USIKKERHET VED LEVETIDSFREMSKRIVNINGER

av

HANNE KIRKENÆR ELLINGSEN

MASTEROPPGAVE

for graden

Master i Modellering og dataanalyse

(Master of Science)

Avdeling for statistikk, Matematisk institutt
Det matematisk- naturvitenskapelige fakultet
Universitetet i Oslo

Mai 2011

Faculty of Mathematics and Natural Sciences
University of Oslo

Sammendrag

Vi har i de siste 100 årene hatt stor nedgang i dødelighet. Når vi skal fremskrive dødeligheter så må vi bruke en modell som tar hensyn til denne nedgangen. Tradisjonelt har man brukt en Lee-Carter modell der tidsparameterne er estimert ved hjelp av tilfeldig gang (Lee og Carter, 1992). Hovedformålet med oppgaven er å vurdere om man heller burde bruke en autoregressiv modell for å estimere tidsparameterne.

Vi bruker datagrunnlag fra 1950 og fram til det siste året med tilgjengelige data på «Human Mortality Database» (HMD) for å estimere tidsparameterne for Norge, Danmark, Sverige, Japan, Frankrike, Italia, Spania, Storbritannia og USA. Ved å se på autokorrelasjonsfunksjonene til de estimerte tidsparameterne, så ser vi at de ikke er uavhengige, men derimot negativt korrelerte. Vi har derfor grunnlag for å bruke en autoregressiv prosess med negativ koeffisient for å estimere tidsparameterne i Lee-Carter modellen.

Vi gjør simuleringer av dødelighetsratene fremover i tid og ser om modellen gir fornuftige resultater. Vi har generelt god overensstemmelse mellom virkelighet og estimater, men det er noen unntak. Generelt så er det vanskeligere å fremskrive dødeligheter for menn enn for kvinner.

Konsekvensene av at man bruker en autoregressiv prosess istedenfor tilfeldig gang, er at man får smalere konfidensintervaller ved fremskrivning av dødelighet. De økonomiske følgene er at man trenger mindre kapital for å ha solvens.

Forord

Denne masteroppgaven er det avsluttende resultatet av mastergraden min i modellering og dataanalyse med studieretning finans, forsikring og risiko ved Universitet i Oslo. Studietiden startet med et treårig bachelorstudie i matematikk, informatikk og teknologi, og avsluttes nå etter to år med masterstudie. Det har vært fem morsomme og krevende år som også har vært utrolig lærerike.

Jeg vil gjerne rette en stor takk til min veileder professor Erik Bølviken som har gitt meg en utrolig interessant oppgave innenfor mitt ønskede fagområde. Han har også vist stort engasjement for oppgaven og gitt meg gode tips og råd gjennom hele semesteret.

Jeg ønsker også å takke Eikos AS som har gitt meg relevant arbeidserfaring gjennom de siste tre årene av studietiden. Jeg setter stor pris på at dere har tilpasset arbeidstidene i forhold til min timeplan på universitetet, slik at det gikk greit å kombinere studiene med jobb. Jeg vil spesielt takke Øyvind Grini (adm. direktør), Svein Hestnes (aktuar) og Anne Grete Steinkjer (aktuar).

I tillegg vil jeg gjerne takke venner og familie som har vært viktige støttespillere gjennom hele studietiden. En spesielt stor takk til min søster Kristine, mamma og pappa.

Innhold

1 Innledning

Levealderen har økt enormt de siste hundre årene (Tuljapurkar et al., 2001). For de landene som har data registrert over et større tidsrom, så kan man se at det har vært en trend over enda lengre tid. I Danmark har levetiden for både menn og kvinner økt med cirka 40 år på de siste 170 årene (Jarner et al., 2008), og i Norge har levealderen i gjennomsnitt økt med litt over 0,2 år per kalenderår de siste 200 årene (Statistisk sentralbyrå, 2010). Det er derfor naturlig at vi trenger en dynamisk dødelighetsmodell som tar hensyn til forandringene i dødelighet over tid.

Vi tar utgangspunkt i Lee-Carter-modellen (Lee og Carter, 1992), som har parametere som avhenger både av tid og alder. Tradisjonelt så bruker man en tilfeldig gang modell for tidsparameteren (Lee og Carter, 1992), men hvorfor bruker man ikke autoregressive prosesser istedenfor? Vi har sett på historiske data over dødelighetsrater fra Norge, Danmark, Sverige, Japan, Frankrike, Italia, Spania, Storbritannia og USA, som er hentet fra «Human Mortality Database» (HMD). Separat for hvert land og kjønn estimerte vi tidsvariablene for hver enkelt gruppe, og våre undersøkelser viser at en autoregressiv prosess med negativ koeffisient er en bedre tilpasning enn en tilfeldig gang.

Det å bruke en autoregressiv modell framfor en tilfeldig gang, vil påvirke sikkerhetsangivelsene ved levetidsframskrivninger. Vi vil få et lavere standardavvik, som medfører at vi får smalere konfidensintervaller. Dette vil igjen påvirke selskapenes behov for kapital for å ha solvens.

2 Metode

2.1 Lee - Carter modeller

Vi tar utgangspunkt i en Lee-Carter modell som ser på q_{xk}, som er sannsynligheten for at en person med alder x ved tid k dør innen et år. Vi har valgt å se på forhåndstallet mellom q_{xk} og $1-q_{xk}$ som i Cairns et al. (2006) og Lee og Miller (2001). Hovedgrunnen til det, er at vi under simuleringene alltid vil holde dødelighetene på et fornuftig nivå. Modellen er på formen

$$\omega_{xk} = \frac{q_{xk}}{1-q_{xk}} = \frac{q_{x0}}{1-q_{x0}} e^{a_x t_k}, \tag{1}$$

der q_{x0} er en kjent dødelighet ved tid 0. Siden vi ønsker å ha en autoregressiv prosess istedenfor den tradisjonelle tilfeldige gangen, så har vi at t er en funksjon gitt ved

$$t_k = t_{k-1} + \delta + z_k \tag{2}$$

der

$$z_k = a z_{k-1} + \sigma \epsilon_k. \tag{3}$$

Ved tilfellet der $a = 0$, så er vi tilbake til en tilfeldig gang modell slik som i Lee og Carter (1992).

2.2 Estimering fra historiske data

Ved hjelp av historiske dødelighetsrater estimerte vi aldersparameterne a_x og tidsparameterne t_k for hvert land og kjønn. [1] Vi tok utgangspunkt i ligning 1 og skrev den på logaritmisk skala, slik at

$$\log(\omega_{xk}) = a'_x t_k, \tag{4}$$

der

$$a'_x = a_x \log\left(\frac{q_{x0}}{1 - q_{x0}}\right). \tag{5}$$

Vi brukte minste kvadraters metode, og minimerte

$$S = \sum_k \sum_x \left(\log\left(\omega_{xk}\right) - a'_x t_k\right)^2. \tag{6}$$

Det gjorde vi ved å derivere S med hensyn på a'_x og t_k hver for seg, og sette begge utrykkene lik null. Vi brukte en numerisk metode for å løse ligningene, og dermed estimere a'_x og t_k. Vi antok først at t_k var kjent og fant a'_x, så brukte vi a'_x-ene vi fant for å finne t_k. Dette ble gjort 200 ganger før vi endte opp med våre endelige estimater for a'_x og t_k. Vi fant estimatet for a_x ved hjelp av a'_x og ligning 5.

Når vi hadde estimert både a_x og t_k, ønsket vi å se nærmere på en stokastisk modell for t_k, mens vi holdt a_x fast. Vi brukte modellen gitt i ligning 2 og 3, og ønsket at z skulle være et støyledd med forventning null. Det medførte at δ var gitt ved

$$\delta = \mathrm{E}\left[t_k - t_{k-1}\right]. \tag{7}$$

For å kunne gjøre simuleringer av den stokastiske modellen for z, så er vi avhenging av verdiene for både a og σ. Det finnes ulike metoder for å estimere koeffisienten a i en autoregressiv prosess, i tabell 1 er estimatene ved bruk av minste kvadraters metode (OLS), Yule-Walker, Burg og «maximum likelihood» (MLE). Det er små forskjeller mellom estimatene fra de ulike metodene, og vi valgte å gå videre med MLE. For å se hvor gode estimater vi fikk, så gjorde vi en «bootstrap» som er vist i tabell 2. Her fikk vi god overensstemmelse mellom sann verdi og estimat, og vi brukte derfor MLE-estimatene videre.

Da hadde vi alle estimatene vi trengte for å kunne simulere den stokastiske modellen for z. Vi visste at $t_0 = 0$ og vi trakk z_0 fra en normalfordeling med forventning null og standardavvik

$$\frac{\sigma}{\sqrt{1 - a^2}},$$

for hver simulering. Ved hjelp av Monte Carlo simulerte vi z og t titusen ganger for alle land og kjønn. Resultatet for spanske kvinner og menn er gitt i figur 1. Vi ser at det er en god overensstemmelse mellom de estimerte t-verdiene og de faktiske t-verdiene vi fikk fra historiske data. Vi gjorde også de samme simuleringene ved bruk av tilfeldig gange modellen, og resultatene vises i figur 2. Man ser tydelig av konfidensintervallene på figurene at tilfeldig gange modellen har større standardavvik enn den autoregressive modellen.

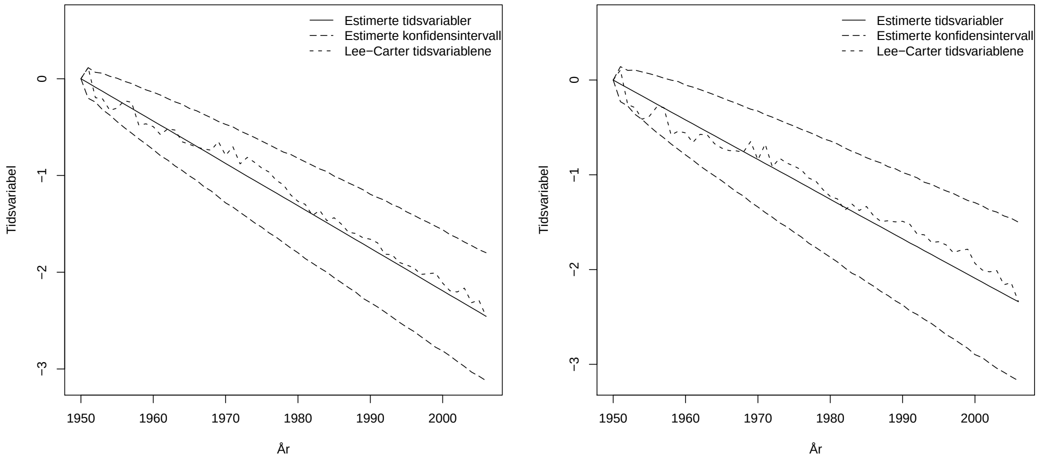
[1] Her bruker vi et program som er laget av Erik Bølviken, se appendiks 6.2.

Tabell 1: Parameterne i AR(1)-modellen i ligning 3, estimert ved hjelp av ulike fremgangsmåter. N, D, S, J, F, I, SP, UK, US er henholdsvis Norge, Danmark, Sverige, Japan, Frankrike, Italia, Spania, Storbritannia og USA, K er kvinner og M er menn.

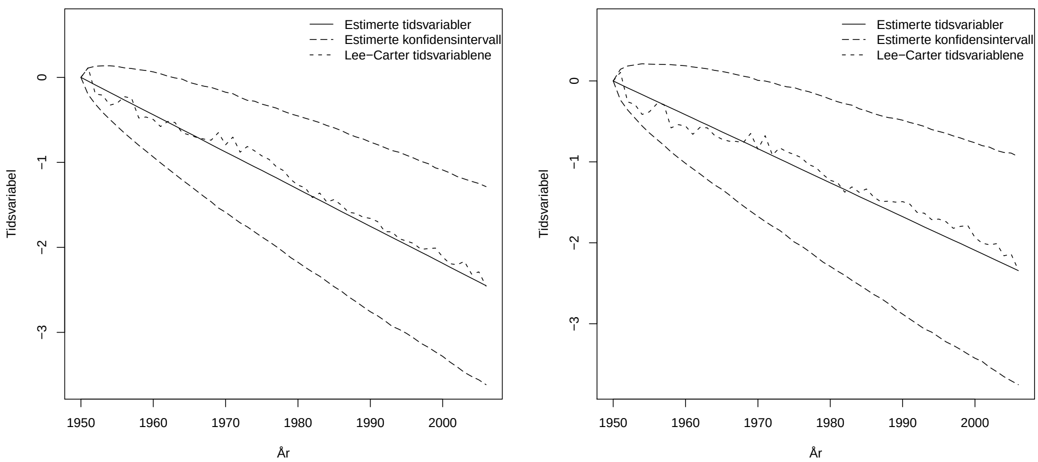
		OLS		**Yule-Walker**		**Burg**		**MLE**	
		a	σ	a	σ	a	σ	a	σ
N	K	$-0{,}3110\,(0{,}3430)$	$0{,}0733$	$-0{,}3090$	$0{,}0794$	$-0{,}3299$	$0{,}0774$	$-0{,}3468$	$0{,}0774$
	M	$-0{,}0125\,(0{,}3552)$	$0{,}1555$	$-0{,}0125$	$0{,}1649$	$-0{,}0131$	$0{,}1620$	$-0{,}0136$	$0{,}1620$
D	K	$-0{,}4757\,(0{,}3394)$	$0{,}0678$	$-0{,}4683$	$0{,}0701$	$-0{,}4798$	$0{,}0684$	$-0{,}4830$	$0{,}0684$
	M	$-0{,}3205\,(0{,}3514)$	$0{,}1442$	$-0{,}3179$	$0{,}1485$	$-0{,}3250$	$0{,}1455$	$-0{,}3266$	$0{,}1455$
S	K	$-0{,}3854\,(0{,}3497)$	$0{,}0485$	$-0{,}3848$	$0{,}0490$	$-0{,}3853$	$0{,}0481$	$-0{,}3792$	$0{,}0481$
	M	$-0{,}3102\,(0{,}3549)$	$0{,}0897$	$-0{,}3100$	$0{,}0905$	$-0{,}3101$	$0{,}0889$	$-0{,}3049$	$0{,}0889$
J	K	$-0{,}3194\,(0{,}3523)$	$0{,}0444$	$-0{,}3175$	$0{,}0455$	$-0{,}3227$	$0{,}0446$	$-0{,}3224$	$0{,}0446$
	M	$-0{,}3042\,(0{,}3507)$	$0{,}0464$	$-0{,}3032$	$0{,}0481$	$-0{,}3113$	$0{,}0471$	$-0{,}3142$	$0{,}0471$
F	K	$-0{,}5499\,(0{,}3270)$	$0{,}0630$	$-0{,}5495$	$0{,}0664$	$-0{,}5661$	$0{,}0644$	$-0{,}5728$	$0{,}0644$
	M	$-0{,}4577\,(0{,}3388)$	$0{,}0782$	$-0{,}4576$	$0{,}0817$	$-0{,}4702$	$0{,}0797$	$-0{,}4746$	$0{,}0797$
I	K	$-0{,}4181\,(0{,}3433)$	$0{,}0815$	$-0{,}4156$	$0{,}0851$	$-0{,}4283$	$0{,}0830$	$-0{,}4336$	$0{,}0830$
	M	$-0{,}2400\,(0{,}3549)$	$0{,}1137$	$-0{,}2400$	$0{,}1182$	$-0{,}2467$	$0{,}1159$	$-0{,}2491$	$0{,}1159$
SP	K	$-0{,}5009\,(0{,}3383)$	$0{,}0664$	$-0{,}4789$	$0{,}0709$	$-0{,}5083$	$0{,}0683$	$-0{,}5304$	$0{,}0683$
	M	$-0{,}4869\,(0{,}3438)$	$0{,}0826$	$-0{,}4636$	$0{,}0864$	$-0{,}4855$	$0{,}0837$	$-0{,}4996$	$0{,}0837$
UK	K	$-0{,}4829\,(0{,}3335)$	$0{,}0704$	$-0{,}4821$	$0{,}0742$	$-0{,}4983$	$0{,}0721$	$-0{,}5062$	$0{,}0721$
	M	$-0{,}2888\,(0{,}3415)$	$0{,}0924$	$-0{,}2885$	$0{,}1014$	$-0{,}3107$	$0{,}0989$	$-0{,}3298$	$0{,}0988$
US	K	$-0{,}4577\,(0{,}3388)$	$0{,}0782$	$-0{,}4576$	$0{,}0817$	$-0{,}4702$	$0{,}0797$	$-0{,}4746$	$0{,}0797$
	M	$-0{,}0428\,(0{,}3658)$	$0{,}0662$	$-0{,}0422$	$0{,}0671$	$-0{,}0427$	$0{,}0659$	$-0{,}0424$	$0{,}0659$

Tabell 2: Parameterne i AR(1)-modellen i ligning 3, estimert ved hjelp MLE. K er kvinner og M er menn.

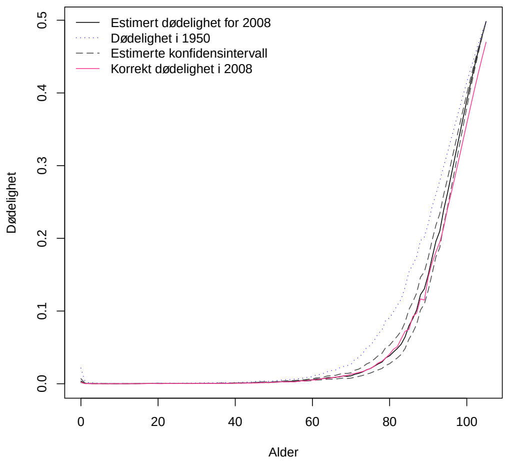
		MLE		**Bootstrap av MLE**	
		a	σ	a	σ
Norge	K	$-0{,}3468$	$0{,}0774$	$-0{,}3531\,(0{,}1084)$	$0{,}0775\,(0{,}0066)$
	M	$-0{,}0136$	$0{,}1620$	$-0{,}0091\,(0{,}1290)$	$0{,}1586\,(0{,}0133)$
Danmark	K	$-0{,}4830$	$0{,}0684$	$-0{,}4813\,(0{,}1219)$	$0{,}0679\,(0{,}0068)$
	M	$-0{,}3266$	$0{,}1455$	$-0{,}3126\,(0{,}1118)$	$0{,}1428\,(0{,}0132)$
Sverige	K	$-0{,}3792$	$0{,}0481$	$-0{,}3431\,(0{,}1197)$	$0{,}0468\,(0{,}0047)$
	M	$-0{,}3049$	$0{,}0889$	$-0{,}3047\,(0{,}1166)$	$0{,}0871\,(0{,}0078)$
Japan	K	$-0{,}3224$	$0{,}0446$	$-0{,}3046\,(0{,}1278)$	$0{,}0443\,(0{,}0044)$
	M	$-0{,}3142$	$0{,}0471$	$-0{,}3116\,(0{,}1238)$	$0{,}0471\,(0{,}0040)$
Frankrike	K	$-0{,}5728$	$0{,}0644$	$-0{,}5706\,(0{,}1005)$	$0{,}0630\,(0{,}0056)$
	M	$-0{,}4746$	$0{,}0797$	$-0{,}4486\,(0{,}1153)$	$0{,}0782\,(0{,}0068)$
Italia	K	$-0{,}4336$	$0{,}0830$	$-0{,}4245\,(0{,}1199)$	$0{,}0823\,(0{,}0077)$
	M	$-0{,}2491$	$0{,}1159$	$-0{,}2482\,(0{,}1267)$	$0{,}1141\,(0{,}0104)$
Spania	K	$-0{,}5304$	$0{,}0683$	$-0{,}5253\,(0{,}1030)$	$0{,}0679\,(0{,}0063)$
	M	$-0{,}4996$	$0{,}0837$	$-0{,}4829\,(0{,}1184)$	$0{,}0828\,(0{,}0067)$
Storbritannia	K	$-0{,}5062$	$0{,}0721$	$-0{,}5069\,(0{,}1148)$	$0{,}0710\,(0{,}0072)$
	M	$-0{,}3298$	$0{,}0988$	$-0{,}3148\,(0{,}1247)$	$0{,}0977\,(0{,}0077)$
USA	K	$-0{,}4746$	$0{,}0797$	$-0{,}4667\,(0{,}1094)$	$0{,}0781\,(0{,}0066)$
	M	$-0{,}0424$	$0{,}0659$	$-0{,}0366\,(0{,}1186)$	$0{,}0648\,(0{,}0055)$

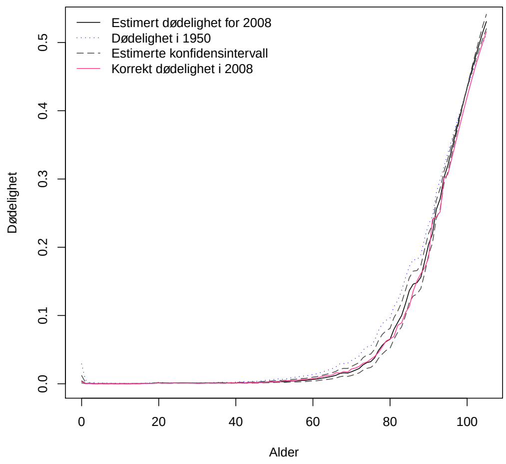


Figur 1: Tidsparameterne i Lee-Carter modellen for spanske kvinner og menn ved bruk av en autoregressiv prosess med koeffisientene lik MLE-estimatene gitt i tabell 1. Kvinner til venstre og menn til høyre.



