

Universitetet i Oslo
Matematisk institutt

Homotopifikspunkter og Nielsen-teori

Ingrid Seem

Hovedfagsoppgave

17. september 2002



Forord

Denne oppgaven er den skriftlige delen av min cand.scient.-grad i matematikk ved Universitetet i Oslo. Oppgaven ble til i tidsrommet 2001-02 under engasjerende veiledning av professor Bjørn Jahren, som ofte har hatt tid til å snakke med meg utover i de sene ettermiddagstimer.

En takk går til alle mine medstudenter, spesielt de på lesesal B601, for hyggelig samvær.

Oslo, 17. september 2002

Ingrid Seem

Innhold

1	En tolkning av Reidemeister-tallet	9
2	Egenskaper for Reidemeister-trasen	19
3	En formel for Reidemeister-trasen	23
4	Utvidelse til endelige CW-komplekser	41

Innledning

Et fikspunkt for en selvavbildning $f : X \rightarrow X$ er et punkt $x \in X$ som oppfyller likningen $f(x) = x$. Mengden av alle fikspunkter for f kalles $Fix(f)$. I fikspunktteori studeres egenskapene til $Fix(f)$ for forskjellige X og f . Fikspunktene til f kan deles inn i klasser ved å se på løftningene til $f \circ p$, dvs avbildninger $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ slik at diagrammet

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X} \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

kommuterer, der \tilde{X} er universaloverdekningsrommet til X . Løftningsklassene $[\tilde{f}]$ til f defineres som konjugasjonsklassene til \tilde{f} med hensyn på fundamentalgruppen $\pi_1(X)$ til X , eller med andre ord $[\tilde{f}] = \{\alpha \tilde{f} \alpha^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(X)\}$. Undermengden $p(Fix(\tilde{f})) \subset Fix(f)$ kalles fikspunktklassen til f bestemt av løftningsklassen $[\tilde{f}]$. Denne er uavhengig av valg av representant \tilde{f} for $[\tilde{f}]$, se Teorem 1.8. Fikspunktklassene er disjunkte undermengder av $Fix(f)$, og deres union er $Fix(f)$. For visse $[\tilde{f}]$ kan fikspunktklassen $p(Fix(\tilde{f}))$ være tom.

I Nielsen-teori studeres tallene Reidemeister-tallet $R(f)$, Nielsen-tallet $N(f)$ og Lefschetz-tallet $L(f)$. $R(f)$ er det totale antallet fikspunktklasser, mens $N(f)$ er antallet essensielle fikspunktklasser, de som ikke forsvinner under homotopi. For en selvavbildning $f : X \rightarrow X$ på et endelig CW-kompleks eller mer generelt et rom hvis homologigrupper er endelig genererte og forsvinner i høye dimensjoner, er Lefschetz-tallet

$$L(f) = \sum_n (-1)^n \text{tr}(f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(X))$$

definert. Et velkjent teorem i fikspunktteori er Lefschetz' fikspunktteorem, som brukes til å vise eksistens av fikspunkter.

Lefschetz' fikspunktteorem. *La $f : X \rightarrow X$ være en avbildning som ovenfor. Enhver avbildning homotop med f har et fikspunkt dersom $L(f) \neq 0$.*

Nielsen-teori baserer seg på teorien for overdekningsrom. En alternativ måte er å bruke veier isteden for overdekningsrom til å definere fikspunkt-klassene. Det fins en inklusjon $Fix(f) \rightarrow \Lambda_f X$, hvor $\Lambda_f X$ er rommet av veier i X fra x til $f(x)$. Det viser seg at $R(f)$ er gitt ved antallet veikomponenter i $\Lambda_f X$. Vi tar for oss denne tolkningen av $R(f)$ i kapittel 1.

En videre generalisering av $R(f)$ kan gjøres. Reidemeister-trasen $\overline{R}(f)$ er et element i $H_0(\Lambda_f X)$. For å definere denne innføres begrepet fikspunktindeks, som vi vil gi en presis definisjon av i kapittel 2. Reidemeister-trasen $\overline{R}(f)$ avbildes på Lefschetz-tallet $L(f)$ ved avbildningen $H_0(\Lambda_f X) \rightarrow H_0(X)$ induisert ved avbildningen $\Lambda_f X \rightarrow X$ gitt ved $\phi \mapsto \phi(0)$. I kapittel 2 bevises egenskapene homotopiinvarians og kommutativitet av Reidemeister-trasen.

I kapittel 3 viser vi en formel for $\overline{R}(f)$ når $f : X \rightarrow X$ er en selvavbildning på en kompakt mangfoldighet X . Denne formelen gjør det enklere å bevise homotopiinvarians av $\overline{R}(f)$ uten bruk av fikspunktindeks. I kapittel 4 utvides formelen til å gjelde også for visse endelige CW-komplekser.

Kapittel 1

En tolkning av Reidemeister-tallet

En fibrasjon er definert som en avbildning $p : E \rightarrow B$ som har homotopiløftningsegenskapen med hensyn på alle rom. Avbildningen $p : E \rightarrow B$ har homotopiløftningsegenskapen med hensyn på et rom A dersom gitt en homotopi $h_t : A \rightarrow B$ og løftning $\tilde{h}_0 : A \rightarrow E$ av h_0 , dvs $p \circ \tilde{h}_0 = h_0$, så fins homotopi $\tilde{h}_t : A \rightarrow E$ som løfter h_t .

Med avbildning menes heretter en kontinuerlig avbildning. Funksjonsrommet X^Y er definert som rommet av avbildninger $Y \rightarrow X$, hvor X^Y er utstyrt med den kompakt-åpne topologien, det vil si at en sub-basis for topologien består av mengder $M(K, U)$ av avbildninger som tar en kompakt mengde $K \subset Y$ inn i en åpen mengde $U \subset X$. La I være intervallet $[0, 1]$. I tilfellet $Y = I$ får vi at X^I er rommet av veier i X .

Lemma 1.1. *Avbildningen*

$$X^I \rightarrow X$$

$$\gamma \mapsto \gamma(1)$$

er en fibrasjon.

Bevis. Gitt et topologisk rom Y med en homotopi $g_t : Y \rightarrow X$ og en løftning \tilde{g}_0 av g_0 . Dette betyr at $\tilde{g}_0(y)$ er en vei i X som slutter i $g_0(y)$.

$$\begin{array}{ccc} & X^I & \\ \tilde{g}_t \nearrow & \downarrow & \\ Y & \xrightarrow{g_t} & X \end{array} \quad \begin{array}{c} \gamma \\ \downarrow \\ \gamma(1) \end{array}$$

For å bevise at $X^I \rightarrow X$ har homotopiløftningsegenskapen, må vi finne en utvidelse av \tilde{g}_0 som løfter g_t . En mulig utvidelse er avbildningen $\tilde{g}_t(y) = \tilde{g}_0(y) \cdot \phi_t(y)$, der $\phi_t(y) = (s \mapsto g_{st}(y), s \in [0, 1])$. Med $f \cdot g$ menes sammensetningen av veier:

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ g(2s-1) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

□

Lemma 1.2. *Avbildningen*

$$X^I \longrightarrow X \times X$$

$$\gamma \longmapsto (\gamma(0), \gamma(1))$$

er en fibrasjon med fiber homotopiekvivalent med løkkerommet ΩX , rommet av veier i X som starter og slutter i et valgt basispunkt.

Bevis. Gitt et topologisk rom Y med en homotopi $f_t = (g_t, h_t) : Y \rightarrow X \times X$ og en løftning \tilde{f}_0 av f_0

$$\begin{array}{ccc} & & X^I \\ & \nearrow \tilde{f}_t & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f_t} & X \times X \end{array} \quad \begin{array}{c} \gamma \\ \downarrow \\ (\gamma(0), \gamma(1)) \end{array}$$

En mulig utvidelse er nå $\tilde{f}_t(y) = \psi_t(y) \cdot \tilde{f}_0(y) \cdot \phi_t(y)$, der $\psi_t(y) = (s \mapsto \bar{g}_{st}(y), s \in [0, 1])$, $\phi_t(y) = (s \mapsto h_{st}(y), s \in [0, 1])$. Dette er en vei i X fra $g_t(y)$ til $h_t(y)$. Med $\bar{g}_s(y)$ menes veien $g_s(y)$ traversert baklengs. Fiberen er homotopiekvivalent med ΩX siden

$$\begin{array}{ccc} \phi & \pi^{-1}(x_1, x_2) & = \{ \text{veier i } X \text{ fra } x_1 \text{ til } x_2 \} \\ \downarrow & \simeq \downarrow & \\ \phi \cdot \tau & \Omega X & \end{array}$$

er en homotopiekvivalens, der τ er en valgt vei fra x_2 til x_1 .

□

Definisjon 1.3. *Gitt en fibrasjon $p : E \rightarrow B$ og en avbildning $f : A \rightarrow B$, la*

$$f^*(E) = \{(a, e) \in A \times E \mid f(a) = p(e)\}$$

og la $\pi : f^*(E) \rightarrow A$ være gitt ved projeksjon på første faktor. Avbildningen $\pi : f^*(E) \rightarrow A$ er da en fibrasjon. Denne kalles den induuerte fibrasjonen til $E \rightarrow B$ ved f .

Definisjon 1.4. La $f : X \rightarrow X$ være en avbildning. La $\Lambda_f X$ være definert som

$$\Lambda_f X = \{\gamma : I \rightarrow X \mid \gamma(1) = f(\gamma(0))\}$$

med andre ord rommet av veier fra x til $f(x)$ for alle $x \in X$.

Lemma 1.5. Avbildningen

$$\Lambda_f X \longrightarrow X$$

$$\gamma \longmapsto \gamma(0)$$

er en fibrasjon.

Bevis. $\Lambda_f X \rightarrow X$ er induisert av fibrasjonen i Lemma 1.2 ved avbildningen $\Gamma_f : X \rightarrow X \times X$ gitt ved $x \mapsto (x, f(x))$.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \gamma \\ \downarrow \\ \gamma(0) \end{array} & \begin{array}{ccc} \Lambda_f X & \hookrightarrow & X^I \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\Gamma_f} & X \times X \end{array} & \begin{array}{c} \gamma \\ \downarrow \\ (\gamma(0), \gamma(1)) \end{array} \\ & x \longmapsto (x, f(x)) & \end{array}$$

□

La $Fix(f)$ være mengden av fikspunkter for avbildningen $f : X \rightarrow X$, dvs $Fix(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$. Da finnes en inklusjon $Fix(f) \rightarrow \Lambda_f X$, der vi ser på elementene i $Fix(f)$ som konstante veier i X . La heretter X være et veisammenhengende rom.

Definisjon 1.6. To fikspunkter $x, y \in X$ er i samme fikspunktklasse dersom det eksisterer en vei γ i X fra x til y s.a $f \circ \gamma \simeq \gamma$ relativt til endepunktene.

Proposisjon 1.7. Fikspunktene $x, y \in Fix(f)$ er i samme fikspunktklasse hvis og bare hvis den konstante veien i x og den konstante veien i y ligger i samme veikomponent av $\Lambda_f X$.

□

Et rom er lokalt veisammenhengende dersom ethvert punkt har en vilkårlig liten veisammenhengende omegn. Man sier dessuten at et rom X er semilokalt 1-sammenhengende dersom hvert punkt $x \in X$ har en omegn U slik at avbildningen $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ induisert ved inklusjonen er triviell.

La X være lokalt veisammenhengende og semilokalt 1-sammenhengende i tillegg til veisammenhengende, slik at universaloverdekningsrommet \tilde{X} kan konstrueres. For $f : X \rightarrow X$, la $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ være en løftning av $f \circ p$, dvs at $p \circ \tilde{f} = f \circ p$:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X} \\ p \downarrow & \circ & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Løftningsklassen $[\tilde{f}]$ for \tilde{f} defineres som konjugasjonsklassen til \tilde{f} med hensyn på $\pi_1(X)$, eller med andre ord $[\tilde{f}] = \{\alpha \tilde{f} \alpha^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(X)\}$, hvor $\pi_1(X)$ identifiseres med gruppen av dekktranslasjoner, altså løftninger av $id \circ p$.

Teorem 1.8. 1. $Fix(f) = \cup_{\tilde{f}} pFix(\tilde{f})$

2. $pFix(\tilde{f}) = pFix(\tilde{f}')$ hvis $[\tilde{f}] = [\tilde{f}']$

3. $pFix(\tilde{f}) \cap pFix(\tilde{f}') = \emptyset$ hvis $[\tilde{f}] \neq [\tilde{f}']$

Bevis. Se Jiang [5], kapittel I. □

Definisjon 1.6 gir en definisjon av ikke-tomme fikspunktklasser. Følgende definisjon er en utvidelse av dette begrepet:

Definisjon 1.9. *Delmengden $p(Fix(\tilde{f}))$ av $Fix(f)$ kalles fikspunktklassen til f bestemt av løftningsklassen $[\tilde{f}]$. La Reidemeister-tallet $R(f)$ være antallet slike fikspunktklasser. En fikspunktklasse kan godt være tom. Reidemeister-tallet teller både tomme og ikke-tomme fikspunktklasser.*

Proposisjon 1.10. *Hvis $f \simeq g$, så er $\Lambda_f X$ homotopiekvivalent med $\Lambda_g X$.*

Bevis. La $\{h_t\} : f \simeq g : X \rightarrow X$ være en homotopi fra f til g . Avbildningen

$$\begin{aligned} F : \Lambda_f X &\rightarrow \Lambda_g X \\ \phi &\mapsto \phi \cdot \{t \mapsto h_t(\phi(0))\} \end{aligned}$$

og avbildningen

$$\begin{aligned} G : \Lambda_g X &\rightarrow \Lambda_f X \\ \psi &\mapsto \psi \cdot \{t \mapsto h_t(\psi(0))\} \end{aligned}$$

er homotopiinverser; $G \circ F \simeq id_{(\Lambda_f X)}$ og $F \circ G \simeq id_{(\Lambda_g X)}$. □

Lemma 1.11. *Hvis $\pi_1(X) = 0$, så er $\Lambda_f X$ veisammenhengende.*

Bevis. Fiberen til $\Lambda_f X \rightarrow X$ er homotopiekvivalent med ΩX . Denne er veisammenhengende når $\pi_0(X) = 0$. Basisrommet X er veisammenhengende, dermed er totalrommet $\Lambda_f X$ også veisammenhengende. \square

Teorem 1.12. *La X være et veisammenhengende og lokalt veisammenhengende rom. Da fins en 1-1-korrespondanse mellom løftningsklasser for f og veikomponenter i $\Lambda_f X$, dermed er $R(f) = \#\pi_0(\Lambda_f X)$*

Bevis: Det skal vises at det til hver veikomponent av $\Lambda_f X$ svarer en $\Lambda_{[\tilde{f}]} \tilde{X}$, hvor $\Lambda_{[\tilde{f}]} \tilde{X}$ er isomorfiklassen som inneholder rommet $\Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X}$, der $\Lambda_{\tilde{f}_1} \tilde{X}$ er isomorf med $\Lambda_{\tilde{f}_2} \tilde{X}$ dersom $\tilde{f}_1 = \gamma \circ \tilde{f}_2 \circ \gamma^{-1}$ for en dekktranslasjon $\gamma \in \pi_1(\tilde{X})$, der \tilde{f}_1 og \tilde{f}_2 er løftninger av f . En induisert avbildning $p_* : \Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X} \rightarrow \Lambda_f X$ er gitt ved at veiene i $\Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X}$ komponeres med p , og vi har et kommutativt diagram:

$$\begin{array}{ccccc} & & \Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X} & \xrightarrow{p_*} & \Lambda_f X & & \\ & \gamma \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \gamma \downarrow & \\ & \gamma(0) & \tilde{X} & \xrightarrow{p} & X & \gamma(0) & \end{array}$$

De følgende tre punkter skal vises:

1. Det finnes en 1-1-korrespondanse $F : \Lambda_{\tilde{f}_1} \tilde{X} \rightarrow \Lambda_{\tilde{f}_2} \tilde{X}$ dersom $\tilde{f}_1 = \gamma \circ \tilde{f}_2 \circ \gamma^{-1}$ for en dekktranslasjon $\gamma \in \pi_1(\tilde{X})$, der \tilde{f}_1 og \tilde{f}_2 er løftninger av f . Dette gir oss veldefinerte isomorfiklasser $\Lambda_{[\tilde{f}]} \tilde{X}$ av rom $\Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X}$.
2. $\Lambda_{\tilde{f}_1} \tilde{X}$ og $\Lambda_{\tilde{f}_2} \tilde{X}$ avbildes på samme veikomponent i $\Lambda_f X$ hvis og bare hvis $\tilde{f}_1 = \gamma \circ \tilde{f}_2 \circ \gamma^{-1}$.
3. Alle veikomponenter i $\Lambda_f X$ treffes av en $p_* : \Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X} \rightarrow \Lambda_f X$ for en passende løftning $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$.

Bevis for 1: Avbildningen $F : \Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X} \rightarrow \Lambda_{\gamma \tilde{f} \gamma^{-1}} \tilde{X}$ gitt ved $F(\phi) = \gamma \circ \phi$, der $\phi \in \Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X}$ er en vei fra \tilde{x} til $\tilde{f}(\tilde{x})$, er veldefinert siden $F(\phi)(1) = \gamma(\phi(1)) = \gamma(\tilde{f}(\tilde{x}))$. Setter $y = \gamma(\tilde{x})$. Da er $F(\phi)(0) = y$, $F(\phi)(1) = \gamma \tilde{f} \gamma^{-1}(y)$. F har dessuten en invers G gitt ved $G(\phi) = \gamma^{-1} \circ \phi$.

