

USIKKERHET VED LEVETIDSFREMSKRIVNINGER

av

HANNE KIRKENÆR ELLINGSEN

MASTEROPPGAVE

for graden

Master i Modellering og dataanalyse

(Master of Science)



*Avdeling for statistikk, Matematisk institutt
Det matematisk- naturvitenskapelige fakultet
Universitetet i Oslo*

Mai 2011

*Faculty of Mathematics and Natural Sciences
University of Oslo*

Sammendrag

Vi har i de siste 100 årene hatt stor nedgang i dødelighet. Når vi skal fremskrive dødeligheter så må vi bruke en modell som tar hensyn til denne nedgangen. Tradisjonelt har man brukt en Lee-Carter modell der tidsparameterne er estimert ved hjelp av tilfeldig gang (Lee og Carter, 1992). Hovedformålet med oppgaven er å vurdere om man heller burde bruke en autoregressiv modell for å estimere tidsparameterne.

Vi bruker datagrunnlag fra 1950 og fram til det siste året med tilgjengelige data på «Human Mortality Database» (HMD) for å estimere tidsparameterne for Norge, Danmark, Sverige, Japan, Frankrike, Italia, Spania, Storbritannia og USA. Ved å se på autokorrelasjonsfunksjonene til de estimerte tidsparameterne, så ser vi at de ikke er uavhengige, men derimot negativt korrelerte. Vi har derfor grunnlag for å bruke en autoregressiv prosess med negativ koeffisient for å estimere tidsparameterne i Lee-Carter modellen.

Vi gjør simuleringer av dødelighetsratene fremover i tid og ser om modellen gir fornuftige resultater. Vi har generelt god overensstemmelse mellom virkelighet og estimer, men det er noen unntak. Generelt så er det vanskeligere å fremskrive dødeligheter for menn enn for kvinner.

Konsekvensene av at man bruker en autoregressiv prosess istedenfor tilfeldig gang, er at man får smalere konfidensintervaller ved fremskrivning av dødelighet. De økonomiske følgene er at man trenger mindre kapital for å ha solvens.

Forord

Denne masteroppgaven er det avsluttende resultatet av mastergraden min i modellering og dataanalyse med studieretning finans, forsikring og risiko ved Universitet i Oslo. Studietiden startet med et treårig bachelorstudie i matematikk, informatikk og teknologi, og avsluttes nå etter to år med masterstudie. Det har vært fem morsomme og krevende år som også har vært utrolig lærerike.

Jeg vil gjerne rette en stor takk til min veileder professor Erik Bølviken som har gitt meg en utrolig interessant oppgave innenfor mitt ønskede fagområde. Han har også vist stort engasjement for oppgaven og gitt meg gode tips og råd gjennom hele semesteret.

Jeg ønsker også å takke Eikos AS som har gitt meg relevant arbeidserfaring gjennom de siste tre årene av studietiden. Jeg setter stor pris på at dere har tilpasset arbeidstidene i forhold til min timeplan på universitetet, slik at det gikk greit å kombinere studiene med jobb. Jeg vil spesielt takke Øyvind Grini (adm. direktør), Svein Hestnes (aktuar) og Anne Grete Steinkjer (aktuar).

I tillegg vil jeg gjerne takke venner og familie som har vært viktige støttespillere gjennom hele studietiden. En spesielt stor takk til min søster Kristine, mamma og pappa.

Innhold

1 Innledning	5
2 Metode	5
2.1 Lee - Carter modeller	5
2.2 Estimering fra historiske data	6
2.3 Monte Carlo	9
2.4 Empiriske observasjoner	10
3 Levetidsestimeringer og fremskrivninger	11
4 Økonomiske konsekvenser	21
4.1 Engangspremier	22
4.2 Nåverdier	23
5 Konklusjon	26
6 Appendiks	28
6.1 Autokorrelasjonsfunksjonen (ACF)	28
6.2 Datakode i Fortran: Program som estimerer parameterne i Lee-Carter modellen	30
6.3 Datakode i R	33

1 Innledning

Levealderen har økt enormt de siste hundre årene (Tuljapurkar et al., 2001). For de landene som har data registrert over et større tidsrom, så kan man se at det har vært en trend over enda lengre tid. I Danmark har levetiden for både menn og kvinner økt med cirka 40 år på de siste 170 årene (Järner et al., 2008), og i Norge har levealderen i gjennomsnitt økt med litt over 0,2 år per kalenderår de siste 200 årene (Statistisk sentralbyrå, 2010). Det er derfor naturlig at vi trenger en dynamisk dødelighetsmodell som tar hensyn til forandringene i dødelighet over tid.

Vi tar utgangspunkt i Lee-Carter-modellen (Lee og Carter, 1992), som har parametere som avhenger både av tid og alder. Tradisjonelt så bruker man en tilfeldig gang modell for tidsparameteren (Lee og Carter, 1992), men hvorfor bruker man ikke autoregressive prosesser istedenfor? Vi har sett på historiske data over dødelighetsrater fra Norge, Danmark, Sverige, Japan, Frankrike, Italia, Spania, Storbritannia og USA, som er hentet fra «Human Mortality Database» (HMD). Separat for hvert land og kjønn estimerte vi tidsvariablene for hver enkelt gruppe, og våre undersøkelser viser at en autoregressiv prosess med negativ koeffisient er en bedre tilpasning enn en tilfeldig gang.

Det å bruke en autoregressiv modell framfor en tilfeldig gang, vil påvirke sikkerhetsangivelsene ved levetidsframskrivninger. Vi vil få et lavere standardavvik, som medfører at vi får smalere konfidensintervaller. Dette vil igjen påvirke selskapenes behov for kapital for å ha solvens.

2 Metode

2.1 Lee - Carter modeller

Vi tar utgangspunkt i en Lee-Carter modell som ser på q_{xk} , som er sannsynligheten for at en person med alder x ved tid k dør innen et år. Vi har valgt å se på forhåndstallet mellom q_{xk} og $1 - q_{xk}$ som i Cairns et al. (2006) og Lee og Miller (2001). Hovedgrunnen til det, er at vi under simuleringene alltid vil holde dødelighetene på et fornuftig nivå. Modellen er på formen

$$\omega_{xk} = \frac{q_{xk}}{1 - q_{xk}} = \frac{q_{x0}}{1 - q_{x0}} e^{a_x t_k}, \quad (1)$$

der q_{x0} er en kjent dødelighet ved tid 0. Siden vi ønsker å ha en autoregressiv prosess istedenfor den tradisjonelle tilfeldige gangen, så har vi at t er en funksjon gitt ved

$$t_k = t_{k-1} + \delta + z_k \quad (2)$$

der

$$z_k = a z_{k-1} + \sigma \epsilon_k. \quad (3)$$

Ved tilfellet der $a = 0$, så er vi tilbake til en tilfeldig gang modell slik som i Lee og Carter (1992).

2.2 Estimering fra historiske data

Ved hjelp av historiske dødelighetsrater estimerte vi aldersparameterne a_x og tidsparameterne t_k for hvert land og kjønn.¹ Vi tok utgangspunkt i ligning 1 og skrev den på logaritmisk skala, slik at

$$\log(\omega_{xk}) = a'_x t_k, \quad (4)$$

der

$$a'_x = a_x \log\left(\frac{q_{x0}}{1 - q_{x0}}\right). \quad (5)$$

Vi brukte minste kvadraters metode, og minimerte

$$S = \sum_k \sum_x (\log(\omega_{xk}) - a'_x t_k)^2. \quad (6)$$

Det gjorde vi ved å derivere S med hensyn på a'_x og t_k hver for seg, og sette begge uttrykkene lik null. Vi brukte en numerisk metode for å løse ligningene, og dermed estimere a'_x og t_k . Vi antok først at t_k var kjent og fant a'_x , så brukte vi a'_x -ene vi fant for å finne t_k . Dette ble gjort 200 ganger før vi endte opp med våre endelige estimater for a'_x og t_k . Vi fant estimatet for a_x ved hjelp av a'_x og ligning 5.

Når vi hadde estimert både a_x og t_k , ønsket vi å se nærmere på en stokastisk modell for t_k , mens vi holdt a_x fast. Vi brukte modellen gitt i ligning 2 og 3, og ønsket at z skulle være et støyledd med forventning null. Det medførte at δ var gitt ved

$$\delta = E[t_k - t_{k-1}]. \quad (7)$$

For å kunne gjøre simuleringer av den stokastiske modellen for z , så er vi avhengig av verdiene for både a og σ . Det finnes ulike metoder for å estimere koeffisienten a i en autoregressiv prosess, i tabell 1 er estimatene ved bruk av minste kvadraters metode (OLS), Yule-Walker, Burg og «maximum likelihood» (MLE). Det er små forskjeller mellom estimatene fra de ulike metodene, og vi valgte å gå videre med MLE. For å se hvor gode estimater vi fikk, så gjorde vi en «bootstrap» som er vist i tabell 2. Her fikk vi god overensstemmelse mellom sann verdi og estimat, og vi brukte derfor MLE-estimatene videre.

Da hadde vi alle estimatene vi trengte for å kunne simulere den stokastiske modellen for z . Vi visste at $t_0 = 0$ og vi trakk z_0 fra en normalfordeling med forventning null og standardavvik

$$\frac{\sigma}{\sqrt{1 - a^2}},$$

for hver simulering. Ved hjelp av Monte Carlo simulerte vi z og t titusen ganger for alle land og kjønn. Resultatet for spanske kvinner og menn er gitt i figur 1. Vi ser at det er en god overensstemmelse mellom de estimerte t -verdiene og de faktiske t -verdiene vi fikk fra historiske data. Vi gjorde også de samme simuleringene ved bruk av tilfeldig gange modellen, og resultatene vises i figur 2. Man ser tydelig av konfidensintervallene på figurene at tilfeldig gange modellen har større standardavvik enn den autoregressive modellen.

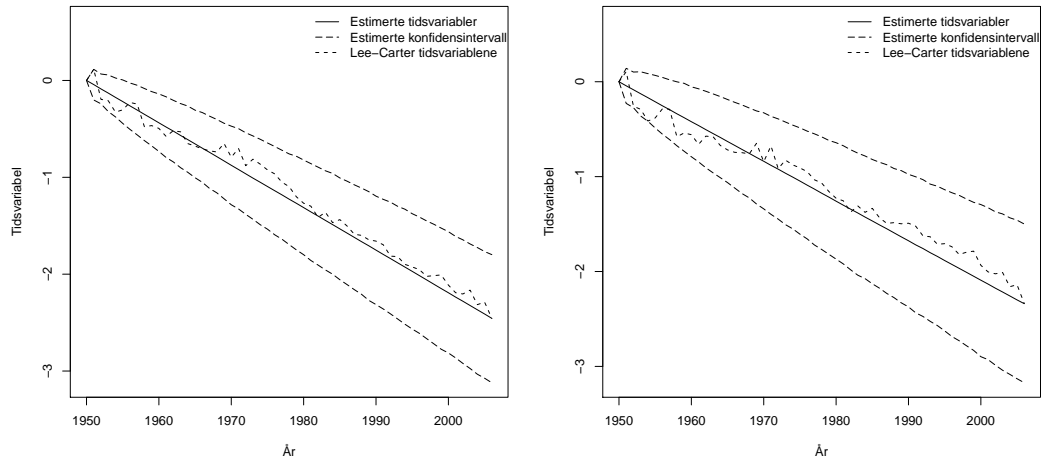
¹Her bruker vi et program som er laget av Erik Bølviken, se appendiks 6.2.

Tabell 1: Parameterne i AR(1)-modellen i ligning 3, estimert ved hjelp av ulike fremgangsmåter. N, D, S, J, F, I, SP, UK, US er henholdsvis Norge, Danmark, Sverige, Japan, Frankrike, Italia, Spania, Storbritannia og USA, K er kvinner og M er menn.

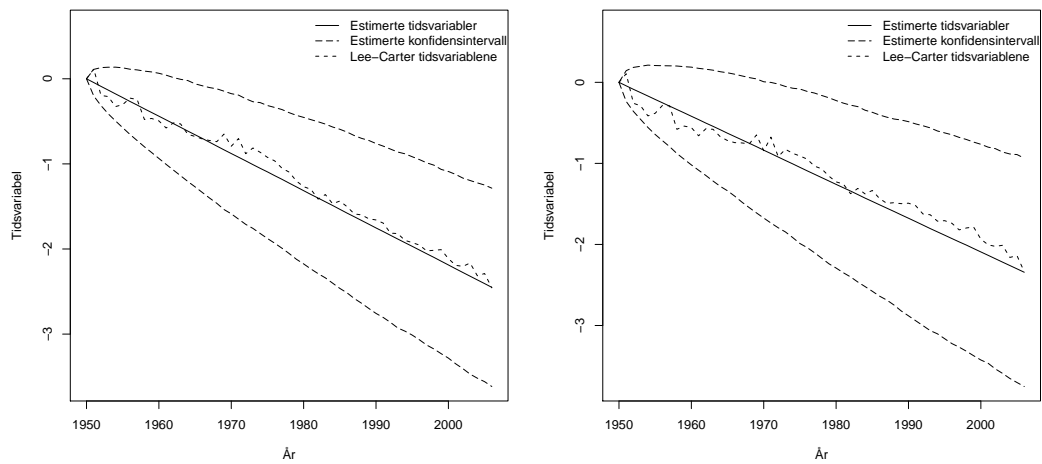
		OLS		Yule-Walker		Burg		MLE	
		a	σ	a	σ	a	σ	a	σ
N	K	-0,3110 (0,3430)	0,0733	-0,3090	0,0794	-0,3299	0,0774	-0,3468	0,0774
	M	-0,0125 (0,3552)	0,1555	-0,0125	0,1649	-0,0131	0,1620	-0,0136	0,1620
D	K	-0,4757 (0,3394)	0,0678	-0,4683	0,0701	-0,4798	0,0684	-0,4830	0,0684
	M	-0,3205 (0,3514)	0,1442	-0,3179	0,1485	-0,3250	0,1455	-0,3266	0,1455
S	K	-0,3854 (0,3497)	0,0485	-0,3848	0,0490	-0,3853	0,0481	-0,3792	0,0481
	M	-0,3102 (0,3549)	0,0897	-0,3100	0,0905	-0,3101	0,0889	-0,3049	0,0889
J	K	-0,3194 (0,3523)	0,0444	-0,3175	0,0455	-0,3227	0,0446	-0,3224	0,0446
	M	-0,3042 (0,3507)	0,0464	-0,3032	0,0481	-0,3113	0,0471	-0,3142	0,0471
F	K	-0,5499 (0,3270)	0,0630	-0,5495	0,0664	-0,5661	0,0644	-0,5728	0,0644
	M	-0,4577 (0,3388)	0,0782	-0,4576	0,0817	-0,4702	0,0797	-0,4746	0,0797
I	K	-0,4181 (0,3433)	0,0815	-0,4156	0,0851	-0,4283	0,0830	-0,4336	0,0830
	M	-0,2400 (0,3549)	0,1137	-0,2400	0,1182	-0,2467	0,1159	-0,2491	0,1159
SP	K	-0,5009 (0,3383)	0,0664	-0,4789	0,0709	-0,5083	0,0683	-0,5304	0,0683
	M	-0,4869 (0,3438)	0,0826	-0,4636	0,0864	-0,4855	0,0837	-0,4996	0,0837
UK	K	-0,4829 (0,3335)	0,0704	-0,4821	0,0742	-0,4983	0,0721	-0,5062	0,0721
	M	-0,2888 (0,3415)	0,0924	-0,2885	0,1014	-0,3107	0,0989	-0,3298	0,0988
US	K	-0,4577 (0,3388)	0,0782	-0,4576	0,0817	-0,4702	0,0797	-0,4746	0,0797
	M	-0,0428 (0,3658)	0,0662	-0,0422	0,0671	-0,0427	0,0659	-0,0424	0,0659

Tabell 2: Parameterne i AR(1)-modellen i ligning 3, estimert ved hjelp MLE. K er kvinner og M er menn.

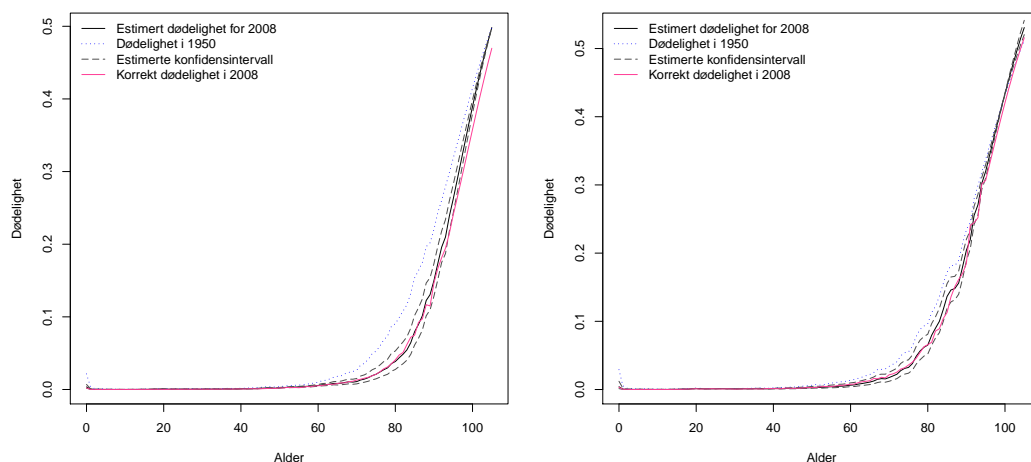
		MLE		Bootstrap av MLE	
		a	σ	a	σ
Norge	K	-0,3468	0,0774	-0,3531 (0,1084)	0,0775 (0,0066)
	M	-0,0136	0,1620	-0,0091 (0,1290)	0,1586 (0,0133)
Danmark	K	-0,4830	0,0684	-0,4813 (0,1219)	0,0679 (0,0068)
	M	-0,3266	0,1455	-0,3126 (0,1118)	0,1428 (0,0132)
Sverige	K	-0,3792	0,0481	-0,3431 (0,1197)	0,0468 (0,0047)
	M	-0,3049	0,0889	-0,3047 (0,1166)	0,0871 (0,0078)
Japan	K	-0,3224	0,0446	-0,3046 (0,1278)	0,0443 (0,0044)
	M	-0,3142	0,0471	-0,3116 (0,1238)	0,0471 (0,0040)
Frankrike	K	-0,5728	0,0644	-0,5706 (0,1005)	0,0630 (0,0056)
	M	-0,4746	0,0797	-0,4486 (0,1153)	0,0782 (0,0068)
Italia	K	-0,4336	0,0830	-0,4245 (0,1199)	0,0823 (0,0077)
	M	-0,2491	0,1159	-0,2482 (0,1267)	0,1141 (0,0104)
Spania	K	-0,5304	0,0683	-0,5253 (0,1030)	0,0679 (0,0063)
	M	-0,4996	0,0837	-0,4829 (0,1184)	0,0828 (0,0067)
Storbritannia	K	-0,5062	0,0721	-0,5069 (0,1148)	0,0710 (0,0072)
	M	-0,3298	0,0988	-0,3148 (0,1247)	0,0977 (0,0077)
USA	K	-0,4746	0,0797	-0,4667 (0,1094)	0,0781 (0,0066)
	M	-0,0424	0,0659	-0,0366 (0,1186)	0,0648 (0,0055)



Figur 1: Tidsparameterne i Lee-Carter modellen for spanske kvinner og menn ved bruk av en autoregressiv prosess med koeffisientene lik MLE-estimatene gitt i tabell 1. Kvinner til venstre og menn til høyre.



Figur 2: Tidsparameterne i Lee-Carter modellen for spanske kvinner og menn ved bruk av tilfeldig gange modellen. Kvinner til venstre og menn til høyre.



Figur 3: Dødelighetsrater for norske kvinner og menn ved bruk av den autoregressive modellen. Kvinner til venstre og menn til høyre.

Vi fant dødelighetsratene q_{xk} ved å sette inn i ligning 1. For å se hvor godt modellen passet, så simulerte vi dødeligheten for norske menn og kvinner for år 2008 og sammenlignet det med den faktiske dødeligheten på tilsvarende tidspunkt. Det gjorde vi ved å estimere Lee-Carter parameterne med datagrunnlag fra 1950 til 2008, og bruke det for å estimere a og σ . Videre simulerte vi dødeligheten og resultatet vi fikk er vist i figur 3. Her er det en god overensstemmelse mellom estimert og sann dødelighetsrate for 2008, men vi ser at det er avvik for høye aldre. Det er vanskelig å estimere dødelighet for høye aldre fordi det er få observasjoner å bygge på, og vi kan derfor akseptere at vi har noe avvik.

