplitude  $A$  defineres som

$$\phi_{I1} = \frac{gA}{\omega} e^{kz+i\omega t}. \quad (4.4)$$

De horisontale og vertikale komponentene av hastighetsfeltet  $\mathbf{v} = \nabla\phi_{I1}$  er dermed

$$u(z, t) = \operatorname{Re}\{-ik \phi_{I1}\} = \omega A \sin \omega t e^{kz} \quad (4.5)$$

$$\text{og } w(z, t) = \operatorname{Re}\{k \phi_{I1}\} = \omega A \cos \omega t e^{kz}. \quad (4.6)$$

De horisontale gradientene  $\mathbf{i} \cdot \nabla\mathbf{v}$  til hastighetsfeltet uttrykkes

$$u_x(z, t) = \operatorname{Re}\{-k^2 \phi_{I1}\} = \omega k A \cos \omega t e^{kz} \quad (4.7)$$

$$\text{og } w_x(z, t) = \operatorname{Re}\{-ik^2 \phi_{I1}\} = \omega k A \sin \omega t e^{kz}. \quad (4.8)$$

De tidsderiverte er definert

$$u_t(z, t) = \operatorname{Re}\{k\omega \phi_{I1}\} = gkA \cos(\omega t) e^{kz} \quad (4.9)$$

$$w_t(z, t) = \operatorname{Re}\{ik \omega \phi_{I1}\} = -gkA \sin(\omega t) e^{kz}, \quad (4.10)$$

$$\text{og } u_{tz}(z, t) = ku_t. \quad (4.11)$$

Uttrykket for de totale hastighetene gitt i (4.5) til (4.11) skrives som en sum over ulike frekvenskomponenter som i (4.1).

Det lineære diffraksjonspotensiallet gitt ved (3.53) kan skrives om ved hjelp av (4.4)-(4.8) slik at

$$\begin{aligned} \phi_D &= \operatorname{Re} \left\{ \phi_{I1} \left( 1 + \frac{(ka)^2}{2} \left( \ln \frac{ka}{2} + \gamma + i\frac{\pi}{2} \right) \right) \right\} + u \cos \theta \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \\ &+ \frac{1}{4} u_x \left( r^2 + \cos 2\theta \left( r^2 + \frac{a^4}{r^2} \right) \right) - 2a^2 \ln \frac{r}{a} + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (4.12)$$

(4.12) følger fra omskrivningen

$$\ln \frac{kr}{2} = \ln \frac{ka}{2} + \ln \frac{r}{a}. \quad (4.13)$$

Bortsett fra den komplekse konstanten

$$\frac{(ka)^2}{2} \left( \ln \frac{ka}{2} + \gamma + i\frac{\pi}{2} \right) = \mathcal{O}(\epsilon^2 \ln \epsilon) \quad (4.14)$$

er koeffisientene i  $\phi_D$  uavhengig av  $k$  og  $\omega$ . Den høyere ordens konstanten (4.14) gir ikke bidrag i den videre analysen og kan som ved Newman (1996a) neglisjeres. Det lineære diffraksjonspotensialet (4.12) er derfor gyldig i det innkommende irregulære bølgefelt definert ved hjelp av (4.4).

Beregning av overflatehevning og laster tar utgangspunkt i resultatene for monokromatiske bølger. Uttrykkene for overflatehevingen og bølgelastene skrives ved hjelp av komponentene (4.5)-(4.11) av det innkommende potensialet og er dermed gyldig, ved konklusjonen over, for summen over hver komponent for ulike frekvenser.

## 4.2 Overflatehevning

Vi beregner overflatehevingen til andre orden i  $\epsilon$  som i artikkelen til Newman (1996a). Overflatehevingen skrives som en sum av komponentene  $\eta_n = \mathcal{O}(\epsilon^n)$  og er gitt implisitt ved den ikkelineære dynamiske overflatebetingelsen

$$\begin{aligned}\eta &= -\frac{1}{g} \left( \phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 \right)_{z=\eta} \\ &= \eta_1 + \eta_2 + \dots\end{aligned}\tag{4.15}$$

Overflatehevingen som følge av det innkommende bølgefeltet skrives

$$\eta_I = \eta_{I1} + \eta_{I2} + \dots\tag{4.16}$$

og skjelles fra den totale overflatehevingen (4.15) som inneholder effekten av bølgespredningen rundt sylinderen. Første ordens overflateheving på sylinderaksen er gitt ved

$$\eta_1 = \eta_{I1} = -\frac{1}{g} (\phi_{I1,t})_{z=0}.\tag{4.17}$$

Andre ordens overflateheving som følge av det innkommende bølgefeltet beregnes ved hjelp av

$$\eta_{I2} = -\frac{1}{g} (\phi_{I1,t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi_{I1}|^2)_{z=\eta}.\tag{4.18}$$

Ved å bruke rekkeutviklingen (3.147) og kun inkludere ledd av orden  $\epsilon^2$  i (4.18) har vi at

$$(\phi_{I1,t})_{z=\eta} = \eta_1 \operatorname{Re} \left\{ i\omega k \frac{gA}{\omega} e^{i\omega t} \right\}\tag{4.19}$$

$$= \eta_1 w_t,\tag{4.20}$$

og ved hjelp av definisjonen av det innkommende hastighetsfeltet  $\mathbf{v} = \nabla \phi_{I1}$

$$|\nabla \phi_{I1}|^2 = u^2 + w^2.\tag{4.21}$$

Vi får da at

$$\eta_{I2} = -\frac{1}{g} \left( \eta_1 w_t + \frac{1}{2} (u^2 + w^2) \right),\tag{4.22}$$

som korresponderer med den velkjente andre ordens korreksjonen

$$-\frac{1}{2}kA^2 \cos 2\omega t$$

av overflatehevningen i Stokes teori for regulære dypvannsbølger som er gitt i likning (3.150). I likningene (4.20)-(4.22) og heretter, bortsett fra i (4.30) og (4.31), evalueres funksjonene definert ved (4.5)-(4.11) i  $z = 0$ . Den totale andre ordens overflatehevningen uttrykkes ved å hjelp av (3.150). Ved å gjenkjenne  $-kA \cos \omega t$  som  $-u_t/g$  og  $kA^2 \sin^2 \omega t$  som  $-1/g(-\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t) = -u^2/g$  har vi at

$$\eta_2 = -\frac{1}{g}(\nabla\phi_D + \frac{1}{2}|\nabla\phi_D|^2) \quad (4.23)$$

$$= -\frac{u_t}{g}\left(r + \frac{a^2}{r}\right) \cos \theta + \eta_{I2} + \frac{u^2}{g}\left(\frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta - \frac{1}{2} \frac{a^4}{r^4}\right) \quad (4.24)$$

### 4.3 Ikkelineær analyse

Den eksakte overflatebetingelsen (2.2) er gitt i indre koordinater til ledende orden ved (3.76) for regulære bølger der høyresiden skal evalueres i  $Z = 0$ . Koordinatskiftet er gitt ved

$$R = \frac{r}{a}, \quad Z = \frac{-z + \eta_1}{a} \quad (4.25)$$

der den vertikale koordinaten fluktuerer med den første ordens overflatehevning. Uttrykt ved hjelp av det innkommende lineære potensialet (4.4) og dens gradienter kan vi skrive

$$\Psi_Z = -\frac{2auu_t}{g}\left(\frac{2}{R^2} \cos 2\theta - \frac{1}{R^4}\right) + \frac{u^3}{g}\left(\frac{2}{R^3} \cos 3\theta + \left(-\frac{4}{R^5} + \frac{2}{R^7}\right) \cos \theta\right), \quad Z = 0. \quad (4.26)$$

Som for regulære bølger vil løsningen være på formen

$$\Psi(R, Z, t) = \sum_{m=0}^3 c_m(t) \Psi_m(R, Z) \cos m\theta \quad (4.27)$$

med

$$c_0 = c_2 = -\frac{2auu_t}{g}, \quad c_1 = c_3 = \frac{u^3}{g}. \quad (4.28)$$

Grenseverdiproblemet for  $\Psi$  er beskrevet i avsnitt 3.2.1 og består av Laplace' feltlikning i sylinderkoordinater (3.13), diffraksjonsbetingelsen på sylindere  $\Psi_R|_{R=1} = 0$  og betingelsen i fjernfeltet og i dypet  $\Psi \rightarrow 0, \sqrt{R^2 + Z^2} \rightarrow \infty$ . I tillegg har vi betingelsen for den vertikalt deriverte ved hjelp av (4.27)

$$\Psi_{mZ}(R, Z = 0) = f_m(R) \quad (4.29)$$

der  $f_m(R)$  er gitt ved likning (3.85). Løsningen av komponentene  $\Psi_m(R, Z)$  er gitt i avsnitt 3.2.8.

#### 4.4 Bølgelaster på sylinderen i irregulære bølger

Uttrykket for de totale trykkkreftene som virker på sylinderen i positiv  $x$ -retning er gitt ved (3.158) i avsnitt 3.5. Bernoullis likning brukes for å evaluere trykket på sylinderen. Differensiallastene  $F'_n$  er definert ved likning (3.159) for hver spektralkomponent  $\omega_n$ .

Første ordens differensiallast kan skrives

$$F'_1(z, t) = 2\pi\rho a^2 u_t. \quad (4.30)$$

Andre ordens differensiallast er uttrykt ved

$$F'_2(z, t) = \pi\rho a^2 (2ww_x + uu_x). \quad (4.31)$$

For ethvert et par av horisontale hastighetskomponenter  $u_1$  og  $u_2$  med frekvenser henholdsvis  $\omega_1$  og  $\omega_2$  har vi at

$$u_1 u_{2x} = \frac{1}{2} \left( \operatorname{Re} \left\{ i\omega_1 \omega_2 k_2 A_1 A_2 e^{(k_1+k_2)z+i(\omega_1+\omega_2)t} \right\} \right. \\ \left. \operatorname{Re} \left\{ i\omega_1 \omega_2 k_2 A_1 a_2 * e^{(k_1+k_2)z+i(\omega_1-\omega_2)t} \right\} \right) \quad (4.32)$$

og

$$w_1 w_{2x} = \frac{1}{2} \left( \operatorname{Re} \left\{ -i\omega_1 \omega_2 k_2 A_1 A_2 e^{(k_1+k_2)z+i(\omega_1+\omega_2)t} \right\} \right. \\ \left. \operatorname{Re} \left\{ i\omega_1 \omega_2 k_2 A_1 a_2 * e^{(k_1+k_2)z+i(\omega_1-\omega_2)t} \right\} \right). \quad (4.33)$$

Dersom komponenten som inneholder differansfrekvensen  $\omega_1 - \omega_2$  neglisjeres kan vi sette  $uu_x = -ww_x$ .

Vi kan skrive differensiallasten på sylinderen,  $R = 1$ , som er ekvivalent med (3.165) for monokromatiske bølger uttrykt i indre koordinater

$$F'_3(Z, t) = \frac{\pi\rho a}{g} u^2 u_t (3\Psi_1(1, Z) + 4\Psi_2(1, Z)) = \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (4.34)$$

Ved å bruke at  $u_t$  i (4.9) er proporsjonal med  $e^{kz}$  for en spektralkomponent med bølgetall  $k$  får vi uttrykket for den totale førsteordens lasten

$$F_1 = 2\pi\rho a^2 \int_{-\infty}^0 u_t dz = 2\pi\rho a^2 \operatorname{Re} \{ \omega \phi_{I1} \}. \quad (4.35)$$

I 4.35 er  $\omega$  frekvensen til komponenten  $\phi_{I1}$ . Punktlasten som virker på partisjonen  $0 \leq z \leq \eta_1$  som følge av det lineære diffraksjonspotensialet beregnes ved hjelp av differensiallastene (3.161) og (3.163) slik at

$$\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2 = \int_0^{\eta_1} (F'_1 + F'_2) dz = \pi\rho a^2 (2u_t \eta_1 + u_{tz} \eta_1^2 + 2ww_x \eta_1 + uu_x \eta_1) + \mathcal{O}(\epsilon^6) \\ = \pi\rho a^2 (2u_t \eta_1 + u_{tz} \eta_1^2 + ww_x \eta_1) + \mathcal{O}(\epsilon^6) \quad (4.36)$$



ved at  $ku_t = u_{tz}$ .

Bidraget til trykk-kraften på sylindren mellom første ordens overflatehevning  $\eta_1$  og den eksakte overflatehevningen  $\eta$  skyldes det hydrostatiske trykket. Som i avsnitt 3.5 kan vi skrive trykket som  $p = -\rho g(z - \eta)$  til ledende orden. Uttrykket for den integrerte kraften som virker over første ordens innkommende overflatehevning skrives ved hjelp av (4.24) på sylindren  $r = a$ . Vi får at

$$\begin{aligned}\tilde{F}_0 &= -a \int_0^{2\pi} \int_{\eta_1}^{\eta} p(r = a) \cos \theta \, dz d\theta = -\frac{1}{2} \rho g a \int_0^{2\pi} \cos \theta \eta_2^2 \, d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \rho g a \left( -4\pi a \eta_{I2} \frac{u_t}{g} \right) \\ &= 2\pi \rho a^2 u_t \eta_{I2}.\end{aligned}\tag{4.37}$$

Dermed blir punktlasten som følge av det lineære diffrakjionspotensialet

$$\begin{aligned}\tilde{F}_x^{(D)} &= -a \int_0^{2\pi} \int_0^{\eta} p(r = a) \cos \theta \, dz d\theta \\ &= \pi \rho a^2 (2u_t(\eta_1 + \eta_{I2}) + u_{tz}\eta_1^2 + ww_x\eta_1).\end{aligned}\tag{4.38}$$

Den totale andre ordens bølgekraften på sylindren består av den integrerte kraften som følge av andre ordens differensialast under stille vannsnivået i (4.36) og andre ordens ledd i punktlasten (4.38) slik at

$$F_2 = \pi \rho a^2 \int_{-\infty}^0 ww_x \, dz + 2\pi \rho a^2 u_t \eta_1\tag{4.39}$$

ved at  $ww_x = -uu_x$ . For ethvert par av hastighetskomponentene  $w_1$  og  $w_2$  med bølgetall henholdsvis  $k_1$  og  $k_2$  har vi at

$$\int_{-\infty}^0 w_1 w_{2x} \, dz = \frac{1}{k_1 + k_2} (w_1 w_{2x})_{z=0}.\tag{4.40}$$

For et bølgespekter med tilstrekkelig liten båndbredde  $\Delta\omega \ll 1$  kan koeffisienten  $1/(k_1 + k_2)$  erstattes med  $1/2k_1$  eller  $1/2k_2$  med at

$$k_1 + k_2 = 2k_1 + (k_2 - k_1) = 2k_1 + \Delta k\tag{4.41}$$

og  $\Delta k$  er proporsjonal med  $(\Delta\omega)^2$ . I beregningen av (4.36) får vi ikke liknende bidrag til konsistent orden i  $\epsilon$ .

Den tredjeordens bølgelasten som følge av det lineære diffrakjionspotensialet består av de resterende leddene i (4.38) og ved å sette inn (4.22) blir

$$F_3^{(D)} = \pi \rho a^2 \left( \eta_1 \left( -\frac{2}{g} u_t w_t + u_{tz} \eta_1 + 2ww_x + uu_x \right) - \frac{u_t}{g} (u^2 + w^2) \right) = \mathcal{O}(\epsilon^6).\tag{4.42}$$

Den tredjeordens lasten på sylindren som følge av det ikkelineære potensialet beregnes ved hjelp av resultatene funnet ved hjelp av Greens teorem (3.121) og (3.122)

$$\begin{aligned} F_3^{(\psi)} &= \frac{\pi\rho a^2}{g} u^2 u_t \int_0^\infty (3\Psi_1(1, Z) + 4\Psi_2(1, Z)) dZ \\ &= 4 \frac{\pi\rho a^2}{g} u^2 u_t + \mathcal{O}(\epsilon^6). \end{aligned} \quad (4.43)$$

(4.43) er ekvivalent med (3.176) for en monokromatisk bølge.

Newman (1996a) [15] foreslår å omskrive den tredje ordens lasten til

$$F_3^{(\psi)} = \frac{\pi\rho a^2}{g} u_t (4u^2 - (u^2 + w^2)) \quad (4.44)$$

for å eliminere bidrag fra differansefrekvensen som er tilstede i (4.43).

Første og andre ordens last som angitt i likning (4.35) og (4.39) tilsvarer henholdsvis første og andre ordens komponent av den totale lasten gitt i (3.178) for monokromatiske bølger. De tredjeordens lastene (4.42) og (4.44) tilsvarer henholdsvis de tredjeordens lastkomponentene i likning (3.175) og (3.176) i regulære bølger.

## 4.5 Bølgespekter

Som følge av havbølgenes tilfeldige beskaffenhet brukes ofte statistikk for å beskrive bølgefeltets egenskaper. Havoverflaten kan beskrives vha en stokastisk prosess og kan observeres eller beskrives i tidsplanet eller i frekvensplanet som omtalt av Gran [8].