Figur 2: Tidsparameterne i Lee-Carter modellen for spanske kvinner og menn ved bruk av tilfeldig gange modellen. Kvinner til venstre og menn til høyre.





Figur 3: Dødelighetsrater for norske kvinner og menn ved bruk av den autoregressive modellen. Kvinner til venstre og menn til høyre.

Vi fant dødelighetsratene q_{xk} ved å sette inn i ligning 1. For å se hvor godt modellen passet, så simulerte vi dødeligheten for norske menn og kvinner for år 2008 og sammenlignet det med den faktiske dødeligheten på tilsvarende tidspunkt. Det gjorde vi ved å estimere Lee-Carter parameterne med datagrunnlag fra 1950 til 2008, og bruke det for å estimere a og σ. Videre simulerte vi dødeligheten og resultatet vi fikk er vist i figur 3. Her er det en god overensstemmelse mellom estimert og sann dødelighetsrate for 2008, men vi ser at det er avvik for høye aldere. Det er vanskelig å estimere dødelighet for høye aldere fordi det er få observasjoner å bygge på, og vi kan derfor akseptere at vi har noe avvik.

2.3 Monte Carlo

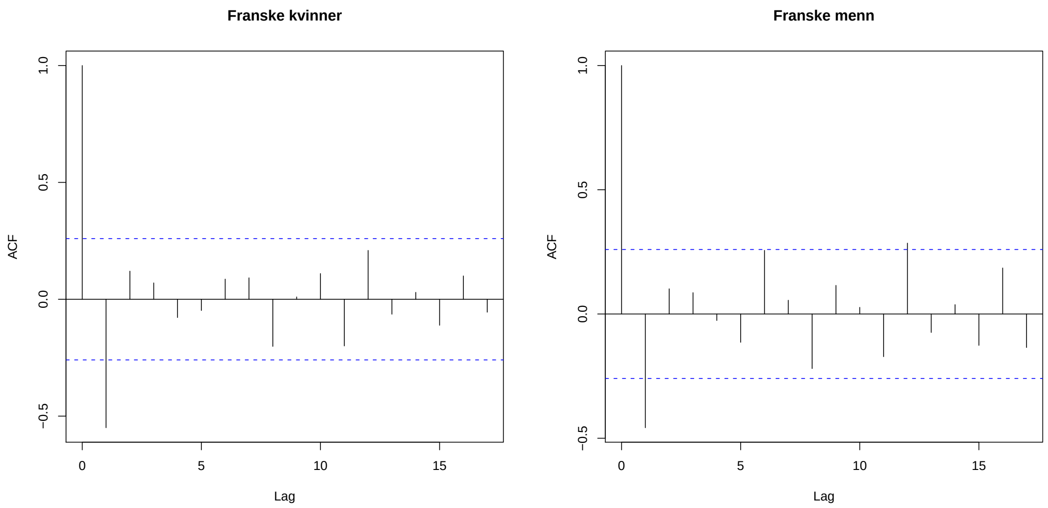
Monte Carlo er en simuleringsmetode som tar utgangspunkt i tilfeldig trekning av variable for å kunne beregne ulike resultater. I mange tilfeller vil det være vanskelig eller umulig å finne en eksakt fordeling for en variabel x. Ved å bruke Monte Carlo så kan man simulere $x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*$, og tilnærme en fordeling for x. Monte Carlo bygger på asymptotiske resultater i statistikk, og det er derfor nødvendig med mange simuleringer for å få gode estimater.

I vårt tilfelle så er vi interessert i å estimere både forventning og konfidensintervall fra Monte Carlo simuleringer. Monte Carlo estimatet for forventingen er gitt ved

$$\bar{x}^* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i^*,$$

og er en forventningsrett estimator. For å estimere grensene i konfidensintervallet ved hjelp av Monte Carlo så må vi sortere de simulerte x-ene slik at $x_1^* \leq x_2^* \leq ... \leq x_m^*$. Da kan vi estimere den øvre kvantilen som

$$q_\epsilon^* = x_{\epsilon m}^*,$$



Figur 4: Autokorrelasjonene til z-verdier ut i fra Lee-Carter estimatene. Franske kvinner til venstre, og danske menn til høyre.

og den nedre som

$$q_\epsilon^* = x_{(1-\epsilon)m}^*.$$

Estimatene for grensene i konfidensintervallet er også forventingsrette når $m \to \infty$. I denne oppgaven har vi brukt $m = 10\,000$ under alle Monte Carlo simuleringer.

2.4 Empiriske observasjoner

Det vi er interessert i å vurdere, er om det er grunnlag for en autoregressiv modell, og om z modelleres best ved en autoregressiv eller tilfeldig gange prosess. For å se nærmere på det, så fant vi autokorrelasjonen til z-prosessen vi fikk ved bruk av Lee-Carter estimatene. For at den tilfeldige gange modellen skal være riktig, så er vi avhengig av at det ikke er korrelasjon i noen av lagene i autokorrelasjonsfunksjonen. Er derimot prosessen den autoregressive i ligning 3, så kan vi ha korrelasjon i første lag.[2] I tabell 3 er det en oversikt over autokorrelasjonene i lag en for alle land og kjønn. Der ser vi at alle gruppene har en negativ korrelasjon i lag en, og det ser absolutt ut til å være grunnlag for en autoregressiv modell. Det er bare tre grupper som ikke har en signifikant avhengighet i første lag i autokorrelasjonsfunksjonen, det er norske, italienske og amerikanske menn. For alle de andre gruppene så har vi signifikant avhengighet i lag en, men det er en del tilfeller der vi også har signifikant autokorrelasjon i senere lag. Korrelasjonen i andre lag enn det første velger vi å se bort i fra på grunnlag av få observasjoner og mangel på lik trend mellom gruppene. Et eksempel på hvordan autokorrelasjonsfunksjonene ser ut, er vist ved franske kvinner og menn i figur 4.

Det er tydelig fra autokorrelasjonsfunksjonene at det er få tilfeller som samsvarer med en tilfeldig gang modell. En autoregressiv modell har en mye bedre overensstemmelse med våre data, og det er absolutt grunnlag for modellen i ligning 2 og 3.

[2]Se appendiks 6.1

Tabell 3: Parameterne i AR(1)-modellen 3, estimert ved hjelp MLE. K er kvinner og M er menn.

		ACF i lag 1
Norge	Kvinner	$-0{,}309$
	Menn	$-0{,}012$
Danmark	Kvinner	$-0{,}468$
	Menn	$-0{,}318$
Sverige	Kvinner	$-0{,}385$
	Menn	$-0{,}310$
Japan	Kvinner	$-0{,}317$
	Menn	$-0{,}303$
Frankrike	Kvinner	$-0{,}550$
	Menn	$-0{,}458$
Italia	Kvinner	$-0{,}416$
	Menn	$-0{,}240$
Spania	Kvinner	$-0{,}479$
	Menn	$-0{,}464$
Storbritannia	Kvinner	$-0{,}482$
	Menn	$-0{,}288$
USA	Kvinner	$-0{,}458$
	Menn	$-0{,}042$

3 Levetidsestimeringer og fremskrivninger

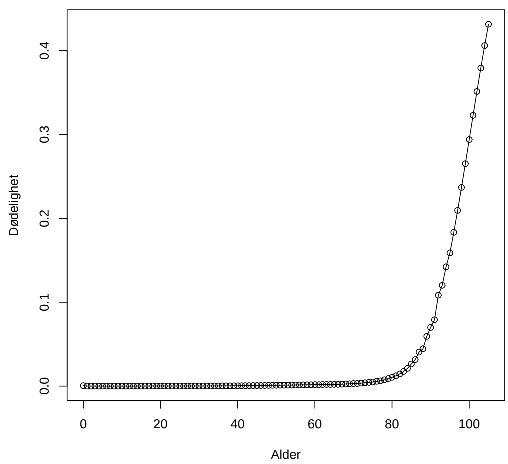
Vi har allerede sett at vi får ulike usikkerhetsestimater for tidsparameteren i Lee-Carter modellen, ut i fra om vi bruker en tilfeldig gang eller autoregressiv modell. Det vi er interessert i å se på, er hvordan modellvalget vil påvirke dødelighetsratene og usikkerhetsgrensene ved fremskrivning av dødelighet.

Vi så først på de forventede dødelighetsratene ved en fremskrivning på 50 år. Vi fremskrev både ved bruk av en autoregressiv og tilfeldig gang modell. De forventede dødelighetsratene for franske kvinner for begge modellene er vist i figur 5. De er så like at et ikke er mulig å skille de fra hverandre, og vi kan derfor konkludere med at de er tilnærmet like. Det er naturlig at det er slik, siden forventningen til z i ligning 3 er null uavhengig av hvilken av modellene vi bruker.[3]

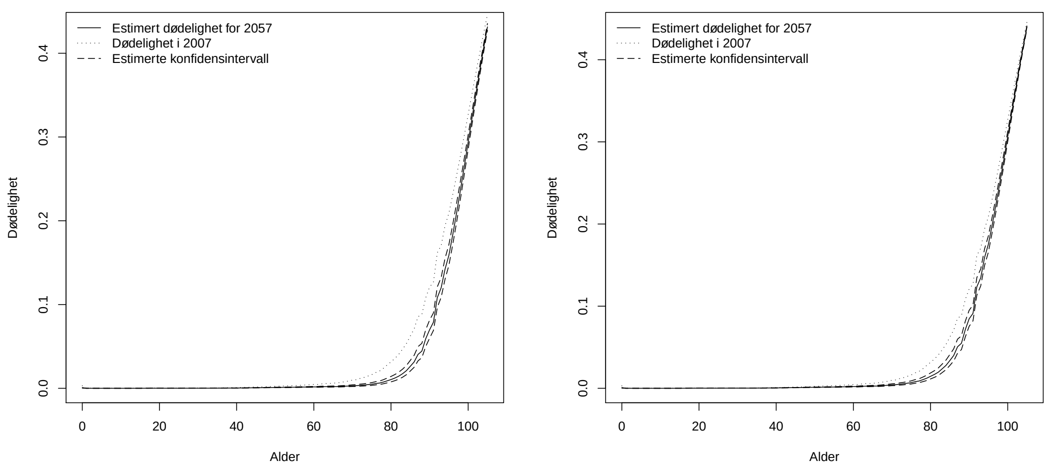
Videre ønsket vi å se på sikkerhetsanslagene ved de ulike modellene. Vi har allerede sett at tidsparameterne får et større konfidensintervall ved bruk av tilfeldig gang enn ved en autoregressiv prosess. Det som er interessant, er å se hvordan det vil påvirke sikkerhetsanslagene når vi fremskriver dødelighetsratene. Vi vurderer usikkerheten ved å se på et 95%-konfidensintervall for fremskrivningene. I figur 6 ser vi dødelighetsratene for franske kvinner og menn ved bruk av en autoregressiv prosess, og tilsvarende plott for tilfeldig gange i figur 7. Det ser ut til at vi også her har større konfidensintervall for en tilfeldig gang modell enn for en autoregressiv. Vi får det bekreftet ved et felles plott for begge metodene (se figur 8), der vi tydelig ser at tilfeldig gange modellen sitt konfidensintervall er større.

Vi vet at vi får smalere konfidensintervall ved å bruke en autoregressiv prosess,

[3]Se induksjonsbevis i appendiks 6.1



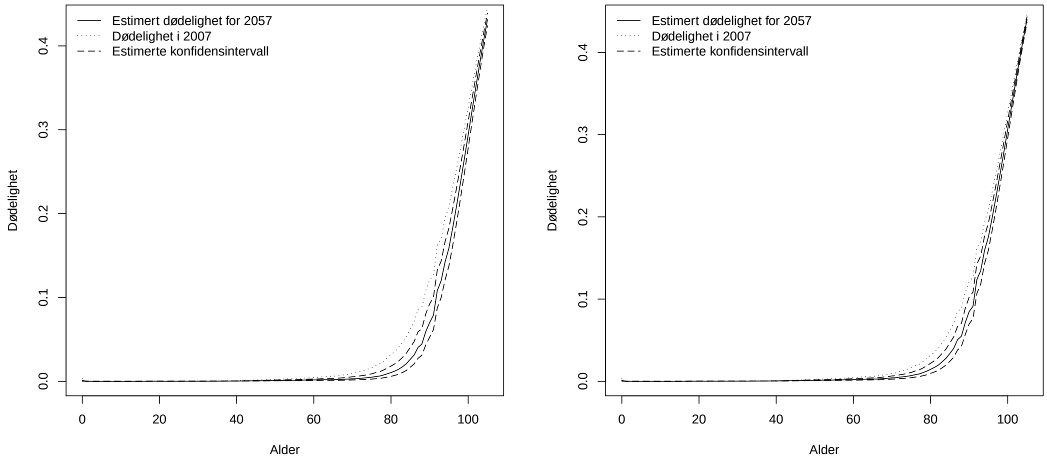
Figur 5: De forventede dødelighetsratene for franske kvinner ved bruk av de to ulike modellene for tidsvariablene i Lee-Carter. Autoregressiv modell i heltrukken linje og tilfeldig gange modellen i punkter.



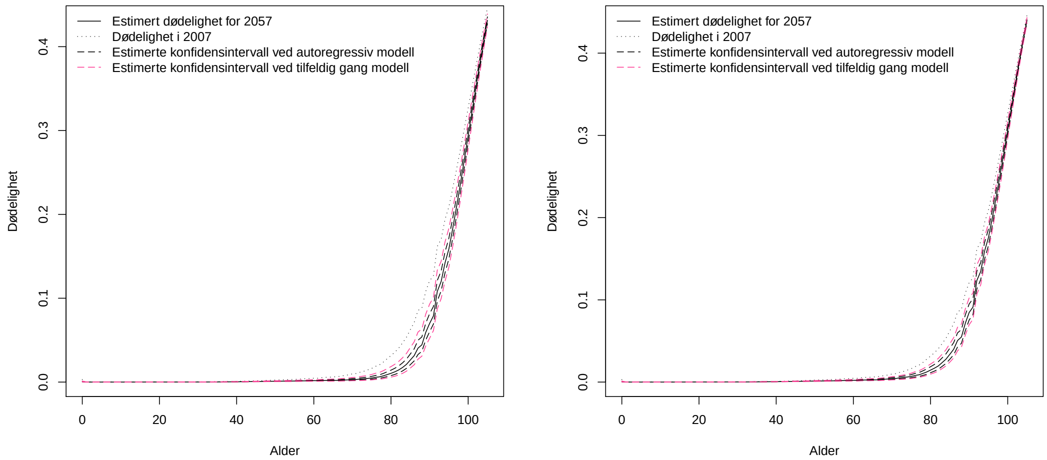
Figur 6: Forventede dødelighetsratene med 95%-konfidensintervall ved bruk av autoregressiv prosess for franske kvinner og menn. Kvinner til venstre, menn til høyre.

Tabell 4: Parameterne i AR(1)-modellen 3, estimert ved hjelp MLE for franske kvinner og menn ved bruk av datagrunnlag fra 1950-1997.

		a	σ
Frankrike	Kvinner	$-0{,}5706$	$0{,}0761$
	Menn	$-0{,}4680$	$0{,}1030$



Figur 7: Forventede dødelighetsrater med 95%-konfidensintervall ved bruk av tilfeldig gange for franske kvinner og menn. Kvinner til venstre, menn til høyre.



Figur 8: Forventede dødelighetsrater med 95%-konfidensintervall for franske kvinner og menn ved bruk av de to ulike modellene, autoregressiv og tilfeldig gang. Kvinner til venstre og menn til høyre.

Tabell 5: Parameterne i AR(1)-modellen 3, estimert ved hjelp MLE for franske kvinner og menn ved bruk av datagrunnlag fra 1980-1997.

		a	σ
Frankrike	Kvinner	$-0{,}5560$	$0{,}1189$
	Menn	$-0{,}3984$	$0{,}0967$

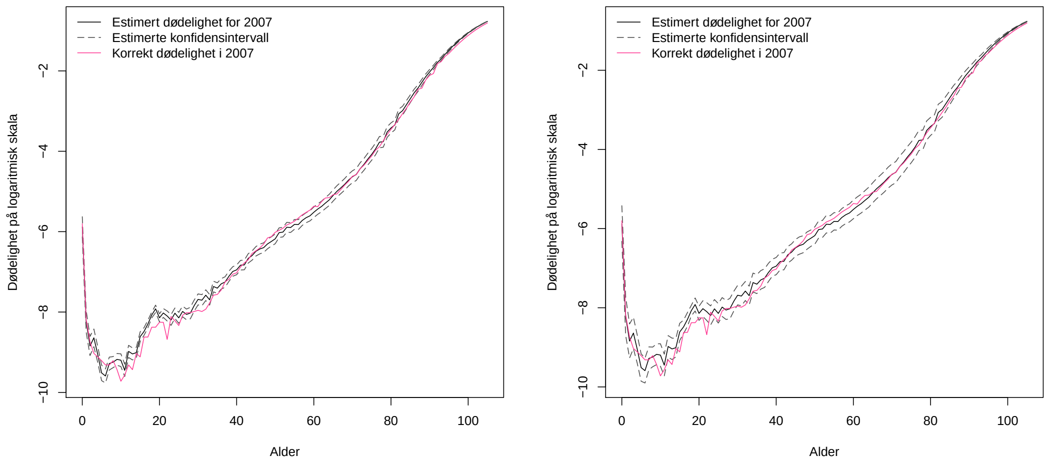
Tabell 6: Estimerte dødelighetsrater i prosent for 2007 for franske kvinner ved bruk av ulike modeller med datagrunnlag fra 1950-1997 og 1980-1997. Dynamisk dødelighet med tidsparametere simulert både ved hjelp av autoregressiv og tilfeldig gang modell, og statisk dødelighet lik dødeligheten i år 2007.