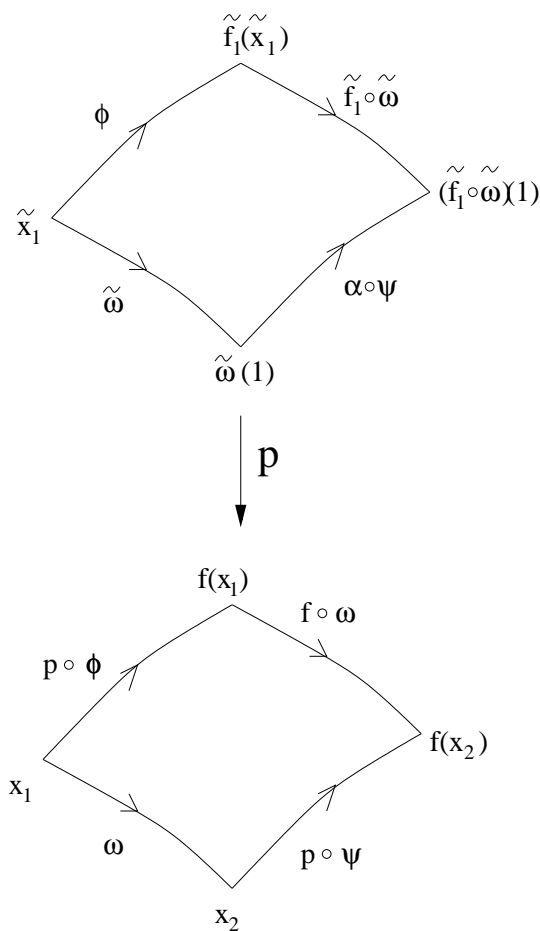
Bevis for 2: Anta $\tilde{f}_1 \gamma = \gamma \tilde{f}_2$. La $\phi \in \Lambda_{\tilde{f}_1} \tilde{X}$ være en vei i \tilde{X} fra \tilde{x}_1 til $\tilde{f}_1(\tilde{x}_1)$. $p_*(F(\phi)) = p \circ F(\phi) = p \circ \gamma \circ \phi = p \circ \phi = p_*(\phi)$, dermed kommuterer

diagrammet

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{\tilde{f}_2} \tilde{X} & & \\ \downarrow F & \searrow p_* & \\ \Lambda_{\tilde{f}_1} \tilde{X} & \xrightarrow{p_*} & \Lambda_f X \end{array}$$

og siden F er 1-1 (ved punkt 1), vil $p_*(\Lambda_{\tilde{f}_1} \tilde{X}) = p_*(\Lambda_{\tilde{f}_2} \tilde{X})$, og $\Lambda_{\tilde{f}_1} \tilde{X}$ og $\Lambda_{\tilde{f}_2} \tilde{X}$ avbildes på samme veikomponent i $\Lambda_f X$ siden $\Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X}$ er et veisammenhengende rom for alle løftninger \tilde{f} ved Lemma 1.11.

Anta motsatt at $\Lambda_{\tilde{f}_1} \tilde{X}$ og $\Lambda_{\tilde{f}_2} \tilde{X}$ avbildes på samme veikomponent i $\Lambda_f X$. La $\phi \in \Lambda_{\tilde{f}_1} \tilde{X}$ være en vei i \tilde{X} fra \tilde{x}_1 til $\tilde{f}_1(\tilde{x}_1)$ og la $\psi \in \Lambda_{\tilde{f}_2} \tilde{X}$ være en vei i \tilde{X} fra \tilde{x}_2 til $\tilde{f}_2(\tilde{x}_2)$. Da er $p \circ \phi$ en vei fra x_1 til $f(x_1)$ og $p \circ \psi$ en vei fra x_2 til $f(x_2)$. Ved antagelsen vet vi at det fins en homotopi $\{h_t\} : p \circ \phi \simeq p \circ \psi$ med $f(h_t(0)) = h_t(1)$. La $\omega = \{t \mapsto h_t(0)\}$. Da er $f \circ \omega = \{t \mapsto h_t(1)\}$. Når $\{h_t\}$ løftes til en homotopi $\{\tilde{h}_t\}$ som starter i ϕ vil den andre enden bli en eller annen løftning av $p \circ \psi$. Denne kan skrives $\alpha \circ \psi$ for en eller annen $\alpha \in \pi_1(X)$.



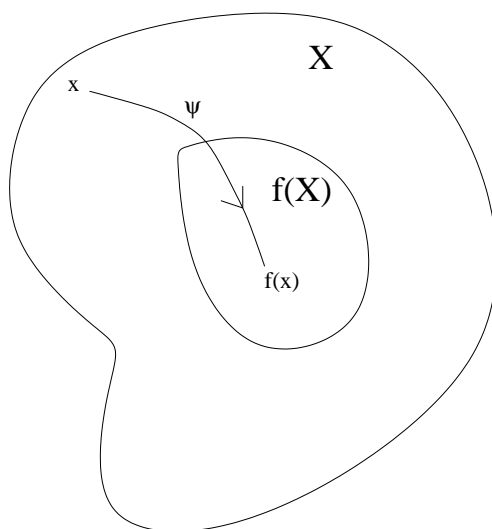
Av figuren ser vi at $\alpha \circ \psi(0) = \tilde{\omega}(1)$ og $\alpha \circ \psi(1) = \tilde{f}_1 \circ \tilde{\omega}(1) = \tilde{f}_1(\tilde{\omega}(1))$. Siden $\psi(0) = \tilde{x}_2$ og $\psi(1) = \tilde{f}(\tilde{x}_2)$ er dermed $\alpha(\tilde{x}_2) = \tilde{\omega}(1)$ og $\alpha \circ \tilde{f}_2(\tilde{x}_2) = \tilde{f}_1(\tilde{\omega}(1)) = \tilde{f}_1 \circ \alpha(\tilde{x}_2)$. Dermed er $\alpha \circ \tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 \circ \alpha$ ved entydig veiløftnings-egenskap for overdekningsrommet $\tilde{X} \rightarrow X$.

Bevis for 3: La $\phi \in \Lambda_f X$ være en vei i X fra x til $f(x)$. Anta at et basispunkt \tilde{x} i fiberen $p^{-1}(x)$ er valgt. Da fins en entydig vei $\tilde{\phi}$ i \tilde{X} med $\tilde{\phi}(0) = \tilde{x}$. Siden $\tilde{\phi}$ løfter ϕ er $\tilde{\phi}(1) \in p^{-1}(f(x))$. La $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ være en valgt løftning av $f \circ p$. La α være dekktranslasjonen som avbilder $\tilde{f}(\tilde{x})$ på $\tilde{\phi}(1)$. Da er $\tilde{\phi} \in \Lambda_{\alpha \circ \tilde{f}} \tilde{X}$.

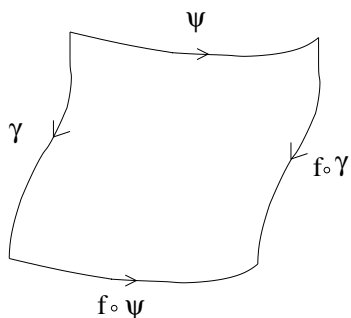
□

Lemma 1.13. $\pi_0(\Lambda_f X) \approx \pi_0(\Lambda_{f|f(X)} f(X))$

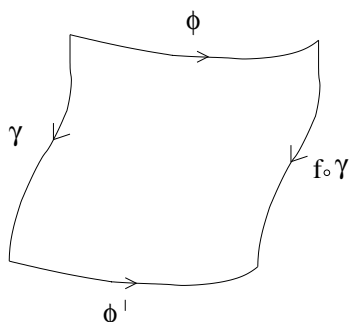
Bevis. Det fins en inklusjonsavbildning $i : \Lambda_{f|f(X)} f(X) \rightarrow \Lambda_f X$. Denne inducerer en avbildning $i_* : \pi_0(\Lambda_{f|f(X)} f(X)) \rightarrow \pi_0(\Lambda_f X)$. For å vise at denne er surjektiv, la $[\psi] \in \pi_0(\Lambda_f X)$ være representert ved en vei ψ i X fra x til $f(x)$.



$[\psi] = [f \circ \psi]$ som elementer i $\pi_0(\Lambda_f X)$ dersom det fins en vei γ fra $\psi(0)$ til $f \circ \psi(0)$ slik at $\gamma \simeq \psi \cdot (f \circ \gamma) \cdot (f \circ \psi)$ i X relativt til endepunktene.



Dette oppnås ved å velge $\gamma = \psi$, dermed kan ethvert element i $\pi_0(\Lambda_f X)$ representeres ved en vei i $f(X)$ fra x til $f(x)$. For injektivitet, anta at $i_*[\phi] = i_*[\phi']$, for $[\phi], [\phi'] \in \pi_0(\Lambda_{f|f(X)} f(X))$. Dette betyr at det fins en vei γ i X slik at $\gamma \simeq \phi \cdot (f \circ \gamma) \cdot \overline{\phi'}$ i X relativt til endepunktene.



Men da er også $f \circ \gamma \simeq (f \circ \phi) \cdot (f \circ f \circ \gamma) \cdot (f \circ \overline{\phi'})$. Dermed er $[f \circ \phi] = [f \circ \phi']$ som elementer i $\pi_0(\Lambda_{f|f(X)} f(X))$. Men $[f \circ \phi] = [\phi]$ og $[f \circ \phi'] = [\phi']$, dermed er $[\phi] = [\phi']$, og i_* er injektiv. □

Eksempel 1.14. La $f : X \rightarrow X$ være den konstante avbildningen, dvs $f(x) = x_0$ for alle $x \in X$. Da er $R(f) = \#\pi_0(\Lambda_f X) = \#\pi_0(\Lambda_{f x_0}) = 1$.

Definisjon 1.15. La $f : X \rightarrow X$ være en avbildning og la $\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ være gitt ved $\Phi([\gamma]) = [\gamma_0 \cdot (f \circ \gamma) \cdot \overline{\gamma_0}]$ der γ_0 er en valgt vei i X fra x_0 til $f(x_0)$. La $[g_1] \sim [g_2]$ dersom det fins $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ slik at $[g_1] = [\gamma][g_2]\Phi([\overline{\gamma}])$. Klassene under denne ekvivalensrelasjonen kalles Φ -konjugasjonsklasser.

Teorem 1.16. $R(f) = \#\pi_1(X, x_0) / \sim$, der \sim er ekvivalensrelasjonen som identifiserer elementer i samme Φ -konjugasjonsklasse.

Bevis. Det fins en 1-1-korrespondanse

$$\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_0(F)$$

$$[\phi] \longmapsto [\phi \cdot \gamma_0]$$

der γ_0 er en valgt vei fra x_0 til $f(x_0)$ og der $F = p^{-1}(x_0)$ er fiberen til $p : \Lambda_f X \rightarrow X$. Dermed er $\# \pi_1(X, x_0) / \sim = \# \pi_0(F) / \sim$ der ekvivalensrelasjonen på $\pi_0(F)$ er definert ved $[\psi_1] \sim [\psi_2]$ hvis og bare hvis $[\psi_1] = [\gamma \cdot \psi_2 \cdot \overline{(f \circ \gamma)}]$ for en $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$. Dette er ekvivalent med at $[\psi_1] = [\psi_2]$ som elementer i $\pi_0(\Lambda_f X)$, dermed er $\# \pi_0(F) / \sim = \# \pi_0(\Lambda_f X)$, og resultatet følger fra Teorem 1.12. \square

Eksempel 1.17. La $f : S^1 \rightarrow S^1$ ha grad d . Ved et teorem av Hopf er $f \simeq g$, der $g(z) = z^d$, dermed er $\Lambda_f S^1 \simeq \Lambda_g S^1$ ved Proposisjon 1.10. For enkelhets skyld kan vi sette $x_0 = 1$ og $\gamma_0 = 1$ (den konstante avbildningen).

La $[\alpha] \in \pi_1(S^1, 1) \approx \mathbb{Z}$. Denne kan representeres ved $\alpha_n(t) = e^{2\pi i n t}$ for en eller annen $n \in \mathbb{Z}$. Da er $[\gamma \cdot \alpha \cdot \overline{\Phi^{-1}(\gamma)}] = [\gamma \cdot \alpha \cdot \gamma_0 \cdot \overline{(f \circ \gamma)} \cdot \overline{\gamma_0}] = [\gamma \cdot \alpha \cdot \overline{(f \circ \gamma)}]$ siden γ_0 er den konstante veien. La $[\gamma]$ være representert ved $\gamma_k(t) = e^{2\pi i k t}$. Da er $\gamma \cdot \alpha \cdot \overline{(f \circ \gamma)} \simeq (t \mapsto e^{2\pi i k t}) \cdot (t \mapsto e^{2\pi i n t}) \cdot \overline{(t \mapsto e^{2\pi i d k t})} \simeq (t \mapsto e^{2\pi i (n + (1-d)k t})}$. Dermed er $R(f) = \# \mathbb{Z} / (1-d)\mathbb{Z} = |1-d|$ for $d \neq 1$ og ∞ for $d = 1$.

Proposisjon 1.18. La \tilde{f} være en løftning av $f \circ p$. Da er

$$\Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X} \xrightarrow{p_*} p_*(\Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X}) \subset \Lambda_f X$$

et overdekningsrom, der p_* er avbildningen som komponerer veiene i $\Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X}$ med p .

Bevis: $\Lambda_f X$ ses på som et underrom av X^I med kompakt-åpen topologi, det vil si at en basis for topologien består av mengder $\cap_{i=1}^n M(K_i, U_i)$, der $M(K_i, U_i)$ er mengden av avbildninger som tar en lukket mengde K_i inn i en åpen mengde $U_i \subset X$. La $\{U_i\}$ være overdekningen av X gitt ved overdekningsrommet \tilde{X} . La $V_i \subset \Lambda_f X$ være mengden av alle veier som starter i U_i . Da er V_i åpen i den kompakt-åpne topologien siden $V_i = \cup_{n \in \mathbb{N}} M([0, 1/n], U_i)$, som er en union av åpne mengder.

La \tilde{U}_i^α være mengdene som avbildes homeomorft ned på U_i ved p , og la $\tilde{V}_i^\alpha = \{\gamma \in \Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X} \mid \gamma(0) \in \tilde{U}_i^\alpha\}$. Avbildningen $\tilde{V}_i^\alpha \rightarrow V_i$ gitt ved komposisjon med p er en 1-1 på grunn av entydig veiløftningsegenskap i $\tilde{X} \rightarrow X$. Det gjenstår å vise at den er kontinuerlig og har kontinuerlig invers.

De åpne mengdene i \tilde{V}_i^α er gitt på formen $M(K, A) \cap \tilde{V}_i^\alpha$, der $K \subset I$ er et lukket intervall og $A \subset \tilde{X}$ er en åpen mengde. Bildet av denne mengden er $M(K, p(A)) \cap V_i$, som er åpen i V_i . Motsatt, la $M(K, A)$ være mengden av

avbildninger som tar et lukket intervall $K \subset I$ på en åpen mengde $A \subset X$. Inversbildet av denne i \tilde{V}_i^α er $M(K, p^{-1}(A)) \cap \tilde{V}_i^\alpha$ som er åpen i \tilde{V}_i^α . \square

Kapittel 2

Egenskaper for Reidemeister-trasen

La X være en kompakt n -mangfoldighet. I tillegg til Reidemeister-tallet $R(f)$ til en avbildning $f : X \rightarrow X$, $R(f) \in \mathbb{Z}$ kan Reidemeister-trasen $\overline{R}(f)$ defineres som et element i mengden $\mathbb{Z}\pi_0(\Lambda_f X)$, dersom f antas å ha bare isolerte fikspunkter. Før dette kan gjøres må begrepet fikspunktindeks defineres. La $x \in X$ være et isolert fikspunkt for f . En sfære S_x^{n-1} med sentrum i x kan velges liten nok til å ekskludere andre fikspunkter. På S_x^{n-1} er $x - f(x) \neq 0$, så et retningsfelt $\phi : S_x^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, $\phi(x) = (x - f(x))/(|x - f(x)|)$ er definert.

Definisjon 2.1. $index(f, x) = deg\phi$

Fikspunktindeks til f i fikspunktklassen $[\gamma] \in \pi_0(\Lambda_f X)$ er definert ved $index(f, [\gamma]) = \sum_{x_j} index(f, x_j)$, sum over alle x_j slik at $[\phi_{x_j}] = [\gamma]$ der ϕ_{x_j} er den konstante veien i x_j .

Definisjon 2.2. La $f : X \rightarrow X$. Reidemeister-trasen $\overline{R}(f)$ til f er definert som:

$$\overline{R}(f) = \sum_{[\gamma] \in \pi_0(\Lambda_f X)} index(f, [\gamma])[\gamma] \in \mathbb{Z}\pi_0(\Lambda_f X)$$

Vi definerer så korrespondanse mellom fikspunktklasser.

Definisjon 2.3. Fikspunktklassen $[\gamma] \in \pi_0(\Lambda_{F_0} X)$ korresponderer med $[\psi] \in \pi_0(\Lambda_{F_1} X)$ via F_t dersom $F_t : F_0 \simeq F_1 : X \rightarrow X$ er en homotopi slik at $[\psi] = [\gamma \cdot F_t(\gamma(0))]$. Ved Proposisjon 1.10 er $\pi_0(\Lambda_{F_0} X) \approx \pi_0(\Lambda_{F_1} X)$.

Teorem 1.12 sier at det til hver fikspunktklasse $[\gamma]$ svarer en løftningsklasse $[\tilde{F}_0]$. Definisjon 2.3 er ekvivalent med at $[\tilde{F}_0]$ korresponderer med $[\tilde{F}_1]$ dersom

det eksisterer en homotopi $F_t : F_0 \simeq F_1 : X \rightarrow X$ som lar seg løfte til en homotopi $\tilde{F}_t : \tilde{F}_0 \simeq \tilde{F}_1 : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{\gamma} & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & \Lambda_{[\tilde{F}_0]} \tilde{X} & \xrightarrow{p_*} & \Lambda_{F_0} X & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 \tilde{\gamma} \cdot \tilde{F}_t(\tilde{\gamma}(0)) & \Lambda_{[\tilde{F}_1]} \tilde{X} & \xrightarrow{p_*} & \Lambda_{F_1} X & \\
 & & & & \downarrow \gamma \\
 & & & & \gamma \cdot F_t(\gamma(0))
 \end{array}$$

Da er $\text{index}(F_0, [\gamma]) = \text{index}(F_1, [\gamma \cdot F_t(\gamma(0))])$, se Jiang [5]. Det neste resultatet sier at Reidemeister-trasen er en homotopiinvariant.