Bølgefeltets statistiske egenskaper analyseres i frekvensplanet ved hjelp bølgespektrere. Et kortkammet bølgespekter  $S(\omega, \theta)$  tar høyde for bølgespredning i tre dimensjoner og beskriver fordelingen av energi på ulike frekvenser  $\omega$  og retninger  $\theta$ . Et langkammet bølgespekter  $S(\omega)$  beskriver hvordan bevegelsesenergien er fordelt på ulike bølgeamplituder som funksjon av frekvens i bølger som forplanter seg i en bestemt retning. Når vi analyserer et irregulært bølgefelt vha bølgespektrere antar vi at bølgefeltet er stasjonært innenfor et avgrenset område og beskrivelsen er gyldig over et kort tidsrom (1/2-10 timer, Faltinsen [5]).

Vi benytter langkammede bølgespektrere for å simulere overflatehevningen og beregne de korresponderende bølgekreftene i implementeringen av teorien til Newman (1996a).

Innenfor et frekvensintervall  $(\omega, \omega + \Delta\omega)$  antar vi at bølgene er monokromatiske og kan representeres vha en ren førsteharmonisk funksjon  $A \cos(\omega t)$ . Energibidraget fra bølgene med frekvens innenfor det definerte frekvensintervallet skrives  $\Delta P$  og Gran definerer bølgespekteret

på intervallet ved

$$S(\omega) = \frac{\Delta P}{\Delta\omega} = \frac{A^2}{2\Delta\omega}. \quad (4.45)$$

Med dette kan amplituden uttrykkes vha bølgespekteret

$$A = \sqrt{2 S(\omega)\Delta\omega}. \quad (4.46)$$

Målet på den totale enregien  $P$  i bølgefeltet er det samme som variansen  $\sigma^2$  til bølgespekteret og er definert som

$$P = \sigma^2 = \lim_{\omega_n \rightarrow 0} \sum_n S(\omega_n)\Delta\omega_n = \int_{\omega} S(\omega)d\omega = \sum_n \frac{A_n}{2}. \quad (4.47)$$

Bølgespektrere kan estimeres ved hjelp av Fouriertransformen  $\hat{\eta}$  av en tidsserie med målinger  $\eta$  av overflatehevningen. Realsjonen er gitt av Gran (kapittel 2.1.3)

$$S(\omega) = \frac{2}{\Delta\omega} |\hat{\eta}(\omega)|^2 \quad (4.48)$$

der  $\Delta\omega = 2\pi/\Delta T$ .

Vi kan simulere bølgespektrere ved hjelp av analytiske funksjoner. JONSWAP-spekteret som beskrevet av Gran benyttes ofte for å simulere havbølger som er generert av vind. Torsethaugen bølgespekter er dobbelttoppet og inkluderer effekten av dønninger i bølgefeltet i tillegg til de vindgenererte bølgeene. JONSWAP og Torsethaugen bølgespekter presenteres i avnitt 4.5.1 og 4.5.2.

Statistisk analyse av den simulerte overflatehevningen i irregulære bølger er basert på antagelsen om at den umiddelbare overflatehevningen  $\eta$  er normalfordelt og at bølgespekteret som brukes til å simulere overflatehevningen er smalbandet [5]. Båndbredden i et bølgespekter er gitt ved steglengden  $\Delta\omega$  mellom hver diskrete frekvens.

Standardavviket til en normalfordelt diskret overflatehevning eller tidsserie,  $\eta$ , som består av  $N$  komponenter er definert

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=n}^N (\eta_n - \bar{\eta})^2}. \quad (4.49)$$

$\eta_n$  er den diskrete overflatehevningen i punkt nummer  $n$  og  $\bar{\eta}$  er den midlede overflatehevningen. Variansen til den simulerte overflatehevningen er definert som kvadratet  $\sigma^2$  av standard avviket og er et mål på variasjonen eller spredningen i en statistisk fordeling. Standard avviket (4.49) med tilhørende varians er en tilnærming da dataene, det vil si verdiene av overflatehevningen, er avhengige.

En enkel *tilnærming* til sannsynlighetstettheten for maksimalutslagene  $\eta_{maks}$  til overflatehevningen  $\eta$  i én tidsserie er gitt ved Rayleighfordelingen

$$p(\eta_{maks}) = \frac{\eta_{maks}}{\sigma^2} e^{-\eta_{maks}^2/2\sigma^2} \quad (4.50)$$

som beskrevet av Faltinsen [5]. Rayleighs fordeling kan benyttes under antakelsen om at bølgespekteret er smalbandet og at den umiddelbare verdien av overflatehevningen er normalfordelt.

For hver simulering av et bølgefelt vha et bølgespekter velges fasevinkelen  $\epsilon_n$  til hver bølgekomponent tilfeldig og uavhengig av frekvensen  $\omega_n$ , slik at overflatehevningen og den maksimale amplituden er forskjellig i hver av simuleringene. En simulering av overflatehevningen er også kalt en *realisasjon*.

Sannsynlighetsfordelingen av ekstrembegivenheter kan bestemmes ved et stort antall simuleringer. Ved hjelp av numeriske Monte Carlo-simuleringer av utviklingen av et bølgespekter over tid viser Gramstad & Trulsen [26] at et antall på 5000 simuleringer er nødvendig for å få konvergens av avviket i sannsynlighetsfordelingen for ekstrembølger, eller 'freakbølger'.

For å kunne bestemme sannsynligheten for at en bestemt ekstrembegivenhet finner sted behøver vi dermed 5000 realiseringer. I beregningen av overflatehevning og bølgekrefter på sylindren i irregulære bølger utfører jeg én simulering for hvert av bølgespektrene definert i dette avsnittet.

JONSWAP-spekteret og den forenklete versjonen av Torsethaugens bølgespekter [31] karakteriseres ved hjelp av inndataparametrene signifikant bølgehøyde  $H_s$  og spektral toppperiode  $T_p$ . Toppfrekvensen  $\omega_p = 2\pi/T_p$  er frekvensen som er assosiert med maksimalverdien til bølgespekteret. Den signifikante bølgehøyden  $H_s$  og den karakteristiske amplituden  $A_c$  kan defineres i frekvensplanet er uttrykt vha standardavviket  $\sigma$  til overflatehevningen (Dysthe et al. [11])

$$H_s = 4\sigma \quad \text{og} \quad A_c = \sqrt{2}\sigma. \quad (4.51)$$

Vi kan estimere den karakteristiske bølgesteilheten til en simulert overflatehevning vha den karakteristiske amplituden (4.51) og topp-perioden  $T_p = 2\pi/\omega_p$  angitt som inndataparameter i simuleringen av et bølgespekter. Ved hjelp av dispersjonsrelasjonen på dypt vann  $\omega_p^2 = gk_p$  får vi at

$$k_p A_c = \frac{\sqrt{2}\pi^2 H_s}{gT_p^2}. \quad (4.52)$$

I Newmans utvidelse av FNV teori beskrives diffraksjonspotensialet  $\phi$  til tredje orden vha komponentene gitt i likningene (4.4)-(4.11). Den reelle amplituden  $A_n$  til bølgekomponent  $n$  uttrykkes vha frekvenskomponent  $\omega_n$  og fra (4.46) har vi at

$$A_n = \sqrt{2 S(\omega_n) \Delta \omega}. \quad (4.53)$$

$\omega_n > 0$  da bølgene vi skal simulere forplanter i positiv  $x$ -retning.

Som en utvidelse av Newmans artikkel (1996a) implementerer jeg Newmans teori ved å simulere fordelingen av bølgeenergien på ulike frekvenser vha et bølgespekter. Vi beskriver havbølgene i tidsplanet vha komponentene av det innkommende potensialet 4.1 gitt i likning (4.4)-(4.11). Jeg benytter relasjonen (4.52) for å karakterisere steilheten til den simulerte sjøen.

#### 4.5.1 JONSWAP spekter

JONSWAP spekteret er et modifisert Pierson-Moskowitzspekter og defineres i henhold til DNV [4]

$$S_J(\omega) = \frac{5}{16} A_\gamma H_{1/3}^2 \omega_P^4 \omega^{-5} e^{-\frac{5}{4} \omega_P^4 \omega^{-4}} (\gamma)^Y \quad (4.54)$$

der  $Y$  er definert som

$$Y = e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\omega - \omega_P}{\Sigma \omega_P} \right)^2}, \quad (4.55)$$

og

$$A_\gamma = 1 - 0.287 \ln(\gamma) \quad (4.56)$$

er en normaliseringsfaktor. Anbefalte verdier for parameteren  $\Sigma$  er

$$\Sigma = \begin{cases} 0.07 & \text{for } \omega \leq 2\pi/T_P = \omega_P \\ 0.09 & \text{for } \omega > \omega_P. \end{cases} \quad (4.57)$$

og er et mål på bredden av den spektrale toppen.  $\gamma$  er en dimensjonsløs formparameter, eller spissheitsfaktor, og brukes for å heve toppen til Pierson-Moskowitz-spekteret. Gjennomsnittverdien til  $\gamma$  er 3.3.  $H_{1/3}$  er definert som snittet av den høyeste tredjedelen av bølgene. Den signifikante bølgehøyden  $H_{1/3}$  er ofte redefinert som  $H_s$  i (4.51) og ved Faltinsen er  $H_s \sim H_{1/3}$ . Toppfrekvensen  $\omega_p = 2\pi/T_p$  er assosiert med størst andel energi i spekteret. JONSWAP-spekteret forventes å være en fornuftig modell når  $3.6 < T_p/\sqrt{H_s} < 5$ .

#### 4.5.2 Torsethaugen spekter

Sjøtilstander på åpent hav med lave til moderate bølger er ofte sammensatt av både vindgenererte bølger og dønninger. Et dobbelttoppet energispekter benyttes for å simulere effektene av både vind og dønninger. Torsethaugen bølgespekter [31] er tilpasset gjennomsnittlig sjøtilstand i norske farvann og er basert på målinger fra Haltenbanken og Statfjord.

Torsethaugen antar at havbølger i et avgrenset område kan deles inn i bølger generert av lokal vind og dønninger som kommer inn i området utenfra. Dønninger er lavfrekvente bølger som er generert av vind i andre områder og som forplanter seg raskere enn det lokale vindfeltet. Dønningene kan dermed nå områder som ikke påvirkes av det samme vindfeltet. Komponentene av bølgefeltet som er assosiert med dønninger adderes til den lokale vindgenererte sjøen hvilket skaper et dobbelt toppet bølgespekter. Inndata-parametrene i Torethaugens forenklede bølgespekter [31] består av den signifikante bølgehøyden  $H_s$  for den totale sjøtilstanden og den spektrale topp-perioden  $T_p$  for primærtoppen i bølgespekteret. Bølgefeltet klassifiseres som vind-dominert eller dønning-dominert som hver består av to bølgesystemer; et primært og et sekundært bølgesystem. Det vinddominerte bølgefeltet er gitt ved

$$T_p \leq T_{pf} \quad (4.58)$$

mens det dønning-dominerte er gitt ved

$$T_p > T_{pf} \quad (4.59)$$

der  $T_{pf} = a_f H_s^{1/3}$  er den spektrale topp-perioden for fullt utviklet sjø i området og avhengig av den signifikante bølgehøyden  $H_s$ , og  $a_f$  er en parameter gitt i tabell 4.1, som brukes til å bestemme om sjøtilstanden er dominert av vindgenererte bølger eller dønninger. For et vind-dominerte bølgefeltet, som vi skal se på, representerer det sekundære bølgesystemet den gjennomsnittlige sjøtilstanden assosiert med dønninger i området. For hvert bølgesystem introduseres en dimensjonsløs normaliseringsparameter for den spektrale topp-perioden. I vinddominert sjø er normaliseringsparameteren

$$\epsilon_l = \frac{T_{pf} - T_p}{T_{pf} - T_l} \quad (4.60)$$

der  $T_l = a_e H_s^{1/2}$  er den nedre grensen for  $T_p$  og  $a_e$  er gitt som empiriske parameter i artikkelen til Torsethaugen, se tabell 4.1.

Spekteret uttrykt ved hjelp av frekvensen  $f_n = \omega_n/2\pi$  er definert

$$S(f_n) = \sum_{j=1}^2 E_j S_{jn}(f_{jn}) \quad (4.61)$$

der  $j = 1$  er det primære bølgesystemet og  $j = 2$  er det sekundære. Koeffisientene  $E_j$  er definert

$$E_1 = \frac{1}{16} H_1^2 T_{p1} \quad \text{og} \quad E_2 = \frac{1}{16} H_2^2 T_{p2}. \quad (4.62)$$

Da vi skal simulere et bølgefelt som er dominert av vindbølger vil det primære systemet  $j = 1$  representere den bølgespekteret som følge av vindgenererte bølger. Det sekundære systemet

$j = 2$  representerer spekteret assosiert med dønninger. De to komponentene  $S_{1n}$  og  $S_{2n}$  av spekteret (4.61) er definert

$$S_{1n}(f_{1n}) = G_0 A_\gamma f_{1n}^{-4} e^{f_{1n}^{-4}} \gamma^Q, \quad (4.63)$$

der

$$Q = e^{-(f_{1n}-1)^2/2\sigma^2}, \quad (4.64)$$

og

$$S_{2n}(f_{2n}) = G_0 f_{2n}^{-4} e^{-f_{2n}^{-4}}. \quad (4.65)$$

Her er  $f_{jn} = f_n T_{pj}$  og  $G_0 = 3.26$ . Normaliseringsfaktoren for Tprsethaugens bølgespekter er

$$A_\gamma = \frac{1}{\gamma} (1 + 1.1(\ln \gamma)^{1.19}). \quad (4.66)$$

Den spektrale parameteren  $\sigma$  er som for JONSWAP-spekteret  $\sigma = 0.07$  for  $f_n < 1$  og  $\sigma = 0.09$  for  $f_n > 1$ .

Spektralparametre for den *primære toppen* i spekteret er definert ved punktene i), ii) og iii).

i) Signifikant bølgehøyde,

$$H_1 = R_w H_s, \quad \text{der } R_w = (1 - a_{10})e^{(\epsilon_1/a_1)^2} + a_{10} \quad (4.67)$$

ii) Spektral periode

$$T_{p1} = T_p \quad (4.68)$$

iii) Formparameter? Spisshetsfaktor (str av spektral topp relativt til utgangsspekter)

$$\gamma = k_g s_p^{6/7}, \quad \text{der } s_p = \frac{2\pi H_1}{g T_{p1}^2} \quad (4.69)$$

Spektralparametre for den *sekundære toppen* i spekteret:

i) Signifikant bølgehøyde,

$$H_2 = (1 - R_w^2)^{1/2} H_s \quad (4.70)$$

ii) Spektral periode

$$T_{p2} = T_{pf} + b_1 \quad (4.71)$$

iii) Spisshetsparameter/toppethetsparameter (JONSWAP  $\gamma$  antall ganger større/mindre enn PM-spekterets topp)

$$\gamma = 1 \tag{4.72}$$

Inndata-parametere i Tprsethaugens bølgespekter er  $H_s$  og  $T_p$  og de øvrige konstantene i spekteret er empiriske parametre for Torsethaugens forenklede modell og er gitt i tabell 4.1.

Parameter	Verdi
$G_0$	3.26
$a_f$	$6.6\text{s/m}^{1/3}$
$a_e$	$2.0\text{s/m}^{1/2}$
$a_{10}$	0.7
$a_1$	0.5
$k_g$	35.0
$b_1$	2.0 s

Tabell 4.1: Empiriske parametre for forenklet Torsethaugen spekter

### 4.5.3 Implementering

JONSWAP og Torsethaugens bølgespekter genereres for  $N = 1000$  bølgekomponenter som anbefalt i Faltinsen [5].  $\omega_{min} = 0.01$  og  $\omega_{max} = 4$  er valgt for at resultatene skal inneholde bidrag fra alle frekvenser med tilhørende bølgelengder. Båndbredden er konstant og gitt ved  $\Delta\omega = 0.004$ . Spektrene implementeres over et kort tidsintervall  $t \in [1040, 1120]$ .

Parametere  $H_s$  og  $T_p$  som brukes som inndata i JONSWAP-spekteret er brukt av Grue (1996) [9] til å modellere havoverflaten rundt strekkstagplattformen Snorre i Nordsjøen. Spektral topp-periode er  $T_p = 12.6\text{s}$  og den signifikante bølgehøyden er  $H_s = 8.7\text{m}$ .

Torsethaugens bølgespekter brukes til å simulere en vinddominerte sjøtilstand,  $T_p \leq T_{Pf}$ , som i Torsethaugens artikkel er sammenliknet med observasjoner fra oljeplattformen Gullfaks C i Nordsjøen. Inndata parametrene er  $H_s = 8.3\text{m}$  og  $T_p = 10.7\text{s}$  er hentet fra artikkelen til Torsethaugen [31]. Formparameter  $\gamma$ , signifikant bølgehøyde  $H_S$ , spektral topp-periode  $T_p$  og -frekvens  $\omega_p$  beregnes vha (4.67) til (4.72) for primær og sekundær topp i spekteret. Parametrene er oppsummert i tabell 4.2.

Jeg simulerer overflatehevningen og bølgekreftene i avsnitt (4.2) og (4.4) over et tidsintervall  $0 \leq t \leq 1000$  sekunder. I figurene av simuleringen har jeg plukket ut et tidsintervall som inneholder en ekstrembegivenhet.



	(3) Inndata	Primær topp	Sekundær topp
$H_s$ [m]	8.3	7.3	3.9
$T_p$ [s]	10.7	10.7	15.4
$\gamma$ [1]		2.3	1

Tabell 4.2: Spektrale parametre for en simulering av Torsethaugens dobbelttoppede spekter. Benevning i firkantparenteser.

