

Dødelighetsobligasjoner når det er korrelasjoner mellom kjønnene

av

MAK LUČKIN

MASTEROPPGAVE

for graden

Master i Modellering og Dataanalyse

(Master of Science)



*Det matematisk- naturvitenskapelige fakultet
Universitetet i Oslo*

Mai 2009

*Faculty of Mathematics and Natural Sciences
University of Oslo*

Anerkjennelser

Jeg vil takke min veileder, professor Erik Bølviken, som etter mitt ønske om å skrive om dødelighet-sobligasjoner fant nyttige artikler om emnet. Disse inspirerte meg til å finne flere interessante artikler om emnet selv. Professor Erik Bølviken ga meg også en interessant vinkling som gjorde det spennende å jobbe med oppgaven. I tillegg vil jeg takke professor Anders Rygh Swensen som overtok som min kontaktperson mot slutten av masteroppgaven. Hans hjelp ga meg den veiledningen jeg trengte i avslutningsfasen. Jeg vil også takke min venn og tidligere medstudent, Mikael A. Bliksrud, for at han lot meg bruke parameterestimatene hans.

I tillegg vil jeg takke min familie, min kjæreste Minela og mine venner for deres støtte gjennom hele masterstudiet mitt. En spesiell takk til alle på lesesal B802 som gjennom hele masterstudiet var tilgjengelige for nyttige faglige diskusjoner. Takk!

Oslo, Mai 2008,
Mak Lučkin

Sammendrag

Det har lenge vært klart at dødelighet oppfører seg på en stokastisk måte, og at livselskap som følge av forpliktelser som ofte varer i 30 år er sterkt utsatt for risiko som følge av nedgående dødelighet. For å sikre seg mot dødelighetsrisiko har flere forskningsartikler foreslått dødelighetsderivater. Denne oppgavens formål har vært å se hvordan en ny type risiko, korrelasjon mellom kjønnene, påvirker usikkerheten i prisingen av dødelighetsobligasjoner foreslått i forskningsartikler. Jeg har tatt for meg to forskjellige dødelighetsobligasjoner, en nullkupong longevity bond og en longevity bond. I tillegg jeg har også sett på risikoen korrelasjonen gir på to forenklete og generelle pensjonsporteføljer.

Med dette som formål presenterer jeg i denne oppgaven en metode for å modellere dødelighet på en stokastisk måte. Mer spesifikt antar jeg at parameterne i modellene følger en multidimensjonal tilfeldig gang. Dette gir meg muligheten til å simulere med og uten avhengighet mellom parameterne til kjønnene. Jeg har sett på risikoen avhengighet mellom kjønnene gir ved å sammenligne priser og standardavvik under to hyppig brukte dødelighetsmodeller, Gompertz-Makeham og Perks. I tillegg har prisene og standardavvikene blitt sammenlignet under konstant og stokastisk rente. Den stokastiske renten er i denne oppgaven gitt ved to forskjellige rentemodeller, Vašiček og Black-Karasinski. For å få et innblikk hvordan rentefluktuasjoner påvirker risikoen som følge av korrelasjoner, har jeg sett på to forskjellige rentescenarier med forskjellig grad av fluktusjon.

Det viste seg at korrelasjon mellom kjønnene ga en ekstra risiko, men at omfanget av risikoen var avhengig av flere faktorer. Usikkerheten som følge av korrelasjonen viste seg å være større under Perks enn under Gompertz-Makeham for både pensjonsporteføljene og dødelighetsobligasjonene. Den var størst under teknisk rente, men ble redusert under de stokastiske rentemodellene, og da særlig under Black-Karasinski-modellen. Reduksjonen av korrelasjonsrisikoen under de stokastiske rentemodellene var størst under rentescenariet med de sterkeste fluktusjonene.

Innhold

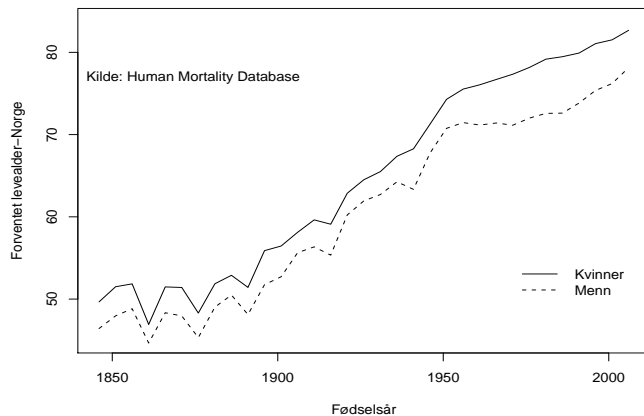
1	Innledning	1
2	Matematiske byggeklosser	3
2.1	Dødelighet	3
2.1.1	Modeller	4
2.2	Tilfeldig Gang	5
2.2.1	Multivariat Normalfordeling	6
2.3	Rentemodeller	6
2.3.1	Vašiček	6
2.3.2	Black-Karasinski	7
2.3.3	Simuleringer av rentene	9
3	Stokastisk dødelighet	11
3.1	Krav til en god stokastisk dødelighetsmodell	11
3.2	Korrelasjon mellom kjønnene	12
3.3	Utvikling i levealderen	14
4	Dødelighetsobligasjoner	19
4.1	Pensjonsporteføljer ved korrelasjon	19
4.1.1	Resultater Gompertz-Makeham	21
4.1.2	Resultater Perks	25
4.2	Nullkupon Longevity Bond	29
4.2.1	Resultater Gompertz-Makeham	31
4.2.2	Resultater Perks	34
4.3	Longevity Bonds	36
4.3.1	Resultater Gompertz-Makeham	37
4.3.2	Resultater Perks	38
5	Konklusjon	41
A	Relasjon mellom ett og t-årige overlevelsessannsynligheter	43
B	Utbetalinger pensjonsporteføljene	45
C	Durasjon	47
D	Perks uten parameterne fra 1950	49

E	R-kode	51
E.1	Pensjonsporteføljene	51
E.2	Nullkupong Longevity Bond	55
E.3	Longevity Bond	58
E.4	Rente	64

Kapittel 1

Innledning

Livselskap har tradisjonelt beregnet reserver og premier ved å bruke en deterministisk dødelighet som kun er en funksjon av alderen, og en konstant rente (ofte kalt teknisk rente). Forskningslitteratur de siste årene har påpekt at ettersom hverken dødelighet eller rente oppfører seg deterministisk er livselskap utsatt for tre typer risikoer når de utsteder kontrakter: finansiell risiko (investerings- og renterisiko), systematisk dødelighetsrisiko og usystematisk dødelighetsrisiko. Systematisk dødelighetsrisiko er risikoen for at den fremtidige utviklingen av dødeligheten avviker fra prediksjonene, der risikoen ligger i at folk blir eldre enn estimert. Usystematisk dødelighetsrisiko betegner mulig forskjell i utviklingen til personporteføljen livselskapet har forpliktelse ovenfor i forhold til referansepopulasjonen som brukes til å kalkulere reserver¹.



Figur 1.1: Forventet levealder ved fødsel

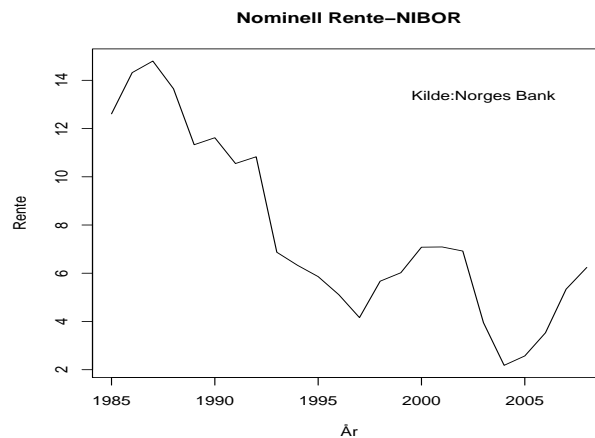
For å sikre seg mot dødelighetsrisiko har livselskap tradisjonsmessig bevisst valgt dødelighetssannsynligheter på *den trygge siden*. Ettersom forsikringskontrakter ofte varer i 30 år, kan dødelighetssannsynligheter livselskapet trodde var på den trygge siden vise seg å være for høye. Pensjonstakerne kan rett og slett bli eldre enn estimert. Usikkerheten i estimeringen blir godt illustrert ved det faktumet at den

¹I denne oppgaven kommer jeg ikke til å ta hensyn til usystematisk risiko, jeg skal bare ta for meg kjønnsforskjeller. Som følge av dette kommer jeg til å referere til systematisk dødelighetsrisiko (engelsk: *longevity risk*) som bare dødelighetsrisiko.

forventede gjestående levealderen for 60-årige menn i Norge er nesten 4 år lenger i 2006 enn den var i 1980².

Figur 1.1 illustrerer den stokastiske dødelighetsutviklingen. Vi kan observere at den forventede levealderen ved fødsel for begge kjønn har steget med nesten 30 år siden 1850. Det er lett å se at stigningen har hatt en stokastisk utvikling. En annen ting verdt å merke seg at forventet levealder for menn har steget mer enn for kvinner siden 1980. Figuren illustrer at den stokastiske utviklingen i dødelighet kan gi risiko som kan være av en betydelig størrelsesorden.

Det er derfor klart at livselskapene trenger en måte å immunisere porteføljen mot nedgående dødelighet. De siste årene har det blitt skrevet mye forskningslitteratur om forskjellige dødelighetsderivater. Disse vil kunne brukes til å immunisere kjøperens porteføljer mot dødelighetsrisiko. Et av de mest populære derivatene i litteraturen har vært Longevity Bond, en obligasjon som utbetaler en kupong proporsjonal med antall overlevende i et kull. I denne oppgaven skal jeg presentere en nullkupong longevity bond og en longevity bond. Begge vil kunne brukes til å immunisere porteføljen mot dødelighetsrisiko. Formålet er å vise hvordan prisingen påvirkes av en ny type risiko, korrelasjon mellom kjønnene. Jeg skal bruke to forskjellige modeller for dødelighet som kommer til å illustrere hvordan risikoen som følge av korrelasjon gir utslag under forskjellige modeller. Hvis man ser på figur 1.1 på forrige side kan man se at forventet levealder mellom kjønnene er positivt korrelert. Det virker også plausibelt at ektefeller har en korrelert levealder. Vi skal se at årlige forandringene i parameterne for menn og kvinner i to matematiske modeller for dødelighet er korrelert, og at dette vil gi en ekstra risiko.



Figur 1.2: Nominell rente de siste 24 årene

Figur 1.2 illustrer usikkerheten i rentefluktuasjonene. Vi ser at den nominelle renten i Norge i en periode på 24 år (1984 til 2008) har variert fra 14% på sitt høyeste til 2% på sitt laveste, en fluktuasjon som er betydelig. Det er derfor sannsynlig at renten i løpet av årene til obligasjonenes forfallstidspunkt vil fluktuere opp og ned ut i fra de makroøkonomiske kreftene som styrer økonomien. For å se hvordan korrelasjonsrisikoen påvirkes av rentefluktuasjoner vil jeg prise under både med konstant og stokastisk rente.

²Se Figur 3.4 i Kapittel 3.

Kapittel 2

Matematiske byggeklosser

I dette kapitlet skal jeg innføre nødvendige matematiske definisjoner og relasjoner. Jeg skal først skrive litt generelt om dødelighet, for deretter å definere to populære matematiske modeller for dødelighet, Gompertz-Makeham og Perks. I tillegg skal jeg definere en ofte anvendt stokastisk prosess tilfeldig gang. Denne kommer til å bli brukt for å gå fra deterministiske til stokastiske dødelighetsmodeller i kapittel tre. Deretter skal jeg innføre to stokastiske modeller for rente, Vašiček og Black-Karasinski, som i kapittel fire kommer til å brukes til å se hvordan stokastisk rente påvirker priser og avsetninger i forhold til teknisk rente.

2.1 Dødelighet

Vi betrakter en person som er x år gammel (også kalt en x -åring), betegnet med (x) . Hvis vi betegner vedkomnes fremtidige levetid som T , eller mer spesifikt $T(x)$, vil $x+T$ være alderen vedkomne oppnår før han eller hun dør. Den fremtidige levetiden T er en tilfeldig variabel med kumulativ fordelingsfunksjon

$$G(t) = \Pr(T \leq t), \quad t \geq 0$$

Funksjonen $G(t)$ angir sannsynligheten for at en person vil dø innen t år, for hver fikserte t . Vi antar at G er kjent og kontinuerlig, og har en sannsynlighetstetthetsfunksjon $g(t) = \frac{dG(t)}{dt}$. Jeg skal i denne oppgaven bruke notasjonen som brukes av det internasjonale aktuarmiljøet. Sannsynligheten for at en x -åring vil dø innen t år er betegnet ved ${}_tq_x$, og dermed gitt ved

$${}_tq_x = G(t) \tag{2.1}$$

Dette gir at sannsynligheten for at en x -åring vil overleve minst t år, ${}_tp_x$, er gitt ved

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = 1 - G(t) \tag{2.2}$$

I tillegg innfører jeg følgende relasjon mellom ett-årige og t -årige overlevelsessannsynligheter¹:

$${}_tp_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot \dots \cdot p_{x+t-1}, \quad t = 1, 2, 3, \dots \tag{2.3}$$

Dødsintensiteten for (x) på tidspunktet t (alderen til (x) er nå $x+t$) er definert ved

$$\mu_{x+t} = \frac{g(t)}{1 - G(t)} = -\frac{d}{dt} \ln {}_tp_x \tag{2.4}$$

¹Jeg har utledet relasjonen i Tillegg A

Integrasjon av (2.4) gir følgende relasjon:

$${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} \quad (2.5)$$

Antall hele fremtidige år (engelsk: *curtate future lifetime*) (x) kommer til å leve betegner vi som $K = [T]$, der $[.]$ er en Gaussisk hakeparentes (engelsk: *Gaussian bracket*)². Forventningsverdien av K er gitt ved

$$E[K] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(K \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_x \quad (2.6)$$

I denne oppgaven kommer jeg til å benytte meg av algoritme 12.1 i Bølviken(n.d.):

Algoritme: Forventet gjenstående levetid

```

Input:  $p_l, x, l_e$                                 % Kommer til å la  $l_e = 120$ 
 $P = 1$  og  $F = 0.5$                                 % Innledende overlevelsessannsynlighet og forventning
for  $l = x, \dots, l_e$  do
     $P = P p_l$  og  $F = F + P$                         % Her er  $P$  lik  ${}_t p_x$  for  $t = l - x + 1$ 
end for
Returner  $F$                                         % Forventet antall gjenstående leveår

```

2.1.1 Modeller

Gompertz-Makeham

B. Gompertz postulerte i 1824 at dødsintensiteten vokser eksponensielt med følgende dødsintensitet:

$$\mu_{x+t} = \theta_1 e^{\theta_2(x+t)} \quad (2.7)$$

I 1860 generaliserte W. M. Makeham Gompertz sin lov ved å legge til en aldersuavhengig konstant $\theta_0 \geq 0$ til ligning (2.7). Dette ga Gompertz-Makeham modellen, som den dag i dag er den mest populære matematiske beskrivelsen av dødelighet i aktuarmiljøet. Intensiteten under denne modellen er en parametrisk kurve på formen

$$\mu_{x+t} = \theta_0 + \theta_1 e^{\theta_2(x+t)} \quad (2.8)$$

der θ_0 , θ_1 og θ_2 er parametere. Den ett-årige overlevelsessannsynligheten under denne modellen er gitt ved

$$p_x = \exp\left(-\theta_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2}(e^{\theta_2(x+1)} - e^{\theta_2 x})\right) \quad (2.9)$$

Formelen over kan utledes fra relasjonene (2.5) og (2.8), noe som blir gjort i Bølviken(n.d.). Ettersom disse sannsynlighetene avhenger av parameterne som igjen blir estimert for hvert år vil det være naturlig å angi hvilket år sannsynlighetene er for.

$$p_x^k = \exp\left(-\theta_0^k - \frac{\theta_1^k}{\theta_2^k}(e^{\theta_2^k(x+1)} - e^{\theta_2^k x})\right) \quad (2.10)$$

Her angir k året parameterene, og dermed også sannsynlighetene, er estimert for.

²En gaussisk hakeparentes runder av nedover til nærmeste heltall, for eksempel: $[2.9]=2$

Perks

I 1932 oppdaget den britiske aktuaren W. Perks at dødelighetskurven begynner å synke rundt 84-års alderen, og at kurven kunne minne om en S-kurve. Han foreslo derfor å erstatte Gompertz sin lov med en logistisk funksjon med fire parametere:

$$\mu_x = \frac{A + Be^{\alpha x}}{1 + Ce^{\alpha x}} \quad (2.11)$$

Det er denne modellen som ble lagt til grunn i Cairns *et al.* (2006) for spesialtilfellet med to parametere som jeg innfører her, og som jeg kommer til å henviser til som Perks-modellen. Den ett-årige overlevelsessannsynligheten under Perks-modellen er gitt ved

$$p_x^k = \frac{1}{1 + e^{\theta_1^k + \theta_2^k(x+1)}} \quad (2.12)$$

der k som før angir året sannsynlighetene (og parameterene) er estimert for.

2.2 Tilfeldig Gang

En serie Y_t er en tilfeldig gang (engelsk: *random walk*) hvis den er generert av rekursjonen³

$$Y_t = Y_{t-1} + X_t, \quad X_t = \mu + \sigma\epsilon_t, \quad Y_0 = y, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (2.13)$$

X_t er her en uavhengig inkrementprosess. ϵ_t er identisk og uavhengig fordelt med forventning 0, og standardavvik lik 1. Det er her verdt å merke seg at de *ikke* trenger å være normalfordelt. μ er derfor forventningen (ofte kalt driften), mens σ er standardavviket til inkrementprosessen. Det er lett å se at

$$Y_T = Y_0 + T\mu + \sigma(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_T)$$

som gir oss følgende følgende forventning:

$$E[Y_T] = y + T\mu$$

Ettersom variablene er ukorreletert får vi følgende varians:

$$\text{Var}[Y_T] = T\sigma^2$$

Tilfeldig gang kan brukes til å modellere alt fra aksjepriser til molekylers bevegelse i gass eller væske.

Flerdimensjonal tilfeldig gang er definert som følger:

$$\mathcal{Y}_t = \mathcal{Y}_{t-1} + \mathcal{M} + \mathcal{E}_t, \quad \mathcal{Y}_0 = \mathbf{y}, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (2.14)$$

Her er \mathcal{Y}_t , \mathcal{M} , \mathcal{E}_t og \mathbf{y} alle vektorer i \mathbf{R}^n . \mathcal{M} er forventningsvektoren, \mathbf{y} er startvektoren til prosessen, mens \mathcal{E}_t i mine anvendelser følger en multivariat normalfordeling (se avsnittet under for definisjon) med forventningsvektor 0 og kovarians Σ . Forventningen og variansen blir da:

$$E[\mathcal{Y}_T] = \mathbf{y} + T\mathcal{M}, \quad (2.15)$$

$$\text{Var}[\mathcal{Y}_T] = T\Sigma \quad (2.16)$$

³Hvis $Y_t = \ln(S_t)$ kalles følgen $\{S_t\}$ for en geometrisk tilfeldig gang (engelsk: *geometric random walk*).

2.2.1 Multivariat Normalfordeling

Ser på en tilfeldig vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ som tar verdier i \mathbf{R}^n . \mathbf{X} følger en multivariat normalfordeling hvis tetthetsfunksjonen har følgende form:

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp \left[\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \right]$$

Her er $\boldsymbol{\mu}$ og \mathbf{x} n-dimensjonale radvektorer og $\boldsymbol{\Sigma}$ er en $n \times n$ kovariansmatrise. I dette tilfellet er

$$E[\mathbf{X}] = \boldsymbol{\mu}$$

og

$$\text{Cov}[\mathbf{X}] = \boldsymbol{\Sigma}$$

2.3 Rentemodeller

I denne oppgaven kommer jeg til sammenligne avsetninger under tre typer renter; teknisk rente, Vašiček og Black-Karasinski. Teknisk rente er det samme som å si at renten gjennom en periode kommer til å være konstant, f.eks. på tre prosent, og deretter neddiskontere gjennom hele perioden man ser på med denne renten. De to andre er stokastiske modeller for renten, og må derfor simuleres. Jeg definerer først en AR(1)-prosess, som kommer til å bli brukt i begge rentemodellene.

AR(1)

Stokastiske prosesser kan deles opp i to typer, stasjonære (også kjent som *mean-reverting*) og ikke-stasjonære. I den siste kategorien finner vi blant annet tilfeldig gang, mens AR(1) faller i den første kategorien. AR(1) eller *autoregressive process of order 1* som er prosessens fulle engelske navn er gitt ved følgende rekursjon:

$$X_t = aX_{t-1} + \sigma\epsilon_t \quad (2.17)$$

Ettersom jeg i denne oppgaven bare er interessert i tilfellet $|a| < 1$, kan man vise (se Bølviken(n.d.)) følgende:

$$E[X_t | x_0] = a^t x_0 \rightarrow 0 \quad \text{når } t \rightarrow \infty \quad (2.18)$$

$$\text{sd}[X_t | x_0] = \sqrt{\frac{1 - a^{2t}}{1 - a^2}} \sigma \rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{1 - a^2}} = \sigma_x \quad \text{når } t \rightarrow \infty \quad (2.19)$$

2.3.1 Vašiček

En av de mest brukte og populære modellene for rente ble foreslått av den tsjekkiske matematikeren O. A. Vašiček i 1977, og bærer derfor også hans navn. Han foreslo at renten kunne beskrives ved hjelp av en *mean-reverting* Ornstein-Uhlenbeck⁴ prosess som har følgende dynamikk:

$$dr_t = (1 - a)(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (2.20)$$

⁴En ofte anvendt stokastisk prosess som har blitt brukt blant annet til å modellere temperaturer.

Her er W_t en standard brownsk bevegelse. μ er det langsiktige gjennomsnittsnivået på renten, $1 - a$ angir hvor fort prosessen ”glemmer” startverdien, mens σ angir amplituden på tilfeldigheten i systemet (jo høyere σ , jo høyere svingninger). Ut i fra dynamikken kan vi definere følgende rekursjon:

$$r_t - r_{t-1} = (1 - a)(\mu - r_{t-1})(t - (t - 1)) + \sigma(W_t - W_{t-1})$$

Denne rekursjonen gir oss en tilnærming til den virkelige dynamikken. Ved å la $W_t - W_{t-1} = \epsilon_t \sim N(0, 1)$ kan vi skrive om rekursjonen til⁵:

$$r_t = r_{t-1} + (1 - a)(\mu - r_{t-1}) + \sigma\epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

Dette kan også skrives om som

$$r_t = \mu + a(r_{t-1} - \mu) + \sigma\epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

Hvis vi nå lar $X_t = r_t - \mu$, kan vi skrive om uttrykket over til følgende som vi kan finne i Bølviken(n.d.):

$$r_t = \mu + X_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

der vi kjenner igjen X_t som AR(1)-prosessen fra (2.17) og $x_0 = r_0 - \mu$.

Ved å utnytte det vi vet om AR(1)-prosessen X_t , er det lett å se at Vašiček-modellen har følgende forventning og standardavvik i den stasjonære fasen:

$$E[r_t] = \mu \quad \text{sd}[r_t] = \sigma_x \quad (2.22)$$

En vanlig kritikk mot Vašiček er at rentene kan bli negative for noen simuleringer/baner, men for anvendelsene i denne oppgaven kommer det til å holde at jeg fjerner de negative simuleringene.

2.3.2 Black-Karasinski

Black-Karisinski-modellen for rente ble presentert i 1991 av F. Black(kjent for Black og Scholes-formelen) og P. Karisinski. De foreslo å modellere renten med stokastisk prosess på formen

$$d\ln r_t = a(t)(b(t) - \ln r_t)dt + \sigma(t)dW_t \quad (2.23)$$

der $W(t)$ er en brownsk bevegelse. I denne oppgaven er jeg kun interessert i beskrivelsen som man kan finne i Bølviken(n.d.), som er et spesialtilfelle der vi lar $b(t) = b$, $a(t) = 1 - a$ og $\sigma(t) = \sigma$. Dette gjør at dynamikken ser ut som følger:

$$d\ln r_t = (1 - a)(b - \ln r_t)dt + \sigma dW_t$$

Ut i fra dynamikken kan vi definere følgende rekursjon:

$$\ln r_t - \ln r_{t-1} = (1 - a)(b - \ln r_{t-1})(t - (t - 1)) + \sigma(W_t - W_{t-1})$$

Denne rekursjonen gir oss en tilnærming til den virkelige dynamikken. Ved å la $W_t - W_{t-1} = \epsilon_t \sim N(0, 1)$ kan skrive om rekursjonen til:

$$\ln r_t = b + a(\ln r_{t-1} - b) + \sigma\epsilon_t$$

⁵Utnytter her at inkrementene til en standard brownsk bevegelse er normalfordelt.

Hvis vi nå lar $X_t = \ln r_t - b$ og $e^b = \mu e^{-\frac{1}{2}\sigma_x^2}$ kan vi skrive om uttrykket over til følgende (som vi finner i Bølviken(n.d.))⁶:

$$r_t = \mu e^{-\frac{1}{2}\sigma_x^2 + X_t}, \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

Her kjenner vi X_t igjen som AR(1)-prosessen fra (2.17) og σ_x er definert på samme måte som i (2.19). μ betenger nå det langsiktige gjennomsnittsnivået på renten. Forøvrig kan man ved å la $t=0$, se at startverdien til driverprosessen kommer til å være:

$$X_0 = \ln\left(\frac{r_0}{\mu}\right) + \frac{1}{2}\sigma_x^2 \quad (2.25)$$

Ved å utnytte at Black-Karasinski-modellen er lognormal er det enkelt å vise at renten under denne modellen har følgende forventning og standardavvik i den stasjonære fasen:

$$E[r_t] = E[\mu e^{-\frac{1}{2}\sigma_x^2 + X_t}] = \mu e^{-\frac{1}{2}\sigma_x^2} e^{\frac{1}{2}\text{Var}[X_t]} = \mu e^{-\frac{1}{2}\sigma_x^2} e^{\frac{1}{2}\sigma_x^2} = \mu \quad (2.26)$$

$$\text{sd}[r_t] = \text{sd}[\mu e^{-\frac{1}{2}\sigma_x^2 + X_t}] = \mu \sqrt{E[e^{-\sigma_x^2 + 2X_t}] - 1} = \mu \sqrt{\sigma_x^2 - 1} \quad (2.27)$$

Sammenligning av Black-Karasinski og Vašiček

Black-Karasinski-modellen har to fordeler i forhold til Vašiček, en opplagt, og en litt mer ”filosofisk”. Den opplagte fordelen er i at rentene under Black-Karasinski ikke kan bli negative. Dette må gi et mer realistisk bilde, for ved å fjerne negative kjøringene under Vašiček, fjerner man samtidig en del av de lavere kjøringene ved samme rentescenario i Black-Karasinski-modellen som man ellers kunne beholdt.