2.3 Monte Carlo

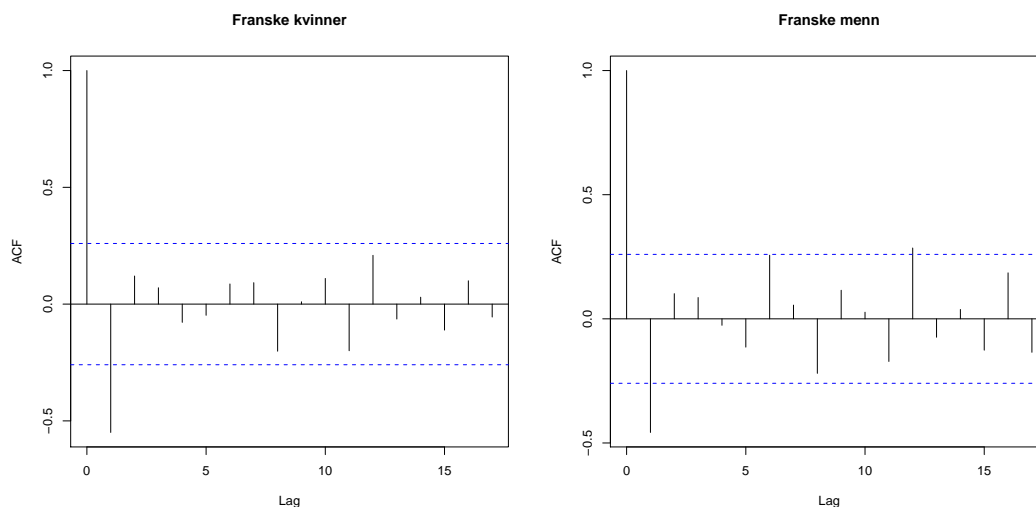
Monte Carlo er en simuleringmetode som tar utgangspunkt i tilfeldig trekning av variable for å kunne beregne ulike resultater. I mange tilfeller vil det være vanskelig eller umulig å finne en eksakt fordeling for en variabel x . Ved å bruke Monte Carlo så kan man simulere $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$, og tilnærme en fordeling for x . Monte Carlo bygger på asymptotiske resultater i statistikk, og det er derfor nødvendig med mange simuleringer for å få gode estimater.

I vårt tilfelle så er vi interessert i å estimere både forventning og konfidensintervall fra Monte Carlo simuleringer. Monte Carlo estimatet for forventningen er gitt ved

$$\bar{x}^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i^*,$$

og er en forventningsrett estimator. For å estimere grensene i konfidensintervallet ved hjelp av Monte Carlo så må vi sortere de simulerte x -ene slik at $x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_m^*$. Da kan vi estimere den øvre kvantilen som

$$q_\epsilon^* = x_{\epsilon m}^*,$$



Figur 4: Autokorrelasjonene til z -verdier ut i fra Lee-Carter estimatene. Franske kvinner til venstre, og danske menn til høyre.

og den nedre som

$$q_{\epsilon}^* = x_{(1-\epsilon)m}^*$$

Estimatene for grensene i konfidensintervallet er også forventingsrette når $m \rightarrow \infty$. I denne oppgaven har vi brukt $m = 10\,000$ under alle Monte Carlo simuleringer.

2.4 Empiriske observasjoner

Det vi er interessert i å vurdere, er om det er grunnlag for en autoregressiv modell, og om z modelleres best ved en autoregressiv eller tilfeldig gange prosess. For å se nærmere på det, så fant vi autokorrelasjonen til z -prosessen vi fikk ved bruk av Lee-Carter estimatene. For at den tilfeldige gange modellen skal være riktig, så er vi avhengig av at det ikke er korrelasjon i noen av lagene i autokorrelasjonsfunksjonen. Er derimot prosessen den autoregressive i ligning 3, så kan vi ha korrelasjon i første lag.² I tabell 3 er det en oversikt over autokorrelasjonene i lag en for alle land og kjønn. Der ser vi at alle gruppene har en negativ korrelasjon i lag en, og det ser absolutt ut til å være grunnlag for en autoregressiv modell. Det er bare tre grupper som ikke har en signifikant avhengighet i første lag i autokorrelasjonsfunksjonen, det er norske, italienske og amerikanske menn. For alle de andre gruppene så har vi signifikant avhengighet i lag en, men det er en del tilfeller der vi også har signifikant autokorrelasjon i senere lag. Korrelasjonen i andre lag enn det første velger vi å se bort i fra på grunnlag av få observasjoner og mangel på lik trend mellom gruppene. Et eksempel på hvordan autokorrelasjonsfunksjonene ser ut, er vist ved franske kvinner og menn i figur 4.

Det er tydelig fra autokorrelasjonsfunksjonene at det er få tilfeller som samsvarer med en tilfeldig gang modell. En autoregressiv modell har en mye bedre overensstemmelse med våre data, og det er absolutt grunnlag for modellen i ligning 2 og 3.

²Se appendiks 6.1

Tabell 3: Parameterne i AR(1)-modellen 3, estimert ved hjelp MLE. K er kvinner og M er menn.

		ACF i lag 1
Norge	Kvinner	-0,309
	Menn	-0,012
Danmark	Kvinner	-0,468
	Menn	-0,318
Sverige	Kvinner	-0,385
	Menn	-0,310
Japan	Kvinner	-0,317
	Menn	-0,303
Frankrike	Kvinner	-0,550
	Menn	-0,458
Italia	Kvinner	-0,416
	Menn	-0,240
Spania	Kvinner	-0,479
	Menn	-0,464
Storbritannia	Kvinner	-0,482
	Menn	-0,288
USA	Kvinner	-0,458
	Menn	-0,042

3 Levetidsestimeringer og fremskrivninger

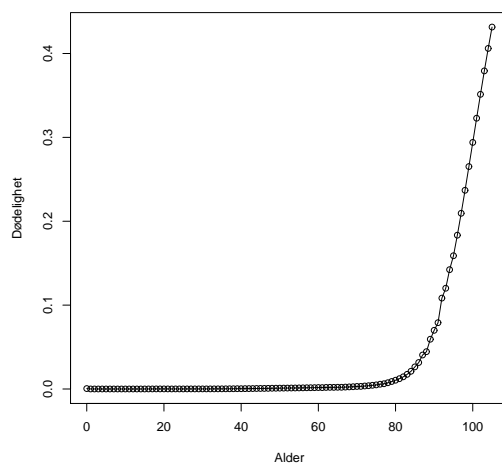
Vi har allerede sett at vi får ulike usikkerhetsestimater for tidsparameteren i Lee-Carter modellen, ut i fra om vi bruker en tilfeldig gang eller autoregressiv modell. Det vi er interessert i å se på, er hvordan modellvalget vil påvirke dødelighetsratene og usikkerhetsgrensene ved fremskrivning av dødelighet.

Vi så først på de forventede dødelighetsratene ved en fremskrivning på 50 år. Vi fremskrev både ved bruk av en autoregressiv og tilfeldig gang modell. De forventede dødelighetsratene for franske kvinner for begge modellene er vist i figur 5. De er så like at et ikke er mulig å skille de fra hverandre, og vi kan derfor konkludere med at de er tilnærmet like. Det er naturlig at det er slik, siden forventningen til z i ligning 3 er null uavhengig av hvilken av modellene vi bruker.³

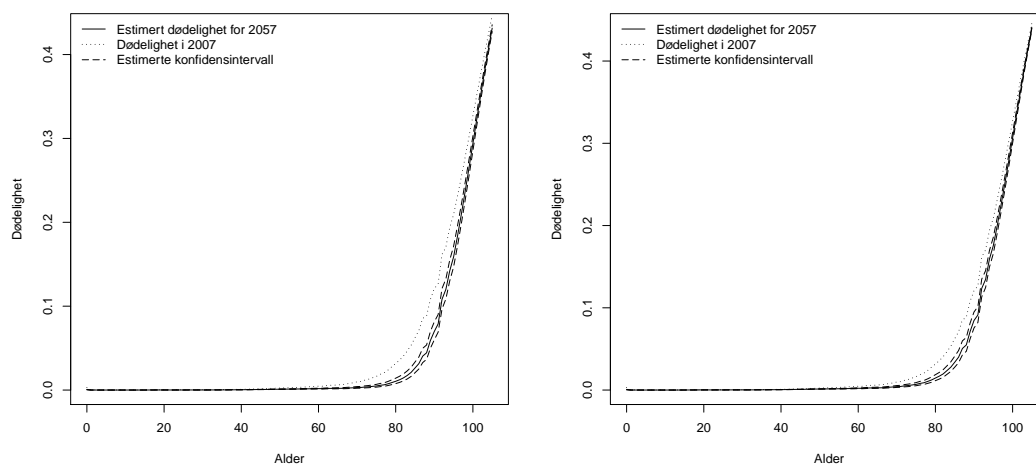
Videre ønsket vi å se på sikkerhetsanslagene ved de ulike modellene. Vi har allerede sett at tidsparameterne får et større konfidensintervall ved bruk av tilfeldig gang enn ved en autoregressiv prosess. Det som er interessant, er å se hvordan det vil påvirke sikkerhetsanslagene når vi fremskriver dødelighetsratene. Vi vurderer usikkerheten ved å se på et 95%-konfidensintervall for fremskrivningene. I figur 6 ser vi dødelighetsratene for franske kvinner og menn ved bruk av en autoregressiv prosess, og tilsvarende plott for tilfeldig gange i figur 7. Det ser ut til at vi også her har større konfidensintervall for en tilfeldig gang modell enn for en autoregressiv. Vi får det bekreftet ved et felles plott for begge metodene (se figur 8), der vi tydelig ser at tilfeldig gange modellen sitt konfidensintervall er større.

Vi vet at vi får smalere konfidensintervall ved å bruke en autoregressiv prosess,

³Se induksjonsbevis i appendiks 6.1



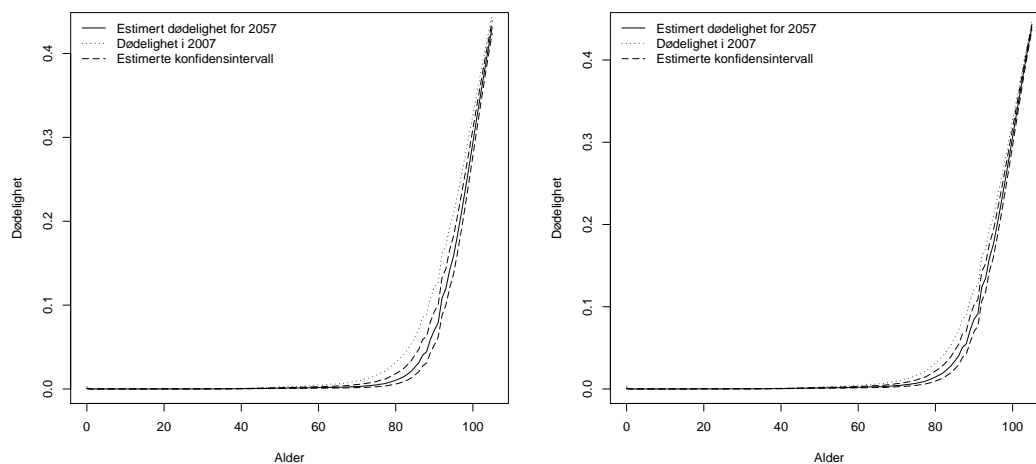
Figur 5: De forventede dødelighetsratene for franske kvinner ved bruk av de to ulike modellene for tidsvariablene i Lee-Carter. Autoregressiv modell i heltrukken linje og tilfeldig gange modellen i punkter.



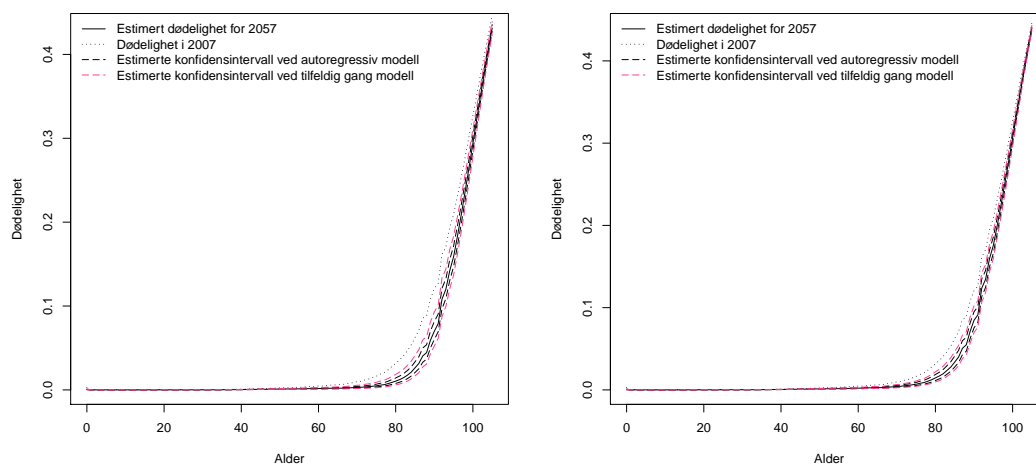
Figur 6: Forventede dødelighetsratene med 95%-konfidensintervall ved bruk av autoregressiv prosess for franske kvinner og menn. Kvinner til venstre, menn til høyre.

Tabell 4: Parameterne i AR(1)-modellen 3, estimert ved hjelp MLE for franske kvinner og menn ved bruk av datagrunnlag fra 1950-1997.

		a	σ
Frankrike	Kvinner	-0,5706	0,0761
	Menn	-0,4680	0,1030



Figur 7: Forventede dødelighetsrater med 95%-konfidensintervall ved bruk av tilfeldig gange for franske kvinner og menn. Kvinner til venstre, menn til høyre.



Figur 8: Forventede dødelighetsrater med 95%-konfidensintervall for franske kvinner og menn ved bruk av de to ulike modellene, autoregressiv og tilfeldig gang. Kvinner til venstre og menn til høyre.

Tabell 5: Parameterne i AR(1)-modellen 3, estimert ved hjelp MLE for franske kvinner og menn ved bruk av datagrunnlag fra 1980-1997.

		a	σ
Frankrike	Kvinner	-0,5560	0,1189
	Menn	-0,3984	0,0967

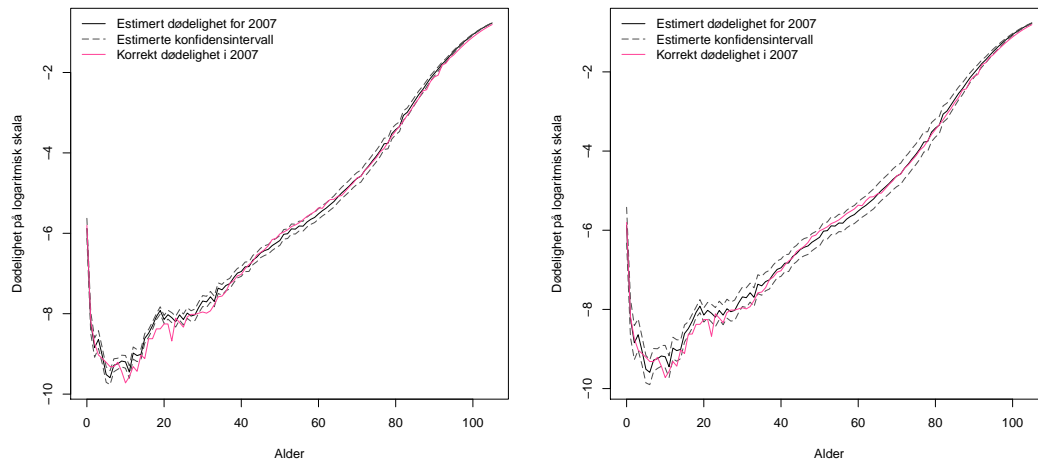
Tabell 6: Estimerte dødelighetsrater i prosent for 2007 for franske kvinner ved bruk av ulike modeller med datagrunnlag fra 1950-1997 og 1980-1997. Dynamisk dødelighet med tidsparametere simulert både ved hjelp av autoregressiv og tilfeldig gang modell, og statistisk dødelighet lik dødeligheten i år 2007.

	Estimater				Konfidensintervall				Korrekt rate i 2007
	1950-1997		1980-1997		1950-1997		1980-1997		
	TG	AR	TG	AR	TG	AR	TG	AR	
0	0,280	0,280	0,301	0,300	[0,179 , 0,436]	[0,218 , 0,361]	[0,235 , 0,382]	[0,262 , 0,343]	0,003
10	0,010	0,010	0,008	0,008	[0,008 , 0,013]	[0,009 , 0,012]	[0,005 , 0,011]	[0,006 , 0,009]	0,006
20	0,029	0,029	0,025	0,025	[0,024 , 0,035]	[0,026 , 0,032]	[0,021 , 0,032]	[0,023 , 0,029]	0,026
30	0,046	0,046	0,055	0,055	[0,036 , 0,059]	[0,040 , 0,053]	[0,054 , 0,056]	[0,054 , 0,056]	0,035
40	0,096	0,096	0,105	0,105	[0,077 , 0,119]	[0,085 , 0,108]	[0,098 , 0,113]	[0,101 , 0,109]	0,089
50	0,207	0,207	0,212	0,212	[0,167 , 0,257]	[0,183 , 0,234]	[0,186 , 0,240]	[0,197 , 0,227]	0,244
60	0,401	0,401	0,406	0,406	[0,318 , 0,507]	[0,352 , 0,458]	[0,351 , 0,470]	[0,374 , 0,439]	0,467
70	0,971	0,971	0,989	0,988	[0,746 , 1,262]	[0,836 , 1,128]	[0,841 , 1,160]	[0,903 , 1,078]	0,983
80	3,267	3,268	3,081	3,078	[2,606 , 4,087]	[2,876 , 3,713]	[2,533 , 3,731]	[2,762 , 3,416]	3,158
90	13,158	13,160	12,464	12,458	[11,746 , 14,710]	[12,343 , 14,026]	[11,077 , 13,971]	[11,672 , 13,258]	12,085
100	34,798	34,799	33,747	33,740	[33,911 , 35,694]	[34,30 , 35,308]	[32,386 , 35,111]	[32,983 , 34,478]	32,689

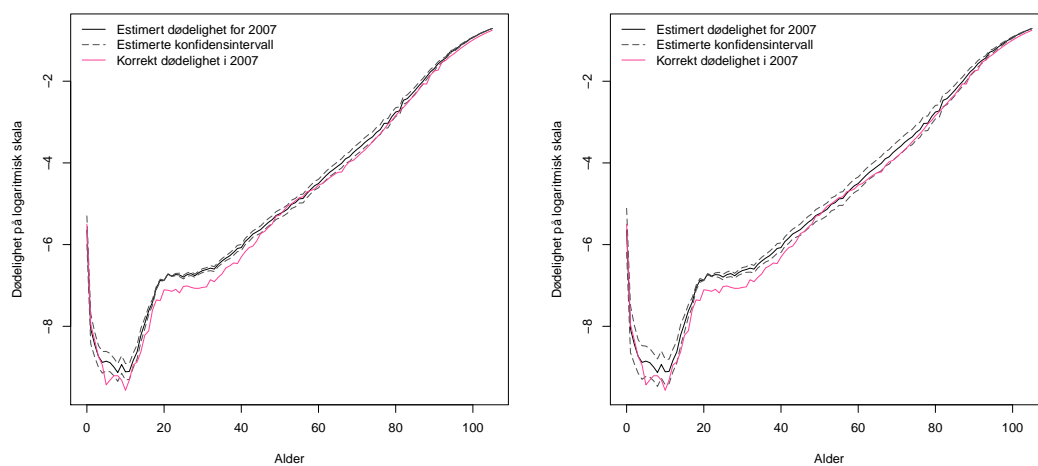
men hvor god er modellen til å fremskrive dødelighet? Vi gjorde tilsvarende simuleringer, men denne gangen brukte vi bare datagrunnlaget fra 1950-1997. Vi fant først a - og σ estimatene i dette tilfellet for franske kvinner og menn, som er vist i tabell 4. Vi ønsket å estimere dødelighetsratene 10 år frem i tid og sammenligne det med den reelle dødelighetsraten i 2007. Vi gjorde fremskrivningene for begge modellvalgene for franske kvinner og menn, og resultatet vises på logaritmisk skala i figur 9 og 10. For kvinnene så har vi en god overensstemmelse for de over 40 år, både ved en autoregressiv og tilfeldig gange modell. For menn så har vi godt samsvar mellom estimat og virkelighet for de over 50 år. Her har vi i motsetning til kvinnene store avvik i aldersgruppen 20 – 45 år. I denne aldersgruppen så har dødeligheten sunket enda mer enn vi har forutsett.