Teorem 2.4. *La $F_t : F_0 \simeq F_1 : X \rightarrow X$ være en homotopi. Da er $\overline{R}(F_1) = \tilde{\Theta}(\overline{R}(F_0))$, der $\tilde{\Theta} : \mathbb{Z}\pi_0(\Lambda_{F_0} X) \rightarrow \mathbb{Z}\pi_0(\Lambda_{F_1} X)$ er isomorfien induisert ved homotopiekvivalensen $\Lambda_{F_0} X \simeq \Lambda_{F_1} X$ i Proposisjon 1.10.*

Bevis. Trasene $\overline{R}(F_0)$ og $\overline{R}(F_1)$ er gitt ved

$$\overline{R}(F_0) = \Sigma_{[\gamma] \in \pi_0(\Lambda_{F_0} X)} \text{index}(F_0, [\gamma])[\gamma] \in \mathbb{Z}\pi_0(\Lambda_{F_0} X)$$

$$\overline{R}(F_1) = \Sigma_{[\gamma] \in \pi_0(\Lambda_{F_1} X)} \text{index}(F_1, [\gamma])[\gamma] \in \mathbb{Z}\pi_0(\Lambda_{F_1} X)$$

Vi har en homotopiekvivalens

$$\Lambda_{F_0} X \longrightarrow \Lambda_{F_1} X$$

$$\gamma \longmapsto \gamma \cdot F_t(\gamma(0))$$

som vist i Proposisjon 1.10. Denne induserer en isomorfi $\Theta : \pi_0(\Lambda_{F_0} X) \rightarrow \pi_0(\Lambda_{F_1} X)$. Dermed er

$$\overline{R}(F_1) = \Sigma_{[\gamma] \in \pi_0(\Lambda_{F_0} X)} \text{index}(F_1, [\gamma \cdot F_t(\gamma(0))])[\gamma \cdot F_t(\gamma(0))]$$

Men $\text{index}(F_1, [\gamma \cdot F_t(\gamma(0))]) = \text{index}(F_0, [\gamma])$ siden $[\gamma \cdot F_t(\gamma(0))]$ korresponderer med $[\gamma]$ via F_t . Dermed får vi at

$$\overline{R}(F_1) = \Sigma_{[\gamma] \in \pi_0(\Lambda_{F_0} X)} \text{index}(F_0, [\gamma])[\gamma \cdot F_t(\gamma(0))] = \tilde{\Theta}(\overline{R}(F_0))$$

der $\tilde{\Theta} : \mathbb{Z}\pi_0(\Lambda_{F_0} X) \rightarrow \mathbb{Z}\pi_0(\Lambda_{F_1} X)$ er gitt ved $\Sigma n_i[\phi_i] \mapsto \Sigma n_i\Theta[\phi_i]$. □

Enhver selvavbildning $f : X \rightarrow X$ induserer en avbildning $f_{\#} : \Lambda_f X \rightarrow \Lambda_f X$, som er gitt ved komposisjon med f . Denne induserer igjen en avbildning $f_{*} : \pi_0(\Lambda_f X) \rightarrow \pi_0(\Lambda_f X)$ gitt ved $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$.

Lemma 2.5. *Enhver selvaabildning $f : X \rightarrow X$ induserer identiteten på $\pi_0(\Lambda_f X)$*

Bevis. La $[\gamma] \in \pi_0(\Lambda_f X)$. Da er $[\gamma] = [f \circ \gamma]$ siden diagrammet

$$\begin{array}{ccccc}
 & f(x) & & f \circ \gamma & & f \circ f(x) \\
 & \downarrow \omega & & \downarrow f \circ \omega & & \\
 & x & & \gamma & & f(x)
 \end{array}$$

lar seg utvide ved å velge $\omega = \gamma$.

□

Resultatet ovenfor betyr at hvis vi har avbildninger $r : X \rightarrow Y$ og $s : Y \rightarrow X$, så vil de indusere en 1-1-korrespondanse mellom $\pi_0(\Lambda_{s \circ r} X)$ og $\pi_0(\Lambda_{r \circ s} Y)$:

$$\pi_0(\Lambda_{s \circ r} X) \xrightarrow{r_*} \pi_0(\Lambda_{r \circ s} Y) \xrightarrow{s_*} \pi_0(\Lambda_{s \circ r} X)$$

siden $s_* \circ r_* = id$ og $r_* \circ s_* = id$. Dette gir oss kommutativitet av Reidemeister-trasen:

Teorem 2.6. *For to avbildninger $r : X \rightarrow Y$ og $s : Y \rightarrow X$ er $r_* \overline{R}(s \circ r) = \overline{R}(r \circ s)$*

Bevis. Reidemeister-trasen til den sammensatte avbildningen $s \circ r$ er gitt ved $\overline{R}(s \circ r) = \sum_{[\gamma] \in \pi_0(\Lambda_{s \circ r} X)} index(s \circ r, [\gamma])[\gamma]$. Ved å anvende r_* på dette får vi

$$r_* \overline{R}(s \circ r) = \sum_{[\gamma] \in \pi_0(\Lambda_{s \circ r} X)} index(s \circ r, [\gamma])[r\gamma]$$

Vi setter $[\psi] = [r\gamma]$, slik at $[s\psi] = [\gamma]$

$$= \sum_{[\psi] \in \pi_0(\Lambda_{r \circ s} Y)} index(s \circ r, [s\psi])[\psi]$$

men $index(s \circ r, [s\psi]) = index(r \circ s, [\psi])$, se Jiang [5].

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{[\psi] \in \pi_0(\Lambda_{r \circ s} Y)} index(r \circ s, [\psi])[\psi] \\
 &= \overline{R}(r \circ s)
 \end{aligned}$$

□

Siden $H_0(X)$ er den frie gruppen generert av veikomponentene til X , kan vi identifisere $\mathbb{Z}\pi_0(X)$ kanonisk med $H_0(X)$. Dermed kan vi se på $\overline{R}(f)$ som et element i $H_0(\Lambda_f X)$ i stedet for i $\mathbb{Z}\pi_0(\Lambda_f X)$. Vi vil nå ta for oss to eksempler hvor vi ser på de samme avbildningene som vi så på i kapittel 1, nemlig $f : X \rightarrow X$ den konstante avbildningen, og $f : S^1 \rightarrow S^1$ en avbildning av grad d .

Eksempel 2.7. La $f : X \rightarrow X$ være den konstante avbildningen gitt ved $f(x) = x_0$ for alle $x \in X$. Da er x_0 det eneste fikspunktet for f , og $index(f, x_0) = deg\phi$, der ϕ er retningsfeltet $\phi(x) = (x - f(x))/(|x - f(x)|)$ definert på en sfære om x_0 . Her blir $deg\phi = 1$, og $\Lambda_f X$ er veisammenhengende, dermed er $\overline{R}(f) = 1 \in H_0(\Lambda_f X) \approx \mathbb{Z}$.

Eksempel 2.8. La $f : S^1 \rightarrow S^1$ være en avbildning av grad d . Da vet vi at $f \simeq g$, der $g(z) = z^d$, dermed er $\Lambda_f S^1 \simeq \Lambda_g S^1$. Når $d = 1$ er f homotop med en avbildning uten fikspunkter. En slik homotopi framkommer ved at vi foretar en rotasjon ved en liten vinkel θ . Dermed er $\overline{R}(f) = 0$ i dette tilfellet. For $d = 0$ har vi tilfellet i forrige eksempel, og $\overline{R}(f) = 1 \in H_0(\Lambda_f X) \approx \mathbb{Z}$. For $d = -1$ har g to fikspunkter som kan kalles -1 og 1 . I dette tilfellet er $index(g, 1) = index(g, -1) = 1$ og $\overline{R}(f) = (1, 1) \in H_0(\Lambda_f X) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

For $d > 1$ er $index(g, z) = -1$, der z er fikspunktene for g , med andre ord løsningene av likningen $z^d = z$. Disse kan uttrykkes på formen $z = e^{2\pi ik/(d-1)}$ for $k = 0, \dots, (d-2)$, dermed er $\overline{R}(f) = (-1, -1, \dots, -1) \in H_0(\Lambda_f X)$ som er isomorf med den direkte sum av $|1 - d|$ kopier av \mathbb{Z} , mens for $d < -1$ er $index(g, z) = 1$, og $\overline{R}(f) = (1, 1, \dots, 1) \in H_0(\Lambda_f X)$.

Kapittel 3

En formel for Reidemeister-trasen

La $\pi : E \rightarrow B$ være en orientert q -diskbunt. For hver fiber F er vi gitt en generator $\mu_F \in H^q(F, F_0; \mathbb{Q}) \approx \mathbb{Q}$. Med E_0 menes komplementet til nullseksjonen, og med F_0 menes $E_0 \cap F$. Koeffisientene i homologi og kohomologi er heretter \mathbb{Q} dersom ingenting annet er angitt. Vi ser nå på $\overline{R}(f)$ som et element i $H_0(\Lambda_f X; \mathbb{Q})$ via den naturlige avbildningen $H_0(\Lambda_f X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(\Lambda_f X; \mathbb{Q})$. Vi vil få bruk for følgende teorem.

Thoms isomorfitheorem 3.1. *Det fins en og bare en kohomologiklasse $U \in H^q(E, E_0)$ hvis restriksjon til (F, F_0) er lik μ_F for hver fiber F . Denne klassen kalles Thom-klassen til $\pi : E \rightarrow B$. Følgende avbildning er en isomorfi*

$$H^j(B) \xrightarrow[\approx]{\pi^*} H^j(E) \xrightarrow[\approx]{-\cup U} H^{j+q}(E, E_0)$$

dessuten finnes det en tilsvarende isomorfi for homologi:

$$H_{j+q}(E, E_0) \xrightarrow[\approx]{-\cap U} H_j(E) \xrightarrow[\approx]{\pi_*} H_j(B)$$

Bevis. Se Milnor [7]

□

La M^n , N_1^p og N_2^q være kompakte, orienterbare, glatte og sammenhengende mangfoldigheter uten rand, $N_1, N_2 \subset M$, $p + q = n$. Når N_i og M er glatte fins tubulær omegn E_i om N_i . En tubulær omegn om N_i er det samme som en omegn U om N_i i M som er homeomorf med totalrommet til en vektorbunt $p : E_i \rightarrow N_i$, slik at vi har et kommutativt diagram:

$$\begin{array}{ccc} E_i & \xrightarrow{\approx} & U \\ s_i \uparrow & \nearrow i^* & \\ N_i & & \end{array}$$

der s_i er nullseksjonen $s_i : N_i \rightarrow E_i$. For eksistens av tubulær omegn, se Bredon [1] for det kompakte tilfellet, eller Lang [6] for det generelle tilfellet.

Siden N_i ikke har rand er $SE_i = \partial E_i \simeq E_i - N_i$, der SE_i er sfærebunten over N_i . Anta at orienteringer på N_1 , N_2 og M er valgt. E_1 og E_2 orienteres som undermangfoldigheter av M . Orienteringen av fiberne i $\pi : E_1 \rightarrow N_1$ velges slik at Thom-klassen $U_1 \in H^q(E_1, SE_1)$ kan uttrykkes ved

$$[E_1] \cap U_1 = \pi_*^{-1}([N_1]) \in H_p(E_1) \xrightarrow{\pi_*} H_p(N_1)$$

der $[E_1] \in H_{p+q}(E_1, SE_1) \approx H_n(M|N_1)$ er fundamentalklassen til E_1 og $[N_1] \in H_p(N_1)$ er fundamentalklassen til N_1 , hvor $H_n(M|N_1)$ er forkortelse for $H_n(M, M - N_1)$.

La $[\overline{N}_1]$ være bildet av $[N_1]$ under avbildningen $H_p(N_1) \rightarrow H_p(M)$, og la \overline{U}_1 være bildet av U_1 i $H^q(M)$:

$$U_1 \in H^q(E_1, SE_1) \xleftarrow{i_*} H^q(M|N_1) \longrightarrow H^q(M) \ni \overline{U}_1$$

Fiberne i $\pi : E_2 \rightarrow N_2$ orienteres tilsvarende, slik at

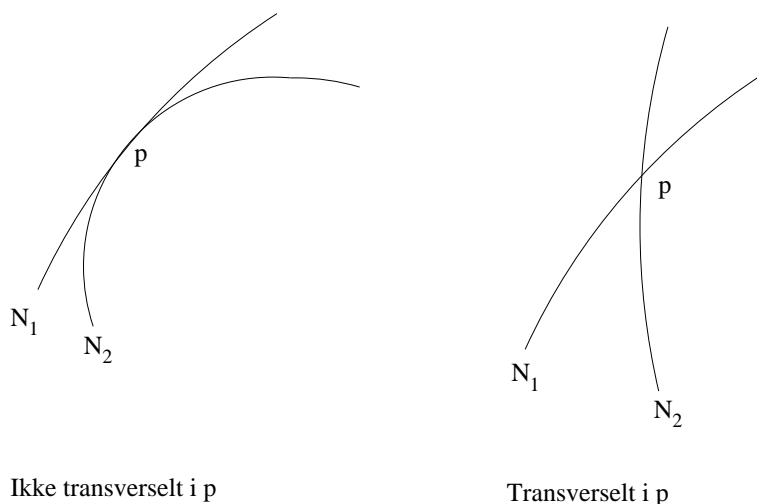
$$[E_2] \cap U_2 = \pi_*^{-1}([N_2]) \in H_p(E_2) \xrightarrow{\pi_*} H_p(N_2)$$

og $[\overline{N}_2]$ og \overline{U}_2 defineres tilsvarende som $[\overline{N}_1]$ og \overline{U}_1 . La snittproduktet $[N_1] \cdot [N_2]$ være definert ved

$$[N_1] \cdot [N_2] = \mu_M(\mu_M^{-1}[\overline{N}_1] \cup \mu_M^{-1}[\overline{N}_2])$$

der μ_M er isomorfen gitt ved Poincaré-dualiteten $H^k(M) \rightarrow H_{n-k}(M)$, $x \mapsto [M] \cap x$. En god referanse for Poincaré-dualitet kan være Hatcher's bok [4].

Definisjon 3.2. *To undermangfoldigheter $N_1, N_2 \subset M$ snitter hverandre transverselt i punktet $p \in N_1 \cap N_2$ dersom $T_p(N_1) + T_p(N_2) = T_p(M)$, der $T_p(N_1)$ betyr tangentrommet til N_1 i punktet p .*



Definisjon 3.3. Anta at N_1 og N_2 snitter hverandre transverselt i $x_i \in N_1 \cap N_2$. Snittegnet i punktet x_i defineres da som $\text{sgn}(x_i) = [M]_{x_i} \cap (r_{x_i}^* U_1 \cup r_{x_i}^* U_2)$, der $r_{x_i} : (V, V - N_i) \rightarrow (E_i, E_i - N_i) \simeq (E_i, SE_i)$ er inklusjonen, hvor $V = A \times B \approx D^n$ er en omegn om x_i med $A \subset N_1$ og $B \subset N_2$. $[M]_{x_i}$ betyr restriksjonen av $[M]$ til $H_n(M|x_i)$. V velges liten nok til at den ekskluderer andre punkter i $N_1 \cap N_2$. Snittegnet er avhengig av rekkefølgen av N_1 og N_2 .

Dersom N_1 og N_2 snitter hverandre transverselt i x_i følger det at $\text{sgn}(x_i) = \pm 1$. Vi sier at N_1 og N_2 snitter hverandre transverselt dersom de snitter hverandre transverselt i alle punkter $x_i \in N_1 \cap N_2$.

Lemma 3.4. La N_1^p, N_2^q og M^n være kompakte, orienterbare, glatte og sammenhengende mangfoldigheter uten rand, med $n = p + q$ og $N_1^p, N_2^q \subset M^n$. Anta at N_1 og N_2 snitter hverandre transverselt. Da er

$$[N_1] \cdot [N_2] = \sum \text{sgn}(x_i)$$

der x_i er snittpunktene til N_1 og N_2 .

Bevis. Følgende diagram kommuterer:

$$\begin{array}{ccccc}
 U_1 & & H^q(E_1, SE_1) & \xrightarrow{[E_1] \cap -} & H_p(E_1) & & \pi_*^{-1}([N_1]) \\
 \downarrow & & \uparrow \approx & & \downarrow i_* & & \downarrow \\
 \bar{U}_1 & & H^q(M, cl(M - E_1)) & \xrightarrow{i_* [E_1] \cap -} & H_p(M) & & [N_1] \\
 & & \downarrow & & \uparrow \mu_M & & \\
 & & H^q(M) & & & &
 \end{array}$$

siden $[E_1] \in H_n(E, SE)$ og $[M] \in H_n(M)$ begge avbildes på $i_*[E_1] \in H_n(M, cl(M - E_1))$, der i er inklusjonen av E inn i M . Dermed er $\mu_M^{-1}[\overline{N_1}] \cup \mu_M^{-1}[\overline{N_2}] = \overline{U_1} \cup \overline{U_2} = \overline{U_1 \cup U_2}$ der $\overline{U_1 \cup U_2}$ er bildet av $U_1 \cup U_2$ under avbildningen $H^n(M|N_1 \cap N_2) \rightarrow H^n(M)$, siden følgende diagram kommuterer:

$$\begin{array}{ccccc}
 U_1 \cup U_2 & & H^n(M|N_1 \cap N_2) & \longrightarrow & H^n(M) & & \overline{U_1 \cup U_2} \\
 \uparrow & & \cup U_2 \uparrow & & \uparrow \cup \overline{U_2} & & \uparrow \\
 & & H^q(M|N_1) & \longrightarrow & H^q(M) & & \overline{U_1} \\
 & & \downarrow \approx i^* & & & & \\
 \overline{U_1} & & H^q(E_1, SE_1) & & & &
 \end{array}$$

og vi har at $[N_1] \cdot [N_2] = [M] \cap (\overline{U_1 \cup U_2})$. Cup-produktet $r_{x_i}^* U_1 \cup r_{x_i}^* U_2$ ligger i $H^n(V|x_i)$ Dessuten er $r_{x_i}^* U_1 \cup r_{x_i}^* U_2 = s_{x_i}^*(U_1 \cup U_2)$ der $s_{x_i} : (V, V - x_i) \rightarrow (M, M - N_1 \cap N_2)$ er inklusjonen, og U_1 og U_2 ses på som elementer i $H^q(M, M - N_1)$ og $H^p(M, M - N_2)$ hhv. Følgende diagram er kommutativt

$$\begin{array}{ccc}
 [M]_{N_1 \cap N_2} & & H_n(M|N_1 \cap N_2) \xrightarrow[\approx]{\text{eksisjon}} H_n(\coprod(V|x_i)) \\
 \downarrow & & \downarrow \swarrow \approx \\
 \Sigma_{x_i \in N_1 \cap N_2} [M]_{x_i} & & \oplus H_n(V|x_i)
 \end{array}$$

der $[M]_{N_1 \cap N_2}$ er bildet av fundamentalklassen $[M]$ under avbildningen $H_n(M) \rightarrow H_n(M|N_1 \cap N_2)$. Dermed blir også følgende diagram kommutativt

$$\begin{array}{ccc}
 H^n(M|N_1 \cap N_2) & \xrightarrow{[M]_{N_1 \cap N_2} \cap -} & H_0(M) \\
 \oplus s_{x_i}^* \downarrow & & \parallel \\
 \oplus_{x_i \in N_1 \cap N_2} H^n(V|x_i) & \xrightarrow{\Sigma[M]_{x_i} \cap -} & H_0(M)
 \end{array}$$

dermed er $[N_1] \cdot [N_2] = [M] \cap (\overline{U_1 \cup U_2}) = [M]_{N_1 \cap N_2} \cap (U_1 \cup U_2) = \Sigma_{x_i \in N_1 \cap N_2} [M]_{x_i} \cap s_{x_i}^*(U_1 \cup U_2) = \Sigma_{x_i \in N_1 \cap N_2} [M]_{x_i} \cap (r_{x_i}^* U_1 \cup r_{x_i}^* U_2) = \Sigma_{x_i} \text{sgn}(x_i)$