Den mer filosofiske fordelen ligger i at renten vil fluktuere mer ved høye renter under Black-Karasinski. Det er helt klart mer realistisk ettersom det er mye større slingringsmonn for renten både opp og ned hvis den er på for eksempel 7% enn hvis den er 1.5 %. Grunnen er måten renten ved det forrige tidspunktet påvirker den ved neste tidspunktet:

Jeg ser på begge modellene ved tid 1 og setter inn de respektive startverdiene, X_0 , for AR(1) og får følgende⁷:

Vašiček	Black-Karasinski
$r_1 = \mu + a(r_0 - \mu) + \sigma\epsilon_1$	$r_1 = r_0^a \mu^{1-a} e^{-\frac{1}{2}\sigma_x^2 + \sigma\epsilon_1}$
$\text{sd}[r_1] = \sigma$	$\text{sd}[r_1] = r_0^a \mu^{1-a} e^{-\frac{1}{2}\sigma_x^2 + \sigma} \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$

Vi kan dermed se at hoppene er av samme magnitud under Vašiček-modellen, uansett den foregående renten. Renten under Black-Karasinski-modellen er derimot slik at fluktuasjonene er proporsjonale r_0^a (som vi kan generalisere til den foregående renten, for man kan jo bare si at hvert nye tidspunkt er $t = 0$, noe som gjør neste tidspunkt $t = 1$), som dermed gir oss høyere fluktuasjoner for høyere renter under Black-Karasinski-modellen.

⁶Med andre ord: $\mu = e^{b + \frac{1}{2}\sigma_x^2}$

⁷Her er egentlig parameterne unntatt r_0 og μ forskjellige under modellene, men jeg velger å bruke samme bokstavene, ettersom de ikke er sentrale for argumentet

	Black-Karasinski	Vašiček
μ_l	0.025	0.025
μ_h	0.045	0.045
a	0.700	0.357
σ_l	0.150	0.0045
σ_h	0.250	0.0137
r_0	0.040	0.040

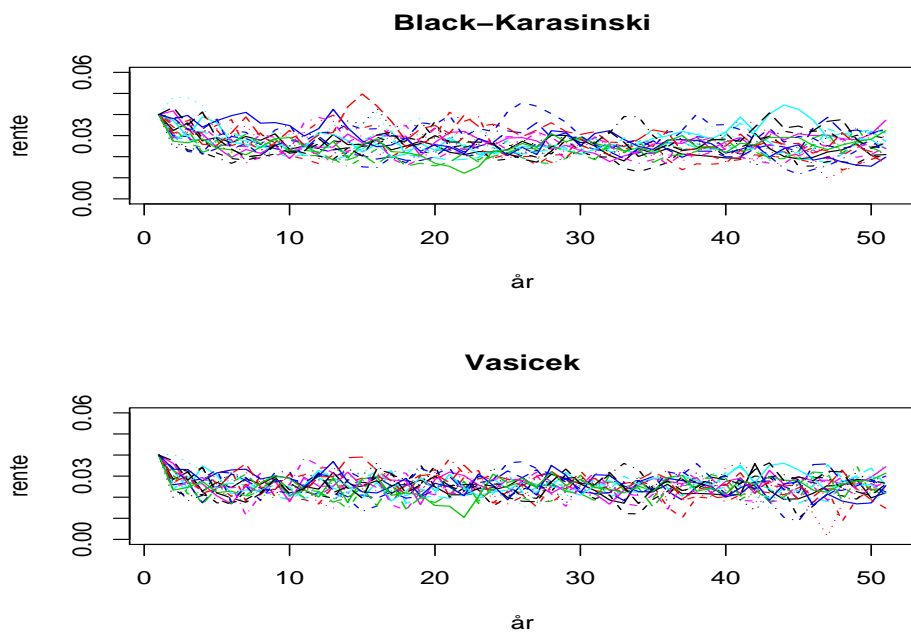
Tabell 2.1: *Parametere til rentemodellene*

2.3.3 Simuleringer av rentene

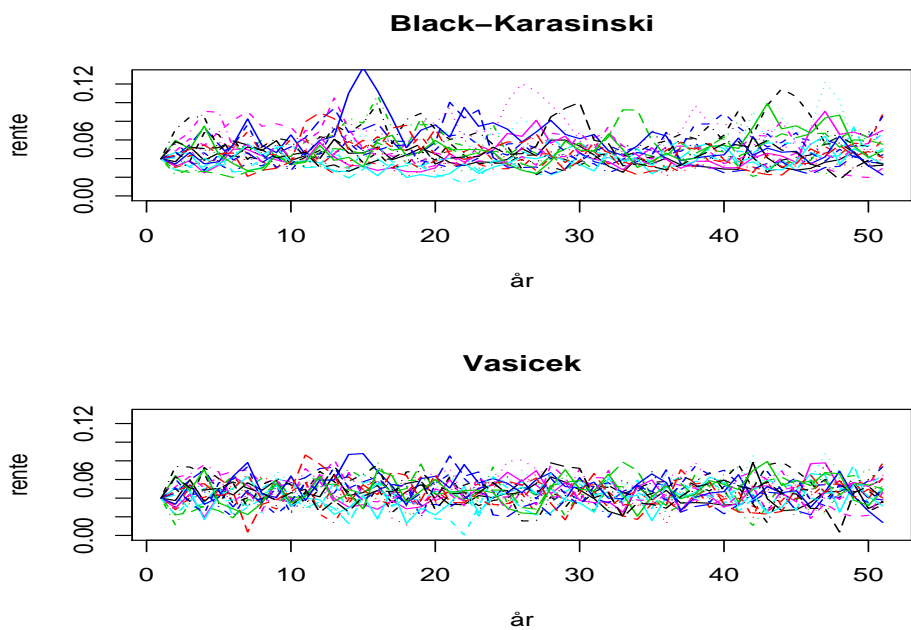
På neste side kan man se simuleringer av 25 forskjellige rentebaner over 50 år med parametere som i tabellen under. Disse parameterne kan man finne i Bølviken(n.d.). Jeg har valgt å fjerne alle simuleringene av både Vašiček og Black-Karasinski i de tilfellene renten under Vašiček blir negativ. Jeg simulerte 20000 ganger. Av disse beholdt jeg 10000 simuleringer der ingen av banene til Vašiček ble negative. Disse blir brukt i resten av oppgaven. Jeg beholdt selvfølgelig de samme rentebanene for Black-Karasinski-modellen. Her er det verdt å merke seg at Vašiček-renten ikke ble negativ i noen av simuleringene ved lavrente-scenariot, mens den under mediumrentescenariot ble negativ i ca 5% av simuleringene.

Som vi kan se av Figur 2.4 på neste side er rentekurvene under lavrentescenariot relativt like under begge modellene. Begge modellene "glemmer" fort startrenten og begynner å fluktuere rundt det langsiktige gjennomsnittet på 2.5%, noe som er som forventet ettersom vi har en relativt høy a -verdi. Forskjellen ligger i at de årene noen av simuleringene går mot 4-5% kan vi se at Black-Karasinski renten fluktuere sterkere. Dette er forventet ettersom jeg på forrige side viste at renten fluktuere sterkere ved høyere renter under Black-Karasinski-modellen. Det er også verdt å merke seg at renten ved dette scenariot fluktuere mindre enn ved mediumrentescenariot for begge rentemodellene. Dette er som forventet ut i fra parameterne, og det er også et punkt vi skal se gir utslag senere.

Under mediumrentescenariot illustrert i Figur 2.5, kan vi se at startverdien til renten "glemmes" fort for begge modellene. Dette samsvarer med det vi observerte under lavrentescenariot, og er som forventet ettersom vi har samme a -verdi ved begge rentescenariotene. I tillegg ser vi at det under dette scenariot er en betydelig forskjell i svingningene mellom Vašiček og Black-Karasinski-modellen. Vi kan for eksempel se at den ene simuleringen (blå linje, ca 15år ut) gir Vašiček en rente på ca 8%, mens Black-Karasinski gir en rente på ca 12%, en forskjell på 50%! Dette bekrefter at renten fluktuere mye sterkere ved høye renter Black-Karasinski-modellen.



Figur 2.1: Simulering av 25 rentebaner under lavrentescenariet



Figur 2.2: Simulering av 25 rentebaner under mediumrentescenariet

Kapittel 3

Stokastisk dødelighet

3.1 Krav til en god stokastisk dødelighetsmodell

For å prise dødelighetsderivater trenger man en måte å modellere dødeligheten stokastisk. I tillegg må trenge jeg å finne en måte å modellere dødeligheten slik at jeg fikk tatt med eventuelle korrelasjoner mellom kjønnene. En god stokastisk modell bør ifølge Cairns *et al.*(2005) oppfylle de fleste av disse kriteriene:

- Modellen bør holde dødelighetsintensiteten positiv.
- Den bør kunne tilpasses historiske data.
- Dynamikken i det lange løp bør være biologisk fornuftig (man kan for eksempel ikke ha modeller der dødelighetsratene for de eldre faller med årene).
- Avvik fra forventningen i dødelighetsforbedringene i det lange løp bør ikke være *mean-reverting* til et forhåndsbestemt nivå. Dette gjelder selv om dette forhåndsbestemte nivået er tidsavhengig og inkluderer dødelighetsforbedringer.
- I det korte løp vil vi at modellen skal være *mean-reverting* til en langsiktig trend. Man kan se for seg at det skjer en naturkatastrofe som drar opp dødeligheten på kort sikt, men som ikke vil ha noen innvirkning på den langsiktige trenden.
- Modellen bør gi mulighet til å prise de vanligste dødelighetsderivatene ved å bruke analytiske eller numeriske metoder. Her er det viktig å påpeke at man ikke bør la dette kriteriet overstyre de andre, man skal for eksempel ikke droppe en av de andre kriteriene bare for å få en enkel analytisk løsning.

I denne oppgaven skal jeg ta for meg ideen foreslått i Cairns *et al.*(2006). Der konsturerer forfatterne en stokastisk dødelighetsmodell ved å anta at parameterne i Perks-modellen som introdusert i kapittel 2.1.1 følger en to-dimensjonal tilfeldig gang. Mer spesifikt foreslår forfatterne av den artikkelen følgende:

$$\Theta(t+1) = \Theta(t) + \mathcal{M} + \mathbf{X}(t) \quad (3.1)$$

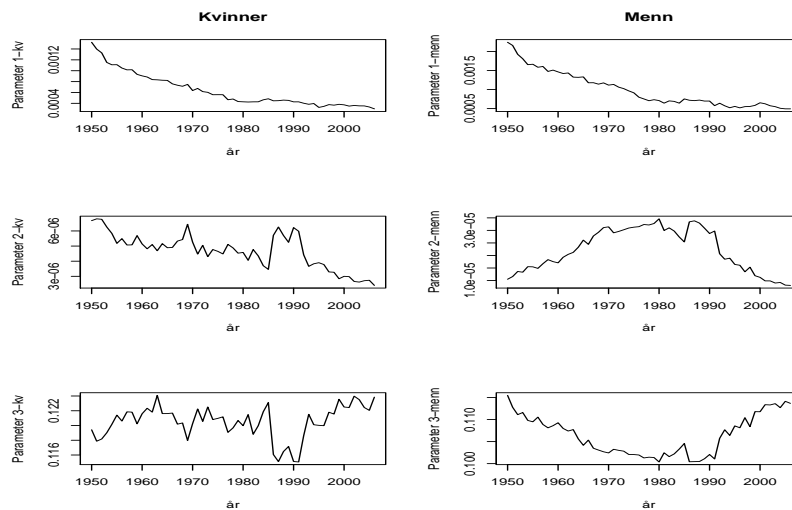
Dimensjonen til $\Theta(t)$ kommer til å avhenge av antall parametere i modellen. Her kommer $\Theta(t)$ lik $(\ln\theta_1(t), \ln\theta_2(t), \ln\theta_3(t))$ og $(\theta_1(t), \theta_2(t))$ for henholdsvis Gompertz-Makeham og Perks-modellen¹.

¹Mer spesifikt skal jeg altså simulere parameterne under Gompertz-Makeham ved hjelp av en geometrisk tilfeldig gang, ettersom θ_0 ikke kan bli negativ.

\mathcal{M} er en konstant 3×1 -vektor for Gompertz-Makeham og en konstant 2×1 -vektor for Perks-modellen. $\mathbf{X}(t) \sim N_n(0, \Sigma)$ der n betegner dimensjonen og er lik tre og to for henholdsvis Gompertz-Makeham og Perks-modellen. Videre antas det at $\mathbf{X}(t)$ er uavhengig av $\mathbf{X}(t+1)$ for hver t .² Disse dimensjonene gjelder under antagelsen at parameterne er innbyrdes korrelert for hvert kjønn, men at parameterne ikke er korrelert på tvers av kjønnene. For å få avhengighet mellom kjønnene skal jeg anta at det er korrelasjon mellom parameterne til kjønnene, noe som gjør at alle dimensjonene blir doblet. Altså blir $\Theta(t)$ lik $(\theta_1^k(t), \theta_2^k(t), \theta_1^m(t), \theta_2^m(t))$ for Perks-modellen og tilsvarende skjer under Gompertz-Makeham-modellen. Her kan det være på sin plass å nevne kovariansmatrisen Σ . I tilfellet der jeg modellerer kjønnene uavhengig kommer Σ for Perks-modellen til å være en 2×2 -matrise, mens den for Gompertz-Makeham kommer til å være en 3×3 -matrise. Når jeg tar med avhengighet mellom parameterne til kjønnene får vi en 4×4 -matrise for Perks, og en 6×6 -matrise for Gompertz-Makeham.

3.2 Korrelasjon mellom kjønnene

Før jeg angir estimatene mine av korrelasjonen mellom parameterne er det naturlig å se på de historiske estimatene av parameterne. I Figur 3.1 kan vi se de historiske estimatene av parameterne i

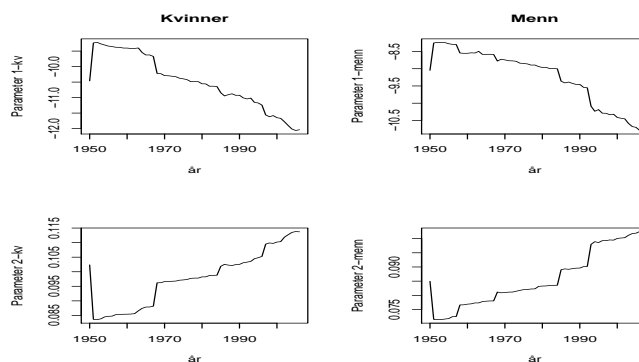


Figur 3.1: Historiske estimater av parameterne: Gompertz-Makeham

Gompertz-Makeham-modellen for begge kjønn fra 1950 til 2006. Som vi kan se det en synkende trend i utviklingen θ_0 for begge kjønn. Det er også verdt å merke seg at θ_1 og θ_2 utvikler seg motsatt av hverandre for begge kjønn, noe som tyder på negativ korrelasjon (dette blir bekreftet i Tabell 3.1).

Når det gjelder de historiske estimatene av parameterne til Perks ser vi for det første at grafen på Figur 3.2 har lignende form som grafen av estimatene for britiske menn basert på data fra 1961 til 2002 i Cairns *et al.* (2006). Dette inkluderer det kraftige hoppet i begge parametre for de to første årene (altså dukker hoppet også opp fra 1961 til 1962 i Cairns *et al.* (2006)). Den andre tingen vi kan legge merke til er at det er en klar trend for begge kjønn. Den synkende kurven i θ_1 reflekterer den generelle forbedringen i dødelighet over tid for alle aldre. Den stigende trenden i θ_2 tyder på at det

²Det vises i Bliksrud(2009) at uavhengighets- og normalitetsantagelsen er fornuftige.



Figur 3.2: Historiske estimater av parameterne:Perks

har vært større forbedringer for høyere aldre. Vi ser også at forbedringen har vært større for menn ettersom kurven for menn har steget med større hastighet enn den for kvinner siden 1980. Denne siste observasjonen kan vi også se på Figur 3.3 på side 14.

Ettersom denne oppgavens formål er å analysere hvordan prisene på dødelighetsobligasjoner påvirkes når vi antar avhengighet mellom kjønnene er det naturlig å angi korrelasjonen. Som tidligere nevnt er ideen bak å anta at de årlige forandringene i parameterne følger en flerdimensjonal tilfeldig gang hentet fra artikkelen Cairns *et al.* (2006) (se ligning (3.1)). Derfor er det naturlig å angi korrelasjonene til forandringene i parameterne i hver modell, for å få en viss innsikt i hvordan disse forandringene påvirker hverandre på tvers av kjønn. Det er intuitivt at forandringene i parameterne for et kjønn innen hver modell må være korrelert. Det er ikke like intuitivt at parameterneforandringene er korrelert på tvers av kjønnene, men vi skal av i de påfølgende avsnittene se at for det settet med parametere jeg jobber med i denne oppgaven er korrelasjonen mellom kjønnene relativt sterk. Resultatene for begge modellene presenteres i tabeller på neste side.

Korrelasjon Gompertz-Makeham

Korrelasjonene i Tabell 3.3 er de samme som de som ble publisert i Blikrud(2009). Dette er naturlig ettersom jeg jobber med samme parametersett. Av tabellen kan vi se at det er en betydelig korrelasjon mellom parameterforandringene på logskala i parameterne for kvinner og menn³. Det første vi legger merke til er at forandringene i θ_0 -parameteren for begge kjønn er lite korrelert med de andre parameterne. Dette virker plausibelt ettersom vi vet at θ_0 -parameteren er en aldersuavhengig konstant. Når det gjelder forandringene i θ_1 -parameterene ser vi først at de er positivt korrelert med θ_1 -parameterne for både det samme og det motsatt kjønn. Vi ser også at θ_1 -parameterene er negativt korrelert med θ_2 -parameterene, noe som er naturlig når vi ser på Figur 3.1. I tillegg ser vi naturlig nok at korrelasjonen mellom parameterne er høyest innad i kjønnene, for eksempel er korrelasjonen mellom $\log\Delta\theta_1^{kv}$ og $\log\Delta\theta_2^{kv}$ -0.976. Til sammenligning er korrelasjonen mellom $\log\Delta\theta_1^{kv}$ og $\log\Delta\theta_2^{menn}$ -0.558, som til tross for å være lavere i absoluttverdi viser at det er en betydelig korrelasjon mellom kjønnene.

³Ettersom jeg simulerer parameterne ved hjelp av en geometrisk tilfeldig gang

Gompertz-Makeham						
Parameter	$\log \Delta \theta_0^{kv}$	$\log \Delta \theta_1^{kv}$	$\log \Delta \theta_2^{kv}$	$\log \Delta \theta_0^m$	$\log \Delta \theta_1^m$	$\log \Delta \theta_2^m$
$\log \Delta \theta_0^{kv}$	1.000	-0.199	0.183	0.043	-0.074	0.064
$\log \Delta \theta_1^{kv}$	-0.199	1.000	-0.976	-0.017	0.522	-0.558
$\log \Delta \theta_2^{kv}$	0.183	-0.976	1.000	0.025	-0.521	0.603
$\log \Delta \theta_0^m$	0.043	-0.017	0.025	1.000	-0.297	0.262
$\log \Delta \theta_1^m$	-0.074	0.522	-0.521	-0.297	1.000	-0.958
$\log \Delta \theta_2^m$	0.064	-0.558	0.603	0.262	-0.958	1.000

Tabell 3.1: Korrelasjoner: Gompertz-Makeham

Perks				
Parameter	$\Delta \theta_1^{kv}$	$\Delta \theta_2^{kv}$	$\Delta \theta_1^m$	$\Delta \theta_2^m$
$\Delta \theta_1^{kv}$	1.000	-0.988	0.755	-0.776
$\Delta \theta_2^{kv}$	-0.988	1.000	-0.769	0.809
$\Delta \theta_1^m$	0.755	-0.769	1.000	-0.982
$\Delta \theta_2^m$	-0.776	0.809	-0.982	1.000

Tabell 3.2: Korrelasjoner: Perks

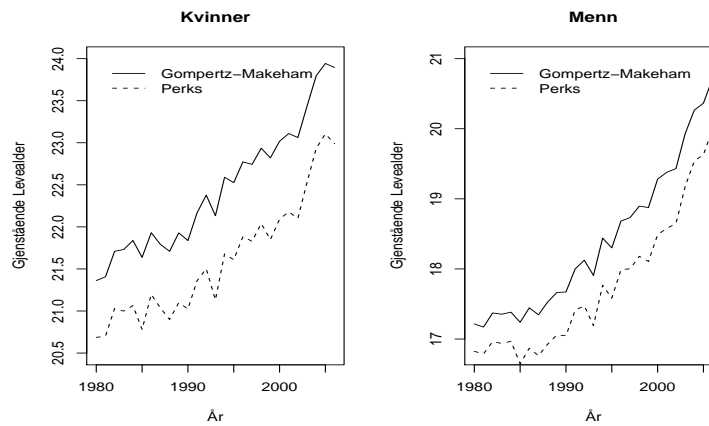
Korrelasjon Perks

I Blikrud(2009) er det også publisert korrelasjoner for Perks-modellen, men disse samsvarer ikke med de som er publisert i denne oppgaven. Grunnen er at i Blikrud(2009) blir det sett på forandringer i parameterne fra 1951 og utover, mens vi i denne oppgaven ser på forandringer fra 1950 og utover⁴. Når det gjelder korrelasjonene ser vi at det for denne modellen er høye korrelasjoner for forandringene i alle parameterne. Av Tabell 3.4 kan vi se at den laveste korrelasjonen i absoluttverdi er korrelasjonen mellom $\Delta \theta_1^{kv}$ og $\Delta \theta_1^m$. Den er på 0.755, noe som kan sies å være en relativt sterke korrelasjon. Vi ser også at korrelasjonen mellom $\Delta \theta_1^{kv}$ og $\Delta \theta_2^m$ er på -0.776, noe som er en relativt sterk negativ korrelasjon. Dette samsvarer med det vi observerte på Figur 3.2 der vi ser at θ_1 -parameterene utvikler seg i motsatt retning av θ_2 -parameterene.

3.3 Utvikling i levealderen

Før jeg begynner å se på effekten av korrelasjonene på pensjonsporteføljer og to forskjellige dødelighetsobligasjoner er det naturlig å se på utviklingen av levealderen de siste tiårene og hvordan dødelighetsmodellene predikerer framtidig utvikling i forventet levealder. Figur 3.3 viser at forventet antall gjenstående leveår for 60-årige kvinner og menn har økt henholdsvis to og et halvt og tre og et halvt år de siste 25 årene. Som nevnt i innledningen gir dette en betydelig dødelighetsrisiko for livselskapene. En annen ting verdt å merke seg fra figuren er at vi ser at Perks-modellen mer eller mindre konsekvent gir ett år mindre enn Gompertz-Makeham-modellen for gjenstående forventet levealder for 60-årige kvinner. Når det gjelder gjenstående forventet levealder for 60-årige menn, ser vi at forskjellen mellom modellene ikke er like stor, men det interessante er å merke seg er at forskjellen stiger. Dette

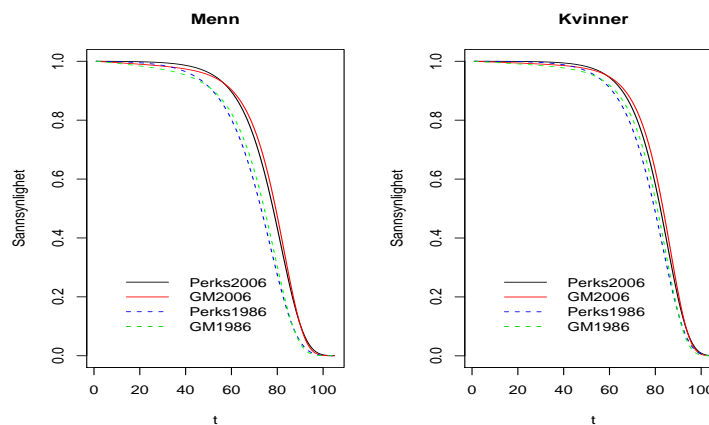
⁴Å ikke ta med Perks-parameterene fra 1950 reduserer korrelasjonen, se Tilegg D for dette samt simuleringene av en Longevity Bond i dette tilfellet.



Figur 3.3: Gjenstående levealder for en 60-åring

tyder på Gompertz-Makeham er mer fleksibel ovenfor forandringene for menn, noe som er naturlig ettersom den har en parameter mer.

Forskjellen i stigning mellom kjønnene støttes i Figur 3.4. Vi kan her se at sannsynligheten for at en nyfødt gutt skal bli t år gammel er en betydelig høyere i 2006 enn i 1986 under begge modellene. For kvinner derimot er stigningen heller liten. Man kan dermed tolke at det har kommet forbedringer for menn i høyere aldre, ettersom sannsynligheten for å leve lenger er større. Det er også interessant å legge merke til at sannsynlighetene for Perks ligger litt under Gompertz-Makeham sannsynlighetene for personer over 60 år av begge kjønn både i 1986 og 2006.