Det kan være vanskelig å vurdere hvor mye historiske data man bør bruke ved fremskriving av dødeligheter. Vil dødelighetsratene fra 1950 påvirke dødeligheten over 50 år senere? Eller burde man bruke et kortere tidsrom, men da med nyere data? Det er ingen som kan forutse fremtiden, men man ønsker allikevel et best mulig estimat for dødelighetene fremover i tid. Vi gjorde de samme simuleringene en gang til, men denne gangen brukte vi bare datagrunnlag fra 1980 til 1997 for å fremskrive dødelighetene til 2007. Estimaterne for franske kvinner og menn som vi fikk i dette tilfeller er vist i tabell 5, og dødelighetsestimatene i figur 11 og 12.

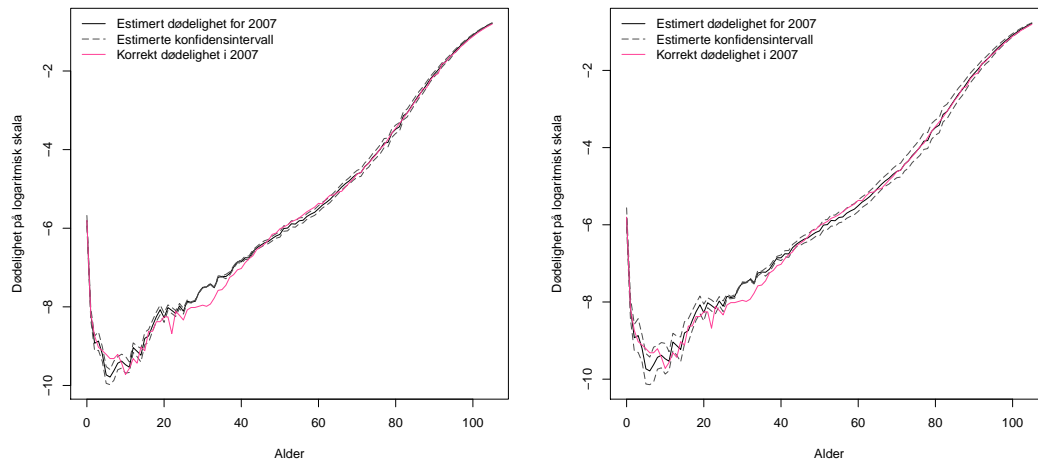
Fra figurene er det vanskelig å bedømme hvilken tidsperiode som gir best estimater. I tabell 6 og 7 er det en oversikt over estimerte dødeligheter med 95%-konfidensintervall for franske kvinner og menn ved bruk av datagrunnlaget fra både 1950-1997 og 1980-1997 for begge modellene. Ut i fra de tabellene så ser vi at dødelighetene for lave aldre (0-20) er best estimert ved bruk av datagrunnlag fra 1980-1997, for resten av alderne varierer det. Det er derfor vanskelig å konkludere med hvilket tidsrom som gir best estimater totalt sett. Det vi også ser av tabellen er at vi får større konfidensintervall ved bruk av datagrunnlag fra 1950-1997, det tyder på at nedgangen i dødelighet har vært relativt stabil de siste 20-årene. Det er umulig å vite om denne trenden fortsetter eller om vi vil få større variasjoner, slik som vi har sett i



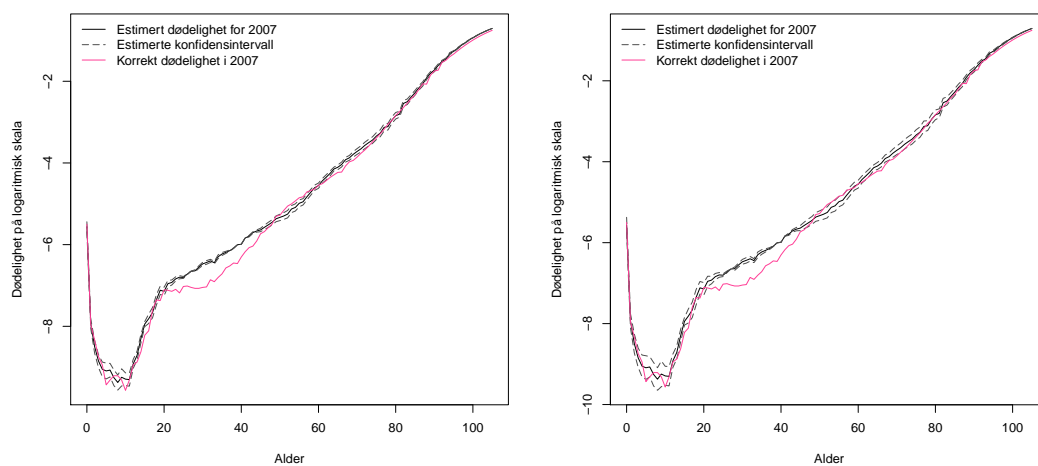
Figur 9: Forventede dødelighetsrater med 95%-konfidensintervall (på logaritmisk skala) ved fremskrivning i ti år for franske kvinner. Vi har brukt datagrunnlag fra 1950-1997 for å estimere dødeligheten i 2007. Autoregressiv prosess er brukt til venstre, mens tilfeldig gange er brukt i grafen til høyre.



Figur 10: Forventede dødelighetsrater med 95%-konfidensintervall (på logaritmisk skala) ved fremskrivning i ti år for franske menn. Vi har brukt datagrunnlag fra 1950-1997 for å estimere dødeligheten i 2007. Autoregressiv prosess er brukt til venstre, mens tilfeldig gange er brukt i grafen til høyre.



Figur 11: Forventede dødelighetsrater med 95%-konfidensintervall (på logaritmisk skala) ved fremskrivning i ti år for franske kvinner. Vi har brukt datagrunnlag fra 1980-1997 for å estimere dødeligheten i 2007. Autoregressiv prosess er brukt til venstre, mens tilfeldig gange er brukt i grafen til høyre.



Figur 12: Forventede dødelighetsrater med 95%-konfidensintervall (på logaritmisk skala) ved fremskrivning i ti år for franske menn. Vi har brukt datagrunnlag fra 1980-1997 for å estimere dødeligheten i 2007. Autoregressiv prosess er brukt til venstre, mens tilfeldig gange er brukt i grafen til høyre.

Tabell 7: Estimerte dødelighetsrater i prosent for 2007 for franske menn ved bruk av ulike modeller med datagrunnlag fra 1950-1997 og 1980-1997. Dynamisk dødelighet med tidsparametere simulert både ved hjelp av autoregressiv og tilfeldig gange modell, og statistisk dødelighet lik dødeligheten i år 2007.

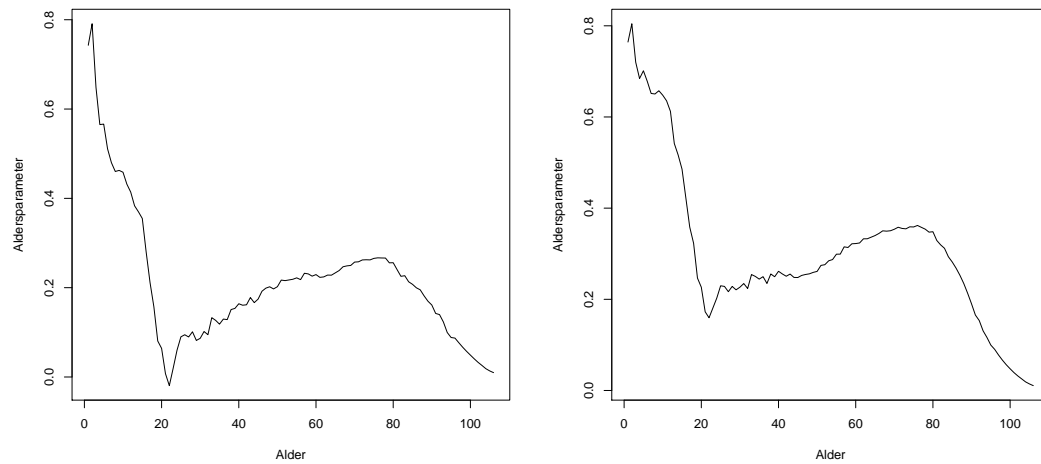
	Estimater				Konfidensintervall				Korrekt rate i 2007
	1950-1997		1980-1997		1950-1997		1980-1997		
	TG	AR	TG	AR	TG	AR	TG	AR	
0	0,353	0,353	0,385	0,385	[0,207, 0,604]	[0,251, 0,497]	[0,320, 0,461]	[0,341, 0,434]	0,409
10	0,011	0,011	0,009	0,009	[0,008, 0,015]	[0,009, 0,013]	[0,007, 0,012]	[0,008, 0,011]	0,007
20	0,104	0,104	0,079	0,079	[0,103, 0,104]	[0,103, 0,104]	[0,068, 0,092]	[0,071, 0,087]	0,082
30	0,131	0,131	0,155	0,155	[0,122, 0,141]	[0,125, 0,138]	[0,146, 0,164]	[0,149, 0,161]	0,087
40	0,230	0,230	0,250	0,250	[0,205, 0,259]	[0,214, 0,248]	[0,249, 0,251]	[0,250, 0,251]	0,183
50	0,528	0,528	0,483	0,483	[0,452, 0,618]	[0,478, 0,583]	[0,429, 0,543]	[0,447, 0,522]	0,509
60	1,105	1,105	1,051	1,051	[0,942, 1,297]	[0,998, 1,223]	[0,952, 1,157]	[0,986, 1,120]	1,064
70	2,552	2,552	2,427	2,428	[2,126, 3,062]	[2,272, 2,865]	[2,178, 2,697]	[2,263, 2,603]	2,114
80	6,358	6,358	5,824	5,826	[5,397, 7,481]	[5,728, 7,0500]	[5,156, 6,556]	[5,382, 6,300]	5,850
90	18,468	18,468	17,772	17,777	[16,967, 20,076]	[17,498, 19,475]	[16,753, 18,819]	[17,106, 18,462]	17,382
100	39,481	39,482	39,323	39,325	[38,781, 40,189]	[39,034, 39,929]	[38,929, 39,712]	[39,068, 39,581]	37,066

historiske data. Ved videre undersøkelse av modellen, så ser vi bare på simuleringer som er gjort med datagrunnlag fra 1950-1997.

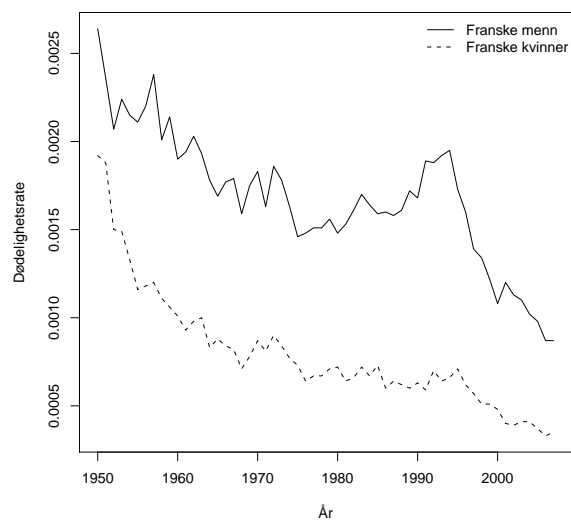
Vi vil videre se på forskjellen mellom autoregressiv og tilfeldig gange modellen. For blant annet franske kvinner på 60 år, så er den faktiske dødeligheten i 2007 bare i konfidensintervallene til den tilfeldige gange modellen og ikke i den autoregressive. Det er bare i få tilfeller at dødeligheten ligger utenfor autoregressiv modellen sitt konfidensintervall, men er i tilfeldig gange sitt. Det er derfor ingen grunn til å trekke konklusjonen om at en autoregressiv modell er feil. Det er bare et 95% konfidensintervall, så vi vil i 5% av tilfellene være utenfor.

Det som er mer urovekkende, er at vi i noen aldre bommer grovt med estimatet, og den korrekte verdien er langt utenfor konfidensintervallet til begge modellene. Dette gjelder spesielt franske menn i 30-40 års alderen. Der har ikke modellen klart å få med nok nedgang i dødelighet i forhold til hva som var tilfellet. For de aller fleste alderne så har vi et godt estimat på dødelighetsraten, så det kan tyde på at det er aldersvariabelen vår som ikke stemmer så godt i dette tilfellet. Aldersvariabelen for franske menn ved bruk av datagrunnlag fra 1950-1997 er vist til venstre i figur 13. Her er det problematisk at parameteren går ned mot null. Ved en a -verdi på null så vil ikke dødeligheten forandre seg, men derimot holde seg lik dødeligheten i år null (her 1997). I tilfeller der aldersparameteren er nær null, vil vi også få veldig smale konfidensintervaller. Hvis vi bruker datagrunnlaget for hele perioden 1950-2007, så har vi en høyere aldersparameter for denne aldersgruppen (vist til høyre i figur 13). Det viser at franske menn i 30-40 års alderen har hatt en drastisk nedgang de siste årene, og det har vi ikke klart å fange opp i modellen.

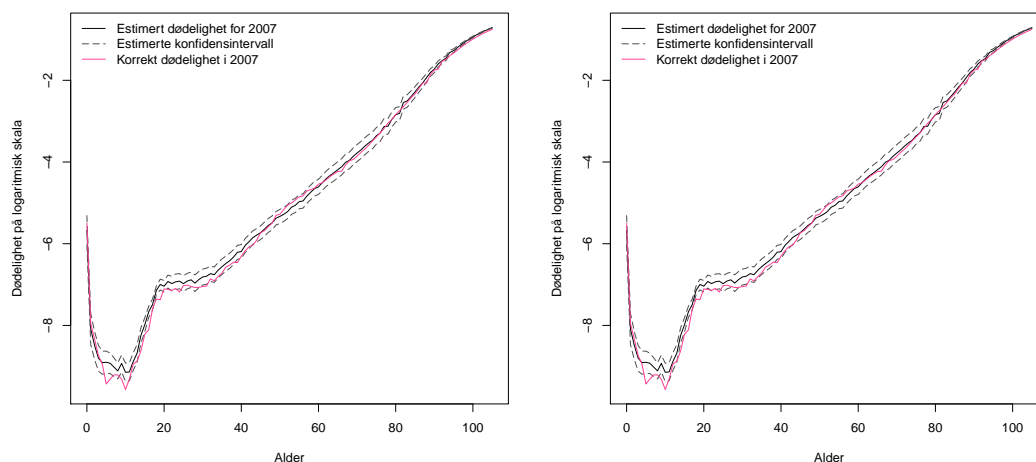
I figur 14 så er dødeligheten for 30 år gamle franske kvinner og menn plottet over tidsrommet 1950-2007. Her ser man at dødelighetsraten for menn er mer ustabil enn den er hos kvinner. Det er derfor vanskeligere å fremskrive dødeligheter for menn. Dette er en generell tendens for alle landene, og gjelder ikke bare Frankrike. Siden nedgangen i dødelighet varierer mye for menn, så er det også vanskelig å estimere aldersparameteren a_x . Vi gjorde den samme fremskrivningen for franske menn en gang



Figur 13: Aldersparameterne for franske menn estimert ved hjelp av datagrunnlaget fra 1950-1997 til venstre og ved datagrunnlaget fra 1950-2007 til høyre.



Figur 14: Dødelighetsrate for 30 år gamle franske kvinner og menn for tidsperioden 1950-2007



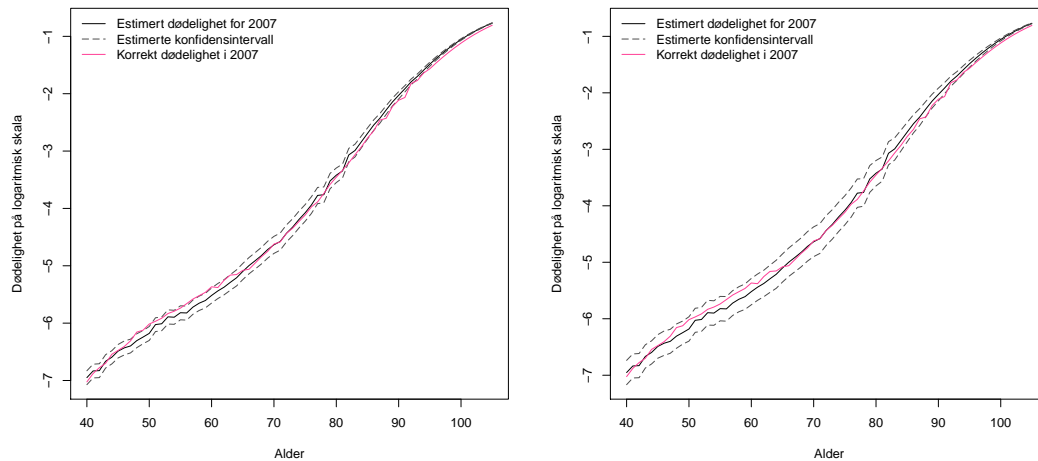
Figur 15: Forventede dødelighetsrater med 95%- og 99%-konfidensintervall (på logaritmisk skala) ved fremskrivning i ti år for franske menn ved bruk av aldersparameterne estimert ved hjelp av franske kvinner. 95%-konfidensintervall til venstre, 99%-konfidensintervall til høyre.

til, men denne gangen brukte vi kvinnene sine a_x -estimater framfor mennenes. Da fikk vi resultatet i figur 15, som er betraktelig bedre enn det vi fikk ved bruk av herrenes a_x -estimater.

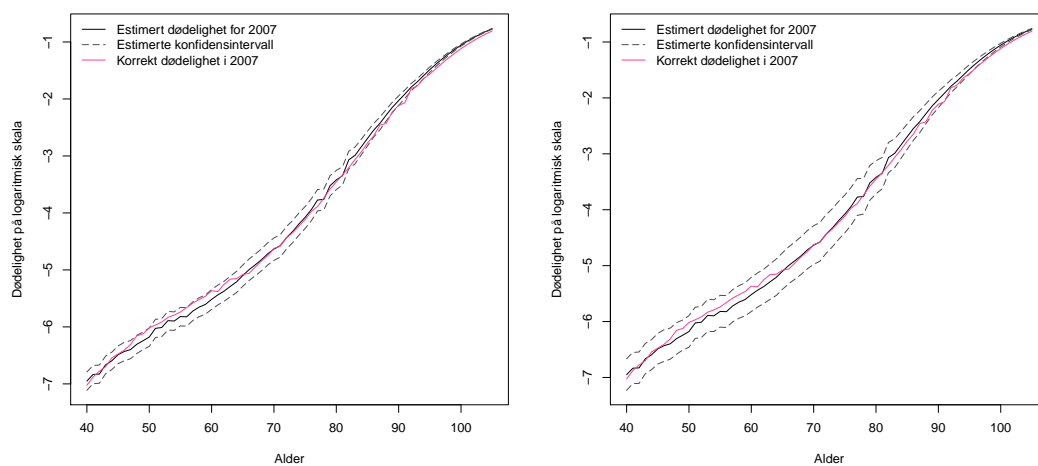
Når vi skal sammenligne bruken av autoregressiv og tilfeldig gange modellen, så velger vi å se på en aldersgruppe der estimatene ser gode ut. Vi velger da å se på franske kvinner over 40 år, og franske menn over 50 år. Vi ser først på kvinnene som er vist for den valgte aldersgruppen i figur 16. Her ser vi at dødeligheten for 2007 stort sett ligger innenfor konfidensintervallene uansett modell. Det er noen få tilfeller der dødeligheten er innenfor konfidensintervallet for tilfeldig gang modellen uten at den er innenfor ved den autoregressive modellen. For høye aldre så er vi utenfor konfidensintervallet for begge modellene, men vi har tidligere konkludert med at det er akseptabelt.

I forsikringsbransjen har det blitt mer vanlig å jobbe med 99%-konfidensintervall, og i Norge så er det også lovpålagt i forbindelse med beregning av solvens. Hvis vi plotter dødelighetsfremskrivningene for 2007 med 99%-konfidensintervall istedenfor 95%, så får vi resultatet i figur 17. Der ser vi at dødeligheten i 2007 ligger inne i konfidensintervaller for både autoregressiv og tilfeldig gang modell, med unntak av høye aldre. Her kan det se ut til at konfidensintervallene til tilfeldig gange modellen er unødvendig store, og at konfidensintervallene blir bedre ved en autoregressiv modell.