	Estimater				Konfidensintervall				Korrekt rate i 2007
	1950-1997		1980-1997		1950-1997		1980-1997		
	TG	AR	TG	AR	TG	AR	TG	AR	
0	0,280	0,280	0,301	0,300	[0,179 , 0,436]	[0,218 , 0,361]	[0,235 , 0,382]	[0,262 , 0,343]	0,003
10	0,010	0,010	0,008	0,008	[0,008 , 0,013]	[0,009 , 0,012]	[0,005 , 0,011]	[0,006 , 0,009]	0,006
20	0,029	0,029	0,025	0,025	[0,024 , 0,035]	[0,026 , 0,032]	[0,021 , 0,032]	[0,023 , 0,029]	0,026
30	0,046	0,046	0,055	0,055	[0,036 , 0,059]	[0,040 , 0,053]	[0,054 , 0,056]	[0,054 , 0,056]	0,035
40	0,096	0,096	0,105	0,105	[0,077 , 0,119]	[0,085 , 0,108]	[0,098 , 0,113]	[0,101 , 0,109]	0,089
50	0,207	0,207	0,212	0,212	[0,167 , 0,257]	[0,183 , 0,234]	[0,186 , 0,240]	[0,197 , 0,227]	0,244
60	0,401	0,401	0,406	0,406	[0,318 , 0,507]	[0,352 , 0,458]	[0,351 , 0,470]	[0,374 , 0,439]	0,467
70	0,971	0,971	0,989	0,988	[0,746 , 1,262]	[0,836 , 1,128]	[0,841 , 1,160]	[0,903 , 1,078]	0,983
80	3,267	3,268	3,081	3,078	[2,606 , 4,087]	[2,876 , 3,713]	[2,533 , 3,731]	[2,762 , 3,416]	3,158
90	13,158	13,160	12,464	12,458	[11,746 , 14,710]	[12,343 , 14,026]	[11,077 , 13,971]	[11,672 , 13,258]	12,085
100	34,798	34,799	33,747	33,740	[33,911 , 35,694]	[34,30 , 35,308]	[32,386 , 35,111]	[32,983 , 34,478]	32,689

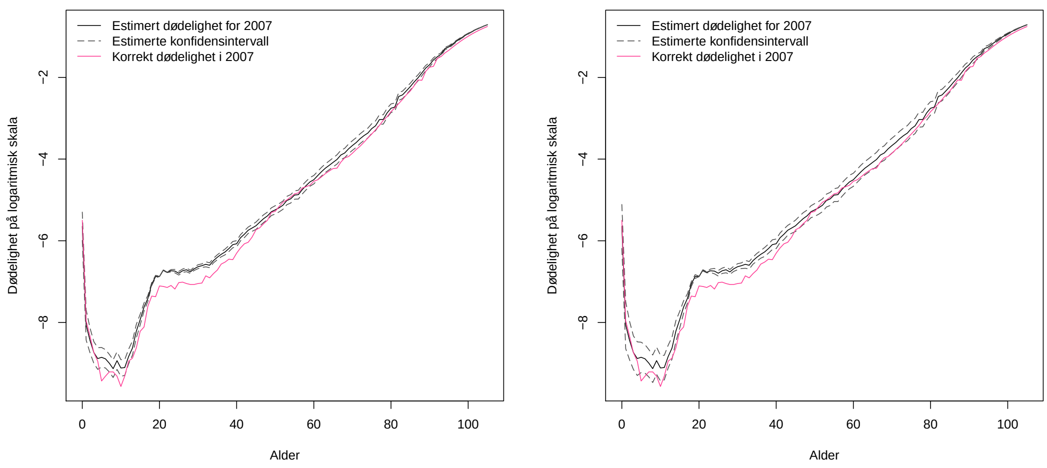
men hvor god er modellen til å fremskrive dødelighet? Vi gjorde tilsvarende simuleringer, men denne gangen brukte vi bare datagrunnlaget fra 1950-1997. Vi fant først a- og σ estimatene i dette tilfellet for franske kvinner og menn, som er vist i tabell 4. Vi ønsket å estimere dødelighetsratene 10 år frem i tid og sammenligne det med den reelle dødelighetsraten i 2007. Vi gjorde fremskrivningene for begge modellvalgene for franske kvinner og menn, og resultatet vises på logaritmisk skala i figur 9 og 10. For kvinnene så har vi en god overensstemmelse for de over 40 år, både ved en autoregressiv og tilfeldig gange modell. For menn så har vi godt samsvar mellom estimat og virkelighet for de over 50 år. Her har vi i motsetning til kvinnene store avvik i aldersgruppen $20 - 45$ år. I denne aldersgruppen så har dødeligheten sunket enda mer enn vi har forutsett.

Det kan være vanskelig å vurdere hvor mye historiske data man bør bruke ved fremskriving av dødeligheter. Vil dødelighetsratene fra 1950 påvirke dødeligheten over 50 år senere? Eller burde man bruke et kortere tidsrom, men da med nyere data? Det er ingen som kan forutse fremtiden, men man ønsker allikevel et best mulig estimat for dødelighetene fremover i tid. Vi gjorde de samme simuleringene en gang til, men denne gangen brukte vi bare datagrunnlag fra 1980 til 1997 for å fremskrive dødelighetene til 2007. Estimatene for franske kvinner og menn som vi fikk i dette tilfeller er vist i tabell 5, og dødelighetsestimatene i figur 11 og 12.

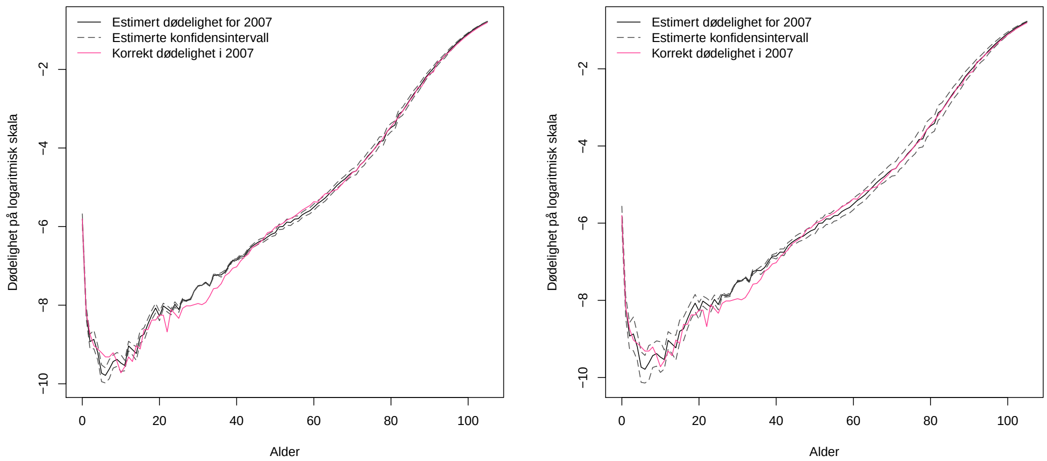
Fra figurene er det vanskelig å bedømme hvilken tidsperiode som gir best estimater. I tabell 6 og 7 er det en oversikt over estimerte dødeligheter med 95%-konfidensintervall for franske kvinner og menn ved bruk av datagrunnlaget fra både 1950-1997 og 1980-1997 for begge modellene. Ut i fra de tabellene så ser vi at dødelighetene for lave aldere (0-20) er best estimert ved bruk av datagrunnlag fra 1980-1997, for resten av alderne varierer det. Det er derfor vanskelig å konkludere med hvilket tidsrom som gir best estimater totalt sett. Det vi også ser av tabellen er at vi får større konfidensintervall ved bruk av datagrunnlag fra 1950-1997, det tyder på at nedgangen i dødelighet har vært relativt stabil de siste 20-årene. Det er umulig å vite om denne trenden fortsetter eller om vi vil få større variasjoner, slik som vi har sett i



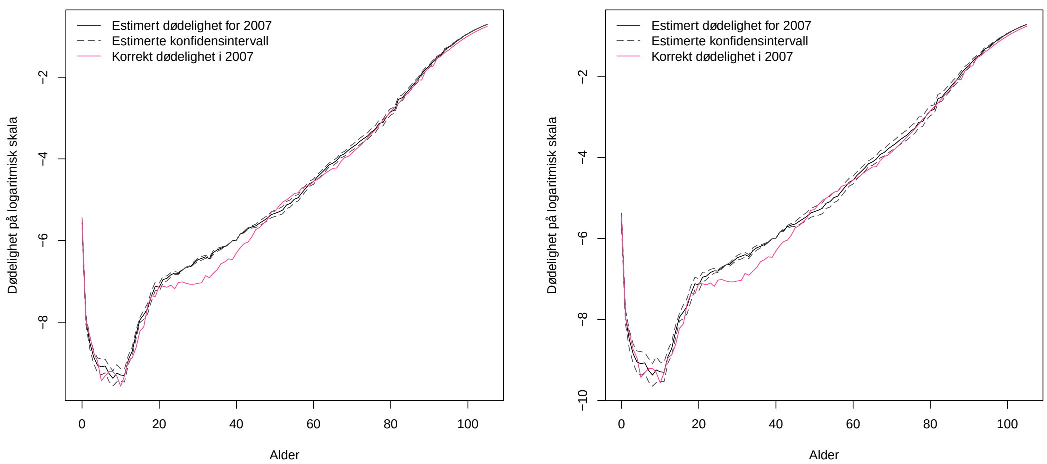
Figur 9: Forventede dødelighetsrater med 95%-konfidensintervall (på logaritmisk skala) ved fremskrivning i ti år for franske kvinner. Vi har brukt datagrunnlag fra 1950-1997 for å estimere dødeligheten i 2007. Autoregressiv prosess er brukt til venstre, mens tilfeldig gange er brukt i grafen til høyre.



Figur 10: Forventede dødelighetsrater med 95%-konfidensintervall (på logaritmisk skala) ved fremskrivning i ti år for franske menn. Vi har brukt datagrunnlag fra 1950-1997 for å estimere dødeligheten i 2007. Autoregressiv prosess er brukt til venstre, mens tilfeldig gange er brukt i grafen til høyre.



Figur 11: Forventede dødelighetsrater med 95%-konfidensintervall (på logaritmisk skala) ved fremskrivning i ti år for franske kvinner. Vi har brukt datagrunnlag fra 1980-1997 for å estimere dødeligheten i 2007. Autoregressiv prosess er brukt til venstre, mens tilfeldig gange er brukt i grafen til høyre.



Figur 12: Forventede dødelighetsrater med 95%-konfidensintervall (på logaritmisk skala) ved fremskrivning i ti år for franske menn. Vi har brukt datagrunnlag fra 1980-1997 for å estimere dødeligheten i 2007. Autoregressiv prosess er brukt til venstre, mens tilfeldig gange er brukt i grafen til høyre.

Tabell 7: Estimerte dødelighetsrater i prosent for 2007 for franske menn ved bruk av ulike modeller med datagrunnlag fra 1950-1997 og 1980-1997. Dynamisk dødelighet med tidsparametere simulert både ved hjelp av autoregressiv og tilfeldig gang modell, og statisk dødelighet lik dødeligheten i år 2007.

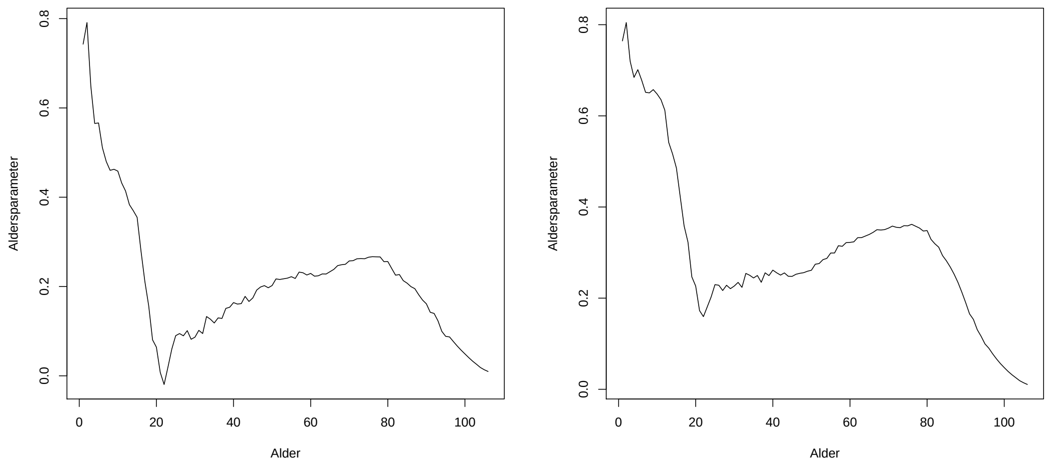
	Estimater				Konfidensintervall				Korrekt rate i 2007
	1950-1997		1980-1997		1950-1997		1980-1997		
	TG	AR	TG	AR	TG	AR	TG	AR	
0	0,353	0,353	0,385	0,385	[0,207 , 0,604]	[0,251 , 0,497]	[0,320 , 0,461]	[0,341 , 0,434]	0,409
10	0,011	0,011	0,009	0,009	[0,008 , 0,015]	[0,009 , 0,013]	[0,007 , 0,012]	[0,008 , 0,011]	0,007
20	0,104	0,104	0,079	0,079	[0,103 , 0,104]	[0,103 , 0,104]	[0,068 , 0,092]	[0,071 , 0,087]	0,082
30	0,131	0,131	0,155	0,155	[0,122 , 0,141]	[0,125 , 0,138]	[0,146 , 0,164]	[0,149 , 0,161]	0,087
40	0,230	0,230	0,250	0,250	[0,205 , 0,259]	[0,214 , 0,248]	[0,249 , 0,251]	[0,250 , 0,251]	0,183
50	0,528	0,528	0,483	0,483	[0,452 , 0,618]	[0,478 , 0,583]	[0,429 , 0,543]	[0,447 , 0,522]	0,509
60	1,105	1,105	1,051	1,051	[0,942 , 1,297]	[0,998 , 1,223]	[0,952 , 1,157]	[0,986 , 1,120]	1,064
70	2,552	2,552	2,427	2,428	[2,126 , 3,062]	[2,272 , 2,865]	[2,178 , 2,697]	[2,263 , 2,603]	2,114
80	6,358	6,358	5,824	5,826	[5,397 , 7,481]	[5,728 , 7,0500]	[5,156 , 6,556]	[5,382 , 6,300]	5,850
90	18,468	18,468	17,772	17,777	[16,967 , 20,076]	[17,498 , 19,475]	[16,753 , 18,819]	[17,106 , 18,462]	17,382
100	39,481	39,482	39,323	39,325	[38,781 , 40,189]	[39,034 , 39,929]	[38,929 , 39,712]	[39,068 , 39,581]	37,066

historiske data. Ved videre undersøkelse av modellen, så ser vi bare på simuleringer som er gjort med datagrunnlag fra 1950-1997.

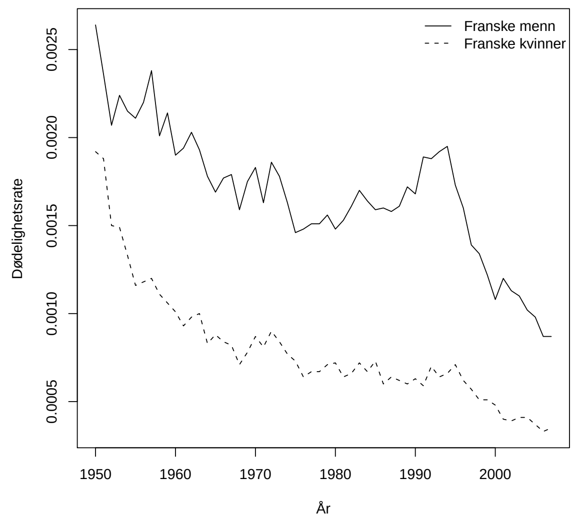
Vi vil videre se på forskjellen mellom autoregressiv og tilfeldig gange modellen. For blant annet franske kvinner på 60 år, så er den faktiske dødeligheten i 2007 bare i konfidensintervallene til den tilfeldig gange modellen og ikke i den autoregressive. Det er bare i få tilfeller at dødeligheten ligger utenfor autoregressiv modellen sitt konfidensintervall, men er i tilfeldig gange sitt. Det er derfor ingen grunn til å trekke konklusjonen om at en autoregressiv modell er feil. Det er bare et 95% konfidensintervall, så vi vil i 5% av tilfellene være utenfor.

Det som er mer urovekkende, er at vi i noen aldere bommer grovt med estimatet, og den korrekte verdien er langt utenfor konfidensintervallet til begge modellene. Dette gjelder spesielt franske menn i 30-40 års alderen. Der har ikke modellen klart å få med nok nedgang i dødelighet i forhold til hva som var tilfellet. For de aller fleste alderne så har vi et godt estimat på dødelighetsraten, så det kan tyde på at det er aldersvariabelen vår som ikke stemmer så godt i dette tilfellet. Aldersvariabelen for franske menn ved bruk av datagrunnlag fra 1950-1997 er vist til venstre i figur 13. Her er det problematisk at parameteren går ned mot null. Ved en a-verdi på null så vil ikke dødeligheten forandre seg, men derimot holde seg lik dødeligheten i år null (her 1997). I tilfeller der aldersparameteren er nær null, vil vi også få veldig smale konfidensintervaller. Hvis vi bruker datagrunnlaget for hele perioden 1950-2007, så har vi en høyere aldersparameter for denne aldersgruppen (vist til høyre i figur 13). Det viser at franske menn i 30-40 års alderen har hatt en drastisk nedgang de siste årene, og det har vi ikke klart å fange opp i modellen.

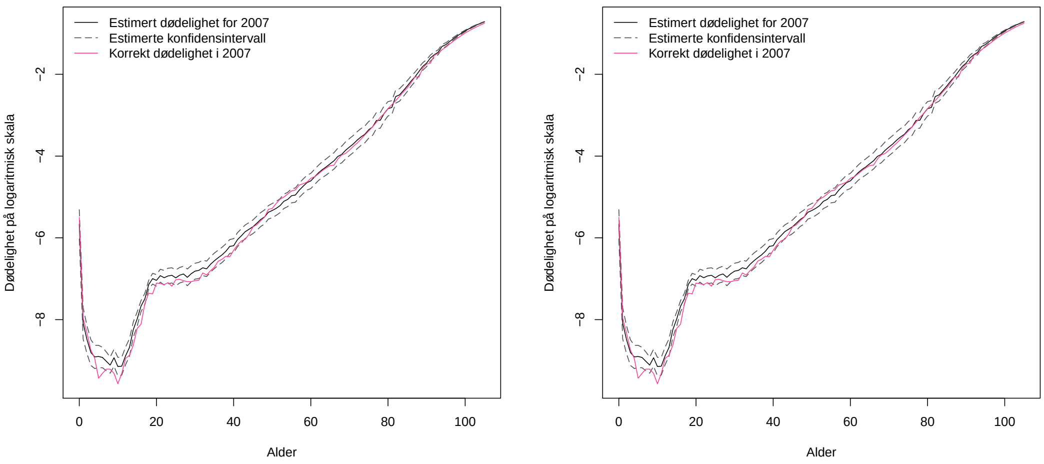
I figur 14 så er dødeligheten for 30 år gamle franske kvinner og menn plottet over tidsrommet 1950-2007. Her ser man at dødelighetsraten for menn er mer ustabil enn den er hos kvinner. Det er derfor vanskeligere å fremskrive dødeligheter for menn. Dette er en generell tendens for alle landene, og gjelder ikke bare Frankrike. Siden nedgangen i dødelighet varierer mye for menn, så er det også vanskelig å estimere aldersparameteren a_x. Vi gjorde den samme fremskrivningen for franske menn en gang



Figur 13: Aldersparameterne for franske menn estimert ved hjelp av datagrunnlaget fra 1950-1997 til venstre og ved datagrunnlaget fra 1950-2007 til høyre.



Figur 14: Dødelighetsrate for 30 år gamle franske kvinner og menn for tidsperioden 1950-2007



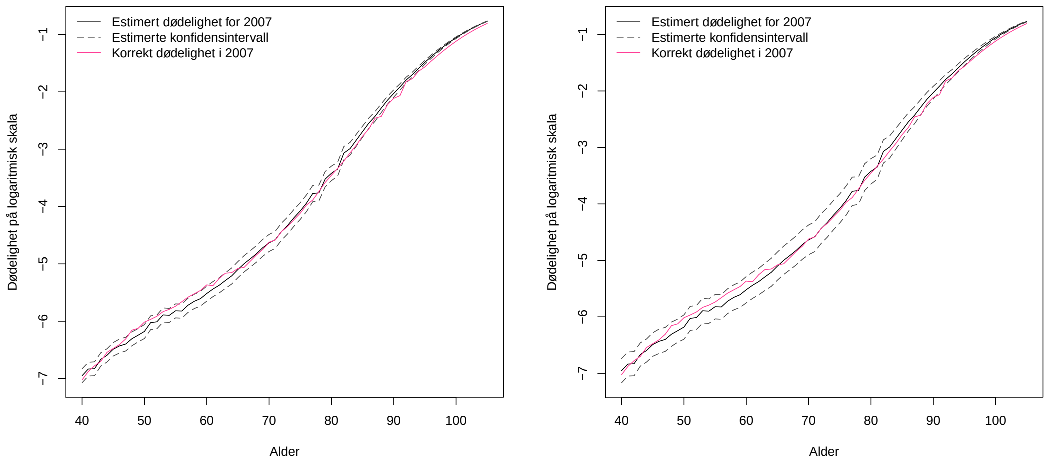
Figur 15: Forventede dødelighetsrater med 95%- og 99%-konfidensintervall (på logaritmisk skala) ved fremskrivning i ti år for franske menn ved bruk av aldersparameterne estimert ved hjelp av franske kvinner. 95%-konfidenintervall til venstre, 99%-konfidensintervall til høyre.

til, men denne gangen brukte vi kvinnene sine a_x-estimater framfor mennenes. Da fikk vi resultatet i figur 15, som er betraktelig bedre enn det vi fikk ved bruk av herrenes a_x-estimater.