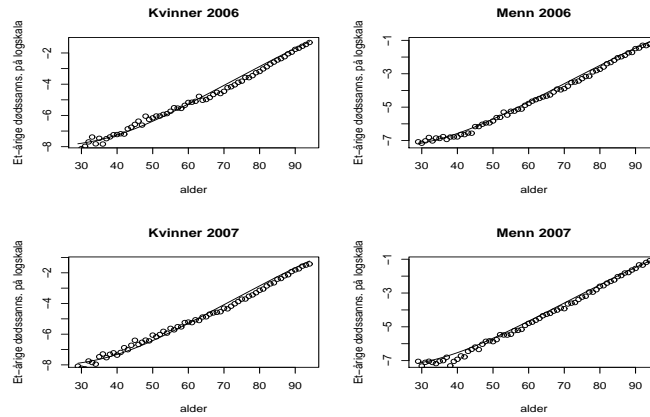


Figur 3.4: Sannsynligheten for at en 0-åring blir t år gammel i 1986 og 2006 for begge modeller og kjønn

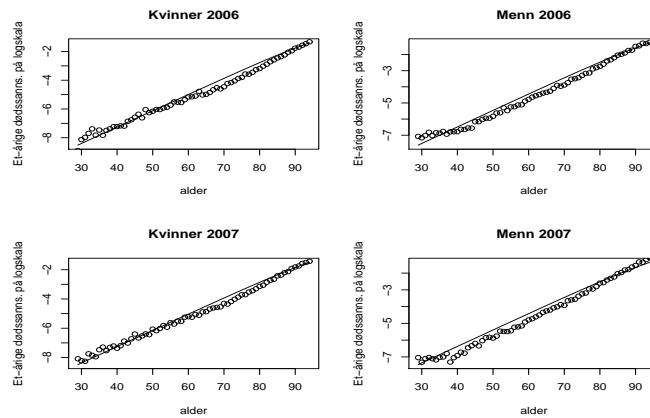
Modellenes tilpasning mot registrerte data

For å se om forskjellen kan komme av at en av modellene tilpasser dataene dårligere vil det være naturlig å plote ett-årige dødssannsynligheter fra modellene mot de observerte dataene som man kan finne på Human Mortality Database (www.mortality.org). Ettersom parameterne er estimert fra

historiske data mellom 1950 og 2006 er det også interessant å se hvordan simuleringene ett år frem tilpasser seg faktiske data som ble publisert på Human Mortality Database for 2007. Resultatene av tilpasningen for begge modellene for årene 2006 (fra estimerte parametere) og 2007 (basert på snittet til 10000 simulerte 2007-parametere for begge modellene) på logskala kan vi se under i Figur 3.4 og 3.5. Som vi kan se tilpasser de simulerte dataene til 2007 mer eller mindre like bra som



Figur 3.5: Tilpasning for Gompertz-Makeham, der punkter er observerte data



Figur 3.6: Tilpasning for Perks, der punkter er observerte data

dataene for 2006 for begge modellene, noe som betyr at simuleringrutinene simulerer riktige tall (i hvertfall på kort sikt). Det er interessant å merke seg at Gompertz-Makeham ser ut til å tilpasse litt bedre enn Perks-modellen for begge kjønn og år. Dette er som forventet ettersom Perks-modellen som tidligere nevnt ble foreslått for å tilpasse høyere aldre, mens parametersettet her er estimert for hele befolkningen. I Cairns *et al.*(2006) tilpasses parameterne for menn over 60, og da ser man at tilpasningen av registrerte dødsdata for menn over 60 år mot tall estimerte gitt ved Perks-modellen ser mye bedre ut. I denne oppgaven forholder jeg meg uansett til det gitte settet av parametere.

GOMPERTZ-MAKEHAM				
	Menn		Kvinner	
År	Forventet levealder	95% Konf.Int.	Forventet levealder	95% Konf.Int.
2006	76.5	-	81.0	-
2016	77.3	(75.5,79.0)	82.0	(80.5,83.5)
2026	78.0	(75.6,80.5)	83.1	(80.8,85.3)
2036	78.8	(75.8,81.8)	84.1	(81.2,87.0)
2046	79.6	(76.0,83.1)	85.1	(81.6,88.6)
2056	80.2	(76.2,84.3)	86.0	(81.9,90.1)
PERKS				
2006	76.2	-	80.4	-
2016	77.1	(75.2,79.1)	81.5	(79.4,83.6)
2026	78.0	(75.3,80.7)	82.7	(79.7,85.7)
2036	78.7	(75.4,82.3)	83.8	(80.2,87.4)
2046	79.4	(75.6,83.7)	84.8	(80.3,89.3)
2056	80.2	(75.7,85.0)	85.7	(80.5,91.1)

Tabell 3.3: Forventet levealder under Gompertz-Makeham og Perks-modellen

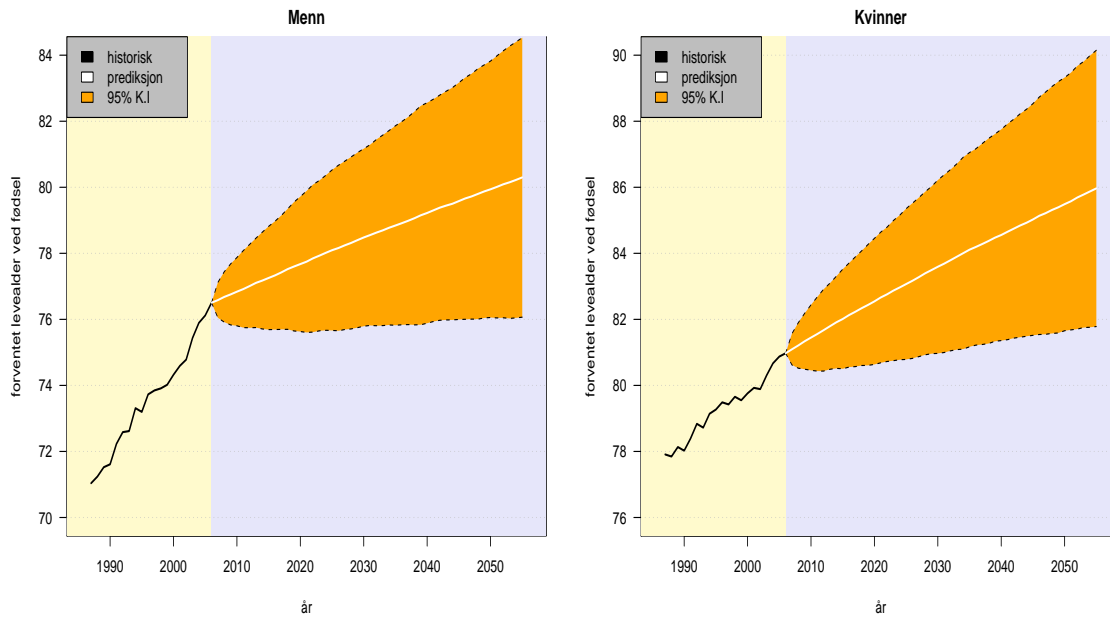
Forventet levealder

Som nevnt i innledningskapittelet og vist i Figur 1.1 har den forventede levealderen steget for både kvinner og menn de siste tiårene som følge av bedre levevilkår. Derfor er det naturlig å se på hvordan våre to modeller predikerer utviklingen i forventet levealder de neste 50 årene. Jeg velger her å presentere mine resultater i tabellen over, samt ved figurene på side 18.

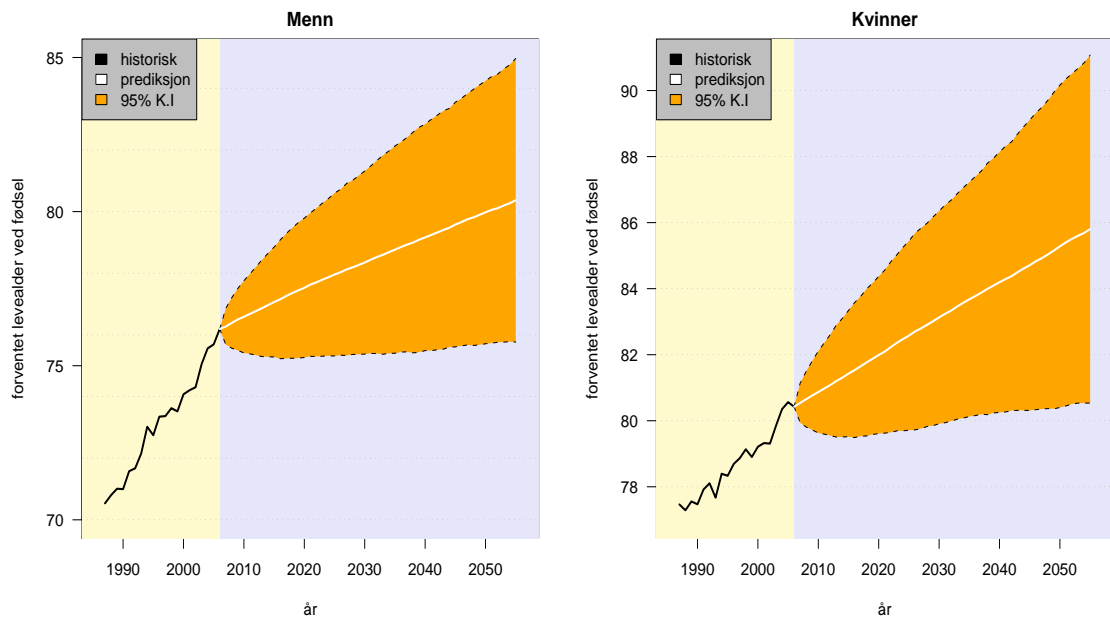
Det første vi ser er at begge modellene predikerer mer eller mindre samme forventet levealder, selv om den forventede levealderen ofte er litt lavere under Perks. Vi ser at begge modellene predikerer en økning i forventet levealder på ca 4 år for menn og 5 år for kvinner. Disse tallene virker fornuftige ut i fra det historiske materialet parametrene er estimert med hensyn på, og som også gir grunnlaget for prediksjonene. Vi ser også at konfidensintervallene blir større desto lenger frem i tid vi kommer, noe som er helt naturlig ettersom usikkerheten i predikeringene blir større. Det er interessant å merke seg at konfidensintervallene er litt bredere under Perks, noe som kommer av den ekstra usikkerheten som følger av at 1950-parametere er med. I tillegg D viser jeg at konfidensintervallene under Perks blir mindre uten 1950-parametrene.

Av figurene for begge modellene på side 18 ser vi at kvinner har hatt en jevn stigning, og at denne fortsetter i mine prediksjoner. For menn derimot ser vi at stigningen flater ut i forhold til det den har vært de siste 25 årene, noe som er naturlig ettersom mine simuleringer er basert på parametere estimert ved hjelp av historisk materiale fra 1950 til 2006.

Man kan selvfølgelig diskutere om det er riktig å basere fremtidig simulering av parametere for menn på de gitt dataene, eller om det hadde vært bedre å la de historiske estimatene for menn være basert på de siste 25 årenes stigning. I denne oppgaven velger jeg likevel å ha mest mulig historiske data fordi min oppfatning er at et større historisk materiale fanger forskjellige trender i dødeligheten på en mer tilfredstillende måte enn hvis vi bare ser på utviklingen de siste 25 årene.



Figur 3.7: Forventet levealder under Gompertz-Makeham-modellen fra 1986 til 2056, der tallene etter 2006 er prediksjoner



Figur 3.8: Forventet levealder under Perks-modellen fra 1986 til 2056, der tallene etter 2006 er prediksjoner

Kapittel 4

Dødelighetsobligasjoner

For å immunisere seg mot diverse risikoer er det vanlig for selskaper å kjøpe derivater, gjerne opsjoner eller obligasjoner. Ved å velge rett opsjon eller obligasjon kan man sikre seg mot det man tror kan bli et problem i framtiden. Hvis man for eksempel frykter høy rente vil det være aktuelt å kjøpe ”caplets”, mens det vil være naturlig å kjøpe ”floorlets” hvis man frykter det motsatte, se for eksempel Bølviken(n.d.). For livselskap er en naturlig frykt at man må betale ut mer penger enn man opprinnelig satte av som følge av forbedring i dødelighet. Derfor ville det vært naturlig å prøve å finne en måte å immunisere seg mot dødelighetsrisiko. Forskningsartikler de siste årene har foreslått dødelighetsderivater, det vil si verdipapirer hvis utbetaling avhenger av fremtidig utvikling i dødelighet.

Jeg skal i denne oppgaven se på to forskjellige dødelighetsderivater, begge en type obligasjoner. Den første heter Nullkupong Longevity Bond, og utbetaler ved forfallstidspunktet en sum avtalt ved kjøpet. En Nullkupong Longevity Bond vil kunne brukes til å immunisere porteføljen mot rente- og dødelighetsrisiko. Den andre kalles Longevity Bond¹, og er en obligasjon som utbetaler en kupong proporsjonal med antall overlevende i et kull. En Longevity Bond kan brukes til å immunisere porteføljen mot dødelighetsrisiko. I tillegg kommer jeg til å se på to pensjonsporteføljer dominert av personer i forskjellige aldre. Jeg kommer til å oppgi resultatene av simuleringene disse derivatene og pensjonsporteføljene, der jeg skal først og fremst skal fokusere på hvilket utslag i risikoen korrelasjon mellom kjønnene gir. Resultatene i dette kapittelet er dedusert av 10000 simuleringer.

4.1 Pensjonsporteføljer ved korrelasjon

Etttersom det er pensjonsporteføljene som skal immuniseres mot dødelighetsrisiko, er det naturlig å se på hvilken påvirkning korrelasjon mellom kjønnene gir på disse. Pensjonsporteføljen jeg skal se på er hentet fra Bølviken(n.d.) og er definert som følger:

$$\mathcal{X}_t = -\pi \sum_{l=x}^{l_r-t-1} N_l \cdot {}_t p_l + s \sum_{l=l_r-t}^{l_e-t} N_l \cdot {}_t p_l \quad (4.1)$$

Under følger en forklaring av hver variabel:

- \mathcal{X}_t er forpliktelsene i år t .
- N_l er antall folk i alder l som plottet i figur 4.1.

¹I visse artikler referes denne obligasjonen til som Survivor Bond.

- π er premien hver person betaler inn bestemt ved ekvivalensprinsippet²
- l_r er pensjonsalderen
- s er pensjonen hver person får utbetalt
- l_e er maksimumsalderen

Ettersom oppgavens formål er å se på hvilken risiko avhengighet mellom kjønnene representerer vil det holde å se på en forenklet pensjonportefølje. Jeg kommer derfor til anta at $s = 1$ (som utbetales forskuddsvis) og at $\pi = 0$. Pensjonsalderen i Norge er 67 år, noe som gir $l_r = 67$. I denne oppgaven skal jeg se på nåverdien av pensjonporteføljene. Ettersom jeg kommer til å simulere parameterene i dødelighetsmodellene får vi en stokastisk utvikling av dødelighet. Derfor vil den forventede nåverdien til pensjonporteføljen til å være gitt ved:

$$PV_i = E\left[\sum_{t=0}^T d_t \mathcal{X}_t^i\right], \quad i = 1, 2 \quad (4.2)$$

i betegner her hvilken personsportefølje vi ser på, mens d_t er neddiskonteringsfaktoren gitt ved:

$$d_t = \frac{1}{(1+r)^t} \quad \text{teknisk rente} \quad d_t = \prod_{k=1}^t \frac{1}{1+r_k} \quad \text{stokastisk rente}$$

Her er det selvfølgelig en unik d_t for hver simulering under de stokastiske rentemodellene. Jeg kommer i denne oppgaven til å la $T = 50$. Her er det slik at $t = 0$ er 2006.

For å se på hvordan avhengigheten mellom kjønnene spiller inn på pensjonsporteføljer kommer jeg til å se på to porteføljer av personer og i tillegg gjøre den forenkende antagelsen at det er halvparten av hvert kjønn i hver personportefølje. Personporteføljene er definert som følger³:

$$\text{Personportefølje 1: } N_x^1 = c_1 e^{-0.05|x-40|}, \quad x = 30, \dots, 89$$

$$\text{Personportefølje 2: } N_x^2 = c_2 e^{-0.05|x-60|}, \quad x = 30, \dots, 89$$

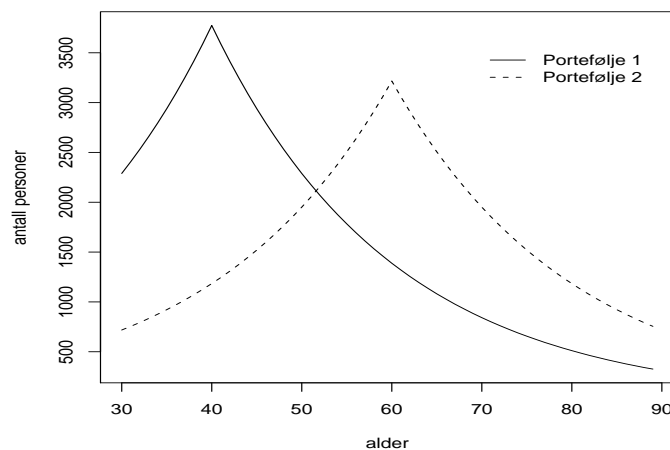
I Personportefølje 1 der den hyppigst forekommende alderen er 40, mens den hyppigst forekommende alderen i Personportefølje 2 er 60. Hvis vi lar \mathcal{J} være antall personer bestemmes konstantene c_1 og c_2 på følgende måte:

$$c_i = \frac{\mathcal{J}}{\sum_{x=30}^{89} N_x^i}$$

der i angir hvilken personportefølje vi ser på. I denne oppgaven skal jeg la $\mathcal{J} = 100000$. Ved hjelp av aldersfordelingen i disse to personporteføljene vil jeg se om korrelasjonen mellom kjønnene gir forskjellig risiko for pensjonporteføljer med en overvekt av visse aldre, og for hvilken pensjonportefølje den eventuelt gir mest risiko. Fordelingen i personporteføljene er illustrert i Figur 4.1 på øverst på neste side.

² π er løsningen av ligningen $\pi \sum_{t=0}^{l_r-x-1} d^t \cdot {}_t p_x = s \sum_{t=l_r-x}^{l_e-x} d^t \cdot {}_t p_l$, der $d = 1/(1+r)$ er neddiskonteringsfaktoren

³Denne definisjonen kan finnes på <http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/STK4520/h08/undervisningsmateriale/e3.pdf> i Exercise 3.1



Figur 4.1: Personsporteføljene

4.1.1 Resultater Gompertz-Makeham

Jeg tar her for meg tilfellene med teknisk rente og stokastisk rente gitt ved Vašiček og Black-Karasinski-modellene. Resultatene kommer til å bli representert i tabeller, og illustrert ved tetthetsplott.

Resultater: Personsportefølje I

I Tabell 4.1 på neste side kan man se resultatene for nåverdien av pensjonsporteføljen. Som forventet er nåverdien av porteføljen en god del mindre ved mediumrentescenariet enn ved lavrentescenariet, noe som er intuitivt hvis man ser på relasjon (4.2). Det første av interesse man kan lese fra Tabell 4.1 er at det er forskjell i forventet nåverdi mellom teknisk rente og de to stokastiske rentemodellene, til tross for at rentemodellene er konstruert slik at de skal ha forventning lik den tekniske renten. Denne forskjellen kan vi se er større ved mediumrentescenariet, noe som er naturlig ettersom parameterne til rentemodellene er slik at renten fluktuerer mer under dette scenariet.

Den andre tingen som er viktig å merke seg at forventet nåverdi er mer eller mindre lik for simuleringene uten og med avhengighet. Dette kommer av at dødelighetsmodelleringen er konstruert på en måte slik at forventningen, og dermed nåverdien vil være tilnærmet lik for modelleringen uten og med avhengighet mellom kjønnene. Standardavviket derimot kommer til å bli større med avhengighet mellom kjønnene. Reservene til pensjonsporteføljer vil ikke bare avhenge av forventet nåverdi, men også av standardavviket ettersom livselskapet gjerne vil sikre seg mot mest mulig av risikoen. Derfor skal jeg fokusere på forskjellen mellom standardavvikene uten og med avhengighet mellom kjønnene. Vi kan observere følgende fra Tabell 4.1 på neste side:

- Standardavviket er betydelig større ved stokastiske rente, og det er størst relativt sett under mediumrentescenariet. Dette er som forventet ettersom stokastiske fluktuasjoner i renter påfører større usikkerheten. En annen interessant ting å merke seg er at standardavviket under Black-Karasinski renten er betydelig større enn det tilsvarende under Vašiček-renten. Under antagelsen at Black-Karasinski-modellen er bedre (noe jeg argumenterer for i rentekapitlet) er det viktig å få med seg hvor mye mer risiko man er utsatt for hvis man bruker "feil" rentemodell uten å

GOMPERTZ-MAKEHAM			
Lav rente			
Rentetype	PV₁	sd(PV₁)	sd(PV₁m.avh.)/sd(PV₁u.avh.)
Teknisk u. avh.	738977.6	33176.0	-
Teknisk m. avh.	738089.7	44156.6	1.33
Vašiček u. avh.	745258.1	39240.5	-
Vašiček m. avh.	744359.6	49149.6	1.25
Black-Kar. u. avh.	745368.3	47966.4	-
Black-Kar. m. avh.	744481.6	56428.1	1.18
Medium rente			
Rentetype	PV₁	sd(PV₁)	sd(PV₁m.avh.)/sd(PV₁u.avh.)
Teknisk u. avh.	481477.8	18074.2	-
Teknisk m. avh.	480984.2	24038.7	1.33
Vašiček u. avh.	510989.5	40913.8	-
Vašiček m. avh.	510397.3	44506.8	1.08
Black-Kar. u. avh.	512470.8	56727.4	-
Black-Kar. m. avh.	511888.8	59502.4	1.04

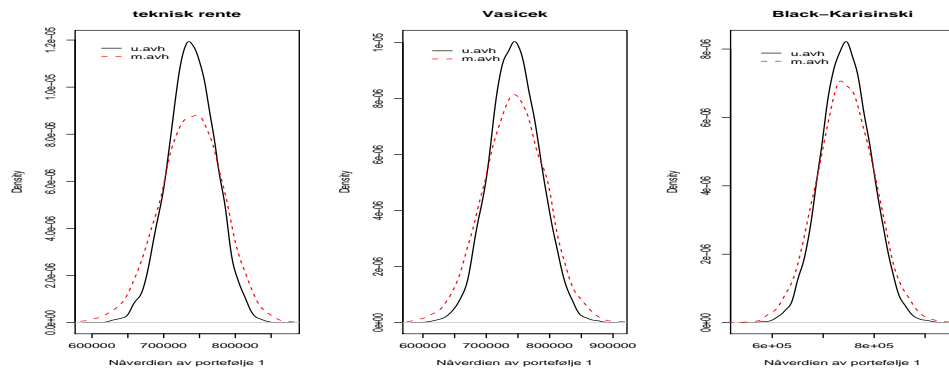
Tabell 4.1: Resultater Pensjonsportefølje I under Gompertz-Makeham modellen. NB! Her mener jeg avhengighet mellom kjønnene der jeg har skrevet m. avh og u. avh. under rentetype. Dette gjelder de resterende tabellene i oppgaven.

være klar over det.

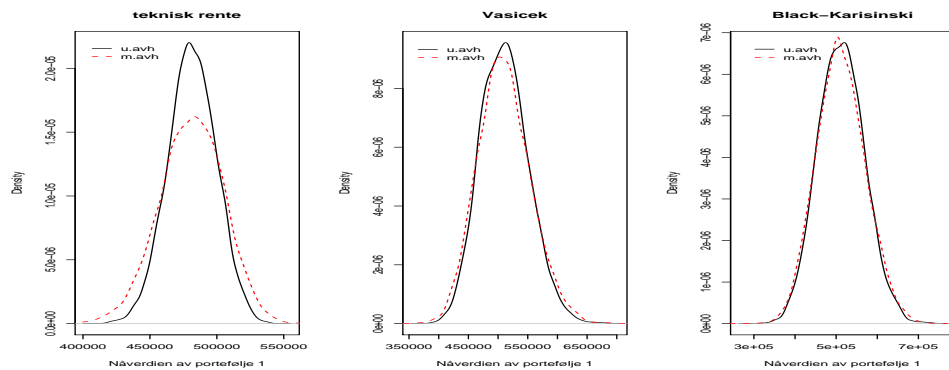
- Det er et betydelig større standardavvik uansett rentetype når vi tar med avhengighet mellom kjønnene. Denne forskjellen er størst ved teknisk rente (uansett rentescenario), og gir hele 33% større stadardavvik! Dette er naturlig ettersom renten her er konstant, som gjør at risikoen som følge av korrelasjonen mellom kjønnene ikke blir utjevnet av den ekstra renteusikkerheten.
- En annen interessant ting er at standardavviket når vi tar med avhengighet mellom kjønnene er større ved Vašiček-renten enn ved Black-Karasinski-renten. Dette er som forventet ettersom vi vet at renten fluktuerer mer ved større renter under Black-Karasinski-modellen.
- Vi ser også at stokastisk rente fjerner en del av usikkerheten som kommer av korrelasjonen mellom kjønnene, men at den usikkerheten til og med ved mediumrentescenariet er tilstede. Man kan kanskje tenke at 4% (resultatet under Black-Karasinski-modellen) ikke er så mye, men her må man etter min mening ta i betraktning de store summene livselskap opererer med. Da kan 4-5% være en betydelig sum penger. Likevel er det påfallende hvor mye mer usikkerhet kommer som følge av fluktuasjonene i renten i forhold til usikkerheten som følge av avhengigheten mellom kjønnene.

På Figur 4.2 og 4.3 kan vi se tetthetsplottene av nåverdien av Pensjonsportefølje I under henholdsvis lav- og mediumrentescenariet⁴. Det første vi legger merke til er at nåverdien er tilnærmet normalfordelt uansett rentescenario når vi ikke modellerer med avhengighet mellom kjønnene. Tetthetsplot-

⁴Ettersom alle tetthetsplottene er resultatet av 10000 simuleringer vil de ikke presentere en helt riktig fordeling. Jeg mener likevel at antallet simuleringer holder til at tetthetsplottene oppgitt i denne oppgaven vil gi et godt bilde av hvordan den faktiske fordelingen vil se ut.



Figur 4.2: Tetthetsplot av nåverdien til portefølje 1 under lavrentescenariet ved Gompertz-Makeham



Figur 4.3: Tetthetsplot av nåverdien til portefølje 1 under medium rentescenariet ved Gompertz-Makeham

tene for nåverdien når avhengigheten mellom kjønnene er tatt varierer derimot mer under de forskjellige rentescenariene og rentemodellene. Under teknisk rente ser vi at tettheten er mer tunghalet og kan minne om en t-fordeling med et par frihetsgrader under begge rentescenariene⁵. Ser vi derimot på tettheten under de stokastiske rentemodellene, ser vi som forventet at graden av haletyngde forsvinner delvis for begge modellene under lavrentescenariet. Det er naturlig at haletyngden forsvinner delvis ettersom svingningene i renten utjevner en del av risikoen som følge av korrelasjonen. Ettersom svingningene under lavrentescenariet ikke er like kraftige som under mediumrentescenariet er det naturlig at mer av usikkerheten forsvinner under de stokastiske rentemodellene for mediumrentescenariet. For mediumrentescenariet virker det som om forskjellen mellom tetthetene for prisen uten og med avhengighet mellom kjønnene mer eller mindre forsvinner. Dette ser vi klart på under Black-Karasinski-renten, men differansen er også liten under Vašiček-renten for denne pensjonsporteføljen. Disse observasjonene stemmer godt med det vi så i Tabell 4.1.

Resultater: Pensjonsportefølje II

Som illustrert i Figur 4.1 er 60-åringer den aldersgruppen som dominerer i Pensjonsportefølje II. Derfor vil det være interessant å se hvordan denne pensjonsporteføljen kommer til å skille seg ut fra Pensjonsportefølje I som har overvekt av 40-åringer. Av Tabell 4.2 kan vi se at det er mange likheter

⁵Det er opplagt at usikkerheten som følge av korrelasjonen må være like stor under begge rentescenariene under teknisk rente, og kommer derfor ikke til å bli kommentert.