## 4.6 Resultater fra simuleringen av irregulære bølger mot en slank vertikal sylinder

I simuleringen av havbølger ved hjelp av bølgespektre består det innkommende bølgefeltet av en rekke bølgekomponenter assosiert med ulike bølgelengder. Da vi inkluderer alle frekvensene i bølgespekteret i simuleringen vil det innkommende bølgefeltet inneholde komponenter med små bølgelengder. Vi får dermed bidrag til overflatehevningen og bølgekreftene fra korte bølger som er utenfor gyldigheten til FNVs teori.

Ved å simulere en sjøtilstand ved hjelp av JONSWAP og Torsethaugens bølgespekter er hoveddelen av energien i spekteret forbundet med toppfrekvensen  $\omega_p$  med korresponderende bølgetall  $k_p = \omega_p^2/g$ , eller  $k_p = (T_p/2\pi)^2/g$  uttrykt ved hjelp av topp-perioden  $T_p$ . Den oftest forekommende bølgekomponenten i simuleringen vil dermed ha bølgetall  $k_p$ , og for en sylinder av radius  $a = 10\text{m}$  har vi at

$$k_{pJ}a = 0.35 \quad \text{og} \quad k_{pT}a = 0.25 \quad (4.73)$$

for henholdsvis JONSWAP-spekteret og Torsethaugen-spekteret. Størstedelen av de innkommende bølgene i simuleringene er derfor innenfor gyldigheten til FNVs teori. Illustrasjoner for resultatene av simuleringene er samlet i avsnitt 4.7.

Newman (1996a) har illustrert overflatehevningen i avsnitt 4.2 og bølgelastene i avsnitt 4.4 ved hjelp av en enkel tidsserie som består av fem komponenter. De fem komponentene består av periodene  $T_n(11, 12, 13, 14, 15)$  sekunder, amplituden er lik for alle komponentene  $A_n = 2m$  og frekvensene er gitt ved  $\omega_n = 2\pi/T_n$ . Komponentene i tidsserien befinner seg i langbølgeregimet  $ka \ll 1$ . Da Newmans tidsserie består av kun fem frekvenskomponenter er det korresponderende bølgespekteret smalt. Newman (1996a) angir forholdet mellom første, andre og tredjeordens laster gitt ved (4.35), (4.39) og summen av (4.42) og (4.44) som

$$|F_1|/|F_2| = 6, \quad \text{og} \quad |F_1|/(|F_3^{(D)}| + |F_3^{(\psi)}|) = 15. \quad (4.74)$$

### Resultater fra simuleringen av JONSWAP-spekteret med diskusjon

JONSWAP-spekteret simuleres for parametrene  $H_s = 8.7\text{m}$  og  $T_p = 12.6\text{s}$  som forklart i avsnitt 4.5.3. Den karakteristiske bølgesteilheten er gitt ved  $k_p A_c = 0.0780$  og sjøen er dermed

lite steil.

I figur 4.3 er første ordens innkommende bølgefelt (4.17), og de høyereordens korreksjonene (4.22) og (4.24) plottet over tidsintervallet  $400 \leq t \leq 550$  sekunder. Vi kan observere to ekstrembegivenheter i første ordens overflatehevning i figur 4.3 ved  $t = 450$  og  $t = 540$  sekunder. Det største utslaget til overflatehevningen er omtrent  $\eta_1 \sim 8\text{m}$ . Hver ekstrembegivenhet er etterfulgt av en omtrent like stor bølgekam eller bølgebuk. Det største utslaget av korreksjonene  $\eta_{I2}$  og  $\eta_2(\theta = \pi)$  oppstår i forbindelse med ekstrembegivenheten i første ordens overflatehevning  $t = 450\text{s}$  og er omtrent en fjerdedel av utslaget til  $\eta_1$ .

Vi kan observere at korreksjonen  $\eta_{I2}$  i det innkommende bølgefeltet er den dominerende komponenten i den totale korreksjonen  $\eta_2$ .

I figur 4.4 er første, andre og tredje ordens krefter gitt ved (4.35), (4.39), (4.42) og (4.44) plottet over det samme tidsintervallet som overflatehevningen. Første ordens innkommende overflatehevning er plottet i samme figur for å kunne observere sammenhengen mellom maksimalutslag i overflatehevningen og i lastene.

Maksimalutslagene til bølgelastene forekommer i forbindelse med maksimalutslaget i første ordens overflatehevning  $\eta_1$  ved  $t = 450\text{s}$ . Maksimalutslagene til første ordens last (4.35) og tredje ordens last (4.44) som følge av det ikkelineære potensialet ser ut til å være relatert til hverandre. Dette kan skyldes at førsteordens last  $F_1$  og tredjeordens last  $F_3^\Psi$  inneholder en førsteharmonisk komponent med lik fase. Utslagene til de høyereordens lastene er lave bortsett fra i forbindelse med ekstrembegivenhetene.

Forholdet mellom maksimalutslagene til første ordens last og de høyere ordens lastene (4.39), (4.42) og (4.44) er oppsummert i tabell 4.4. Forholdene mellom første og høyereharmoniske bølgekrefter på sylindren i simuleringen av JONSWAP-spekteret er ikke av samme størrelsesorden som forholdet mellom bølgekraftene på sylindren i regulære bølger gitt i tabell 3.2.

Vi observerer at de høyereordens lastene, bortsett fra bølgelasten som følge av det ikkelineære spredningspotensialet  $\psi$ , er av samme størrelsesorden som den førsteordens bølgelasten. Dette avviker vesentlig fra Newmans (1996a) anslag i (4.74). Avvikene kan skyldes at vi beregner bølgelaster for et fullstendig spekter. Resultatene i tabell 4.4 kan være forskjellig for hver simulering da vi velger å se på kun én ekstremhendelse innenfor et smalt tidsintervall. Sannsynlighetsfordelingen av ekstrembegivenhetene kan ikke beregnes nøyaktig ved hjelp av én simulering. Variansen til overflatehevningen og bølgekraftene illustrert i avsnitt 4.7 er beregnet i tabell 4.3 for å gi et inntrykk av spredningen av dataene.

### Resultater fra simuleringen av Torsethaugen bølgespekter med diskusjon

Torsethaugens bølgespekter simuleres fr parametrene  $H_s = 8.3\text{m}$  og  $T_p = 10.7\text{s}$ . Den karakteristiske steilheten til det første ordens overflatehevningen er dermed  $k_p A_c = 0.1031$ .

I figur 4.6 er første ordens innkommende bølgefelt (4.17), og de høyereordens korreksjonene (4.22) og (4.24) plottet over tidsintervallet  $400 \leq t \leq 550$  sekunder som for simuleringen ved hjelp av JONSWAP-spekteret.

Vi kan observere at maksimalutslagene til korreksjonen  $\eta_{I2}$  og  $\eta_2$  er større enn maksimalutslagene til første komponent  $\eta_1$  av overflatehevningen. Ekstrembegivenhetene i første og andre komponent av overflatehevningen oppstår omtrent samtidig. Resultatene kan virke usannsynlige da korreksjonene i (4.22) og (4.24) er av en orden i  $\epsilon$  høyere enn første ordens overflatehevning.

Som i figur 4.4 viser figur 4.7 kreftene gitt ved (4.35), (4.39), (4.42) og (4.44) simulert ved hjelp av Torsethaugens bølgespekter.

Maksimalutslag av lastene, bortsett fra den første ordens lasten  $F_1$ , oppstår nær ekstrembegivenheten i første ordens innkommende overflatehevning ved  $t \sim 500$ . Forholdene mellom lastene er oppsummert i tabell 4.4. Bortsett fra ved ekstrembegivenhetene i figur 4.7 er utslagene til andre- og tredjeordens last betraktelig mindre en de maksimale utslagene.

### Diksusjon av spredning av dataene

I og med at vi kun har data fra én simulering kan vi ikke bestemme sannsynligheten for at ekstrembegivenhetene i figurene (4.3), (4.4), (4.6) og (4.7) oppstår. Vi kan derimot betrakte spredningen av data i simuleringen av JONSWAP-spekteret ved å beregne variansen av dataene. Dersom dataene har stor spredning kan det tyde på at maksimalutslagene i overflatehevningen eller bølgekreftene er lite sannsynlig. Variansen,  $\sigma^2$  der  $\sigma$  er gitt i (4.49), beregnes for datasettene som er simulert over tidsintervallet  $0 \leq t \leq 1000\text{s}$  og er oppsummert i tabell 4.3.

Vi betrakter forholdet mellom variansen av første og høyere ordens størrelser av overflatehevning og bølgekrefter.

Vi forventer at variansen av en andreordens størrelse, for eksempel  $\sigma^2(F_2)$  er av størrelsesorden i  $\epsilon = k_p A_c$  mindre enn variansen til den førsteordens størrelsen  $\sigma^2(F_1)$ . Det vil si at vi forventer at spredningen av dataene til en førsteordens komponent er omtrent ti ganger større enn spredningen av dataene til en andreordens komponent.

Variansen av overflatehevningen og bølgekreftene simulert ved hjelp av JONSWAP-spekteret er noe større enn forventet, men med et betraktelig avvik i variansen av den tredjeordens bølgelasten som følge av det lineære potensialet.

Variansen av den simulerte overflatehevningen og bølgekreftene ved hjelp av Torsethaugens bølgespekter viser stor spredning av dataene til de høyereordens størrelsene. Det er størst spredning av dataene for den tredjeordens bølgelasten som følge av det lineære potensialet. På bakgrunn av dette kan vi anta at maksimalutslagene til overflatehevningen og kreftene fra den ene simuleringen av Torsethaugens bølgespekter er lite sannsynlige.

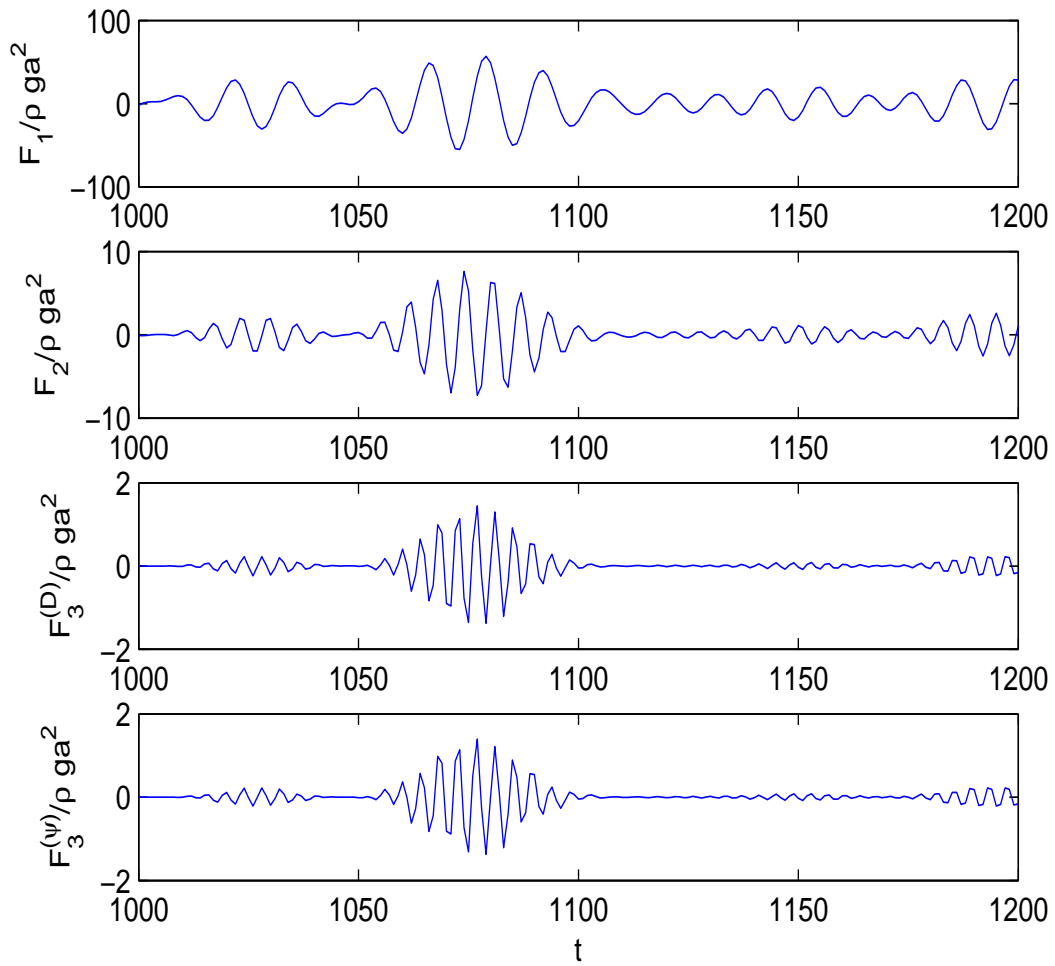
	<i>JONSWAP</i>	<i>Torsethaugen</i>
$\sigma^2(\eta_1)$	7.3	31.4
$\sigma^2(\eta_{I2})$	0.23	17.0
$\sigma^2(\eta_2)$	0.28	18.0
$\sigma^2(F_1)$	295	1000
$\sigma^2(F_2)$	6.5	581
$\sigma^2(F_3^{(D)})$	12.7	8000
$\sigma^2(F_3^\psi)$	0.8	743

Tabell 4.3: Variansen  $\sigma^2$  til overflatehevning og bølgekrefter simulert ved hjelp av JONSWAP og Torsethaugen bølgespekter over et tidsintervall  $0 \leq t \leq 1000$  sekunder. JONSWAP-spekteret er simulert for  $H_s = 8.7\text{m}$  og  $T_p = 12.6\text{s}$ . Torsethaugen bølgespekter er simulert for  $H_s = 8.3\text{m}$  og  $T_p = 10.7\text{s}$ . Overflatehevningen er gitt ved (4.17), (4.22) og (4.24). Bølgekreftene gitt ved (4.35), (4.39), (4.42) og (4.44). Variansen av bølgekreftene er normalisert med  $\rho g a$ .

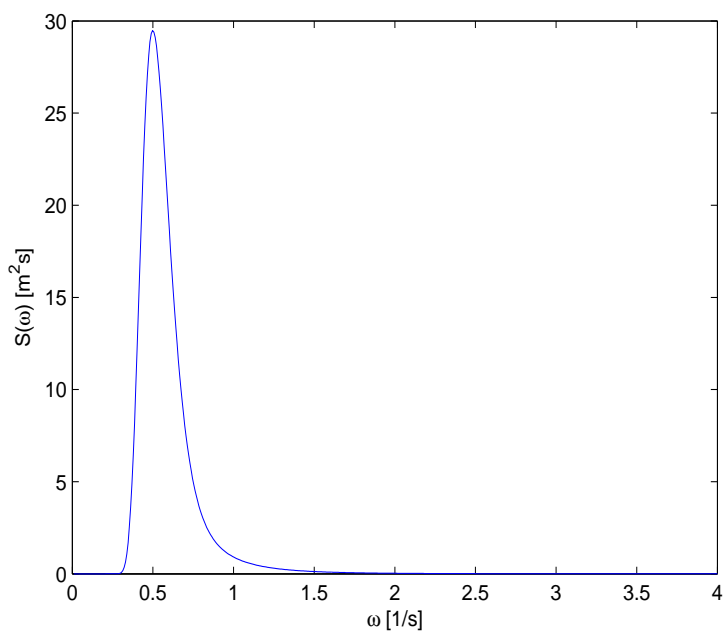
$H_s, T_p$	$ F_1 / F_2 $	$ F_2 / F_3^{(D)} $	$ F_1 / F_3^\psi $	$ F_1 / F_3 $
Torsethaugen: 8.3m, 10.7s	0.7	0.2	0.8	0.2
JONSWAP: 8.7m, 12.6s	1.7	1.2	11.0	1.1

Tabell 4.4: Forhold mellom absoluttverdien av maksimalutslag første- og høyere ordens krefter simulert ved hjelp av JONSWAP-spekteret og Torsethaugens tobbelt-toppede bølgespekter.