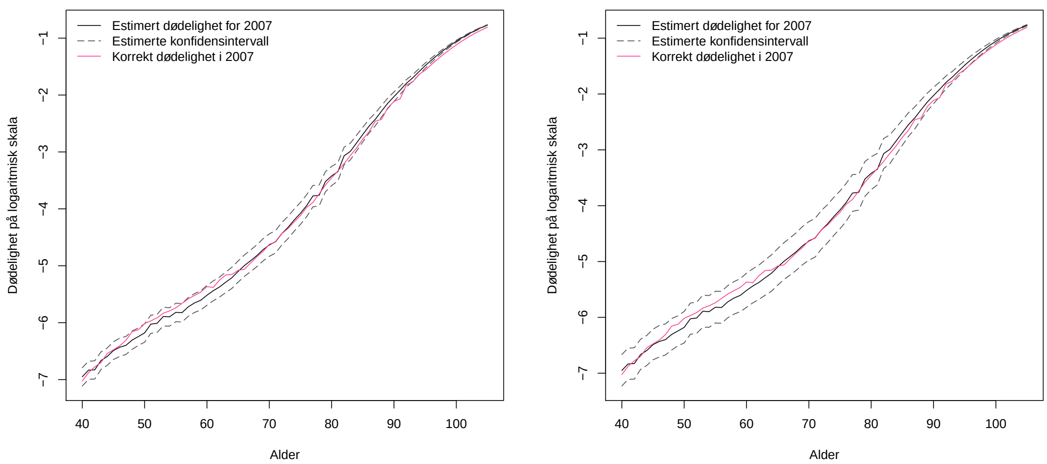
Når vi skal sammenligne bruken av autoregressiv og tilfeldig gange modellen, så velger vi å se på en aldersgruppe der estimatene ser gode ut. Vi velger da å se på franske kvinner over 40 år, og franske menn over 50 år. Vi ser først på kvinnene som er vist for den valgte aldersgruppen i figur 16. Her ser vi at dødeligheten for 2007 stort sett ligger innenfor konfidensintervallene uansett modell. Det er noen få tilfeller der dødeligheten er innenfor konfidensintervallet for tilfeldig gang modellen uten at den er innenfor ved den autoregressive modellen. For høye aldere så er vi utenfor konfidensintervallet for begge modellene, men vi har tidligere konkludert med at det er akseptabelt.

I forsikringsbransjen har det blitt mer vanlig å jobbe med 99%-konfidensintervall, og i Norge så er det også lovpålagt i forbindelse med beregning av solvens. Hvis vi plotter dødelighetsfremskrivningene for 2007 med 99%-konfidensintervall istedenfor 95%, så får vi resultatet i figur 17. Der ser vi at dødeligheten i 2007 ligger inne i konfidensintervaller for både autoregressiv og tilfeldig gang modell, med unntak av høye aldere. Her kan det se ut til at konfidensintervallene til tilfeldig gange modellen er unødvendig store, og at konfidensintervallene blir bedre ved en autoregressiv modell.

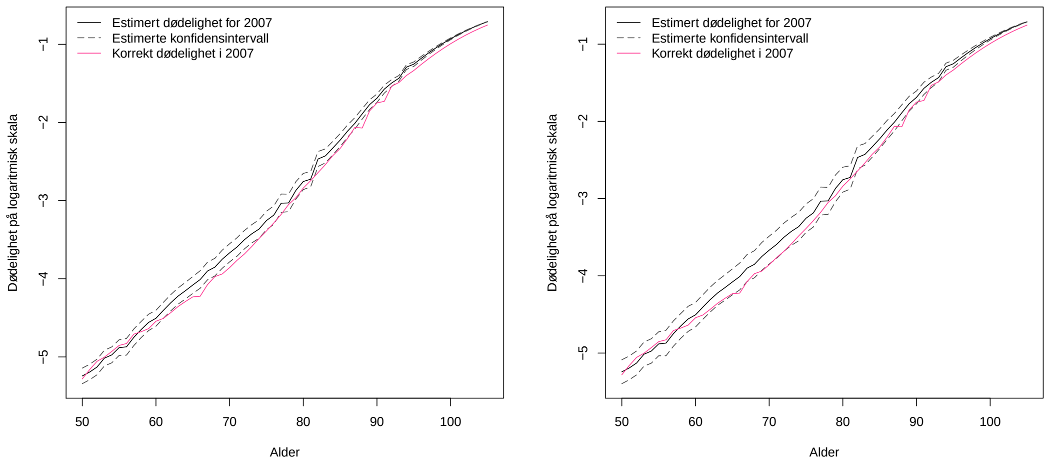
Vi ønsker også å se på de franske mennene over 50 år. Plottene med både 95%- og 99%-konfidensintervall er vist i figur 18 og 19. Her er dødeligheten mye lavere enn det vi har estimert og for å ha den korrekte dødeligheten i 2007 innenfor konfidensintervallet, så må vi bruke tilfeldig gang modellen.



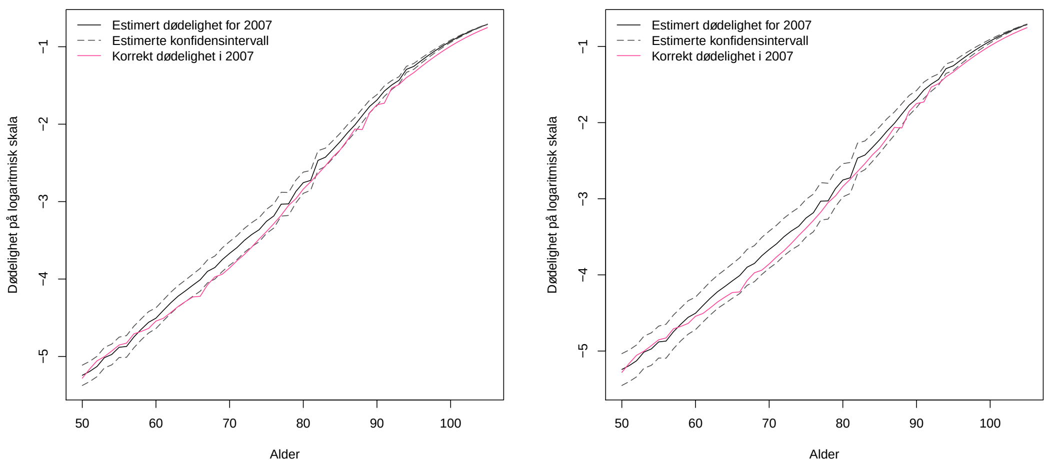
Figur 16: Forventede dødelighetsrater med 95%-konfidensintervall (på logaritmisk skala) ved fremskrivning i ti år for franske kvinner. Vi har brukt datagrunnlag fra 1950-1997 for å estimere dødeligheten i 2007. Autoregressiv prosess er brukt til venstre, mens tilfeldig gange er brukt i grafen til høyre.



Figur 17: Forventede dødelighetsrater med 99%-konfidensintervall (på logaritmisk skala) ved fremskrivning i ti år for franske kvinner. Vi har brukt datagrunnlag fra 1950-1997 for å estimere dødeligheten i 2007. Autoregressiv prosess er brukt til venstre, mens tilfeldig gange er brukt i grafen til høyre.



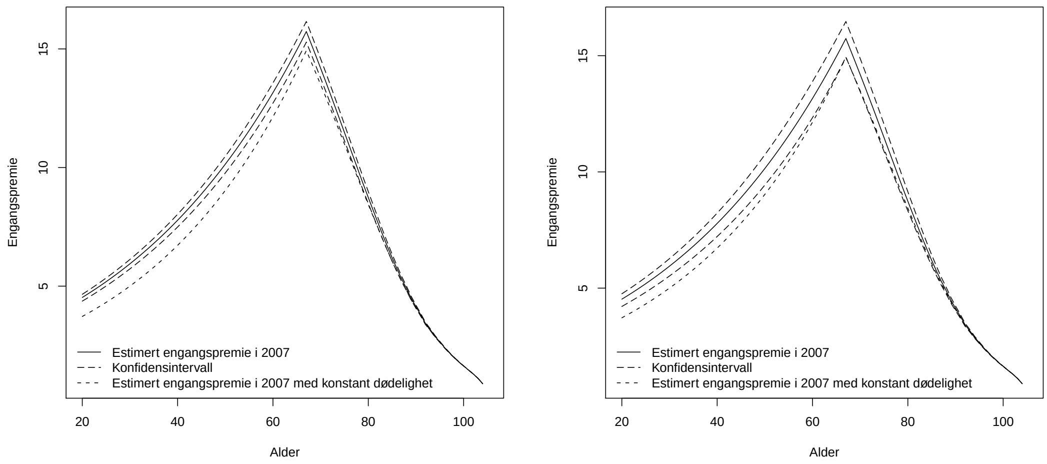
Figur 18: Forventede dødelighetsrater med 95%-konfidensintervall (på logaritmisk skala) ved fremskrivning i ti år for franske menn. Vi har brukt datagrunnlag fra 1950-1997 for å estimere dødeligheten i 2007. Autoregressiv prosess er brukt til venstre, mens tilfeldig gange er brukt i grafen til høyre.



Figur 19: Forventede dødelighetsrater med 99%-konfidensintervall (på logaritmisk skala) ved fremskrivning i ti år for franske menn. Vi har brukt datagrunnlag fra 1950-1997 for å estimere dødeligheten i 2007. Autoregressiv prosess er brukt til venstre, mens tilfeldig gange er brukt i grafen til høyre.

4 Økonomiske konsekvenser

Valget av dødelighetsmodell vil påvirke forsikringsselskapene økonomisk. Vi velger å se på engangspremier og nåverdier når vi skal se på de økonomiske konsekvensene av dette valget.



Figur 20: Estimerte engangspremier med 95%-konfidensintervall for franske kvinner. Autoregressiv prosess er brukt til venstre, mens tilfeldig gange er brukt i grafen til høyre.

4.1 Engangspremier

Engangspremie for alder l er definert som

$$\pi_l = s \sum_{i=k_r}^{l_e - l_0} d^i \, {}_ip_l, \tag{8}$$

der

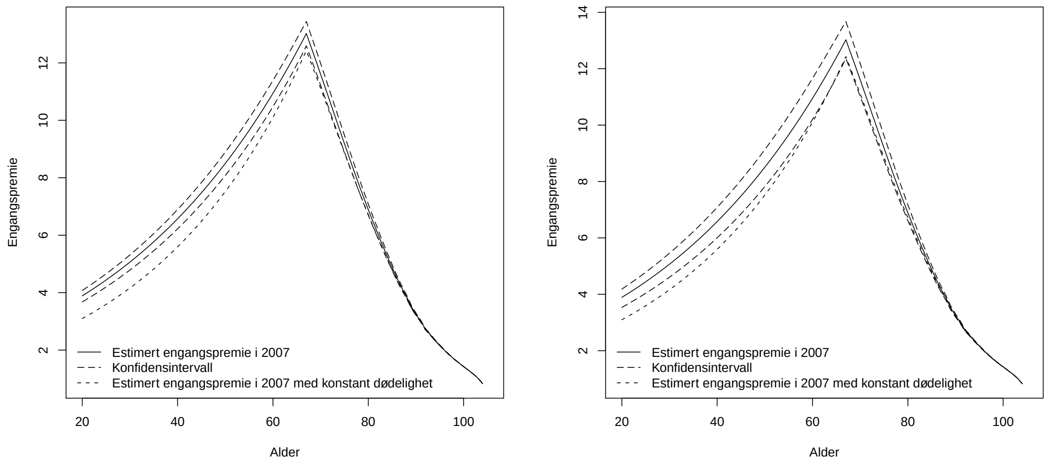
$$\begin{aligned} s &= \text{Størrelsen på utbetalingen} \\ l_r &= \text{Alderen der utbetalingene starter} \\ l_e &= \text{Maksimum alder (her 105)} \\ k_r &= \text{Maks}(l_r - l, 0) \end{aligned}$$

(Bølviken). Vi har valgt å bruke en utbetaling av størrelse 1 som starter ved alder 67. Siden vi har en dynamisk dødelighetsmodell, så trenger vi en metode for å regne ut overlevelsessannsynlighetene som vi skal bruke i ligning 8. Fra grunnleggende forsikringsmatematikk så vet vi at

$${}_{i+1}p_l = {}_i p_l \left(1 - q_{l+1}\right) = {}_i p_l \, {}_1p_{l+i},$$

der ${}_0p_l = 1$ for alle l (Gerber, 1997). På den måten kan man ved rekursjon regne ut ${}_{i+1}p_l$ for alle i og l. På tilsvarende måte ved en dynamisk dødelighetsmodell har man at

$${}_{i+1}p_{l,k} = {}_i p_{l,k} \, {}_1p_{(l+i),(k+i)}, \tag{9}$$



Figur 21: Estimerte engangspremier med 95%-konfidensintervall for franske menn. Autoregressiv prosess er brukt til venstre, mens tilfeldig gange er brukt i grafen til høyre.

ved tid k. Her kan vi bruke rekursjonen på samme måte, fordi vi også her har at ${}_0p_{l,k} = 1$ for alle l og k. På den måten kan vi finne alle overlevelsessannsynlighetene vi trenger for å kunne regne ut engangspremiene.

De estimerte engangspremiene med 95%-konfidensintervall for franske kvinner og menn er vist i figur 20 og 21. Her ser det ut til at estimatene er tilnærmet like, men at usikkerheten er større ved en tilfeldig gang modell. Det får vi bekreftet i tabell 8 og 9, men den autoregressive modellen gir jevnt over noe høyere estimater enn tilfeldig gang. Selv om estimatene er nokså like ved autoregressiv og tilfeldig gang modell, så vil det gi økonomiske forskjeller.

Konfidensintervallene er det store forkjeller på. Tilfeldig gange modellen gir oss mye videre konfidensintervaller, og vi har derfor mye større usikkerhet i estimatene ved bruk av tilfeldig gang. Det gir et større økonomisk sprik fra beste til verste scenario, og forsikringsselskapet må ha nok kapital til å dekke det verst tenkelige utfallet. Dermed blir forsikringsselskapet avhengig av mer kapital ved bruk av en tilfeldig gang kontra en autoregressiv modell.

4.2 Nåverdier

Nåverdien til en portefølje er definert som

$$PV_0 = \sum_{k=0}^{l_e - l_0} d^k \mathcal{X}_k, \tag{10}$$

der forpliktelsen $\mathcal{X}_k$ er gitt ved

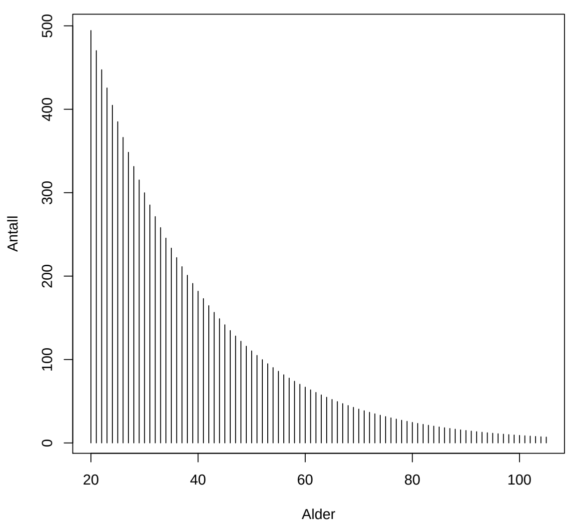
$$\mathcal{X}_k = -\pi \sum_{l=l_0}^{l_r-k-1} J_l \, {}_kp_l + s \sum_{l=l_r-k}^{l_e-k} J_l \, {}_kp_l \tag{11}$$

Tabell 8: Estimerte engangspremier for 2007 for franske kvinner ved bruk av ulike dødelighetsmodeller. Dynamisk dødelighet med tidsparametere simulert både ved hjelp av autoregressiv og tilfeldig gang modell, og statisk dødelighetsmodell lik dødeligheten i år 2007.

	Estimater			Konfidensintervall	
	TG	AR	Statisk	TG	AR
20	4,34	4,35	3,5	[−7,9% , 6,2%]	[−4,0% , 3,3%]
30	5,68	5,69	4,7	[−8,0% , 6,5%]	[−4,1% , 3,5%]
40	7,41	7,42	6,31	[−8,0% , 6,6%]	[−4,2% , 3,5%]
50	9,62	9,62	8,48	[−7,7% , 6,5%]	[−4,0% , 3,6%]
60	12,42	12,42	11,4	[−6,7% , 6,0%]	[−3,6% , 3,4%]
70	13,24	13,24	12,58	[−5,4% , 5,2%]	[−3,1% , 3,0%]
80	7,88	7,88	7,62	[−4,7% , 4,9%]	[−2,9% , 3,0%]
90	3,66	3,66	3,62	[−2,4% , 2,7%]	[−1,7% , 1,8%]
100	1,49	1,49	1,48	[−0,7% , 0,3%]	[−0,6% , 0,3%]

Tabell 9: Estimerte engangspremier for 2007 for franske menn ved bruk av ulike dødelighetsmodeller. Dynamisk dødelighet med tidsparametere simulert både ved hjelp av autoregressiv (AR) og tilfeldig gang (TG) modell, og statisk dødelighet lik dødeligheten i år 2007.

	Estimater			Konfidensintervall	
	TG	AR	Statisk	TG	AR
20	3,57	3,57	2,82	[−11,3% , 9,9%]	[−6,5% , 6,2%]
30	4,63	4,64	3,79	[−10,8% , 9,9%]	[−6,5% , 6,0%]
40	5,99	6,0	5,09	[−10,1% , 9,6%]	[−6,2% , 5,8%]
50	7,73	7,73	6,84	[−9,3% , 8,8%]	[−5,6% , 5,5%]
60	9,93	9,93	9,19	[−7,8% , 7,4%]	[−4,7% , 4,7%]
70	10,46	10,46	10,05	[−5,5% , 5,5%]	[−3,5% , 3,6%]
80	6,12	6,12	5,97	[−4,4% , 4,5%]	[−3,0% , 3,1%]
90	2,87	2,87	2,84	[−2,2% , 2,0%]	[−1,7% , 1,5%]
100	1,29	1,29	1,29	[−0,2% , 0,5%]	[−0,2% , 0,5%]



Figur 22: Aldersfordelingen i porteføljen.

Tabell 10: Nåverdier i hele tusen for angitt år, estimert ved tre ulike dødelighetsmodeller, Lee-Carter med autoregressiv tidsvariabel (AR), Lee-Carter med tilfeldig gang tidsparameter (TG), og konstant dødelighet lik dødeligheten ved siste dataår. N, D, S, J, F, I, SP, UK, US er henholdsvis Norge, Danmark, Sverige, Japan, Frankrike, Italia, Spania, Storbritannia og USA, K er kvinner og M er menn.