GOMPERTZ-MAKEHAM			
Lav rente			
Rente	PV₂	sd(PV₂)	sd(PV₂m.avh.)/sd(PV₂u.avh.)
Teknisk u. avh.	855368.8	36063.5	-
Teknisk m. avh.	854583.9	47895.6	1.33
Vašiček u. avh.	858987.9	39365.1	-
Vašiček m. avh.	858196.3	50634.0	1.28
Black-Kar. u. avh.	857288.0	44576.3	-
Black-Kar. m. avh.	856498.8	54841.0	1.23
Medium rente			
Rente	PV₂	sd(PV₂)	sd(PV₂m.avh.)/sd(PV₂u.avh.)
Teknisk u. avh.	643345.0	22482.4	-
Teknisk m. avh.	642874.8	29904.3	1.33
Vašiček u. avh.	663062.3	38142.3	-
Vašiček m. avh.	662539.4	43785.3	1.15
Black-Kar. u. avh.	664859.4	52389.0	-
Black-Kar. m. avh.	664361.8	56830.6	1.08

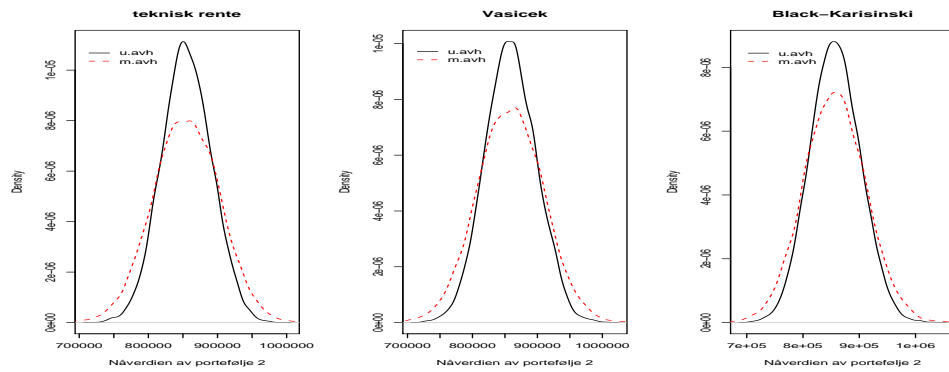
Tabell 4.2: Resultater Pensjonsportefølje II under Gompertz-Makeham modellen

med resultatene vi så i Tabell 4.1 for pensjonsportefølje I. Det første vi ser er at nåverdien av porteføljen er høyere. Dette er naturlig ettersom vi vet at flere folk når pensjonsalder i denne porteføljen, men også fordi utbetalingene når en topp tidligere som gjør nåverdien høyere. Vi ser at stokastisk rente også for denne alderssammensetningen gir et mye større standardavvik, og også at standardavviket er størst relativt sett under mediumrentescenariet.

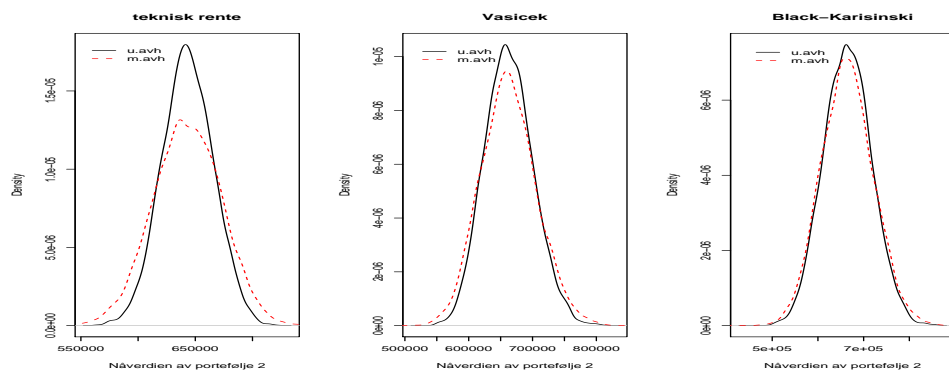
Det mest interessante for denne oppgaven er at selv om stokastisk rente under mediumrentescenariet fjerner en del av risikoen fra korrelasjonen mellom kjønnene, er denne usikkerheten større her enn for Pensjonsportefølje I under tilsvarende rentemodeller. For teknisk rente er tallene 1.33 for begge porteføljene. Hvis vi sammenligner tallene under Black-Karasinski-modellen ser vi at for Pensjonsportefølje I er standardavviket med avhengighet 1.04 ganger større enn standardavviket uten avhengighet. Dette tallet er 1.08 for Pensjonsportefølje II. For Vašiček-modellen er disse forholdene henholdsvis 1.08 og 1.15. En forklaring på dette kan være at flere personer begynner å dø fra 60 år og oppover som skaper en ekstra usikkerhet i forhold til pensjonsporteføljen dominert av 40-åringer. Grunnen er uansett utenfor denne oppgavens rekkevidde og kommer ikke til å bli diskutert videre. Det viktige å ta med seg fra disse resultatene er at pensjonsporteføljer med overvekt av personer nærme pensjonsalder er mer utsatt for risiko som følge av korrelasjoner mellom kjønnene enn pensjonsporteføljer der flertallet av personer er midt i livet.

I Figur 4.4 og 4.5 kan vi se tetthetsplottene av nåverdien av Pensjonsportefølje II under henholdsvis lav- og mediumrentescenariet. Det første vi legger merke til er at nåverdien akkurat som ved Pensjonsportefølje I er tilnærmet normalfordelt uansett rentescenario når vi ikke modellerer med avhengighet mellom kjønnene. Når vi modellerer med avhengighet mellom kjønnene kan vi under observere det samme som vi så for Pensjonsportefølje I:

- En del av haletyngden forsvinner under de stokastiske rentemodellene under lavrentescena-



Figur 4.4: Tetthetsplot av nåverdien til portefølje 2 under medium rentescenariot ved Gompertz-Makeham



Figur 4.5: Tetthetsplot av nåverdien til portefølje 2 under medium rentescenariot ved Gompertz-Makeham

riert, men det er fortsatt en betydelig forskjell mellom sannsynlighetstetthetene med og uten avhengighet mellom kjønnene.

- Under mediumrentescenariet ser vi derimot at forskjellene mellom sannsynlighetstetthetene er relativt liten under de stokastiske rentemodellene. Som forventet er forskjellen minst under Black-Karasinski-modellen.
- Under mediumrentescenariet later det til at vi får en tilnærmet normalfordeling for sannsynlighetstettheten med avhengighet under de stokastiske rentemodellene.

4.1.2 Resultater Perks

Jeg tar her for meg tilfellene med teknisk rente og stokastisk rente gitt ved Vašiček og Black-Karasinski-modellene. Resultatene kommer til å bli representert i tabeller, og illustrert ved tetthetsplott.

Resultater: Personsporfølje I

I Tabell 4.3 på neste side kan man se resultatene for nåverdien av pensjonsporteføljen. Resultatene for nåverdien av Pensjonsportefølje I under Perks-modellen samsvarer godt med resultatene vi fikk under Gompertz-Makeham-modellen som gitt i Tabell 4.1. Det er likevel verdt å merke seg at nåverdien er litt lavere her. Denne observasjonen samsvarer med det vi så i Figur 3.3, der vi kan observere

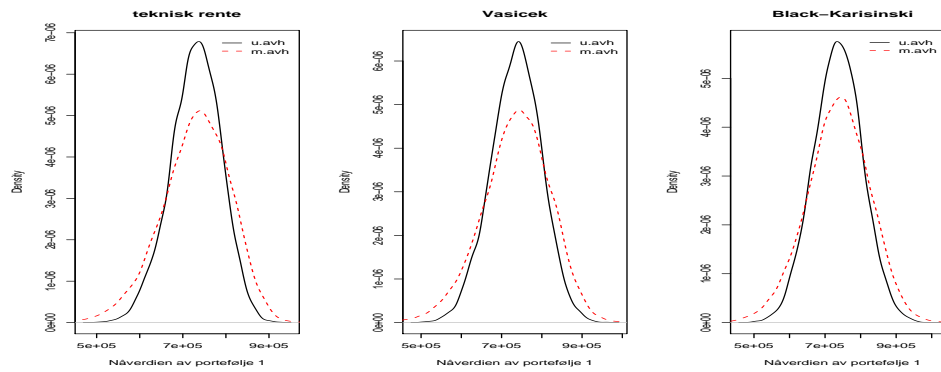
PERKS			
Lav rente			
Rente	PV₁	sd(PV₁)	sd(PV₁m.avh.)/sd(PV₁u.avh.)
Teknisk u. avh.	729696.7	58499.7	-
Teknisk m. avh.	729681.7	79690.9	1.36
Vašiček u. avh.	735976.8	62710.0	-
Vašiček m. avh.	735978.0	83482.0	1.33
Black-Kar. u. avh.	736112.2	68668.5	-
Black-Kar. m. avh.	736116.0	88218.6	1.28
Medium rente			
Rente	PV₁	sd(PV₁)	sd(PV₁m.avh.)/sd(PV₁u.avh.)
Teknisk u. avh.	474050.5	31951.9	-
Teknisk m. avh.	474089.4	43458.4	1.36
Vašiček u. avh.	503532.2	50411.6	-
Vašiček m. avh.	503470.0	60144.6	1.19
Black-Kar. u. avh.	504992.6	63887.3	-
Black-Kar. m. avh.	504931.6	72060.3	1.13

Tabell 4.3: Resultater Pensjonsportefølje I under Perks-modellen

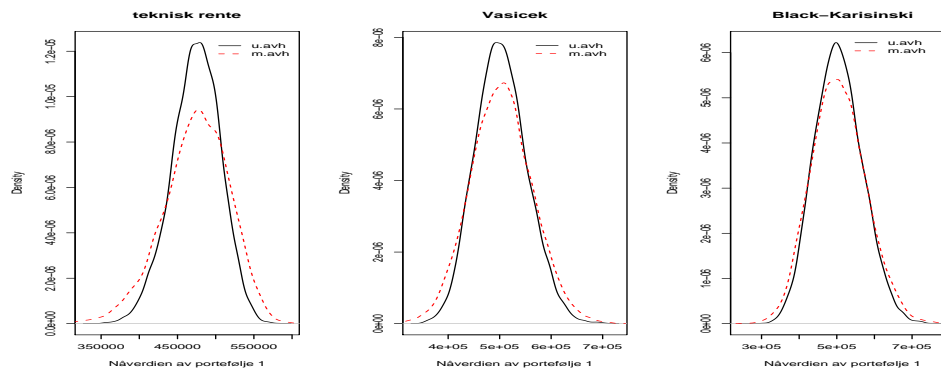
at Perks-modellen gir lavere gjenstående levealder for personer over 60 av begge kjønn. Dette må naturligvis føre til lavere nåverdi enn under Gompertz-Makeham. En annen ting verdt å merke seg er at standardavvikene under denne modellen er større enn under Gompertz-Makeham-modellen (uansett om vi ser på avhengighet mellom kjønnene eller ikke). Dette samsvarer med ting vi observerte i Tabell 3.3 og Figur 3.8, nemlig at konfidensintervallene (og dermed standardavviket) er større under Perks-modellen. Nok en gang kommer de mest interessante resultatene når vi ser på standardavvikene med og uten avhengighet:

- Vi ser at standardavviket med avhengighet er mye større enn standardavviket uten avhengighet uansett rentescenario.
- En annen viktig observasjon er at usikkerheten som følge av korrelasjonen er større under Perks-modellen uansett rentetype og scenario. Denne usikkerheten ser man spesielt ved mediumrentescenariot. Der man for Black-Karasinski-modellen under dette scenariet fikk at standardavviket med avhengighet var 1.04 ganger større enn det uten avhengighet, ser vi at dette forholdet nå er på 1.13. Under Vašiček-modellen ser vi at dette forholdet har økt fra 1.08 til 1.19.
- Denne økningen er ikke unaturlig ettersom vi i Tabell 3.2 så at det er sterkere korrelasjon mellom parameterne i Perks-modellen, enn i Gompertz-Makeham-modellen. Dette må igjen føre til denne korrelasjonen gir større usikkerhet i estimatene.
- Det er likevel påfallende at standardavviket uten avhengighet er dobbelt så stort under mediumrentescenariot under Black-Karasinski-modellen sammenlignet med teknisk rente. Det samme forholdet er nesten 1.7 med avhengighet mellom kjønnene. Renterisikoen er betydelig!

I Figur 4.6 og Figur 4.7 kan vi se tetthetsplottene av nåverdien til Pensjonsportefølje I under henholdsvis lav- og mediumrentescenariot. Her kan vi observere noe av det samme som for Pensjon-



Figur 4.6: Tetthetsplot av nåverdien til portefølje 1 under lavrentescenariot ved Perks



Figur 4.7: Tetthetsplot av nåverdien til portefølje 1 under medium rentescenariot ved Perks

sporfølje I under Gompertz-Makeham-modellen. Under lavrentescenariot forsvinner lite av haletyngden til tettheten som ettersom fluktuasjoene under lavrentescenariet ikke er sterke nok.

Under mediumrentescenariot derimot kan vi se en viss forskjell fra det vi observerte for Pensjonsportefølje I under Gompertz-Makeham-modellen. Vi kan se at haletyngden forsvinner i mindre grad under Perksmodellen under de stokastiske rentemodellene i tilfellet der jeg modellerte med avhengighet mellom kjønnene. Dette gjelder til og med under de sterkere fluktuasjoene som vi får under mediumrentescenariot med Black-Karasinski-modellen, selv om tetthetene er relativt like. Denne observasjonen samsvarer med det vi kan se i Tabell 4.3 i forhold til Tabell 4.1 og det vi observerte når vi så på korrelasjonene, nemlig at Perks-modellen med sine to parametere og det kraftige hoppet i parameterne fra 1950 til 1951 resulterer i større korrelasjoner mellom kjønnene.

Resultater: Pensjonsportefølje II

Som vi observerte tidligere ga Pensjonsportefølje II med sin overvekt av 60-åringer større usikkerhet som følge av korrelasjon mellom kjønnene enn Pensjonsportefølje I for Gompertz-Makeham-modellen. Av Tabell 4.4 på neste side kan vi se at dette er tilfellet under Perks-modellen også. Vi kan lese av tabellen at standardavviket med avhengighet er 1.36 og 1.33 ganger større enn standardavviket uten avhengighet for henholdsvis Vašiček- og Black-Karasinski-modellen under lavrentescenariet. Til sammenligning ser vi at de samme forholdene er 1.27 og 1.20 for mediumrentescenariet. Dette er en

PERKS			
Lav rente			
Rente	PV₂	sd(PV₂)	sd(PV₂m.avh.)/sd(PV₂u.avh.)
Teknisk u. avh.	845620.6	64802.7	-
Teknisk m. avh.	845945.9	89075.9	1.38
Vašiček u. avh.	849315.2	67225.1	-
Vašiček m. avh.	849662.0	91282.8	1.36
Black-Kar. u. avh.	847683.5	70538.3	-
Black-Kar. m. avh.	848029.0	93807.7	1.33
Medium rente			
Rente	PV₂	sd(PV₂)	sd(PV₂m.avh.)/sd(PV₂u.avh.)
Teknisk u. avh.	633914.4	40391.4	-
Teknisk m. avh.	634159.9	55459.2	1.37
Vašiček u. avh.	653870.1	52451.5	-
Vašiček m. avh.	654072.4	66517.6	1.27
Black-Kar. u. avh.	655644.6	63487.9	-
Black-Kar. m. avh.	655859.6	75873.5	1.20

Tabell 4.4: Resultater Pensjonsportefølje II under Perks-modellen

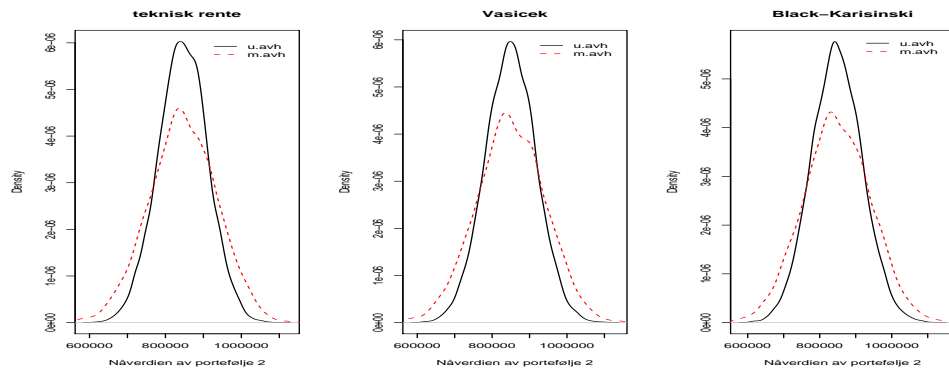
betydelig ekstra usikkerhet.

I Figur 4.8 og Figur 4.9 på side 29 kan vi se tetthetsplottene av nåverdien til Pensjonsportefølje II under henholdsvis lav- og mediumrentescenariet. Av disse kan vi dedusere at Pensjonsportefølje II under Perks-modellen gir den største ekstra usikkerheten som følge av korrelasjon mellom kjønnene.

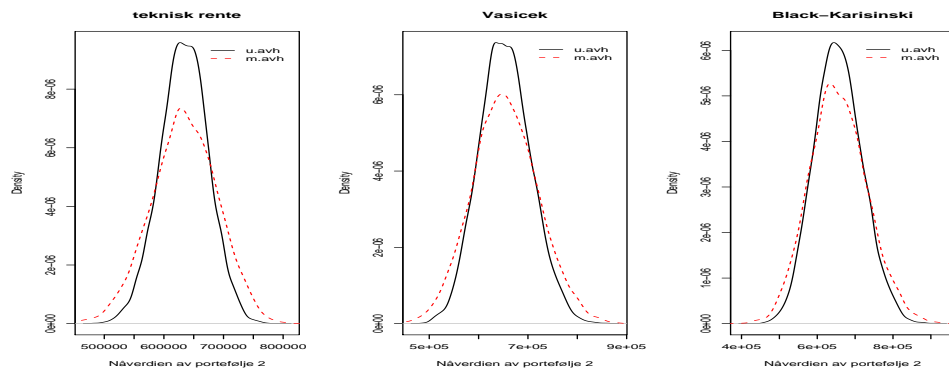
Under lavrentescenariet kan vi observere at haletyngden forsvinner i liten grad akkurat som under Gompertz-Makeham-modellen for denne pensjonsporteføljen. Denne observasjonen samsvarer også med det vi har sett tidligere. Fluktuasjonene under lavrentescenariet er ikke sterke nok til å ta vekk den ekstra usikkerheten som kommer som følge av korrelasjonene mellom kjønnene uansett rentemodell og pensjonsportefølje.

Under mediumrentescenariet kan vi observere noe som skiller seg ut fra det vi så for Pensjonsportefølje I under Perks-modellen og Pensjonsportefølje II under Gompertz-Makeham-modellen. Forskjellen ligger i at korrelasjonene under Perks-modellen når vi har en overvekt av 60-åringer i porteføljen er så sterke at lite av forskjellene mellom tetthetene forsvinner til tross for de sterke fluktuasjonene i renten.

Disse observasjonene bekrefter dermed det vi så under Gompertz-Makeham-modellen. En pensjonsportefølje med en overvekt av personer nærme pensjonsalder er mer utsatt for risiko som følge av korrelasjoner mellom kjønnene enn en pensjonsportefølje med en overvekt av personer i midten av livet.



Figur 4.8: Tetthetsplot av nåverdien til portefølje 2 under medium rentescenariet ved Perks



Figur 4.9: Tetthetsplot av nåverdien til portefølje 2 under medium rentescenariet ved Perks

4.2 Nullkupong Longevity Bond

En vanlig nullkupongobligasjon (engelsk: *zero-coupon bond*) er en obligasjon som kjøpes til en lavere pris enn den nominelle verdien (engelsk: *face value*). Den nominelle verdien blir utbetalt ved forfallstidspunktet (engelsk: *maturity*). I motsetning til andre obligasjoner utbetaler ikke nullkupongobligasjonen periodiske kuponger, derav navnet. Nullkupongobligasjoner har en durasjon som er lik tiden til forfall⁶. Dette gjør nullkupongobligasjonene meget sensitive for rentesvingninger. Disse egenskapene gjør nullkupongobligasjoner interessante for liv- og forsikringselskaper. Ved å kjøpe nullkupongobligasjoner immuniserer de porteføljen mot renterisikoen de er utsatt for i langtidsforpliktelsene på passivassen.

I denne oppgaven skal jeg se på en nullkupong longevity bond, som foreslått i Cairns *et al.*(2005). Denne obligasjonen vil i tillegg til å ha den vanlige rentesensitiviteten til en vanlig nullkupongobligasjon også være sensitiv for forandringer i dødelighet. Dermed vil den kunne brukes til å immunisere porteføljen mot rente og dødelighetsrisiko. Før jeg går til resultatene av simuleringene skal jeg vise hvordan verdien av en nullkupong longevity bond som utbetaler 1 enhet ser ut under det risikonøytrale sannsynlighetsmålet Q . Verdien vil bli skrevet opp i kontinuerlig tid som i Cairns *et al.*(2005). Før jeg gjør det kommer jeg til å definere noen nødvendige relasjoner i kontinuerlig tid.

⁶Dette er enkelt å vise, se Tillegg C for definisjon av durasjon.

- **Overlevelsesindeksen:** $S(u, x) = \exp(-\int_0^u \mu(t, x+t) dt)$
Hvis $\mu(t, y)$ er deterministisk er $S(u, x)$ lik sannsynligheten for at en person som er x år gammel på tid 0 vil overleve til tiden $x + u$.
- Lar M_t betegne filtrasjonen generert av $\mu(u, y)$ opp til tid t (på tid t vi vet dermed alt om dødeligheten opp til da, men ingenting om dødeligheten etter det).
- Sannsynligheten under P for at en person som ved tid 0 er x år gammel og fortsatt i live ved tid t skal overleve til u er gitt ved:

$${}_u p_{x+t}^P = E_P \left[\frac{S(u, x)}{S(t, x)} \middle| M_t \right] = E_P [e^{-\int_t^{t+u} \mu(t, x+s) ds} | M_t]$$

- Den alternative sannsynligheten under det risikonøytrale målet Q er definert som følger:

$${}_u p_{x+t}^Q = E_Q \left[\frac{S(u, x)}{S(t, x)} \middle| M_t \right] = E_Q [e^{-\int_t^{t+u} \mu(t, x+s) ds} | M_t]$$

- Lar $C(t)$ være en bankkonto som vokser med en risikonøytral rente betegnet ved $r(t)$. Verdien til $C(t)$ er gitt ved:

$$dC(t) = r(t)C(t)dt$$

$$\Rightarrow C(t) = C(0)e^{\int_0^t r(u)du}$$

- Lar F_t være filtrasjonen generert av renten, og H_t være filtrasjonen som inneholder informasjon om både rentene og dødeligheten.
- Lar $P(t, T)$ være prisen på tid t på en nullkupongobligasjon som betaler 1 enhet ved tid T .
- Gjør i tillegg den antagelsen at renter og dødelighet er uavhengige under det risikonøytrale målet Q ⁷.

Lar en (T, x) -obligasjon være en obligasjon utstedt for en x -åring ved tid 0 som utløper i tid T . (T, x) -obligasjonen utbetaler $S(T, x)$ ved tid T . Dette beløpet er veldefinert i den forstand at $S(T, x)$ er observerbar ved tid T . Lar nå $\tilde{B}(t, T, x)$ være prisen på tid t av en (T, x) -obligasjon som utbetaler $S(T, x)$ på tid T . Hvis vi antar at det finnes et risikonøytralt mål Q som er ekvivalent med P (det vanlige sannsynlighetsmålet) kommer vi frem til følgende uttrykk:

- Prisen på tid t av nullkupong-obligasjon som utbetaler 1 enhet på T :

$$P(t, T) = E_Q \left[\frac{C(t)}{C(T)} \middle| F_t \right]$$

- Prisen på tid t av en (T, x) -obligasjon som utbetaler $S(T, x)$ på tid T :

$$\tilde{B}(t, T) = E_Q \left[\frac{C(t)}{C(T)} S(T, x) \middle| H_t \right]$$

⁷Dette er en antagelse jeg skal gjøre også når jeg priser derivatene under målet P , ettersom jeg mener den er plausibel.

- Som følge av uavhengighet mellom renter og dødelighet under Q får vi:

$$\tilde{B}(t, T) = E_Q \left[\frac{C(t)}{C(T)} \middle| F_t \right] E_Q[S(T, x) | M_t]$$

- Hvis vi lar $B(t, T, x) = E_Q[S(T, x) | M_t]$ kan vi skrive uttrykket over om til følgende:

$$\tilde{B}(t, T) = P(t, T)B(t, T, x)$$

Da har jeg vist hvordan verdien av nullkupong longevity bond som utbetaler 1 enhet ved forfallstidspunktet kan skrives opp under det risikonøytrale målet Q i kontinuerlig tid. Ettersom dødelighetsderivater er nye i derivatmarkedet⁸, er det ennå ikke blitt satt noen markedspris på dødelighetsrisiko. I denne oppgaven kommer jeg derfor til å prisen alle derivatene under P -målet, som i praksis betyr at jeg har satt noen pris på dødelighetsrisiko.

For å få med korrelasjonen mellom kjønnene kommer jeg her til å bruke norske 67-åringer som referansepopulasjon. Ved å hente ideen fra hvordan forfatterne konstruerer overlevelseshraten til 65-årige waliseske menn i Blake, Cairns og Dowd(2006) konstruerer jeg overlevelseshraten (som kommer til å bli simulert) til norske 67-åringer som følger:

Overlevelseshrate: Norske 67-åringer

$$S_0 = 1$$

$$S_1 = S_0 \times 0.5 \times ({}_t p_{67}^{2006}_{menn} + {}_t p_{67}^{2006}_{kvinner})$$

$$S_t = S_0 \times 0.5 \times ({}_t p_{67}^{2006}_{menn} + {}_t p_{67}^{2006}_{kvinner}) \dots \times 0.5 \times ({}_{(66+t)} p_{67}^{2005+t}_{menn} + {}_{(66+t)} p_{67}^{2005+t}_{kvinner})$$

Før vi begynner å ta for oss resultatene ved simulering er det på sin plass å skrive opp antagelsene for prisingen:

- Som vi kan se av overlevelseshraten, kommer jeg til å la $x = 67$, altså at vi ser på 67-åringer, noe som er naturlig ettersom det er pensjonsalderen i Norge.
- Lar $t = 0$. Mer eksakt skal vi anta at vi starter observasjonene i 2006. Ettersom typiske forfallstidspunkter for langsiktige nullkupongobligasjoner er 10-15 år skal jeg i denne oppgaven la forfallstidspunktet T være lik 15.
- Lar $C(0) = 1$, noe som gjør at $C(t) = e^{\int_0^t r(u) du}$
- Antar i tillegg at obligasjonen utbetaler 1000 enheter ved forfallstidspunktet T .