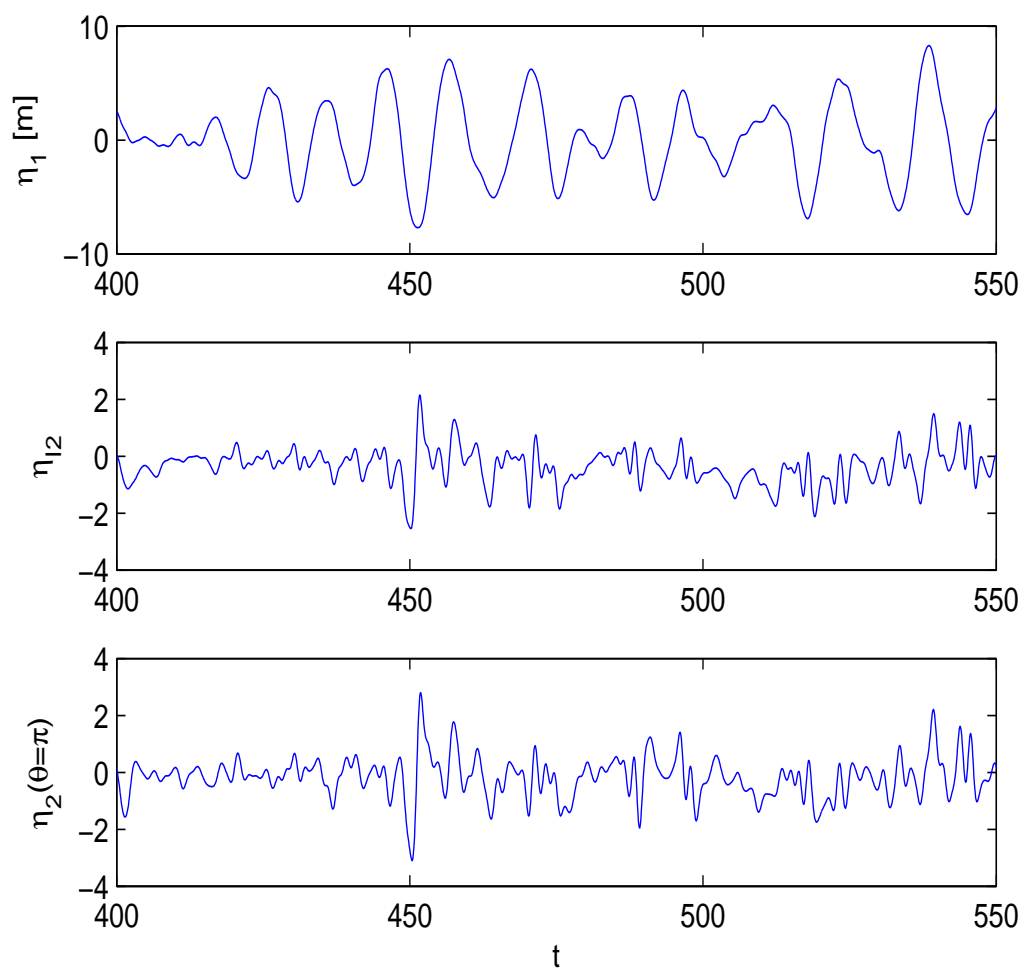
## 4.7 Figurer



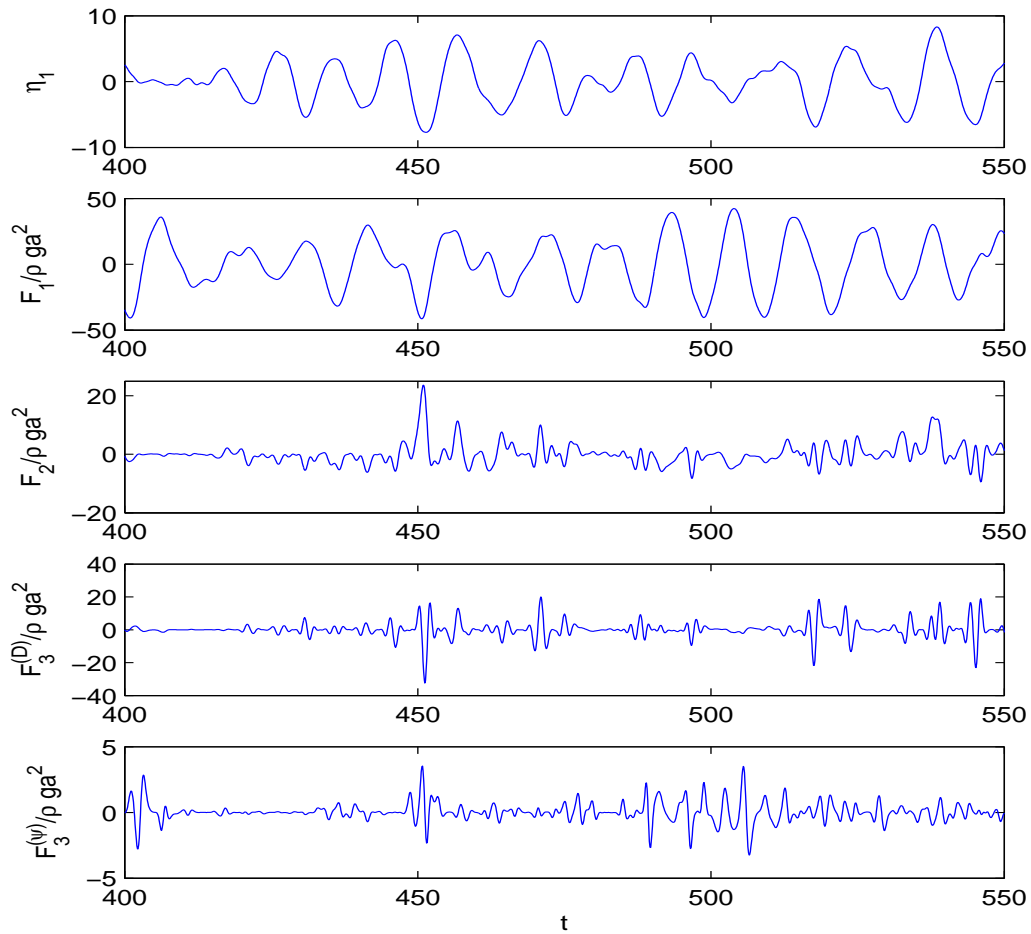
Figur 4.1: Newman 5-komp, krefter.  $A_n = 2m, T = (11, 12, 13, 14, 15), kA = (0.1 : 0.3)t \in (1000 : 1200)$



Figur 4.2: JONSWAP bølgespekter simulert med  $N = 1000$  komponenter,  $H_s = 8.7\text{m}$ ,  $T_p = 12.6\text{s}$ .

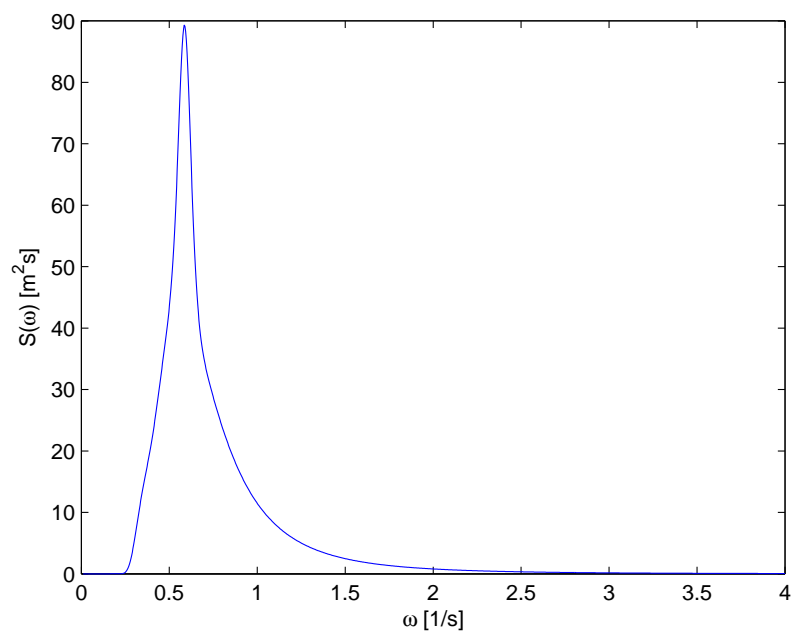


Figur 4.3: Simulert overflatehevning vha JONSWAP-spekteret i figur 4.2.

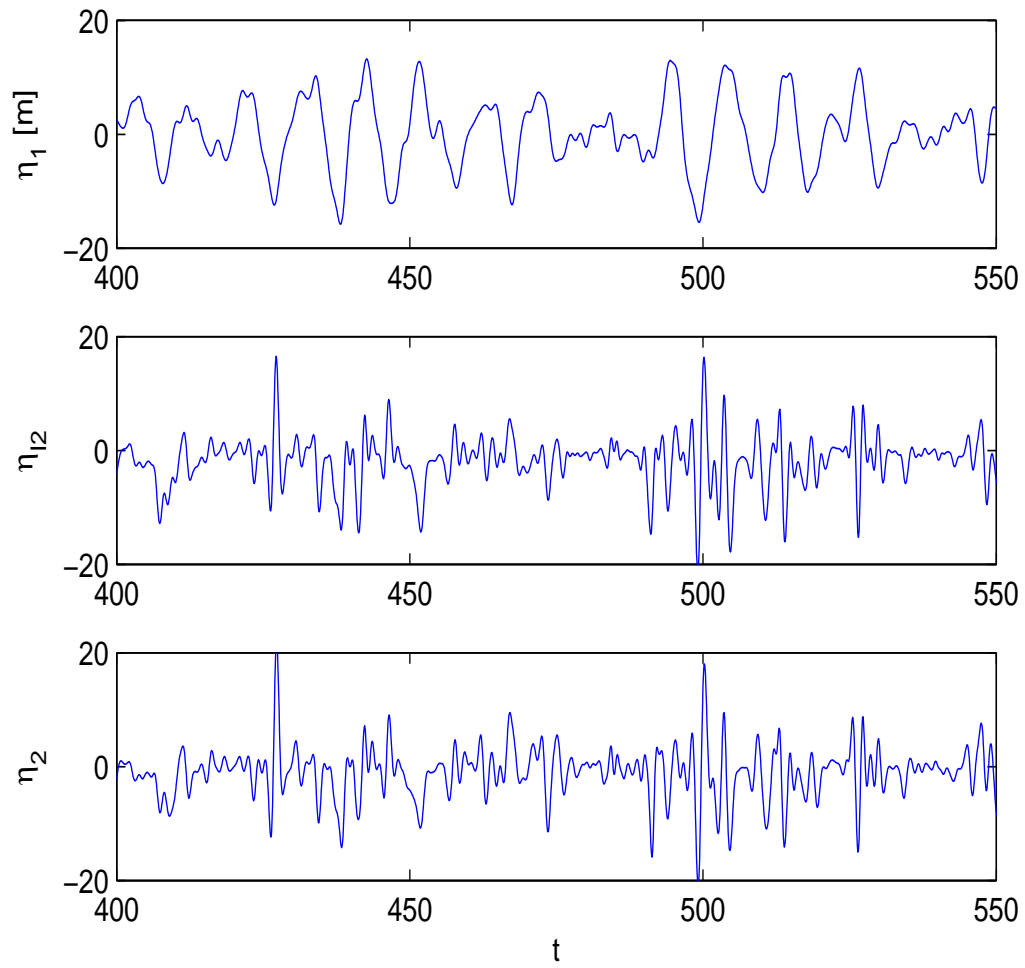


Figur 4.4: Komponenter av bølgekraften på sylinderen over samme tidsintervall som for overflatehevningen i figur 4.3. Utslagene er skalert med den fellesfaktoren  $\rho ga^2$  og har benevnning meter.

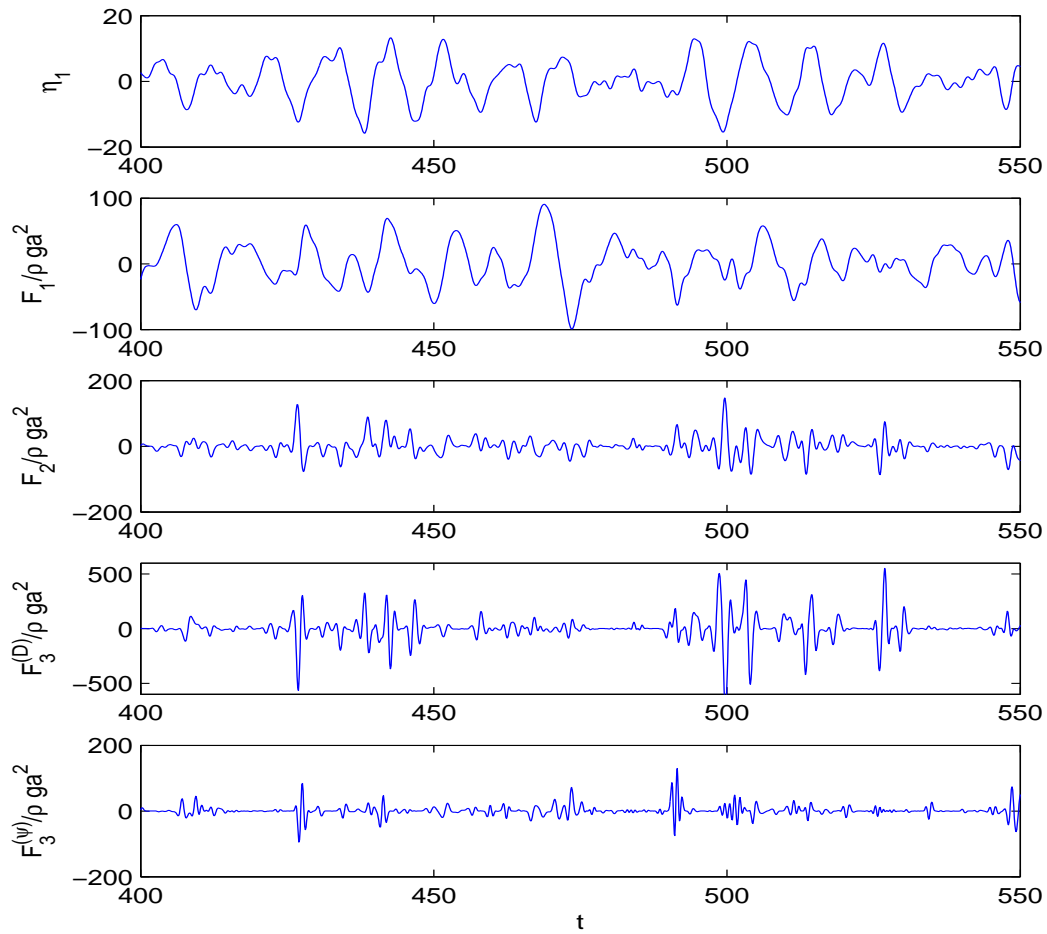




Figur 4.5: Torsethaugen bølgespekter for vinddominert sjø, for parametrene  $H = 8.30$  m,  $T_p = 10.7$  s.



Figur 4.6: Den simulerte overflatehevningen ved hjelp av Torsethaugens bølgespekter i figur 4.5. Utslaget til overflatehevningen er angitt i meter.



Figur 4.7: Komponenter av bølgekraften på cylinderen over samme tidsintervall som for overflatehevningen i figur 4.6. Utslagene er skalert med den fellesfaktoren  $\rho g a^2$  og har benevnning meter.

# Kapittel 5

## Konklusjon

FNVs perturbasjonsteori i langbølgeregimet er utledet i detalj. Det ikkelineære spredningspotensialet  $\psi$  er løst numerisk ved hjelp av Romberg integrasjon og er evaluert i sin helhet. Det ikkelineære spredningspotensialet og effektene av dette i det indre området er analysert i detalj. Løsningen av et ikkelineære spredningspotensialet er sammenliknet med resultatene til FNV og Newman & Lee [18] med meget god overensstemmelse.

Små avvik mellom Newman & Lees resulater og de resultatene som fremkommer i denne avhandlingen kan skyldes numerisk feil eller ulik diskretisering. Jeg beregner Webertransform-paret på et uniformt koordinatnett, mens FNV bruker et adaptivt nett.

### **Ikkelineære effekter av regulære bølger mot en slank vertikal sylinder**

I analyseringen av resultatene for det ikkelineære hastighetspotensialet som beskriver bølgespredningen rundt sylindren har vi sett at den tredjeordens løsningen er svært lokal. Andre ordens komponent av det ikkelineære spredningspotensialet avtar langsomt i dypet og påvirker trykkfeltet langs sylindren i dypet. Som følge av de raskt avtagende drivende funksjonene i den ikkelineære overflatebetingelsen avtar den ikkelineære løsningen av hastighetspotensialet raskt ut i feltet ved den frie overflaten. Vi har sett at effekten av den ikkelineære bølgespredningen rundt sylindren i feltet ved den frie overflaten beregnet ved hjelp av FNVs metode er svært lokal og begrenset til et område  $r < 5a$  nær sylindren.

Trykkfeltet på sylindren som følge av det fullstendige diffraksjonspotensialet til tredje orden i  $\epsilon$  er undersøkt. Andreordens trykk på sylindren trenger ned til store dyp og skyldes andre ordens komponent av det ikkelineære spredningspotensialet. Dette trykkfeltet er konstant rundt sylindren og bidrar ikke til de integrerte horisontale kreftene på sylindren som står fastmontert på bunnen, men er av betydning for de vertikale kreftene som virker på en trunkert fortøyd sylinder.

Overflatehevningen som følge av den ikkelineære bølgespredningen rundt sylindren er beregnet til og med tredje orden i  $\epsilon$ . Effekten av det ikkelineære potensialet opptrer i det tredje korreksjonsleddet  $\eta_3$  av overflatehevningen. Oppskyllingen på sylindren øker vesentlig som følge av andre og tredje korreksjon i overflatehevningen for en bølgesteilhet  $kA \geq 0.2094$ .

Vi har sett at FNVs teori ikke gir en bølgeløsning for den ikkelineære bølgespredningen.

En rekke visualiseringer av effekten av det ikkelineære potensialet er presentert. Av figurene som viser oppskylling, trykkfelt, horisontale punktlaster og moment kan vi se at effekten av det ikkelineære spredningspotensialet øker med økende bølgesteilhet.