□

La så M^n , N_1^p og N_2^q være kompakte, sammenhengende, glatte og orienterte mangfoldigheter med rand, $N_1, N_2 \subset M$, $p + q = n$, $N_i \cap \partial M = \partial N_i$, for $i = 1, 2$. Da er $\partial E_1 = SE_1 \cup E_{1\partial N_1}$, der $E_{1\partial N_1}$ betyr restriksjon av bunten $E_1 \rightarrow N_1$ til ∂N_1 . La igjen fiberne være orientert slik at Thom-klassen $U_1 \in H^q(E_1, SE_1)$ oppfyller

$$[E_1] \cap U_1 = \pi_*^{-1}([N_1]) \in H_p(E_1, E_{1\partial N_1}) \xrightarrow[\pi_*]{\approx} H_p(N_1, \partial N_1)$$

der $[E_1] \in H_n(E_1, \partial E_1) \approx H_n(M, M - \text{int} E_1)$ er fundamentalklassen til E_1 . Vi definerer $[\overline{N}_1]$ som bildet av $[N_1]$ under avbildningen $H_p(N_1, \partial N_1) \rightarrow H_p(M, \partial M)$, og definerer \overline{U}_1 som bildet av U_1 i $H^q(M)$:

$$U_1 \in H^q(E_1, SE_1) \xleftarrow[\approx]{\text{eksisjon}} H^q(M, cl(M - E_1)) \longrightarrow H^q(M) \ni \overline{U}_1$$

U_2 defineres tilsvarende. Anta at N_1 og N_2 snitter hverandre transverselt og at $N_1 \cap N_2 \subset \text{int} M$. Cup-produktet $U_1 \cup U_2$ ligger i $H^n(M|N_1 \cup N_2)$. Snittproduktet $[N_1] \cdot [N_2]$ er fortsatt definert som

$$[N_1] \cdot [N_2] = \mu_M(\mu_M^{-1}[\overline{N}_1] \cup \mu_M^{-1}[\overline{N}_2])$$

der μ_M er isomorfien gitt ved Poincaré-dualiteten $H^k(M) \rightarrow H_{n-k}(M, \partial M)$, $x \mapsto [M] \cap x$, hvor $[M]$ nå er fundamentalklassen for M som ligger i $H_n(M, \partial M)$.

Lemma 3.5. *La N_1^p, N_2^q og M^n være mangfoldigheter med rand med betingelsene gitt ovenfor. Da er*

$$[N_1] \cdot [N_2] = \sum \text{sgn}(x_i)$$

hvor vi summerer over alle $x_i \in N_1 \cap N_2$.

Bevis. Følgende diagram kommuterer:

$$\begin{array}{ccccc} U_1 & & H^q(E_1, SE_1) & \xrightarrow[\approx]{[E_1] \cap -} & H_p(E_1, E_{1\partial N_1}) & & \pi_*^{-1}([N_1]) \\ & & \uparrow \approx & & \downarrow i_* & & \downarrow \\ & & H^q(M, cl(M - E_1)) & \xrightarrow{i_* [E_1] \cap -} & H_p(M, E_{1\partial N_1}) & & \\ & & \downarrow i^* & & \downarrow i_* & & \\ \overline{U}_1 & & H^q(M) & \xrightarrow{\mu_M} & H_p(M, \partial M) & & [\overline{N}_1] \end{array}$$

der $i_*[E_1]$ i andre rad ses på som et element i $H_n(M, M - \text{int} E_1)$. Dermed er $[N_1] \cdot [N_2] = [M] \cap (\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2) = [M] \cap (\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2)$. Resten av beviset er tilsvarende som i tilfellet uten rand. \square

La $\overline{X^I}$ være kvotientrommet X^I / \sim , der $\phi_1 \sim \phi_2$ dersom ϕ_1 er homotop med ϕ_2 relativt til endepunktene. La $\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}$ være $\tilde{X} \times \tilde{X}$ delt ut med diagonalvirkningen av $\pi_1(X)$. Når X er en orienterbar mangfoldighet, er også $\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}$ en orienterbar mangfoldighet.

X^I er utstyrt med den kompakt-åpne topologien, det vil si at en basis for topologien består av mengder $\cap_{i=1}^k M(K_i, U_i)$, der $M(K_i, U_i)$ er mengden av avbildninger som tar en lukket mengde $K_i \subset I$ inn i en åpen mengde $U_i \subset X$. $\overline{X^I}$ gis kvotienttopologien.

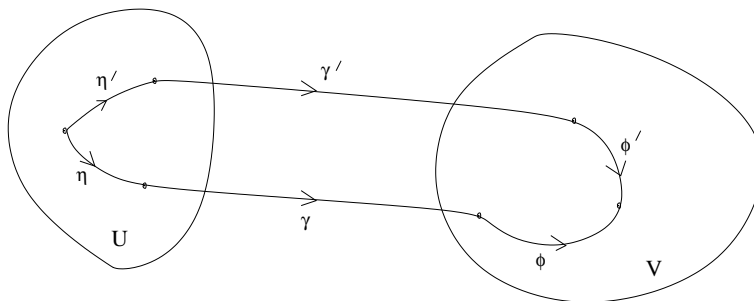
Universaloverdekningsrommet \tilde{X} for X konstrueres ved $\tilde{X} = \{[\gamma] \mid \gamma \text{ er en vei i } X \text{ med } \gamma(0) = x_0\}$. Da er $\tilde{X} \times \tilde{X} = \{([\gamma], [\phi]) \mid \gamma(0) = \phi(0) = x_0\}$. En topologi på $\tilde{X} \times \tilde{X}$ kan konstrueres som følger. La \mathcal{U} være samlingen av åpne mengder $U \subset X$ som er slik at avbildningen $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ er triviell. La $U, V \in \mathcal{U}$ og la γ_1 være en vei fra x_0 til et punkt i U og la γ_2 være en vei fra x_0 til et punkt i V . Vi definerer så $UV_{([\gamma_1], [\gamma_2])} = \{([\gamma_1\eta], [\gamma_2\phi]) \in \tilde{X} \times \tilde{X} \mid \eta \text{ er en vei i } U \text{ med } \eta(0) = \gamma_1(1), \phi \text{ er en vei i } V \text{ med } \phi(0) = \gamma_2(1)\}$. Mengdene $UV_{([\gamma_1], [\gamma_2])}$ danner basis for en topologi på $\tilde{X} \times \tilde{X}$. $\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}$ gis kvotienttopologien. Avbildningen $\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X} \rightarrow X \times X$, $([\gamma], [\phi]) \mapsto (\gamma(1), \phi(1))$ er et overdekningsrom siden $\tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow X \times X$ er det.

Lemma 3.6. $\overline{X^I} \rightarrow X \times X, [\phi] \mapsto (\phi(0), \phi(1))$ er et overdekningsrom.

Bevis. La $UV_{[\gamma]} = \{[\eta \cdot \gamma \cdot \phi] \mid \eta \text{ er en vei i } U \text{ med } \eta(1) = \gamma(0) \text{ og } \phi \text{ er en vei i } V \text{ med } \phi(0) = \gamma(1)\}$, der $U, V \in \mathcal{U}$ og γ er en vei i X med $\gamma(0) \in U$ og $\gamma(1) \in V$. Mengden $UV_{[\gamma]}$ er åpen i den kompakt-åpne topologien fordi den er homotopiklassen til mengden av avbildninger $\psi : I \rightarrow X$ som avbilder $[0, 1/3]$ inn i U , $[1/3, 2/3]$ inn i W og $[2/3, 1]$ inn i V , der $W \in \mathcal{U}$ er en passende omegn om $\gamma(I)$ i X , hvor γ er en passende representant for $[\gamma]$.

Projeksjonen $p : UV_{[\gamma]} \rightarrow U \times V$ er injektiv siden forskjellige valg av η fra en fast $u \in U$ til $\gamma(0)$ alle er homotop i X , det samme er forskjellige valg av ϕ fra $\gamma(1)$ til en fast $v \in V$. Den er surjektiv siden U og V er veisammenhengende.

Anta $UV_{[\gamma]} \cap UV_{[\gamma']} \neq \emptyset$, dvs at det fins veier η, ϕ, η', ϕ' slik at $[\eta \cdot \gamma \cdot \phi] = [\eta' \cdot \gamma' \cdot \phi']$.



ethvert element i $UV_{[\gamma]}$ kan skrives på formen $[\eta_2 \cdot \eta \cdot \gamma \cdot \phi \cdot \phi_2]$ siden enhver vei i U med endepunkt i $\eta(1)$ og startpunkt i u er homotop med $\eta_2 \cdot \eta$ for en vilkårlig vei η_2 i U med $\eta_2(0) = u$ og $\eta_2(1) = \eta(0)$. Tilsvarende er enhver vei i V med

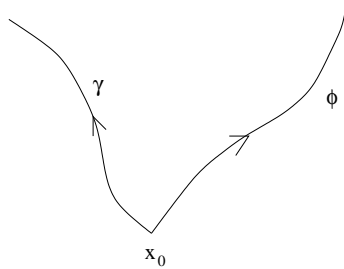
startpunkt $\phi(0)$ og endepunkt i $v \in V$ homotop med $\phi \cdot \phi_2$ for en vilkårlig vei ϕ_2 i V med $\phi_2(0) = \phi(1)$ og $\phi_2(1) = v$. Men $[\eta_2 \cdot \eta \cdot \gamma \cdot \phi \cdot \phi_2] = [\eta_2 \cdot \eta' \cdot \gamma' \cdot \phi' \cdot \phi_2]$, et element i $UV_{[\gamma']}$, dermed vil $UV_{[\gamma]} \subset UV_{[\gamma']}$. Et tilsvarende argument kan brukes for den motsatte inklusjonen, så $UV_{[\gamma]} \cap UV_{[\gamma']} \neq \emptyset$ vil implisere at $UV_{[\gamma]} = UV_{[\gamma']}$.

Avbildningen $p : UV_{[\gamma]} \rightarrow U \times V$ er en homeomorfi. For la $U_1 \times V_1$ være en åpen mengde i $U \times V$. Da er $p^{-1}(U_1 \times V_1) = \{[\eta \cdot \gamma \cdot \phi] \mid \eta \text{ vei i } U \text{ med } \eta(0) \in U_1, \eta(1) = \gamma(0), \phi \text{ vei i } V \text{ med } \phi(0) = \gamma(1), \phi(1) \in V_1\} = U_1 V_{1[\gamma]}$, som er åpen i $UV_{[\gamma]}$.

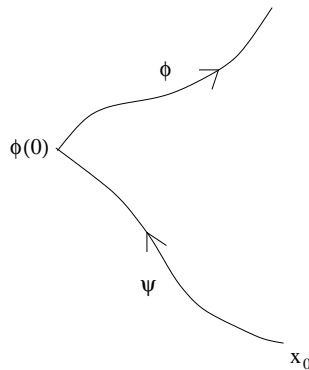
De åpne mengdene i $UV_{[\gamma]}$ ser ut som $U_1 V_{1[\gamma]}$ der U_1, V_1 er åpne i U og V . Dermed er $p(U_1 V_{1[\gamma]})$ åpen i $U \times V$. □

Lemma 3.7. $\overline{X^I}$ er homeomorf med $\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}$.

Bevis. Det finnes en avbildning $\Phi : \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X} \rightarrow \overline{X^I}$ gitt ved $([\gamma], [\phi]) \mapsto [\bar{\gamma} \cdot \phi]$. Φ er veldefinert, for anta at $([\gamma'], [\phi']) \in \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}$ er slik at $([\gamma], [\phi]) = ([\gamma'], [\phi'])$ i $\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}$, det vil si at $([\gamma'], [\phi']) = ([e \cdot \gamma], [e \cdot \phi])$ for en $[e] \in \pi_1(X, x_0)$. Da er $\Phi([\gamma'], [\phi']) = \Phi([e \cdot \gamma], [e \cdot \phi]) = [\bar{e} \cdot \bar{\gamma} \cdot e \cdot \phi] = [\bar{\gamma} \cdot \bar{e} \cdot e \cdot \phi] = [\bar{\gamma} \cdot \phi]$.



Det fins også en avbildning motsatt vei $F : \overline{X^I} \rightarrow \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}$ gitt ved $[\phi] \mapsto ([\psi], [\psi \cdot \phi])$, hvor ψ er en vilkårlig vei fra x_0 til $\phi(0)$.



F er veldefinert, for la ψ' være en annen vei fra x_0 til $\phi(0)$. Da er $([\psi'], [\psi' \cdot \phi]) = e([\psi], [\psi \cdot \phi])$, hvor $e(-, -)$ betyr diagonalvirkningen av $e = [\psi' \cdot \psi^{-1}] \in$

$\pi_1(X, x_0)$. Det er lett å sjekke at $\Phi \circ F = id$ og at $F \circ \Phi = id$. Dermed gir Φ oss en isomorfi av overdekningsrom, dermed er Φ også en homeomorfi, så $\tilde{X} \times_\pi \tilde{X} \approx \overline{X^I}$. \square

Vi vil nå ta for oss tilfellet hvor X er en kompakt mangfoldighet uten rand, $N_1 = \Gamma = \{(x, f(x)) \in X \times X\}$ er grafen til f , $N_2 = \Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ diagonalen og $M = X \times X$.

Teorem 3.8. *La $B = \{\alpha\}$ være en basis for $H^*(X)$. La $\{\alpha^\circ\}$ være en dual basis for $H^*(X)$, m.a.o*

$$\langle \alpha^\circ \cup \beta, [X] \rangle = \delta_{\alpha, \beta}$$

Da er

$$\overline{U}_2 = \sum_{\alpha \in B} (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha^\circ \times \alpha \in H^n(X \times X)$$

Bevis. se Bredon [1], kap VI. \square

En kompakt mangfoldighet X har endelig genererte homologigrupper som er forskjellige fra null i et endelig antall dimensjoner, dermed er Lefschetz-tallet $L(f) = \sum_n (-1)^n \text{tr}(f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(X))$ definert.

Teorem 3.9.

$$L(f) = [\Gamma] \cdot [\Delta]$$

Bevis. La $f^*(\alpha) = \sum_{\beta} f_{\beta, \alpha} \beta$ hvor α, β løper over en basis for $H^*(X; \mathbb{Q})$.

$$\begin{aligned} [\Gamma] \cdot [\Delta] &= [X \times X] \cap (\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2) = ([X \times X] \cap \overline{U}_1) \cap \overline{U}_2 \\ &= \overline{[\Gamma]} \cap \overline{U}_2 \end{aligned}$$

der $\overline{[\Gamma]}$ er bildet av fundamentalklassen $[\Gamma] \in H_n(\Gamma)$ i $H_n(X \times X)$, som er lik $\Gamma_{f_*}[X]$ for $[X] \in H_n(X)$ fundamentalklassen til X .

$$= \Gamma_{f_*}[X] \cap \overline{U}_2 = \Gamma_{f_*}([X] \cap \Gamma_f^* \overline{U}_2) = [X] \cap \Gamma_f^* \overline{U}_2$$

siden $\Gamma_{f_*} = id$ på $H_0(X) = H_0(X \times X)$

$$\begin{aligned} &= [X] \cap \Gamma_f^* (\sum_{\alpha \in B} (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha^\circ \times \alpha) \\ &= \sum_{\alpha \in B} (-1)^{\deg(\alpha)} [X] \cap (\alpha^\circ \cup f^*(\alpha)) \\ &= \sum_{\alpha \in B} (-1)^{\deg(\alpha)} [X] \cap (\alpha^\circ \cup \sum_{\beta} f_{\beta, \alpha} \beta) \\ &= \sum_{\alpha \in B} (-1)^{\deg(\alpha)} f_{\alpha, \alpha} \\ &= L(f) \end{aligned}$$

\square

Dersom f ikke har fikspunkter er $L(f) = [\Gamma] \cdot [\Delta] = 0$ siden $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$ i dette tilfellet. Dette er det kontrapositive av Lefschetz' fikspunktteorem som sier at f har minst ett fikspunkt dersom $L(f) \neq 0$.

Korollar 3.10. *La X være en glatt, kompakt og orienterbar mangfoldighet uten rand, $f : X \rightarrow X$ glatt, og anta at Γ og Δ snitter hverandre transverselt. Da er*

$$L(f) = \sum_{x \in \Gamma \cap \Delta} \text{sgn}(\det(I - f_{*x}))$$

Bevis. $\text{sgn}(x) = 1$ dersom orienteringen til $\Gamma_x \approx \mathbb{R}^n$ etterfulgt av orienteringen til $\Delta_x \approx \mathbb{R}^n$ gir orienteringen til $X \times X \approx \mathbb{R}^n$ i x , og -1 ellers.