Forventet utbetaling slik jeg kommer til å programmere ser da slik ut:

$$1000 \cdot E_P[S_T d_T]$$

Her er d_T neddiskonteringsfaktoren som definert i delkapittelet om pensjonsporteføljer.

4.2.1 Resultater Gompertz-Makeham

Resultatene for prisen (gitt som vanlig ved forventet utbetaling) og dens standardavvik er gitt i Tabell 4.5. Det første vi kan observere er at prisen er lavere under mediumrentescenariet. Dette er som for-

⁸Det eneste dødelighetsderivatet som har vært handlet på derivatmarkedet er SwissRe sitt "Mortality Catastrophe Bond" som dukket opp i 2003, se for eksempel Blake, Cairns og Dowd(2006).

GOMPERTZ-MAKEHAM			
Lav rente			
Rentetype	Pris	sd(Pris)	sd(Pris m. avh.)/sd(Pris u. avh)
Teknisk u. avh.	392.2	15.76	-
Teknisk m. avh.	392.1	20.76	1.32
Vašiček u. avh.	383.7	18.04	-
Vašiček m. avh.	383.6	22.45	1.24
Black-Kar. u. avh.	375.6	21.77	-
Black-Kar. m. avh.	375.5	25.45	1.17
Medium rente			
Rentetype	Pris	sd(Pris)	sd(Pris m. avh.)/sd(Pris u. avh)
Teknisk u. avh.	293.5	11.8	-
Teknisk m. avh.	293.4	15.6	1.32
Vašiček u. avh.	296.8	25.2	-
Vašiček m. avh.	296.7	27.0	1.07
Black-Kar. u. avh.	299.5	36.0	-
Black-Kar. m. avh.	299.5	37.3	1.04

Tabell 4.5: Pris Nullkupong Longevity Bond under Gompertz-Makeham-modellen

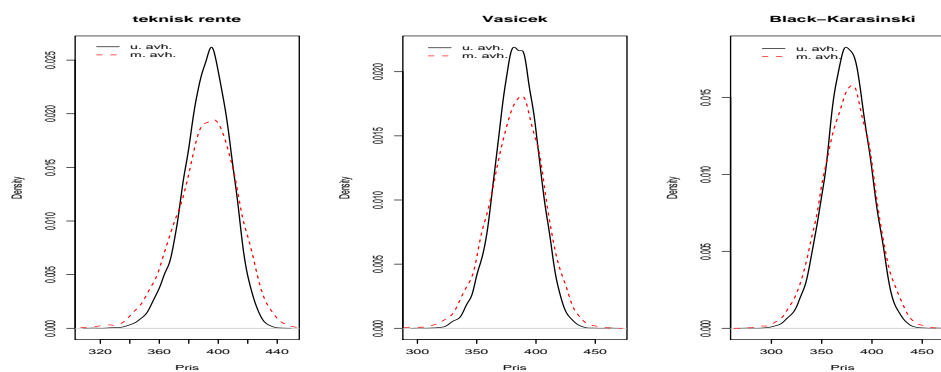
ventet ettersom nåverdien av pengene blir mindre. Vi kan også observere at standardavviket er større for de stokastiske rentemodellene under begge rentescenariene, og da størst under Black-Karasinski-modellen. Det er interessant å se at standardavviket under Black-Karasinski under mediumrentescenariet er nesten 40% større enn standardavviket under Vašiček-modellen. Dette forholdet illustrerer den enorme forskjellen å neddiskontere med "feil" rente kan gi (selvfølgelig under antagelsen om at Black-Karasinski-modellen er mer realistisk enn Vašiček-modellen, noe jeg har argumentert for i kapittel 2.3).

En annen interessant ting er hvordan prisen beveger under de to rentescenariene. Under lavrentescenariet ser vi at prisen blir lavere under de stokastiske rentemodellene enn under teknisk rente, og da lavest under Black-Karasinski-modellen. Under mediumrentescenariet ser vi derimot at prisen blir høyere under de stokastiske rentemodellene, og da høyest under Black-Karasinski-modellen. Forklaringen på denne forskjellen kommer av at under lavrentescenariet er det større rom for fluktasjoner i renten oppover enn nedover ettersom renten må være positiv. Dette fører til at prisen stiger når vi neddiskonterer med stokastisk rente. Det er også naturlig at den stiger mest under Black-Karasinski-modellen, ettersom denne modellen som tidligere argumentert gir mest rom for fluktasjoner. Under mediumrentescenariet derimot er det rom for renten å bevege seg både opp og ned. Dette fører til at prisen er større under de stokastiske rentemodellene ettersom renten slik parameterne er valgt beveger seg litt under det som er dens forventning over de 50 årene. Ettersom fluktasjonene er størst under Black-Karasinski-modellen, blir dermed også prisen høyest under denne modellen.

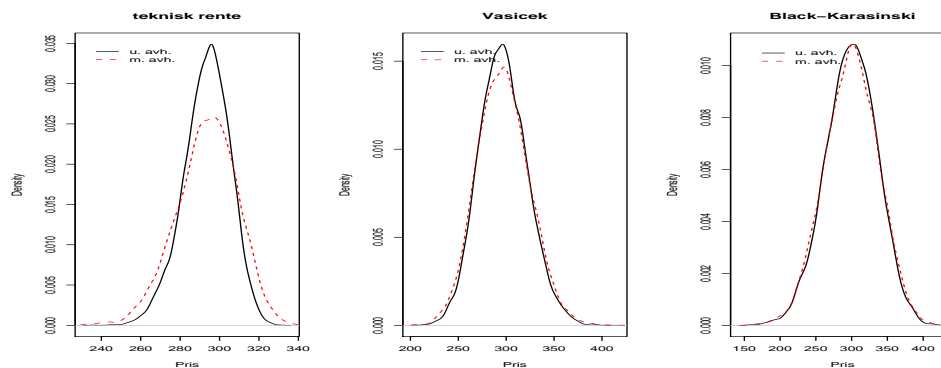
Som tidligere nevnt er dødelighetsmodelleringen konstruert på en måte slik at forventningen, og dermed prisen, vil være tilnærmet lik for modelleringen uten og med avhengighet mellom kjønnene. Standardavviket derimot kommer til å bli større med avhengighet mellom kjønnene. I praksis vil utstederen av derivatet sikre seg mot mest mulig av risikoen ved å utstede et derivat. Sluttpreisen på

derivatet vil derfor ikke bare avhenge av forventet utbetaling, men også av standardavviket.

Ettersom denne oppgavens formål er å illustrere usikkerheten i prisingen som kommer av korrelasjon mellom kjønnene skal jeg fokusere på forskjellene i standardavvik for simuleringene med og uten avhengighet⁹. Vi legger merke til at resultatene ligner på de vi fikk for pensjonsporteføljene, men overraskende ligner de mer på resultatene vi fikk for Pensjonsportefølje I under Gompertz-Makeham-modellen. Dette er litt overraskende ettersom norske 67-åringer er referansepopulasjonen. Det ville derfor vært naturlig å forvente resultater som lignet mer på de vi kunne observere for Pensjonsportefølje II, som har en overvekt av 60-åringer. Resultatene jeg referer til er de man kan finne i siste kolonne i Tabell 4.1 på side 22 og Tabell 4.5 på side 32, nemlig $sd(Pris\ m.\ avh.)/sd(Pris\ u.\ avh.)$ -kolonnen. Vi kan med andre ord observere at forholdet mellom standardavviket med og uten avhengighet mellom kjønnene er av tilsvarende størrelse som for Pensjonsportefølje I. Vi kan derfor konkludere at en nullkupong longevity bond ikke er like sensitiv ovenfor usikkerheten som kommer fra korrelasjonene mellom kjønnene som Pensjonsportefølje II.



Figur 4.10: Tetthetsplot av prisen til en Nullkupong Longevity Bond under lavrentescenariet ved Gompertz-Makeham



Figur 4.11: Tetthetsplot av prisen til en Nullkupong Longevity Bond under mediumrentescenariet ved Gompertz-Makeham

I Figur 4.10 og Figur 4.11 ser vi tetthetsplottene av prisen på obligasjonen under henholdsvis lav- og mediumrentescenariet. Under lavrentescenariet kan vi se at forskjellene mellom tetthetene med

⁹ Dette skal jeg gjøre for longevity bonds også

PERKS			
Lav rente			
Rentetype	Pris	sd(Pris)	sd(Pris m. avh.)/sd(Pris u. avh)
Teknisk u. avh.	367.6	19.57	-
Teknisk m. avh.	367.7	25.69	1.31
Vašiček u. avh.	359.7	21.25	-
Vašiček m. avh.	359.8	26.70	1.26
Black-Kar. u. avh.	352.1	24.05	-
Black-Kar. m. avh.	352.2	28.73	1.19
Medium rente			
Rentetype	Pris	sd(Pris)	sd(Pris m. avh.)/sd(Pris u. avh)
Teknisk u. avh.	274.9	14.72	-
Teknisk m. avh.	275.1	19.57	1.33
Vašiček u. avh.	278.0	25.53	-
Vašiček m. avh.	278.3	28.67	1.12
Black-Kar. u. avh.	280.6	35.18	-
Black-Kar. m. avh.	280.8	37.65	1.07

Tabell 4.6: Pris på en Nullkupong Longevity Bond under Perks-modellen

og uten avhengighet mellom kjønnene forsvinner delvis når vi modellerer under de stokastiske rentemodellene, og da spesielt Black-Karasinski-modellen. Likevel er det en viss forskjell igjen, noe som er naturlig ettersom vi kan se av Figur 2.1 at fluktuationene under lavrentescenariet er relativt svake.

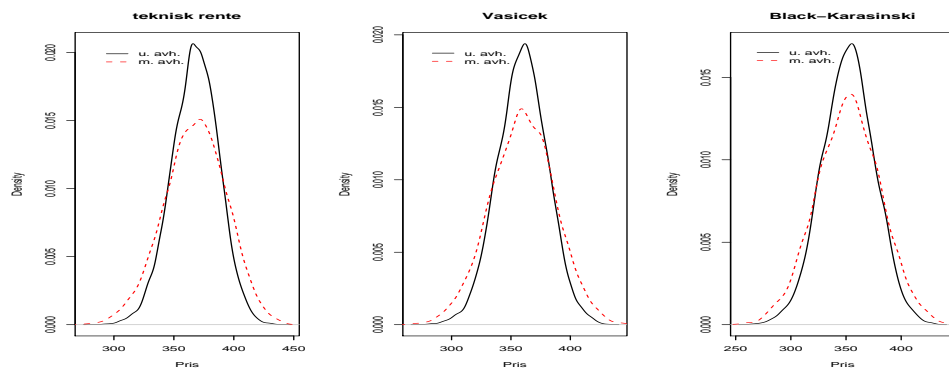
Under mediumrenterentescenariet kan vi observere at under de stokastiske rentemodellene forsvinner det meste av forskjellen mellom tetthetene med og uten avhengighet mellom kjønnene. Forskjellen er relativt liten allerede under Vašiček-modellen, og later til å være nesten helt vekk under Black-Karasinski-modellen. Tetthetene for prisen med og uten avhengighet er med andre ord nesten helt overlappende i dette tilfellet. Dette resultatet er naturlig ettersom vi vet at renten fluktuerte mer under Black-Karasinski. De høye fluktuationene i renten utjevner dermed det meste av den ekstra risikoen som stammer fra avhengigheten mellom kjønnene.

4.2.2 Resultater Perks

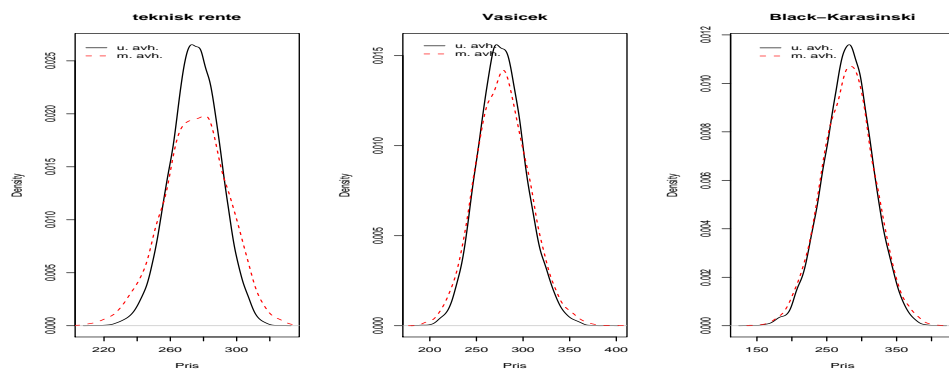
Resultatene for prisen (gitt som vanlig ved forventet utbetaling) og dens standardavvik er gitt i Tabell 4.6. Det første vi kan observere (utenom at prisen er lavere under mediumrentescenariet) er at prisene er lavere under Perks-modellen. Dette samsvarer med Figur 3.3 på side 15 der jeg viste at Perks-modellen gir lavere gjenstående levealder. Som under Gompertz-Makeham-modellen ser vi at prisen under lavrentescenariet går ned under de stokastiske rentemodellene, mens den under mediumrentescenariet går opp under de stokastiske rentemodellene. Argumentasjonen for dette er den samme som for resultatene under Gompertz-Makeham. For øvrig kan vi også se her at standardavviket er 30% større under Black-Karasinski-modellen i forhold til Vašiček-modellen.

Under Gompertz-Makeham-modellen kunne vi observere at resultatene i $sd(Pris\ m.\ avh.)/sd(Pris\ u.\ avh)$ -kolonnen lignet på resultatene jeg fikk for Pensjonsportefølje I. For Perksmodellen ser vi derimot at det er en mindre risiko som følge av korrelasjonen mellom kjønnene enn det er for noen av

pensjonsporteføljene under samme dødelighetsmodell. Dette bekrefter at en nullkupong longevity bond er mindre utsatt for risiko som følge av korrelasjon mellom kjønnene enn pensjonsportefølje jeg har sett på i denne oppgaven. Likevel er risikoen til stede. Ser vi for eksempel med på den rentemodellen som gir minst risiko, Black-Karasinski, ser vi at $sd(Pris\ m.\ avh.) / sd(Pris\ u.\ avh.)$ er 1.07, noe som kan være en betydelig sum penger hvis kupongen er stor nok. Det er også viktig å påpeke at korrelasjonen mellom kjønnene akkurat som ved pensjonsporteføljene gir større usikkerhet under Perks-modellen med parametere fra 1950 til 2006. Dette samsvarer med resultatene for korrelasjon presentert i Tabell 3.2, der vi kunne se at korrelasjonene mellom parameterne var større under Perks enn under Gompertz-Makeham.



Figur 4.12: Tetthetsplot av prisen til en Nullkupong Longevity Bond under lavrentescenarior ved Perks

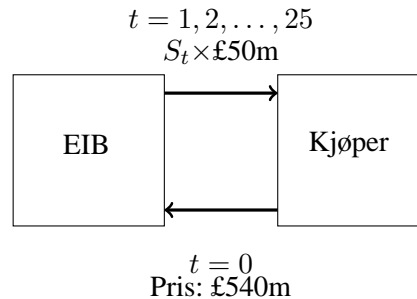


Figur 4.13: Tetthetsplot av prisen til en Nullkupong Longevity Bond under mediumrentescenarior ved Perks

I Figur 4.12 og Figur 4.13 ser vi tetthetsplottene av prisen på obligasjonen under henholdsvis lav- og mediumrentescenariet. Under lavrentescenariet ser vi at tetthetsplottene med avhengighet mellom kjønnene er mer haletunge enn de uten avhengighet. Denne haletyngden reduseres noe under de stokastiske rentemodellene, men er fortsatt betydelig. Under mediumrentescenariet kan vi som tidligere observere at det meste av forskjellen mellom tetthetsplottene med og uten avhengighet forsvinner som følge av de sterke rentefluktuasjonene. Dette er som ved de andre tilfellene tydeligst under Black-Karasinski-modellen.

4.3 Longevity Bonds

En longevity bond er en obligasjon som utbetaler en sum proporsjonal med antall levende i et kull. Hvis man for eksempel ser på 67-åringer i året obligasjonen er utstedt vil kupongen neste år være proporsjonal med antallet overlevende det neste året. Longevity bonds kan brukes til å immunisere seg mot dødelighetsrisiko (*longevity risk*), risikoen for at den forsikrede pensjonsgruppen blir eldre enn det man estimerte. I november 2004 annonserte European Investment Bank (EIB) og BNP Paribas at de kom til å utstede en longevity bond med forfallstidspunkt (engelsk: *maturity*) om 25 år som skulle betale ut en kupong på $(£50,000,000) \times$ (den kumulative overlevelsesraten målt på menn fra Wales som var 65 år gamle i 2003). Prisen på obligasjonen skulle være 540 millioner pund. Denne obligasjonen nådde aldri markedet ettersom den ikke oppnådde nok interesse blant investorene¹⁰.



Figur: Utbetalinger fra EIB/BNP, sett fra investorenes side

Et problem med longevity bonds er at utstederen ikke har noen måte å immunisere seg fullt mot dødelighetsrisikoen. I Milevsky og Promislow(2001) vises det matematisk at utstederen teoretisk sett kan immunisere seg ved å utstede livsforsikringer. I praksis vil ikke dette være mulig; alle skal ha pensjon, men ikke alle kjøper livsforsikring. Derfor kan man her i praksis bare oppnå en fraksjonell immunisering (hvor mye av risikoen dette eventuelt tar vekk er utenfor rammene til denne oppgaven). Utstederen må bare håpe at prisen de har kommet frem til samt påslaget vil være den tilstrekkelige summen for at de ikke går med tap. Hvis det skulle komme et stort medisinsk fremskritt som for eksempel at man finner en kur for kreft i løpet av de 25 årene obligasjonen løper, kan dette skape problemer for utstederen. Viljen til å utstede disse obligasjonene vil til slutt avhenge av utstederens kapitalreserver og mulighet til å tåle eventuelle tap. Påslaget og dermed sluttprisen vil også avhenge av kapitalreservene. Disse problemene er utenfor rekkevidden til denne oppgaven, og kommer derfor ikke til å bli diskutert mer her.

For å illustrere kupongstrukturen i en longevity bond gir jeg et eksempel tilsvarende det gitt i Menoncin(2008). Jeg tar for meg overlevelsessannsynlighetene for 65-årige kvinner anno 2006 gitt ved Gompertz-Makeham modellen og antar en kupong på 1000kr. Kupongstrukturen for dette eksempelet ser man i Tabell 4.7 på neste side.

Hovedkarakteristikkene til obligasjonen er dermed som følger:

- Obligasjonen ble designet for å immunisere kjøperen av obligasjonen.
- Utstederen tjener hvis S_t er lavere enn forventet (og motsatt, kjøperen tjener hvis S_t er høyere enn forventet).

¹⁰I Blake *et al.*(2006) rapporterer de at det ble utvist stor skepsis blant publikum da artikkelen Cairns *et al.*(2005) i januar og februar 2006 ble presentert for henholdsvis Faculty of Actuaries i Edinburg og Institute of Actuaries i London.

År	2006	2007	2008
Overlevelsesrate	0.99	0.989	0.988
Kumulativ overlevelsesrate	0.99	0.9791	0.9673
Kupong på 1000kr	990	979.1	967.3

Tabell 4.7: Kupongstruktur: Longevity Bond

- Følgelig kan obligasjonen brukes til å immunisere en portefølje dominert av pensjons- og/eller annuitetspoliser.
- Obligasjonen er en langtidsobligasjon som er designet til å beskytte kjøperen mot *enhver* uforutsett *forbedring* i dødeligheten opp til forfallsdatoen av obligasjonen.
- S_t ser kun på en nasjon sin overlevelsesrate.
- Obligasjonen er en annuitetsobligasjon og alle kupongutbetalingene er utsatt for risiko fra dødelighetssjokk. Mer presist er utbetalingsplanene direkte proporsjonale med overlevelsesraten:

$$f(S_t) = \text{£}50 \text{ m} \times S_t$$

Jeg kommer her til å ta for meg en longevity bond som utbetaler $(50 \text{ enheter}) \times (\text{den kumulative overlevelsesraten på hele den norske befolkningen})$, der jeg skal se på både Gompertz-Makeham og Perks-modellen.

Utbetalingene blir som følger:

$$f(S_t) = 50 \times S_t$$

der S_t er overlevelsesraten for norske 67-åringer som konstuert på side 31. Ettersom S_t kommer til å bli simulert kommer vi til å få følgende uttrykk for samlet forventet utbetaling over de 25 årene obligasjonen løper:

$$E_P\left[\sum_{t=1}^{25} f(S_t)d_t\right]$$

Her er d_t neddiskonteringsfaktoren som definert i delkapittelet om pensjonsporteføljer.

4.3.1 Resultater Gompertz-Makeham

Resultatene for prisen (gitt som vanlig ved forventet utbetaling) og dens standardavvik er gitt i Tabell 4.8. Det første vi kan observere er at prisene under mediumrentescenariet er tilsvarende den faktiske prisen til obligasjonen som EIB hadde tenkt å utstede, mens lavrentescenariet gir en betydelig høyere pris. Ettersom jeg bruker norske 67-åringer som referansepopulasjon, mens EIB brukte walisiske 65-årige menn, er det ikke naturlig å sammenligne prisene. I tillegg vet jeg heller ikke noe om rentescenariet som ble brukt i prisingen. Min referansepopulasjon burde gi en høyere pris enn walisiske 65-årige menn ettersom kvinner lever lenger enn menn, og dermed øker overlevelsesraten på referansepopulasjonen. Uansett vil jeg tro at den "opprinnelige" prisen EIB kom frem til var lavere, ettersom utstedere av forskjellige derivater gjerne tar seg godt betalt for å ta på seg diverse risikoer.

GOMPERTZ-MAKEHAM			
Lav rente			
Rentetype	Pris	sd(Pris)	sd(Pris m. avh.)/sd(Pris u. avh)
Teknisk u. avh.	631.2	13.57	-
Teknisk m. avh.	631.6	17.66	1.30
Vašiček u. avh.	630.6	15.95	-
Vašiček m. avh.	631.0	19.69	1.23
Black-Kar. u. avh.	626.9	19.76	-
Black-Kar. m. avh.	627.3	22.93	1.16
Medium rente			
Rentetype	Pris	sd(Pris)	sd(Pris m. avh.)/sd(Pris u. avh)
Teknisk u. avh.	532.3	9.67	-
Teknisk m. avh.	532.6	12.62	1.30
Vašiček u. avh.	538.6	22.25	-
Vašiček m. avh.	538.9	23.60	1.06
Black-Kar. u. avh.	540.1	32.74	-
Black-Kar. m. avh.	540.4	33.59	1.03

Tabell 4.8: Pris på Longevity Bond under Gompertz-Makeham

Dette er utenfor rekkevidden til denne oppgaven og vil ikke bli diskutert videre.

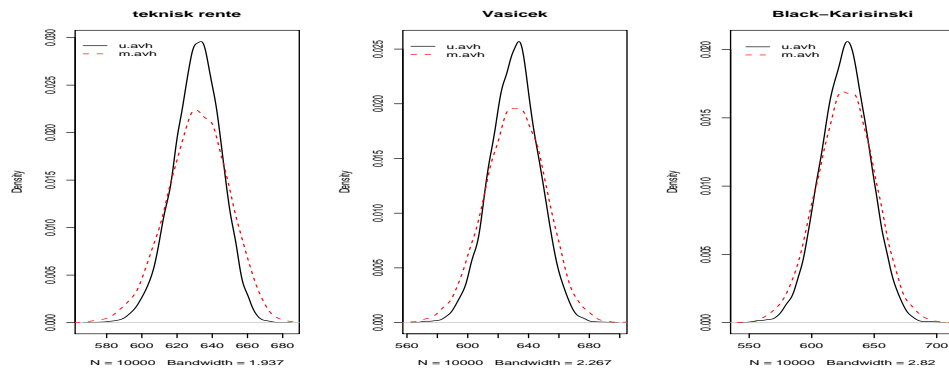
I tillegg kan vi observere det samme som for nullpong longevity bond, nemlig at prisen synker under når vi går over til stokastiske renter, mens vi kan observere det motsatte under mediumrentescenariet. Jeg henviser derfor til diskusjonen under nullkupong longevity bond, ettersom jeg mener at grunnen er den samme som der, nemlig måten renter fluktuerer under de forskjellige rentescenariene.

Under lavrentescenariet kan vi som tidligere observere en god del ekstra usikkerhet i standardavviket til prisen når jeg modellerer med avhengighet mellom kjønnene. Vi kan blant annet se at standardavvik med avhengighet er 23% og 16% større enn standardavviket uten for henholdsvis Vašiček og Black-Karasinski-modellen. En betydelig del av denne usikkerheten forsvinner som som tidligere under de stokastiske rentemodellene under mediumrentescenariet. Her har de samme resultatene for Vašiček og Black-Karasinski-modellen gått ned til 6% og 3%.

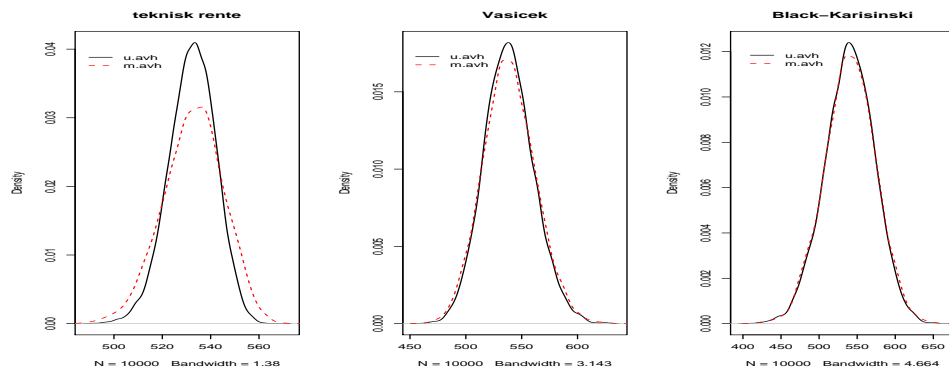
I Figur 4.14 og Figur 4.15 ser vi tetthetsplottene av obligasjonsprisen under henholdsvis lav- og mediumrentescenariet. Disse bekrefter det vi har observert i Tabell 4.8. Under lavrentescenariet er tettheten til obligasjonsprisen med avhengighet mellom kjønnene mer tunghalet uansett rentetype. Dermed er også standardavviket til prisen betydelig større enn til tilsvarende standardavvik uten avhengighet mellom kjønnene. Under mediumrentescenariet overlapper tetthetene hverandre nesten perfekt, og likheten mellom tetthetene er som tidligere størst under Black-Karasinski-modellen. Dette gir liten forskjell i standardavvikene med og uten avhengighet.