Andre ordens last beregnet ved hjelp av FNVs teori gir svært konservative lastanslag sammenliknet med andre ordens last målt av Huseby & Grue (H&G).

FNVs tredjeharmoniske lastkomponent er sammenliknet med Malenica & Molins, M&M, korresponderende tredjeharmoniske last og med eksperimentelle målinger utført av Huseby & Grue i langbølgeregimet.

I sammenlikning med M&Ms teori kan vi observere at lastutslagene til den tredjeharmoniske lasten beregnet for de to teoriene stemmer godt overens for  $0.166 \leq ka \leq 0.25$ . Dette er bekreftet i Huseby & Grues forsøk.

Vi har observert store avvik i fasen til den tredjeharmoniske lasten anslått av FNV og M&M. H&G viser at fasen til FNVs tredjeordens last avviker vesentlig fra målinger. Fasen til FNVs tredjeharmoniske last er uavhengig av bølgetallet  $k$ .

Ved å betrakte resultatene av sammelikningen gjort i denne avhandlingen og kontrollere mot observasjonene til H&G kan vi konkludere med at uoverensstemmelsen mellom de tredjeharmoniske lastkomponentene beregnet vha FNV og M&Ms teori i all hovedsak består av ulikheter i fasen til lastene.

Det høyereharmoniske momentet om den horisontale  $y$ -aksen på sylindren er beregnet med hensyn til origo ved stille vannsnivået. Vi har observert at størrelsesorden av maksimalutslagene til den tredjeharmoniske komponenten av momentet er av en fjerdedel av størrelsesorden til den samlede tredjeharmoniske punktlasten. Disse svinger i fase og effekten er at de forsterker hverandre. Momentet er med på å forsterke de høyereharmoniske belastningene som kan forårsake ringing i store konstruksjoner på havet.

Den fjerdeharmoniske momentkomponenten beregnet ved hjelp av FNVs tredjeordens teori er av en størrelsesorden i  $\epsilon$  mindre enn den tredjeharmoniske momentkomponenten. På tross av at den fjerdeharmoniske komponenten av momentet er mindre enn den tredjeharmoniske komponenten kan den ha innvirkning på ringing i en strekkstagplattform med egenfrekvens som ligger godt over fundamentalfrekvensen til det innkommende bølgefeltet.

### Ikkelineære effekter av irregulære havbølger mot en slank vertikal sylinder

Variasjonen av overflatehevingen og bølgesteilen i tid er simulert vha JONSWAP og Torsethaugen bølgespekter. Den karakteristiske bølgesteilheten er av størrelsesorden  $ka \sim 0.1$  i begge simuleringene. Vi har sett at maksimalutslagene til de høyereordens kreftene er på størrelse med den førsteordens bølgesteilen i simuleringen ved hjelp av JONSWAP-spekteret. Vi har sett at dataene har noe større spredning enn forventet.

De høyereordens kreftene er flere ganger større enn den førsteordens kraften ved simuleringen av Torsethaugens bølgespekter. Det er stor spredning i dataene for de høyereordens kreftene i simuleringen ved hjelp av Torsethaugens bølgespekter og forholdene mellom maksimalutslagene er lite sannsynlige.

Det er viktig å understreke at sannsynlighetsfordelingen for maksimalutslagene i overflatehevingen og bølgesteilen krever om lag 5000 simuleringer. Sannsynligheten for at maksimalutslagene som er observert i hver simulering kan oppstå er dermed ukjent.

Til forskjell fra Malenica & Molins tredjeordens diffraksjonsløsning eller Ferrants fullstendige høyereordens løsning gir FNVs teori enkle analytiske uttrykk for høyereharmoniske bølgesteiler. Dette gjør teorien enkel å implementere. På tross av at FNVs teori anslår feil fase til de tredjeharmoniske bølgesteiler benyttes ofte teorien i industrien som følge av at teorien er enkel å implementere. Begrensningen  $ka \ll 1$  gjør FNVs teori veldig lite generell, og i analysen av bølgesteiler på konstruksjoner til havs av stort volum anbefaler DNV å bruke FNVs langbølgetilnærming i beregningen av tredjeordens krefter i kombinasjon med fullstendig diffraksjonsanalyse til andre orden.

For å videre kunne teste FNVs teori kan det være interessant å beregne stivlegemerresponsen til den bunnfestede sylindren ved hjelp av FNVs teori og sammenlikne resultatene med målinger eller simuleringer.

En videreføring i implementeringen av Newmans (1996a) teori vil være å finne sannsynlighetsfordelingen for ekstreme utslag av tredje ordens laster som antydnet i figurene i avsnitt 4.7 ved hjelp av Monte Carlo-simuleringer av et JONSWAP eller Torsethaugen bølgespekter.

# Tillegg A

## A.1 Besselutviklinger

Besselfunksjonene av argument  $x$  av heltallsorden  $m$  er definert i Spiegel [32] ved hjelp av potensrekker

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k} \quad (\text{A.1})$$

$$Y_m(x) = \frac{2}{\pi} J_m(x) (\ln(\frac{x}{2}) + \gamma_E) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} (m-k-1)! \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\Phi(k) + \Phi(m+k)) \frac{1}{k!(m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}, \quad (\text{A.2})$$

der  $\gamma_E = 0.5772156..$  er Eulerkonstanten og

$$\Phi(p) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}, \quad \Phi(0) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Når  $p$  er et heltall er  $\Gamma$ -funksjonen definert som

$$\Gamma(p+1) = p!, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.4})$$

For  $m = 0$  er de første leddene av Besselfunksjonen av andre type

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) (\ln(\frac{x}{2}) + \gamma_E) + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{2^2 4^2} (1 + \frac{1}{2}) + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) - \dots \right]. \quad (\text{A.5})$$

For små argument  $x \ll 1$  kan vi skrive de ledende ordens uttrykkene for den første Besselfunksjonen  $J_m$  og dens deriverte

$$J_0(x) \approx 1 - \frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^4), \quad J'_0(x) \approx -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^4} + \mathcal{O}(x^5) \quad (\text{A.6})$$

$$J_1(x) \approx \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^4} + \mathcal{O}(x^5), \quad J'_1(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{3}{2^4} x^2 + \mathcal{O}(x^4) \quad (\text{A.7})$$

$$J_2(x) \approx \frac{x^2}{2^3} - \mathcal{O}(x^4), \quad J'_2(x) \approx \frac{x}{4} - \frac{x^3}{3 \cdot 2^3} + \mathcal{O}(x^5) \quad (\text{A.8})$$

$$J_3(x) \approx \frac{x^3}{3 \cdot 2^4} - \mathcal{O}(x^5), \quad J'_3(x) \approx \frac{x^2}{2^4} + \mathcal{O}(x^4). \quad (\text{A.9})$$

Den deriverte av den første Besselfunksjonen av orden  $m = 0$  er definert

$$J_0'(x) = -J_1(x), \quad (\text{A.10})$$

hvilket også gjelder for den andre Besselfunksjonen  $Y_0'(x)$  (Spiegel likning 27.20). Ledende ordens uttrykk for den andre Besselfunksjonen  $Y_m$  og dens deriverte er

$$Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma_E\right) + \frac{x^2}{2\pi} - \mathcal{O}(x^4) \quad (\text{A.11})$$

$$Y_0'(x) \approx \frac{2}{\pi x} - \frac{x}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma_E\right) + \frac{x}{2\pi} - \frac{3x^3}{16\pi} + \mathcal{O}(x^5) \quad (\text{A.12})$$

$$Y_1(x) \approx \frac{x}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma_E\right) - \frac{2}{\pi x} - \frac{x}{2\pi} + \frac{5x^3}{2^5\pi} + \mathcal{O}(x^5) \quad (\text{A.13})$$

$$Y_1'(x) \approx \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma_E\right) + \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{\pi x^2} + \frac{15x^2}{2^5\pi} + \mathcal{O}(x^4) \quad (\text{A.14})$$

$$Y_2(x) \approx \frac{x^2}{4\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma_E\right) - \frac{4}{\pi x^2} - \frac{1}{\pi} - \frac{3x^2}{2^4\pi} + \mathcal{O}(x^4) \quad (\text{A.15})$$

$$Y_2'(x) \approx \frac{x}{2\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma_E\right) + \frac{x}{4\pi} + \frac{2^3}{\pi x^3} - \frac{3x}{2^3\pi} + \frac{17x^3}{3^2 \cdot 2^4\pi} + \mathcal{O}(x^5) \quad (\text{A.16})$$

$$Y_3(x) \approx \frac{x^3}{3 \cdot 8\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma_E\right) - \frac{2^4}{\pi x^3} - \frac{2}{\pi x} - \frac{x}{2\pi} - \frac{11x^3}{6^2 \cdot 2^3\pi} + \mathcal{O}(x^5) \quad (\text{A.17})$$

$$Y_3'(x) \approx \frac{x^2}{8\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma_E\right) + \frac{x^2}{24\pi} + \frac{3 \cdot 16}{\pi x^4} + \frac{2}{\pi x^2} - \frac{1}{2\pi} - \frac{11x^2}{12 \cdot 2^3\pi} + \mathcal{O}(x^4). \quad (\text{A.18})$$



# Tillegg B

## B.1 Hjelperelasjoner

Relasjoner som anvendes i beregningen av den ikkelineære overflatebetingelsen (3.60) i avsnitt 3.2.1. Den lineære dispersjonrelasjonen  $\omega^2 = kg$  (sa  $\frac{kg}{\omega}A = \omega A$ ) og ulike trigonometriske identiteter anvendes underveis.

$$\begin{aligned}
 \nabla\phi_I \cdot \nabla\phi_I &= \left( \operatorname{Re}\left\{ \frac{gA}{\omega} e^{kz+i\omega t} (-i \cos \theta) \right\} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{r^2} \left( \operatorname{Re}\left\{ \frac{gA}{\omega} e^{kz+i\omega t} (ikr \sin \theta) \right\} \right)^2 + \left( \operatorname{Re}\left\{ \frac{gA}{\omega} k e^{kz+i\omega t} (1 - ikr \cos \theta) \right\} \right)^2 \\
 &= gkA^2 e^{2kz} \left( 1 + \frac{kr}{2} \sin 2\omega t (\cos \theta + \cos 3\theta) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\
 &= gkA^2 e^{2kz} + \mathcal{O}(\epsilon^3)
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla\phi_I \cdot \nabla\phi_S &= \operatorname{Re}\left\{ \frac{gA}{\omega} e^{kz+i\omega t} (-i \cos \theta) \right\} \operatorname{Re}\left\{ -i \frac{gA}{\omega} e^{kz+i\omega t} \left( -\frac{ka^2}{r^2} \right) \cos \theta \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{r^2} \operatorname{Re}\left\{ \frac{gA}{\omega} e^{kz+i\omega t} ikr \sin \theta \right\} \operatorname{Re}\left\{ -i \frac{gA}{\omega} e^{kz+i\omega t} \frac{ka^2}{r} (-\sin \theta) \right\} \\
 &\quad + \operatorname{Re}\left\{ \omega A e^{kz+i\omega t} (1 - ikr \cos \theta) \right\} \operatorname{Re}\left\{ i\omega A e^{kz+i\omega t} \frac{ka^2}{r} \cos \theta \right\} \\
 &= -\omega^2 A^2 e^{2kz} \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \omega t \cos 2\theta + \mathcal{O}(\epsilon^3)
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\nabla\phi_I \cdot \nabla\phi_S|_{r=a} = gkA^2 e^{2kz} \left( \frac{ka}{2} \sin 2\omega t (2 \cos \theta + \cos 3\theta) - \sin^2 \omega t \cos 2\theta \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla\phi_S \cdot \nabla\phi_S &= \left( \operatorname{Re}\left\{ i\omega A e^{kz+i\omega t} \frac{a^2}{r^2} \right\} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \operatorname{Re}\left\{ i\omega A e^{kz+i\omega t} \frac{a^2}{r} \sin \theta \right\} \right)^2 \\
 &\quad + \left( \operatorname{Re}\left\{ -i\omega A e^{kz+i\omega t} \frac{a^2}{r} \cos \theta \right\} \right)^2 \\
 &= \omega^2 A^2 e^{2kz} \left( \frac{a^4}{r^4} \sin^2 \omega t + \left( \frac{ka^4}{2r^3} - \frac{ka^6}{2r^5} \right) \sin 2\omega t \cos \theta \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\
 &= gkA^2 e^{2kz} \frac{a^4}{r^4} \sin^2 \omega t + \mathcal{O}(\epsilon^3)
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\nabla\phi_S \cdot \nabla\phi_S|_{r=a} = gkA^2 e^{2kz} \sin^2 \omega t + \mathcal{O}(\epsilon^4) \tag{B.5}$$

Til og med orden av  $\epsilon^3$  er

$$\begin{aligned}
\nabla\phi_D \cdot \nabla\phi_D &= gkA^2 e^{2kz} \left[ \sin^2 \omega t \left( \cos^2 \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^2 \right) \right. \\
&+ \sin 2\omega t \left( \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \left( -\frac{kr}{2} \left(1 + \left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta\right) + \frac{ka^2}{r} \right) \right. \\
&- \left. \left. \sin \theta \sin 2\theta \frac{kr}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \left(1 + \frac{a^4}{r^4}\right) + \cos \theta kr \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \right) \right. \\
&+ \left. \cos^2 \omega t \right], \tag{B.6}
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
\nabla\phi_D \cdot \nabla\phi_D|_{r=a} &= gkA^2 e^{2kz} \left[ 2(1 - \cos 2\omega t) \sin^2 \theta \right. \\
&+ \left. 2ka \sin 2\omega t (\cos \theta - \sin \theta \sin 2\theta) + \cos^2 \omega t \right]. \tag{B.7}
\end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
\nabla\phi \cdot \nabla(\nabla\phi)^2 &= \mathbf{i}_r \cdot (\nabla\phi_I + \nabla\phi_S) \frac{\partial}{\partial r} (\nabla\phi_I \cdot \nabla\phi_S + 2\nabla\phi_I \cdot \nabla\phi_S + \nabla\phi_S \cdot \nabla\phi_S) \\
&+ \mathbf{i}_\theta \cdot (\nabla\phi_I + \nabla\phi_S) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla\phi_I \cdot \nabla\phi_S + 2\nabla\phi_I \cdot \nabla\phi_S + \nabla\phi_S \cdot \nabla\phi_S) \\
&+ \mathbf{i}_z \cdot (\nabla\phi_I + \nabla\phi_S) \frac{\partial}{\partial z} (\nabla\phi_I \cdot \nabla\phi_S + 2\nabla\phi_I \cdot \nabla\phi_S + \nabla\phi_S \cdot \nabla\phi_S) \\
&= 2\omega^3 A^3 e^{3kz} \sin^3 \omega t \left( \frac{a^2}{r^3} \cos 3\theta + \left( \frac{a^6}{r^7} - \frac{2a^4}{r^5} \right) \cos \theta \right) \tag{B.8}
\end{aligned}$$

# Tillegg C

## C.1 Lommelfunksjoner

Integralet på formen

$$\int_1^\infty W_\nu(K, R)R^{-\mu}dR = \int_1^\infty R^{-\mu} (Y'_\nu(K)J_\nu(KR) - J'_\nu(K)Y_\nu(KR)) dR \quad (\text{C.1})$$

løses vha Lommelfunksjoner definert av Watson (kapittel 10.7). Substitusjonen

$$u = KR \quad (\text{C.2})$$

gir  $dR = \frac{1}{K}du$  og det nye integrasjonsintervallet  $u \in [K, \infty]$ . Deretter anvendes identiteten gitt i kapittel 10 · 74 [36]

$$\int_u^\infty u^\mu \mathcal{C}_\nu(u) du = (\mu + \nu - 1)u\mathcal{C}_\nu(u)S_{\mu-1, \nu-1}(u) - u\mathcal{C}_{\nu-1}(u)S_{\mu, \nu}(u) \quad (\text{C.3})$$

for den generelle sylindrefunksjonen  $\mathcal{C}(u)$  som her representerer Besselfunksjonen av første eller andre type. Dette gir

$$Y'_\nu(K)K^{\mu-1} \int_K^\infty u^{-\mu} J_\nu(u)du - J'_\nu(K)K^{\mu-1} \int_K^\infty u^{-\mu} Y_\nu(u)du \quad (\text{C.4})$$

$$= [(-\mu + \nu - 1)uS_{-\mu-1, \nu-1}(u)K^{\mu-1} (Y'_\nu(K)J_\nu(u) - J'_\nu(K)Y_\nu(u))]_K^\infty - [K^{\mu-1}uS_{-\mu, \nu}(u) (Y'_\nu(K)J_{\nu-1}(u) - J'_\nu(K)Y_{\nu-1}(u))]_K^\infty \quad (\text{C.5})$$

Ved innsetningen av den øvre grensen benyttes den asymptotiske utviklingen av Besselfunksjonene for store argument [32] også gitt i (3.25) og (3.26)

$$J_n(u) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos(u - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \quad (\text{C.6})$$

$$Y_n(u) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \sin(u - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}). \quad (\text{C.7})$$

Når argumentet nærmer seg grensen  $u \rightarrow \infty$  haes

$$\lim_{u \rightarrow \infty} (Y'_\nu(K)J_n(u) - J'_\nu(K)Y_n(u)) = 0. \quad (\text{C.8})$$

Dette gir

$$\begin{aligned}
& \int_1^\infty W_\nu(K, R) R^{-\mu} dR \\
&= -K^\mu (-\mu + \nu - 1) S_{-\mu-1, \nu-1}(K) (Y'_\nu(K) J_\nu(K) - J'_\nu(K) Y_\nu(K)) \\
&+ K^\mu S_{-\mu, \nu}(K) (Y'_\nu(K) J_{\nu-1}(K) - J'_\nu(K) Y_{\nu-1}(K)).
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Wronski-determinanten til Besselfunksjonene ved Spiegel likning (27.135)

$$Y'_\nu(K) J_\nu(K) - J'_\nu(K) Y_\nu(K) = \frac{2}{\pi K} \tag{C.10}$$

og den generelle rekurrensformelen

$$\mathcal{C}_{\nu-1}(K) = \mathcal{C}'_\nu(K) + \frac{\nu}{K} \mathcal{C}_\nu(K) \tag{C.11}$$

brukes for å skrive om resultatet slik at

$$\begin{aligned}
& \int_1^\infty W_\nu(K, R) R^{-\mu} dR \\
&= \frac{2}{\pi} K^{\mu-1} \left( (\mu - \nu + 1) S_{-\mu-1, \nu-1}(K) + \frac{\nu}{K} S_{-\mu, \nu} \right).
\end{aligned} \tag{C.12}$$

# Tillegg D

## D.1 Numerisk evaluering av de ikkelineære potensialene $\Psi_m$

$$F_m(K) = \int_1^\infty f_m(R)W_m(K, R)R \, dR \quad (\text{D.1})$$

$$\Psi_m(R, Z) = - \int_0^\infty F_m(K)e^{-KZ} \frac{W_m(K, R)}{J_m'(K)^2 + Y_m'(K)^2} \, dK \quad (\text{D.2})$$

$$W_m(K, R) = Y_m'(J)J_m(KR - J_m'(K))Y_m(KR) \quad (\text{D.3})$$

Nøyaktigheten av beregningene kontrolleres i første omgang ved sammenlikning av de numeriske resultatene med de analytiske  $F_m(K)$  for  $m = 2, 3$  funnet vha Lommelfunksjoner, avsnitt C.1. For  $\Psi_m(R, Z)$  sammenliknes resultatene funnet vha analytiske uttrykk for  $F_m$  med resultatene vha numeriske uttrykk for  $F_m$ .