			Nåverdier				
			Estimater			**Konfidensintervall**	
			TG	AR	Statisk	TG	AR
N	2008	K	35,3	35,3	32,8	[−6,7% , 6,2%]	[−4,6% , 4,5%]
		M	28,8	28,8	27,5	[−5,6% , 5,3%]	[−5,4% , 5,2%]
D	2008	K	33,0	33,0	30,5	[−8,7% , 8,5%]	[−5,3% , 5,3%]
		M	26,9	26,9	25,6	[−6,1% , 6,2%]	[−4,5% , 4,4%]
S	2008	K	35,7	35,7	32,9	[−5,4% , 5,1%]	[−3,6% , 3,5%]
		M	30,0	30,0	28,1	[−5,4% , 5,2%]	[−4,1% , 4,4%]
J	2008	K	41,5	41,5	37,3	[−5,2% , 4,5%]	[−3,7% , 3,3%]
		M	32,6	32,6	29,1	[−7,7% , 7,7%]	[−5,5% , 5,3%]
F	2007	K	38,7	38,8	35,4	[−7,4% , 6,4%]	[−3,9% , 3,7%]
		M	37,8	37,8	27,9	[−5,6% , 5,1%]	[−3,4% , 3,2%]
I	2007	K	37,4	37,4	34,2	[−8,1% , 7,1%]	[−5,1% , 4,8%]
		M	30,3	30,3	28,1	[−7,7% , 6,9%]	[−5,6% , 5,5%]
SP	2006	K	37,3	37,2	34,4	[−6,5% , 5,6%]	[−3,7% , 3,4%]
		M	30,0	30,0	27,4	[−1,2% , 9,7%]	[−6,2% , 5,9%]
UK	2008	K	34,3	34,4	31,8	[−7,9% , 7,6%]	[−4,8% , 4,6%]
		M	29,8	29,8	27,4	[−7,6% , 7,4%]	[−5,5% , 5,4%]
US	2007	K	30,5	30,5	27,9	[−8,6% , 8,2%]	[−5,2% , 5,1%]
		M	28,7	28,7	26,9	[−4,4% , 4,3%]	[−4,2% , 4,1%]

og J_l er antall personer i porteføljen som er l år (Bølviken). I porteføljen vi har brukt så er $\mathcal{J} = J_{l_0} + J_{l_1} + ... + J_{l_e} = 10000$, og alderssammensetningen er vist i figur 22. I våre utregninger så har vi brukt en utbetaling på $s = 1$ og premie π lik den ekvivalente premien som er definert som

$$\pi \sum_{k=0}^{l_r - l_0 - 1} d^k \, {}_k p_{l_0} = s \sum_{k=l_r-l_0}^{l_e - l_0} d^k \, {}_k p_l \tag{12}$$

(Bølviken).

Vi fant nåverdiene for den gitte porteføljen for alle land og kjønn, og vi brukte det siste året med tilgjengelig data som år null. Nåverdiene vi fikk er gitt med 95%-konfidensintervall i tabell 10. Vi får akkurat det samme resultatet som ved engangspremiene. Estimatene er nær hverandre for de to ulike Lee-Carter modellene, mens konfidensintervallene er mye større når vi bruker tilfeldig gang modellen. Det er en betydelig forskjell mellom nåverdiene estimert ved hjelp av Lee-Carter og statisk dødelighet, noe som er forventet siden Lee-Carter reduserer dødelighetsraten over tid.

De store konfidensintervallene ved tilfeldig gange modellen vil også her føre til at forsikringsselskapene må ha mer kapital enn ved den autoregressive modellen. I tallverdi vil kanskje ikke forskjellene i konfidensintervallene virke så store når vi benytter en utbetaling på en enhet, derfor er konfidensintervallene i tabell 10 gitt som prosent av estimatet. Hvis vi ser på norske kvinner og antar at enheten vår er på 100 000 NOK, så vil forskjellen mellom de øvre grensene i konfidensintervallene være på 60 700 000 NOK. Hvis vi antar at forsikringsselskapet tar utgangspunkt i en solvens på 97,5$\%$, så må altså de som benytter seg av den tilfeldig gange modellen ha

60 700 000 kroner mer i kapital enn de som benytter seg av den autoregressive modell. Modellvalget har som vi ser store økonomisk konsekvenser.

5 Konklusjon

Vi har sett at nedgangen i dødelighet ikke er uavhengig for hvert år, men derimot har en negativ korrelasjon. Derfor vet vi at tidsvariablene ikke følger en tilfeldig gang som man tradisjonelt har brukt, men en autoregressiv prosess med negativ koeffisient.

I noen tilfeller har vi allikevel fått fremskrivninger som stemmer dårlig overens med virkeligheten, og hvor den korrekte dødeligheten er utenfor vårt konfidensintervall. Det betyr ikke nødvendigvis at det blir feil å bruke en autoregressiv modell, for det er flere kilder til usikkerhet som vi ikke har tatt med i denne oppgaven. Vi har ikke tatt med parameterusikkerheten i estimatet av a i ligning 3. Den kan man inkludere ved å bruke usikkerheten vi fant for a ved hjelp av «bootstrap» og se hvor mye usikkerheten i a påvirker fremskrivningene og konfidensintervallene.

Vi har i tillegg gjort noen forutsetninger som ikke nødvendigvis er riktig. Vi har antatt at aldersparameterne i Lee-Carter modellen er like uansett tid. Vi har samtidig sett at vi får ulike aldersvariable når vi estimerer med datagrunnlag fra 1950-2007 i forhold til hvis vi bare bruker 1950-1997, noe som tyder på det motsatte. Nedgangen i dødeligheten, spesielt hos menn, er veldig variabel fra år til år for de ulike aldersgruppene, og det virker derfor rimelig at aldersparameterne varierer. For å få et bedre bilde av usikkerheten ved levetidsfremskrivninger, så må vi også få med usikkerheten i estimeringen av aldersparameterne a_x.

Fordi den negative korrelasjonen i tidsvariablene fører til smalere konfidensintervall når vi bruker en autoregressiv modell, så får modellvalget store økonomiske konsekvenser. Forsikringsselskapene trenger mindre kapital for å ha solvens fordi det blir mindre usikkerhet i estimatene våre.

Referanser

Human Mortality Database. University of California, Berkeley (USA), og Max Planck Institute for Demographic Research (Germany). Tilgjengelig på www.mortality.org eller www.humanmortality.de (data lastet ned [24.01.11]).

Erik Bølviken. Undervisningsmateriale for stk 4520 - finans- og forsikringsmatematisk laboratorium. Fått materialet av Erik Bølviken.

Andrew J. G. Cairns, David Blake, og Kevin Dowd. A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: theory and calibration. *The Journal of Risk and Insurance*, 73:687–718, 2006.

Hans U. Gerber. *Life Insurance Mathematics*. Springer, third edition, 1997.

Søren Fig Jarner, Esben Masotti Kryger, og Chresten Dengsøe. The evolution of death rates and life expectancy in Denmark. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2:147–173, 2008.

Ronald Lee og Timothy Miller. Evaluating the performance of the Lee-Carter method for forecasting mortality. *Demography*, 38:537–549, 2001.

Ronald D. Lee og Lawrence R. Carter. Modeling and Forecasting U. S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87(419):659–671, 1992.

Robert H. Shumway og David S. Stoffer. *Time Series Analysis and Its Applications with R Examples*. Springer, second edition, 2006.

Statistisk sentralbyrå. *Vi lever stadig lengre*, April 2010. `http://www.ssb.no/emner/02/02/10/dode/`.

Shripad Tuljapurkar, Nan Li, og Carl Boe. A universal pattern of mortality decline in the G7 countries. *Letters to nature*, 405:789–792, 2001.

6 Appendiks

6.1 Autokorrelasjonsfunksjonen (ACF)

Når vi skal finne autokorrelasjonsfunksjonen til z, så antar vi først at z er en svak stasjonær tidsrekke. Av definisjon betyr det at forventningen til z er konstant og at autokovariansfunksjonen $\gamma(s,t)$ bare avhenger av differansen mellom s og t (Shumway og Stoffer, 2006). Det vil si at vi har $\gamma(t+h,t) = \gamma(h,0)$ for alle t og h, og det er vanlig å skrive dette som $\gamma(h)$. Autokovariansfunksjonen for en svakt stasjonær tidsrekke er gitt ved

$$\gamma(h) = \mathrm{E}\left[(z_{t+h} - \mu)(z_t - \mu)\right] \tag{13}$$

(Shumway og Stoffer, 2006). I vårt tilfelle så vil $\mu = 0$, og det kan enkelt vises ved hjelp av et induksjonsbevis. Vi vet at $\mathrm{E}[z_0] = 0$ og at

$$\mathrm{E}\left[z_k\right] = a\mathrm{E}\left[z_{k-1}\right] + \sigma\mathrm{E}\left[\epsilon_k\right].$$

Siden forventningen til ϵ_k er null for alle k, så har vi videre at

$$\mathrm{E}\left[z_k\right] = a\mathrm{E}\left[z_{k-1}\right]. \tag{14}$$

Vi kan dermed lett vise at

$$\mathrm{E}\left[z_1\right] = a\mathrm{E}\left[z_0\right] = 0,$$

og vi antar at dette holder opp til z_k. Vi må da vise at det også holder for z_{k+1}:

$$\mathrm{E}\left[z_{k+1}\right] = a\mathrm{E}\left[z_k\right] = 0.$$

Siden dette holder, så kan vi skrive om ligning 13 til å være

$$\gamma(h) = \mathrm{E}\left[z_{t+h}z_t\right]. \tag{15}$$

Vi kan nå med enkle regnemetoder finne både autokovariansfunksjonen og autokorrelasjonsfunksjonen (ACF) til z. Ved å bruke ligning 15, så ser vi at

$$\begin{aligned}
\gamma(h) &= \mathrm{E}\left[z_{t+h}z_t\right] \\
\gamma(h) &= \mathrm{E}\left[(az_{t+h-1} + \sigma\epsilon_{t+h})(az_{t-1} + \sigma\epsilon_t)\right] \\
\gamma(h) &= a^2\mathrm{E}\left[z_{t+h-1}z_{t-1}\right] + a\sigma\mathrm{E}\left[\epsilon_t z_{t+h-1}\right] + a\sigma\mathrm{E}\left[\epsilon_{t+h}z_{t-1}\right] + \sigma^2\mathrm{E}\left[\epsilon_{t+h}\epsilon_t\right].
\end{aligned} \tag{16}$$

Ligning 16 vil ha ulike verdier for ulike h-verdier. Vi ser først på tilfellet der $h = 0$, da kan ligning 16 skrives om til

$$\gamma(0) = a^2\mathrm{E}\left[z_{t-1}^2\right] + 2a\sigma\mathrm{E}\left[\epsilon_t z_{t-1}\right] + \sigma^2\mathrm{E}\left[\epsilon_t^2\right].$$

Da ser man fort at ϵ_t er uavhengig av z_{t-1}, og fordi forventningen til ϵ_t er null, så har vi at

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= a^2\mathrm{E}\left[z_{t-1}^2\right] + \sigma^2\mathrm{E}\left[\epsilon_t^2\right] \\
\gamma(0) &= a^2\gamma(0) + \sigma^2 \\
(1-a^2)\gamma(0) &= \sigma^2 \\
\gamma(0) &= \frac{\sigma^2}{1-a^2}.
\end{aligned} \tag{17}$$

På tilsvarende måte så kan vi regne ut autokovariansen til z når $h > 0$, men vi ser fort at alle autokorrelasjonene vil være null med unntak av tilfellet med $h = 1$. Vi trenger ikke å se på de negative h-verdiene, for vi vil alltid ha at $\gamma(h) = \gamma(-h)$ (Shumway og Stoffer, 2006). Når $h = 1$, så kan vi skrive om ligning 16 til å være

$$\begin{aligned}
\gamma(1) &= a^2 \mathrm{E}\left[z_t z_{t-1}\right] + a\sigma \mathrm{E}\left[\epsilon_t z_t\right] + a\sigma \mathrm{E}\left[\epsilon_{t+1} z_{t-1}\right] + \sigma^2 \mathrm{E}\left[\epsilon_{t+1}\epsilon_t\right] \\
\gamma(1) &= a^2 \gamma(1) + a\sigma \mathrm{E}\left[\epsilon_t z_t\right] + a\sigma \mathrm{E}\left[z_{t-1}\right] \mathrm{E}\left[\epsilon_{t+1}\right] + \sigma^2 \mathrm{E}\left[\epsilon_{t+1}\right] \mathrm{E}\left[\epsilon_t\right] \\
\gamma(1) &= a^2 \gamma(1) + a\sigma \mathrm{E}\left[\left(a z_{t-1} + \sigma\epsilon_t\right)\epsilon_t\right] \\
\gamma(1) &= a^2 \gamma(1) + a\sigma^2 \\
(1-a^2)\gamma(1) &= a\sigma^2 \\
\gamma(1) &= \frac{a\sigma^2}{1-a^2}. \qquad (18)
\end{aligned}$$

Når vi har funnet autokovariansfunksjonen, så kan man også finne ACF. ACF er gitt ved

$$\rho(h) = \frac{\gamma(t+h,t)}{\sqrt{\gamma(t+h,t+h)\gamma(t,t)}} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \qquad (19)$$

(Shumway og Stoffer, 2006). Ved å sette inn verdiene for γ som vi fant i ligning 17 og 18, så får vi at ACF for z er

$$\begin{aligned}
&\rho(0) = 1 \\
&\rho(1) = a \\
&\rho(h) = 0 \text{ for alle } h > 1.
\end{aligned}$$

6.2 Datakode i Fortran: Program som estimerer parameterne i Lee-Carter modellen

Denne koden er skrevet av professor Erik Bølviken ved Universitetet i Oslo.

```
implicit none
real*8 q(100,0:120),a,n(100,0:120),mql(0:120),ql(100,0:120)
real*8 u(0:120),v(100),qe(100,0:120),s1,s2,qlo
real*8 qest(0:160),exlif,pe(1000)
real*8 ve(100),sum,p(100),q0(0:160),h,qk(0:160),mk,sk
real*8 s3,s4,au,bu,ageex,hh
integer nn(100,0:120),ix,ik,swi,i,nm(0:120),ls,ld,nd,kk,it
integer nk,nx1,nx2,nkfu,ninit,iinit

open (unit=10,file='spainfem.csv')
open (unit=11,file='spainmal.csv')
open (unit=15,file='leecarterhe.par')
open (unit=20,file='timef1.res')
open (unit=21,file='agef1.res')
open (unit=22,file='ageexpected.res')

read(15,*)
read(15,*)nk,nx1,nx2,swi
read(15,*)
read(15,*)ninit,nkfu

c  Reading mortality, details depend on the
c  structure of the data file

iinit=(ninit-1950)*111+1
nk=nk-iinit+1
if(swi.eq.0) then
     do i=1,iinit
          read(10,*)
     enddo
     do ik=1,nk
          do ix=0,110
               read(10,*)a,a,a,q(ik,ix),a,a,a,nn(ik,ix)
          enddo
     enddo
else
     do i=1,iinit
          read(11,*)
     enddo
     do ik=1,nk
          do ix=0,110
               read(11,*)a,a,a,q(ik,ix),a,a,a,nn(ik,ix)
```

```
        enddo
    enddo
endif


c   Entering the estimation phase

do ix=nx1,nx2
    mql(ix)=0
    nm(ix)=0
enddo
do ik=1,nk
    do ix=nx1,nx2
        n(ik,ix)=nn(ik,ix)*q(ik,ix)
        if(q(ik,ix).lt.0.9999999) then
            hh=q(ik,ix)/(1-q(ik,ix))
        else
            hh=q(ik,ix)/(1.0001-q(ik,ix))
        endif
        ql(ik,ix)=dlog(hh+0.00000000001)
        mql(ix)=mql(ix)+ql(ik,ix)*n(ik,ix)
        nm(ix)=nm(ix)+n(ik,ix)
    enddo
enddo
do ix=nx1,nx2
    mql(ix)=mql(ix)/nm(ix)
enddo
call  iter(ql,n,nk,nx1,nx2,mql,u,v)

do ik=1,nk
    write(20,100)ik,v(ik)
enddo
do ix=nx1,nx2
    write(21,100)ix,u(ix)
enddo
100   format(1x,i7,200f14.4)

c----------------------------------------------------------

subroutine iter(ql,n,nk,nx1,nx2,mql,u,v)
implicit none
real*8 n(100,0:120),mql(0:120),ql(100,0:120),u(0:120),v(100)
real*8 s1,s2,u1(0:120),v1(100)
integer ix,ik,niter,it,nk,nx1,nx2
parameter(niter=200)

v(1)=1
```

```
do ik=2,nk
    v(ik)=0.1
enddo

do it=1,niter

    if(it.gt.1) then
        do ix=nx1,nx2
            u1(ix)=u(ix)
        enddo
        do ik=1,nk
             v1(ik)=v(ik)
        enddo
    endif

    do ix=nx1,nx2
    s1=0
    s2=0
    do ik=1,nk
        s1=s1+(ql(ik,ix)-mql(ix))*v(ik)*n(ik,ix)
        s2=s2+v(ik)*v(ik)*n(ik,ix)
    enddo
    u(ix)=s1/s2
c   write(*,*)u(ix)
    enddo
c         pause

    do ik=2,nk
        s1=0
        s2=0
        do ix=nx1,nx2
            s1=s1+(ql(ik,ix)-mql(ix))*u(ix)*n(ik,ix)
            s2=s2+u(ix)*u(ix)*n(ik,ix)
        enddo
        v(ik)=s1/s2
c       write(*,*)v(ik)
    enddo
c        pause

    if(it.gt.1) then
        s1=0
        do ik=1,nk
            s1=s1+(v1(ik)-v(ik))**2
        enddo
        s2=0
        do ix=nx1,nx2
            s2=s2+(u1(ix)-u(ix))**2
```

```
        enddo
c       write(*,*)it,s1,s2
      endif

   enddo

   end
```