4.3.2 Resultater Perks

Resultatene for prisen (gitt som vanlig ved forventet utbetaling) og dens standardavvik er gitt i Tabell 4.9. Det første vi kan observere er at prisene er lavere enn det de var under Gompertz-Makeham.



Figur 4.14: Tetthetsplot av Longevity Bond-prisen under lavrente-scenariet ved Gompertz-Makeham



Figur 4.15: Tetthetsplot av Longevity Bond-prisen under mediumrente-scenariet ved Gompertz-Makeham

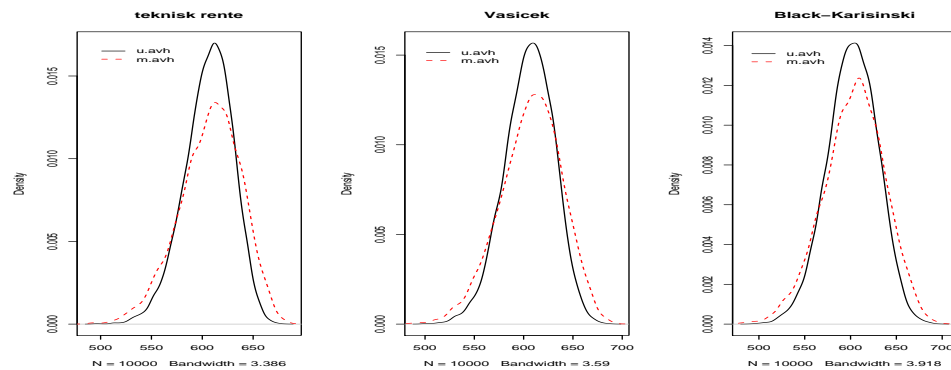
Dette samsvarer med det vi har observert tidligere i oppgaven, og jeg henviser derfor til de tidligere kommentarene. Det samme gjelder observasjonen om at prisene under lavrentescenariet synker når vi går over til stokastisk rente, mens de i samme tilfellet stiger under mediumrentescenariet.

Under lavrentescenariet ser vi som tidligere at standardavviket med avhengighet mellom kjønnene er betydelig større enn det tilsvarende uten. Dette gjelder uansett rentetype, selv om usikkerheten reduseres noe under de stokastiske rentemodellene. Under mediumrentescenariet derimot kan vi se at det er en betydelig reduksjon av denne usikkerheten under de stokastiske rentemodellene. Likevel kan vi observere at denne usikkerheten fortsatt er av en viss størrelse, spesielt under Vašiček-modellen, men også under Black-Karasinski med henholdsvis 12% og 6% større standardavvik. Dette samsvarer med tidligere observasjoner om at det er større usikkerhet som følge av korrelasjoner i Perks-modellen, og jeg henviser derfor til tidligere diskusjon.

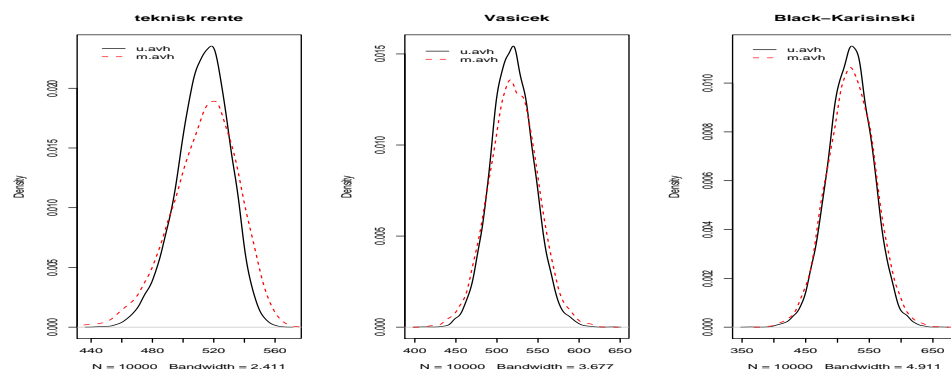
I Figur 4.16 og Figur 4.17 ser vi tetthetsplottene av prisen under henholdsvis lav- og mediumrentescenariet. Som tidligere kan vi se at under lavrentescenariet er tettheten med avhengighet mellom kjønnene betydelig mer tunghalet uansett rentetype. Under mediumrentescenariet kan vi derimot se at mye av haletyngden forsvinner under de stokastiske rentemodellene, og da spesielt under Black-Karasinski. Det er likevel verdt å merke seg at tetthetene ikke overlapper like sterkt som under Gompertz-Makeham, som samsvarer med tidligere observasjoner om at usikkerheten som følge av avhengighet mellom kjønnene er større under Perks.

PERKS			
Lav rente			
Rentetype	Pris	sd(Pris)	sd(Pris m. avh.)/sd(Pris u. avh)
Teknisk u. avh.	608.8	16.57	-
Teknisk m. avh.	610.3	22.19	1.33
Vašiček u. avh.	608.2	18.45	-
Vašiček m. avh.	609.6	23.78	1.29
Black-Kar. u. avh.	604.5	21.57	-
Black-Kar. m. avh.	605.9	26.38	1.22
Medium rente			
Rentetype	Pris	sd(Pris)	sd(Pris m. avh.)/sd(Pris u. avh)
Teknisk u. avh.	515.3	11.69	-
Teknisk m. avh.	515.7	15.47	1.33
Vašiček u. avh.	521.2	22.25	-
Vašiček m. avh.	521.7	22.85	1.12
Black-Kar. u. avh.	522.7	31.90	-
Black-Kar. m. avh.	523.2	33.84	1.06

Tabell 4.9: Resultater: Pris Longevity Bond under Perks-modellen



Figur 4.16: Tetthetsplot av Longevity Bond-prisen under lavrente-scenarioet ved Perks



Figur 4.17: Tetthetsplot av Longevity Bond-prisen under mediumrente-scenarioet ved Perks

Kapittel 5

Konklusjon

Formålet med denne oppgaven har vært å se på hvilken risiko korrelasjon mellom kjønnene gir i prisingen av dødelighetsobligasjoner. I tillegg har jeg sett hvordan to forenklete og generelle pensjonsporteføljer med forskjellig alderssammensetning ble påvirket av denne risikoen. Jeg har introdusert to dødelighetsmodeller, Gompertz-Makeham og Perks, begge hyppig brukt i forskningslitteratur og næringsliv. Ved å hente ideen fra en forskningsartikkel har jeg vist hvordan vi kan modellere parameterne i begge modellene på en stokastisk måte. Dette gjorde det mulig å simulere parameterne både med og uten avhengighet mellom kjønnene. Jeg har angitt korrelasjonene i parameterforandringene mellom kjønnene. Det viser seg at disse er betydelige for begge modeller, men sterkest for Perks-modellen. Ved å simulere dødelighetssannsynligheter for 2007 og plote de mot de observerte dataene viste jeg at denne måten å simulere på virket meget bra på kort sikt. Likevel er det verdt å merke seg at tallene fra Gompertz-Makeham-modellen tilpasset seg bedre mot de observerte dataene. Dette gjaldt for både de estimerte og de simulerte parameterene. Fra dette kan vi trekke konklusjonen at resultatene under Gompertz-Makeham modellen er mer riktige i denne oppgaven.

For pensjonsporteføljene ga den risikoen som følge av avhengigheten mellom kjønnene utslag på standardavvikene, men omfanget var sterkt avhengig av flere faktorer. Det viste seg at porteføljen dominert av 60-åringer var sterkere utsatt for korrelasjonsrisikoen enn porteføljen dominert av 40-åringer. I tillegg tok de sterkere fluktuationene i den stokastiske renten under mediumrentescenariet vekk en betydelig del av risikoen. Denne effekten var sterkest for Black-Karasinski-modellen som vi vet gir sterkere fluktuationer enn Vašiček-modellen ved høyere rente. En annen viktig ting å merke seg var at risikoen var sterkere under Perks-modellen uansett rentetype og rentescenario. Likevel kan vi konkludere med at renterisikoen representerer en mer umiddelbar risiko for livselskap. Dette viser seg i at forholdet mellom standardavvikene for stokastisk og teknisk rente er mer betydelig enn forholdet mellom standardavvikene med og uten avhengighet mellom kjønnene.

I denne oppgaven tok jeg for meg to dødelighetsobligasjoner, en nullkupong longevity bond og en longevity bond. Omfanget av usikkerheten som følge av korrelasjonen mellom kjønnene var relativt likt for begge obligasjonene og blir derfor kommentert sammen. Det viste seg at begge obligasjonene var mindre utsatt for korrelasjonsrisikoen enn pensjonsporteføljen dominert av 60-åringer. Dette er et interessant resultat ettersom det viser at korrelasjon mellom kjønnene presenterer en viktigere risiko for livselskap enn utstedere av disse obligasjonene. Vi kunne også observere at risikoen som følge av korrelasjoner var høyere under Perks-modellen. Som for pensjonsporteføljene viste det seg at de høye fluktuationene under mediumrentescenariet fjernet en betydelig del av risikoen, og da mest under

Black-Karasinski-modellen. Det mest påfallende var at prisene sammenlignet under samme rentescenario var relativt like, men at standardavvikene økte kraftig under de stokastiske rentemodellene. Denne økningen vil jeg karakterisere som betydelig både under lav- og mediumrentescenariet.

Etter min mening er det helt klart at det er rentene under mediumscenariet som er mer realistiske med sine høye fluktasjoner. Over 25 eller 50 år vil det mest sannsynlig være store fluktasjoner i renten, noe som blir illustrert i Figur 1.2. Vi har tidligere observert at økningen i standardavviket er størst under Black-Karasinski-modellen. Dette er også den rentemodellen som reduserer usikkerheten som følge av korrelasjon mellom kjønnene mest. Forholdet mellom standardavvikene er da på 3-4% og 6-7% for henholdsvis Gompertz-Makeham og Perks under mediumrentescenariet. Dette forholdet hadde vært det samme for begge modeller hvis jeg ikke hadde hatt med parameterene fra 1950 for Perks, noe jeg viser i Tillegg D. Dette forholdet er betydelig mindre enn forholdet mellom standardavvikene under teknisk og stokastisk rente under mediumrentescenariet.

Min konklusjon er at korrelasjon mellom kjønnene representerer en ekstra risiko for utstedere av obligasjoner. Denne risikoen er likevel mindre signifikant enn rente- og dødelighetsrisiko. Spesielt rente, men også forandringer i dødelighet, representerer en mer umiddelbar usikkerhet som kan bli kostbar dersom den blir undervurdert. Det er likevel en fordel for utstederen å vite at det er en risiko tilknyttet korrelasjoner mellom kjønnene når man priser dødelighetsobligasjoner.

Tillegg A

Relasjon mellom ett og t-årige overlevelsessannsynligheter

Vi er interessert i å bevise følgende relasjon:

$${}_t p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot \dots \cdot p_{x+t-1}, \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

For å gjøre det vil jeg bruke følgende relasjoner:

$${}_t p_x = 1 - {}_t q_x = 1 - G(t) \tag{A.1}$$

$$p_{x+s} = \Pr(T > s+1 | T > s) = \frac{1 - G(s+1)}{1 - G(s)} \tag{A.2}$$

Vi ser at vi som følge av relasjonene (A.1) og (A.2) kommer frem til følgende:

$$p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot \dots \cdot p_{x+t-1} = [1 - G(1)] \left[\frac{1 - G(2)}{1 - G(1)} \right] \cdot \dots \cdot \left[\frac{1 - G(t-1)}{1 - G(t-2)} \right] \left[\frac{1 - G(t)}{1 - G(t-1)} \right]$$

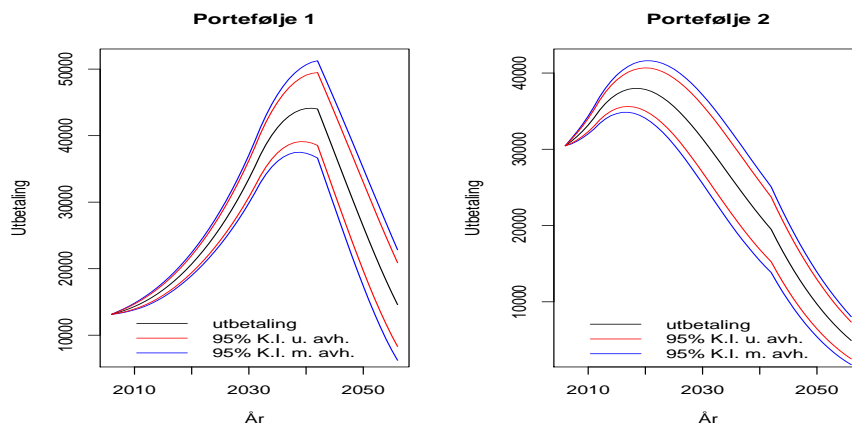
Ved å stryke de leddene som går mot hverandre får vi

$$p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot \dots \cdot p_{x+t-1} = 1 - G(t) = {}_t p_x$$

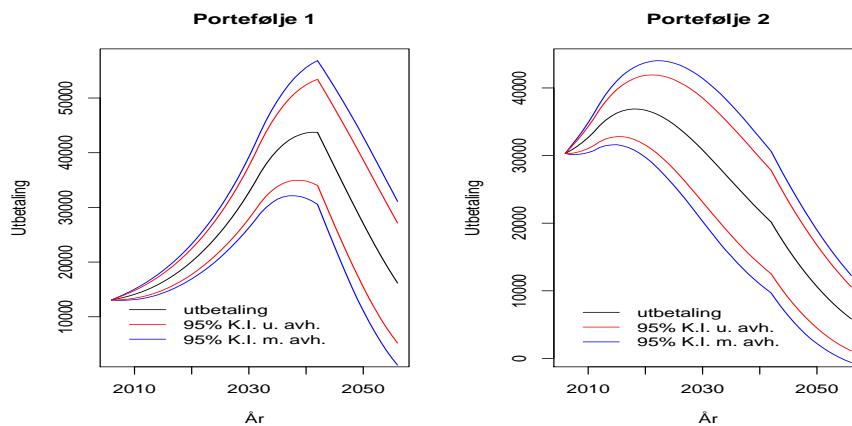
som var det vi ville vise.

Tillegg B

Utbetalinger pensjonsporteføljene



Figur B.1: Pensjonsporteføljene simulert 50 år framover under Gompertz-Makeham



Figur B.2: Pensjonsporteføljene simulert 50 år framover under Perks

Vi ser at konfidensintervallet for pensjonsporteføljene modellert med korrelasjon mellom kjønnene er større enn det uten korrelasjoner. Som vi har observert tidligere er usikkerheten som følge av korrelasjoner mellom kjønnene større under Perks-modellen.

Tillegg C

Durasjon

En ofte brukt definisjon for durasjon (se for eksempel Bølviken(n.d.)) er gitt ved:

$$D = \sum_{i=1}^T \frac{PV_i \cdot t_i}{PV} \quad (\text{C.1})$$

der:

- D står for durasjon
- i indekserer pengestrømmene
- P_i er nåverdien til hver utbetaling
- t_i er tiden til utbetaling i
- $PV = \sum_{i=1}^T PV_i$, eller summen av alle utbetalingene

Durasjonen angir en obligasjons sensitivitet til renteforandringer.

Jeg skal nå vise at en nullkupongobligasjon har en durasjon som er lik tiden til forfall:

- Jeg antar at nullkupongobligasjonen betaler ut en sum på C ved tid $t_i = T$, og at tiden til forfall er T . Denne utbetalingen har da en nåverdi på PV_T .
- Ettersom en nullkupongobligasjon kun utbetaler en sum ved forfallstidspunktet har vi at:

$$PV_1 = PV_2 \dots = PV_{T-1} = 0$$

som igjen gir at

$$PV = \sum_{i=1}^T PV_i = PV_T \quad (\text{C.2})$$

- Relasjon (C.2) gir da at

$$D = \sum_{i=1}^T \frac{PV_i \cdot t_i}{PV} = \frac{PV_T \cdot T}{PV_T} = T$$

og dermed har jeg vist at durasjonen til en nullkupongobligasjon er lik tiden til forfall.

Tillegg D

Perks uten parameterne fra 1950

I dette tillegget skal jeg se på hvilken forskjell det gir å ikke bruke parameterobservasjonene fra 1950 under Perks-modellen. Dette er interessant ettersom det er et kraftig hopp i begge parameterne fra 1950 til 1951 (se Figur 3.2 side 13) som skiller seg kraftig ut fra trendene i parameterne til Perks-modellen ellers. Dette hoppet gir en betydelig større korrelasjon i fremtidige prediksjoner hvis man tar det med. Korrelasjonene uten 1950 er gitt i Tabell D.1. Sammenligner vi resultatene i Tabell D.1 med Tabell 3.2 kan vi se at korrelasjonen nå er betydelig mindre. Ser vi for eksempel på korrelasjonen mellom $\Delta\theta_1^{kv}$ og $\Delta\theta_1^m$ kan vi se at denne har gått ned fra 0.755 og 0.285. For å se litt på hvordan dette valget påvirker parameterutviklingen har jeg valgt å se på forventet levealder. Resultatene er gitt i Tabell D.2 på neste side. Vi ser her at levealderen er litt lavere, men den viktigste observasjonen er at konfidensintervallet har blitt mindre enn det vi observerte i Tabell 3.3. Dette er naturlig ettersom parameterne i Perks-modellen har en klar trend fra 1951 og utover. Dermed blir også usikkerheten i estimatene mindre.

Det er naturlig å tro at dette også vil gi lavere usikkerhet som følge av korrelasjonen mellom kjønnene for prisingen av dødelighetsobligasjonene. Derfor har jeg priset Longevity Bond igjen. Resultatene er oppgitt i Tabell D.3. Man ser akkurat som ved forventet levealder har standardavviket blitt mindre enn det vi observerte for de samme resultatene under Perksmodellen i Tabell 4.9. Prisen er også litt lavere, noe som er naturlig ettersom predikasjonene for forventet levealder var litt mindre da jeg ikke tok med parameteren for 1950 i beregningen av kovariansmatrisen og forventningsvektoren. Den viktigste forskjellen for denne oppgaven ligger i det faktum at risikoen som følge av korrelasjoner har gått betydelig ned. Hvis ser på for eksempel på mediumrentescenariet og Black-Karasinski-modellen kan vi se at $sd(Pris m. avh.) / sd(Pris u. avh)$ har gått ned fra 1.08 til 1.03. 1.03 er også tallet for Gompertz-Makeham under tilsvarende scenario og modell, og vi kan dermed anta at hvis vi ikke tar med 1950 vil det ikke være noen nevneverdig forskjell mellom risikoen under de forskjellige dødelighetsmodellene.

Parameter	$\Delta\theta_1^{kv}$	$\Delta\theta_2^{kv}$	$\Delta\theta_1^m$	$\Delta\theta_2^m$
$\Delta\theta_1^{kv}$	1.000	-0.947	0.285	-0.242
$\Delta\theta_2^{kv}$	-0.947	1.000	-0.308	0.331
$\Delta\theta_1^m$	0.285	-0.308	1.000	-0.960
$\Delta\theta_2^m$	-0.242	0.809	-0.982	1.000

Tabell D.1: Korrelasjoner: Perks uten 1950

År	Menn		Kvinner	
	Forventet levealder	95% Konf.Int.	Forventet levealder	95% Konf.Int.
2006	76.2	-	80.4	-
2016	77.0	(75.4,78.6)	81.3	(79.8,82.9)
2026	77.6	(75.5,79.8)	82.2	(80.0,84.4)
2036	78.2	(75.7,80.8)	83.0	(80.3,85.6)

Tabell D.2: Forventet levealder under Perks-modellen

Lav rente			
Rentetype	Pris	sd(Pris)	sd(Pris m. avh.)/sd(Pris u. avh)
Teknisk u. avh.	600.5	10.88	-
Teknisk m. avh.	600.7	14.21	1.30
Vašiček u. avh.	599.8	13.46	-
Vašiček m. avh.	600.0	16.13	1.20
Black-Kar. u. avh.	596.2	17.33	-
Black-Kar. m. avh.	596.3	19.37	1.12
Medium rente			
Rentetype	Pris	sd(Pris)	sd(Pris m. avh.)/sd(Pris u. avh)
Teknisk u. avh.	509.1	7.95	-
Teknisk m. avh.	509.1	10.28	1.29
Vašiček u. avh.	514.8	20.06	-
Vašiček m. avh.	515.4	21.27	1.06
Black-Kar. u. avh.	516.2	29.97	-
Black-Kar. m. avh.	516.8	30.85	1.03

Tabell D.3: Longevity Bond under Perks-modellen

Tillegg E

R-kode

E.1 Pensjonsporteføljene

```
##### Ser her på porteføljer og simulering #####
##### Gompertz-Makeham #####

attach('C:\\Users\\Mak\\Skola\\Masteroppgave\\vasicek-høyFluk-rente45.txt')
attach('C:\\Users\\Mak\\Skola\\Masteroppgave\\BK-høyFluk-rente45.txt')
rv=rv_keep
rBK=rBK_keep
#teknisk rente:
r=0.045
v=1/(1+r)
sim=10^4

#Lager de to porteføljene
J=0.5*10^5 #antar at det er 50% av hvert kjønn
iii=30:89
n1=exp(-0.05*abs(iii-40))
n2=exp(-0.05*abs(iii-60))
c1=J/sum(n1)
c2=J/sum(n2)
N1=round(c(array(0,29),c1*n1))
N2=round(c(array(0,29),c2*n2))
#plot(N1[30:89], type="l", col="red", xlab="tid", ylab="antall personer")
#lines(N2[30:89], type="l", col="blue")

##### simulerer inn i fremtiden #####

#Leser inn for kvinner
kGM = read.table("gompKvinner.txt", header = F)
kGM=as.matrix(kGM)
theta0_k=kGM[2:57,2]
theta1_k=kGM[2:57,3]
theta2_k=kGM[2:57,4]

#Leser inn for menn
mGM = read.table("gompMenn.txt", header = F)
mGM=as.matrix(mGM)
theta0_m=mGM[2:57,2]
theta1_m=mGM[2:57,3]
theta2_m=mGM[2:57,4]

diff0_kv=diff(log(theta0_k))
diff1_kv=diff(log(theta1_k))
diff2_kv=diff(log(theta2_k))
mu0_kv=mean(diff0_kv)
mu1_kv=mean(diff1_kv)
mu2_kv=mean(diff2_kv)
sigma_kv=cov(cbind(diff0_kv,diff1_kv,diff2_kv)) #kovariansen kvinner

diff0_m=diff(log(theta0_m))
diff1_m=diff(log(theta1_m))
diff2_m=diff(log(theta2_m))
mu0_m=mean(diff0_m)
mu1_m=mean(diff1_m)
mu2_m=mean(diff2_m)
sigma_m=cov(cbind(diff0_m,diff1_m,diff2_m)) #kovariansen menn

#felles kovarians-matrise:
S=cov(cbind(diff0_kv,diff1_kv,diff2_kv,diff0_m,diff1_m,diff2_m))

T=51#simulerer 50 år frem i tid

#simulerer nye parametere rundt de eksisterende-disse er UTEN AVH!
```

```

par0_kv=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par0_kv[1,]=log(theta0_k[length(theta0_k)])
par1_kv=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par1_kv[1,]=log(theta1_k[length(theta0_k)])
par2_kv=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par2_kv[1,]=log(theta2_k[length(theta0_k)])
par0_m=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par0_m[1,]=log(theta0_m[length(theta0_m)])
par1_m=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par1_m[1,]=log(theta1_m[length(theta0_m)])
par2_m=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par2_m[1,]=log(theta2_m[length(theta0_m)])

#simulerer nye parametere rundt de eksisterende-disse er MED AVH!
par0_kv_A=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par0_kv_A[1,]=log(theta0_k[length(theta0_k)])
par1_kv_A=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par1_kv_A[1,]=log(theta1_k[length(theta0_k)])
par2_kv_A=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par2_kv_A[1,]=log(theta2_k[length(theta0_k)])
par0_m_A=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par0_m_A[1,]=log(theta0_m[length(theta0_m)])
par1_m_A=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par1_m_A[1,]=log(theta1_m[length(theta0_m)])
par2_m_A=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par2_m_A[1,]=log(theta2_m[length(theta0_m)])

#Her kommer avsetningene til å være for teknisk rente
ksi1=0*(1:(T))%*(rep(0,sim))
ksi2=0*(1:(T))%*(rep(0,sim))
ksi1_A=0*(1:(T))%*(rep(0,sim))
ksi2_A=0*(1:(T))%*(rep(0,sim))

#Her kommer avsetningene til å være for stokastisk rente
ksi1_V=0*(1:(T))%*(rep(0,sim)) #Vasicek
ksi2_V=0*(1:(T))%*(rep(0,sim)) #Vasicek
ksi1_A_V=0*(1:(T))%*(rep(0,sim)) #Vasicek
ksi2_A_V=0*(1:(T))%*(rep(0,sim)) #Vasicek
ksi1_BK=0*(1:(T))%*(rep(0,sim)) #Black-Karisinky
ksi2_BK=0*(1:(T))%*(rep(0,sim)) #Black-Karisinky
ksi1_A_BK=0*(1:(T))%*(rep(0,sim)) #Black-Karisinky
ksi2_A_BK=0*(1:(T))%*(rep(0,sim)) #Black-Karisinky

##### Antar at premien er 0 #####

lr=67
l0=30
n=lr-l0
le=89 #antar at porteføljen ikke inneholder noen personer over 89

library(mvtnorm)

rep=rep(0,3)
rep2=rep(0,6)
l2=120

for(s in 1:sim) {
enQxGM_k=array(0,c(120,sim))
enQxGM_m=array(0,c(120,sim))
enQxGM_k_A=array(0,c(120,sim))
enQxGM_m_A=array(0,c(120,sim))

enQxGM_k[1,]=1
enQxGM_m[1,]=1
enQxGM_k_A[1,]=1
enQxGM_m_A[1,]=1

for(k in 1:(T)) {
matrise_kv=rmvnorm(T,mean=rep,sigma=sigma_kv)
matrise_m=rmvnorm(T,mean=rep,sigma=sigma_m)
matrise=rmvnorm(T,mean=rep2,sigma=S)#for avh
t=k
if(t>1) {
par0_kv[t,s]=log(par0_kv[t-1,s])+mu0_kv+matrise_kv[t-1,1]
par1_kv[t,s]=log(par1_kv[t-1,s])+mu1_kv+matrise_kv[t-1,2]
par2_kv[t,s]=log(par2_kv[t-1,s])+mu2_kv+matrise_kv[t-1,3]
par0_m[t,s]=log(par0_m[t-1,s])+mu0_m+matrise_m[t-1,1]
par1_m[t,s]=log(par1_m[t-1,s])+mu1_m+matrise_m[t-1,2]
par2_m[t,s]=log(par2_m[t-1,s])+mu2_m+matrise_m[t-1,3]
par0_kv_A[t,s]=log(par0_kv_A[t-1,s])+mu0_kv+matrise[t-1,1]
par1_kv_A[t,s]=log(par1_kv_A[t-1,s])+mu1_kv+matrise[t-1,2]
par2_kv_A[t,s]=log(par2_kv_A[t-1,s])+mu2_kv+matrise[t-1,3]
par0_m_A[t,s]=log(par0_m_A[t-1,s])+mu0_m+matrise[t-1,4]
par1_m_A[t,s]=log(par1_m_A[t-1,s])+mu1_m+matrise[t-1,5]
par2_m_A[t,s]=log(par2_m_A[t-1,s])+mu2_m+matrise[t-1,6]
}
}#if slutt
par0_kv[t,s]=exp(par0_kv[t,s])
par1_kv[t,s]=exp(par1_kv[t,s])