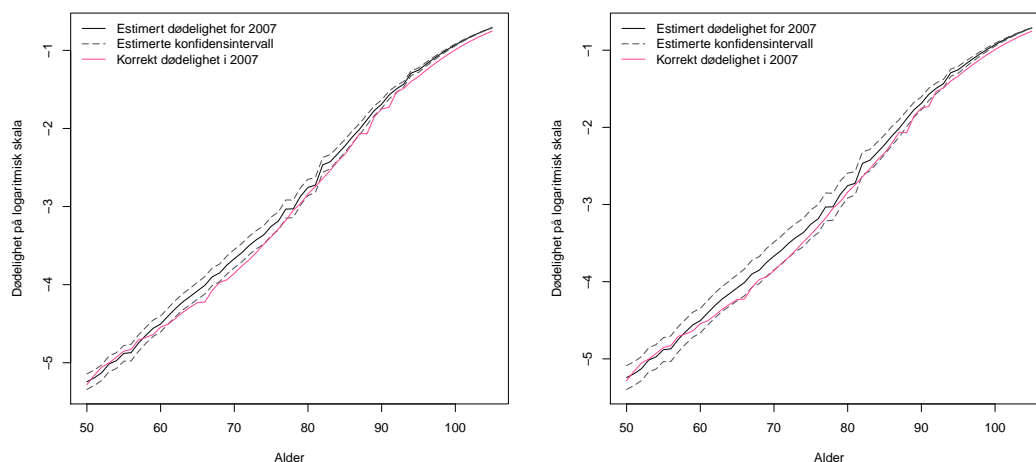
Vi ønsker også å se på de franske mennene over 50 år. Plottene med både 95%- og 99%-konfidensintervall er vist i figur 18 og 19. Her er dødeligheten mye lavere enn det vi har estimert og for å ha den korrekte dødeligheten i 2007 innenfor konfidensintervallet, så må vi bruke tilfeldig gang modellen.



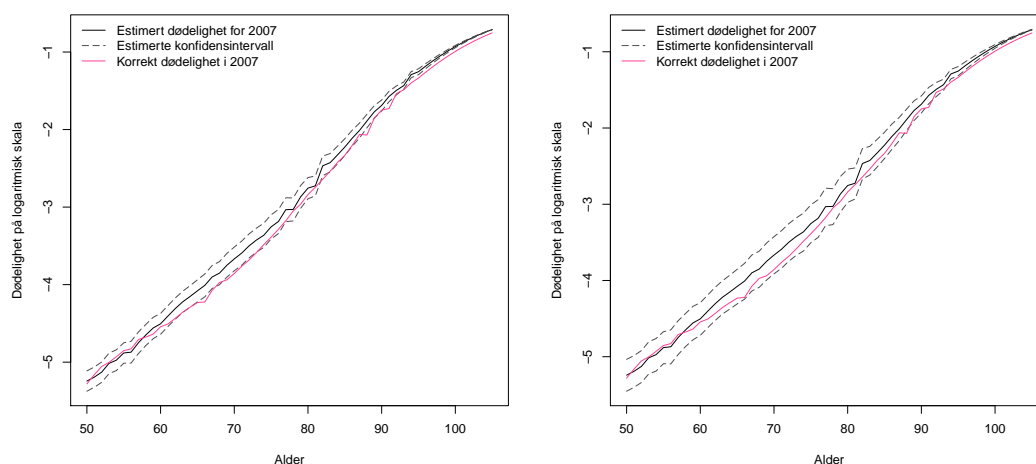
Figur 16: Forventede dødelighetsrater med 95%-konfidensintervall (på logaritmisk skala) ved fremskrivning i ti år for franske kvinner. Vi har brukt datagrunnlag fra 1950-1997 for å estimere dødeligheten i 2007. Autoregressiv prosess er brukt til venstre, mens tilfeldig gange er brukt i grafen til høyre.



Figur 17: Forventede dødelighetsrater med 99%-konfidensintervall (på logaritmisk skala) ved fremskrivning i ti år for franske kvinner. Vi har brukt datagrunnlag fra 1950-1997 for å estimere dødeligheten i 2007. Autoregressiv prosess er brukt til venstre, mens tilfeldig gange er brukt i grafen til høyre.



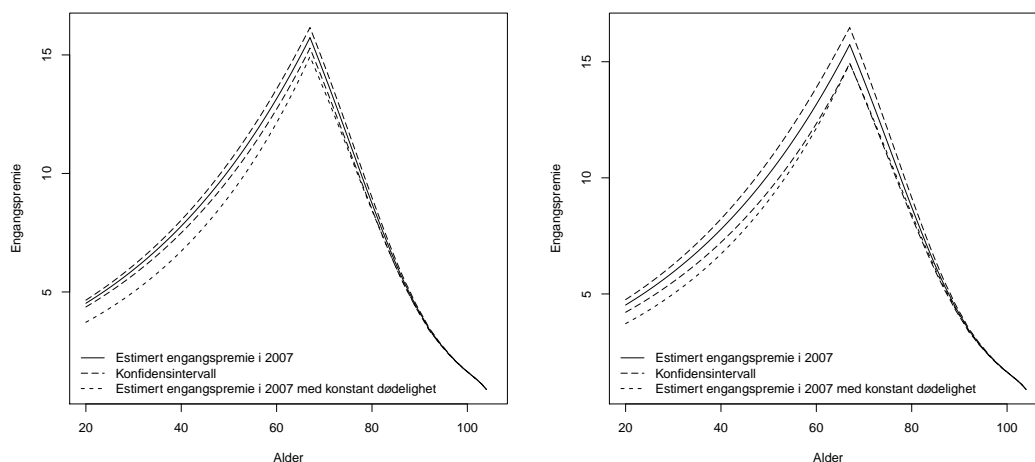
Figur 18: Forventede dødelighetsrater med 95%-konfidensintervall (på logaritmisk skala) ved fremskrivning i ti år for franske menn. Vi har brukt datagrunnlag fra 1950-1997 for å estimere dødeligheten i 2007. Autoregressiv prosess er brukt til venstre, mens tilfeldig gange er brukt i grafen til høyre.



Figur 19: Forventede dødelighetsrater med 99%-konfidensintervall (på logaritmisk skala) ved fremskrivning i ti år for franske menn. Vi har brukt datagrunnlag fra 1950-1997 for å estimere dødeligheten i 2007. Autoregressiv prosess er brukt til venstre, mens tilfeldig gange er brukt i grafen til høyre.

4 Økonomiske konsekvenser

Valget av dødelighetsmodell vil påvirke forsikringsselskapene økonomisk. Vi velger å se på engangspremier og nåverdier når vi skal se på de økonomiske konsekvensene av dette valget.



Figur 20: Estimerte engangspremier med 95%-konfidensintervall for franske kvinner. Autoregressiv prosess er brukt til venstre, mens tilfeldig gange er brukt i grafen til høyre.

4.1 Engangspremier

Engangspremie for alder l er definert som

$$\pi_l = s \sum_{i=k_r}^{l_e-l_0} d^i {}_i p_l, \quad (8)$$

der

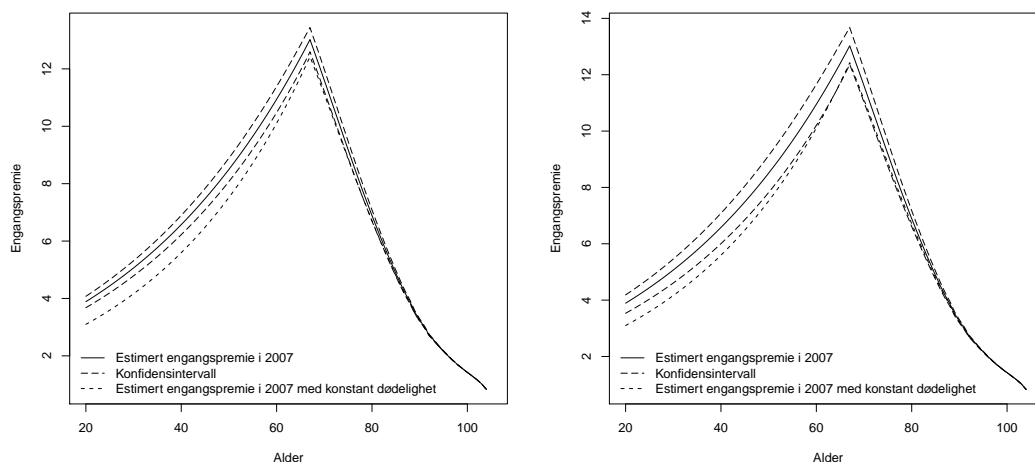
$$\begin{aligned} s &= \text{Størrelsen på utbetalingen} \\ l_r &= \text{Alderen der utbetalingene starter} \\ l_e &= \text{Maksimum alder (her 105)} \\ k_r &= \text{Maks}(l_r - l, 0) \end{aligned}$$

(Bølviken). Vi har valgt å bruke en utbetaling av størrelse 1 som starter ved alder 67. Siden vi har en dynamisk dødelighetsmodell, så trenger vi en metode for å regne ut overlevelsessannsynlighetene som vi skal bruke i ligning 8. Fra grunnleggende forsikringsmatematikk så vet vi at

$${}_{i+1}p_l = {}_i p_l (1 - q_{l+1}) = {}_i p_l {}_1 p_{l+i},$$

der ${}_0 p_l = 1$ for alle l (Gerber, 1997). På den måten kan man ved rekursjon regne ut ${}_{i+1}p_l$ for alle i og l . På tilsvarende måte ved en dynamisk dødelighetsmodell har man at

$${}_{i+1}p_{l,k} = {}_i p_{l,k} {}_1 p_{(l+i),(k+i)}, \quad (9)$$



Figur 21: Estimerte engangspremier med 95%-konfidensintervall for franske menn. Autoregressiv prosess er brukt til venstre, mens tilfeldig gange er brukt i grafen til høyre.

ved tid k . Her kan vi bruke rekursjonen på samme måte, fordi vi også her har at ${}_0p_{l,k} = 1$ for alle l og k . På den måten kan vi finne alle overlevelsessannsynlighetene vi trenger for å kunne regne ut engangspremiene.

De estimerte engangspremiene med 95%-konfidensintervall for franske kvinner og menn er vist i figur 20 og 21. Her ser det ut til at estimatene er tilnærmet like, men at usikkerheten er større ved en tilfeldig gang modell. Det får vi bekreftet i tabell 8 og 9, men den autoregressive modellen gir jevnt over noe høyere estimater enn tilfeldig gang. Selv om estimatene er nokså like ved autoregressiv og tilfeldig gang modell, så vil det gi økonomiske forskjeller.

Konfidensintervallene er det store forskjeller på. Tilfeldig gange modellen gir oss mye videre konfidensintervaller, og vi har derfor mye større usikkerhet i estimatene ved bruk av tilfeldig gang. Det gir et større økonomisk sprik fra beste til verste scenario, og forsikringsselskapet må ha nok kapital til å dekke det verst tenkelige utfallet. Dermed blir forsikringsselskapet avhengig av mer kapital ved bruk av en tilfeldig gang kontra en autoregressiv modell.

4.2 Nåverdier

Nåverdien til en portefølje er definert som

$$PV_0 = \sum_{k=0}^{l_e-l_0} d^k \mathcal{X}_k, \quad (10)$$

der forpliktelsen \mathcal{X}_k er gitt ved

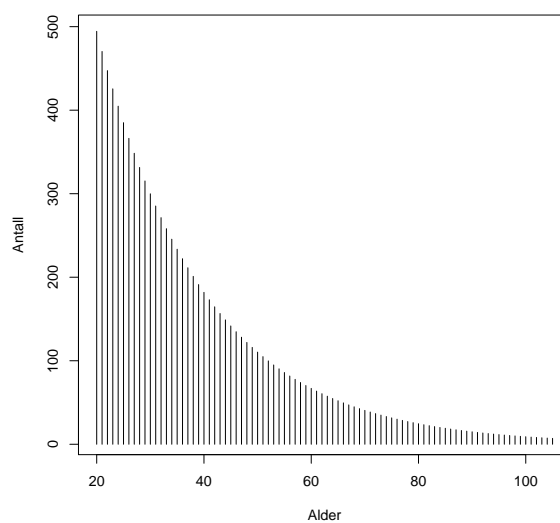
$$\mathcal{X}_k = -\pi \sum_{l=l_0}^{l_r-k-1} J_{l,k} p_l + s \sum_{l=l_r-k}^{l_e-k} J_{l,k} p_l \quad (11)$$

Tabell 8: Estimerte engangspremier for 2007 for franske kvinner ved bruk av ulike dødelighetsmodeller. Dynamisk dødelighet med tidsparametere simulert både ved hjelp av autoregressiv og tilfeldig gang modell, og statisk dødelighetsmodell lik dødeligheten i år 2007.

	Estimater			Konfidensintervall	
	TG	AR	Statisk	TG	AR
20	4,34	4,35	3,5	[-7,9% , 6,2%]	[-4,0% , 3,3%]
30	5,68	5,69	4,7	[-8,0% , 6,5%]	[-4,1% , 3,5%]
40	7,41	7,42	6,31	[-8,0% , 6,6%]	[-4,2% , 3,5%]
50	9,62	9,62	8,48	[-7,7% , 6,5%]	[-4,0% , 3,6%]
60	12,42	12,42	11,4	[-6,7% , 6,0%]	[-3,6% , 3,4%]
70	13,24	13,24	12,58	[-5,4% , 5,2%]	[-3,1% , 3,0%]
80	7,88	7,88	7,62	[-4,7% , 4,9%]	[-2,9% , 3,0%]
90	3,66	3,66	3,62	[-2,4% , 2,7%]	[-1,7% , 1,8%]
100	1,49	1,49	1,48	[-0,7% , 0,3%]	[-0,6% , 0,3%]

Tabell 9: Estimerte engangspremier for 2007 for franske menn ved bruk av ulike dødelighetsmodeller. Dynamisk dødelighet med tidsparametere simulert både ved hjelp av autoregressiv (AR) og tilfeldig gang (TG) modell, og statisk dødelighet lik dødeligheten i år 2007.

	Estimater			Konfidensintervall	
	TG	AR	Statisk	TG	AR
20	3,57	3,57	2,82	[-11,3% , 9,9%]	[-6,5% , 6,2%]
30	4,63	4,64	3,79	[-10,8% , 9,9%]	[-6,5% , 6,0%]
40	5,99	6,0	5,09	[-10,1% , 9,6%]	[-6,2% , 5,8%]
50	7,73	7,73	6,84	[-9,3% , 8,8%]	[-5,6% , 5,5%]
60	9,93	9,93	9,19	[-7,8% , 7,4%]	[-4,7% , 4,7%]
70	10,46	10,46	10,05	[-5,5% , 5,5%]	[-3,5% , 3,6%]
80	6,12	6,12	5,97	[-4,4% , 4,5%]	[-3,0% , 3,1%]
90	2,87	2,87	2,84	[-2,2% , 2,0%]	[-1,7% , 1,5%]
100	1,29	1,29	1,29	[-0,2% , 0,5%]	[-0,2% , 0,5%]



Figur 22: Aldersfordelingen i porteføljen.

Tabell 10: Nåverdier i hele tusen for angitt år, estimert ved tre ulike dødelighetsmodeller, Lee-Carter med autoregressiv tidsvariabel (AR), Lee-Carter med tilfeldig gang tidsparameter (TG), og konstant dødelighet lik dødeligheten ved siste dataår. N, D, S, J, F, I, SP, UK, US er henholdsvis Norge, Danmark, Sverige, Japan, Frankrike, Italia, Spania, Storbritannia og USA, K er kvinner og M er menn.

		Nåverdier					
		Estimater			Konfidensintervall		
		TG	AR	Statisk	TG	AR	
N	2008	K	35,3	35,3	32,8	[-6,7% , 6,2%]	[-4,6% , 4,5%]
		M	28,8	28,8	27,5	[-5,6% , 5,3%]	[-5,4% , 5,2%]
D	2008	K	33,0	33,0	30,5	[-8,7% , 8,5%]	[-5,3% , 5,3%]
		M	26,9	26,9	25,6	[-6,1% , 6,2%]	[-4,5% , 4,4%]
S	2008	K	35,7	35,7	32,9	[-5,4% , 5,1%]	[-3,6% , 3,5%]
		M	30,0	30,0	28,1	[-5,4% , 5,2%]	[-4,1% , 4,4%]
J	2008	K	41,5	41,5	37,3	[-5,2% , 4,5%]	[-3,7% , 3,3%]
		M	32,6	32,6	29,1	[-7,7% , 7,7%]	[-5,5% , 5,3%]
F	2007	K	38,7	38,8	35,4	[-7,4% , 6,4%]	[-3,9% , 3,7%]
		M	37,8	37,8	27,9	[-5,6% , 5,1%]	[-3,4% , 3,2%]
I	2007	K	37,4	37,4	34,2	[-8,1% , 7,1%]	[-5,1% , 4,8%]
		M	30,3	30,3	28,1	[-7,7% , 6,9%]	[-5,6% , 5,5%]
SP	2006	K	37,3	37,2	34,4	[-6,5% , 5,6%]	[-3,7% , 3,4%]
		M	30,0	30,0	27,4	[-1,2% , 9,7%]	[-6,2% , 5,9%]
UK	2008	K	34,3	34,4	31,8	[-7,9% , 7,6%]	[-4,8% , 4,6%]
		M	29,8	29,8	27,4	[-7,6% , 7,4%]	[-5,5% , 5,4%]
US	2007	K	30,5	30,5	27,9	[-8,6% , 8,2%]	[-5,2% , 5,1%]
		M	28,7	28,7	26,9	[-4,4% , 4,3%]	[-4,2% , 4,1%]

og J_l er antall personer i porteføljen som er l år (Bølviken). I porteføljen vi har brukt så er $\mathcal{J} = J_{l_0} + J_{l_1} + \dots + J_{l_e} = 10000$, og alderssammensetningen er vist i figur 22. I våre utregninger så har vi brukt en utbetaling på $s = 1$ og premie π lik den ekvivalente premien som er definert som

$$\pi \sum_{k=0}^{l_r-l_0-1} d^k {}_k p_{l_0} = s \sum_{k=l_r-l_0}^{l_e-l_0} d^k {}_k p_l \quad (12)$$

(Bølviken).

Vi fant nåverdiene for den gitte porteføljen for alle land og kjønn, og vi brukte det siste året med tilgjengelig data som år null. Nåverdiene vi fikk er gitt med 95%-konfidensintervall i tabell 10. Vi får akkurat det samme resultatet som ved engangspremiene. Estimaterne er nær hverandre for de to ulike Lee-Carter modellene, mens konfidensintervallene er mye større når vi bruker tilfeldig gang modellen. Det er en betydelig forskjell mellom nåverdiene estimert ved hjelp av Lee-Carter og statistisk dødelighet, noe som er forventet siden Lee-Carter reduserer dødelighetsraten over tid.

De store konfidensintervallene ved tilfeldig gange modellen vil også her føre til at forsikringsselskapene må ha mer kapital enn ved den autoregressive modellen. I tallverdi vil kanskje ikke forskjellene i konfidensintervallene virke så store når vi benytter en utbetaling på en enhet, derfor er konfidensintervallene i tabell 10 gitt som prosent av estimatet. Hvis vi ser på norske kvinner og antar at enheten vår er på 100 000 NOK, så vil forskjellen mellom de øvre grensene i konfidensintervallene være på 60 700 000 NOK. Hvis vi antar at forsikringsselskapet tar utgangspunkt i en solvens på 97,5%, så må altså de som benytter seg av den tilfeldige gange modellen ha

60 700 000 kroner mer i kapital enn de som benytter seg av den autoregressive modell. Modellvalget har som vi ser store økonomisk konsekvenser.

5 Konklusjon

Vi har sett at nedgangen i dødelighet ikke er uavhengig for hvert år, men derimot har en negativ korrelasjon. Derfor vet vi at tidsvariablene ikke følger en tilfeldig gang som man tradisjonelt har brukt, men en autoregressiv prosess med negativ koeffisient.

I noen tilfeller har vi allikevel fått fremskrivninger som stemmer dårlig overens med virkeligheten, og hvor den korrekte dødeligheten er utenfor vårt konfidensintervall. Det betyr ikke nødvendigvis at det blir feil å bruke en autoregressiv modell, for det er flere kilder til usikkerhet som vi ikke har tatt med i denne oppgaven. Vi har ikke tatt med parameterusikkerheten i estimatet av a i ligning 3. Den kan man inkludere ved å bruke usikkerheten vi fant for a ved hjelp av «bootstrap» og se hvor mye usikkerheten i a påvirker fremskrivningene og konfidensintervallene.

Vi har i tillegg gjort noen forutsetninger som ikke nødvendigvis er riktig. Vi har antatt at aldersparameterne i Lee-Carter modellen er like uansett tid. Vi har samtidig sett at vi får ulike aldersvariable når vi estimerer med datagrunnlag fra 1950-2007 i forhold til hvis vi bare bruker 1950-1997, noe som tyder på det motsatte. Nedgangen i dødeligheten, spesielt hos menn, er veldig variabel fra år til år for de ulike aldersgruppene, og det virker derfor rimelig at aldersparameterne varierer. For å få et bedre bilde av usikkerheten ved levetidsfremskrivninger, så må vi også få med usikkerheten i estimeringen av aldersparameterne a_x .