Basisskiftematrixa fra standard basis for $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ til standard basis for Γ_x etterfulgt av standard basis for Δ_x er gitt ved

$$\begin{pmatrix} I & I \\ f_{*x} & I \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I - f_{*x} & 0 \\ f_{*x} & I \end{pmatrix}$$

Dermed er

$$\text{sgn}(x) = \text{sgn}(\det \begin{pmatrix} I - f_{*x} & 0 \\ f_{*x} & I \end{pmatrix}) = \text{sgn}(\det(I - f_{*x}))$$

og Lemma 3.4 og Teorem 3.9 gir resultatet. \square

Lemma 3.11. *La $f : X \rightarrow X$ være en avbildning med betingelser som ovenfor. Da er $\text{sgn}(x) = \text{index}(f, x)$ for alle $x \in \Gamma \cap \Delta$.*

Bevis. Vi har at $\text{sgn}(\det(I - f_{*x})) = \text{index}(f, x)$, se Jiang [5]. \square

Dette resultatet gir oss at $\overline{R}(f) = \sum_{x \in \Gamma \cap \Delta} \text{sgn}(x)[\sigma_x]$, der σ_x er nullcykelen med bilde i x .

Teorem 3.12. $L(f) = \mu_X(\Gamma_f^*(\mu_{X \times X}^{-1}([\overline{\Delta}]))) \in H_0(X) = \mathbb{Q}$.

Bevis. Generelt gjelder $z \cap (\phi \cup \psi) = (z \cap \phi) \cup (z \cap \psi)$ for $z \in H_*(X)$ og $\phi, \psi \in H^*(X)$. Derfor får vi

$$\begin{aligned} [\Gamma] \cdot [\Delta] &= [X \times X] \cap (\mu_{X \times X}^{-1}([\overline{\Gamma}]) \cup \mu_{X \times X}^{-1}([\overline{\Delta}])) \\ &= ([X \times X] \cap \mu_{X \times X}^{-1}([\overline{\Gamma}])) \cup ([X \times X] \cap \mu_{X \times X}^{-1}([\overline{\Delta}])) \\ &= [\overline{\Gamma}] \cup \mu_{X \times X}^{-1}([\overline{\Delta}]) \end{aligned}$$

Betrakt diagrammet

$$\begin{array}{ccc}
[\overline{\Delta}] \in H_n(X \times X) & \xleftarrow{\mu_{X \times X}} & H^n(X \times X) \xrightarrow{[\overline{\Gamma}] \cap -} H_0(X \times X) \\
& & \Gamma_f^* \downarrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \Gamma_{f*} \\
& & H^n(X) \xrightarrow{[\overline{X}] \cap -} H_0(X)
\end{array}$$

Kvadratet kommuterer siden $g_*(z \cap g^*\phi) = g_*z \cap \phi$, for enhver $g : X \rightarrow Y$, $z \in H_*(X)$ og $\phi \in H^*(Y)$. Siden X er veisammenhengende er $\Gamma_{f*} = id$ på $H_0(X) = H_0(X \times X)$. Dermed er $L(f) = \mu_X(\Gamma_f^*(\mu_{X \times X}^{-1}([\overline{\Delta}]))) \in H_0(X) = \mathbb{Q}$. \square

La $\overline{\Lambda}_f = \Lambda_f X / \sim$, der $\phi_1 \sim \phi_2$ dersom ϕ_1 er homotop med ϕ_2 relativt til endepunktene. Fibrasjonen $\pi : \overline{\Lambda}_f \rightarrow X$ er den induserte fibrasjonen til $p : \overline{X^I} \rightarrow X \times X$ ved Γ_f :

$$\begin{array}{ccc}
\overline{\Lambda}_f & \xrightarrow{i} & \overline{X^I} \xrightarrow{\approx} \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X} \\
\downarrow \pi & & \downarrow p \\
\tilde{X} & \xrightarrow{\Gamma_f} & X \times X \\
x \longmapsto & & \longrightarrow (x, f(x))
\end{array}$$

dermed er også $\pi : \overline{\Lambda}_f \rightarrow X$ et overdekningsrom. Når X er en orienterbar mangfoldighet er også $\overline{\Lambda}_f$ en orienterbar mangfoldighet.

Fibrasjonen $\Lambda_f X \rightarrow X$, $\omega \mapsto \omega(0)$ induserer en avbildning $\pi_* : \pi_0(\Lambda_f X) = \pi_0(\overline{\Lambda}_f) \rightarrow \pi_0(X) = 1$. π_* er dermed en konstant avbildning som avbilder alt på 1. π_* induserer også en avbildning $\pi_* : \mathbb{Q}\pi_0(\overline{\Lambda}_f) = H_0(\overline{\Lambda}_f) \rightarrow \mathbb{Q}\pi_0(X) = H_0(X) = \mathbb{Q}$. Denne vil avbilde $\overline{R}(f) = \sum_{x \in \Gamma \cap \Lambda} \text{sgn}(x)[\phi_x]$ på $L(f) = \sum \text{sgn}(x)$.

La $\tilde{\Delta} : X \rightarrow \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}$ være løftningen av Δ gitt ved $\tilde{\Delta}(x) = ([\phi], [\phi])$, der ϕ er en vilkårlig vei i X fra x_0 til x .

$$\begin{array}{ccc}
& & \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X} \\
& \nearrow \tilde{\Delta} & \downarrow p \\
X & \xrightarrow{\Delta} & X \times X
\end{array}$$

$\tilde{\Delta}$ er veldefinert, for la ψ være en annen vei i X fra x_0 til x . Da er $([\psi], [\psi]) = g([\phi], [\phi])$, diagonalvirkningen av $g = [\psi \cdot \overline{\phi}] \in \pi_1(X)$. Da vil $[\tilde{\Delta}] = \tilde{\Delta}_*[X]$ avbildes på $[\overline{\Delta}] = \Delta_*[X]$ ved p_* :

$$\begin{array}{ccc}
& & H_n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}) & [\tilde{\Delta}] \\
& \nearrow \tilde{\Delta}_* & \downarrow p_* & \downarrow \\
[X] & H_n(X) \xrightarrow{\Delta_*} & H_n(X \times X) & [\Delta]
\end{array}$$

For de ikke-kompakte mangfoldighetene $\bar{\Lambda}_f$ og $\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}$ har vi Poincaré-dualitetene $\mu_{\bar{\Lambda}_f} : H_c^{n-k}(\bar{\Lambda}_f) \rightarrow H_k(\bar{\Lambda}_f)$ og $\mu_{\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}} : H_c^{2n-k}(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}) \rightarrow H_k(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X})$, hvor $H_c^n(X)$ er definert som den direkte grensen $\varinjlim_K H^n(X, X-K)$, grensen over alle kompakte undermengder $K \subset X$.

Hvis N_1^p, N_2^q og M^n er orienterte mangfoldigheter uten rand, hvor N_2 er kompakt, M og N_2 sammenhengende, defineres snittproduktet $[N_1] \cdot [N_2]$ ved $[N_1] \cdot [N_2] = j_*(\mu_{N_1}(j^*(\mu_M^{-1}([\bar{N}_2])))$, der $[\bar{N}_2]$ er bildet av $[N_2] \in H_q(N_2) \approx H_q(E_2)$ under avbildningen $H_q(N_2) \rightarrow H_q(M)$.

$$\begin{array}{ccccc}
H_c^p(N_1) & \xleftarrow{j^*} & H_c^p(M) & \xrightarrow{\mu_M} & H_q(M) \ni [\bar{N}_2] \\
\downarrow \mu_{N_1} & & \downarrow & & \\
H_0(N_1) & \xrightarrow{j_*} & H_0(M) & &
\end{array}$$

Orienteringen til fiberne i E_2 velges fortsatt slik at $U_2 \in H^p(E_2, SE_2)$ oppfyller $[E_2] \cap U_2 = \pi_*^{-1}([N_2]) \in H_q(E_2)$ der $[E_2] \in H_n(E_2, SE_2)$ er fundamentalklassen til E_2 .

Orienteringen til fiberne i E_1 velges slik at Thom-klassen $U_1 \in H^q(E_1, SE_1)$ oppfyller $\mu_x \cap r_x^*(U_1) = \mu_x^{N_1}$ for alle $x \in N_1 \cap N_2$, der $\mu_x \in H_n(V, V-x)$ er den valgte generatoren for M i x og $\mu_x^{N_1} \in H_p(N_1, N_1-x) \approx H_p(V, V-N_2)$ er den valgte generatoren for N_1 i x . $V = A \times B$ er en omegn om x liten nok til å ekskludere andre snittpunkter, der $A \subset N_1$ og $B \subset N_2$ og $r : (V, V-N_1) \rightarrow (E_1, E_1-N_1)$ er inklusjonen. La $\mu_{N_1 \cap N_2} \in H_n(M|N_1 \cap N_2)$ være det unike elementet som avbildes på den valgte generator μ_x for alle $x \in N_1 \cap N_2$, og la $\mu_{N_1} \in H_p(N_1|N_1 \cap N_2)$ være det unike elementet som avbildes på den valgte generator $\mu_x^{N_1}$ for alle $x \in N_1 \cap N_2$. Følgende diagram kommuterer:

$$\begin{array}{ccccc}
\oplus \mu_x & \oplus H_n(V | x) & \xrightarrow{\approx} & H_n(M | N_1 \cap N_2) & \mu_{N_1 \cap N_2} \\
\downarrow & \downarrow \oplus -\cap r^* U_1 & & \downarrow & \downarrow \\
\oplus \mu_x^{N_1} & \oplus H_p(V | N_2) & & & \\
\downarrow & \downarrow \approx & & \downarrow -\cap U_1 & \\
\mu_{N_1} & \oplus H_p(N_1 | x) & & & \\
\downarrow & \downarrow \approx & & & \\
\mu_{N_1} & H_p(N_1 | N_1 \cap N_2) & \xrightarrow{j_*} & H_p(M | N_2) & \mu_{N_1 \cap N_2} \cap U_1
\end{array}$$

Isomorfien $\oplus H_n(V | x) \rightarrow H_n(M | N_1 \cap N_2)$ avbilder $\oplus \mu_x$ på $\mu_{N_1 \cap N_2}$.

Lemma 3.13. *La N_1^p, N_2^q og M^n være mangfoldigheter uten rand med $n = p + q$, $N_1^p, N_2^q \subset M^n$, N_2 kompakt, M og N_2 sammenhengende. Anta at N_1 og N_2 snitter hverandre transverselt. Da er*

$$[N_1] \cdot [N_2] = \Sigma \text{sgn}(x_i)$$

der x_i er snittpunktene til N_1 og N_2 .

Bevis. Følgende diagram kommuterer:

$$\begin{array}{ccccc}
U_2 & H^p(E_2, SE_2) & \xrightarrow{[E_2] \cap -} & H_q(E_2) & \pi_*^{-1}([N_2]) \\
\downarrow & \approx \uparrow i^* & & \downarrow i_* & \downarrow \\
\overline{U_2} & H^p(M | \text{int } E_2) & \xrightarrow{i_* [E_2] \cap -} & H_q(M) & \downarrow \\
\downarrow & \approx \downarrow & & \downarrow = & \downarrow \\
\overline{U_2} & H_c^p(M) & \xrightarrow{\mu_M} & H_q(M) & \overline{[N_2]}
\end{array}$$

dermed er $[N_1] \cdot [N_2] = j_*(\mu_{N_1}(j^*(\overline{U_2})))$. Men $\overline{U_2}$ er representert ved elementet $U_2 \in H^p(M, M - N_2)$, så μ_{N_1} vil da være gitt ved cap-produkt med det unike elementet $\mu_{N_1} \in H_n(N_1 | N_1 \cap N_2)$ som avbildes på den valgte generator $\mu_x^{N_1} \in H_p(N_1 | x)$ for alle $x \in N_1 \cap N_2$. Dermed er $[N_1] \cdot [N_2] = j_*(\mu_{N_1} \cap j^* U_2) = (j_* \mu_{N_1}) \cap U_2$. Ved kommutativitet av diagrammet øverst på siden er $j_* \mu_{N_1} = \mu_{N_1 \cap N_2} \cap U_1$. Da er $[N_1] \cdot [N_2] = (\mu_{N_1 \cap N_2} \cap U_1) \cap U_2 = \mu_{N_1 \cap N_2} \cap (U_1 \cup U_2) = \Sigma_{x_i}(r_{x_i}^* U_1 \cup r_{x_i}^* U_2) \mu_{x_i} = \Sigma \text{sgn}(x_i)$.

□

Lemma 3.14. La N_1^p, N_2^q og M^n være mangfoldigheter med rand med $n = p + q$, $N_1^p, N_2^q \subset M^n$, N_2 kompakt, M og N_2 sammenhengende. Anta at N_1 og N_2 snitter hverandre transverselt. Anta at $N_i \cap \partial M = \partial N_i$ og at $N_1 \cap N_2 \subset \text{int} M$ for $i = 1, 2$. Da er

$$[N_1] \cdot [N_2] = \Sigma \text{sgn}(x_i)$$

Bevis. Beviset er tilsvarende som for Lemma 3.13, men diagrammet ser nå ut som følger

$$\begin{array}{ccccc}
 U_2 & & H^p(E_2, SE_2) & \xrightarrow{[E_2] \cap -} & H_q(E_2, E_{2\partial N_2}) & & \pi_*^{-1}([N_2]) \\
 \downarrow & & \uparrow \approx & & \downarrow i_* & & \downarrow \\
 \overline{U}_2 & & H^p(M, cl(M - E_2)) & \xrightarrow{i_* [E_2] \cap -} & H_q(M, E_{2\partial N_2}) & & \downarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow i_* & & \downarrow \\
 & & H_c^p(M) & \xrightarrow{\mu_M} & H_q(M, \partial M) & & [\overline{N}_2]
 \end{array}$$

□

Underrommet $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}(X) \subset \tilde{X} \times_\pi \tilde{X}$ er sammenhengende og kompakt, dermed kan Lemma 3.13 anvendes på $N_1 = \overline{\Lambda}_f$, $N_2 = \tilde{\Delta}$ og $\tilde{X} \times_\pi \tilde{X} = M$. Da er $[\overline{\Lambda}_f] \cdot [\tilde{\Delta}] = \Sigma_{\tilde{x}_i \in \overline{\Lambda}_f \cap \tilde{\Delta}} \text{sgn}(\tilde{x}_i)$, og $[\Gamma] \cdot [\Delta] = \Sigma_{x_i \in \Gamma \cap \Delta} \text{sgn}(x_i)$. Prosjeksjonen p er lokalt en orienteringsbevarende homeomorfi, så $\text{sgn}(x_i) = \text{sgn}(p(\tilde{x}_i))$. Det er klart at $p(\overline{\Lambda}_f \cap \tilde{\Delta}) \subset \Gamma \cap \Delta$.

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{\Lambda}_f \cap \tilde{\Delta} & \subset & \tilde{\Delta} \\
 \downarrow p|_{\overline{\Lambda}_f \cap \tilde{\Delta}} & & \approx \downarrow p|_{\tilde{\Delta}} \\
 \Gamma \cap \Delta & \subset & \Delta
 \end{array}$$

Siden p avbilder $\tilde{\Delta}$ homeomorft på Δ er $p|_{\overline{\Lambda}_f \cap \tilde{\Delta}}$ injektiv. For surjektivitet, la $x \in \Gamma \cap \Delta$. $\tilde{\Delta}(x)$ er da gitt ved $([\gamma], [\gamma])$, der γ er en vei i X fra x_0 til x . Som element i $\overline{X^I}$ svarer γ til elementet $[\gamma^{-1} \cdot \gamma] = [\phi_x]$, homotopiklassen til den konstante veien i x , som ligger i $\overline{\Lambda}_f$ siden x er et fikspunkt for f . Dermed vil isomorfien $p_* : H_0(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}) \rightarrow H_0(X \times X)$ avbilde $[\overline{\Lambda}_f] \cdot [\tilde{\Delta}]$ på $[\Gamma] \cdot [\Delta]$, eller med andre ord $p_* \mu_{j\overline{\Lambda}_f} \mu_{\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}}^{-1} [\tilde{\Delta}] = [\overline{\Gamma}] \cap \mu_{X \times X}^{-1} [\Delta]$, der $\mu_{j\overline{\Lambda}_f}$ er avbildningen som får øvre venstre kvadrat på neste side til å kommutere:

$$\begin{array}{ccccc}
H_c^n(\overline{\Lambda}_f) & \xleftarrow{j^*} & H_c^n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}) & \xrightarrow[\approx]{\mu_{\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}}} & H_n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}) & [\overline{\Delta}] \\
\approx \downarrow \mu_{\overline{\Lambda}_f} & & \downarrow \mu_{j\overline{\Lambda}_f} & & \downarrow p_* & \downarrow \\
\overline{R}(f) & H_0(\overline{\Lambda}_f) & \xrightarrow{j_*} & H_0(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}) & & \\
\downarrow L(f) & \downarrow \pi_* & & \approx \downarrow p_* & & \\
H_0(X) & \xrightarrow[\approx]{\Gamma_{f*}} & H_0(X \times X) & & & \\
\approx \uparrow \mu_X & & \uparrow [\overline{\Gamma}] \cap - & & & \\
H^n(X) & \xleftarrow[\approx]{\Gamma_f^*} & H^n(X \times X) & \xrightarrow[\approx]{\mu_{X \times X}} & H_n(X \times X) & [\underline{\Delta}]
\end{array}$$

Følgende teorem er en formel for Reidemeister-trasen, tilsvarende som formelen for Lefschetz-tallet i Teorem 3.12

Teorem 3.15. *La $f : X \rightarrow X$ være en avbildning mellom kompakte mangfoldigheter. Dersom X har rand, anta at $f(\partial X) \subset X - \partial X$, slik at f ikke har noen fikspunkter på randa til X , og anta at grafen til f og diagonalen i $X \times X$ snitter hverandre transverselt. Da er*

$$\overline{R}(f) = \mu_{\overline{\Lambda}_f} j_* \mu_{\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}}^{-1}([\overline{\Delta}])$$

der $\mu_{\overline{\Lambda}_f} : H_c^n(\overline{\Lambda}_f) \rightarrow H_0(\overline{\Lambda}_f)$ og $\mu_{\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}} : H_c^n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}) \rightarrow H_n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X})$ er Poincaré-dualitet for $\overline{\Lambda}_f$ og $\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}$ hhv.