6.3 Datakode i R

```r

# ******* LESER INN DATA *******

#k = kvinner , m = menn

Norgetid.k.data = read.table("Norge-kvinner-timef1.res",header = F)
Norgetid.m.data = read.table("Norge-menn-timef1.res",header = F)
Norgeald.k.data = read.table("Norge-kvinner-agef1.res",header = F)
Norgeald.m.data = read.table("Norge-menn-agef1.res",header = F)

Sverigetid.k.data = read.table("Sverige-kvinner-timef1.res",header = F)
Sverigetid.m.data = read.table("Sverige-menn-timef1.res",header = F)
Sverigeald.k.data = read.table("Sverige-kvinner-agef1.res",header = F)
Sverigeald.m.data = read.table("Sverige-menn-agef1.res",header = F)

Danmarktid.k.data = read.table("Danmark-kvinner-timef1.res",header = F)
Danmarktid.m.data = read.table("Danmark-menn-timef1.res",header = F)
Danmarkald.k.data = read.table("Danmark-kvinner-agef1.res",header = F)
Danmarkald.m.data = read.table("Danmark-menn-agef1.res",header = F)

Japantid.k.data = read.table("Japan-kvinner-timef1.res",header = F)
Japantid.m.data = read.table("Japan-menn-timef1.res",header = F)
Japanald.k.data = read.table("Japan-kvinner-agef1.res",header = F)
Japanald.m.data = read.table("Japan-menn-agef1.res",header = F)

Japantid.k.data1998 = read.table("Japan-kvinner-timef2.res",header = F)
Japantid.m.data1998 = read.table("Japan-menn-timef2.res",header = F)
Japanald.k.data1998 = read.table("Japan-kvinner-agef2.res",header = F)
Japanald.m.data1998 = read.table("Japan-menn-agef2.res",header = F)

Japantid.k.data1998.80 = read.table("Japan-kvinner-timef3.res",header = F)
Japantid.m.data1998.80 = read.table("Japan-menn-timef3.res",header = F)
Japanald.k.data1998.80 = read.table("Japan-kvinner-agef3.res",header = F)
Japanald.m.data1998.80 = read.table("Japan-menn-agef3.res",header = F)

Frankriketid.k.data = read.table("Frankrike-kvinner-timef1.res",header = F)
Frankriketid.m.data = read.table("Frankrike-menn-timef1.res",header = F)
Frankrikeald.k.data = read.table("Frankrike-kvinner-agef1.res",header = F)
Frankrikeald.m.data = read.table("Frankrike-menn-agef1.res",header = F)

Frankriketid.k.data1997 = read.table("Frankrike-kvinner-timef2.res",header = F
)
Frankriketid.m.data1997 = read.table("Frankrike-menn-timef2.res",header = F)
Frankrikeald.k.data1997 = read.table("Frankrike-kvinner-agef2.res",header = F)
Frankrikeald.m.data1997 = read.table("Frankrike-menn-agef2.res",header = F)

Frankriketid.k.data1997.80 = read.table("Frankrike-kvinner-timef3.res",header
= F)
Frankriketid.m.data1997.80 = read.table("Frankrike-menn-timef3.res",header = F
)
```

```
Frankrikeald.k.data1997.80 = read.table("Frankrike-kvinner-agef3.res", header = F)
Frankrikeald.m.data1997.80 = read.table("Frankrike-menn-agef3.res", header = F)

Italiatid.k.data = read.table("Italia-kvinner-timef1.res", header = F)
Italiatid.m.data = read.table("Italia-menn-timef1.res", header = F)
Italiaald.k.data = read.table("Italia-kvinner-agef1.res", header = F)
Italiaald.m.data = read.table("Italia-menn-agef1.res", header = F)

Spaniatid.k.data = read.table("Spania-kvinner-timef1.res", header = F)
Spaniatid.m.data = read.table("Spania-menn-timef1.res", header = F)
Spaniaald.k.data = read.table("Spania-kvinner-agef1.res", header = F)
Spaniaald.m.data = read.table("Spania-menn-agef1.res", header = F)

Storbritanniatid.k.data = read.table("Storbritannia-kvinner-timef1.res", header = F)
Storbritanniatid.m.data = read.table("Storbritannia-menn-timef1.res", header = F)
Storbritanniaald.k.data = read.table("Storbritannia-kvinner-agef1.res", header = F)
Storbritanniaald.m.data = read.table("Storbritannia-menn-agef1.res", header = F)

USAtid.k.data = read.table("USA-kvinner-timef1.res", header = F)
USAtid.m.data = read.table("USA-menn-timef1.res", header = F)
USAald.k.data = read.table("USA-kvinner-agef1.res", header = F)
USAald.m.data = read.table("USA-menn-agef1.res", header = F)

Norgetid.k = Norgetid.k.data$V2-1
Norgetid.m = Norgetid.m.data$V2-1
Sverigetid.k = Sverigetid.k.data$V2-1
Sverigetid.m = Sverigetid.m.data$V2-1
Danmarktid.k = Danmarktid.k.data$V2-1
Danmarktid.m = Danmarktid.m.data$V2-1
Japantid.k = Japantid.k.data$V2-1
Japantid.m = Japantid.m.data$V2-1
Japantid.k1998 = Japantid.k.data1998$V2-1
Japantid.m1998 = Japantid.m.data1998$V2-1
Japantid.k1998.80 = Japantid.k.data1998.80$V2-1
Japantid.m1998.80 = Japantid.m.data1998.80$V2-1
Frankriketid.k = Frankriketid.k.data$V2-1
Frankriketid.m = Frankriketid.m.data$V2-1
Frankriketid.k1997 = Frankriketid.k.data1997$V2-1
Frankriketid.m1997 = Frankriketid.m.data1997$V2-1
Frankriketid.k1997.80 = Frankriketid.k.data1997.80$V2-1
Frankriketid.m1997.80 = Frankriketid.m.data1997.80$V2-1
Italiatid.k = Italiatid.k.data$V2-1
Italiatid.m = Italiatid.m.data$V2-1
Spaniatid.k = Spaniatid.k.data$V2-1
Spaniatid.m = Spaniatid.m.data$V2-1
Storbritanniatid.k = Storbritanniatid.k.data$V2-1
Storbritanniatid.m = Storbritanniatid.m.data$V2-1
USAtid.k = USAtid.k.data$V2-1
USAtid.m = USAtid.m.data$V2-1

Norgeald.k = Norgeald.k.data$V2
Norgeald.m = Norgeald.m.data$V2
Sverigeald.k = Sverigeald.k.data$V2
Sverigeald.m = Sverigeald.m.data$V2
Danmarkald.k = Danmarkald.k.data$V2
Danmarkald.m = Danmarkald.m.data$V2
Japanald.k = Japanald.k.data$V2
Japanald.m = Japanald.m.data$V2
Japanald.k1998 = Japanald.k.data1998$V2
Japanald.m1998 = Japanald.m.data1998$V2
Japanald.k1998.80 = Japanald.k.data1998.80$V2
```

```
Japanald.m1998.80 = Japanald.m.data1998.80$V2
Frankrikeald.k = Frankrikeald.k.data$V2
Frankrikeald.m = Frankrikeald.m.data$V2
Frankrikeald.k1997 = Frankrikeald.k.data1997$V2
Frankrikeald.m1997 = Frankrikeald.m.data1997$V2
Frankrikeald.k1997.80 = Frankrikeald.k.data1997.80$V2
Frankrikeald.m1997.80 = Frankrikeald.m.data1997.80$V2
Italiaald.k = Italiaald.k.data$V2
Italiaald.m = Italiaald.m.data$V2
Spaniaald.k = Spaniaald.k.data$V2
Spaniaald.m = Spaniaald.m.data$V2
Storbritanniaald.k = Storbritanniaald.k.data$V2
Storbritanniaald.m = Storbritanniaald.m.data$V2
USAald.k = USAald.k.data$V2
USAald.m = USAald.m.data$V2


#Ser på differansene i tidsparameterne
Norgetid.k.diff = Norgetid.k[2:59]- Norgetid.k[1:58]
Norgetid.m.diff = Norgetid.m[2:59]- Norgetid.m[1:58]

Sverigetid.k.diff = Sverigetid.k[2:59]- Sverigetid.k[1:58]
Sverigetid.m.diff = Sverigetid.m[2:59]- Sverigetid.m[1:58]

Danmarktid.k.diff = Danmarktid.k[2:59]- Danmarktid.k[1:58]
Danmarktid.m.diff = Danmarktid.m[2:59]- Danmarktid.m[1:58]

Japantid.k.diff = Japantid.k[2:59]- Japantid.k[1:58]
Japantid.m.diff = Japantid.m[2:59]- Japantid.m[1:58]
Japantid.k.diff1998 = Japantid.k1998[2:48]- Japantid.k1998[1:47]
Japantid.m.diff1998 = Japantid.m1998[2:48]- Japantid.m1998[1:47]
Japantid.k.diff1998.80 = Japantid.k1998.80[2:18]- Japantid.k1998.80[1:17]
Japantid.m.diff1998.80 = Japantid.m1998.80[2:18]- Japantid.m1998.80[1:17]

Frankriketid.k.diff = Frankriketid.k[2:58]- Frankriketid.k[1:57]
Frankriketid.m.diff = Frankriketid.m[2:58]- Frankriketid.m[1:57]
Frankriketid.k.diff1997 = Frankriketid.k1997[2:47]- Frankriketid.k1997[1:46]
Frankriketid.m.diff1997 = Frankriketid.m1997[2:47]- Frankriketid.m1997[1:46]
Frankriketid.k.diff1997.80 = Frankriketid.k1997.80[2:17]- Frankriketid.k1997.80[1:16]
Frankriketid.m.diff1997.80 = Frankriketid.m1997.80[2:17]- Frankriketid.m1997.80[1:16]

Italiatid.k.diff = Italiatid.k[2:58]- Italiatid.k[1:57]
Italiatid.m.diff = Italiatid.m[2:58]- Italiatid.m[1:57]

Spaniatid.k.diff = Spaniatid.k[2:57]- Spaniatid.k[1:56]
Spaniatid.m.diff = Spaniatid.m[2:57]- Spaniatid.m[1:56]

Storbritanniatid.k.diff = Storbritanniatid.k[2:59]- Storbritanniatid.k[1:58]
Storbritanniatid.m.diff = Storbritanniatid.m[2:59]- Storbritanniatid.m[1:58]

USAtid.k.diff = USAtid.k[2:58]- USAtid.k[1:57]
USAtid.m.diff = USAtid.m[2:58]- USAtid.m[1:57]


#Finner t_k-t_(k-1)-delta
Norgetidsrekke.k = Norgetid.k.diff-mean(Norgetid.k.diff)
Norgetidsrekke.m = Norgetid.m.diff-mean(Norgetid.m.diff)

Sverigetidsrekke.k = Sverigetid.k.diff-mean(Sverigetid.k.diff)
Sverigetidsrekke.m = Sverigetid.m.diff-mean(Sverigetid.m.diff)

Danmarktidsrekke.k = Danmarktid.k.diff-mean(Danmarktid.k.diff)
Danmarktidsrekke.m = Danmarktid.m.diff-mean(Danmarktid.m.diff)

```

```
Japantidsrekke.k = Japantid.k.diff-mean(Japantid.k.diff)
Japantidsrekke.m = Japantid.m.diff-mean(Japantid.m.diff)
Japantidsrekke.k1998 = Japantid.k.diff1998-mean(Japantid.k.diff1998)
Japantidsrekke.m1998 = Japantid.m.diff1998-mean(Japantid.m.diff1998)
Japantidsrekke.k1998.80 = Japantid.k.diff1998.80-mean(Japantid.k.diff1998.80)
Japantidsrekke.m1998.80 = Japantid.m.diff1998.80-mean(Japantid.m.diff1998.80)

Frankriketidsrekke.k = Frankriketid.k.diff-mean(Frankriketid.k.diff)
Frankriketidsrekke.m = Frankriketid.m.diff-mean(Frankriketid.m.diff)
Frankriketidsrekke.k1997 = Frankriketid.k.diff1997-mean(Frankriketid.k.diff1997)
Frankriketidsrekke.m1997 = Frankriketid.m.diff1997-mean(Frankriketid.m.diff1997)
Frankriketidsrekke.k1997.80 = Frankriketid.k.diff1997.80-mean(Frankriketid.k.diff1997.80)
Frankriketidsrekke.m1997.80 = Frankriketid.m.diff1997.80-mean(Frankriketid.m.diff1997.80)

Italiatidsrekke.k = Italiatid.k.diff-mean(Italiatid.k.diff)
Italiatidsrekke.m = Italiatid.m.diff-mean(Italiatid.m.diff)

Spaniatidsrekke.k = Spaniatid.k.diff-mean(Spaniatid.k.diff)
Spaniatidsrekke.m = Spaniatid.m.diff-mean(Spaniatid.m.diff)

Storbritanniatidsrekke.k = Storbritanniatid.k.diff-mean(Storbritanniatid.k.diff)
Storbritanniatidsrekke.m = Storbritanniatid.m.diff-mean(Storbritanniatid.m.diff)

USAtidsrekke.k = USAtid.k.diff-mean(USAtid.k.diff)
USAtidsrekke.m = USAtid.m.diff-mean(USAtid.m.diff)




# ******* FUNKSJON FOR Å PLOTTE ULIKE PLOT AV LEE-CARTER PARAMETERNE *******

plotLeeCarterInfo = function(){

        #Plot av differansen i tidsparameterne i Lee-Carter
        plot(Norgetid.k.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens differanser for norske kvinner")
        dev.new()
        plot(Norgetid.m.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens differanser for norske menn")
        dev.new()

        plot(Sverigetid.k.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens differanser for svenske kvinner")
        dev.new()
        plot(Sverigetid.m.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens differanser for svenske menn")
        dev.new()

        plot(Danmarktid.k.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens differanser for danske kvinner")
        dev.new()
        plot(Danmarktid.m.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens differanser for danske menn")
        dev.new()

        plot(Japantid.k.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens differanser for japanske kvinner")
        dev.new()
        plot(Japantid.m.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens differanser for japanske menn")
```

```
dev.new()

plot(Frankriketid.k.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens differanser franske for  kvinner")
dev.new()
plot(Frankriketid.m.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens differanser franske for  menn")
dev.new()

plot(Italiatid.k.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens differanser for italienske kvinner")
dev.new()
plot(Italiatid.m.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens differanser for italienske menn")
dev.new()

plot(Spaniatid.k.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens differanser for spanske kvinner")
dev.new()
plot(Spaniatid.m.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens differanser for spanske menn")
dev.new()

plot(Storbritanniatid.k.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens differanser for britiske kvinner")
dev.new()
plot(Storbritanniatid.m.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens differanser for britiske menn")
dev.new()

plot(USAtid.k.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens differanser for amerikanske kvinner")
dev.new()
plot(USAtid.m.diff, ylab = "differanse",main = "Tidsparameterens differanser for amerikanske menn")
dev.new()


#Autokorrelasjonen til differansen til tidsparameterne til Lee-Carter
acf(Norgetid.k.diff, main = "Norske kvinner - Differansen til tidsparameterne")
dev.new()
acf(Norgetid.m.diff, main = "Norske menn - Differansen til tidsparameterne")
dev.new()

acf(Sverigetid.k.diff, main = "Svenske kvinner - Differansen til tidsparameterne")
dev.new()
acf(Sverigetid.m.diff, main = "Svenske menn - Differansen til tidsparameterne")
dev.new()

acf(Danmarktid.k.diff, main = "Danske kvinner - Differansen til tidsparameterne")
dev.new()
acf(Danmarktid.m.diff, main = "Danske menn - Differansen til tidsparameterne")
dev.new()

acf(Japantid.k.diff, main = "Japanske kvinner - Differansen til tidsparameterne")
dev.new()
acf(Japantid.m.diff, main = "Japanske menn - Differansen til tidsparameterne")
dev.new()
```

```r

acf(Frankriketid.k.diff, main = "Franske␣kvinner␣−␣Differansen␣til␣tidsparameterne")
dev.new()
acf(Frankriketid.m.diff, main = "Franske␣menn␣−␣Differansen␣til␣tidsparameterne")
dev.new()

acf(Italiatid.k.diff, main = "Italienske␣kvinner␣−␣Differansen␣til␣tidsparameterne")
dev.new()
acf(Italiatid.m.diff, main = "Italienske␣menn␣−␣Differansen␣til␣tidsparameterne")
dev.new()

acf(Spaniatid.k.diff, main = "Spanske␣kvinner␣−␣Differansen␣til␣tidsparameterne")
dev.new()
acf(Spaniatid.m.diff, main = "Spania␣menn␣−␣Differansen␣til␣tidsparameterne")
dev.new()

acf(Storbritanniatid.k.diff, main = "Britiske␣kvinner␣−␣Differansen␣til␣tidsparameterne")
dev.new()
acf(Storbritanniatid.m.diff, main = "Britiske␣menn␣−␣Differansen␣til␣tidsparameterne")
dev.new()

acf(USAtid.k.diff, main = "Amerikanske␣kvinner␣−␣Differansen␣til␣tidsparameterne")
dev.new()
acf(USAtid.m.diff, main = "Amerikanske␣menn␣−␣Differansen␣til␣tidsparameterne")
dev.new()

#Partiell autokorrelasjonen til differansen til tidsparameterne til Lee−Carter
pacf(Norgetid.k.diff, main = "Norske␣kvinner␣−␣Differansen␣til␣tidsparameterne")
dev.new()
pacf(Norgetid.m.diff, main = "Norske␣menn␣−␣Differansen␣til␣tidsparameterne")
dev.new()

pacf(Sverigetid.k.diff, main = "Svenske␣kvinner␣−␣Differansen␣til␣tidsparameterne")
dev.new()
pacf(Sverigetid.m.diff, main = "Svenske␣menn␣−␣Differansen␣til␣tidsparameterne")
dev.new()

pacf(Danmarktid.k.diff, main = "Danske␣kvinner␣−␣Differansen␣til␣tidsparameterne")
dev.new()
pacf(Danmarktid.m.diff, main = "Danske␣menn␣−␣Differansen␣til␣tidsparameterne")
dev.new()

pacf(Japantid.k.diff, main = "Japanske␣kvinner␣−␣Differansen␣til␣tidsparameterne")
dev.new()
pacf(Japantid.m.diff, main = "Japanske␣menn␣−␣Differansen␣til␣tidsparameterne")
dev.new()