Fordi den negative korrelasjonen i tidsvariablene fører til smalere konfidensintervall når vi bruker en autoregressiv modell, så får modellvalget store økonomiske konsekvenser. Forsikringsselskapene trenger mindre kapital for å ha solvens fordi det blir mindre usikkerhet i estimatene våre.

Referanser

- Human Mortality Database. University of California, Berkeley (USA), og Max Planck Institute for Demographic Research (Germany). Tilgjengelig på www.mortality.org eller www.humanmortality.de (data lastet ned [24.01.11]).*
- Erik Bølviken. Undervisningsmateriale for stk 4520 - finans- og forsikringsmatematisk laboratorium. Fått materialet av Erik Bølviken.
- Andrew J. G. Cairns, David Blake, og Kevin Dowd. A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: theory and calibration. *The Journal of Risk and Insurance*, 73:687–718, 2006.
- Hans U. Gerber. *Life Insurance Mathematics*. Springer, third edition, 1997.
- Søren Fig Järner, Esben Masotti Kryger, og Chresten Døngsøe. The evolution of death rates and life expectancy in Denmark. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2:147–173, 2008.
- Ronald Lee og Timothy Miller. Evaluating the performance of the Lee-Carter method for forecasting mortality. *Demography*, 38:537–549, 2001.
- Ronald D. Lee og Lawrence R. Carter. Modeling and Forecasting U. S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87(419):659–671, 1992.
- Robert H. Shumway og David S. Stoffer. *Time Series Analysis and Its Applications with R Examples*. Springer, second edition, 2006.
- Statistisk sentralbyrå. *Vi lever stadig lengre*, April 2010. <http://www.ssb.no/emner/02/02/10/dode/>.
- Shripad Tuljapurkar, Nan Li, og Carl Boe. A universal pattern of mortality decline in the G7 countries. *Letters to nature*, 405:789–792, 2001.

6 Appendiks

6.1 Autokorrelasjonsfunksjonen (ACF)

Når vi skal finne autokorrelasjonsfunksjonen til z , så antar vi først at z er en svak stasjonær tidsrekke. Av definisjon betyr det at forventningen til z er konstant og at autokovariansfunksjonen $\gamma(s, t)$ bare avhenger av differansen mellom s og t (Shumway og Stoffer, 2006). Det vil si at vi har $\gamma(t + h, t) = \gamma(h, 0)$ for alle t og h , og det er vanlig å skrive dette som $\gamma(h)$. Autokovariansfunksjonen for en svakt stasjonær tidsrekke er gitt ved

$$\gamma(h) = \text{E}[(z_{t+h} - \mu)(z_t - \mu)] \quad (13)$$

(Shumway og Stoffer, 2006). I vårt tilfelle så vil $\mu = 0$, og det kan enkelt vises ved hjelp av et induksjonsbevis. Vi vet at $\text{E}[z_0] = 0$ og at

$$\text{E}[z_k] = a\text{E}[z_{k-1}] + \sigma\text{E}[\epsilon_k].$$

Siden forventningen til ϵ_k er null for alle k , så har vi videre at

$$\text{E}[z_k] = a\text{E}[z_{k-1}]. \quad (14)$$

Vi kan dermed lett vise at

$$\text{E}[z_1] = a\text{E}[z_0] = 0,$$

og vi antar at dette holder opp til z_k . Vi må da vise at det også holder for z_{k+1} :

$$\text{E}[z_{k+1}] = a\text{E}[z_k] = 0.$$

Siden dette holder, så kan vi skrive om ligning 13 til å være

$$\gamma(h) = \text{E}[z_{t+h}z_t]. \quad (15)$$

Vi kan nå med enkle regnemetoder finne både autokovariansfunksjonen og autokorrelasjonsfunksjonen (ACF) til z . Ved å bruke ligning 15, så ser vi at

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \text{E}[z_{t+h}z_t] \\ \gamma(h) &= \text{E}[(az_{t+h-1} + \sigma\epsilon_{t+h})(az_{t-1} + \sigma\epsilon_t)] \\ \gamma(h) &= a^2\text{E}[z_{t+h-1}z_{t-1}] + a\sigma\text{E}[\epsilon_t z_{t+h-1}] + a\sigma\text{E}[\epsilon_{t+h}z_{t-1}] + \sigma^2\text{E}[\epsilon_{t+h}\epsilon_t]. \end{aligned} \quad (16)$$

Ligning 16 vil ha ulike verdier for ulike h -verdier. Vi ser først på tilfellet der $h = 0$, da kan ligning 16 skrives om til

$$\gamma(0) = a^2\text{E}[z_{t-1}^2] + 2a\sigma\text{E}[\epsilon_t z_{t-1}] + \sigma^2\text{E}[\epsilon_t^2].$$

Da ser man fort at ϵ_t er uavhengig av z_{t-1} , og fordi forventningen til ϵ_t er null, så har vi at

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= a^2\text{E}[z_{t-1}^2] + \sigma^2\text{E}[\epsilon_t^2] \\ \gamma(0) &= a^2\gamma(0) + \sigma^2 \\ (1 - a^2)\gamma(0) &= \sigma^2 \\ \gamma(0) &= \frac{\sigma^2}{1 - a^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

På tilsvarende måte så kan vi regne ut autokovariansen til z når $h > 0$, men vi ser fort at alle autokorrelasjonene vil være null med unntak av tilfellet med $h = 1$. Vi trenger ikke å se på de negative h -verdiene, for vi vil alltid ha at $\gamma(h) = \gamma(-h)$ (Shumway og Stoffer, 2006). Når $h = 1$, så kan vi skrive om ligning 16 til å være

$$\begin{aligned}
 \gamma(1) &= a^2 \mathbf{E}[z_t z_{t-1}] + a\sigma \mathbf{E}[\epsilon_t z_t] + a\sigma \mathbf{E}[\epsilon_{t+1} z_{t-1}] + \sigma^2 \mathbf{E}[\epsilon_{t+1} \epsilon_t] \\
 \gamma(1) &= a^2 \gamma(1) + a\sigma \mathbf{E}[\epsilon_t z_t] + a\sigma \mathbf{E}[z_{t-1}] \mathbf{E}[\epsilon_{t+1}] + \sigma^2 \mathbf{E}[\epsilon_{t+1}] \mathbf{E}[\epsilon_t] \\
 \gamma(1) &= a^2 \gamma(1) + a\sigma \mathbf{E}[(az_{t-1} + \sigma \epsilon_t) \epsilon_t] \\
 \gamma(1) &= a^2 \gamma(1) + a\sigma^2 \\
 (1 - a^2)\gamma(1) &= a\sigma^2 \\
 \gamma(1) &= \frac{a\sigma^2}{1 - a^2}. \tag{18}
 \end{aligned}$$

Når vi har funnet autokovariansfunksjonen, så kan man også finne ACF. ACF er gitt ved

$$\rho(h) = \frac{\gamma(t+h, t)}{\sqrt{\gamma(t+h, t+h)\gamma(t, t)}} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \tag{19}$$

(Shumway og Stoffer, 2006). Ved å sette inn verdiene for γ som vi fant i ligning 17 og 18, så får vi at ACF for z er

$$\begin{aligned}
 \rho(0) &= 1 \\
 \rho(1) &= a \\
 \rho(h) &= 0 \text{ for alle } h > 1.
 \end{aligned}$$

6.2 Datakode i Fortran: Program som estimerer parameterne i Lee-Carter modellen

Denne koden er skrevet av professor Erik Bølviken ved Universitetet i Oslo.

```
implicit none
real*8 q(100,0:120), a, n(100,0:120), mql(0:120), ql(100,0:120)
real*8 u(0:120), v(100), qe(100,0:120), s1, s2, ql0
real*8 gest(0:160), exlif, pe(1000)
real*8 ve(100), sum, p(100), q0(0:160), h, qk(0:160), mk, sk
real*8 s3, s4, au, bu, ageex, hh
integer nn(100,0:120), ix, ik, swi, i, nm(0:120), ls, ld, nd, kk, it
integer nk, nx1, nx2, nkfu, ninit, iinit

open (unit=10, file='spainfem.csv')
open (unit=11, file='spainmal.csv')
open (unit=15, file='leecarterhe.par')
open (unit=20, file='timefl.res')
open (unit=21, file='agefl.res')
open (unit=22, file='ageexpected.res')

read(15,*)
read(15,*)nk, nx1, nx2, swi
read(15,*)
read(15,*)ninit, nkfu

c Reading mortality, details depend on the
c structure of the data file

iinit=(ninit-1950)*111+1
nk=nk-iinit+1
if(swi.eq.0) then
  do i=1, iinit
    read(10,*)
  enddo
  do ik=1, nk
    do ix=0, 110
      read(10,*)a, a, a, q(ik, ix), a, a, a, nn(ik, ix)
    enddo
  enddo
else
  do i=1, iinit
    read(11,*)
  enddo
  do ik=1, nk
    do ix=0, 110
      read(11,*)a, a, a, q(ik, ix), a, a, a, nn(ik, ix)
```

```

        enddo
    enddo
endif

c   Entering the estimation phase

do ix=nx1,nx2
    mql(ix)=0
    nm(ix)=0
enddo
do ik=1,nk
    do ix=nx1,nx2
        n(ik,ix)=nn(ik,ix)*q(ik,ix)
        if(q(ik,ix).lt.0.9999999) then
            hh=q(ik,ix)/(1-q(ik,ix))
        else
            hh=q(ik,ix)/(1.0001-q(ik,ix))
        endif
        ql(ik,ix)=dlog(hh+0.00000000001)
        mql(ix)=mql(ix)+ql(ik,ix)*n(ik,ix)
        nm(ix)=nm(ix)+n(ik,ix)
    enddo
enddo
do ix=nx1,nx2
    mql(ix)=mql(ix)/nm(ix)
enddo
call iter(ql,n,nk,nx1,nx2,mql,u,v)

do ik=1,nk
    write(20,100)ik,v(ik)
enddo
do ix=nx1,nx2
    write(21,100)ix,u(ix)
enddo
100   format(1x,i7,200f14.4)

c-----

subroutine iter(ql,n,nk,nx1,nx2,mql,u,v)
implicit none
real*8 n(100,0:120),mql(0:120),ql(100,0:120),u(0:120),v(100)
real*8 s1,s2,u1(0:120),v1(100)
integer ix,ik,niter,it,nk,nx1,nx2
parameter(niter=200)

v(1)=1

```

```

do ik=2,nk
    v(ik)=0.1
enddo

do it=1,niter

    if(it.gt.1) then
        do ix=nx1,nx2
            u1(ix)=u(ix)
        enddo
        do ik=1,nk
            v1(ik)=v(ik)
        enddo
    endif

    do ix=nx1,nx2
        s1=0
        s2=0
        do ik=1,nk
            s1=s1+(q1(ik,ix)-mql(ik,ix))*v(ik)*n(ik,ix)
            s2=s2+v(ik)*v(ik)*n(ik,ix)
        enddo
        u(ix)=s1/s2
c    write(*,*)u(ix)
    enddo
c    pause

    do ik=2,nk
        s1=0
        s2=0
        do ix=nx1,nx2
            s1=s1+(q1(ik,ix)-mql(ik,ix))*u(ix)*n(ik,ix)
            s2=s2+u(ix)*u(ix)*n(ik,ix)
        enddo
        v(ik)=s1/s2
c    write(*,*)v(ik)
    enddo
c    pause

    if(it.gt.1) then
        s1=0
        do ik=1,nk
            s1=s1+(v1(ik)-v(ik))*2
        enddo
        s2=0
        do ix=nx1,nx2
            s2=s2+(u1(ix)-u(ix))*2
        enddo
    endif
enddo

```



```

        enddo
c      write(*,*)it,s1,s2
      endif

enddo

end

```

6.3 Datakode i R

```

1
2 # ***** LESER INN DATA *****
3
4 #k = kvinner , m = menn
5
6 Norgetid.k.data = read.table("Norge-kvinner-timef1.res",header = F)
7 Norgetid.m.data = read.table("Norge-menn-timef1.res",header = F)
8 Norgeald.k.data = read.table("Norge-kvinner-agef1.res",header = F)
9 Norgeald.m.data = read.table("Norge-menn-agef1.res",header = F)
10
11 Sverigetid.k.data = read.table("Sverige-kvinner-timef1.res",header = F)
12 Sverigetid.m.data = read.table("Sverige-menn-timef1.res",header = F)
13 Sverigeald.k.data = read.table("Sverige-kvinner-agef1.res",header = F)
14 Sverigeald.m.data = read.table("Sverige-menn-agef1.res",header = F)
15
16 Danmarktid.k.data = read.table("Danmark-kvinner-timef1.res",header = F)
17 Danmarktid.m.data = read.table("Danmark-menn-timef1.res",header = F)
18 Danmarkald.k.data = read.table("Danmark-kvinner-agef1.res",header = F)
19 Danmarkald.m.data = read.table("Danmark-menn-agef1.res",header = F)
20
21 Japantid.k.data = read.table("Japan-kvinner-timef1.res",header = F)
22 Japantid.m.data = read.table("Japan-menn-timef1.res",header = F)
23 Japanald.k.data = read.table("Japan-kvinner-agef1.res",header = F)
24 Japanald.m.data = read.table("Japan-menn-agef1.res",header = F)
25
26 Japantid.k.data1998 = read.table("Japan-kvinner-timef2.res",header = F)
27 Japantid.m.data1998 = read.table("Japan-menn-timef2.res",header = F)
28 Japanald.k.data1998 = read.table("Japan-kvinner-agef2.res",header = F)
29 Japanald.m.data1998 = read.table("Japan-menn-agef2.res",header = F)
30
31 Japantid.k.data1998.80 = read.table("Japan-kvinner-timef3.res",header = F)
32 Japantid.m.data1998.80 = read.table("Japan-menn-timef3.res",header = F)
33 Japanald.k.data1998.80 = read.table("Japan-kvinner-agef3.res",header = F)
34 Japanald.m.data1998.80 = read.table("Japan-menn-agef3.res",header = F)
35
36 Frankriketid.k.data = read.table("Frankrike-kvinner-timef1.res",header = F)
37 Frankriketid.m.data = read.table("Frankrike-menn-timef1.res",header = F)
38 Frankrikeald.k.data = read.table("Frankrike-kvinner-agef1.res",header = F)
39 Frankrikeald.m.data = read.table("Frankrike-menn-agef1.res",header = F)
40
41 Frankriketid.k.data1997 = read.table("Frankrike-kvinner-timef2.res",header = F
)
42 Frankriketid.m.data1997 = read.table("Frankrike-menn-timef2.res",header = F)
43 Frankrikeald.k.data1997 = read.table("Frankrike-kvinner-agef2.res",header = F)
44 Frankrikeald.m.data1997 = read.table("Frankrike-menn-agef2.res",header = F)
45
46 Frankriketid.k.data1997.80 = read.table("Frankrike-kvinner-timef3.res",header
= F)
47 Frankriketid.m.data1997.80 = read.table("Frankrike-menn-timef3.res",header = F
)

```

```

48 Frankrikeald.k.data1997.80 = read.table("Frankrike-kvinner-agef3.res", header =
F)
49 Frankrikeald.m.data1997.80 = read.table("Frankrike-menn-agef3.res", header = F)
50
51 Italiatid.k.data = read.table("Italia-kvinner-timef1.res", header = F)
52 Italiatid.m.data = read.table("Italia-menn-timef1.res", header = F)
53 Italiaald.k.data = read.table("Italia-kvinner-agef1.res", header = F)
54 Italiaald.m.data = read.table("Italia-menn-agef1.res", header = F)
55
56 Spaniatid.k.data = read.table("Spania-kvinner-timef1.res", header = F)
57 Spaniatid.m.data = read.table("Spania-menn-timef1.res", header = F)
58 Spaniaald.k.data = read.table("Spania-kvinner-agef1.res", header = F)
59 Spaniaald.m.data = read.table("Spania-menn-agef1.res", header = F)
60
61 Storbritanniatid.k.data = read.table("Storbritannia-kvinner-timef1.res", header
= F)
62 Storbritanniatid.m.data = read.table("Storbritannia-menn-timef1.res", header =
F)
63 Storbritanniaald.k.data = read.table("Storbritannia-kvinner-agef1.res", header
= F)
64 Storbritanniaald.m.data = read.table("Storbritannia-menn-agef1.res", header = F
)
65
66 USAtid.k.data = read.table("USA-kvinner-timef1.res", header = F)
67 USAtid.m.data = read.table("USA-menn-timef1.res", header = F)
68 USAald.k.data = read.table("USA-kvinner-agef1.res", header = F)
69 USAald.m.data = read.table("USA-menn-agef1.res", header = F)
70
71 Norgetid.k = Norgetid.k.data$V2-1
72 Norgetid.m = Norgetid.m.data$V2-1
73 Sverigetid.k = Sverigetid.k.data$V2-1
74 Sverigetid.m = Sverigetid.m.data$V2-1
75 Danmarktid.k = Danmarktid.k.data$V2-1
76 Danmarktid.m = Danmarktid.m.data$V2-1
77 Japantid.k = Japantid.k.data$V2-1
78 Japantid.m = Japantid.m.data$V2-1
79 Japantid.k1998 = Japantid.k.data1998$V2-1
80 Japantid.m1998 = Japantid.m.data1998$V2-1
81 Japantid.k1998.80 = Japantid.k.data1998.80$V2-1
82 Japantid.m1998.80 = Japantid.m.data1998.80$V2-1
83 Frankriketid.k = Frankriketid.k.data$V2-1
84 Frankriketid.m = Frankriketid.m.data$V2-1
85 Frankriketid.k1997 = Frankriketid.k.data1997$V2-1
86 Frankriketid.m1997 = Frankriketid.m.data1997$V2-1
87 Frankriketid.k1997.80 = Frankriketid.k.data1997.80$V2-1
88 Frankriketid.m1997.80 = Frankriketid.m.data1997.80$V2-1
89 Italiatid.k = Italiatid.k.data$V2-1
90 Italiatid.m = Italiatid.m.data$V2-1
91 Spaniatid.k = Spaniatid.k.data$V2-1
92 Spaniatid.m = Spaniatid.m.data$V2-1
93 Storbritanniatid.k = Storbritanniatid.k.data$V2-1
94 Storbritanniatid.m = Storbritanniatid.m.data$V2-1
95 USAtid.k = USAtid.k.data$V2-1
96 USAtid.m = USAtid.m.data$V2-1
97
98 Norgeald.k = Norgeald.k.data$V2
99 Norgeald.m = Norgeald.m.data$V2
100 Sverigeald.k = Sverigeald.k.data$V2
101 Sverigeald.m = Sverigeald.m.data$V2
102 Danmarkald.k = Danmarkald.k.data$V2
103 Danmarkald.m = Danmarkald.m.data$V2
104 Japanald.k = Japanald.k.data$V2
105 Japanald.m = Japanald.m.data$V2
106 Japanald.k1998 = Japanald.k.data1998$V2
107 Japanald.m1998 = Japanald.m.data1998$V2
108 Japanald.k1998.80 = Japanald.k.data1998.80$V2