Bevis. Vi begynner med å regne ut høyre side.

$$\begin{aligned}
\mu_{\overline{\Lambda}_f} j_* \mu_{\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}}^{-1}([\overline{\Delta}]) &= \mu_{\overline{\Lambda}_f} j_* \overline{U}_2 \\
&= \mu_\Lambda \cap j_* U_2
\end{aligned}$$

der den første likheten kommer fra kommutativitet av diagrammet i beviset for Lemma 3.13, med $N_2 = \tilde{\Delta}$ og $M = \tilde{X} \times_\pi \tilde{X}$. Den andre likheten kommer av at $\overline{U}_2 \in H_c^n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X})$ er representert ved elementet $U_2 \in H^n(E_2, SE_2) \approx H^n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}, \tilde{X} \times_\pi \tilde{X} - \tilde{\Delta})$, som trekkes tilbake til elementet $j_* U_2 \in H^n(\overline{\Lambda}_f, \overline{\Lambda}_f - \overline{\Lambda}_f \cap \tilde{\Delta})$. Homologiklassen $\mu_\Lambda \in H_n(\overline{\Lambda}_f, \overline{\Lambda}_f - \overline{\Lambda}_f \cap \tilde{\Delta})$ er det unike elementet som avbildes på den valgte generatoren $\mu_{x_i}^\Lambda \in H_n(\overline{\Lambda}_f, \overline{\Lambda}_f - x_i) \approx H_n(\overline{\Lambda}_f \cap V, \overline{\Lambda}_f \cap V - x_i)$ for alle $x_i \in \overline{\Lambda}_f \cap \tilde{\Delta}$. Ved å regne ut dette lokalt, får vi at

$$\begin{aligned}
\mu_\Lambda \cap j_* U_2 &= \sum i_* (\mu_{x_i}^\Lambda \cap k^* r_{x_i}^* U_2) \\
&= \sum i_* k_*^{-1} (k_* \mu_{x_i}^\Lambda \cap r_{x_i}^* U_2)
\end{aligned}$$

der $i_* : H_0(\overline{\Lambda}_f \cap V) \rightarrow H_0(\overline{\Lambda}_f)$ er induisert av inklusjonene $i : \overline{\Lambda}_f \cap V \hookrightarrow \overline{\Lambda}_f$ for omegner V om de ulike $x_i \in \overline{\Lambda}_f \cap \tilde{\Delta}$, og der isomorfien $k^* : H^n(V, V - \tilde{\Delta}) \rightarrow H^n(\overline{\Lambda}_f \cap V, \overline{\Lambda}_f \cap V - x_i)$ er induisert av inklusjonen $k : \overline{\Lambda}_f \cap V \hookrightarrow V$. Ved å anvende definisjonen av U_1 får vi

$$\begin{aligned} &= \Sigma i_* k_*^{-1}((\mu_{x_i} \cap r_{x_i}^* U_1) \cap r_{x_i}^* U_2) \\ &= \Sigma i_* k_*^{-1}(\mu_{x_i} \cap (r_{x_i}^* U_1 \cup r_{x_i}^* U_2)) \\ &= \Sigma i_* k_*^{-1}(\text{sgn}(x_i)) \\ &= \Sigma \text{sgn}(x_i) [\sigma_{x_i}] \\ &= \overline{R}(f) \end{aligned}$$

der summen ovenfor egentlig løper over alle $x_i \in \overline{\Lambda}_f \cap \tilde{\Delta}$, men $\text{sgn}(x_i) = \text{sgn}(p(x_i))$ ved kommentaren på side 35. Vi ser her på $\text{sgn}(x_i)$ i 3. linje som et element i en $H_0(V)$.

For tilfellet med rand, splitter vi opp randa til $X \times X$ ved $\partial(X \times X) = X \times \partial X \cup \partial X \times X$. La $[\tilde{\Delta}] \in H_n(X \times X, X \times \partial X)$ være bildet av fundamentalklassen $[X] \in H_n(X, \partial X)$ under Δ_* , og la $[\tilde{\Gamma}] \in H_n(X \times X, \partial X \times X)$ være bildet av $[X]$ under Γ_* . Tilsvarende vil randa til $\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}$ splittes opp i to deler, $\partial_1 = p^{-1}(X \times \partial X)$ og $\partial_2 = p^{-1}(\partial X \times X)$. Det gjenstår å analysere randa til $\overline{\Lambda}_f$:

$$\begin{array}{ccc} \overline{\Lambda}_f & \xrightarrow{i} & \tilde{X} \times_\pi \tilde{X} \\ \downarrow \pi & & \downarrow p \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\Gamma_f} & X \times X \end{array}$$

Randa til $\overline{\Lambda}_f$ vil avbildes inn i ∂_2 ved i siden $p \circ i(\partial \overline{\Lambda}_f) = \Gamma_f \circ \pi(\partial \overline{\Lambda}_f) \subset \Gamma_f(\partial X) \subset \partial X \times X$. Diagrammet ser da ut som følger:

$$\begin{array}{ccccc} H_c^n(\overline{\Lambda}_f, \partial \overline{\Lambda}_f) & \xleftarrow{j^*} & H_c^n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}, \partial_2) & \xrightarrow[\approx]{\mu_{\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}}} & H_n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}, \partial_1) \\ \approx \downarrow \mu_{\overline{\Lambda}_f} & & \downarrow \mu_{j\overline{\Lambda}_f} & & \downarrow p_* \\ H_0(\overline{\Lambda}_f) & \xrightarrow{j_*} & H_0(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}) & & \\ \downarrow \pi_* & & \approx \downarrow p_* & & \\ H_0(X) & \xrightarrow[\approx]{\Gamma_{f*}} & H_0(X \times X) & & \\ \approx \uparrow \mu_X & & \uparrow [\Gamma] \cap - & & \\ H^n(X, \partial X) & \xleftarrow[\Gamma_f^*]{} & H^n(X \times X, \partial X \times X) & \xrightarrow[\approx]{\mu_{X \times X}} & H_n(X \times X, X \times \partial X) \end{array}$$

Det gjenstår å vise at avbildningene $\mu_{\overline{\Lambda}_f}$ og $\mu_{\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}}$ er isomorfier, dvs å vise Poincaré-dualitet for ikke-kompakte mangfoldigheter med rand. Det blir gjort i Teorem 3.16 nedenfor. \square

Vi definerer $H_c^n(M, A)$ som den direkte grensen $\varinjlim_K H^n(M, (M - K) \cup A)$ over alle kompakte mengder $K \subset M$. Et element i $H_c^n(M, A)$ er representert ved en kohomologiklasse $[\phi] \in H^n(M, (M - K_\phi) \cup A)$ for en eller annen kompakt mengde K_ϕ .

Teorem 3.16. *La M være en metriserbar n -mangfoldighet med rand, $\partial M = \partial_1 \cap \partial_2$, der $\partial \partial_1 = \partial \partial_2 = \partial_1 \cap \partial_2$. Da fins Poincaré-isomorfi*

$$\begin{aligned} H_c^{n-k}(M, \partial_2) &\rightarrow H_k(M, \partial_1) \\ [\phi] &\mapsto \mu_{K_\phi} \cap [\phi] \end{aligned}$$

gitt ved cap-produkt med $\mu_{K_\phi} \in H_n(M, (M - K_\phi) \cup \partial M)$ det unike elementet som avbildes på den valgte generatoren for $H_n(M, (M - x) \cup \partial M)$ for alle $x \in K_\phi$

Bevis. Siden M er metriserbar kan den skrives som en union $M = \cup_{i=1}^\infty M_i$ av kompakte mangfoldigheter M_i på en slik måte at $M_i \subset \text{int } M_{i+1}$. La $M'_i = M_i \cup (cl(\partial M_i - \partial M) \times [0, \epsilon])$. Med dette menes at M_i er utstyrt med en kraveomegn i M , hvor ϵ velges slik at $M'_i \subset M'_{i+1}$. Da er også $M = \cup_{i=1}^\infty M'_i$. Det fins isomorfi

$$\varinjlim H_k(M'_i, \partial_1 \cap M'_i) \rightarrow H_k(M, \partial_1)$$

fordi:

surjektivitet: la $\sum n_i \sigma_i$ være en relativ sykel i M . Bildet av denne er kompakt, så det er dermed inneholdt i en M'_i .

injektivitet: la $\sum n_i \sigma_i$ være en relativ sykel i en M'_i og anta den er rand i M . Ved kompakthet er den rand i en M_i , dermed representerer den null i $\varinjlim H_k(M'_i, \partial_1 \cap M'_i)$.

La $\partial_1^i = \partial_1 \cap M_i$, $\partial_2^i = cl(\partial M_i - \partial_1^i)$, $\partial_1^{i'} = \partial_1 \cap M'_i$, $\partial_2^{i'} = cl(\partial M'_i - \partial_1^{i'})$. Vi har da et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc} H_k(M, \partial_1) & \xleftarrow{\approx} & \varinjlim H_k(M'_i, \partial_1^{i'}) \\ \uparrow & & \uparrow \cap [M'_i] \\ \varinjlim H^{n-k}(M, (M - M_i) \cup \partial_2) & \xrightarrow[\text{eksisjon}]{\approx} & \varinjlim H^{n-k}(M'_i, \partial_2^{i'}) \\ \parallel & & \\ H_c^{n-k}(M, \partial_2) & & \end{array}$$

der den vertikale avbildningen til høyre er grensen av Poincaré-dualitetene $H^{n-k}(M'_i, \partial_2^{i'}) \rightarrow H_k(M'_i, \partial_1^{i'})$ som er vist i Hatcher [4] i dette kompakte tilfellet. Eksisjonsisomorfien $H_n(M'_i, \partial M'_i) \rightarrow H_n(M, (M - M_i) \cup \partial M)$ avbilder $[M'_i]$ på $\mu_{M_i} \in H_n(M, (M - M_i) \cup \partial M)$, det unike elementet som avbildes på en generator for $H_n(M, (M - x) \cup \partial M)$ for alle $x \in M_i$, siden diagrammet

$$\begin{array}{ccc} H_n(M'_i, \partial M'_i) & \xrightarrow{\approx} & H_n(M, (M - M_i) \cup \partial M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(M'_i, (M'_i - x) \cup \partial M'_i) & \xrightarrow{\approx} & H_n(M, (M - x) \cup \partial M) \end{array}$$

kommuterer for $x \in M_i$. Ved dualitet kommuterer også diagrammet med kohomologi. \square

Formelen i Teorem 3.15 kan brukes som definisjon av Reidemeister-tallet. I Definisjon 2.2 antok vi at fikspunktene for f var isolerte, for at $index(f, x)$ skulle gi mening for alle $x \in Fix(f)$. Ved å bruke formelen i Teorem 3.15 som definisjon av $\overline{R}(f)$ har vi ikke lenger bruk for begrepet fikspunktindeks, så vi trenger heller ikke anta at fikspunktene for f er isolerte. Formelen for $\overline{R}(f)$ kan altså ses på som en utvidelse av Definisjon 2.2. En annen fordel med formelen for $\overline{R}(f)$ i Teorem 3.15 er at vi lettere kan bevise homotopiinvarians av Reidemeister-trasen, uten bruk av fikspunktindeksen.

Teorem 3.17. *La $f_t : f_0 \simeq f_1 : X \rightarrow X$ være en homotopi. Da vil isomorfien $H_0(\overline{\Lambda}_{f_0}) \rightarrow H_0(\overline{\Lambda}_{f_1})$ indukert av homotopiekvivalensen i Proposisjon 1.10 avbilde $\overline{R}(f_0)$ på $\overline{R}(f_1)$*

Bevis. La Λ_F være rommet $\Lambda_F = \{(\phi, t) \mid \phi(1) = f_t(\phi(0))\}$. Da er $\overline{\Lambda}_F \rightarrow X \times I$ den induerte fibrasjonen til $\overline{X^I} \rightarrow X \times X$:

$$\begin{array}{ccccc} (\phi, t) & & \overline{\Lambda}_F & \xrightarrow{\quad} & \overline{X^I} & & \phi \\ \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow p & & \downarrow \\ (\phi(0), t) & & X \times I & \longrightarrow & X \times X & & (\phi(0), \phi(1)) \end{array}$$

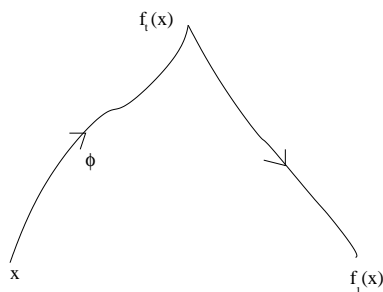
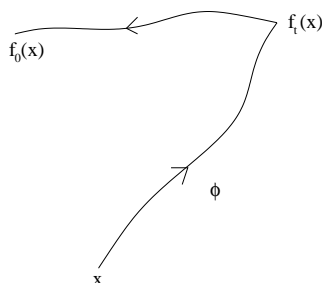
$$(x, t) \longmapsto (x, f_t(x))$$

$\overline{\Lambda}_F$ inneholder $\overline{\Lambda}_{f_0}$ og $\overline{\Lambda}_{f_1}$ som deformasjonsretrakter

$$\overline{\Lambda}_{f_0} \begin{array}{c} \xrightarrow{i_0} \\ \longleftarrow r_0 \end{array} \overline{\Lambda}_F$$

$$\overline{\Lambda}_{f_1} \begin{array}{c} \xrightarrow{i_1} \\ \xleftarrow{r_1} \end{array} \overline{\Lambda}_F$$

hvor r_0 er gitt ved $r_0(\phi, t) = \phi \cdot (s \mapsto f_{(1-s)t}(x), s \in [0, 1])$, og $r_1 : \overline{\Lambda}_F \rightarrow \overline{\Lambda}_{f_0}$ er gitt ved $r_1(\phi, t) = \phi \cdot (s \mapsto f_{(1-s)t+s}(x), s \in [0, 1])$.



Den sammensatte avbildningen $r_{1*} \circ i_{0*}$ er induert av homotopiekvivalensen $\overline{\Lambda}_{f_0} \rightarrow \overline{\Lambda}_{f_1}, [\phi] \mapsto [\phi \cdot f_t(\phi(0))]$. Diagrammet nedenfor kommuterer

$$\begin{array}{ccc} \overline{\Lambda}_F & \xrightarrow{j_F} & \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X} \\ i_0 \uparrow & \nearrow j_0 & \\ \overline{\Lambda}_{f_0} & & \end{array}$$

der j_F , i_0 og j_0 er inklusjoner. Vi kan lage et tilsvarende diagram for f_1 . Dermed kommuterer følgende diagram.

$$\begin{array}{ccccccc} H_0(\overline{\Lambda}_{f_0}) & \xleftarrow{\approx} & H_c^n(\overline{\Lambda}_{f_0}) & & & & \\ \approx \downarrow i_{0*} & & \uparrow i_0^* & \swarrow j_0^* & & & \\ H_0(\overline{\Lambda}_F) & \xleftarrow{\approx} & H_c^n(\overline{\Lambda}_F) & \xleftarrow{j_F^*} & H_c^n(\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}) & \xrightarrow[\approx]{\mu_{\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}}} & H_n(\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}) \\ \approx \downarrow r_{1*} & & \downarrow i_1^* & \swarrow j_1^* & & & \\ H_0(\overline{\Lambda}_{f_1}) & \xleftarrow{\approx} & H_c^n(\overline{\Lambda}_{f_1}) & & & & \end{array}$$

Dette gir oss at $r_{1*} \circ i_{0*}(\overline{R}(f_0)) = \overline{R}(f_1)$. □

Kapittel 4

Utvidelse til endelige CW-komplekser

I kapittel 3 viste vi en formel for Reidemeister-trasen for avbildninger mellom kompakte mangfoldigheter. I dette kapitlet ønsker vi å utvide formelen til å gjelde for endelige CW-komplekser med egenskapen at de kan embeddes som underkomplekser av \mathbb{R}^n , der \mathbb{R}^n er utstyrt med en passende CW-struktur. Endelige CW-komplekser har egenskapen at de kan embeddes i \mathbb{R}^n som reakt av en euklidsk omegn, se Hatcher [4].

La $U \in H^k(E, SE)$ være Thom-klassen til en k -diskbunt $p : E \rightarrow X$. La $f : (A, \partial A) \rightarrow (X, \partial X)$ være en avbildning. Da er $p_2^*(U) \in H^k(f^*(E), Sf^*(E))$ Thom-klassen til den induerte bunt $f^*(E) \rightarrow A$

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \xrightarrow{p_2} & E \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

siden fibrene er homeomorfe.

Lemma 4.1. *Diagrammet av induerte bunter ovenfor gir oss kommutativitet av Thom-isomorfier*

$$\begin{array}{ccc} H_{k+l}(f^*(E), Sf^*(E)) & \xrightarrow{p_{2*}} & H_{k+l}(E, SE) \\ \downarrow -\cap p_2^*U & & \downarrow -\cap U \\ H_l(f^*(E), f^*(E)_{\partial A}) & \xrightarrow{p_{2*}} & H_l(E, E_{\partial X}) \\ \downarrow p_{1*} & & \downarrow p \\ H_l(A, \partial A) & \xrightarrow{f} & H_l(X, \partial X) \end{array}$$

der de vertikale avbildningene er Thom-isomorfierne for de to diskbuntene.

Bevis. Diagrammet kommuterer siden $p_{2*}(-) \cap U = p_{2*}(- \cap p_2^*U)$ og ved naturlighet av homologi. \square

La X være et CW-kompleks med embedding $h : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ med egenskapen at det fins en CW-struktur på \mathbb{R}^n slik at $h(X)$ er et underkompleks av \mathbb{R}^n . La $f : X \rightarrow X$ være en avbildning. For en åpen omegn N om $h(X)$ med deformasjonsretrakt $r : N \rightarrow h(X)$, kan vi definere en utvidelse av f til N ved $f_N : N \rightarrow N$ gitt ved $f_N(x) = i \circ f \circ r$, der $i : h(X) \hookrightarrow N$ er inklusjonen. I resten av kapitlet vil vi forkorte $\overline{\Lambda_{f_N} N}$ med $\overline{\Lambda_{f_N}}$ for å forenkle notasjonen. r induserer en isomorfi $r_* : H_0(\overline{\Lambda_{f_N}}) \rightarrow H_0(\overline{\Lambda_f})$. Dermed kan Reidemeister-trasen til f defineres som $\overline{R}(f) = r_* \overline{R}(f_N) \in H_0(\overline{\Lambda_f})$.

Teorem 4.2. *Definisjonen av $\overline{R}(f)$ er uavhengig av valg av N og h , det vil si at for to embeddinger $g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ og $h : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ og for to valg av omegner N og M med $g(X) \subset N \subset \mathbb{R}^n$ og $h(X) \subset M \subset \mathbb{R}^m$, der $r_N : N \rightarrow g(X)$ og $r_M : M \rightarrow h(X)$ er deformasjonsretrakter, så er*

$$r_{N*}(\overline{R}(f_N)) = r_{M*}(\overline{R}(f_M))$$

For å bevise Teorem 4.2 trenger vi følgende to resultater.