Kjernen (D.3) i Webertransform-paret inneholder Besselfunksjonen av andre type  $Y_m(x)$  og dens deriverte som er singularær når argumentet er lik null. Da  $R \geq 1$  er også kjernen singularær nær  $K = 0$ .  $K$  representerer det dimensjonsløse bølgetallet og nærmer seg null for store bølgelengder, men er aldri lik null. Transformparet vil dermed evalueres for  $K \rightarrow 0$  men ikke i  $K = 0$ . I figur D.1 er  $W_0(K, R)$  plottet mot  $K$  for utvalgte verdier av  $R$  (nær sylindren) for å illustrere den generelle oppførselen til kjernen for alle  $m$ . Som Besselfunksjonene oscillerer kjernen om førsteaksen.

Som følge av formen til kjernen i transformparet vil hovedbidragene til integralene komme fra små argument. Bidrag til integralet oscillerer med avtagende/minkende utslag og vil kansellere hverandre for store argument.

### D.1.1 Behandling av singulariteter

Singularitetene i kjernen  $W_m(K, R)$  for  $K \rightarrow 0$  kan være en kilde for

I og med at kjernen  $W_m(K, R)$  i transformparet er singularær når  $K \rightarrow 0$  er det hensiktsmessig å behandle disse for seg. Ved å skrive ut Besselfunksjonen  $Y_m$  (def. vha rekke) som angitt i Spiegel kan singularitetene, denotert  $\hat{Y}_m$ , for hver  $m$  plukkes ut og isoleres.  $Y_m(x)$  av tilfeldig

argument  $x$  kan omskrives som

$$Y_m(x) = \hat{Y}_m(x) + \left[ Y_m(x) - \hat{Y}_m(x) \right]. \quad (\text{D.4})$$

Integranden i transformparet kan deles opp slik at integralene som inneholder singularitetene (assosiert med  $\hat{Y}_m$ ) isoleres og kan beregnes analytisk mens det resterende integralet beregnes numerisk. Generelt kan kjernen omskrives til

$$\begin{aligned} W_m(K, R) &= \hat{Y}'_m(K)J_m(KR) - J'_m(K)\hat{Y}_m(KR) \\ &+ \left[ Y'_m(K) - \hat{Y}'_m(K) \right] J_m(KR) - J'_m(K) \left[ Y_m(KR) - \hat{Y}_m(KR) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Skrevet ut haes kjernen eksempelvis for  $m = 0$

$$\begin{aligned} W_0(K, R) &= \frac{2}{\pi K} J_0(KR) + \frac{2}{\pi} \ln \frac{KR}{2} J_1(K) \\ &+ \left[ Y'_0(K) - \frac{2}{\pi K} \right] J_0(KR) + \left[ Y_0(KR) - \frac{2}{\pi} \ln \frac{KR}{2} \right] J_1(K). \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

### D.1.2 Nullpunkt i Besselfunksjoner

For å unngå store feil ved numerisk integrasjon av en oscillerende funksjon utføres integrasjonen mellom nullpunktene til integranden. Da andre faktorer i integrandene er enten monotont avtagende eller økende vil nullpunktene være bestemt av kjernen  $W_m(K, R)$ .

Nullpunktene til Besselfunksjoner av tilfeldig orden  $n$  er tabulert bl.a i [32] men da integralene skal evalueres over store intervall vil registreringen av nullpunktene være unødvendig tidkrevende. En raskere metode for å bestemme nullpunktene til en Besselfunksjon vha Newtons iterasjon er beskrevet av Lucas & Stone [22]. Metoden går ut på å approksimere nullpunktene først grovt og deretter forbedre tilnærmingen vha Newtons metode.

De to første nullpunktene for Besselfunksjonene forutsettes kjent i algoritmen og hentes fra tabell for  $J_m(KR)$  og  $Y_m(KR)$ . Første tilnærming  $\hat{j}_{n,i}$  til nullpunkt nr.  $i$  for Besselfunksjonen av orden  $n$  finnes vha de to foregående nullpunktene

$$\hat{j}_{n,i} = j_{n,i-1} + (j_{n,i-1} - j_{n,i-2}), \quad i = 3, 4, 5, \dots \quad (\text{D.7})$$

Newtons iterasjon benyttes for å forbedre tilnærmingen slik at

$$j_{n,i} = \hat{j}_{n,i} - \frac{f(\hat{j}_{n,i})}{f'(\hat{j}_{n,i})}, \quad (\text{D.8})$$

som evalueres vha rekurrensformelen for den generelle Besselfunksjonen  $\mathcal{C}_n$  (fra [32])

$$\mathcal{C}'_n(x) = \frac{n}{x} \mathcal{C}_n(x) - \mathcal{C}_{n+1}(x). \quad (\text{D.9})$$

Funksjonen  $\mathcal{C}_n(x)$  representerer her  $J_n(x)$  eller  $Y_n(x)$  og  $\mathcal{C}'_n(x)$  er den deriverte av funksjonen mhp argumentet.

For store argument kan den første tilnærmingen til nullpunktene til en Besselfunksjon forenkles. Ved hjelp av den asymptotiske utviklingen (3.25) og (3.26) kan nullpunktene antas å ligge med en avstand omtrent lik  $\pi$  fra hverandre s.a den første tilnærmingen for store argument skrives

$$\hat{j}_{n,i} = j_{n,i-1} + \pi. \quad (\text{D.10})$$

Tilnærmingen forbedres vha Newtons iterasjonsmetode som for små argument.

For den numeriske integrasjonen av  $F_m(K)$  behøves også nullpunktene til det ikke-singulære uttrykket  $Y_m(x) - \hat{Y}_m(x)$ . De to første nullpunktene finnes vha Matlabfunksjonen *fzero* og de tabulerte nullpunktene til  $Y_m(x)$ . Den første tilnærmingen  $\hat{j}_{n,i}$  for de påfølgende nullpunktene settes lik nullpunktene til  $Y_m(KR)$  (som nå er kjent) og forbedres vha Newtons metode.

### D.1.3 Beregning av $F_m$

Integralet  $F_m(K)$  evalueres i hver diskrete verdi av  $K$  og utføres mhp  $1 \leq R \leq 10000$ . Faktoren  $f_m(R)$  er monotont avtagende og bidrar til å dempe bidragene til  $F_m(K)$  for økende argument.  $F_m(K)$  kan omskrives på/til formen

$$F_m(K) = Y'_m(K) \int_0^\infty f_m(R) J_m(KR) R \, dR - J'_m(K) \int_0^\infty f_m(R) Y_m(KR) R \, dR. \quad (\text{D.11})$$

Integranden i det første leddet i (D.11) er ikke singulær og integreres på denne formen. Det singulære leddet som involverer  $\hat{Y}_m(KR)$  i den andre integranden plukkes ut og evalueres analytisk. Den numeriske integrasjonen utføres på intervallene mellom nullpunktene til  $J_m(KR)$  og  $Y_m(KR) - \hat{Y}_m(KR)$ . Første tilnærming

For  $m = 0$  er singulariteten  $\hat{Y}_0(KR) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{KR}{2}$  slik at

$$\begin{aligned} F_0(K) &= Y'_0(K) \int_1^\infty R^{-3} J_0(KR) \, dR - \frac{2}{\pi} J'_0(K) \int_1^\infty R^{-3} \ln \frac{KR}{2} \, dR \\ &\quad - J'_0(K) \int_1^\infty R^{-3} \left( Y_0(KR) - \frac{2}{\pi} \ln \frac{KR}{2} \right) \, dR. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Delvis integrasjon av det andre leddet i (D.12) ( $u = \ln \frac{KR}{2}$ ,  $v' = R^{-3}$ ) gir

$$\int_1^\infty R^{-3} \ln \frac{KR}{2} \, dR = -\frac{1}{2} R^{-2} \ln \frac{KR}{2} \Big|_1^\infty + \frac{1}{2} \int_1^\infty R^{-3} \, dR, \quad (\text{D.13})$$

og ved l'Hôpitals regel haes  $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-2} \ln \frac{KR}{2} = \lim_{R \rightarrow \infty} R^{-3} = 0$  slik at

$$\int_1^\infty R^{-3} \ln \frac{KR}{2} \, dR = \frac{1}{2} \ln \frac{K}{2} + \frac{1}{4}. \quad (\text{D.14})$$

Dette gir

$$\begin{aligned} F_0(K) &= Y'_0(K) \int_1^\infty R^{-3} J_0(KR) \, dR \\ &\quad - J'_0(K) \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{K}{2} + \frac{1}{4} \right) - J'_0(K) \int_1^\infty R^{-3} \left( Y_0(KR) - \frac{2}{\pi} \ln \frac{KR}{2} \right) \, dR \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

På samme måte omskrives  $F_m(K)$  for  $m = 1, 2, 3$ .

$$\begin{aligned} F_1(K) &= Y_1'(K) \int_1^\infty (-4R^{-4} + 2R^{-6}) J_1(KR) \, dR - \frac{4}{3\pi K} J_1'(K) \\ &\quad - J_1'(K) \int_0^\infty (-4R^{-4} + 2R^{-6}) \left( Y_1(KR) + \frac{2}{\pi KR} \right) \, dR \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

$$\begin{aligned} F_2(K) &= -2Y_2'(K) \int_1^\infty R^{-1} J_2(KR) \, dR - \frac{4}{\pi K^2} J_2'(K) \\ &\quad + 2J_2'(K) \int_1^\infty R^{-1} \left( Y_2(KR) + \frac{4}{\pi(KR)^2} \right) \, dR \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

$$\begin{aligned} F_3(K) &= 2Y_3'(K) \int_1^\infty R^{-2} J_2(KR) \, dR + 2J_3'(K) \left( \frac{4}{\pi K^3} + \frac{1}{\pi K} \right) \\ &\quad - 2J_3'(K) \int_1^\infty R^{-2} \left( Y_3(KR) + \frac{16}{\pi(KR)^3} + \frac{2}{\pi KR} \right) \, dR \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

#### D.1.4 Resultater for $F_m(K)$

De numeriske resultatene for  $m = 2, 3$  er plottet i figur D.2 sammen med de analytiske uttrykkene  $F_2 = -8/(\pi K^3)$  og  $F_3(K) = 12/(\pi K^3)$ .  $F_m(K)$  for alle  $m$  har sine maksverdier i  $K = 0$  og avtar monotont mot null for økende  $K$ . Bidragene fra  $F_m$  til integralluttrykket for  $\Psi_m$  er neglisjerbare for  $K > 10$ , men vi inkluderer bidrag til og med  $K = 50$  i beregningen av  $\Psi_m$  (integrasjonsgrensen er satt til  $K = 50$ ).

Figurene i D.2 viser eksakt overensstemmelse mellom de numeriske og analytiske resultatene. Utslagene til  $F_2$  og  $F_3$  beregnet numerisk er også sammenliknet med de analytiske uttrykkene (3.112) og (3.113) i det første diskrete punktet til  $K$  med god overensstemmelse. Den relative feilen estimert av Rombergs metode er av orden  $h^{12}$  der steglengden  $h$  som anvendes i metoden avhenger av størrelsen på intervallet metoden kalles på. Feilestimatet til Rombergskjemaet er størst i beregningen av  $F_3(K)$ . Feilestimatet i beregningen av  $F_3$  summert over hver  $K$  er på  $3.27 \cdot 10^{-13}$ . Dette indikerer god nøyaktighet i beregningene av  $F_m(K)$ .

Integrasjonsmetoden kalles mellom hvert nullpunkt til integranden, som ligger med minkende mellomrom, og dermed gjøres størst feil for små  $R \rightarrow 1$ . I beregningen av  $\Psi_0$  behøves det analytiske uttrykket for asymptoten til  $F_0(K)$  når  $K \rightarrow 0$ . I figur D.3 er logaritmen til  $F_0$  plottet mot  $K$  (heltrukken linje). Nær  $K = 0$  ser funksjonen ut til å oppføre seg singulært, mens den for  $K > 0.1$  har en tydelig asymptote.

Asymptoten bestemmes vha metoden forklart i avsnittet på side ?? og er

$$F_0(K) \sim \frac{11}{40} \frac{1}{K}, \quad K \rightarrow 0. \quad (\text{D.19})$$

Avviket fra denne asymptoten for  $K < 0.1$  kan skyldes feil i de numeriske beregningene og en kan anta at funksjonen oppfører seg som asymptoten for små  $K$ .

Resultatene av den numeriske integrasjonen av  $F_m(K)$  definert ved (D.1) integrert direkte



mellom nullpunktene til  $J_m(KR)$  og  $Y_m(KR)$  gir eksakt samme svar som ved integrasjonen av (D.15) til (D.18) mellom de modifiserte nullpunktene.

### D.1.5 Beregning av $\Psi_m$

Integralet  $\Psi_m(R, Z)$  utføres mhp  $K$  i det indre området, for  $1 \leq R \leq 10$  og  $0 \leq Z \leq 50$ . Faktorene  $F_m(K)e^{-KZ}$  i integranden (D.2) er monotont avtagende og har maksverdi i  $K = 0$ , mens faktoren/brøken  $(J'_m(K)^2 + Y'_m(K)^2)^{-1}$  er lik null i  $K = 0$  og vokser monotont med økende  $K$ .

Integranden for samtlige  $m$  oscillerer for økende verdier av  $R$  og  $Z$  og for  $m = 1, 2, 3$  er den ikke singulær i  $K \rightarrow 0$ . For  $m = 1, 2, 3$  beregnes dermed integralet direkte på formen (D.2) numerisk.