```

```

109 Japanald.m1998.80 = Japanald.m.data1998.80$V2
110 Frankrikeald.k = Frankrikeald.k.data$V2
111 Frankrikeald.m = Frankrikeald.m.data$V2
112 Frankrikeald.k1997 = Frankrikeald.k.data1997$V2
113 Frankrikeald.m1997 = Frankrikeald.m.data1997$V2
114 Frankrikeald.k1997.80 = Frankrikeald.k.data1997.80$V2
115 Frankrikeald.m1997.80 = Frankrikeald.m.data1997.80$V2
116 Italiaald.k = Italiaald.k.data$V2
117 Italiaald.m = Italiaald.m.data$V2
118 Spaniaald.k = Spaniaald.k.data$V2
119 Spaniaald.m = Spaniaald.m.data$V2
120 Storbritanniaald.k = Storbritanniaald.k.data$V2
121 Storbritanniaald.m = Storbritanniaald.m.data$V2
122 USAald.k = USAald.k.data$V2
123 USAald.m = USAald.m.data$V2
124
125
126 #Ser på differansene i tidsparameterne
127 Norgetid.k.diff = Norgetid.k[2:59] - Norgetid.k[1:58]
128 Norgetid.m.diff = Norgetid.m[2:59] - Norgetid.m[1:58]
129
130 Sverigetid.k.diff = Sverigetid.k[2:59] - Sverigetid.k[1:58]
131 Sverigetid.m.diff = Sverigetid.m[2:59] - Sverigetid.m[1:58]
132
133 Danmarktid.k.diff = Danmarktid.k[2:59] - Danmarktid.k[1:58]
134 Danmarktid.m.diff = Danmarktid.m[2:59] - Danmarktid.m[1:58]
135
136 Japantid.k.diff = Japantid.k[2:59] - Japantid.k[1:58]
137 Japantid.m.diff = Japantid.m[2:59] - Japantid.m[1:58]
138 Japantid.k.diff1998 = Japantid.k1998[2:48] - Japantid.k1998[1:47]
139 Japantid.m.diff1998 = Japantid.m1998[2:48] - Japantid.m1998[1:47]
140 Japantid.k.diff1998.80 = Japantid.k1998.80[2:18] - Japantid.k1998.80[1:17]
141 Japantid.m.diff1998.80 = Japantid.m1998.80[2:18] - Japantid.m1998.80[1:17]
142
143 Frankriketid.k.diff = Frankriketid.k[2:58] - Frankriketid.k[1:57]
144 Frankriketid.m.diff = Frankriketid.m[2:58] - Frankriketid.m[1:57]
145 Frankriketid.k.diff1997 = Frankriketid.k1997[2:47] - Frankriketid.k1997[1:46]
146 Frankriketid.m.diff1997 = Frankriketid.m1997[2:47] - Frankriketid.m1997[1:46]
147 Frankriketid.k.diff1997.80 = Frankriketid.k1997.80[2:17] - Frankriketid.k1997.80[1:16]
148 Frankriketid.m.diff1997.80 = Frankriketid.m1997.80[2:17] - Frankriketid.m1997.80[1:16]
149
150 Italiatid.k.diff = Italiatid.k[2:58] - Italiatid.k[1:57]
151 Italiatid.m.diff = Italiatid.m[2:58] - Italiatid.m[1:57]
152
153 Spaniatid.k.diff = Spaniatid.k[2:57] - Spaniatid.k[1:56]
154 Spaniatid.m.diff = Spaniatid.m[2:57] - Spaniatid.m[1:56]
155
156 Storbritanniatid.k.diff = Storbritanniatid.k[2:59] - Storbritanniatid.k[1:58]
157 Storbritanniatid.m.diff = Storbritanniatid.m[2:59] - Storbritanniatid.m[1:58]
158
159 USAtid.k.diff = USAtid.k[2:58] - USAtid.k[1:57]
160 USAtid.m.diff = USAtid.m[2:58] - USAtid.m[1:57]
161
162
163 #Finner t_k - t_(k-1) - delta
164 Norgetidsrekke.k = Norgetid.k.diff - mean(Norgetid.k.diff)
165 Norgetidsrekke.m = Norgetid.m.diff - mean(Norgetid.m.diff)
166
167 Sverigetidsrekke.k = Sverigetid.k.diff - mean(Sverigetid.k.diff)
168 Sverigetidsrekke.m = Sverigetid.m.diff - mean(Sverigetid.m.diff)
169
170 Danmarktidsrekke.k = Danmarktid.k.diff - mean(Danmarktid.k.diff)
171 Danmarktidsrekke.m = Danmarktid.m.diff - mean(Danmarktid.m.diff)
172

```

```

173 Japantidsrekke.k = Japantid.k.diff-mean(Japantid.k.diff)
174 Japantidsrekke.m = Japantid.m.diff-mean(Japantid.m.diff)
175 Japantidsrekke.k1998 = Japantid.k.diff1998-mean(Japantid.k.diff1998)
176 Japantidsrekke.m1998 = Japantid.m.diff1998-mean(Japantid.m.diff1998)
177 Japantidsrekke.k1998.80 = Japantid.k.diff1998.80-mean(Japantid.k.diff1998.80)
178 Japantidsrekke.m1998.80 = Japantid.m.diff1998.80-mean(Japantid.m.diff1998.80)
179
180 Frankriketidsrekke.k = Frankriketid.k.diff-mean(Frankriketid.k.diff)
181 Frankriketidsrekke.m = Frankriketid.m.diff-mean(Frankriketid.m.diff)
182 Frankriketidsrekke.k1997 = Frankriketid.k.diff1997-mean(Frankriketid.k.
diff1997)
183 Frankriketidsrekke.m1997 = Frankriketid.m.diff1997-mean(Frankriketid.m.
diff1997)
184 Frankriketidsrekke.k1997.80 = Frankriketid.k.diff1997.80-mean(Frankriketid.k.
diff1997.80)
185 Frankriketidsrekke.m1997.80 = Frankriketid.m.diff1997.80-mean(Frankriketid.m.
diff1997.80)
186
187 Italiatidsrekke.k = Italiatid.k.diff-mean(Italiatid.k.diff)
188 Italiatidsrekke.m = Italiatid.m.diff-mean(Italiatid.m.diff)
189
190 Spaniatidsrekke.k = Spaniatid.k.diff-mean(Spaniatid.k.diff)
191 Spaniatidsrekke.m = Spaniatid.m.diff-mean(Spaniatid.m.diff)
192
193 Storbritanniatidsrekke.k = Storbritanniatid.k.diff-mean(Storbritanniatid.k.
diff)
194 Storbritanniatidsrekke.m = Storbritanniatid.m.diff-mean(Storbritanniatid.m.
diff)
195
196 USAtidsrekke.k = USAtid.k.diff-mean(USAtid.k.diff)
197 USAtidsrekke.m = USAtid.m.diff-mean(USAtid.m.diff)
198
199
200
201
202 # ***** FUNKSJON FOR Å PLOTTE ULIKE PLOT AV LEE-CARTER PARAMETERNE *****
203
204 plotLeeCarterInfo = function(){
205
206     #Plot av differansen i tidsparameterne i Lee-Carter
207     plot(Norgetid.k.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens_
differanser_for_norske_kvinner")
208     dev.new()
209     plot(Norgetid.m.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens_
differanser_for_norske_menn")
210     dev.new()
211
212     plot(Sverigetid.k.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens_
differanser_for_svenske_kvinner")
213     dev.new()
214     plot(Sverigetid.m.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens_
differanser_for_svenske_menn")
215     dev.new()
216
217     plot(Danmarktid.k.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens_
differanser_for_danske_kvinner")
218     dev.new()
219     plot(Danmarktid.m.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens_
differanser_for_danske_menn")
220     dev.new()
221
222     plot(Japantid.k.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens_
differanser_for_japanske_kvinner")
223     dev.new()
224     plot(Japantid.m.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens_
differanser_for_japanske_menn")

```

```

225 dev.new()
226
227 plot(Frankriketid.k.diff, ylab = "differanse", main = "Tidsparameterens
    _differanser_franske_for_kvinner")
228 dev.new()
229 plot(Frankriketid.m.diff, ylab = "differanse", main = "Tidsparameterens
    _differanser_franske_for_menn")
230 dev.new()
231
232 plot(Italiatid.k.diff, ylab = "differanse", main = "Tidsparameterens_
    differanser_for_italienske_kvinner")
233 dev.new()
234 plot(Italiatid.m.diff, ylab = "differanse", main = "Tidsparameterens_
    differanser_for_italienske_menn")
235 dev.new()
236
237 plot(Spaniatid.k.diff, ylab = "differanse", main = "Tidsparameterens_
    differanser_for_spanske_kvinner")
238 dev.new()
239 plot(Spaniatid.m.diff, ylab = "differanse", main = "Tidsparameterens_
    differanser_for_spanske_menn")
240 dev.new()
241
242 plot(Storbritanniatid.k.diff, ylab = "differanse", main = "
    Tidsparameterens_differanser_for_britiske_kvinner")
243 dev.new()
244 plot(Storbritanniatid.m.diff, ylab = "differanse", main = "
    Tidsparameterens_differanser_for_britiske_menn")
245 dev.new()
246
247 plot(USAtid.k.diff, ylab = "differanse", main = "Tidsparameterens_
    differanser_for_amerikanske_kvinner")
248 dev.new()
249 plot(USAtid.m.diff, ylab = "differanse", main = "Tidsparameterens_
    differanser_for_amerikanske_menn")
250 dev.new()
251
252
253 #Autokorrelasjonen til differansen til tidsparameterne til Lee-Carter
254 acf(Norgetid.k.diff, main = "Norske_kvinner_-_Differansen_til_
    tidspparameterne")
255 dev.new()
256 acf(Norgetid.m.diff, main = "Norske_menn_-_Differansen_til_
    tidspparameterne")
257 dev.new()
258
259 acf(Sverigetid.k.diff, main = "Svenske_kvinner_-_Differansen_til_
    tidspparameterne")
260 dev.new()
261 acf(Sverigetid.m.diff, main = "Svenske_menn_-_Differansen_til_
    tidspparameterne")
262 dev.new()
263
264 acf(Danmarktid.k.diff, main = "Danske_kvinner_-_Differansen_til_
    tidspparameterne")
265 dev.new()
266 acf(Danmarktid.m.diff, main = "Danske_menn_-_Differansen_til_
    tidspparameterne")
267 dev.new()
268
269 acf(Japantid.k.diff, main = "Japanske_kvinner_-_Differansen_til_
    tidspparameterne")
270 dev.new()
271 acf(Japantid.m.diff, main = "Japanske_menn_-_Differansen_til_
    tidspparameterne")
272 dev.new()

```

```

273
274 acf(Frankriketid.k.diff, main = "Franske_kvinner_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
275 dev.new()
276 acf(Frankriketid.m.diff, main = "Franske_menn_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
277 dev.new()
278
279 acf(Italiatid.k.diff, main = "Italienske_kvinner_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
280 dev.new()
281 acf(Italiatid.m.diff, main = "Italienske_menn_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
282 dev.new()
283
284 acf(Spaniatid.k.diff, main = "Spanske_kvinner_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
285 dev.new()
286 acf(Spaniatid.m.diff, main = "Spania_menn_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
287 dev.new()
288
289 acf(Storbritanniatid.k.diff, main = "Britiske_kvinner_-_Differansen_
til_tidsparameterne")
290 dev.new()
291 acf(Storbritanniatid.m.diff, main = "Britiske_menn_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
292 dev.new()
293
294 acf(USAtid.k.diff, main = "Amerikanske_kvinner_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
295 dev.new()
296 acf(USAtid.m.diff, main = "Amerikanske_menn_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
297 dev.new()
298
299 #Partiell autokorrelasjonen til differansen til tidsparameterne til
Lee-Carter
300 pacf(Norgetid.k.diff, main = "Norske_kvinner_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
301 dev.new()
302 pacf(Norgetid.m.diff, main = "Norske_menn_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
303 dev.new()
304
305 pacf(Sverigetid.k.diff, main = "Svenske_kvinner_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
306 dev.new()
307 pacf(Sverigetid.m.diff, main = "Svenske_menn_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
308 dev.new()
309
310 pacf(Danmarktid.k.diff, main = "Danske_kvinner_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
311 dev.new()
312 pacf(Danmarktid.m.diff, main = "Danske_menn_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
313 dev.new()
314
315 pacf(Japantid.k.diff, main = "Japanske_kvinner_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
316 dev.new()
317 pacf(Japantid.m.diff, main = "Japanske_menn_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
318 dev.new()
319

```

```

320     pacf(Frankriketid.k.diff, main = "Franske_kvinner_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
321     dev.new()
322     pacf(Frankriketid.m.diff, main = "Franske_menn_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
323     dev.new()
324
325     pacf(Italiatid.k.diff, main = "Italienske_kvinner_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
326     dev.new()
327     pacf(Italiatid.m.diff, main = "Italienske_menn_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
328     dev.new()
329
330     pacf(Spaniatid.k.diff, main = "Spanske_kvinner_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
331     dev.new()
332     pacf(Spaniatid.m.diff, main = "Spania_menn_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
333     dev.new()
334
335     pacf(Storbritanniatid.k.diff, main = "Britiske_kvinner_-_Differansen_
til_tidsparameterne")
336     dev.new()
337     pacf(Storbritanniatid.m.diff, main = "Britiske_menn_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
338     dev.new()
339
340     pacf(USAtid.k.diff, main = "Amerikanske_kvinner_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
341     dev.new()
342     pacf(USAtid.m.diff, main = "Amerikanske_menn_-_Differansen_til_
tidsparameterne")
343     dev.new()
344
345
346     #Ser bare på tidsparameteren
347     plot(Norgetid.k, main = "Tidsparameterne_for_norske_kvinner")
348     dev.new()
349     plot(Norgetid.m, main = "Tidsparameterne_for_norske_menn")
350     dev.new()
351
352     plot(Sverigetid.k, main = "Tidsparameterne_for_svenske_kvinner")
353     dev.new()
354     plot(Sverigetid.m, main = "Tidsparameterne_for_svenske_menn")
355     dev.new()
356
357     plot(Danmarktid.k, main = "Tidsparameterne_for_danske_kvinner")
358     dev.new()
359     plot(Danmarktid.m, main = "Tidsparameterne_for_danske_menn")
360     dev.new()
361
362     plot(Japantid.k, main = "Tidsparameterne_for_japanske_kvinner")
363     dev.new()
364     plot(Japantid.m, main = "Tidsparameterne_for_japanske_menn")
365     dev.new()
366
367     plot(Frankriketid.k, main = "Tidsparameterne_for_franske_kvinner")
368     dev.new()
369     plot(Frankriketid.m, main = "Tidsparameterne_for_franske_menn")
370     dev.new()
371
372     plot(Italiatid.k, main = "Tidsparameterne_for_italienske_kvinner")
373     dev.new()
374     plot(Italiatid.m, main = "Tidsparameterne_for_italienske_menn")
375     dev.new()

```

```

376
377 plot(Spaniatid.k, main = "Tidsparameterne_for_spanske_kvinner")
378 dev.new()
379 plot(Spaniatid.m, main = "Tidsparameterne_for_spanske_menn")
380 dev.new()
381
382 plot(Storbritanniatid.k, main = "Tidsparameterne_for_britiske_kvinner"
)
383 dev.new()
384 plot(Storbritanniatid.m, main = "Tidsparameterne_for_britiske_menn")
385 dev.new()
386
387 plot(USAtid.k, main = "Tidsparameterne_for_amerikanske_kvinner")
388 dev.new()
389 plot(USAtid.m, main = "Tidsparameterne_for_amerikanske_menn")
390 dev.new()
391
392
393
394 #Autokorrelasjon til tidsparameterne
395 acf(Norgetid.k, main = "Norske_kvinner_-_tidsparameterne")
396 dev.new()
397 acf(Norgetid.m, main = "Norske_menn_-_tidsparameterne")
398 dev.new()
399
400 acf(Sverigetid.k, main = "Svenske_kvinner_-_tidsparameterne")
401 dev.new()
402 acf(Sverigetid.m, main = "Svenske_menn_-_tidsparameterne")
403 dev.new()
404
405 acf(Danmarktid.k, main = "Danske_kvinner_-_tidsparameterne")
406 dev.new()
407 acf(Danmarktid.m, main = "Danske_menn_-_tidsparameterne")
408 dev.new()
409
410 acf(Japantid.k, main = "Japanske_kvinner_-_tidsparameterne")
411 dev.new()
412 acf(Japantid.m, main = "Japanske_menn_-_tidsparameterne")
413 dev.new()
414
415 acf(Frankriketid.k, main = "Franske_kvinner_-_tidsparameterne")
416 dev.new()
417 acf(Frankriketid.m, main = "Franske_menn_-_tidsparameterne")
418 dev.new()
419
420 acf(Italiatid.k, main = "Italienske_kvinner_-_tidsparameterne")
421 dev.new()
422 acf(Italiatid.m, main = "Italienske_menn_-_tidsparameterne")
423 dev.new()
424
425 acf(Spaniatid.k, main = "Spanske_kvinner_-_tidsparameterne")
426 dev.new()
427 acf(Spaniatid.m, main = "Spanske_menn_-_tidsparameterne")
428 dev.new()
429
430 acf(Storbritanniatid.k, main = "Britiske_kvinner_-_tidsparameterne")
431 dev.new()
432 acf(Storbritanniatid.m, main = "Britiske_menn_-_tidsparameterne")
433 dev.new()
434
435 acf(USAtid.k, main = "Amerikanske_kvinner_-_tidsparameterne")
436 dev.new()
437 acf(USAtid.m, main = "Amerikanske_menn_-_tidsparameterne")
438 dev.new()
439
440

```



```

441
442 #Partiell autokorrelasjon til tidsparameterne
443 pacf(Norgetid.k, main = "Norske_kvinner_{}_tidsparameterne")
444 dev.new()
445 pacf(Norgetid.m, main = "Norske_menn_{}_tidsparameterne")
446 dev.new()
447
448 pacf(Sverigetid.k, main = "Svenske_kvinner_{}_tidsparameterne")
449 dev.new()
450 pacf(Sverigetid.m, main = "Svenske_menn_{}_tidsparameterne")
451 dev.new()
452
453 pacf(Danmarktid.k, main = "Danske_kvinner_{}_tidsparameterne")
454 dev.new()
455 pacf(Danmarktid.m, main = "Danske_menn_{}_tidsparameterne")
456 dev.new()
457
458 pacf(Japantid.k, main = "Japanske_kvinner_{}_tidsparameterne")
459 dev.new()
460 pacf(Japantid.m, main = "Japanske_menn_{}_tidsparameterne")
461 dev.new()
462
463 pacf(Frankriketid.k, main = "Franske_kvinner_{}_tidsparameterne")
464 dev.new()
465 pacf(Frankriketid.m, main = "Franske_menn_{}_tidsparameterne")
466 dev.new()
467
468 pacf(Italiatid.k, main = "Italienske_kvinner_{}_tidsparameterne")
469 dev.new()
470 pacf(Italiatid.m, main = "Italienske_menn_{}_tidsparameterne")
471 dev.new()
472
473 pacf(Spaniatid.k, main = "Spanske_kvinner_{}_tidsparameterne")
474 dev.new()
475 pacf(Spaniatid.m, main = "Spanske_menn_{}_tidsparameterne")
476 dev.new()
477
478 pacf(Storbritanniatid.k, main = "Britiske_kvinner_{}_tidsparameterne")
479 dev.new()
480 pacf(Storbritanniatid.m, main = "Britiske_menn_{}_tidsparameterne")
481 dev.new()
482
483 pacf(USAtid.k, main = "Amerikanske_kvinner_{}_tidsparameterne")
484 dev.new()
485 pacf(USAtid.m, main = "Amerikanske_menn_{}_tidsparameterne")
486 dev.new()
487
488
489 #Plot av ACF til "z" og utskrift av ACF i lag 1
490 print(acf(Norgetidsrekke.k, main= "Norske_kvinner")[1])
491 dev.new()
492 print(acf(Norgetidsrekke.m, main= "Norske_menn")[1])
493 dev.new()
494
495 print(acf(Danmarktidsrekke.k, main= "Danske_kvinner")[1])
496 dev.new()
497 print(acf(Danmarktidsrekke.m, main= "Danske_menn")[1])
498 dev.new()
499
500 print(acf(Sverigetidsrekke.k, main= "Svenske_kvinner")[1])
501 dev.new()
502 print(acf(Sverigetidsrekke.m, main= "Svenske_menn")[1])
503 dev.new()
504
505 print(acf(Japantidsrekke.k, main= "Japanske_kvinner")[1])
506 dev.new()

```

```

507     print(acf(Japantidsrekke.m, main= "Japanske_menn")[1])
508     dev.new()
509
510     print(acf(Frankriketidsrekke.k, main= "Franske_kvinner")[1])
511     dev.new()
512     print(acf(Frankriketidsrekke.m, main= "Franske_menn")[1])
513     dev.new()
514
515     print(acf(Italiatidsrekke.k, main= "Italienske_kvinner")[1])
516     dev.new()
517     print(acf(Italiatidsrekke.m, main= "Italienske_menn")[1])
518     dev.new()
519
520     print(acf(Spaniatidsrekke.k, main= "Spanske_kvinner")[1])
521     dev.new()
522     print(acf(Spaniatidsrekke.m, main= "Spanske_menn")[1])
523     dev.new()
524
525     print(acf(Storbritanniatidsrekke.k, main= "Britiske_kvinner")[1])
526     dev.new()
527     print(acf(Storbritanniatidsrekke.m, main= "Britiske_menn")[1])
528     dev.new()
529
530     print(acf(USAtidsrekke.k, main= "Amerikanske_kvinner")[1])
531     dev.new()
532     print(acf(USAtidsrekke.m, main= "Amerikanske_menn")[1])
533     dev.new()
534
535 }
536
537
538
539
540 # ***** FUNKSJON FOR Å ESTIMERE DØDELIGHETEN *****
541 # Returnerer forventet + øvre og nedre kvantil til estimert dødelighet
542 qxk = function(a,k,land,kjønn,m,øvre,nedre,sigma,årnull,plot){
543     qxk = array(0, dim = c((k+1),106,3))
544     t =matrix( rep(1, (k+1)*m), ncol = m, nrow = (k+1))
545
546     #Henter riktige variable i forhold til hvilket land & kjønn
547
548     if(land == "N"){
549         sistedataår = 2008
550         if(kjønn == "K"){
551             if(årnull ==1950){
552                 data = read.table("Norge-kvinner-qx0.csv",
553                                 header = TRUE)
554             } else{
555                 data = read.table("Norge-kvinner-qx2008.csv",
556                                 header = TRUE)
557             }
558             ax = Norgeald.k
559             t.LC = Norgetid.k
560             t.LC.diff = Norgetid.k.diff
561         } else{
562             if(årnull == 1950){
563                 data = read.table("Norge-menn-qx0.csv", header
564                                 = TRUE)
565             } else{
566                 data = read.table("Norge-menn-qx2008.csv",
567                                 header = TRUE)
568             }
569             ax = Norgeald.m
570             t.LC = Norgetid.m
571             t.LC.diff = Norgetid.m.diff
572         }
573     }
574 }