```

```r
pacf(Frankriketid.k.diff, main = "Franske kvinner - Differansen til tidsparameterne")
dev.new()
pacf(Frankriketid.m.diff, main = "Franske menn - Differansen til tidsparameterne")
dev.new()

pacf(Italiatid.k.diff, main = "Italienske kvinner - Differansen til tidsparameterne")
dev.new()
pacf(Italiatid.m.diff, main = "Italienske menn - Differansen til tidsparameterne")
dev.new()

pacf(Spaniatid.k.diff, main = "Spanske kvinner - Differansen til tidsparameterne")
dev.new()
pacf(Spaniatid.m.diff, main = "Spania menn - Differansen til tidsparameterne")
dev.new()

pacf(Storbritanniatid.k.diff, main = "Britiske kvinner - Differansen til tidsparameterne")
dev.new()
pacf(Storbritanniatid.m.diff, main = "Britiske menn - Differansen til tidsparameterne")
dev.new()

pacf(USAtid.k.diff, main = "Amerikanske kvinner - Differansen til tidsparameterne")
dev.new()
pacf(USAtid.m.diff, main = "Amerikanske menn - Differansen til tidsparameterne")
dev.new()


#Ser bare på tidsparameteren
plot(Norgetid.k, main = "Tidsparameterne for norske kvinner")
dev.new()
plot(Norgetid.m, main = "Tidsparameterne for norske menn")
dev.new()

plot(Sverigetid.k, main = "Tidsparameterne for svenske kvinner")
dev.new()
plot(Sverigetid.m, main = "Tidsparameterne for svenske menn")
dev.new()

plot(Danmarktid.k, main = "Tidsparameterne for danske kvinner")
dev.new()
plot(Danmarktid.m, main = "Tidsparameterne for danske menn")
dev.new()

plot(Japantid.k, main = "Tidsparameterne for japanske kvinner")
dev.new()
plot(Japantid.m, main = "Tidsparameterne for japanske menn")
dev.new()

plot(Frankriketid.k, main = "Tidsparameterne for franske kvinner")
dev.new()
plot(Frankriketid.m, main = "Tidsparameterne for franske menn")
dev.new()

plot(Italiatid.k, main = "Tidsparameterne for italienske kvinner")
dev.new()
plot(Italiatid.m, main = "Tidsparameterne for italienske menn")
dev.new()
```

```
plot(Spaniatid.k, main = "Tidsparameterne for spanske kvinner")
dev.new()
plot(Spaniatid.m, main = "Tidsparameterne for spanske menn")
dev.new()

plot(Storbritanniatid.k, main = "Tidsparameterne for britiske kvinner"
)
dev.new()
plot(Storbritanniatid.m, main = "Tidsparameterne for britiske menn")
dev.new()

plot(USAtid.k, main = "Tidsparameterne for amerikanske kvinner")
dev.new()
plot(USAtid.m, main = "Tidsparameterne for amerikanske menn")
dev.new()



#Autokorrelasjon til tidsparameterne
acf(Norgetid.k, main = "Norske kvinner - tidsparameterne")
dev.new()
acf(Norgetid.m, main = "Norske menn - tidsparameterne")
dev.new()

acf(Sverigetid.k, main = "Svenske kvinner - tidsparameterne")
dev.new()
acf(Sverigetid.m, main = "Svenske menn - tidsparameterne")
dev.new()

acf(Danmarktid.k, main = "Danske kvinner - tidsparameterne")
dev.new()
acf(Danmarktid.m, main = "Danske menn - tidsparameterne")
dev.new()

acf(Japantid.k, main = "Japanske kvinner - tidsparameterne")
dev.new()
acf(Japantid.m, main = "Japanske menn - tidsparameterne")
dev.new()

acf(Frankriketid.k, main = "Franske kvinner - tidsparameterne")
dev.new()
acf(Frankriketid.m, main = "Franske menn - tidsparameterne")
dev.new()

acf(Italiatid.k, main = "Italienske kvinner - tidsparameterne")
dev.new()
acf(Italiatid.m, main = "Italienske menn - tidsparameterne")
dev.new()

acf(Spaniatid.k, main = "Spanske kvinner - tidsparameterne")
dev.new()
acf(Spaniatid.m, main = "Spanske menn - tidsparameterne")
dev.new()

acf(Storbritanniatid.k, main = "Britiske kvinner - tidsparameterne")
dev.new()
acf(Storbritanniatid.m, main = "Britiske menn - tidsparameterne")
dev.new()

acf(USAtid.k, main = "Amerikanske kvinner - tidsparameterne")
dev.new()
acf(USAtid.m, main = "Amerikanske menn - tidsparameterne")
dev.new()
```

```
#Partiell autokorrelasjon til tidsparameterne
pacf(Norgetid.k, main = "Norske kvinner - tidsparameterne")
dev.new()
pacf(Norgetid.m, main = "Norske menn - tidsparameterne")
dev.new()

pacf(Sverigetid.k, main = "Svenske kvinner - tidsparameterne")
dev.new()
pacf(Sverigetid.m, main = "Svenske menn - tidsparameterne")
dev.new()

pacf(Danmarktid.k, main = "Danske kvinner - tidsparameterne")
dev.new()
pacf(Danmarktid.m, main = "Danske menn - tidsparameterne")
dev.new()

pacf(Japantid.k, main = "Japanske kvinner - tidsparameterne")
dev.new()
pacf(Japantid.m, main = "Japanske menn - tidsparameterne")
dev.new()

pacf(Frankriketid.k, main = "Franske kvinner - tidsparameterne")
dev.new()
pacf(Frankriketid.m, main = "Franske menn - tidsparameterne")
dev.new()

pacf(Italiatid.k, main = "Italienske kvinner - tidsparameterne")
dev.new()
pacf(Italiatid.m, main = "Italienske menn - tidsparameterne")
dev.new()

pacf(Spaniatid.k, main = "Spanske kvinner - tidsparameterne")
dev.new()
pacf(Spaniatid.m, main = "Spanske menn - tidsparameterne")
dev.new()

pacf(Storbritanniatid.k, main = "Britiske kvinner - tidsparameterne")
dev.new()
pacf(Storbritanniatid.m, main = "Britiske menn - tidsparameterne")
dev.new()

pacf(USAtid.k, main = "Amerikanske kvinner - tidsparameterne")
dev.new()
pacf(USAtid.m, main = "Amerikanske menn - tidsparameterne")
dev.new()


#Plot av ACF til "z" og utskrift av ACF i lag 1
print(acf(Norgetidsrekke.k, main= "Norske kvinner")[1])
dev.new()
print(acf(Norgetidsrekke.m, main= "Norske menn")[1])
dev.new()

print(acf(Danmarktidsrekke.k, main= "Danske kvinner")[1])
dev.new()
print(acf(Danmarktidsrekke.m, main= "Danske menn")[1])
dev.new()

print(acf(Sverigetidsrekke.k, main= "Svenske kvinner")[1])
dev.new()
print(acf(Sverigetidsrekke.m, main= "Svenske menn")[1])
dev.new()

print(acf(Japantidsrekke.k, main= "Japanske kvinner")[1])
dev.new()
```

```
        print(acf(Japantidsrekke.m, main= "Japanske menn")[1])
        dev.new()

        print(acf(Frankriketidsrekke.k, main= "Franske kvinner")[1])
        dev.new()
        print(acf(Frankriketidsrekke.m, main= "Franske menn")[1])
        dev.new()

        print(acf(Italiatidsrekke.k, main= "Italienske kvinner")[1])
        dev.new()
        print(acf(Italiatidsrekke.m, main= "Italienske menn")[1])
        dev.new()

        print(acf(Spaniatidsrekke.k, main= "Spanske kvinner")[1])
        dev.new()
        print(acf(Spaniatidsrekke.m, main= "Spanske menn")[1])
        dev.new()

        print(acf(Storbritanniatidsrekke.k, main= "Britiske kvinner")[1])
        dev.new()
        print(acf(Storbritanniatidsrekke.m, main= "Britiske menn")[1])
        dev.new()

        print(acf(USAtidsrekke.k, main= "Amerikanske kvinner")[1])
        dev.new()
        print(acf(USAtidsrekke.m, main= "Amerikanske menn")[1])
        dev.new()

}




# ******* FUNKSJON FOR Å ESTIMERE DØDELIGHETEN *******
# Returnerer forventet + øvre og nedre kvantil til estimert dødelighet
qxk = function(a,k,land,kjønn,m,øvre,nedre,sigma,årnull,plot){
        qxk = array(0, dim = c((k+1),106,3))
        t =matrix( rep(1, (k+1)*m), ncol = m, nrow = (k+1))

        #Henter riktige variable i forhold til hvilket land & kjønn

        if(land == "N"){
                sistedataår = 2008
                if(kjønn == "K"){
                        if(årnull ==1950){
                                data = read.table("Norge-kvinner-qx0.csv", header = TRUE)
                        }else{
                                data = read.table("Norge-kvinner-qx2008.csv", header = TRUE)
                        }
                        ax = Norgeald.k
                        t.LC = Norgetid.k
                        t.LC.diff = Norgetid.k.diff
                }else{
                        if(årnull == 1950){
                                data = read.table("Norge-menn-qx0.csv", header = TRUE)
                        }else{
                                data = read.table("Norge-menn-qx2008.csv", header = TRUE)
                        }
                        ax = Norgeald.m
                        t.LC = Norgetid.m
                        t.LC.diff = Norgetid.m.diff

```

```
			}

		}
		if(land == "D"){
			sistedataår = 2008
			if(kjønn == "K"){
				if(årnull == 1950){
					data = read.table("Danmark-kvinner-qx0.csv",
					header = TRUE)
				}else{
					data = read.table("Danmark-kvinner-qx2008.csv"
					, header = TRUE)
				}
				ax = Danmarkald.k
				t.LC = Danmarktid.k
				t.LC.diff = Danmarktid.k.diff

			}else{
				if(årnull == 1950){
					data = read.table("Danmark-menn-qx0.csv",
					header = TRUE)
				}else{
					data = read.table("Danmark-menn-qx2008.csv",
					header = TRUE)
				}
				ax = Danmarkald.m
				t.LC = Danmarktid.m
				t.LC.diff = Danmarktid.m.diff
			}
		}
		if(land == "S"){
			sistedataår = 2008
			if(kjønn == "K"){
				if(årnull == 1950){
					data = read.table("Sverige-kvinner-qx0.csv",
					header = TRUE)
				}else{
					data = read.table("Sverige-kvinner-qx2008.csv"
					, header = TRUE)
				}
				ax = Sverigeald.k
				t.LC = Sverigetid.k
				t.LC.diff = Sverigetid.k.diff

			}else{
				if(årnull == 1950){
					data = read.table("Sverige-menn-qx0.csv",
					header = TRUE)
				}else{
					data = read.table("Sverige-menn-qx2008.csv",
					header = TRUE)
				}
				ax = Sverigeald.m
				t.LC = Sverigetid.m
				t.LC.diff = Sverigetid.m.diff

			}
		}
		if(land == "J"){
			sistedataår = 2008
			if(kjønn == "K"){
				if(årnull == 1950){
					data = read.table("Japan-kvinner-qx0.csv",
					header = TRUE)
				}else{
```

```
                    data = read.table("Japan-kvinner-qx2008.csv", header = TRUE)
                }
                ax = Japanald.k
                t.LC = Japantid.k
                t.LC.diff = Japantid.k.diff

            }else{
                if(årnull == 1950){
                    data = read.table("Japan-menn-qx0.csv", header = TRUE)
                }else{
                    data = read.table("Japan-menn-qx2008.csv", header = TRUE)
                }
                ax = Japanald.m
                t.LC = Japantid.m
                t.LC.diff = Japantid.m.diff
            }

        }

        if(land == "J98"){ c
            sistedataår = 1998
            if(kjønn == "K"){
                if(årnull == 1950){
                    data = read.table("Japan-kvinner-qx0.csv", header = TRUE)
                }else{
                    data = read.table("Japan-kvinner-qx1998.csv", header = TRUE)
                }
                ax = Japanald.k1998
                t.LC = Japantid.k1998
                t.LC.diff = Japantid.k.diff1998

            }else{
                if(årnull == 1950){
                    data = read.table("Japan-menn-qx0.csv", header = TRUE)
                }else{
                    data = read.table("Japan-menn-qx1998.csv", header = TRUE)
                }
                ax = Japanald.m1998
                t.LC = Japantid.m1998
                t.LC.diff = Japantid.m.diff1998
            }

        }

        if(land == "J98.80"){ #Japan med datagrunnlag fra 1980-1998
            sistedataår = 1998
            if(kjønn == "K"){
                if(årnull == 1950){
                    data = read.table("Japan-kvinner-qx0.csv", header = TRUE)
                }else{
                    data = read.table("Japan-kvinner-qx1998.csv", header = TRUE)
                }
                ax = Japanald.k1998.80
                t.LC = Japantid.k1998.80
                t.LC.diff = Japantid.k.diff1998.80

            }else{
```

```
			if(årnull == 1950){
				data = read.table("Japan-menn-qx0.csv", header = TRUE)
			}else{
				data = read.table("Japan-menn-qx1998.csv", header = TRUE)
			}
			ax = Japanald.m1998.80
			t.LC = Japantid.m1998.80
			t.LC.diff = Japantid.m.diff1998.80
		}

	}


	if(land == "F"){
		sistedataår = 2007
		if(kjønn == "K"){
			if(årnull == 1950){
				data = read.table("Frankrike-kvinner-qx0.csv", header = TRUE)
			}else{
				data = read.table("Frankrike-kvinner-qx2007.csv", header = TRUE)
			}
			ax = Frankrikeald.k
			t.LC = Frankriketid.k
			t.LC.diff = Frankriketid.k.diff

		}else{
			if(årnull == 1950){
				data = read.table("Frankrike-menn-qx0.csv", header = TRUE)
			}else{
				data = read.table("Frankrike-menn-qx2007.csv", header = TRUE)
			}
			ax = Frankrikeald.m
			t.LC = Frankriketid.m
			t.LC.diff = Frankriketid.m.diff
		}

	}

	if(land == "F97"){ #Frankrike med datagrunnlag fra 1950-1997
		sistedataår = 1997
		if(kjønn == "K"){
			if(årnull == 1950){
				data = read.table("Frankrike-kvinner-qx0.csv", header = TRUE)
			}else{
				data = read.table("Frankrike-kvinner-qx1997.csv", header = TRUE)
			}
			ax = Frankrikeald.k1997
			t.LC = Frankriketid.k1997
			t.LC.diff = Frankriketid.k.diff1997
		}else{
			if(årnull == 1950){
				data = read.table("Frankrike-menn-qx0.csv", header = TRUE)
			}else{
				data = read.table("Frankrike-menn-qx1997.csv", header = TRUE)
			}
			ax = Frankrikeald.m1997
```

```
				t.LC = Frankriketid.m1997
				t.LC.diff = Frankriketid.m.diff1997
			}

	}

	if(land == "F97.80"){ #Frankrike med datagrunnlag fra 1980-1997
		sistedataår = 1997
		if(kjønn == "K"){
			if(årnull == 1950){
				data = read.table("Frankrike-kvinner-qx0.csv", header = TRUE)
			}else{
				data = read.table("Frankrike-kvinner-qx1997.csv", header = TRUE)
			}
			ax = Frankrikeald.k1997.80
			t.LC = Frankriketid.k1997.80
			t.LC.diff = Frankriketid.k.diff1997.80
		}else{
			if(årnull == 1950){
				data = read.table("Frankrike-menn-qx0.csv", header = TRUE)
			}else{
				data = read.table("Frankrike-menn-qx1997.csv", header = TRUE)
			}
			ax = Frankrikeald.m1997.80
			t.LC = Frankriketid.m1997.80
			t.LC.diff = Frankriketid.m.diff1997.80
		}

	}

	if(land == "I"){
		sistedataår = 2007
		if(kjønn == "K"){
			if(årnull == 1950){
				data = read.table("Italia-kvinner-qx0.csv", header = TRUE)
			}else{
				data = read.table("Italia-kvinner-qx2007.csv", header = TRUE)
			}
			ax = Italiaald.k
			t.LC = Italiatid.k
			t.LC.diff = Italiatid.k.diff

		}else{
			if(årnull == 1950){
				data = read.table("Italia-menn-qx0.csv", header = TRUE)
			}else{
				data = read.table("Italia-menn-qx2007.csv", header = TRUE)
			}
			ax = Italiaald.m
			t.LC = Italiatid.m
			t.LC.diff = Italiatid.m.diff
		}

	}

	if(land == "SP"){
		sistedataår = 2006
		if(kjønn == "K"){
```

```
			if(årnull == 1950){
				data = read.table("Spania-kvinner-qx0.csv",
				header = TRUE)
			}else{
				data = read.table("Spania-kvinner-qx2006.csv",
				 header = TRUE)
			}
			ax = Spaniaald.k
			t.LC = Spaniatid.k
			t.LC.diff = Spaniatid.k.diff

		}else{
			if(årnull == 1950){
				data = read.table("Spania-menn-qx0.csv",
				header = TRUE)
			}else{
				data = read.table("Spania-menn-qx2006.csv",
				header = TRUE)
			}
			ax = Spaniaald.m
			t.LC = Spaniatid.m
			t.LC.diff = Spaniatid.m.diff
		}

	}


	if(land == "UK"){
		sistedataår = 2008
		if(kjønn == "K"){
			if(årnull == 1950){
				data = read.table("Storbritannia-kvinner-qx0.
				csv", header = TRUE)
			}else{
				data = read.table("Storbritannia-kvinner-
				qx2008.csv", header = TRUE)
			}
			ax = Storbritanniaald.k
			t.LC = Storbritanniatid.k
			t.LC.diff = Storbritanniatid.k.diff

		}else{
			if(årnull == 1950){
				data = read.table("Storbritannia-menn-qx0.csv"
				, header = TRUE)
			}else{
				data = read.table("Storbritannia-menn-qx2008.
				csv", header = TRUE)
			}
			ax = Storbritanniaald.m
			t.LC = Storbritanniatid.m
			t.LC.diff = Storbritanniatid.m.diff
		}

	}



	if(land == "USA"){
		sistedataår = 2007
		if(kjønn == "K"){
			if(årnull == 1950){
				data = read.table("USA-kvinner-qx0.csv",
				header = TRUE)
			}else{
```

```
                    data = read.table("USA-kvinner-qx2007.csv",
                    header = TRUE)
                }
                ax = USAald.k
                t.LC = USAtid.k
                t.LC.diff = USAtid.k.diff

        }else{
                if(årnull == 1950){
                        data = read.table("USA-menn-qx0.csv", header =
                         TRUE)
                }else{
                        data = read.table("USA-menn-qx2007.csv",
                        header = TRUE)
                }
                ax = USAald.m
                t.LC = USAtid.m
                t.LC.diff = USAtid.m.diff
        }

}


#Finner mu & sigma (hvis den ikke er gitt)
if(sigma == 0){
        sigma = sd(t.LC.diff)
}
delta = mean(t.LC.diff)

z = matrix(ncol = (k+1))
for(i in 1:m){
        #simulerer z og t
        z[1] = rnorm(1,0,(sigma/sqrt(1-a^2)))
        eps = rnorm(k)
        t[1,i] = 0
        for(j in 2:(k+1)){
                z[j] = a*z[j-1]+sigma*eps[j-1]
                t[j,i] = t[(j-1),i]+delta+z[j-1]
        }
}


#Finner estimat + øvre/nedre kvantil
t.kvant = matrix(ncol = 3, nrow = (k+1))

for( i in 1:(k+1)){
        t.kvant[i,1] = mean(t[i,])
        t.kvant[i,2] = quantile(t[i,], øvre)
        t.kvant[i,3] = quantile(t[i,],nedre)
}



if(plot == TRUE){
        #Plotter aldersparameterne
        dev.new()
        plot(ax, xlab = "Alder", ylab = "Aldersparameter", type = "l")

        #Plotter tidsparameterne
        dev.new()
        if(årnull == 1950){
                minimum = min(c(t.kvant[1:(sistedataår-årnull+1),],t.
                LC))
                maks = max(c(t.kvant[1:(sistedataår-årnull+1),],t.LC))
                +0.5