Figur D.4 viser pott av integranden  $I_0$  for  $\Psi_0(R, Z)$  mot  $K$  for  $R = 5$  og ulike  $Z$ . Integranden for  $\Psi_0(R, Z)$  er singulær når  $K \rightarrow 0$  og integralet (D.2) for deles i to intervaller

$$\begin{aligned} \Psi_0(R, Z) &= - \int_0^1 F_0(K)e^{-KZ} \frac{W_0(K, R)}{J'_0(K)^2 + Y'_0(K)^2} dK \\ &\quad - \int_1^\infty F_m(K)e^{-KZ} \frac{W_m(K, R)}{J'_m(K)^2 + Y'_m(K)^2} dK \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

der det andre uttrykket ikke er singulært. Når  $0 < K < 1$  kan de asymptotiske uttrykkene for  $F_0(K)$  og Besselfunksjonene, tillegg A.1, benyttes for å approksimere integralet. Ved kun å inkludere ledende ordens uttrykk/ledd (eg kun dersom  $K \ll 1$ ) haes

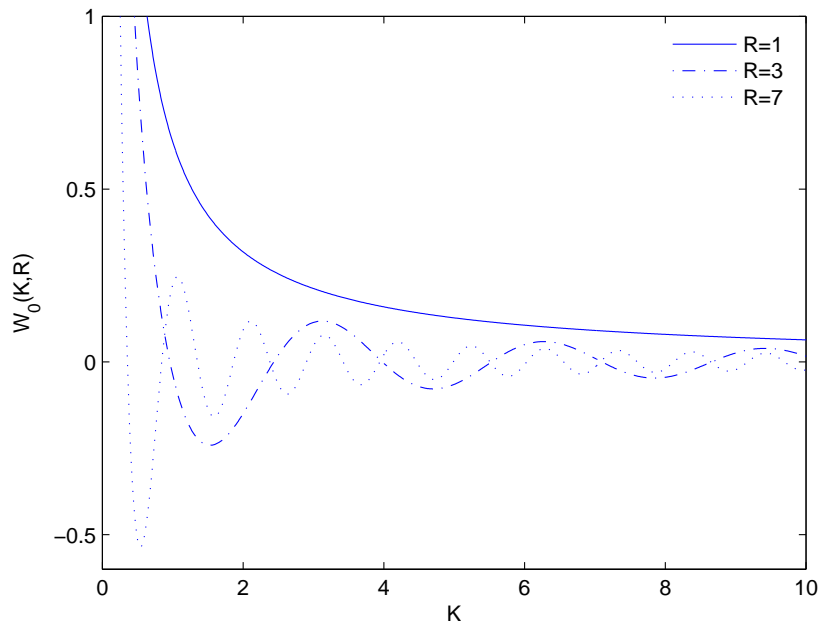
$$\frac{W_0(K, R)}{J'_0(K)^2 + Y'_0(K)^2} \simeq \frac{\pi}{2} K \quad (\text{D.21})$$

og ved sette inn uttrykket for asymptoten (D.19)

$$\begin{aligned} &- \int_0^1 F_0(K)e^{-KZ} \frac{W_0(K, R)}{J'_0(K)^2 + Y'_0(K)^2} dK \\ &= - \frac{11\pi}{80} \int_0^1 e^{-KZ} dK \\ &= \frac{11\pi}{80} \frac{1}{Z} (e^{-Z} - 1). \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

Det ledende ordens leddet dør av med  $1/Z$ . Det andre integralet i (D.20) gir bidrag av mindre størrelsesorden i forhold til det første leddet (se figur D.4), slik at den ledende ordens asymptoten (D.22) kan gi en indikasjon for asymptoten til for hele potensialet  $\Psi_0$ . Asymptotene til komponentene  $\Psi_m$  beregnes i avsnitt 3.2.6.

Den numeriske integrasjonen av  $\Psi_m$  utføres mellom nullpunktene til Besselfunksjonene av argument  $KR$ .



Figur D.1: Kjernen  $W_0(K, R)$  plottet mot  $K$  for ulike verdier av  $R$ .

### D.1.6 Implementeringsparametre og kommentarer til implementering

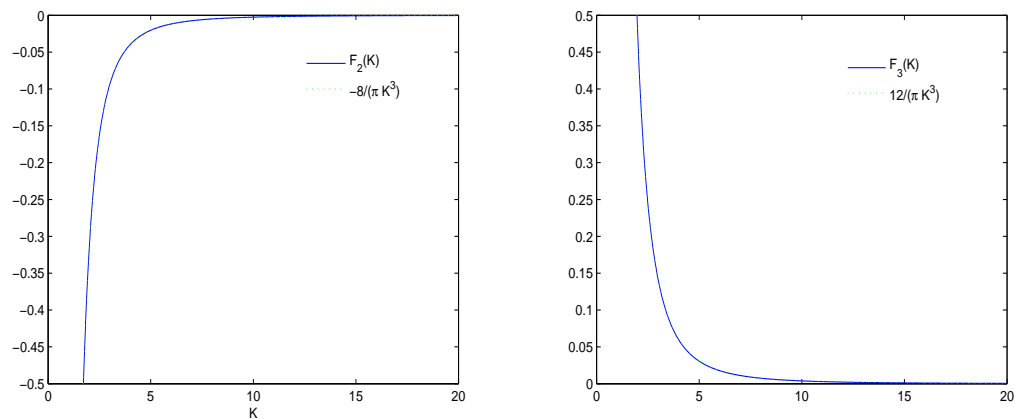
Den numeriske integrasjonen av  $F_m$  har vist seg stabil for ulike valg av øvre grense  $R$ . I regel er den øvre integrasjonsgrensen satt til  $R = 10000$ , og testet for  $R = 50000$ .  $K$  er definert på intervallet  $[1e - 3, 50]$  med steglengde  $h_K = 1e - 2$ , som følgelig blir integrasjonsgrensen i beregningen av  $\Psi_m$ . Intervallet mellom integrasjonsgrensene deles i subintervaller definert mellom nullpunktene til integrandene i  $f_m(R)$  og  $\Psi_m(R, Z)$ .

Romberg integrasjonsskjema er presentert i tillegg D.3 der nøyaktighet også kommenteres. Som følge av et stort antall funksjonsevalueringer av Besselfunksjoner har jeg observert at Romberg integrasjon er ineffektiv og veldig tidkrevende i beregningen av Webertransformparet. Gauss' 40 punkts integrasjon ble testet i beregningen av  $F_m(K)$ , men er unøyaktig i beregningen av integralet av en oscillerende funksjon.

## D.2 Figurer

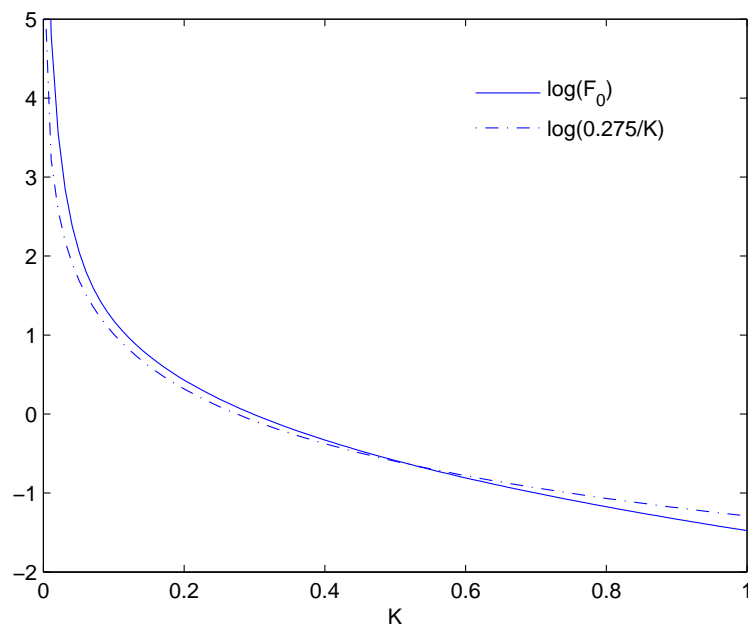
### D.3 Romberg integrasjon

Romberg integrasjon er en forbedret sammensatt trapesregel [25] som estimerer et bestemt integral ved å bruke/anvende Richardson ekstrapolering gjentatte ganger på trapesregelen. Richardson ekstrapolering brukes for å forbedrer konvergensraten til metoden. Den sam-

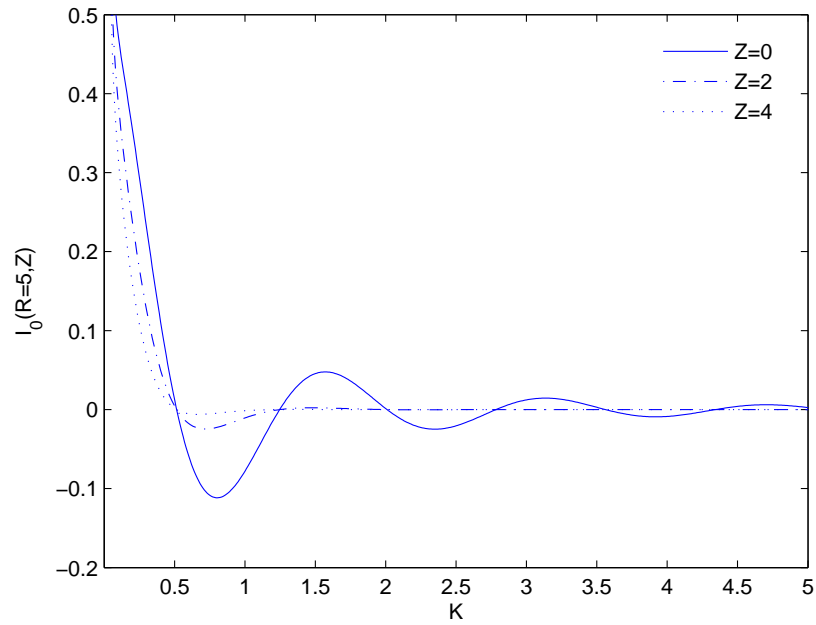


(a)  $F_2(K)$  beregnet numerisk sammen med den analytiske løsningen gitt i (3.112). (b)  $F_3(K)$  beregnet numerisk sammen med den analytiske løsningen gitt i (3.113).

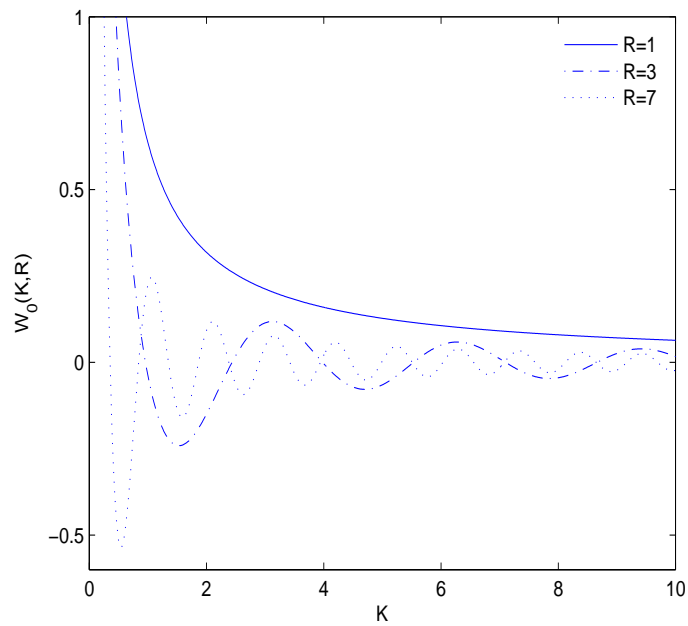
Figur D.2:  $F_2(K)$  og  $F_3(K)$



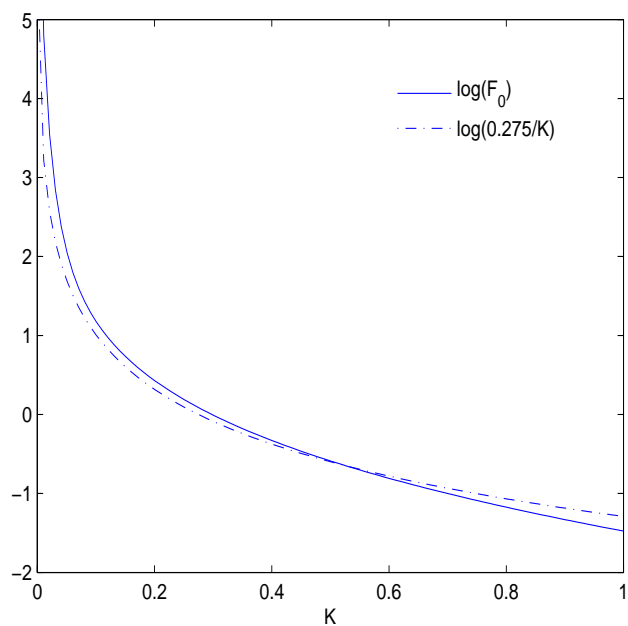
Figur D.3: Logaritmen til  $F_0(K)$  sammen med logaritmen til asymptoten  $0.275/K$



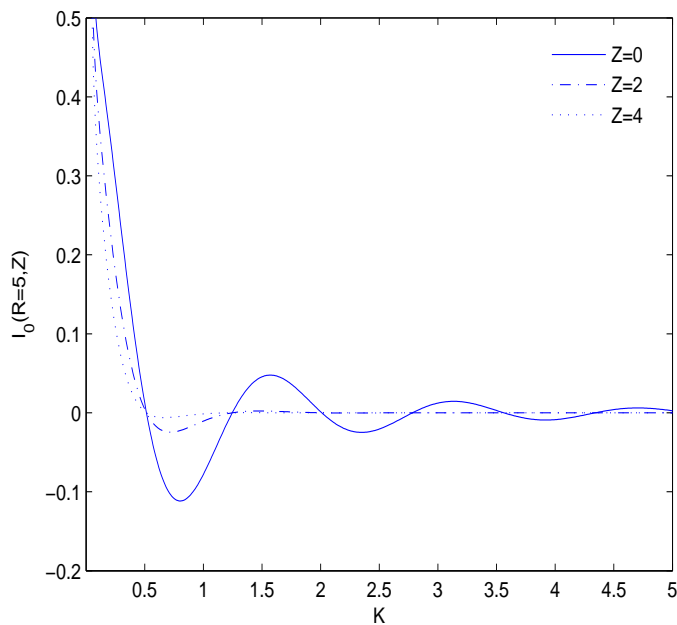
Figur D.4: Integranden i  $\Psi_0(R, Z)$  plottet mot  $K$  for  $R = 5$  og ulike verider av  $Z$ . Integranden oscillerer med mindre utslag for lavere verdier av  $R$  og små verider av  $Z$ .



Figur D.5: Kjernen  $W_0(K, R)$  plottet mot  $K$  for ulike  $R$ .



Figur D.6: Logaritmen av  $F_0(K)$  (-) og logaritmen av tilnærmingen  $\frac{11}{40K}$  (-.) til  $F_0$  for  $K \rightarrow 0$ .



Figur D.7: Integranden  $I_0(K, R, Z)$  til  $\Psi_0(R, Z)$  plottet mot  $K$  for  $R = 5$ .

mensatte trapesregelen gir en tilnærming til integralet av en kontinuerlig funksjon  $f$  over intervallet  $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} (f(a) + f(b)) + h \sum_{j=1}^{2^J-1} f(x_j) + E_T(f, h). \quad (\text{D.23})$$

for  $2^J$  sub-intervaller med steglengde

$$h_J = \frac{b-a}{2^J}. \quad (\text{D.24})$$

$E_T$  er feilleddet for trapesregelen og kan uttrykkes som en rekke som består av kun partallspotenser av steglengden

$$E_T(f, h) = a_1 h^2 + a_2 h^4 + a_3 h^6 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i h^{2i}. \quad (\text{D.25})$$

der  $a_i$  er konstanter. Richardson ekstrapolering benyttes deretter for å eliminere  $a_i$  suksessivt og for hver forbedring økes orden av feilleddet fra  $\mathcal{O}(h^{2i})$  til  $\mathcal{O}(h^{2i+2})$ .

Rombergs metode genererer en nedre triangulær matrise  $R : n \times n$  der kolonne nr.L inneholder den L'te forbedringen (verdiene i den første kolonnen  $R(J, 1)$  tilsvarer tilnærmingen vha trapes-regelen) av tilnærmingen for J (radnr) subintervaller. Metoden bruker Richardsons forbedring sekvensielt for hver steglengde  $h_J = (b-a)/2^J$  frem til feilleddet  $err$  er mindre enn angitt toleranse eller maksimum størrelse på løsningsmatrisen - slik at feilleddet er av orden  $h^{2n+2}$ . Antall subintervaller er gitt ved  $2^J$  og er maksimalt  $2^n$ .

Rombergs metode evaluerer integranden i punkter  $x_j$  med uniform avstand som genereres innenfor integrasjonsintervallet/grensene den kalles på. Integranden i  $\Psi_m(R, Z)$  inneholder funksjonen  $F_m(K)$  som er beregnet numerisk for egen/predefinerte verdier av  $K$  som ikke nødvendigvis stemmer overens med  $x_i$ . For at Romberg-metoden skal kunne evaluere integranden i metodens egendefinerte punkter  $x_i$  må funksjonen  $F(K)$  evalueres i en korresponderende verdi av predefinerte  $K$ . I beregningen av  $\Psi_m$  gjennomføres derfor vektoren  $K$  for å finne den verdien av  $K_i$  som er nærmest  $x_i$ .

### Skjema for Romberg integrasjon

$$h = b - a$$

$$R(1, 1) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) \quad (\text{Trapesregel for 0 subintervaller})$$

**while**  $err > \text{toleranse} \ \& \ J < n$

$$h = \frac{h}{2}$$

$$R(J+1, 1) = \frac{1}{2}R(J, 1) + h \sum_{i=1}^{2^J} f(a + (2i-1)h) \quad (\text{Sammensatt trapesregel})$$

**for**  $L = 1, \dots, J$

$$R(J, L) = R(J, L-1) + \frac{R(J, L-1) - R(J-1, L-1)}{4^{L-1}} \quad (\text{Richardson ekstrapolering})$$

```

end
  err = |R(J, J) - R(J + 1, J + 1)|
end

```

$$\int_a^b f(x)dx = R(J, J) + \mathcal{O}(h_J^{2J+2}) \quad (\text{D.26})$$

$$h_J = \frac{b-a}{2^J} \quad (\text{D.27})$$

I implementeringen av Rombergs metode brukes  $tol = 1e - 9$  og  $n = 5$  i beregningen av  $F_m$  og  $n = 10$  i beregningen av  $\Psi_m$ . Den minste steglengden i metoden minker for hver gang den kalles fordi intervallet minker for hvert kall (frem til den er omtrent  $\pi$ ). Trunkeringsfeil  $h^{2J+2}$  er henholdsvis  $h^{12}$  og  $h^{22}$  i beregningen av  $F_m$  og  $\Psi_m$  og minker for hvert kall slik at størst feil gjøres initielt. Svakheten ved Rombergs metode er at det kreves dobbelt så mange funksjons-evalueringer for å redusere feilen fra  $\mathcal{O}(h^{2n})$  til  $\mathcal{O}(h^{2n+2})$ . I den numeriske beregningen er evalueringen av  $F_m$  og  $\Psi_m$  gitt ved (D.1) og (D.2) krevende/tar mye kapasitet og gjør metoden treg/"computationally demanding".