```

```

par2_kv[t,s]=exp(par2_kv[t,s])
par0_m[t,s]=exp(par0_m[t,s])
par1_m[t,s]=exp(par1_m[t,s])
par2_m[t,s]=exp(par2_m[t,s])
par0_kv_A[t,s]=exp(par0_kv_A[t,s])
par1_kv_A[t,s]=exp(par1_kv_A[t,s])
par2_kv_A[t,s]=exp(par2_kv_A[t,s])
par0_m_A[t,s]=exp(par0_m_A[t,s])
par1_m_A[t,s]=exp(par1_m_A[t,s])
par2_m_A[t,s]=exp(par2_m_A[t,s])

theta0=(par0_kv[t,s])
theta1=(par1_kv[t,s])
theta2=(par2_kv[t,s])
theta1=theta1/theta2
theta0_m=(par0_m[t,s])
theta1_m=(par1_m[t,s])
theta2_m=(par2_m[t,s])
theta1_m=theta1_m/theta2_m

theta0_A=(par0_kv_A[t,s])
theta1_A=(par1_kv_A[t,s])
theta2_A=(par2_kv_A[t,s])
theta1_A=theta1_A/theta2_A
theta0_m_A=(par0_m_A[t,s])
theta1_m_A=(par1_m_A[t,s])
theta2_m_A=(par2_m_A[t,s])
theta1_m_A=theta1_m_A/theta2_m_A

enQxGM_k[2:120,s]=1-exp(-theta0
-theta1*(exp(theta2*(1+1))-exp(theta2*1)))
enQxGM_m[2:120,s]=1-exp(-theta0_m
-theta1_m*(exp(theta2_m*(1+1))-exp(theta2_m*1)))
enQxGM_k_A[2:120,s]=1-exp(-theta0_A
-theta1_A*(exp(theta2_A*(1+1))-exp(theta2_A*1)))
enQxGM_m_A[2:120,s]=1-exp(-theta0_m_A
-theta1_m_A*(exp(theta2_m_A*(1+1))-exp(theta2_m_A*1)))

temp1=temp2=0
temp1_A=temp2_A=0
for(i in (1r-k):(1e)) {
  if((i+k)<120 && k<=(T)) {
    #if(k<=(T)) {
      temp1=temp1+N1[i]*(prod(1-enQxGM_k[1+i+0:k,s])+prod(1-enQxGM_m[1+i+0:k,s]))
      temp2=temp2+N2[i]*(prod(1-enQxGM_k[1+i+0:k,s])+prod(1-enQxGM_m[1+i+0:k,s]))
      temp1_A=temp1_A+N1[i]*(prod(1-enQxGM_k_A[1+i+0:k,s])+prod(1-enQxGM_m_A[1+i+0:k,s]))
      temp2_A=temp2_A+N2[i]*(prod(1-enQxGM_k_A[1+i+0:k,s])+prod(1-enQxGM_m_A[1+i+0:k,s]))
    }#if slutt
  }#if slutt
}#for slutt
ksil[k,s]=temp1
ksil_A[k,s]=temp1_A
ksil2[k,s]=temp2
ksil2_A[k,s]=temp2_A
}
}

ksil1=ksil2=sd11=sd22=0*(1:(T))
ksil1_A=ksil2_A=sd11_A=sd22_A=0*(1:(T))

for(t in 1:(T)) {
  ksil1[t]=mean(ksil[t,])
  sd11[t]=sd(ksil[t,])
  ksil2[t]=mean(ksil2[t,])
  sd22[t]=sd(ksil2[t,])
  ksil1_A[t]=mean(ksil_A[t,])
  sd11_A[t]=sd(ksil_A[t,])
  ksil2_A[t]=mean(ksil2_A[t,])
  sd22_A[t]=sd(ksil2_A[t,])
}
qu1=ksil1+1.96*sd11 #for 95% K.I. øvre
qu2=ksil2+1.96*sd22 #for 95% K.I. nedre
ql1=ksil1-1.96*sd11 #for 95% K.I. øvre
ql2=ksil2-1.96*sd22 #for 95% K.I. nedre
qu1_A=ksil1_A+1.96*sd11_A #for 95% K.I. øvre
qu2_A=ksil2_A+1.96*sd22_A #for 95% K.I. nedre
ql1_A=ksil1_A-1.96*sd11_A #for 95% K.I. øvre
ql2_A=ksil2_A-1.96*sd22_A #for 95% K.I. nedre

par(mfcol=c(1,2))
aar=2006:2056
#porteføljel
vek=c(0.7*10^4,max(qu1_A))
plot(aar,qu1_A[1:T],col=4,lty=1, type="l",ylab="Utbetaling",
xlab="År",main="Porteføljelje 1",ylim=vek)
legend(x=2006,y=14000,col=c(1,2,4),lty=1:1,
c("utbetaling","95% K.I. u. avh. ","95% K.I. m. avh."),bty="n")
lines(aar,ql1_A[1:T], col=4, type="l",lty=1)
lines(aar,ksil1[1:T], type="l")
lines(aar,qu1[1:T],col=2,lty=1)

```

```

lines(aar,ql1[1:T],col=2,lty=1)
#portefølje2
vek2=c(0.3*10^4,max(qu2_A))
plot(aar,qu2_A[1:T],col=4,lty=1, type="l",ylab="Utbetaling",
xlab="År",main="Portefølje 2",ylim=vek2)
legend(x=2006,y=9000,col=c(1,2,4),lty=1:1,
c("utbetaling","95% K.I. u. avh.,"95% K.I. m. avh."),bty="n")
lines(aar,ql2_A[1:T], col=4, type="l",lty=1)
lines(aar,ksi2[1:T], type="l")
lines(aar,qu2[1:T],col=2,lty=1)
lines(aar,ql2[1:T],col=2,lty=1)

#regner ut nåverdiene av porteføljen
temp1=temp2=temp1_A=temp2_A=rep(0,sim)
temp1_V=temp2_V=temp1_A_V=temp2_A_V=rep(0,sim)
temp1_BK=temp2_BK=temp1_A_BK=temp2_A_BK=rep(0,sim)
for(s in 1:sim) {
temp1[s]=sum(ksi1[1:(T),s]*v^(0:(T-1)))
temp2[s]=sum(ksi2[1:(T),s]*v^(0:(T-1)))
temp1_A[s]=sum(ksi1_A[1:(T),s]*v^(0:(T-1)))
temp2_A[s]=sum(ksi2_A[1:(T),s]*v^(0:(T-1)))
hm=hm1=hm2=hm3=hm4=hm5=hm6=hm7=0
for(t in 1:T) {
hm=hm+ksi1[t,s]*(1/(1+rv[t,s])^(t-1))
hm1=hm1+ksi2[t,s]*(1/(1+rv[t,s])^(t-1))
hm2=hm2+ksi1_A[t,s]*(1/(1+rv[t,s])^(t-1))
hm3=hm3+ksi2_A[t,s]*(1/(1+rv[t,s])^(t-1))
hm4=hm4+ksi1[t,s]*(1/(1+rBK[t,s])^(t-1))
hm5=hm5+ksi2[t,s]*(1/(1+rBK[t,s])^(t-1))
hm6=hm6+ksi1_A[t,s]*(1/(1+rBK[t,s])^(t-1))
hm7=hm7+ksi2_A[t,s]*(1/(1+rBK[t,s])^(t-1))
}
temp1_V[s]=hm
temp2_V[s]=hm1
temp1_A_V[s]=hm2
temp2_A_V[s]=hm3
temp1_BK[s]=hm4
temp2_BK[s]=hm5
temp1_A_BK[s]=hm6
temp2_A_BK[s]=hm7
}

#teknisk rente
PV01=mean(temp1)
PV02=mean(temp2)
sd1=sd(temp1)
sd2=sd(temp2)
PV01_A=mean(temp1_A)
PV02_A=mean(temp2_A)
sd1_A=sd(temp1_A)
sd2_A=sd(temp2_A)

#Vasicek rente
PV01_V=mean(temp1_V)
PV02_V=mean(temp2_V)
sd1_V=sd(temp1_V)
sd2_V=sd(temp2_V)
PV01_A_V=mean(temp1_A_V)
PV02_A_V=mean(temp2_A_V)
sd1_A_V=sd(temp1_A_V)
sd2_A_V=sd(temp2_A_V)

#Black-Karisinsky rente
PV01_BK=mean(temp1_BK)
PV02_BK=mean(temp2_BK)
sd1_BK=sd(temp1_BK)
sd2_BK=sd(temp2_BK)
PV01_A_BK=mean(temp1_A_BK)
PV02_A_BK=mean(temp2_A_BK)
sd1_A_BK=sd(temp1_A_BK)
sd2_A_BK=sd(temp2_A_BK)

#teknisk rente
print(c(PV01,PV02, sd1,sd2))
print(c(PV01_A,PV02_A, sd1_A,sd2_A))

#Vasicek rente
print(c(PV01_V,PV02_V, sd1_V,sd2_V))
print(c(PV01_A_V,PV02_A_V, sd1_A_V,sd2_A_V))

#Black_Karisinsky rente
print(c(PV01_BK,PV02_BK, sd1_BK,sd2_BK))
print(c(PV01_A_BK,PV02_A_BK, sd1_A_BK,sd2_A_BK))

print(c(sd1_A/sd1,sd1_A_V/sd1_V,sd1_A_BK/sd1_BK))
print(c(sd2_A/sd2,sd2_A_V/sd2_V,sd2_A_BK/sd2_BK))

```

E.2 Nullkupong Longevity Bond

```
##### Nullkupong Longevity Bond #####
##### GOMPERTZ-MAKEHAM #####

setwd("C:\\Users\\Mak\\Skola\\Masteroppgave")

attach('C:\\Users\\Mak\\Skola\\Masteroppgave\\vasicek-høyFluk-rente45.txt')
attach('C:\\Users\\Mak\\Skola\\Masteroppgave\\BK-høyFluk-rente45.txt')
rv=rv_keep
rBK=rBK_keep
#teknisk rente:
r=0.045
v=1/(1+r)
sim=10^4

#Leser inn for kvinner
kGM = read.table("gompKvinner.txt",header = F)
kGM=as.matrix(kGM)
theta0_k=kGM[1:57,2]
theta1_k=kGM[1:57,3]
theta2_k=kGM[1:57,4]

#Leser inn for menn
mGM = read.table("gompMenn.txt",header = F)
mGM=as.matrix(mGM)
theta0_m=mGM[1:57,2]
theta1_m=mGM[1:57,3]
theta2_m=mGM[1:57,4]

diff0_kv=diff(log(theta0_k))
diff1_kv=diff(log(theta1_k))
diff2_kv=diff(log(theta2_k))
mu0_kv=mean(diff0_kv)
mu1_kv=mean(diff1_kv)
mu2_kv=mean(diff2_kv)
sigma_kv=cov(cbind(diff0_kv,diff1_kv,diff2_kv)) #kovariansen kvinner

diff0_m=diff(log(theta0_m))
diff1_m=diff(log(theta1_m))
diff2_m=diff(log(theta2_m))
mu0_m=mean(diff0_m)
mu1_m=mean(diff1_m)
mu2_m=mean(diff2_m)
sigma_m=cov(cbind(diff0_m,diff1_m,diff2_m)) #kovariansen menn

#felles kovarians-matrise:
S=cov(cbind(diff0_kv,diff1_kv,diff2_kv,diff0_m,diff1_m,diff2_m))
#korr=cor(cbind(diff0_kv,diff1_kv,diff2_kv,diff0_m,diff1_m,diff2_m))

T=15#simulerer 15 år frem i tid-antar at obligasjonene utløper da.

#simulerer nye parametere rundt de eksisterende-disse er UTEN AVH!
par0_kv=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par0_kv[1,]=log(theta0_k[length(theta0_k)])
par1_kv=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par1_kv[1,]=log(theta1_k[length(theta0_k)])
par2_kv=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par2_kv[1,]=log(theta2_k[length(theta0_k)])
par0_m=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par0_m[1,]=log(theta0_m[length(theta0_m)])
par1_m=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par1_m[1,]=log(theta1_m[length(theta0_m)])
par2_m=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par2_m[1,]=log(theta2_m[length(theta0_m)])

#simulerer nye parametere rundt de eksisterende-disse er MED AVH!
par0_kv_A=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par0_kv_A[1,]=log(theta0_k[length(theta0_k)])
par1_kv_A=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par1_kv_A[1,]=log(theta1_k[length(theta0_k)])
par2_kv_A=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par2_kv_A[1,]=log(theta2_k[length(theta0_k)])
par0_m_A=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par0_m_A[1,]=log(theta0_m[length(theta0_m)])
par1_m_A=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par1_m_A[1,]=log(theta1_m[length(theta0_m)])
par2_m_A=0*(1:(T))%*(0*(t(1:sim)))
par2_m_A[1,]=log(theta2_m[length(theta0_m)])

library(mvtnorm)

rep=rep(0,3)
rep2=rep(0,6)
l=2:120

x=67 #min x-åring

B_tilde=B_tilde_A=B_tilde_rv=B_tilde_rv_A=B_tilde_rBK=B_tilde_rBK_A=rep(0,sim)
```

```

for(s in 1:sim) {

temp=tempp1=tempp2=tempp3=tempp4=tempp5=1

enQxGM_k=array(0,c(120,sim))
enQxGM_m=array(0,c(120,sim))
enQxGM_k_A=array(0,c(120,sim))
enQxGM_m_A=array(0,c(120,sim))

enQxGM_k[1,]=0
enQxGM_m[1,]=0
enQxGM_k_A[1,]=0
enQxGM_m_A[1,]=0

for(k in 1:(T)) {
matrise_kv=rmvnorm(T,mean=rep,sigma=sigma_kv)
matrise_m=rmvnorm(T,mean=rep,sigma=sigma_m)
matrise=rmvnorm(T,mean=rep2,sigma=S)#For avh
t=k
if(t>1) {
par0_kv[t,s]=log(par0_kv[t-1,s])+mu0_kv+matrise_kv[t-1,1]
par1_kv[t,s]=log(par1_kv[t-1,s])+mu1_kv+matrise_kv[t-1,2]
par2_kv[t,s]=log(par2_kv[t-1,s])+mu2_kv+matrise_kv[t-1,3]
par0_m[t,s]=log(par0_m[t-1,s])+mu0_m+matrise_m[t-1,1]
par1_m[t,s]=log(par1_m[t-1,s])+mu1_m+matrise_m[t-1,2]
par2_m[t,s]=log(par2_m[t-1,s])+mu2_m+matrise_m[t-1,3]
par0_kv_A[t,s]=log(par0_kv_A[t-1,s])+mu0_kv+matrise[t-1,1]
par1_kv_A[t,s]=log(par1_kv_A[t-1,s])+mu1_kv+matrise[t-1,2]
par2_kv_A[t,s]=log(par2_kv_A[t-1,s])+mu2_kv+matrise[t-1,3]
par0_m_A[t,s]=log(par0_m_A[t-1,s])+mu0_m+matrise[t-1,4]
par1_m_A[t,s]=log(par1_m_A[t-1,s])+mu1_m+matrise[t-1,5]
par2_m_A[t,s]=log(par2_m_A[t-1,s])+mu2_m+matrise[t-1,6]

}#if slutt
par0_kv[t,s]=exp(par0_kv[t,s])
par1_kv[t,s]=exp(par1_kv[t,s])
par2_kv[t,s]=exp(par2_kv[t,s])
par0_m[t,s]=exp(par0_m[t,s])
par1_m[t,s]=exp(par1_m[t,s])
par2_m[t,s]=exp(par2_m[t,s])
par0_kv_A[t,s]=exp(par0_kv_A[t,s])
par1_kv_A[t,s]=exp(par1_kv_A[t,s])
par2_kv_A[t,s]=exp(par2_kv_A[t,s])
par0_m_A[t,s]=exp(par0_m_A[t,s])
par1_m_A[t,s]=exp(par1_m_A[t,s])
par2_m_A[t,s]=exp(par2_m_A[t,s])

theta0=(par0_kv[t,s])
theta1=(par1_kv[t,s])
theta2=(par2_kv[t,s])
thetal=theta1/theta2
theta0_m=(par0_m[t,s])
theta1_m=(par1_m[t,s])
theta2_m=(par2_m[t,s])
thetal_m=theta1_m/theta2_m

theta0_A=(par0_kv_A[t,s])
theta1_A=(par1_kv_A[t,s])
theta2_A=(par2_kv_A[t,s])
thetal_A=theta1_A/theta2_A
theta0_m_A=(par0_m_A[t,s])
theta1_m_A=(par1_m_A[t,s])
theta2_m_A=(par2_m_A[t,s])
thetal_m_A=theta1_m_A/theta2_m_A

enQxGM_k[2:120,s]=1-exp(-theta0
-thetal*(exp(theta2*(1+1))-exp(theta2*1)))
enQxGM_m[2:120,s]=1-exp(-theta0_m
-thetal_m*(exp(theta2_m*(1+1))-exp(theta2_m*1)))
enQxGM_k_A[2:120,s]=1-exp(-theta0_A
-thetal_A*(exp(theta2_A*(1+1))-exp(theta2_A*1)))
enQxGM_m_A[2:120,s]=1-exp(-theta0_m_A
-thetal_m_A*(exp(theta2_m_A*(1+1))-exp(theta2_m_A*1)))

### bruker hele befolkningen som referansepopulasjon
temp=tempp*(1/((1+rv[t,s]))*0.5
*((1-enQxGM_k[x+t,s])+(1-enQxGM_m[x+t,s])))
tempp1=tempp1*((1/((1+rv[t,s]))*0.5
*((1-enQxGM_k_A[x+t,s])+(1-enQxGM_m_A[x+t,s])))
tempp2=tempp2*((1/((1+rBK[t,s]))*0.5
*((1-enQxGM_k[x+t,s])+(1-enQxGM_m[x+t,s])))
tempp3=tempp3*((1/((1+rBK[t,s]))*0.5
*((1-enQxGM_k_A[x+t,s])+(1-enQxGM_m_A[x+t,s])))
tempp4=tempp4*((v*0.5*((1-enQxGM_k[x+t,s])+(1-enQxGM_m[x+t,s])))
tempp5=tempp5*((v*0.5*((1-enQxGM_k_A[x+t,s])+(1-enQxGM_m_A[x+t,s])))

}
B_tilde_rv[s]=tempp
B_tilde_rv_A[s]=tempp1
B_tilde_rBK[s]=tempp2

```



```

B_tilde_rBK_A[s]=tempp3
B_tilde[s]=tempp4
B_tilde_A[s]=tempp5
}

#Antar en kupong på 1000
print(c(mean(1000*B_tilde),mean(1000*B_tilde_A),mean(1000*B_tilde_rv),
mean(1000*B_tilde_rv_A),mean(1000*B_tilde_rBK),mean(1000*B_tilde_rBK_A)))
print(c(sd(1000*B_tilde),sd(1000*B_tilde_A),sd(1000*B_tilde_rv),
sd(1000*B_tilde_rv_A),sd(1000*B_tilde_rBK),sd(1000*B_tilde_rBK_A)))
print(c(sd(1000*B_tilde_A)/sd(1000*B_tilde),
sd(1000*B_tilde_rv_A)/sd(1000*B_tilde_rv),
sd(1000*B_tilde_rBK_A)/sd(1000*B_tilde_rBK)))

#####
##### Nullkupong Longevity Bond #####
##### PERKS #####

setwd("C:\\Users\\Mak\\Skola\\Masteroppgave")

attach('C:\\Users\\Mak\\Skola\\Masteroppgave\\vasicek-høyFluk-rente45.txt')
attach('C:\\Users\\Mak\\Skola\\Masteroppgave\\BK-høyFluk-rente45.txt')
rv=rv_keep
rBK=rBK_keep
#teknisk rente:
r=0.045
v=1/(1+r)

sim=10^4
T=15#simulerer 15 år frem i tid

#Leser inn for kvinner
kP = read.table("perksKvinner.txt",header = F)
kP=as.matrix(kP)
theta0_k=-1*kP[1:57,2]
thetal_k=kP[1:57,3]

#Leser inn for menn
mP = read.table("perksMenn.txt",header = F)
mP=as.matrix(mP)
theta0_m=-1*mP[1:57,2]
thetal_m=mP[1:57,3]

diff0_kv=diff((theta0_k))
diff1_kv=diff((thetal_k))
mu0_kv=mean(diff0_kv)
mul_kv=mean(diff1_kv)
sigma_kv=cov(cbind(diff0_kv,diff1_kv)) #kovariansen kvinner

diff0_m=diff((theta0_m))
diff1_m=diff((thetal_m))
mu0_m=mean(diff0_m)
mul_m=mean(diff1_m)
sigma_m=cov(cbind(diff0_m,diff1_m)) #kovariansen menn

#felles kovarians-matrise:
S=cov(cbind(diff0_kv,diff1_kv,diff0_m,diff1_m))

#simulerer nye parametere rundt de eksisterende-disse er UTEN AVH!
par0_kv=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par0_kv[1,]=(theta0_k[length(theta0_k)])
par1_kv=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par1_kv[1,]=(thetal_k[length(theta0_k)])

par0_m=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par0_m[1,]=(theta0_m[length(theta0_m)])
par1_m=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par1_m[1,]=(thetal_m[length(theta0_m)])

#simulerer nye parametere rundt de eksisterende-disse er MED AVH!
par0_kv_A=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par0_kv_A[1,]=(theta0_k[length(theta0_k)])
par1_kv_A=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par1_kv_A[1,]=(thetal_k[length(theta0_k)])
par0_m_A=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par0_m_A[1,]=(theta0_m[length(theta0_m)])
par1_m_A=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par1_m_A[1,]=(thetal_m[length(theta0_m)])

library(mvtnorm)
l=2:120

x=67 #min x-åring

B_tilde=B_tilde_A=B_tilde_rv=B_tilde_rv_A=rep(0,sim)
B_tilde_rBK=B_tilde_rBK_A=rep(0,sim)

rep=rep(0,2)

```

```

rep2=rep(0,4)
for(s in 1:sim) {

temp=tempp1=temp2=tempp3=tempp4=tempp5=1

enQx_k=array(0,c(120,sim))
enQx_m=array(0,c(120,sim))
enQx_k_A=array(0,c(120,sim))
enQx_m_A=array(0,c(120,sim))

enQx_k[1,]=0
enQx_m[1,]=0
enQx_k_A[1,]=0
enQx_m_A[1,]=0

for(k in 1:(T)) {
matrise_kv=rmvnorm(T,mean=rep,sigma=sigma_kv)
matrise_m=rmvnorm(T,mean=rep,sigma=sigma_m)
matrise=rmvnorm(T,mean=rep2,sigma=S)#for avh. mellom kjønnene
t=k
if(t>1) {
par0_kv[t,s]=par0_kv[t-1,s]+mu0_kv+matrise_kv[t-1,1]
par1_kv[t,s]=par1_kv[t-1,s]+mul_kv+matrise_kv[t-1,2]
par0_m[t,s]=par0_m[t-1,s]+mu0_m+matrise_m[t-1,1]
par1_m[t,s]=par1_m[t-1,s]+mul_m+matrise_m[t-1,2]
par0_kv_A[t,s]=par0_kv_A[t-1,s]+mu0_kv+matrise[t-1,1]
par1_kv_A[t,s]=par1_kv_A[t-1,s]+mul_kv+matrise[t-1,2]
par0_m_A[t,s]=par0_m_A[t-1,s]+mu0_m+matrise[t-1,3]
par1_m_A[t,s]=par1_m_A[t-1,s]+mul_m+matrise[t-1,4]
}

}#if slutt

theta0=(par0_kv[t,s])
theta1=(par1_kv[t,s])
theta0_m=(par0_m[t,s])
theta1_m=(par1_m[t,s])

theta0_A=(par0_kv_A[t,s])
theta1_A=(par1_kv_A[t,s])
theta0_m_A=(par0_m_A[t,s])
theta1_m_A=(par1_m_A[t,s])

enQx_k[2:120,s]=1-(1/(1+exp(theta0 + theta1*(1+1))))
enQx_m[2:120,s]=1-(1/(1+exp(theta0_m + theta1_m*(1+1))))
enQx_k_A[2:120,s]=1-(1/(1+exp(theta0_A + theta1_A*(1+1))))
enQx_m_A[2:120,s]=1-(1/(1+exp(theta0_m_A + theta1_m_A*(1+1))))

### bruker hele befolkningen som referansepopulasjon (dvs 67-åringene)
temp=tempp*(1/(1+rv[t,s]))*0.5
*((1-enQx_k[x+t,s])+(1-enQx_m[x+t,s]))
tempp1=tempp*(1/(1+rv[t,s]))*0.5
*((1-enQx_k_A[x+t,s])+(1-enQx_m_A[x+t,s]))
temp2=tempp2*(1/(1+rBK[t,s]))*0.5
*((1-enQx_k[x+t,s])+(1-enQx_m[x+t,s]))
tempp3=tempp3*(1/(1+rBK[t,s]))*0.5
*((1-enQx_k_A[x+t,s])+(1-enQx_m_A[x+t,s]))
tempp4=tempp4*((v*0.5*((1-enQx_k[x+t,s])+(1-enQx_m[x+t,s]))))
tempp5=tempp5*((v*0.5*((1-enQx_k_A[x+t,s])+(1-enQx_m_A[x+t,s]))))
}
B_tilde_rv[s]=tempp
B_tilde_rv_A[s]=tempp1
B_tilde_rBK[s]=tempp2
B_tilde_rBK_A[s]=tempp3
B_tilde[s]=tempp4
B_tilde_A[s]=tempp5
}

#antar en kupong på 1000
print(c(mean(1000*B_tilde),mean(1000*B_tilde_A),mean(1000*B_tilde_rv),
mean(1000*B_tilde_rv_A),mean(1000*B_tilde_rBK),mean(1000*B_tilde_rBK_A)))
print(c(sd(1000*B_tilde),sd(1000*B_tilde_A),sd(1000*B_tilde_rv),
sd(1000*B_tilde_rv_A),sd(1000*B_tilde_rBK),sd(1000*B_tilde_rBK_A)))
print(c(sd(1000*B_tilde_A)/sd(1000*B_tilde),
sd(1000*B_tilde_rv_A)/sd(1000*B_tilde_rv),
sd(1000*B_tilde_rBK_A)/sd(1000*B_tilde_rBK)))