Lemma 4.3. *La X og Z være kompakte n -mangfoldigheter med rand, anta $X \subset \text{int}Z$ og at $r : Z \rightarrow X$ er en avbildning slik at $i \circ r \simeq \text{id}$ og $r \circ i \simeq \text{id}$, der $i : X \hookrightarrow Z$ er inklusjonen. La $f_X : X \rightarrow X$ være en avbildning og la $f_Z = i \circ f_X \circ r : Z \rightarrow Z$. Da vil isomorfien*

$$i_* : H_0(\overline{\Lambda_{f_X}}) \rightarrow H_0(\overline{\Lambda_{f_Z}})$$

avbilde $\overline{R}(f_X)$ på $\overline{R}(f_Z)$.

Bevis. Det kommutative diagrammet

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f_Z} & Z \\ \downarrow r & & \uparrow i \\ X & \xrightarrow{f_X} & X \end{array}$$

gir oss homotopiekvivalenser

$$\overline{\Lambda_{f_X}} \begin{array}{c} \xrightarrow{i\#} \\ \xleftarrow{r\#} \end{array} \overline{\Lambda_{f_Z}}$$

og

$$\overline{X^I} \begin{array}{c} \xrightarrow{i\#} \\ \xleftarrow{r\#} \end{array} \overline{Z^I}$$

der $i\#$ og $r\#$ er gitt ved komposisjon med i og r hhv. $i\#$ er proper (inversbildet av en kompakt mengde er kompakt) siden den er inklusjonen av et lukket underrom: $\overline{\Lambda_{f_X}} = \pi^{-1}(X)$ er lukket i $\overline{\Lambda_{f_Z}} = \pi^{-1}(Z)$. La $K \subset \overline{\Lambda_{f_Z}}$ være kompakt. Da er $K \cap \overline{\Lambda_{f_X}}$ lukket i $\overline{\Lambda_{f_Z}}$ og i K , dermed er $K \cap \overline{\Lambda_{f_Z}}$ kompakt. Eksisjonsisomorfiene

$$H_n(Z, Z - \text{int}X) \xrightarrow[\approx]{i_*} H_n(Z, Z - (\text{int}X - \partial X \times (0,1))) \xleftarrow[\approx]{i_*} H_n(X, \partial X)$$

gir oss en isomorfi

$$H_n(X, \partial X) \xrightarrow[\approx]{i_*} H_n(Z, Z - \text{int}X)$$

Siden diagrammet nedenfor kommuterer, vil fundamentalklassen $[Z]$ avbildes på fundamentalklassen $[X]$:

$$\begin{array}{ccc} [Z] & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & [X] \\ \\ H_n(Z, \partial Z) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & H_n(Z, Z - \text{int}X) \xleftarrow[\approx]{} H_n(X, \partial X) \\ \downarrow & & \downarrow \quad \quad \downarrow \\ H_n(Z, Z - x) & \xlongequal{\quad\quad\quad} & H_n(Z, Z - x) \xleftarrow{\quad\quad\quad} H_n(X, X - x) \end{array}$$

der $x \in \text{int}X$ og alle avbildningene er gitt ved inklusjoner. Følgende diagram kommuterer:

$$\begin{array}{ccc} [Z] & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & [\Delta_Z] \\ \\ H_n(Z, \partial Z) & \xrightarrow{\Delta_*} & H_n(Z \times Z, Z \times \partial Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(Z, Z - \text{int}X) & \xrightarrow{\Delta_*} & H_n(Z \times Z, Z \times (Z - \text{int}X)) \\ \approx \uparrow & & \uparrow \approx \\ H_n(X, \partial X) & \xrightarrow{\Delta_*} & H_n(X \times X, X \times \partial X) \end{array}$$

$$[X] \xrightarrow{\quad\quad\quad} [\Delta_X]$$

der de vertikale avbildninger er indusert av inklusjoner. Dermed vil $[\Delta_Z]$ avbildes på $[\Delta_X]$. Ved å løfte deformasjonsretraktene får vi isomorfiene

$$\begin{array}{c} H_n(\tilde{Z} \times_\pi \tilde{Z}, p^{-1}(Z \times (Z - \text{int}X))) \\ \approx \downarrow i_* \\ H_n(\tilde{Z} \times_\pi \tilde{Z}, p^{-1}(Z \times (Z - (\text{int}X - \partial X \times (0, 1)))))) \end{array}$$

og

$$H_n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}, \partial_1) \xrightarrow[\approx]{i_*} H_n(p^{-1}(Z \times X), p^{-1}(Z \times \partial X))$$

der $\partial_1 = p^{-1}(X \times \partial X)$. Dessuten har vi eksisjonsisomorfiene

$$\begin{array}{c} H_n(p^{-1}(Z \times X), p^{-1}(Z \times \partial X)) \\ \approx \downarrow i_* \\ H_n(\tilde{Z} \times_\pi \tilde{Z}, p^{-1}(Z \times (Z - (\text{int}X - \partial X \times (0, 1)))))) \end{array}$$

Ved å sette sammen disse tre isomorfiene får vi at

$$i_* : H_n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}, \partial_1) \rightarrow H_n(\tilde{Z} \times_\pi \tilde{Z}, p^{-1}(Z \times (Z - \text{int}X)))$$

er en isomorfi. Dermed får vi et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc} [Z] & \xrightarrow{\quad} & [\tilde{\Delta}_Z] \\ \\ H_n(Z, \partial Z) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}_*} & H_n(\tilde{Z} \times_\pi \tilde{Z}, \partial_1) \\ \downarrow i_* & & \downarrow i_* \\ H_n(Z, Z - \text{int}X) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}_*} & H_n(\tilde{Z} \times_\pi \tilde{Z}, p^{-1}(Z \times (Z - \text{int}X))) \\ \approx \uparrow i_* & & \approx \uparrow i_* \\ H_n(X, \partial X) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}_*} & H_n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}, \partial_1) \\ \\ [X] & \xrightarrow{\quad} & [\tilde{\Delta}_X] \end{array}$$

og $[\tilde{\Delta}_Z]$ avbildes på $[\tilde{\Delta}_X]$ via den høyre vertikale avbildningen ovenfor som svarer til den øverste horisontale avbildningen nedenfor:

$$\begin{array}{ccccc}
H_n(\tilde{Z} \times_\pi \tilde{Z}, \partial_1) & \xrightarrow{i_*} & H_n(\tilde{Z} \times_\pi \tilde{Z}, p^{-1}(Z \times (Z - \text{int}X))) & \xleftarrow{i_*} & H_n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}, \partial_1) \\
\uparrow \text{P} \approx & & \uparrow \approx & & \uparrow \text{P} \approx \\
H_c^n(\tilde{Z} \times_\pi \tilde{Z}, \partial_2) & \xleftarrow{i_*} & H_c^n(\tilde{Z} \times_\pi \tilde{Z}, p^{-1}((Z - \text{int}X) \times Z)) & \xrightarrow{i_*} & H_c^n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}, \partial_2) \\
\downarrow j^* & & \downarrow j^* & & \downarrow j^* \\
H_c^n(\bar{\Lambda}_{f_Z}, \partial \bar{\Lambda}_{f_Z}) & \xleftarrow{=} & H_c^n(\bar{\Lambda}_{f_Z}, \partial \bar{\Lambda}_{f_Z}) & \xrightarrow{i_*} & H_c^n(\bar{\Lambda}_{f_X}, \partial \bar{\Lambda}_{f_X}) \\
\downarrow \text{P} \approx & & \downarrow \text{P} \approx & & \downarrow \text{P} \approx \\
H_0(\bar{\Lambda}_{f_Z}) & \xrightarrow{=} & H_0(\bar{\Lambda}_{f_Z}) & \xleftarrow{i_*} & H_0(\bar{\Lambda}_{f_X})
\end{array}$$

der P står for Poincaré-dualiteten i Teorem 3.16. Den midtre vertikale isomorfien øverst kan bevises på samme måte som Teorem 3.16. Siden diagrammet ovenfor kommuterer vil $\bar{R}(f_X) \in H_0(\bar{\Lambda}_{f_X})$ avbildes på $\bar{R}(f_Z) \in H_0(\bar{\Lambda}_{f_Z})$ via i_* . \square

Lemma 4.4. *La X være en kompakt n -mangfoldighet med rand, E en kompakt $k+n$ -mangfoldighet med rand, og anta at $p : E \rightarrow X$ er en k -diskbunt. La $f_X : X \rightarrow X$ være en avbildning og la $f_E : E \rightarrow E$ være gitt ved $f_E(e) = i \circ f_X \circ p(e)$, der $i : X \hookrightarrow E$ er nullseksjonen. Da vil isomorfien*

$$i_* : H_0(\bar{\Lambda}_{f_X}) \rightarrow H_0(\bar{\Lambda}_{f_E})$$

avbilde $\bar{R}(f_X)$ på $\bar{R}(f_E)$.

Bevis. La $proj_1 : E \times E \rightarrow E$ være projeksjon på første faktor og la $proj_2 : E \times E \rightarrow E$ være projeksjon på andre faktor. La tilsvarende $pr_1 : E \oplus E \rightarrow E$ være projeksjon på første faktor for den direkte summen av E med seg selv, og la $pr_2 : E \oplus E \rightarrow E$ være projeksjon på andre faktor. Da kommuterer følgende diagram

$$\begin{array}{ccc}
E \oplus E & \xrightarrow{i} & E \times E \\
& \searrow pr_i & \downarrow proj_i \\
& & E
\end{array}$$

for $i = 1, 2$.

Vi vil begynne med å sette opp fire diagrammer av induserte bunter

$$\begin{array}{ccc}
\bar{\Lambda}_{f_E} & \xrightarrow{\pi} & E \\
\bar{p} \downarrow & & \downarrow p \\
\bar{\Lambda}_{f_X} & \xrightarrow{\pi} & X
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 E \oplus E & \xrightarrow{i} & E \times E \\
 \downarrow pr_2 & & \downarrow p \times id \\
 E & \xrightarrow{\Delta'} & X \times E
 \end{array}$$

der $\Delta' = (p \times id) \circ \Delta$.

$$\begin{array}{ccc}
 E \times E & \xrightarrow{proj_1} & E \\
 \downarrow p \times id & & \downarrow p \\
 X \times E & \xrightarrow{p_1} & X
 \end{array}$$

der $p_1(x, e) = x$.

$$\begin{array}{ccc}
 E \oplus E & \xrightarrow{i} & E \times E \\
 \downarrow p \circ pr_1 = p \circ pr_2 & & \downarrow p \times p \\
 X & \xrightarrow{\Delta} & X \times X
 \end{array}$$

Hvis $U \in H^k(E, SE)$ er Thom-klassen til $p : E \rightarrow X$, så er $proj_1^*U \in H^k(E \times E, SE \times E)$ Thom-klassen til $p \times id : E \times E \rightarrow X \times E$, og $i^*(proj_1^*U) = pr_1^*U$ er Thom-klassen til $pr_2 : E \oplus E \rightarrow E$ ved kommentaren før Lemma 4.1. Hvis $U^\times \in H^{2k}(E \times E, S(E \times E))$ er Thom-klassen til $E \times E \rightarrow X \times X$, så er $i^*U^\times \in H^{2k}(E \oplus E, S(E \oplus E))$ Thom-klassen til $E \oplus E \rightarrow X$ av samme grunn. Ved Lemma 4.1 vil dermed øvre og nedre kvadrat i diagrammet nedenfor kommutere.

$$\begin{array}{ccccc}
 H_{n+k}(E \times E, E \times \partial E) & \xleftarrow{\Delta_*} & H_{n+k}(E, \partial E) & & [E] \\
 \uparrow \approx -\cap proj_1^*U & & \uparrow \approx -\cap pr_1^*U & \searrow -\cap U & \downarrow \\
 H_{n+2k}(E \times E, (SE \times E) \cup (E \times \partial E)) & \xleftarrow{i_*} & H_{n+2k}(E \oplus E, \partial(E \oplus E)) & & \\
 \parallel & & \parallel & & \\
 H_{n+2k}(E \times E, S(E \times E) \cap (E \times E_{\partial X})) & \xleftarrow{i_*} & H_{n+2k}(E \oplus E, \partial(E \oplus E)) & & \\
 \downarrow \approx -\cap U^\times & & \downarrow \approx -\cap i^*U^\times & \nearrow & \\
 H_n(X \times X, X \times \partial X) & \xleftarrow{\Delta_*} & H_n(X, \partial X) & & [X]
 \end{array}$$

Den høyre delen av diagrammet med den buede pilen kommuterer opp til et tegn ± 1 , for la oss starte med et element $x \in H_{n+2k}(E \oplus E, \partial(E \oplus E))$:

$$\begin{array}{ccccc}
 H_{n+2k}(E \oplus E, \partial(E \oplus E)) & \xrightarrow{-\cap i^* U^\times} & H_n(E \oplus E, E \oplus E_{\partial X}) & \xrightarrow{(p \circ pr_2)_*} & H_n(X, \partial X) \\
 \downarrow -\cap pr_1^* U & & & & \uparrow p_* \\
 H_{n+k}(E \oplus E, E \oplus E_{\partial E}) & & & & \\
 \downarrow pr_{2*} & & & & \\
 H_{n+k}(E, \partial E) & \xrightarrow{-\cap U} & H_n(E, E_{\partial X}) & &
 \end{array}$$

bildet av x ved de to horisontale avbildningene øverst er

$$p_* \circ pr_{2*}(x \cap i^* U^\times)$$

mens ved å gå den andre veien får vi

$$\begin{aligned}
 & p_*(pr_{2*}(x \cap pr_1^* U) \cap U) \\
 &= p_* \circ pr_{2*}((x \cap pr_1^* U) \cap pr_2^* U) \\
 &= p_* \circ pr_{2*}(x \cap (pr_1^* U \cup pr_2^* U)) \\
 &= p_* \circ pr_{2*}(x \cap (i^* \circ proj_1^* U \cup i^* \circ proj_2^* U)) \\
 &= p_* \circ pr_{2*}(x \cap i^*(proj_1^* U \cup proj_2^* U)) \\
 &= p_* \circ pr_{2*}(x \cap i^*(U \times U)) \\
 &= (-1)^{kn} p_* \circ pr_{2*}(x \cap i^* U^\times)
 \end{aligned}$$

Den siste likheten følger av at $U^\times = (-1)^{kn} U \times U$, der $U \in H^k(E, SE)$ er Thom-klassen til $E \rightarrow X$, og $U^\times \in H^{2k}(E \times E, S(E \times E))$ er Thom-klassen til $E \times E \rightarrow X \times X$, siden vi for to generelle rom A og B har formelen $(a \times b) \cap (\alpha \times \beta) = (-1)^{\deg(\beta)(\deg(a) - \deg(\alpha))} (a \cap \alpha) \times (b \cap \beta)$ for $\alpha \in H^*(A)$, $\beta \in H^*(B)$, $a \in H_*(A)$ og $b \in H_*(B)$, se Bredon [1], kap VI. I Bredons bok er det et annet tegn i formelen enn det som er skrevet opp ovenfor. Dette kommer av at Bredons definisjon av cup-produkt og dermed også av kryssproduktet $\alpha \times \beta$ i kohomologi avviker med en faktor $(-1)^{\deg(\alpha)\deg(\beta)}$ fra definisjonen som fins i Hatcher [4], som er den vi bruker her. Thom-klassen U^\times er definert ved $[E \times E] \cap U^\times = [X \times X]$. Formelen ovenfor gir oss $[E \times E] \cap (U \times U) = ([E] \times [E]) \cap (U \times U) = (-1)^{k(n+k-k)} ([E] \cap U) \times ([E] \cap U) = (-1)^{kn} [X] \times [X] = (-1)^{kn} [X \times X]$. Dette beviser at $U^\times = (-1)^{kn} U \times U$.

Dermed vil $[X]$ avbildes på $(-1)^{kn}[E]$ ved de tre vertikale avbildningene til høyre i diagrammet nederst på side 46.