```

```
                        plot(1950:sistedataår,t.kvant[1:(sistedataår-årnull+1),1],ylim = c(minimum,maks), type='l', ylab = "Tidsvariabel", xlab = "År")
                        lines(1950:sistedataår,t.LC, lty = 2)
                        lines(1950:sistedataår,t.kvant[1:(sistedataår-årnull+1),2], lty = 5)
                        lines(1950:sistedataår, t.kvant[1:(sistedataår-årnull+1),3], lty = 5)
                        legend("topright",lty = c(1,5,2),c("Estimerte tidsvariabler","Estimerte konfidensintervall","Lee-Carter tidsvariablene"), bty = "n")
                }else{
                        minimum = min(t.kvant[1:(k+1),])
                        maks = max(t.kvant[1:(k+1),])+0.5

                        plot(sistedataår:(sistedataår+k),t.kvant[1:(k+1),1],ylim = c(minimum,maks), type='l', ylab = "Tidsvariabel", xlab = "År")
                        lines(sistedataår:(sistedataår+k),t.kvant[1:(k+1),2], lty = 5)
                        lines(sistedataår:(sistedataår+k), t.kvant[1:(k+1),3], lty = 5)
                        legend("topright",lty = c(1,5),c("Estimerte tidsvariabler","Estimerte konfidensintervall"), bty = "n")
                }

        }

        #Finner størrelsen dødligheten i år null skal ganges med
        ax.matrise = matrix(rep(t(ax),(k+1)),ncol = (k+1),nrow = 106)
        ax.matrise = t(ax.matrise)

        for( i in 1:3){
                t.matrise = matrix(rep(t(t.kvant[,i]),106),ncol = 106, nrow = (k+1))
                qxk[, ,i] = exp(ax.matrise*t.matrise)
        }


        #Simulerer dødligheten
        qx0 = data$qx[1:106]
        qx0.matrise = matrix(rep(t(qx0),(k+1)),ncol = (k+1), nrow = 106)
        qx0.matrise = t(qx0.matrise)
        qx0.matrise = qx0.matrise/(1-qx0.matrise)
        qx0.array = array(rep(qx0.matrise,3), dim = c((k+1),106,3))
        qxk = qxk*qx0.array
        qxk = qxk/(1+qxk)


}



#******* FUNKSJON FOR Å PLOTTE ESTIMERT+SANN DØDELIGHET FOR 2006,2007 eller 2008 *******
#*** Er bare aktuell funksjon når man har basisår til 1950 (ev 1997/1998 for F og J)***
plotEstimatSann = function(land,kjønn,q,a,årnull,farger, log, skrivUtQ){

if(årnull == 1950 || land == "F97" || land == "F97.80" || land =="J98" || land == "J98.80"){
        sistedataår = 2008

        if(land == "N"){
                if(kjønn == "K"){
```

```
			qxSann.data = read.table("Norge-kvinner-qx2008.csv", header = T)
			qxSann = qxSann.data$qx
		}else{
			qxSann.data = read.table("Norge-menn-qx2008.csv", header = T)
			qxSann = qxSann.data$qx
		}
	}

	if(land == "D"){
		if(kjønn == "K"){
			qxSann.data = read.table("Danmark-kvinner-qx2008.csv", header = T)
			qxSann = qxSann.data$qx
		}else{
			qxSann.data = read.table("Danmark-menn-qx2008.csv", header = T)
			qxSann = qxSann.data$qx
		}
	}

	if(land == "S"){
		if(kjønn == "K"){
			qxSann.data = read.table("Sverige-kvinner-qx2008.csv", header = T)
			qxSann = qxSann.data$qx
		}else{
			qxSann.data = read.table("Sverige-menn-qx2008.csv", header = T)
			qxSann = qxSann.data$qx
		}
	}

	if(land == "J" || land == "J98" || land == "J98.80"){
		if(kjønn == "K"){
			qxSann.data = read.table("Japan-kvinner-qx2008.csv", header = T)
			qxSann = qxSann.data$qx
		}else{
			qxSann.data = read.table("Japan-menn-qx2008.csv", header = T)
			qxSann = qxSann.data$qx
		}
	}


	if(land == "F" || land == "F97" || land == "F97.80"){
		sistedataår = 2007
		if(kjønn == "K"){
			qxSann.data = read.table("Frankrike-kvinner-qx2007.csv", header = T)
			qxSann = qxSann.data$qx
		}else{
			qxSann.data = read.table("Frankrike-menn-qx2007.csv", header = T)
			qxSann = qxSann.data$qx
		}
	}

	if(land == "I"){
		sistedataår = 2007
		if(kjønn == "K"){
			qxSann.data = read.table("Italia-kvinner-qx2007.csv", header = T)
			qxSann = qxSann.data$qx
```

```
			}else{
				qxSann.data = read.table("Italia-menn-qx2007.csv", header = T)
				qxSann = qxSann.data$qx
			}
		}


		if(land == "SP"){
			sistedataår = 2006
			if(kjønn == "K"){
				qxSann.data = read.table("Spania-kvinner-qx2006.csv", header = T)
				qxSann = qxSann.data$qx
			}else{
				qxSann.data = read.table("Spania-menn-qx2006.csv", header = T)
				qxSann = qxSann.data$qx
			}
		}


		if(land == "UK"){
			if(kjønn == "K"){
				qxSann.data = read.table("Storbritannia-kvinner-qx2008.csv", header = T)
				qxSann = qxSann.data$qx
			}else{
				qxSann.data = read.table("Storbritannia-menn-qx2008.csv", header = T)
				qxSann = qxSann.data$qx
			}
		}


		if(land == "USA"){
			sistedataår = 2007
			if(kjønn == "K"){
				qxSann.data = read.table("USA-kvinner-qx2007.csv", header = T)
				qxSann = qxSann.data$qx
			}else{
				qxSann.data = read.table("USA-menn-qx2007.csv", header = T)
				qxSann = qxSann.data$qx
			}
		}




		#Ser på forventning&CI for det siste året (2006,2007,2008)
		dev.new()

		if(land == "F97" || land == "F97.80" || land == "J98" || land == "J98.80"){
			antallår = 11
		}else{
			antallår = sistedataår-1950+1
		}

		alderfra = 0
		aldertil = 105
		alder = (alderfra+1):(aldertil+1)
		logmin = min(log(q[antallår,alder,1]),log(q[antallår,alder,2]),log(q[antallår,alder,3]),log(qxSann[alder]))
```

```
    logmaks = max(log(q[antallår,alder,1]),log(q[antallår,alder,2]),log(q[antallår,alder,3]),log(qxSann[alder]))
    minimum = min(q[antallår,alder,1],q[antallår,alder,2],q[antallår,alder,3],qxSann[alder])
    maks = max(q[antallår,alder,1],q[antallår,alder,2],q[antallår,alder,3],qxSann[alder])

    if(farger){

        if (log){
            plot(x[alder],log(q[antallår,alder,1]),ylim = c(logmin,logmaks), type = 'l', xlab = "Alder", ylab = "Dødelighet␣på␣logaritmisk␣skala")
            lines(x[alder], log(q[antallår,alder,2]),lty = 5, bty = "n", col = "grey30")
            lines(x[alder],log(q[antallår,alder,3]), lty = 5, bty = "n", col = "grey30")
            lines(x[alder],log(qxSann[alder]),col = "violetred1")
        }else{
            plot(x[alder],q[antallår,alder,1],ylim = c(minimum,maks), type = 'l', xlab = "Alder", ylab = "Dødelighet")
            lines(x[alder], q[antallår,alder,2],lty = 5, bty = "n", col = "grey30")
            lines(x[alder],q[antallår,alder,3], lty = 5, bty = "n", col = "grey30")
            lines(x[alder],qxSann[alder],col = "violetred1")

        }
        legend("topleft",lty = c(1,5,1),col= c("black","grey30","violetred1"),c(paste("Estimert␣dødelighet␣for␣",sistedataår,sep=""),"Estimerte␣konfidensintervall", paste("Korrekt␣dødelighet␣i␣",sistedataår,sep="")) ,bty = "n")
    }else{
        if(log){
            plot(x[alder],log(q[antallår,alder,1]),ylim = c(logmin,logmaks), type = 'l', xlab = "Alder", ylab = "Dødelighet␣på␣logaritmisk␣skala")
            lines(x[alder], log(q[antallår,alder,2]),lty = 5, bty = "n")
            lines(x[alder],log(q[antallår,alder,3]), lty = 5, bty = "n")
            lines(x[alder],log(qxSann[alder]),col = "grey50")

        }else{
            plot(x[alder],q[antallår,alder,1],ylim = c(minimum,maks), type = 'l', xlab = "Alder", ylab = "Dødelighet")
            lines(x[alder], q[antallår,alder,2],lty = 5, bty = "n")
            lines(x[alder],q[antallår,alder,3], lty = 5, bty = "n")
            lines(x[alder],qxSann[alder],col = "grey50")
        }
    legend("topleft",lty = c(1,5,1),col= c("black","black","grey50"),c(paste("Estimert␣dødelighet␣for␣",sistedataår,sep=""),"Estimerte␣konfidensintervall", paste("Korrekt␣dødelighet␣i␣",sistedataår,sep="")) ,bty = "n")
    }

    if(skrivUtQ){
        i = 0
        while(i<105){
            print(c(i,paste(q[antallår,(i+1),1],"␣[", q[antallår,(i+1),3], "," ,q[antallår,(i+1),2],"]␣")))
            print(c("Korrekt␣",i, qxSann[(i+1)]))
```

```
                    i = i+10
            }


        }


}
}

# ******* FUNKSJON FOR Å PLOTTE DØDLIGHETER *******

plotEstimatQ = function(q,k,årnull){

        x = 0:105
        dev.new()
        plot(x,q[(k+1),,1], type = 'l', xlab = "Alder", ylab = "Dødelighet")
        lines(x,q[1,,1], lty = 3, bty = "n")

        lines(x, q[(k+1),,2],lty = 5, bty = "n")
        lines(x,q[(k+1),,3], lty = 5, bty = "n")

        legend("topleft",lty = c(1,3,5),c(paste("Estimert dødelighet for ",årnull+k,sep=""),paste("Dødelighet i ",årnull,sep=""),"Estimerte konfidensintervall") ,bty = "n")

}

# ******* FUNKSJON FOR Å PLOTTE DØDLIGHETER *******
#                   AR og RW i samme figur

plotEstimatQ.sammen = function(qAR,qRW,k,årnull){

        x = 0:105
        dev.new()
        plot(x,qAR[(k+1),,1], type = 'l', xlab = "Alder", ylab = "Dødelighet")
        lines(x,qAR[1,,1], lty = 3, bty = "n")

        lines(x, qAR[(k+1),,2],lty = 5, bty = "n")
        lines(x,qAR[(k+1),,3], lty = 5, bty = "n")

        #points(x, qRW[(k+1),,1],lty = 1, bty = "n",col = "black")
        lines(x, qRW[(k+1),,2],lty = 10, bty = "n",col = "grey50")
        lines(x,qRW[(k+1),,3], lty = 10, bty = "n",col = "grey50")

        legend("topleft",lty = c(1,3,5,10),col = c("black","black","black","grey50"),c(paste("Estimert dødelighet for ",årnull+k,sep=""),paste("Dødelighet i ",årnull,sep=""),"Estimerte konfidensintervall ved autoregressiv modell","Estimerte konfidensintervall ved tilfeldig gang modell") ,bty = "n")

}


# ******* FUNKSJON FOR Å REGNE UT ENGANGSPREMIER *******

EngangsPremie = function(alder,Palder,q,rente,startTid,årnull){

        k = startTid - årnull + 1
        d = 1/(1+rente)
        maksalder = 105
        p = 1-q
        start = max(0,(Palder-alder))
        kp = matrix(ncol = (maksalder-alder-start+1))

        #Finner overlevelsessannsynlighetene
```

```
        kp[1] = p[start+k, start+alder+1]
        for(i in (start+1):(maksalder-alder)){
                kp[i-start+1] = kp[i-start]*p[i+k, alder+i+1]
        }

        EngangsPremie = sum(d**(start:(maksalder-alder))*kp)

}


# ******* FUNKSJON FOR Å PLOTTE ENGANGSPREMIER *******

plotEngangsPremier = function(startalder, Palder, q, rente, år, årnull){
        engangs = matrix(ncol = 86, nrow = 4)
        antall = length(q)/(106*3)

        q0 = t(matrix(rep(q[1,,1], antall), nrow = 106, ncol = antall))
        j = 20
        for(i in 20:104){
                engangs[1,i-19] = EngangsPremie(i, Palder, q[,,1], rente, år, årnull)
                engangs[2,i-19] = EngangsPremie(i, Palder, q[,,2], rente, år, årnull)
                engangs[3,i-19] = EngangsPremie(i, Palder, q[,,3], rente, år, årnull)
                engangs[4,i-19] = EngangsPremie(i, Palder, q0, rente, år, årnull) # Med konstant dødlighet

        if(j == 20){
                print(i)
                print(c(paste(engangs[1,i-19],"[",engangs[2,i-19],",",engangs[3,i-19],"]"),engangs[4,i-19]))
                j = j+10
        }
        j = j-1

        }

        dev.new()
        plot(20:105, engangs[3,], lty = 5, type = 'l', xlab = "Alder", ylab = "Engangspremie")
        lines(20:105, engangs[1,])
        lines(20:105, engangs[2,], lty = 5)
        lines(20:105, engangs[4,], lty = 2)

        legend("bottomleft", lty = c(1,5,2), c(paste("Estimert engangspremie i ", år, sep=""), "Konfidensintervall", paste("Estimert engangspremie i ", år, " med konstant dødelighet", sep="")), bty = "n")

}



# ******* FUNKSJON FOR Å REGNE UT NÅVERDIER *******

Nåverdi = function(alder, Palder, q, rente, startTid, årnull, plotPortefolje){
        k = startTid-årnull+1
        d = 1/(1+rente)
        maksalder = 105
        s = 1
        JJ = 10000
        l = 20:105
        gamma = 0.05

        p = 1-q
        kp = matrix(nrow = (maksalder-alder+2), ncol =(maksalder-alder+2))
```

```
        #Finner overlevelsessannsynlighetene
        kp[,1] = rep(1, (maksalder-alder+2))
        for(i in 1:(maksalder-alder+1)){
                for(j in 1:(maksalder-alder)){
                        if(alder+j+i <= 106){
                                kp[j,i+1] = kp[j,i]*p[i+k,alder+j+i]
                        }
                }

        }

        #Finner premie
        teller = sum(d**((Palder-alder):(maksalder-alder))*kp[1,(Palder-alder
        +1):(maksalder-alder+1)])
        nevner = sum(d**(0:(Palder-alder -1))*kp[1,1:(Palder-alder)])
        premie = s*teller/nevner

        #Lager en porteføljesammensetning
        c = JJ/(sum(exp(-gamma*abs(1-alder))))
        J = c*exp(-gamma*abs(1-alder))


        #Plotter aldersinndelingen i porteføljen
        if(plotPortefolje){
                dev.new()
                plot(20:105,J, xlab = "Alder", ylab = "Antall", type = "h")
        }

        X = matrix(rep(0,86),ncol = 86)

        for(i in 0:(maksalder-alder)){
                if(i < Palder-alder){
                        X[i+1] = -premie*sum(J[1:(Palder-alder-i)]*kp[1:(
                        Palder-alder-i),(i+1)])
                }
                start =  max(1,(Palder-alder-i+1))
                X[i+1] = X[i+1] + s*sum(J[start:(maksalder-alder-i+1)]*kp[
                start:(maksalder-alder-i+1),(i+1)])
        }

        Nåverdi = d^(0:(maksalder-alder))*X

}



# ******* FUNKSJON FOR Å PLOTTE NÅVERDIEN *******
plotNåverdi = function(alder,Palder,q,rente,startTid,årnull,skrivUt){
        antall = length(q)/(106*3)

        q0 = t(matrix(rep(q[1,,1],antall), nrow = 106,ncol = antall))

        nå = matrix(nrow = 4, ncol = 86)
        nå[1,] = Nåverdi(startalder,Palder,q[,,1],rente,startTid,årnull,T)
        nå[2,] = Nåverdi(startalder,Palder,q[,,2],rente,startTid,årnull,F)
        nå[3,] = Nåverdi(startalder,Palder,q[,,3],rente,startTid,årnull,F)
        nå[4,] = Nåverdi(startalder,Palder,q0,rente,startTid,årnull,F)

        dev.new()
        plot(0:85,nå[3,], type = '1',lty = 5, xlab = "Tid", ylab = "
        Forpliktelse")
        lines(0:85,nå[1,])
        lines(0:85, nå[2,], lty = 5)
        lines(0:85, nå[4,], lty = 3)
```

```
        legend("bottomright",lty = c(1,5,3),c("Estimert␣forpliktelse","
        Konfidensintervall","Estimert␣forpliktelse␣med␣konstant␣dødlighet") ,
        bty = "n")


        if(skrivUt == TRUE){
                print(c(sum(nå[1,]),sum(nå[2,]),sum(nå[3,]),sum(nå[4,])))
        }

}



# ******* FUNKSJON FOR BOOTSTRAP AV AR(1) *******
bootstrap = function(land,kjønn, metode){
        if(land == "N"){
                if(kjønn == "K"){
                        rekke = Norgetidsrekke.k
                }else{
                        rekke = Norgetidsrekke.m
                }
        }

        if(land == "D"){
                if(kjønn == "K"){
                        rekke = Danmarktidsrekke.k
                }else{
                        rekke = Danmarktidsrekke.m
                }
        }

        if(land == "S"){
                if(kjønn == "K"){
                        rekke = Sverigetidsrekke.k
                }else{
                        rekke = Sverigetidsrekke.m
                }
        }

        if(land == "J"){
                if(kjønn == "K"){
                        rekke = Japantidsrekke.k
                }else{
                        rekke = Japantidsrekke.m
                }
        }

        if(land == "J98"){
                if(kjønn == "K"){
                        rekke = Japantidsrekke.k1998
                }else{
                        rekke = Japantidsrekke.m1998
                }
        }

        if(land == "J98.80"){
                if(kjønn == "K"){
                        rekke = Japantidsrekke.k1998.80
                }else{
                        rekke = Japantidsrekke.m1998.80
                }
        }


        if(land == "F"){
                if(kjønn == "K"){
```

```
			rekke = Frankriketidsrekke.k
		}else{
			rekke = Frankriketidsrekke.m
		}
	}

	if(land == "F97"){
		if(kjønn == "K"){
			rekke = Frankriketidsrekke.k1997
		}else{
			rekke = Frankriketidsrekke.m1997
		}
	}

	if(land == "F97.80"){
		if(kjønn == "K"){
			rekke = Frankriketidsrekke.k1997.80
		}else{
			rekke = Frankriketidsrekke.m1997.80
		}
	}

	if(land == "I"){
		if(kjønn == "K"){
			rekke = Italiatidsrekke.k
		}else{
			rekke = Italiatidsrekke.m
		}
	}

	if(land == "SP"){
		if(kjønn == "K"){
			rekke = Spaniatidsrekke.k
		}else{
			rekke = Spaniatidsrekke.m
		}
	}

	if(land == "UK"){
		if(kjønn == "K"){
			rekke = Storbritanniatidsrekke.k
		}else{
			rekke = Storbritanniatidsrekke.m
		}
	}

	if(land == "USA"){
		if(kjønn == "K"){
			rekke = USAtidsrekke.k
		}else{
			rekke = USAtidsrekke.m
		}
	}


	fit = ar(rekke, aic = F, order.max = 1, demean = F, intercept = F, method = metode)
	a = fit$ar[1]
	sigma = sqrt(fit$var.pred)
	m = 100
	k = 58

	z = matrix(ncol = (k+1))
	a.boot = matrix(ncol = m)
	sigma.boot = matrix(ncol = m)

```

```
	for(i in 1:m){
		z[1,1] = rnorm(1,0,(sigma/(1-a^2)))
		eps = rnorm(k)
		for(j in 2:(k+1)){
			z[1,j] = a*z[1,j-1]+sigma*eps[j-1]
		}
		fit = ar(z[1,], aic = F, order.max = 1, demean = F, intercept = F, method = metode)
		a.boot[i] = fit$ar
		sigma.boot[i] = sqrt(fit$var.pred)
	}

	print(c("a: ",a))
	print(c("sigma:", sigma))

	print(c("Bootstrap a, mean:",mean(a.boot)))
	print(c("Bootstrap a, sd:",sd(a.boot[1,])))

	print(c("Bootstrap sigma, mean:",mean(sigma.boot)))
	print(c("Bootstrap sigma, sd:",sd(sigma.boot[1,])))

}




#plotLeeCarterInfo()



x = 0:105
k = 90
a = -0.4680
sigma = 0.1030  #Er denne null bruker jeg std til Lee-Carter variablene
land = "F97"    #D = Danmark, J = Japan (J97 = Japan(1950-1998), J97.80 = Japan(1980-1998)), N = Norge, S = Sverige F = Frankrike (F97 = Frankrike (1950-1997), F97.80 = Frankrike(1980-1997)), I = Italia, SP = Spania, UK = Storbritannia og USA = USA
kjønn = "M"  #K = kvinner, M = menn
m = 10000       #Antall MC-simuleringer
årnull = 2007 #MÅ være enten 1950 eller 2006,2007 eller 2008 (ut i fra hva som er siste dataår for landet)
plot = T #Brukes i qxk
farger = F #Brukes i plotEstimatSann
skrivUtQ = T  #Brukes i plotEstimatSann
log = F   #Brukes i plotEstimatSann


år = 2007 #Brukes i nåverdi + engangspremie
Palder = 67 #Pensjonsalder
rente = 0.03
startalder = 20
skrivUt = T #Brukes til nåverdier

#Estimerer AR(1)-modellen
metode = "mle"  #ols, yw, burg eller mle
bootstrap(land,kjønn, metode)


#Estimerer dødlighet
qAR = qxk(a,k,land,kjønn,m,0.975,0.025,sigma,årnull,plot)
qRW = qxk(0,k,land,kjønn,m,0.975,0.025,0,årnull,plot) #Sigma settes lik std til Lee-Carter estimatene

#Plotter dødlighet
```

```
plotEstimatSann(land,kjønn,qAR,a,årnull,farger, log, skrivUtQ)  #Er bare aktuell når årnull = 1950 (Ev 1997/1998 for Frankrike/Japan)
plotEstimatSann(land,kjønn,qRW,a,årnull,farger, log, skrivUtQ)  #Er bare aktuell når årnull = 1950 (Ev 1997/1998 for Frankrike/Japan)

plotEstimatQ(qAR,k,årnull)
plotEstimatQ(qRW,k,årnull)
plotEstimatQ.sammen(qAR,qRW,k,årnull)


#Plotter engangspremiene
plotEngangsPremier(startalder,Palder,qAR,rente,år,årnull)
plotEngangsPremier(startalder,Palder,qRW,rente,år,årnull)

#Finner Nåverdi / Plotter forpliktelse
plotNåverdi(startalder,Palder,qAR,rente,år,årnull,skrivUt)
plotNåverdi(startalder,Palder,qRW,rente,år,årnull,skrivUt)



#Plott av nedgangen i dødelighet hos 30 år gamle kvinner og menn (1950-2007)
dev.new()
Frankrikedod30.m = read.table("Frankrike-menn-q30.csv", header = T)$qx
Frankrikedod30.k = read.table("Frankrike-kvinner-q30.csv", header = T)$qx
minimum = min(c(Frankrikedod30.m,Frankrikedod30.k))
maks = max(c(Frankrikedod30.m,Frankrikedod30.k))
plot(1950:2007,Frankrikedod30.m,ylim = c(minimum,maks), xlab = "År", ylab = "Dødelighetsrate", type = "l")
lines(1950:2007,Frankrikedod30.k, lty = 2)
legend("topright",lty = c(1,2),c("Franske␣menn","Franske␣kvinner") ,bty = "n")


#Plotter aldersparameterne for franske menn i samme vindu
dev.new()
plot(0:105,Frankrikeald.m1997.80, ylim = c(-0.1,0.8), type = 'l', lty = 5)
lines(0:105, Frankrikeald.m1997, lty = 3)
lines(0:105,Frankrikeald.m)
legend("topright",lty = c(1,3,5),c("Datagrunnlag␣1950-2007","Datagrunnlag␣1950-1997","Datagrunnlag␣1980-1997") ,bty = "n")
```