```

```

569         }
570     }
571 }
572 if(land == "D"){
573     sistedataår = 2008
574     if(kjønn == "K"){
575         if(årnull == 1950){
576             data = read.table("Danmark-kvinner-qx0.csv",
577                               header = TRUE)
578         } else {
579             data = read.table("Danmark-kvinner-qx2008.csv",
580                               header = TRUE)
581         }
582         ax = Danmarkald.k
583         t.LC = Danmarktid.k
584         t.LC.diff = Danmarktid.k.diff
585     } else {
586         if(årnull == 1950){
587             data = read.table("Danmark-menn-qx0.csv",
588                               header = TRUE)
589         } else {
590             data = read.table("Danmark-menn-qx2008.csv",
591                               header = TRUE)
592         }
593         ax = Danmarkald.m
594         t.LC = Danmarktid.m
595         t.LC.diff = Danmarktid.m.diff
596     }
597 }
598 if(land == "S"){
599     sistedataår = 2008
600     if(kjønn == "K"){
601         if(årnull == 1950){
602             data = read.table("Sverige-kvinner-qx0.csv",
603                               header = TRUE)
604         } else {
605             data = read.table("Sverige-kvinner-qx2008.csv",
606                               header = TRUE)
607         }
608         ax = Sverigeald.k
609         t.LC = Sverigetid.k
610         t.LC.diff = Sverigetid.k.diff
611     } else {
612         if(årnull == 1950){
613             data = read.table("Sverige-menn-qx0.csv",
614                               header = TRUE)
615         } else {
616             data = read.table("Sverige-menn-qx2008.csv",
617                               header = TRUE)
618         }
619         ax = Sverigeald.m
620         t.LC = Sverigetid.m
621         t.LC.diff = Sverigetid.m.diff
622     }
623 }
624 if(land == "J"){
625     sistedataår = 2008
626     if(kjønn == "K"){
627         if(årnull == 1950){
628             data = read.table("Japan-kvinner-qx0.csv",
629                               header = TRUE)
630         } else {

```

```

625         data = read.table("Japan-kvinner-qx2008.csv",
626                             header = TRUE)
627     }
628     ax = Japanald.k
629     t.LC = Japantid.k
630     t.LC.diff = Japantid.k.diff
631 } else {
632     if (årnull == 1950){
633         data = read.table("Japan-menn-qx0.csv", header
634                             = TRUE)
635     } else {
636         data = read.table("Japan-menn-qx2008.csv",
637                             header = TRUE)
638     }
639     ax = Japanald.m
640     t.LC = Japantid.m
641     t.LC.diff = Japantid.m.diff
642 }
643
644 if (land == "J98"){ c
645     sistedataår = 1998
646     if (kjønn == "K"){
647         if (årnull == 1950){
648             data = read.table("Japan-kvinner-qx0.csv",
649                                 header = TRUE)
650         } else {
651             data = read.table("Japan-kvinner-qx1998.csv",
652                                 header = TRUE)
653         }
654         ax = Japanald.k1998
655         t.LC = Japantid.k1998
656         t.LC.diff = Japantid.k.diff1998
657     } else {
658         if (årnull == 1950){
659             data = read.table("Japan-menn-qx0.csv", header
660                                 = TRUE)
661         } else {
662             data = read.table("Japan-menn-qx1998.csv",
663                                 header = TRUE)
664         }
665         ax = Japanald.m1998
666         t.LC = Japantid.m1998
667         t.LC.diff = Japantid.m.diff1998
668     }
669 }
670
671 if (land == "J98.80"){ #Japan med datagrunnlag fra 1980-1998
672     sistedataår = 1998
673     if (kjønn == "K"){
674         if (årnull == 1950){
675             data = read.table("Japan-kvinner-qx0.csv",
676                                 header = TRUE)
677         } else {
678             data = read.table("Japan-kvinner-qx1998.csv",
679                                 header = TRUE)
680         }
681         ax = Japanald.k1998.80
682         t.LC = Japantid.k1998.80
683         t.LC.diff = Japantid.k.diff1998.80
684     } else {

```

```

682         if (årnull == 1950){
683             data = read.table("Japan-menn-qx0.csv", header
                                = TRUE)
684         } else {
685             data = read.table("Japan-menn-qx1998.csv",
                                header = TRUE)
686         }
687         ax = Japanald.m1998.80
688         t.LC = Japantid.m1998.80
689         t.LC.diff = Japantid.m.diff1998.80
690     }
691 }
692 }
693
694
695 if (land == "F"){
696     sistedataår = 2007
697     if (kjønn == "K"){
698         if (årnull == 1950){
699             data = read.table("Frankrike-kvinner-qx0.csv",
                                header = TRUE)
700         } else {
701             data = read.table("Frankrike-kvinner-qx2007.
                                csv", header = TRUE)
702         }
703         ax = Frankrikeald.k
704         t.LC = Frankriketid.k
705         t.LC.diff = Frankriketid.k.diff
706     } else {
707         if (årnull == 1950){
708             data = read.table("Frankrike-menn-qx0.csv",
                                header = TRUE)
709         } else {
710             data = read.table("Frankrike-menn-qx2007.csv",
                                header = TRUE)
711         }
712         ax = Frankrikeald.m
713         t.LC = Frankriketid.m
714         t.LC.diff = Frankriketid.m.diff
715     }
716 }
717 }
718 }
719
720 if (land == "F97"){ #Frankrike med datagrunnlag fra 1950-1997
721     sistedataår = 1997
722     if (kjønn == "K"){
723         if (årnull == 1950){
724             data = read.table("Frankrike-kvinner-qx0.csv",
                                header = TRUE)
725         } else {
726             data = read.table("Frankrike-kvinner-qx1997.
                                csv", header = TRUE)
727         }
728         ax = Frankrikeald.k1997
729         t.LC = Frankriketid.k1997
730         t.LC.diff = Frankriketid.k.diff1997
731     } else {
732         if (årnull == 1950){
733             data = read.table("Frankrike-menn-qx0.csv",
                                header = TRUE)
734         } else {
735             data = read.table("Frankrike-menn-qx1997.csv",
                                header = TRUE)
736         }
737         ax = Frankrikeald.m1997

```

```

738         t.LC = Frankriketid.m1997
739         t.LC.diff = Frankriketid.m.diff1997
740     }
741 }
742 }
743
744 if(land == "F97.80"){ #Frankrike med datagrunnlag fra 1980-1997
745     sistedataår = 1997
746     if(kjønn == "K"){
747         if(årnull == 1950){
748             data = read.table("Frankrike-kvinner-qx0.csv",
749                             header = TRUE)
750         } else {
751             data = read.table("Frankrike-kvinner-qx1997.
752                               csv", header = TRUE)
753         }
754         ax = Frankrikeald.k1997.80
755         t.LC = Frankriketid.k1997.80
756         t.LC.diff = Frankriketid.k.diff1997.80
757     } else {
758         if(årnull == 1950){
759             data = read.table("Frankrike-menn-qx0.csv",
760                             header = TRUE)
761         } else {
762             data = read.table("Frankrike-menn-qx1997.csv",
763                             header = TRUE)
764         }
765         ax = Frankrikeald.m1997.80
766         t.LC = Frankriketid.m1997.80
767         t.LC.diff = Frankriketid.m.diff1997.80
768     }
769 }
770 }
771
772 if(land == "I"){
773     sistedataår = 2007
774     if(kjønn == "K"){
775         if(årnull == 1950){
776             data = read.table("Italia-kvinner-qx0.csv",
777                             header = TRUE)
778         } else {
779             data = read.table("Italia-kvinner-qx2007.csv",
780                             header = TRUE)
781         }
782         ax = Italiaald.k
783         t.LC = Italiatid.k
784         t.LC.diff = Italiatid.k.diff
785     } else {
786         if(årnull == 1950){
787             data = read.table("Italia-menn-qx0.csv",
788                             header = TRUE)
789         } else {
790             data = read.table("Italia-menn-qx2007.csv",
791                             header = TRUE)
792         }
793         ax = Italiaald.m
794         t.LC = Italiatid.m
795         t.LC.diff = Italiatid.m.diff
796     }
797 }
798 }
799
800 if(land == "SP"){
801     sistedataår = 2006
802     if(kjønn == "K"){

```

```

796         if (årnull == 1950){
797             data = read.table("Spania-kvinner-qx0.csv",
798                               header = TRUE)
799         } else {
800             data = read.table("Spania-kvinner-qx2006.csv",
801                               header = TRUE)
802         }
803         ax = Spaniaald.k
804         t.LC = Spaniatid.k
805         t.LC.diff = Spaniatid.k.diff
806     } else {
807         if (årnull == 1950){
808             data = read.table("Spania-menn-qx0.csv",
809                               header = TRUE)
810         } else {
811             data = read.table("Spania-menn-qx2006.csv",
812                               header = TRUE)
813         }
814         ax = Spaniaald.m
815         t.LC = Spaniatid.m
816         t.LC.diff = Spaniatid.m.diff
817     }
818 }
819 if (land == "UK"){
820     sistedataår = 2008
821     if (kjønn == "K"){
822         if (årnull == 1950){
823             data = read.table("Storbritannia-kvinner-qx0.
824                               csv", header = TRUE)
825         } else {
826             data = read.table("Storbritannia-kvinner-
827                               qx2008.csv", header = TRUE)
828         }
829         ax = Storbritanniaald.k
830         t.LC = Storbritanniatid.k
831         t.LC.diff = Storbritanniatid.k.diff
832     } else {
833         if (årnull == 1950){
834             data = read.table("Storbritannia-menn-qx0.csv"
835                               , header = TRUE)
836         } else {
837             data = read.table("Storbritannia-menn-qx2008.
838                               csv", header = TRUE)
839         }
840         ax = Storbritanniaald.m
841         t.LC = Storbritanniatid.m
842         t.LC.diff = Storbritanniatid.m.diff
843     }
844 }
845
846 if (land == "USA"){
847     sistedataår = 2007
848     if (kjønn == "K"){
849         if (årnull == 1950){
850             data = read.table("USA-kvinner-qx0.csv",
851                               header = TRUE)
852         } else {

```

```

852         data = read.table("USA-kvinner-qx2007.csv",
853                             header = TRUE)
854     }
855     ax = USAald.k
856     t.LC = USAtid.k
857     t.LC.diff = USAtid.k.diff
858 } else {
859     if (årnull == 1950){
860         data = read.table("USA-menn-qx0.csv", header =
861                             TRUE)
862     } else {
863         data = read.table("USA-menn-qx2007.csv",
864                             header = TRUE)
865     }
866     ax = USAald.m
867     t.LC = USAtid.m
868     t.LC.diff = USAtid.m.diff
869 }
870
871 }
872
873 #Finner mu & sigma (hvis den ikke er gitt)
874 if (sigma == 0){
875     sigma = sd(t.LC.diff)
876 }
877 delta = mean(t.LC.diff)
878
879 z = matrix(ncol = (k+1))
880 for (i in 1:m){
881     #simulerer z og t
882     z[1] = rnorm(1,0,(sigma/sqrt(1-a^2)))
883     eps = rnorm(k)
884     t[1,i] = 0
885     for (j in 2:(k+1)){
886         z[j] = a*z[j-1]+sigma*eps[j-1]
887         t[j,i] = t[(j-1),i]+delta+z[j-1]
888     }
889 }
890
891 #Finner estimat + øvre/nedre kvantil
892 t.kvant = matrix(ncol = 3, nrow = (k+1))
893
894 for ( i in 1:(k+1)){
895     t.kvant[i,1] = mean(t[i,])
896     t.kvant[i,2] = quantile(t[i,], øvre)
897     t.kvant[i,3] = quantile(t[i,], nedre)
898 }
899
900
901
902 if (plot == TRUE){
903     #Plotter aldersparameterne
904     dev.new()
905     plot(ax, xlab = "Alder", ylab = "Aldersparameter", type = "l")
906
907     #Plotter tidsparameterne
908     dev.new()
909     if (årnull == 1950){
910         minimum = min(c(t.kvant[1:(sistedataår-årnull+1)], t.
911                             LC))
912         maks = max(c(t.kvant[1:(sistedataår-årnull+1)], t.LC))
913         +0.5
914     }

```



```

913         plot(1950:sistedataår , t.kvant[1:(sistedataår-årnull+1)
,1], ylim = c(minimum,maks), type='l', ylab = "
Tidsvariabel", xlab = "År")
914         lines(1950:sistedataår , t.LC, lty = 2)
915         lines(1950:sistedataår , t.kvant[1:(sistedataår-årnull
+1),2], lty = 5)
916         lines(1950:sistedataår , t.kvant[1:(sistedataår-årnull
+1),3], lty = 5)
917         legend("topright",lty = c(1,5,2),c("Estimerte_
tidsvariabler","Estimerte_konfidensintervall","Lee-
Carter_tidsvariablene"), bty = "n")
918     } else {
919         minimum = min(t.kvant[1:(k+1),])
920         maks = max(t.kvant[1:(k+1),])+0.5
921
922         plot(sistedataår:(sistedataår+k),t.kvant[1:(k+1),1],
ylim = c(minimum,maks), type='l', ylab = "Tidsvariabel
", xlab = "År")
923         lines(sistedataår:(sistedataår+k),t.kvant[1:(k+1),2],
lty = 5)
924         lines(sistedataår:(sistedataår+k), t.kvant[1:(k+1),3],
lty = 5)
925         legend("topright",lty = c(1,5),c("Estimerte_
tidsvariabler","Estimerte_konfidensintervall"), bty =
"n")
926     }
927 }
928
929
930 #Finner størrelsen dødeligheten i år null skal ganges med
931 ax.matrise = matrix(rep(t(ax),(k+1)),ncol = (k+1),nrow = 106)
932 ax.matrise = t(ax.matrise)
933
934 for( i in 1:3){
935     t.matrise = matrix(rep(t(t.kvant[,i]),106),ncol = 106, nrow =
(k+1))
936     qxk[, ,i] = exp(ax.matrise*t.matrise)
937 }
938
939
940 #Simulerer dødeligheten
941 qx0 = data$qx[1:106]
942 qx0.matrise = matrix(rep(t(qx0),(k+1)),ncol = (k+1), nrow = 106)
943 qx0.matrise = t(qx0.matrise)
944 qx0.matrise = qx0.matrise/(1-qx0.matrise)
945 qx0.array = array(rep(qx0.matrise,3), dim = c((k+1),106,3))
946 qxk = qxk*qx0.array
947 qxk = qxk/(1+qxk)
948
949
950 }
951
952
953
954 ***** FUNKSJON FOR Å PLOTTE ESTIMERT+SANN DØDELIGHET FOR 2006,2007 eller
2008 *****
955 *** Er bare aktuell funksjon når man har basisår til 1950 (ev 1997/1998 for F
og J)***
956 plotEstimatSann = function(land ,kjønn ,q,a,årnull ,farger , log , skrivUtQ){
957
958     if(årnull == 1950 || land == "F97" || land == "F97.80" || land == "J98" || land
== "J98.80"){
959         sistedataår = 2008
960
961         if(land == "N"){
962             if(kjønn == "K"){

```

```

963         qxSann.data = read.table("Norge-kvinner-qx2008.csv",
964         header = T)
965         qxSann = qxSann.data$qx
966     } else {
967         qxSann.data = read.table("Norge-menn-qx2008.csv",
968         header = T)
969         qxSann = qxSann.data$qx
970     }
971     if(land == "D"){
972         if(kjønns == "K"){
973             qxSann.data = read.table("Danmark-kvinner-qx2008.csv",
974             header = T)
975             qxSann = qxSann.data$qx
976         } else {
977             qxSann.data = read.table("Danmark-menn-qx2008.csv",
978             header = T)
979             qxSann = qxSann.data$qx
980         }
981     }
982     if(land == "S"){
983         if(kjønns == "K"){
984             qxSann.data = read.table("Sverige-kvinner-qx2008.csv",
985             header = T)
986             qxSann = qxSann.data$qx
987         } else {
988             qxSann.data = read.table("Sverige-menn-qx2008.csv",
989             header = T)
990             qxSann = qxSann.data$qx
991         }
992     }
993     if(land == "J" || land == "J98" || land == "J98.80"){
994         if(kjønns == "K"){
995             qxSann.data = read.table("Japan-kvinner-qx2008.csv",
996             header = T)
997             qxSann = qxSann.data$qx
998         } else {
999             qxSann.data = read.table("Japan-menn-qx2008.csv",
1000             header = T)
1001             qxSann = qxSann.data$qx
1002         }
1003     }
1004     if(land == "F" || land == "F97" || land == "F97.80"){
1005         sistedataår = 2007
1006         if(kjønns == "K"){
1007             qxSann.data = read.table("Frankrike-kvinner-qx2007.csv",
1008             header = T)
1009             qxSann = qxSann.data$qx
1010         } else {
1011             qxSann.data = read.table("Frankrike-menn-qx2007.csv",
1012             header = T)
1013             qxSann = qxSann.data$qx
1014         }
1015     }
1016     if(land == "I"){
1017         sistedataår = 2007
1018         if(kjønns == "K"){
1019             qxSann.data = read.table("Italia-kvinner-qx2007.csv",
1020             header = T)
1021             qxSann = qxSann.data$qx

```

```

1018         } else {
1019             qxSann.data = read.table("Italia-menn-qx2007.csv",
                                     header = T)
1020             qxSann = qxSann.data$qx
1021         }
1022     }
1023
1024
1025     if(land == "SP"){
1026         sistedataår = 2006
1027         if(kjønn == "K"){
1028             qxSann.data = read.table("Spania-kvinner-qx2006.csv",
                                     header = T)
1029             qxSann = qxSann.data$qx
1030         } else {
1031             qxSann.data = read.table("Spania-menn-qx2006.csv",
                                     header = T)
1032             qxSann = qxSann.data$qx
1033         }
1034     }
1035
1036
1037     if(land == "UK"){
1038         if(kjønn == "K"){
1039             qxSann.data = read.table("Storbritannia-kvinner-qx2008
1040                                     .csv", header = T)
1041             qxSann = qxSann.data$qx
1042         } else {
1043             qxSann.data = read.table("Storbritannia-menn-qx2008.
1044                                     csv", header = T)
1045             qxSann = qxSann.data$qx
1046         }
1047     }
1048
1049     if(land == "USA"){
1050         sistedataår = 2007
1051         if(kjønn == "K"){
1052             qxSann.data = read.table("USA-kvinner-qx2007.csv",
                                     header = T)
1053             qxSann = qxSann.data$qx
1054         } else {
1055             qxSann.data = read.table("USA-menn-qx2007.csv", header
                                     = T)
1056             qxSann = qxSann.data$qx
1057         }
1058     }
1059
1060
1061     #Ser på forventning&CI for det siste året (2006,2007,2008)
1062     dev.new()
1063
1064
1065     if(land == "F97" || land == "F97.80" || land == "J98" || land == "J98
1066         .80"){
1067         antallår = 11
1068     } else {
1069         antallår = sistedataår - 1950 + 1
1070     }
1071
1072     alderfra = 0
1073     aldertil = 105
1074     alder = (alderfra + 1):(aldertil + 1)
1075     logmin = min(log(q[antallår, alder, 1]), log(q[antallår, alder, 2]), log(q[
1076         antallår, alder, 3]), log(qxSann[alder]))