Thom-klassen $\tilde{U} \in H^{2k}(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, S(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}))$ til $\pi : \tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E} \rightarrow \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}$ er gitt ved p^*U^{\times} der p er overdekningsrommet $\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E} \rightarrow \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}$, siden fiberne til de to buntene

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E} & \xrightarrow{p} & E \times E \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X} & \xrightarrow{p} & X \times X \end{array}$$

er de samme. For å forenkle notasjonen definerer vi $\partial_1^E = p^{-1}(E \times \partial E)$, $\partial_2^E = p^{-1}(\partial E \times E)$, $\partial_1^X = p^{-1}(X \times \partial X)$ og $\partial_2^X = p^{-1}(\partial X \times X)$. Da kommuterer også følgende diagram

$$\begin{array}{ccc} (-1)^{kn} \tilde{\Delta}_*[E] & \xrightarrow{\quad} & (-1)^{kn} \Delta_*[E] \\ \\ H_{n+k}(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, \partial_1^E) & \xrightarrow{p^*} & H_{n+k}(E \times E, E \times \partial E) \\ \uparrow -\cap p^*(proj_1^*U) & & \uparrow -\cap proj_1^*U \\ H_{n+2k}(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, p^{-1}(SE \times E) \cup \partial_1^E) & \xrightarrow{p^*} & H_{n+2k}(E \times E, (SE \times E) \cup (E \times \partial E)) \\ \parallel & & \parallel \\ H_{n+2k}(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, p^{-1}(SE \times E) \cup \partial_1^E) & \xrightarrow{p^*} & H_{n+2k}(E \times E, S(E \times E) \cup (E \times E_{\partial X})) \\ \downarrow -\cap \tilde{U} \approx & & \downarrow \approx -\cap U^{\times} \\ H_n(\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}, \partial_1^X) & \xrightarrow{p^*} & H_n(X \times X, X \times \partial X) \\ \\ \tilde{\Delta}_*[X] & \xrightarrow{\quad} & \Delta_*[X] \end{array}$$

der $proj_1^*U \in H^k(E \times E, SE \times E)$ og $p^*proj_1^*U \in H^k(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, p^{-1}(SE \times E))$. Dermed vil $[\tilde{\Delta}_X] = \tilde{\Delta}_*[X] \in H_n(\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}, \partial_1^X)$ avbildes på $(-1)^{kn}[\tilde{\Delta}_E] = (-1)^{kn}\tilde{\Delta}[E] \in H_n(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, \partial_1^E)$ ved komposisjonen av de tre vertikale avbildningene til venstre i diagrammet ovenfor. Det gjenstår å vise kommutativitet av følgende diagram:

$$\begin{array}{ccccccc}
\overline{R}(f_E) & \longleftarrow & & & & & \longrightarrow [\tilde{\Delta}_E] \\
\\
H_0(\overline{\Lambda}_{f_E}) & \xleftarrow{\approx \text{P}} & H_c^{n+k}(\overline{\Lambda}_{f_E}, \partial \overline{\Lambda}_{f_E}) & \xleftarrow{j^*} & H_c^{n+k}(\tilde{E} \times_\pi \tilde{E}, \partial_2^E) & \xrightarrow{\approx \text{P}} & H_{n+k}(\tilde{E} \times_\pi \tilde{E}, \partial_1^E) \\
\uparrow \approx & & \uparrow -\cap j^*(p^*(proj_1^*U)) & & \uparrow -\cup(p^*(proj_1^*U)) & & \uparrow -\cap p^*(proj_1^*U) \\
H_k(\overline{\Lambda}_{f_E}, S(\overline{\Lambda}_{f_E})) & \xleftarrow{\approx \text{P}} & H_c^n(\overline{\Lambda}_{f_E}, \pi^{-1}(\partial(\overline{\Lambda}_{f_X}))) & \xleftarrow{j^*} & H_c^n(\tilde{E} \times_\pi \tilde{E}, p^{-1}(E_{\partial^X} \times E)) & \xrightarrow{\approx \text{P}} & H_{n+2k}(\tilde{E} \times_\pi \tilde{E}, p^{-1}(SE \times E) \cup \partial_1^E) \\
\uparrow = & & \uparrow = & & \uparrow = & & \uparrow = \\
H_k(\overline{\Lambda}_{f_E}, S(\overline{\Lambda}_{f_E})) & \xleftarrow{\approx \text{P}} & H_c^n(\overline{\Lambda}_{f_E}, \pi^{-1}(\partial(\overline{\Lambda}_{f_X}))) & \xleftarrow{j^*} & H_c^n(\tilde{E} \times_\pi \tilde{E}, \pi^{-1}(\partial_2^X)) & \xrightarrow{\approx \text{P}} & H_{n+2k}(\tilde{E} \times_\pi \tilde{E}, S(\tilde{E} \times_\pi \tilde{E}) \cup \pi^{-1}(\partial_1^X)) \\
\downarrow \approx & & \downarrow -\cap j^* p^* proj_1^* U & & \downarrow \approx p^* & & \downarrow \approx -\cap \tilde{U} \\
H_0(\overline{\Lambda}_{f_X}) & \xleftarrow{\approx \text{P}} & H_c^n(\overline{\Lambda}_{f_X}, \partial \overline{\Lambda}_{f_X}) & \xleftarrow{j^*} & H_c^n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}, \partial_2^X) & \xrightarrow{\approx \text{P}} & H_n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}, \partial_1^X) \\
\overline{R}(f_X) & \longleftarrow & & & & & \longrightarrow [\tilde{\Delta}_X]
\end{array}$$

I diagrammet på forrige side står P for Poincaré-dualitet. $[\tilde{\Delta}_X]$ avbildes på $(-1)^{kn}[\tilde{\Delta}_E]$, så hvis diagrammet er veldefinert og kommuterer opp til en faktor $(-1)^{kn}$, så vil $\overline{R}(f_X)$ avbildes på $\overline{R}(f_E)$ via de vertikale isomorfier til venstre i diagrammet, hvor komposisjonen av disse er gitt ved i_* . La $S(\overline{\Lambda}_{f_E})$ være sfærebunten til $\overline{\Lambda}_{f_E} \rightarrow \overline{\Lambda}_{f_X}$. Da er $S(\overline{\Lambda}_{f_E}) \subset p^{-1}(SE \times E)$ siden vi har et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc} (\overline{\Lambda}_{f_E}, S(\overline{\Lambda}_{f_E})) & \xleftarrow{j} & (\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, p^{-1}(SE \times E)) \\ p \downarrow & & p \downarrow \\ (E, SE) & \xrightarrow{\Gamma_f} & (E \times E, SE \times E) \end{array}$$

hvor $S(\overline{\Lambda}_{f_E})$ avbildes på sfærebunten SE til $E \rightarrow X$ siden

$$\begin{array}{ccc} \overline{\Lambda}_{f_E} & \xrightarrow{\pi} & E \\ \overline{p} \downarrow & & p \downarrow \\ \overline{\Lambda}_{f_X} & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

er et diagram av induuerte bunter. Dermed er $j^*p^*proj_i^*U \in H^k(\overline{\Lambda}_{f_E}, S(\overline{\Lambda}_{f_E}))$ og det store diagrammet på forrige side er veldefinert. Den nedre høyre delen

$$\begin{array}{ccc} H_c^n(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, \pi^{-1}(\partial_2^X)) & \xrightarrow[\approx]{P} & H_{n+2k}(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, S(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}) \cup \pi^{-1}(\partial_1^X)) \\ \approx \uparrow \pi^* & & \downarrow -\cap \tilde{U} \approx \\ H_c^n(\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}, \partial_2^X) & \xrightarrow[\approx]{P} & H_n(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, \pi^{-1}(\partial_1^X)) \\ & & \downarrow \pi_* \\ & & H_n(\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}, \partial_1^X) \end{array}$$

kommuterer, for la en klasse i $H_c^n(\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}, \partial_2^X)$ være representert ved $[\phi] \in H^n(\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}, \partial_2^X \cup (\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X} - K))$ for en kompakt K . La $\mu_K^E \in H_{2n+2k}(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, (\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E} - \pi^{-1}(K)) \cup \partial(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}))$ være det unike elementet som avbildes på en valgt generator for $H_{2n+2k}(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, (\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E} - x) \cup \partial(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}))$ for enhver $x \in \pi^{-1}(K)$, og la $\tilde{U} \in H^{2k}(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, S(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}))$ være Thom-klassen til $\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E} \rightarrow \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}$. Diagrammet kommuterer siden

$$\begin{aligned} & \pi_*((\mu_K^E \cap \pi^*[\phi]) \cap \tilde{U}) = \pi_*(\mu_K^E \cap (\pi^*[\phi] \cup \tilde{U})) \\ & = \pi_*(\mu_K^E \cap (\tilde{U} \cup \pi^*[\phi])) \quad (\text{siden dimensjonen er jevn}) \\ & = \pi_*((\mu_K^E \cap \tilde{U}) \cap \pi^*[\phi]) = \pi_*[\mu_K^E \cap \tilde{U}] \cap [\phi] \\ & = \mu_K^X \cap [\phi] \end{aligned}$$

Vi vil også bevise kommutativitet av det nedre venstre kvadratet på side 49:

$$\begin{array}{ccc}
 H_k(\overline{\Lambda}_{f_E}, S(\overline{\Lambda}_{f_E})) & \xleftarrow{\text{P}} & H_c^n(\overline{\Lambda}_{f_E}, \pi^{-1}(\partial\overline{\Lambda}_{f_X})) \\
 \downarrow -\cap j^* p^* \text{proj}_1^* U & & \uparrow \overline{p}^* \approx \\
 H_0(\overline{\Lambda}_{f_E}) & & \\
 \downarrow \approx \overline{p}_* & & \\
 H_0(\overline{\Lambda}_{f_X}) & \xleftarrow{\text{P}} & H_c^n(\overline{\Lambda}_{f_X}, \partial(\overline{\Lambda}_{f_X}))
 \end{array}$$

La et element i $H_c^n(\overline{\Lambda}_{f_X}, \partial(\overline{\Lambda}_{f_X}))$ være representert ved $[\phi] \in H^n(\overline{\Lambda}_{f_X}, (\overline{\Lambda}_{f_X} - K) \cup \partial(\overline{\Lambda}_{f_X}))$. La $\mu_K^X \in H_n(\overline{\Lambda}_{f_X}, (\overline{\Lambda}_{f_X} - K) \cup \partial(\overline{\Lambda}_{f_X}))$ og $\mu_K^E \in H_{n+k}(\overline{\Lambda}_{f_E}, (\overline{\Lambda}_{f_E} - \overline{p}^{-1}(K)) \cup \partial(\overline{\Lambda}_{f_E}))$ være de unike elementene som avbildes på en valgt generator i de lokale homologigruppene om $x \in K$ eller $\pi^{-1}(K)$ hhv. Diagrammet kommuterer opp til en faktor ± 1 fordi

$$\begin{aligned}
 & \overline{p}_*((\mu_K^E \cap \overline{p}^*[\phi]) \cap j^* p^* \text{proj}_1^* U) \\
 &= (-1)^{kn} \overline{p}_*(\mu_K^E \cap j^* p^* \text{proj}_1^* U) \cap [\phi] \\
 &= (-1)^{kn} \mu_K^X \cap [\phi]
 \end{aligned}$$

Den siste likheten følger av at $j^* p^* \text{proj}_1^* U$ er Thom-klassen til $\overline{\Lambda}_{f_E} \rightarrow \overline{\Lambda}_{f_X}$, siden vi har et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc}
 (\overline{\Lambda}_{f_E}, S\overline{\Lambda}_{f_E}) & \xrightarrow{j} & (\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, p^{-1}(SE \times E)) \\
 \downarrow \pi & \Gamma_f & \downarrow p \\
 (E, SE) & \xrightarrow{\text{proj}_1} & (E \times E, SE \times E)
 \end{array}$$

hvor $\text{proj}_1 \circ \Gamma_f = id_E$ og $\text{proj}_1 \circ p \circ j = p \mid \overline{\Lambda}_{f_E} = \pi$. $\pi^* : H^k(E, SE) \rightarrow H^k(\overline{\Lambda}_{f_E}, S\overline{\Lambda}_{f_E})$ tar Thom-klassen til $E \rightarrow X$ på Thom-klassen til $\overline{\Lambda}_{f_E} \rightarrow \overline{\Lambda}_{f_X}$, siden sistnevnte er den induserte bunten til den første via $\pi : \overline{\Lambda}_{f_E} \rightarrow \overline{\Lambda}_{f_X}$. Kommutativitet av de andre kvadratene er trivielt. \square

Bevis for Teorem 4.2. La X være et CW-kompleks og la $g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ være en embedding slik at $g(X)$ er et underkompleks av \mathbb{R}^n , der \mathbb{R}^n er utstyrt med en passende CW-struktur. La N_1 og N_2 være åpne omegner om $g(X)$ i \mathbb{R}^n slik at $r_1 : N_1 \rightarrow g(X)$ og $r_2 : N_2 \rightarrow g(X)$ er deformasjonsretrakter. Da vil $N_1 \cap N_2$ inneholde en omegn N_{12} om $g(X)$ slik at det fins deformasjonsretrakt $r_{12} : N_{12} \rightarrow g(X)$, ved Proposisjon A.5 i Hatcher [4]. Da vil Lemma 4.3 gi oss likheter

$$\begin{aligned}\overline{R}(f_{N_1}) &= i_{1*}\overline{R}(f_{N_{12}}) \\ \overline{R}(f_{N_2}) &= i_{2*}\overline{R}(f_{N_{12}})\end{aligned}$$

der i_1 og i_2 er inklusjonene $i_1 : N_{12} \hookrightarrow N_1$ og $i_2 : N_{12} \hookrightarrow N_2$. Vi har at $i_1 \circ i_{12} = j_1$ siden diagrammet av inklusjoner

$$\begin{array}{ccc} & & N_1 \\ & \nearrow^{j_1} & \uparrow^{i_1} \\ g(X) & \xrightarrow{i_{12}} & N_{12}\end{array}$$

kommuterer. Dette gir oss at $r_{12} \simeq (r_1 \circ j_1) \circ r_{12} = r_1 \circ (i_1 \circ i_{12}) \circ r_{12} \simeq r_1 \circ i_1$. Dermed er $r_{1*}\overline{R}(f_{N_1}) = r_{1*}(i_{1*}\overline{R}(f_{N_{12}})) = r_{12*}\overline{R}(f_{N_{12}})$. Ved et symmetrisk argument er også $r_{2*}\overline{R}(f_{N_2}) = r_{12*}\overline{R}(f_{N_{12}})$.

Anta så at $g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ og $h : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ er embeddinger. La $g \times h : X \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ være gitt ved $(g \times h)(x) = (g(x), h(x))$. La N være en omegn om $g(X)$ i \mathbb{R}^n og la M være en omegn om $h(X)$ i \mathbb{R}^m . Da er $N \times M$ en omegn om $(g \times h)(X)$ i \mathbb{R}^{n+m} . Betrakt det kommutative diagrammet

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{g} & g(X) & \xrightarrow{i_N} & N \\ & & & \searrow^k & \downarrow^b \\ & & & & N \times M\end{array}$$

der b er gitt ved $b(u) = (u, i_M \circ h \circ g^{-1} \circ r_N(u))$, k er gitt ved $k(x) = (i_N \circ g(x), i_M \circ h(x))$, der r_N, i_N, r_M og i_M er deformasjonsretrakt og inklusjon

$$N \begin{array}{c} \xrightarrow{r_N} \\ \xleftarrow{i_N} \end{array} g(X)$$

og

$$M \begin{array}{c} \xrightarrow{r_M} \\ \xleftarrow{i_M} \end{array} h(X)$$

La E_N være en tubulær omegn om $b(N)$ i $N \times M$, denne kan ses på som en m -diskbunt $\pi_N : E_N \rightarrow b(N) \approx N$. E_M defineres tilsvarende. Da er

$$\begin{aligned}\overline{R}(f_{E_N}) &= i_*\overline{R}(f_N) \\ \overline{R}(f_{E_M}) &= i_*\overline{R}(f_M)\end{aligned}$$

ved Lemma 4.4. Men $\overline{R}(f_{E_N}) \in H_0(\Lambda_f E_N)$ og $\overline{R}(f_{E_M}) \in H_0(\Lambda_f E_M)$ avbildes på samme element i $H_0(\Lambda_f X)$ ved Lemma 4.3, siden de begge er omegner om $(g \times h)(X)$ i \mathbb{R}^{n+m} med $(g \times h)(X)$ som deformasjonsretrakt. □

Bibliografi

- [1] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*. Springer-Verlag GTM 139, 1993.
- [2] Robert F. Brown. *The Lefschetz Fixed Point Theorem*. Scott, Foresman, Chicago, 1971.
- [3] R. J. Daverman and R. B. Sher. *Handbook of Geometric Topology*. Elsevier, 2001.
- [4] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [5] B. J. Jiang. Lectures on nielsen fixed point theory. *Contemporary Math.*, Vol 14, RI 1983.
- [6] Serge Lang. *Fundamentals of Differential Geometry*. Springer GTM 191, 1999.
- [7] J. Milnor and J. Stasheff. *Characteristic Classes*. Princeton University Press, 1974.

Register

- basisrom, 13
- basisskifte, 31
- cap-produkt, 23–27, 30–38, 41, 46–51
- cup-produkt, 23, 24, 26, 27, 30, 31, 34, 37–39, 47, 49, 50
- CW-kompleks, 7, 8, 41, 42, 51
- CW-struktur, 41, 42, 51
- deformasjonsretrakt, 39, 42, 44, 49, 51, 52
- dekktranslasjon, 12, 13, 15
- diagonalvirkning, 27, 29, 32
- direkte grense, 33, 38
- direkte sum, 22
- diskbunt, 23, 41, 45, 52
- dual basis, 30
- eksisjon, 26, 27, 38, 39, 43, 44
- embedding, 41, 42, 51, 52
- fiber, 10, 13, 15, 17, 23, 24, 26, 33, 41
- fibrasjon, 9–11, 32
- fikspunkt, 7, 8, 11, 12, 19, 22, 31, 35, 36, 39
 - isolert, 19
- fikspunktindeks, 8, 19–22, 39
- fikspunktklasse, 7, 8, 11, 12, 19
 - essensiell, 7
 - korrespondanse mellom, 19
- fri gruppe, 22
- fundamentalklasse, 24, 26, 27, 30, 33, 37, 43
- homotopiekvivalens, 10, 12, 13, 20, 40, 42
- homotopiinvarians, 8, 39
- homotopiløftningsegenskapen, 9
- indusert bunt, 41, 45, 50, 51
- indusert fibrasjon, 10, 11, 32, 39
- kompakt-åpen topologi, 9, 17, 28
- konjugasjonsklasse, 7, 12
- kraveomegn, 38
- kryssprodukt, 47
- løftning, 7, 9, 10, 12–15, 17, 32
- løftningsklasse, 7, 12, 13, 19
- løkkerom, 10
- Lefschetz' fikspunktteorem, 7, 31
- Lefschetz-tallet, 7, 8, 30, 31, 36
- lokalt veisammenhengende, 11–13
- mangfoldighet, 19, 23, 25–27, 30–38, 41, 45
 - med rand, 26, 27, 35, 36, 38, 42, 45
 - metriserbar, 38
 - orienterbar, 23, 27, 31, 32
 - orientert, 26
- Nielsen-tallet, 7
- nullseksjonen, 23, 45
- orienteringsbevarende avbildning, 35
- overdekningsrom, 8, 15, 17, 28, 30, 48
 - isomorfi av, 30

- Poincaré-dualitet, 24, 27, 33, 37–39, 45, 49, 50
proper avbildning, 43
- Reidemeister-tallet, 7, 12, 13, 17, 19
Reidemeister-trasen, 8, 19–23, 36, 39–42
retrakt, 41
- semilokalt 1-sammenhengende, 11, 12
sfærebunt, 24, 50
snittegn, 25–27, 31, 34
snittprodukt, 24–27, 30, 31, 33–35
standard basis, 31
sub-basis, 9
sykel, 38
- tangentrom, 24
Thom-isomorfi, 23, 41
Thom-klasse, 23, 24, 26, 33, 41, 46, 47, 50, 51
Thoms isomorfiteorem, 23
totalrom, 13
transverselt, 24, 25, 27, 31, 34, 35
tubulær omegn, 23, 24, 52
- underkompleks, 41, 42
undermangfoldighet, 24
universaloverdekningsrommet, 7, 12, 28
- veikomponent, 8, 11, 13, 14, 22
veiløftningsegenskapen, 15, 17
veisammenhengende, 11–14, 22, 32