```

E.3 Longevity Bond

```

##### Longevity Bond #####
##### Gompertz-Makeham #####

attach('C:\Users\Mak\Skola\Masteroppgave\vasicek-lavFluk-rente25.txt')
attach('C:\Users\Mak\Skola\Masteroppgave\BK-lavFluk-rente25.txt')
rv=rv_keep
rBK=rBK_keep
#teknisk rente

```

```

r=0.025
v=1/(1+r)

#Leser inn for kvinner
kGM = read.table("gompKvinner.txt",header = F)
kGM=as.matrix(kGM)
theta0_k=kGM[1:57,2]
theta1_k=kGM[1:57,3]
theta2_k=kGM[1:57,4]

#Leser inn for menn
mGM = read.table("gompMenn.txt",header = F)
mGM=as.matrix(mGM)
theta0_m=mGM[1:57,2]
theta1_m=mGM[1:57,3]
theta2_m=mGM[1:57,4]

diff0_kv=diff(log(theta0_k))
diff1_kv=diff(log(theta1_k))
diff2_kv=diff(log(theta2_k))
mu0_kv=mean(diff0_kv)
mu1_kv=mean(diff1_kv)
mu2_kv=mean(diff2_kv)
sigma_kv=cov(cbind(diff0_kv,diff1_kv,diff2_kv)) #kovariansen kvinner

diff0_m=diff(log(theta0_m))
diff1_m=diff(log(theta1_m))
diff2_m=diff(log(theta2_m))
mu0_m=mean(diff0_m)
mu1_m=mean(diff1_m)
mu2_m=mean(diff2_m)
sigma_m=cov(cbind(diff0_m,diff1_m,diff2_m)) #kovariansen menn

#felles kovarians-matrise:
S=cov(cbind(diff0_kv,diff1_kv,diff2_kv,diff0_m,diff1_m,diff2_m))

T=25#simulerer 50 år frem i tid
sim=10^4

#simulerer nye parametere rundt de eksisterende-disse er UTEN AVH!
par0_kv=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par0_kv[1,]=log(theta0_k[length(theta0_k)])
par1_kv=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par1_kv[1,]=log(theta1_k[length(theta0_k)])
par2_kv=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par2_kv[1,]=log(theta2_k[length(theta0_k)])
par0_m=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par0_m[1,]=log(theta0_m[length(theta0_m)])
par1_m=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par1_m[1,]=log(theta1_m[length(theta0_m)])
par2_m=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par2_m[1,]=log(theta2_m[length(theta0_m)])

#simulerer nye parametere rundt de eksisterende-disse er MED AVH!
par0_kv_A=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par0_kv_A[1,]=log(theta0_k[length(theta0_k)])
par1_kv_A=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par1_kv_A[1,]=log(theta1_k[length(theta0_k)])
par2_kv_A=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par2_kv_A[1,]=log(theta2_k[length(theta0_k)])
par0_m_A=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par0_m_A[1,]=log(theta0_m[length(theta0_m)])
par1_m_A=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par1_m_A[1,]=log(theta1_m[length(theta0_m)])
par2_m_A=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par2_m_A[1,]=log(theta2_m[length(theta0_m)])

library(mvtnorm)
#eps=matrix(rnorm(T*sim,0,1),T,sim)#kol1: år, kol2: sim #for renter

rep=rep(0,3)
rep2=rep(0,6)
for(s in 1:sim) {
  matrise_kv=rmvnorm(T,mean=rep,sigma=sigma_kv)
  matrise_m=rmvnorm(T,mean=rep,sigma=sigma_m)
  matrise=rmvnorm(T,mean=rep2,sigma=S)#for avh
  for(t in 2:(T)) {
    par0_kv[t,s]=par0_kv[t-1,s]+mu0_kv+matrise_kv[t-1,1]
    par1_kv[t,s]=par1_kv[t-1,s]+mu1_kv+matrise_kv[t-1,2]
    par2_kv[t,s]=par2_kv[t-1,s]+mu2_kv+matrise_kv[t-1,3]
    par0_m[t,s]=par0_m[t-1,s]+mu0_m+matrise_m[t-1,1]
    par1_m[t,s]=par1_m[t-1,s]+mu1_m+matrise_m[t-1,2]
    par2_m[t,s]=par2_m[t-1,s]+mu2_m+matrise_m[t-1,3]
    par0_kv_A[t,s]=par0_kv_A[t-1,s]+mu0_kv+matrise[t-1,1]
    par1_kv_A[t,s]=par1_kv_A[t-1,s]+mu1_kv+matrise[t-1,2]
    par2_kv_A[t,s]=par2_kv_A[t-1,s]+mu2_kv+matrise[t-1,3]
    par0_m_A[t,s]=par0_m_A[t-1,s]+mu0_m+matrise[t-1,4]
    par1_m_A[t,s]=par1_m_A[t-1,s]+mu1_m+matrise[t-1,5]
    par2_m_A[t,s]=par2_m_A[t-1,s]+mu2_m+matrise[t-1,6]
  }
}

```

```

}
}
par0_kv=exp(par0_kv)
par1_kv=exp(par1_kv)
par2_kv=exp(par2_kv)
par0_m=exp(par0_m)
par1_m=exp(par1_m)
par2_m=exp(par2_m)
par0_kv_A=exp(par0_kv_A)
par1_kv_A=exp(par1_kv_A)
par2_kv_A=exp(par2_kv_A)
par0_m_A=exp(par0_m_A)
par1_m_A=exp(par1_m_A)
par2_m_A=exp(par2_m_A)

theta0=(par0_kv)
theta1=(par1_kv)
theta2=(par2_kv)
theta1=theta1/theta2
theta0_m=(par0_m)
theta1_m=(par1_m)
theta2_m=(par2_m)
theta1_m=theta1_m/theta2_m

theta0_A=(par0_kv_A)
theta1_A=(par1_kv_A)
theta2_A=(par2_kv_A)
theta1_A=theta1_A/theta2_A
theta0_m_A=(par0_m_A)
theta1_m_A=(par1_m_A)
theta2_m_A=(par2_m_A)
theta1_m_A=theta1_m_A/theta2_m_A

l=2:120

enPxGM_k=array(0,120)
enPxGM_m=array(0,120)
enPxGM_k_A=array(0,120)
enPxGM_m_A=array(0,120)

enPxGM_k[l]=1
enPxGM_m[l]=1
enPxGM_k_A[l]=1
enPxGM_m_A[l]=1

#Her kommer prisen til å være for teknisk rente
ksi=rep(0,sim)
ksi_A=rep(0,sim) #m/avh

#Her kommer prisen til å være for stokastisk rente
ksi_V=rep(0,sim) #Vasicek
ksi_A_V=rep(0,sim) #Vasicek m/avh
ksi_BK=rep(0,sim) #Black-Karisinky
ksi_A_BK=rep(0,sim) #Black-Karisinky m/avh

M=T #maturity of the bond
#Her kommer nåverdien utbetalingene til å være for teknisk rente
LB=array(0,c(M,sim))
LB_A=array(0,c(M,sim)) #m/avh

#Her kommer nåverdien utbetalingene til å være for stokastisk rente
LB_V=array(0,c(M,sim)) #Vasicek
LB_A_V=array(0,c(M,sim)) #Vasicek m/avh
LB_BK=array(0,c(M,sim)) #Black-Karisinky
LB_A_BK=array(0,c(M,sim)) #Black-Karisinky m/avh

lr=67#pensjonsalder-ser på kullet som er 67 i 2006

for(s in 1:sim) {
temp=temp1=temp2=temp3=temp4=temp5=1
for(t in 1:M) {
#antar for enkelthetens skyld at befolkning er 50% kvinner og 50% menn

enPxGM_k[2:120]=exp(-theta0[t,s]
-theta1[t,s]*(exp(theta2[t,s]*(1+1))-exp(theta2[t,s]*1)))
enPxGM_m[2:120]=exp(-theta0_m[t,s]
-theta1_m[t,s]*(exp(theta2_m[t,s]*(1+1))-exp(theta2_m[t,s]*1)))
enPxGM_k_A[2:120]=exp(-theta0_A[t,s]
-theta1_A[t,s]*(exp(theta2_A[t,s]*(1+1))-exp(theta2_A[t,s]*1)))
enPxGM_m_A[2:120]=exp(-theta0_m_A[t,s]
-theta1_m_A[t,s]*(exp(theta2_m_A[t,s]*(1+1))-exp(theta2_m_A[t,s]*1)))

if(t==1) {
#teknisk rente
temp=0.5*(enPxGM_k[(lr+t-1)]+enPxGM_m[(lr+t-1)])*temp
temp1=0.5*(enPxGM_k_A[(lr+t-1)]+enPxGM_m_A[(lr+t-1)])*temp1
LB[t,s]=50*temp*v^t
LB_A[t,s]=50*temp1*v^t

#Vasicek rente

```

```

temp2=0.5*(enPxGM_k[(1r+t-1)]+enPxGM_m[(1r+t-1)])*temp2
temp3=0.5*(enPxGM_k_A[(1r+t-1)]+enPxGM_m_A[(1r+t-1)])*temp3
LB_V[t,s]=50*temp2*(1/(1+rv[t,s]))^t
LB_A_V[t,s]=50*temp3*(1/(1+rv[t,s]))^t

#Black-Karisinsky rente
temp4=0.5*(enPxGM_k[(1r+t-1)]+enPxGM_m[(1r+t-1)])*temp4
temp5=0.5*(enPxGM_k_A[(1r+t-1)]+enPxGM_m_A[(1r+t-1)])*temp5
LB_BK[t,s]=50*temp4*(1/(1+rBK[t,s]))^t
LB_A_BK[t,s]=50*temp5*(1/(1+rBK[t,s]))^t
}#slutt if

if(t>1) {
#teknisk rente
temp=0.5*(enPxGM_k[(1r+t-1)]+enPxGM_m[(1r+t-1)])*temp
temp1=0.5*(enPxGM_k_A[(1r+t-1)]+enPxGM_m_A[(1r+t-1)])*temp1
LB[t,s]=50*temp*v^t
LB_A[t,s]=50*temp1*v^t

#Vasicek rente
temp2=(0.5*(enPxGM_k[(1r+t-1)]+enPxGM_m[(1r+t-1)])*temp2)
temp3=(0.5*(enPxGM_k_A[(1r+t-1)]+enPxGM_m_A[(1r+t-1)])*temp3)
LB_V[t,s]=50*temp2*(1/(1+rv[t,s]))^t
LB_A_V[t,s]=50*temp3*(1/(1+rv[t,s]))^t

#Black-Karisinsky rente
temp4=0.5*(enPxGM_k[(1r+t-1)]+enPxGM_m[(1r+t-1)])*temp4#*(1/(1+rBK[t,s]))^t)
temp5=0.5*(enPxGM_k_A[(1r+t-1)]+enPxGM_m_A[(1r+t-1)])*temp5#*(1/(1+rBK[t,s]))^t)
LB_BK[t,s]=50*temp4*(1/(1+rBK[t,s]))^t
LB_A_BK[t,s]=50*temp5*(1/(1+rBK[t,s]))^t
}#slutt if

}#for t slutt
#NB! Antar en utbetaling på 50mill
ksi[s]=sum(LB[1:T,s])#temp
ksi_A[s]=sum(LB_A[1:T,s])#temp1
ksi_V[s]=sum(LB_V[1:T,s])#temp2
ksi_A_V[s]=sum(LB_A_V[1:T,s])#temp3
ksi_BK[s]=sum(LB_BK[1:T,s])#temp4
ksi_A_BK[s]=sum(LB_A_BK[1:T,s])#temp5
}
m=mean(ksi)
m1=mean(ksi_A)
m2=mean(ksi_V)
m3=mean(ksi_A_V)
m4=mean(ksi_BK)
m5=mean(ksi_A_BK)

s=sd(ksi)
s1=sd(ksi_A)
s2=sd(ksi_V)
s3=sd(ksi_A_V)
s4=sd(ksi_BK)
s5=sd(ksi_A_BK)

print(c(m,m1,m2,m3,m4,m5))
print(c(s,s1,s2,s3,s4,s5))
print(c(s1/s, s3/s2, s5/s4))

#####
##### Longevity Bond #####
##### Perks #####

attach('C:\\Users\\Mak\\Skola\\Masteroppgave\\vasicek-lavFluk-rente25.txt')
attach('C:\\Users\\Mak\\Skola\\Masteroppgave\\BK-lavFluk-rente25.txt')
rv=rv_keep
rBK=rBK_keep
#teknisk rente
r=0.025
v=1/(1+r)

#Leser inn for kvinner
kP = read.table("perksKvinner.txt",header = F)
kP=as.matrix(kP)
theta0_k=kP[1:57,2]
thetal_k=kP[1:57,3]

#Leser inn for menn
mP = read.table("perksMenn.txt",header = F)
mP=as.matrix(mP)
theta0_m=mP[1:57,2]
thetal_m=mP[1:57,3]

diff0_kv=diff((theta0_k))
diff1_kv=diff((thetal_k))
mu0_kv=mean(diff0_kv)
mu1_kv=mean(diff1_kv)
sigma_kv=cov(cbind(diff0_kv,diff1_kv)) #kovariansen kvinner

diff0_m=diff((theta0_m))

```

```

diff1_m=diff((theta1_m))
mu0_m=mean(diff0_m)
mul_m=mean(diff1_m)
sigma_m=cov(cbind(diff0_m,diff1_m)) #kovariansen menn

#felles kovarians-matrise:
S=cov(cbind(diff0_kv,diff1_kv,diff0_m,diff1_m))

T=25#simulerer 25 år frem i tid
sim=0.5*10^3

#simulerer nye parametere rundt de eksisterende-disse er UTEN AVH!
par0_kv=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par0_kv[1,]=(theta0_k[length(theta0_k)])
par1_kv=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par1_kv[1,]=(theta1_k[length(theta0_k)])

par0_m=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par0_m[1,]=(theta0_m[length(theta0_m)])
par1_m=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par1_m[1,]=(theta1_m[length(theta0_m)])

#simulerer nye parametere rundt de eksisterende-disse er MED AVH!
par0_kv_A=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par0_kv_A[1,]=(theta0_k[length(theta0_k)])
par1_kv_A=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par1_kv_A[1,]=(theta1_k[length(theta0_k)])
par0_m_A=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par0_m_A[1,]=(theta0_m[length(theta0_m)])
par1_m_A=0*(1:T)%*(0*(t(1:sim)))
par1_m_A[1,]=(theta1_m[length(theta0_m)])

library(mvtnorm)

rep=rep(0,2)
rep2=rep(0,4)
for(s in 1:sim) {
  matrise_kv=rvmvnorm(T,mean=rep,sigma=sigma_kv)
  matrise_m=rvmvnorm(T,mean=rep,sigma=sigma_m)
  matrise=rvmvnorm(T,mean=rep2,sigma=S)#for avh
  for(t in 2:(T)) {
    par0_kv[t,s]=par0_kv[t-1,s]+mu0_kv+matrise_kv[t-1,1]
    par1_kv[t,s]=par1_kv[t-1,s]+mul_kv+matrise_kv[t-1,2]
    par0_m[t,s]=par0_m[t-1,s]+mu0_m+matrise_m[t-1,1]
    par1_m[t,s]=par1_m[t-1,s]+mul_m+matrise_m[t-1,2]
    par0_kv_A[t,s]=par0_kv_A[t-1,s]+mu0_kv+matrise[t-1,1]
    par1_kv_A[t,s]=par1_kv_A[t-1,s]+mul_kv+matrise[t-1,2]
    par0_m_A[t,s]=par0_m_A[t-1,s]+mu0_m+matrise[t-1,3]
    par1_m_A[t,s]=par1_m_A[t-1,s]+mul_m+matrise[t-1,4]
  }
}
#par0_kv=exp(par0_kv)
#par1_kv=exp(par1_kv)
#par0_m=exp(par0_m)
#par1_m=exp(par1_m)
#par0_kv_A=exp(par0_kv_A)
#par1_kv_A=exp(par1_kv_A)
#par0_m_A=exp(par0_m_A)
#par1_m_A=exp(par1_m_A)

theta0=-1*(par0_kv)
theta1=(par1_kv)
theta0_m=-1*(par0_m)
theta1_m=(par1_m)

theta0_A=-1*(par0_kv_A)
theta1_A=(par1_kv_A)
theta0_m_A=-1*(par0_m_A)
theta1_m_A=(par1_m_A)

l=2:120

enPx_k=enPx_m=enPx_k_A=enPx_m_A=rep(0,120)
enPx_k[1]=enPx_m[1]=enPx_k_A[1]=enPx_m_A[1]=1

#Her kommer prisen til å være for teknisk rente
ksi=rep(0,sim)
ksi_A=rep(0,sim) #m/avh

#Her kommer prisen til å være for stokastisk rente
ksi_V=rep(0,sim) #Vasicek
ksi_A_V=rep(0,sim) #Vasicek m/avh
ksi_BK=rep(0,sim) #Black-Karisinky
ksi_A_BK=rep(0,sim) #Black-Karisinky m/avh

M=T #maturity of the bond
#Her kommer nåverdien utbetalingene til å være for teknisk rente
LB=array(0,c(M,sim))
LB_A=array(0,c(M,sim)) #m/avh

```

```

#Her kommer nåverdien utbetalingene til å være for stokastisk rente
LB_V=array(0,c(M,sim)) #Vasicek
LB_A_V=array(0,c(M,sim)) #Vasicek m/avh
LB_BK=array(0,c(M,sim)) #Black-Karisinky
LB_A_BK=array(0,c(M,sim)) #Black-Karisinky m/avh

lr=67#pensjonsalder-ser på kullet som er 67 i 2006

for(s in 1:sim) {
temp=temp1=temp2=temp3=temp4=temp5=1
for(t in 1:M) {
#antar for enkelthetens skyld at befolkning er 50% kvinner og 50% menn

enPx_k[2:120]=1/( 1+exp(theta0[t,s] + theta1[t,s]*(1+1)) )
enPx_m[2:120]=1/( 1+exp(theta0_m[t,s] + theta1_m[t,s]*(1+1)) )
enPx_k_A[2:120]=1/( 1+exp(theta0_A[t,s] + theta1_A[t,s]*(1+1)) )
enPx_m_A[2:120]=1/( 1+exp(theta0_m_A[t,s] + theta1_m_A[t,s]*(1+1)) )

if(t==1) {
#teknisk rente
temp=0.5*(enPx_k[(lr+t-1)]+enPx_m[(lr+t-1)])*temp
temp1=0.5*(enPx_k_A[(lr+t-1)]+enPx_m_A[(lr+t-1)])*temp1
LB[t,s]=50*temp*v^t
LB_A[t,s]=50*temp1*v^t

#Vasicek rente
temp2=0.5*(enPx_k[(lr+t-1)]+enPx_m[(lr+t-1)])*temp2
temp3=0.5*(enPx_k_A[(lr+t-1)]+enPx_m_A[(lr+t-1)])*temp3
LB_V[t,s]=50*temp2*(1/(1+rv[t,s]))^t
LB_A_V[t,s]=50*temp3*(1/(1+rv[t,s]))^t

#Black-Karisinsky rente
temp4=0.5*(enPx_k[(lr+t-1)]+enPx_m[(lr+t-1)])*temp4
temp5=0.5*(enPx_k_A[(lr+t-1)]+enPx_m_A[(lr+t-1)])*temp5
LB_BK[t,s]=50*temp4*(1/(1+rBK[t,s]))^t
LB_A_BK[t,s]=50*temp5*(1/(1+rBK[t,s]))^t
}#slutt if

if(t>1) {
#teknisk rente
temp=0.5*(enPx_k[(lr+t-1)]+enPx_m[(lr+t-1)])*temp
temp1=0.5*(enPx_k_A[(lr+t-1)]+enPx_m_A[(lr+t-1)])*temp1
LB[t,s]=50*temp*v^t
LB_A[t,s]=50*temp1*v^t

#Vasicek rente
temp2=(0.5*(enPx_k[(lr+t-1)]+enPx_m[(lr+t-1)])*temp2)
temp3=(0.5*(enPx_k_A[(lr+t-1)]+enPx_m_A[(lr+t-1)])*temp3)
LB_V[t,s]=50*temp2*(1/(1+rv[t,s]))^t
LB_A_V[t,s]=50*temp3*(1/(1+rv[t,s]))^t

#Black-Karisinsky rente
temp4=0.5*(enPx_k[(lr+t-1)]+enPx_m[(lr+t-1)])*temp4*(1/(1+rBK[t,s]))^t)
temp5=0.5*(enPx_k_A[(lr+t-1)]+enPx_m_A[(lr+t-1)])*temp5*(1/(1+rBK[t,s]))^t)
LB_BK[t,s]=50*temp4*(1/(1+rBK[t,s]))^t
LB_A_BK[t,s]=50*temp5*(1/(1+rBK[t,s]))^t
}#slutt if

}#for t slutt

#NB! Antar en utbetaling på 50mill
ksi[s]=sum(LB[1:T,s])#temp
ksi_A[s]=sum(LB_A[1:T,s])#temp1
ksi_V[s]=sum(LB_V[1:T,s])#temp2
ksi_A_V[s]=sum(LB_A_V[1:T,s])#temp3
ksi_BK[s]=sum(LB_BK[1:T,s])#temp4
ksi_A_BK[s]=sum(LB_A_BK[1:T,s])#temp5

}
m=mean(ksi)
m1=mean(ksi_A)
m2=mean(ksi_V)
m3=mean(ksi_A_V)
m4=mean(ksi_BK)
m5=mean(ksi_A_BK)
s=sd(ksi)
s1=sd(ksi_A)
s2=sd(ksi_V)
s3=sd(ksi_A_V)
s4=sd(ksi_BK)
s5=sd(ksi_A_BK)

print(c(m,m1,m2,m3,m4,m5))
print(c(s,s1,s2,s3,s4,s5))
print(c(s1/s, s3/s2, s5/s4))

```

E.4 Rente

```
##### RENTE: BEGGE MODELLER #####

T=51#
sim=2*10^4
X=array(0,c(T,sim))
XV=array(0,c(T,sim)) #Vasicek-se s.9 i Kap.15 Bølviken
r=array(0,c(T,sim))
rv=array(0,c(T,sim)) #Vasicek

ksi=0.045 #den langsiktige forventningen
r0=0.04 #startrenten

a=0.7
sigma=0.25#0.30#
sigma_x=sigma/sqrt(1-a^2)

#for Vasicek
a_v=0.357
sigma_v=0.0137#0.0045

x0=log(r0/ksi)+0.5*sigma_x^2 #Black-Karasinky-AR(1)
x0_v=r0-ksi
r[1,]=rv[1,]=rCIR[1,]=r0
X[1,]=x0
XV[1,]=x0_v

eps=matrix(rnorm(T*sim,0,1),T,sim)#koll: år, kol2: sim

teller=0
index=rep(0,sim)
for(s in 1:sim) {
  hihi=0
  for(t in 2:T) {
    X[t,s]=a*X[t-1,s]+sigma*eps[t,s]
    XV[t,s]=a_v*XV[t-1,s]+sigma_v*eps[t,s]
    r[t,s]=ksi*exp(-0.5*sigma_x^2*X[t,s])
    rv[t,s]=ksi+XV[t,s]

    if(rv[t,s]<0 && hihi==0){
      #rv[t,s]=0
      hihi=1
      teller=teller+1
      index[teller]=s
    }#if slutt
  }
}

tekst="Black-Karasinski"
vek=c(0,0.06)
par(mfcol=c(2,1))
matplot(r[,1:25], type="l",xlab="år",ylab="rente",main=tekst,ylim=vek)
matplot(rv[,1:25], type="l",xlab="år",ylab="rente",main="Vasicek",ylim=vek)

teller/(sim*T)

rv_keep=array(0,c(T,sim/2))
rBK_keep=array(0,c(T,sim/2))

ii=1
sss=1
for(s in 1:sim) {
  #while(s<sim && sss<(sim/2)) {
  if(sss<=sim/2) {
    if(length(index[index!=s])==sim) {
      rv_keep[1:T,sss]=rv[1:T,s]
      rBK_keep[1:T,sss]=r[1:T,s]
      sss=sss+1
    }#if slutt
  }
}#for

save(rv_keep,file="C:\\Users\\Mak\\Skola\\Masteroppgave\\vasicek-rente25.txt")
save(rBK_keep,file="C:\\Users\\Mak\\Skola\\Masteroppgave\\BK-rente25.txt")
```


Bibliografi

- [1] Blake, David, Cairns, Andrew J.B., Dowd, Kevin. 2006. *Living with mortality: Longevity Bonds and other mortality-linked securities*.The Pension Institute.
- [2] Blake, David , Cairns, Andrew J.B., Dowd, Kevin, MacMinn, Richard. 2006. *Longevity Bonds: Financial engineering, Valuation, and Hedging*.The Pension Institute.
- [3] Bliksrud, Mikael A., 2009. *Dynamisk og Stokastisk Levetidsmodellering-Anvendt på norske levetidsdata*. UiO.
- [4] Brigo, Damiano, Mercurio, Damiano. 2006. *Interest Rate Models-Theory and Practice*. 2nd.ed. Springer Finance. Berlin.
- [5] Bølviken, Erik. *Actuarial and Financial Risk: How you make modelling and Monte Carlo work*. Under utgivelse.
- [6] Cairns, Andrew J.B., Blake, David & Dowd, Kevin. 2005. *Pricing death: Frameworks for the Valuation and Securitization od Mortality Risk*.The Pension Institute.
- [7] Cairns, Andrew J.B., Blake, David & Dowd, Kevin. 2006. *A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: Theory and Calibration*.The Pension Institute.
- [8] Dahl, Mikkel. 2004. *Stochastic Mortality in life insurance: market reserves and mortality linked insurance contracts*. Insurance:Mathematics and Economics.
- [9] Gavrilov, Leonid A., Gavrilova, Natalia S. 2005. *Commentaries on "How is the evolutionary biological theory of aging holding up against mounting attacks?"*. American Aging Association.
- [10] Gerber, Hans U. 1997. *Life Insurance Mathematics* 3rd ed. Springer. Berlin.
- [11] Menoncin, F. 2008. *The Role of Longevity Bonds in Optimal Portfolios*. Insurance:Mathematics and Economics.
- [12] Milevsky, Moeshe A. , Promislow, David S. 2001.*Mortality derivatives and the option to annuitise*. Insurance:Mathematics and Economics.
- [13] Øksendal, B. 2007. *Stochastic Differential Equations - An Introduction with Applications*. 6th.ed. Springer. Berlin.
- [14] <http://www.mortality.org>. *Human Mortality Database*
- [15] <http://www.norges-bank.no>