```

```

1075 logmaks = max(log(q[antallår , alder ,1]),log(q[antallår , alder ,2]),log(q[
1076   antallår , alder ,3]),log(qxSann[alder]))
1077 minimum = min(q[antallår , alder ,1],q[antallår , alder ,2],q[antallår , alder
1078   ,3],qxSann[alder])
1079 maks = max(q[antallår , alder ,1],q[antallår , alder ,2],q[antallår , alder
1080   ,3],qxSann[alder])
1081 if(farger){
1082   if(log){
1083     plot(x[alder],log(q[antallår , alder ,1]),ylim = c(logmin
1084       ,logmaks), type = 'l', xlab = "Alder", ylab = "
1085       Dødelighet_på_logaritmisk_skala")
1086     lines(x[alder], log(q[antallår , alder ,2]),lty = 5, bty
1087       = "n", col = "grey30")
1088     lines(x[alder],log(q[antallår , alder ,3]), lty = 5, bty
1089       = "n", col = "grey30")
1090     lines(x[alder],log(qxSann[alder]),col = "violetred1")
1091   } else {
1092     plot(x[alder],q[antallår , alder ,1],ylim = c(minimum,
1093       maks), type = 'l', xlab = "Alder", ylab = "Dødelighet"
1094     )
1095     lines(x[alder], q[antallår , alder ,2],lty = 5, bty = "n"
1096       , col = "grey30")
1097     lines(x[alder],q[antallår , alder ,3], lty = 5, bty = "n"
1098       , col = "grey30")
1099     lines(x[alder],qxSann[alder],col = "violetred1")
1100   }
1101   legend("topleft",lty = c(1,5,1),col= c("black","grey30","
1102     violetred1"),c(paste("Estimert_dødelighet_for_",sistedataår ,
1103     sep=""),"Estimerte_konfidensintervall", paste("Korrekt_
1104     dødelighet_i_",sistedataår ,sep=""))) ,bty = "n")
1105 } else {
1106   if(log){
1107     plot(x[alder],log(q[antallår , alder ,1]),ylim = c(logmin
1108       ,logmaks), type = 'l', xlab = "Alder", ylab = "
1109       Dødelighet_på_logaritmisk_skala")
1110     lines(x[alder], log(q[antallår , alder ,2]),lty = 5, bty
1111       = "n")
1112     lines(x[alder],log(q[antallår , alder ,3]), lty = 5, bty
1113       = "n")
1114     lines(x[alder],log(qxSann[alder]),col = "grey50")
1115   } else {
1116     plot(x[alder],q[antallår , alder ,1],ylim = c(minimum,
1117       maks), type = 'l', xlab = "Alder", ylab = "Dødelighet"
1118     )
1119     lines(x[alder], q[antallår , alder ,2],lty = 5, bty = "n"
1120       )
1121     lines(x[alder],q[antallår , alder ,3], lty = 5, bty = "n"
1122       )
1123     lines(x[alder],qxSann[alder],col = "grey50")
1124   }
1125   legend("topleft",lty = c(1,5,1),col= c("black","black","grey50"),c(
1126     paste("Estimert_dødelighet_for_",sistedataår ,sep=""),"Estimerte_
1127     konfidensintervall", paste("Korrekt_dødelighet_i_",sistedataår ,sep="")
1128     ) ,bty = "n")
1129 }
1130 if(skrivUtQ){
1131   i = 0
1132   while(i < 105){
1133     print(c(i, paste(q[antallår ,(i+1),1],"_", q[antallår ,(
1134       i+1),3], "_", q[antallår ,(i+1),2],"_"))
1135     ,print(c("Korrekt_",i, qxSann[(i+1)]))
1136   }

```

```

1115             i = i+10
1116         }
1117
1118     }
1119 }
1120
1121 }
1122 }
1123 }
1124
1125 # ***** FUNKSJON FOR Å PLOTTE DØDLIGHETER *****
1126
1127 plotEstimatQ = function(q,k,årnull){
1128
1129     x = 0:105
1130     dev.new()
1131     plot(x,q[(k+1),,1], type = 'l', xlab = "Alder", ylab = "Dødelighet")
1132     lines(x,q[1,,1], lty = 3, bty = "n")
1133
1134     lines(x, q[(k+1),,2],lty = 5, bty = "n")
1135     lines(x,q[(k+1),,3], lty = 5, bty = "n")
1136
1137     legend("topleft",lty = c(1,3,5),c(paste("Estimert_dødelighet_for_",
1138     årnull+k,sep=""),paste("Dødelighet_i_",årnull,sep=""),"Estimerte_
1139     konfidensintervall") ,bty = "n")
1140
1141 }
1142
1143 # ***** FUNKSJON FOR Å PLOTTE DØDLIGHETER *****
1144 # AR og RW i samme figur
1145
1146 plotEstimatQ.sammen = function(qAR,qRW,k,årnull){
1147
1148     x = 0:105
1149     dev.new()
1150     plot(x,qAR[(k+1),,1], type = 'l', xlab = "Alder", ylab = "Dødelighet")
1151     lines(x,qAR[1,,1], lty = 3, bty = "n")
1152
1153     lines(x, qAR[(k+1),,2],lty = 5, bty = "n")
1154     lines(x,qAR[(k+1),,3], lty = 5, bty = "n")
1155
1156     #points(x, qRW[(k+1),,1],lty = 1, bty = "n",col = "black")
1157     lines(x, qRW[(k+1),,2],lty = 10, bty = "n",col = "grey50")
1158     lines(x,qRW[(k+1),,3], lty = 10, bty = "n",col = "grey50")
1159
1160     legend("topleft",lty = c(1,3,5,10),col = c("black","black","black","
1161     grey50"),c(paste("Estimert_dødelighet_for_",årnull+k,sep=""),paste("
1162     Dødelighet_i_",årnull,sep=""),"Estimerte_konfidensintervall_ved_
1163     autoregressiv_modell","Estimerte_konfidensintervall_ved_tilfeldig_gang_
1164     modell") ,bty = "n")
1165
1166 }
1167
1168 # ***** FUNKSJON FOR Å REGNE UT ENGANGSPREMIER *****
1169
1170 EngangsPremie = function(alder ,Palder ,q,rente ,startTid ,årnull){
1171
1172     k = startTid - årnull + 1
1173     d = 1/(1+rente)
1174     maksalder = 105
1175     p = 1-q
1176     start = max(0,(Palder-alder))
1177     kp = matrix(ncol = (maksalder-alder-start+1))
1178
1179     #Finner overlevelsessannsynlighetene

```

```

1175     kp[1] = p[start+k, start+alder+1]
1176     for(i in (start+1):(maksalder-alder)){
1177         kp[i-start+1] = kp[i-start]*p[i+k, alder+i+1]
1178     }
1179
1180     EngangsPremie = sum(d**(start:(maksalder-alder))*kp)
1181
1182 }
1183
1184
1185 # ***** FUNKSJON FOR Å PLOTTE ENGANGSPREMIER *****
1186
1187 plotEngangsPremier = function(startalder, Palder, q, rente, år, årnull){
1188     engangs = matrix(ncol = 86, nrow = 4)
1189     antall = length(q)/(106*3)
1190
1191     q0 = t(matrix(rep(q[1,1], antall), nrow = 106, ncol = antall))
1192     j = 20
1193     for(i in 20:104){
1194         engangs[1, i-19] = EngangsPremie(i, Palder, q[,1], rente, år,
1195             årnull)
1196         engangs[2, i-19] = EngangsPremie(i, Palder, q[,2], rente, år,
1197             årnull)
1198         engangs[3, i-19] = EngangsPremie(i, Palder, q[,3], rente, år,
1199             årnull)
1200         engangs[4, i-19] = EngangsPremie(i, Palder, q0, rente, år, årnull) #
1201             Med konstant dødelighet
1202
1203     if(j == 20){
1204         print(i)
1205         print(c(paste(engangs[1, i-19], "[", engangs[2, i-19], ", ", engangs
1206             [3, i-19], "]" ), engangs[4, i-19]))
1207         j = j+10
1208     }
1209     j = j-1
1210 }
1211
1212 dev.new()
1213 plot(20:105, engangs[3,], lty = 5, type = 'l', xlab = "Alder", ylab = "
1214     Engangspremie")
1215 lines(20:105, engangs[1,])
1216 lines(20:105, engangs[2,], lty = 5)
1217 lines(20:105, engangs[4,], lty = 2)
1218
1219 legend("bottomleft", lty = c(1, 5, 2), c(paste("Estimert_engangspremie_{}_i_{}_
1220     ", år, sep=""), "Konfidensintervall", paste("Estimert_engangspremie_{}_i_{}_
1221     ", år, sep=""), "med_konstant_dødelighet", sep="")), bty = "n")
1222
1223 }
1224
1225 # ***** FUNKSJON FOR Å REGNE UT NÅVERDIER *****
1226
1227 Nåverdi = function(alder, Palder, q, rente, startTid, årnull, plotPortefolje){
1228     k = startTid-årnull+1
1229     d = 1/(1+rente)
1230     maksalder = 105
1231     s = 1
1232     JJ = 10000
1233     l = 20:105
1234     gamma = 0.05
1235
1236     p = 1-q
1237     kp = matrix(nrow = (maksalder-alder+2), ncol = (maksalder-alder+2))

```

```

1233
1234      #Finner overlevelsessannsynlighetene
1235      kp[,1] = rep(1, (maksalder-alder+2))
1236      for(i in 1:(maksalder-alder+1)){
1237          for(j in 1:(maksalder-alder)){
1238              if(alder+j+i <= 106){
1239                  kp[j,i+1] = kp[j,i]*p[i+k,alder+j+i]
1240              }
1241          }
1242      }
1243  }
1244
1245      #Finner premie
1246      teller = sum(d**((Palder-alder):(maksalder-alder))*kp[1,(Palder-alder
1247          +1):(maksalder-alder+1)])
1248      nevner = sum(d**(0:(Palder-alder-1))*kp[1,1:(Palder-alder)])
1249      premie = s*teller/nevner
1250
1251      #Lager en porteføljesammensetning
1252      c = JJ/(sum(exp(-gamma*abs(1-alder))))
1253      J = c*exp(-gamma*abs(1-alder))
1254
1255      #Plotter aldersinndelingen i porteføljen
1256      if(plotPortefolje){
1257          dev.new()
1258          plot(20:105,J, xlab = "Alder", ylab = "Antall", type = "h")
1259      }
1260
1261      X = matrix(rep(0,86), ncol = 86)
1262
1263      for(i in 0:(maksalder-alder)){
1264          if(i < Palder-alder){
1265              X[i+1] = -premie*sum(J[1:(Palder-alder-i)]*kp[1:(
1266                  Palder-alder-i),(i+1)])
1267          }
1268          start = max(1,(Palder-alder-i+1))
1269          X[i+1] = X[i+1] + s*sum(J[start:(maksalder-alder-i+1)]*kp[
1270              start:(maksalder-alder-i+1),(i+1)])
1271      }
1272
1273      Nåverdi = d^(0:(maksalder-alder))*X
1274  }
1275
1276
1277      # ***** FUNKSJON FOR Å PLOTTE NÅVERDIEN *****
1278      plotNåverdi = function(alder, Palder, q, rente, startTid, årnull, skrivUt){
1279          antall = length(q)/(106*3)
1280
1281          q0 = t(matrix(rep(q[1,,1], antall), nrow = 106, ncol = antall))
1282
1283          nå = matrix(nrow = 4, ncol = 86)
1284          nå[1,] = Nåverdi(startalder, Palder, q[, ,1], rente, startTid, årnull, T)
1285          nå[2,] = Nåverdi(startalder, Palder, q[, ,2], rente, startTid, årnull, F)
1286          nå[3,] = Nåverdi(startalder, Palder, q[, ,3], rente, startTid, årnull, F)
1287          nå[4,] = Nåverdi(startalder, Palder, q0, rente, startTid, årnull, F)
1288
1289          dev.new()
1290          plot(0:85, nå[3,], type = 'l', lty = 5, xlab = "Tid", ylab = "
1291              Forpliktelse")
1292          lines(0:85, nå[1,], lty = 5)
1293          lines(0:85, nå[2,], lty = 5)
1294          lines(0:85, nå[4,], lty = 3)

```

```

1294     legend("bottomright", lty = c(1,5,3), c("Estimert_forpliktelse", "
Konfidensintervall", "Estimert_forpliktelse_med_konstant_dødlighet") ,
bty = "n")

1295
1296
1297     if (skrivUt == TRUE){
1298         print(c(sum(nå[1,]), sum(nå[2,]), sum(nå[3,]), sum(nå[4,])))
1299     }
1300
1301 }
1302
1303
1304
1305 # ***** FUNKSJON FOR BOOTSTRAP AV AR(1) *****
1306 bootstrap = function(land, kjønn, metode){
1307     if (land == "N"){
1308         if (kjønn == "K"){
1309             rekke = Norgetidsrekke.k
1310         } else {
1311             rekke = Norgetidsrekke.m
1312         }
1313     }
1314
1315     if (land == "D"){
1316         if (kjønn == "K"){
1317             rekke = Danmarktidsrekke.k
1318         } else {
1319             rekke = Danmarktidsrekke.m
1320         }
1321     }
1322
1323     if (land == "S"){
1324         if (kjønn == "K"){
1325             rekke = Sverigetidsrekke.k
1326         } else {
1327             rekke = Sverigetidsrekke.m
1328         }
1329     }
1330
1331     if (land == "J"){
1332         if (kjønn == "K"){
1333             rekke = Japantidsrekke.k
1334         } else {
1335             rekke = Japantidsrekke.m
1336         }
1337     }
1338
1339     if (land == "J98"){
1340         if (kjønn == "K"){
1341             rekke = Japantidsrekke.k1998
1342         } else {
1343             rekke = Japantidsrekke.m1998
1344         }
1345     }
1346
1347     if (land == "J98.80"){
1348         if (kjønn == "K"){
1349             rekke = Japantidsrekke.k1998.80
1350         } else {
1351             rekke = Japantidsrekke.m1998.80
1352         }
1353     }
1354
1355
1356     if (land == "F"){
1357         if (kjønn == "K"){

```



```

1358         rekke = Frankriketidsrekke.k
1359     } else {
1360         rekke = Frankriketidsrekke.m
1361     }
1362 }
1363
1364 if(land == "F97"){
1365     if(kjønns == "K"){
1366         rekke = Frankriketidsrekke.k1997
1367     } else {
1368         rekke = Frankriketidsrekke.m1997
1369     }
1370 }
1371
1372 if(land == "F97.80"){
1373     if(kjønns == "K"){
1374         rekke = Frankriketidsrekke.k1997.80
1375     } else {
1376         rekke = Frankriketidsrekke.m1997.80
1377     }
1378 }
1379
1380 if(land == "I"){
1381     if(kjønns == "K"){
1382         rekke = Italiatidsrekke.k
1383     } else {
1384         rekke = Italiatidsrekke.m
1385     }
1386 }
1387
1388 if(land == "SP"){
1389     if(kjønns == "K"){
1390         rekke = Spaniatidsrekke.k
1391     } else {
1392         rekke = Spaniatidsrekke.m
1393     }
1394 }
1395
1396 if(land == "UK"){
1397     if(kjønns == "K"){
1398         rekke = Storbritanniatidsrekke.k
1399     } else {
1400         rekke = Storbritanniatidsrekke.m
1401     }
1402 }
1403
1404 if(land == "USA"){
1405     if(kjønns == "K"){
1406         rekke = USAtidsrekke.k
1407     } else {
1408         rekke = USAtidsrekke.m
1409     }
1410 }
1411
1412
1413 fit = ar(rekke, aic = F, order.max = 1, demean = F, intercept = F,
1414         method = metode)
1415 a = fit$ar[1]
1416 sigma = sqrt(fit$var.pred)
1417 m = 100
1418 k = 58
1419
1420 z = matrix(ncol = (k+1))
1421 a.boot = matrix(ncol = m)
1422 sigma.boot = matrix(ncol = m)

```

```

1423
1424     for (i in 1:m){
1425         z[1,1] = rnorm(1,0,(sigma/(1-a^2)))
1426         eps = rnorm(k)
1427         for (j in 2:(k+1)){
1428             z[1,j] = a*z[1,j-1]+sigma*eps[j-1]
1429         }
1430         fit = ar(z[1,],aic = F, order.max = 1, demean = F, intercept =
1431             F, method = metode)
1432         a.boot[i] = fit$ar
1433         sigma.boot[i] = sqrt(fit$var.pred)
1434     }
1435     print(c("a:",a))
1436     print(c("sigma:", sigma))
1437
1438     print(c("Bootstrap_a,mean:",mean(a.boot)))
1439     print(c("Bootstrap_a,sd:",sd(a.boot[1,])))
1440
1441     print(c("Bootstrap_sigma,mean:",mean(sigma.boot)))
1442     print(c("Bootstrap_sigma,sd:",sd(sigma.boot[1,])))
1443
1444 }
1445
1446
1447
1448 #plotLeeCarterInfo()
1449
1450
1451
1452
1453 x = 0:105
1454 k = 90
1455 a = -0.4680
1456 sigma = 0.1030 #Er denne null bruker jeg std til Lee-Carter variablene
1457 land = "F97" #D = Danmark, J = Japan (J97 = Japan(1950-1998), J97.80 =
1458     Japan(1980-1998)), N = Norge, S = Sverige F = Frankrike (F97 = Frankrike
1459     (1950-1997), F97.80 = Frankrike(1980-1997)), I = Italia, SP = Spania, UK =
1460     Storbritannia og USA = USA
1461 kjønn = "M" #K = kvinner, M = menn
1462 m = 10000 #Antall MC-simuleringer
1463 årnull = 2007 #Må være enten 1950 eller 2006,2007 eller 2008 (ut i fra hva som
1464     er siste dataår for landet)
1465 plot = T #Brukes i qxk
1466 farger = F #Brukes i plotEstimatSann
1467 skrivUtQ = T #Brukes i plotEstimatSann
1468 log = F #Brukes i plotEstimatSann
1469
1470
1471 år = 2007 #Brukes i nåverdi + engangspremie
1472 Palder = 67 #Pensjonsalder
1473 rente = 0.03
1474 startalder = 20
1475 skrivUt = T #Brukes til nåverdier
1476
1477 #Estimerer AR(1)-modellen
1478 metode = "mle" #ols, yw, burg eller mle
1479 bootstrap(land,kjønn, metode)
1480
1481 #Estimerer dødlighet
1482 qAR = qxk(a,k,land,kjønn,m,0.975,0.025,sigma,årnull,plot)
1483 qRW = qxk(0,k,land,kjønn,m,0.975,0.025,0,årnull,plot) #Sigma settes lik std
1484     til Lee-Carter estimatene
1485
1486 #Plotter dødlighet

```

```

1483 plotEstimatSann(land ,kjønn ,qAR,a,årnull ,farger , log , skrivUtQ) #Er bare
    aktuell når årnull = 1950 (Ev 1997/1998 for Frankrike/Japan)
1484 plotEstimatSann(land ,kjønn ,qRW,a,årnull ,farger , log , skrivUtQ) #Er bare
    aktuell når årnull = 1950 (Ev 1997/1998 for Frankrike/Japan)
1485
1486 plotEstimatQ(qAR,k,årnull)
1487 plotEstimatQ(qRW,k,årnull)
1488 plotEstimatQ.sammen(qAR,qRW,k,årnull)
1489
1490
1491 #Plotter engangspremiene
1492 plotEngangsPremier(startalder ,Palder,qAR,rente ,år ,årnull)
1493 plotEngangsPremier(startalder ,Palder,qRW,rente ,år ,årnull)
1494
1495 #Finner Nåverdi / Plotter forpliktelse
1496 plotNåverdi(startalder ,Palder,qAR,rente ,år ,årnull ,skrivUt)
1497 plotNåverdi(startalder ,Palder,qRW,rente ,år ,årnull ,skrivUt)
1498
1499
1500
1501 #Plott av nedgangen i dødelighet hos 30 år gamle kvinner og menn (1950–2007)
1502 dev.new()
1503 Frankikedod30.m = read.table("Frankrike–menn–q30.csv", header = T)$qx
1504 Frankikedod30.k = read.table("Frankrike–kvinner–q30.csv", header = T)$qx
1505 minimum = min(c(Frankikedod30.m, Frankikedod30.k))
1506 maks = max(c(Frankikedod30.m, Frankikedod30.k))
1507 plot(1950:2007, Frankikedod30.m, ylim = c(minimum, maks), xlab = "År", ylab = "
    Dødelighetsrate", type = "l")
1508 lines(1950:2007, Frankikedod30.k, lty = 2)
1509 legend("topright", lty = c(1,2), c("Franske_menn", "Franske_kvinner"), bty = "n")
1510
1511
1512 #Plotter aldersparameterne for franske menn i samme vindu
1513 dev.new()
1514 plot(0:105, Frankikeald.m1997.80, ylim = c(-0.1,0.8), type = 'l', lty = 5)
1515 lines(0:105, Frankikeald.m1997, lty = 3)
1516 lines(0:105, Frankikeald.m)
1517 legend("topright", lty = c(1,3,5), c("Datagrunnlag_1950–2007", "Datagrunnlag_
    1950–1997", "Datagrunnlag_1980–1997"), bty = "n")

```