# Tillegg E

## E.1 Høyere ordens moment

Motivert av antydningen i FNV har jeg beregnet det fjerde ordens og fjerde harmoniske momentet på sylindren. Beregningen av momentet til fjerde harmoni og fjerde orden er *ikke* fullstendig da FNVs teori er begrenset til tredje orden og harmoni. Beregningene er gjort for å illustrere tilstedeværelsen av en fjerde harmonisk komponent i momentet.

Høyere harmonisk og ordens moment som følge av det lineære potensialet skyldes bidraget fra andre ordens differensiallast over stille vannsnivået

$$\int_0^{\eta_1} F_2'(z)z dz = \frac{1}{8}\pi\rho g k^2 A^4 a^2 (2\sin 2\omega t - \sin 4\omega t) = \mathcal{O}(\epsilon^6). \quad (\text{E.1})$$

Med at  $h \gg a$  kan den nedre integralgrensen  $z = -h$  utvides til  $z = -\infty$  der feilen som gjøres er av størrelsesorden mindre enn  $\mathcal{O}(h^{-3})$  da  $F_3'$  avtar med  $Z^{-3}$ , og resultatene i avsnitt 3.2.8 kan anvendes. Momentet på sylindren som følge av det ikkelineære potensialet beregnes i indre koordinater slik at

$$\begin{aligned} M_{y3} &= \int_0^\infty F_3'(Z)(-aZ + \eta_1)a dZ \\ &= \frac{1}{2}\pi\rho g k^2 A^4 a^2 \sin \omega t (\cos \omega t - \cos 3\omega t) \int_0^\infty \left( \frac{3}{2}\Psi_1(1, Z) + 2\Psi_2(1, Z) \right) dZ \\ &\quad - \frac{1}{2}\pi\rho g k^2 A^3 a^3 (\cos \omega t - \cos 3\omega t) \int_0^\infty \left( \frac{3}{2}\Psi_1(1, Z) + 2\Psi_2(1, Z) \right) Z dZ. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Integraluttrykkene evalueres vha Greens teorem som i kapittel 3.5

$$\int_0^\infty \left( \frac{3}{2}\Psi_1(1, Z) + 2\Psi_2(1, Z) \right) dZ = 2, \quad (\text{E.3})$$

og vha delvis integrasjon slik at

$$\int_0^\infty \left( \frac{3}{2}\Psi_1(1, Z) + 2\Psi_2(1, Z) \right) Z dZ = 0. \quad (\text{E.4})$$

Dermed hæs momentet som følge av det ikkelineære potensialet

$$M_{y3} = \pi\rho g k^2 A^4 a^2 (\sin 2\omega t - \frac{1}{2}\sin 4\omega t) = \mathcal{O}(\epsilon^6). \quad (\text{E.5})$$



Dette, sammen med  $M_{P1}$ ,  $M_{P2}$ ,  $M_{P0}$ , betraktes som momentet som virker lokalt ved overflaten.

I tillegg til foregående bidrag til momentet kommer bidraget fra punktlasten over  $z = \eta_1$  som følge av det hydrostatiske trykket og beregnes på liknende måte som punktlasten  $\tilde{F}_0$  i avsnitt 3.5.

$$\begin{aligned} M_{y0} &= -a \int_0^{2\pi} \int_{\eta_1}^{\eta} z(-\rho g(z - \eta)) \cos \theta; dz d\theta \\ &= -\rho g a \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{6} \eta^3 - \frac{1}{2} \eta \eta_1^2 + \frac{1}{3} \eta_1^3 \right) \cos \theta d\theta \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Ved å omskrive og bruke perturbasjonsutviklingen/rekken  $\eta = \eta_1 + \eta_2 + \dots$  haes

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6} \eta^3 - \frac{1}{2} \eta \eta_1^2 + \frac{1}{3} \eta_1^3 \\ &= \frac{1}{2} \eta_1 \eta_2^2 - \frac{1}{3} \eta_1^2 \eta_3 + \mathcal{O}(\epsilon^6) \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

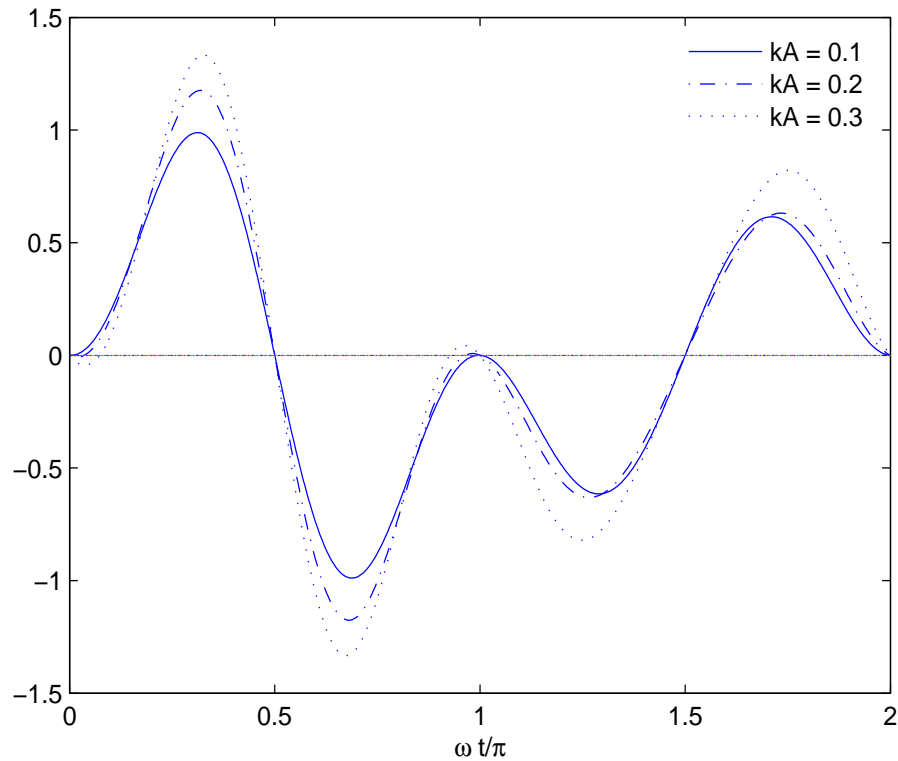
Fra avsnitt 3.4 er  $\eta_3$  på sylindringen kjent. Kun inkludert leddene som birar til integralet rundt sylindringen haes

$$\begin{aligned} M_{y0} &= -\rho g a \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} \eta_1 \eta_2^2 \cos \theta - \frac{1}{3} \eta_1^2 \eta_3 \right) d\theta \\ &= -\rho g a \left( \pi k^2 A^4 a \left( \frac{1}{8} \sin 2\omega t + \frac{3}{16} \sin 4\omega t \right) - \frac{5}{6} \pi k^2 A^4 a \sin 2\omega t \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} \pi k^2 A^5 (\cos \omega t - \cos 3\omega t) \Psi_1(1, Z) + 2\pi k^2 A^5 \sin 2\omega t \Psi_2(1, Z) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^7) = \mathcal{O}(\epsilon^6) \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Den fullstendige fjerde ordens fjerde harmoniske komponenten vil inneholde bidrag fra høyere ordens og harmoniske ledd i diffraksjonspotensialet enn som er inkludert i denne analysen.

### Kommentar til resultat

Komponentene (E.1), (E.5) og (E.8) av momentet beregnet i dette tillegget er av samme størrelsesorden i  $\epsilon$  og, til ledende orden, proporsjonale med  $A^4$ . Sammen med komponenten (3.186) regnes de som lokale ettersom de virker konsentrert nær den frie overflaten. På tross av at den fjerdeharmoniske komponenten av det lokale momentet er liten sammenliknet med det ledende ordens momentet kan den ha innvirkning på ringing ved at den oscillerer med den firedobbelte av fundamentalfrekvensen. I figur E.1 er momentet som virker konsentrert nær overflaten, gitt ved summen av (3.186), (E.1), (E.5) og (E.8) plottet over en fundamentalperiode for ulike verider av  $kA$ . Komponentene er skalert med  $\pi \rho g k A^3 a^2$ . Komponentene er linerært proporsjonale med  $kA$  og utslagene øker med økende bølgesteilhet.



Figur E.1: Lokalt moment som virker over stille vannsnivået  $z = 0$  gitt ved komponentene (3.186), (E.1), (E.5) og (E.8) over en fundamentalperiode for ulike  $kA$ . Skaleringsfaktor er  $\pi\rho g k A^3 a^2$  og utslagene langs vertikalaksen er dimensjonsløs.

Det maksimale utslaget til den lokale momentkomponenten i figur E.1 opptrer omtrent samtidig som maksimalutslaget til den samlede punktlasten illustrert i figur 3.13 og forsterker hverandre.

# Tillegg F

## F.1 Notasjon

$A, A_n$	bølgeamplitude; reell og kompleks amplitude i bølgespekter
$a$	sylinderradius
$g$	tyngdens akselerasjon/gravitasjonskonstant
$J_m$	Besselfunksjon av første type av orden $m$
$Y_m$	Besselfunksjon av andre type av orden $m$
$H_m^{(1)}, H_m^{(2)}$	Hankelfunksjon av hhv første og andre type
$\gamma$	spektral formparameter eller spissshetsfaktor
$\gamma_E$	Eulerkonstanten i Besselfunksjonen av andre type
$\omega, \omega_n, \omega_P$	vinkelfrekvens, frekvenskomponent og toppfrekvens
$f_n$	frekvens
$\epsilon$	perturbasjonsparameter
$\phi$	hastighetspotensiale; totalt, lineært og ikkelineært
$\phi_I, \phi_S, \phi_D$	lineært hastighetspotensiale; innkommende og spredning
$\psi, \Psi$	hastighetspotensiale; ikkelineært, ikkelineært definert i indre koordinater (R,Z)
$\varphi$	fasevinkel
$\epsilon_n$	faseforskyvning/vinkel for irregulære bølger
$\eta, \eta_n, \eta_{In}$	overflatehevning; eksakt, n-te komponent og n-te komponent av innkommende bølge
$\rho$	tetthet til vann
$\theta$	polarkoordinat, vinkel
$\lambda$	bølgelengde
$\sigma$	standardavvik, JONSWAP spekter
$T$	periode
$T_p, T_{pf}$	toppperiode, topp-periode for fullt utviklet vindgenerert sjø, bølgespekter
$k, k_n$	bølgetall, bølgetallskomponent
$S(\omega), S(\omega, \theta)$	bølgespekter; langkammet/uten bølgespredning, kortkammet/med bølgespredning
$H_{1/3}, H_s$	signifikant bølgehøyde i bølgespekter
$M$	moment

FNV	Faltinen et al. [24]
M&M	Malenica & Molin [35]
H&G	Huesby & Grue (2000) [23]
Newman (1977)	boken av Newman, Marine Hydrodynamics [14]
Newman (1996a)	Newmans artikkel [15]
Newman (1996b)	Newmans artikkel [16]
$F, F'(z)$	kraft, kraft per lengdeenhet $dz$
$F_3^{(FNV)}, F_3^{(MM)}$	tredje ordens tredje harmoniske laster; vha FNVs teori [24], vha M&Ms teori [35]
$h$	vanndybde, avstand fra stille vannsnivå til havbunn
$H_s$	Signifikant bølgehøyde, definert som fire standardavvik.
$H_{1/3}$	Signifikant bølgehøyde, gjennomsnittet av de 1/3 største bølgene
$H$	Bølgehøyde

# Bibliografi

- [1] <http://www.wamit.com/>.
- [2] B. Davies. *Integral transforms and their applications*. Springer, 1973.
- [3] Det Norske Veritas. *DNV Recommended Practice F205, Global Performance Analysis of Deepwater Floating Structures*, Oktober 2004.
- [4] Det Norske Veritas. *DNV Recommended Practice C205, Environmental Conditions and Environmental Loads*, April 2007.
- [5] O. M. Faltinsen. *Sea loads on ships and offshore structures*. Cambridge University Press, third edition, 1990.
- [6] O. M. Faltinsen. Ringing loads on a slender vertical cylinder of general cross-section. *Journal of Engineering Mathematics*, 35:199–217, 1999.
- [7] P. Ferrant. Fully non linear interactions of long-crested wave packets with a three dimensional body. In *Twenty-Second ONR Symposium in Naval Hydrodynamics*, pages 403–416. 1999.
- [8] S. Gran. *A Course in Ocean Engineering*. Elsevier Science Publishers B.V, 1992.
- [9] J. Grue. Waves and slowly rotating floating bodies. In *Waves and Nonlinear Processes in Hydrodynamics*, pages 71–82. 1996.
- [10] G. Bjørshol og Ø. Strand J. Grue. Higher harmonic wave exciting forces on a vertical cylinder. 1993.
- [11] H. E. Krogstad og P. Müller K. Dysthe. Oceanic rogue waves. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 40:287–310, 2008.
- [12] H. P. Langtangen. *Computational Partial Differential Equations*. Springer, second edition, 2002.
- [13] C. C. Mei. *The applied dynamics of ocean surface waves*. World Scientific, first edition, 1989.

- [14] J. N. Newman. *Marine Hydrodynamics*. MIT Press, fourth edition, 1977.
- [15] J. N. Newman. Nonlinear scattering of long waves by a vertical cylinder. In *Waves and Nonlinear Processes in Hydrodynamics*, pages 91–102. 1996.
- [16] J. N. Newman. The second-order wave force on a vertical cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 320:417–443, 1996.
- [17] Computations of fully nonlinear three-dimensional wave wave, Part 2. Nonlinear waves wave-body interactions, and forces on a body. Ringing loads on a slender vertical cylinder of general cross-section. *Journal of Fluid Mechanics*, 438:41–66, 2001.
- [18] J. N. Newman og C.-H. Lee. Runup on a vertical cylinder in long waves. 10th Workshop on Water Waves and Floating Bodies - Oxford, IWWWFB, 1995.
- [19] J. R. Krogstad og C. T. Stansberg. Ringing load models verified against experiments, 1995.
- [20] X. Zhang og D. Tong. A generalized weber transform and its inverse formula. *Applied Mathematics and Computations*, 193(1):116–126, 2007.
- [21] M. S. Longuet-Higgins og F. Ursell. Sea waves and microseisms. *Nature*, 162:700, 1948.
- [22] S. K. Lucas og H. A. Stone. Evaluating infinite integrals involving bessel functions of arbitrary order. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 64(3):217–231, 1995.
- [23] M. Huseby og J. Grue. An experimental investigation of higher-harmonic wave forces on a vertical cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 414:75–103, 2000.
- [24] O. M. Faltinsen og J. N. Newman og T. Vinje. Nonlinear wave loads on a slender vertical cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 289:179–198, 1995.
- [25] J. H. Mathews og K. D. Fink. *Numerical Methods Using Matlab*. Pearson Prentice Hall, fourth edition, 2004.
- [26] O. Gramstad og K. Trulsen. Can swell increase the number of freak waves in a wind sea? *Journal of Fluid Mechanics*, 650:57–79, 2009.
- [27] J. Grue og M. Huseby. Higher harmonic wave foces and ringing of vertical cylinders. *Applied Ocean Research*, 24:203–214, 2002.
- [28] J. R. Morison og M. P. O'Brien og J. W. Johnson og S. A. Schaaf. The force exerted by surface waves on piles. *Petroleum Transactions, AIME*, 189:149–154, 1950.

- [29] R. C. MacCamy og R. A. Fuchs. Wave forces on piles: A diffraction theory. *Technical Memorandum No. 69, US Army Corps of Engineers, Beach Erosion Board*, 1954.
- [30] F. P. Chau og R. Eatock-Taylor. Second-order wave diffraction by a vertical cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 240:571–599, 1992.
- [31] K. Torsethaugen og S. Haver. Simplified double peak spectral model for ocean waves. In *The Proceedings of the Fourteenth International Offshore and Polar Engineering Conference*, pages 76–84. 2004.
- [32] M. R. Spiegel og S. Lipschutz og J. Liu. *Mathematical Handbook of formulas and tables, Schaum's Outlines*. McGraw-Hill, third edition, 1968-2009.
- [33] W. E. Farrell og W. Munk. What do deep sea pressure fluctuations tell about short surface waves? *Geophysical Research Letters*, 35, L19605, 2008.
- [34] E. C. Titchmarsh. Weber's integral theorem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-22(1):15–28, 1924.
- [35] Š. Malenica og B. Molin. Third-harmonic wave diffraction by a vertical cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 302:203–229, 1995.
- [36] G. N. Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*. The Syndics of the Cambridge University Press, second edition, 1962.