UNIVERSITETET
I OSLO

Masteroppgave

Spillet Borel som et rammeverk for å undervise sannsynlighet i ungdomsskolen

Simen Biribakken & Pål Fredrik Mørch-Reiersen

Lektorprogrammet
30 Studiepoeng

Institutt for lærerutdanning og skoleforskning
Det utdanningsvitenskapelige fakultet

Juni 2023

UNIVERSITETET
I OSLO

Masteroppgave

Spillet Borel som et rammeverk for å undervise sannsynlighet i ungdomsskolen

Simen Biribakken & Pål Fredrik Mørch-Reiersen

Lektorprogrammet
30 Studiepoeng

Institutt for lærerutdanning og skoleforskning
Det utdanningsvitenskapelige fakultet

Juni 2023

Oslo, Juni 2023

Spillet Borel som et rammeverk for å undervise sannsynlighet i ungdomsskolen

Sammendrag

Hensikten med denne oppgaven var å teste et undervisningsopplegg med spillet Borel som utgangspunkt. Borel er et spill hvor man vedder ja eller nei på utfallet av et sannsynlighetseksperiment. For å svare på problemstillingen vår: «Hvordan fungerer spillet Borel som et rammeverk for å undervise sannsynlighet i ungdomsskolen, og hvordan skiller Borel seg fra andre matematiske spill?» testet vi undervisningsopplegget i to klasser på 9.trinn. For å evaluere spillet har vi tatt inspirasjon fra tidligere forskning og laget kriterier for rike matematiske spill for bruk i ungdomsskolen. I tillegg er disse kriteriene brukt til å vurdere spill fra tidligere forskning og sammenligne disse med Borel. Mange av disse spillene oppfylte ikke de kriteriene vi hadde satt for rike matematiske spill for bruk i ungdomsskolen. Borel oppfylte derimot alle kriteriene, men med noen mangler i et av kriteriene. Dette skyldes trolig våre valg og ikke spillet i seg selv. For datainnsamlingen benyttet vi oss av videoobservasjon og videointervju. Disse dataene har blitt analysert, tolket og organisert ved hjelp av kodingsprogrammet NVivo. I analysen tok vi utgangspunkt i tre aspekter som alle er sentrale i enhver undervisning. Disse er det sosiale, kognitive og emosjonelle aspektene. Dette har vi så laget flere underkategorier til for å vurdere hvordan det fungerte å bruke Borel i en undervisningsøkt. Resultatene fra analysen var i overkant positive. Elevene hadde mange gode diskusjoner og var både engasjerte og effektive i arbeidet med sannsynlighetsoppgavene gjennom hele undervisningsøkten. Vi opplevde derimot at oppgavene vi hadde designet for spillet var vanskelige for elevene. Elevene likte likevel å spille Borel, noe som var tydelig fra observasjonene av undervisningen og som bekreftes av elevene som ble intervjuet. Det ble også klart at ikke alle elevene hadde fått med seg hva komplementer sannsynlighet gikk ut på. Elevene hadde ingen tidligere kjennskap til hverken Borel eller komplementær sannsynlighet. Det at vi introduserte elevene for mye nytt på en gang i løpet av en undervisningsøkt kan ha bidratt til at de fleste elevene ikke skjønte hva komplementær sannsynlighet gikk ut på. Vi mener likevel at elevene fikk bruke og utvikle språklige ferdigheter, problemløsningsstrategier og var både engasjerte og aktive i undervisningen. Undervisningsopplegget vi designet egnet seg ikke så bra som en problemløsningsøkt. Derfor ville det være interessant i videre forskning å se på andre undervisningsopplegg med Borel som fokuserer på enten problemløsning eller konsolidering.

Summary

The purpose of this assignment was to test a teaching session using the game Borel as a framework. Borel is a game where you bet yes or no on the outcome of a probability experiment. To answer our question: "How does the game Borel work as a framework for teaching probability in secondary school, and how does Borel differ from other mathematical games?" we tested the teaching session in two classes in the 9th grade. To evaluate the game, we have taken inspiration from previous research and created criteria for rich mathematical games for use in secondary schools. In addition, these criteria have been used to assess games from previous research and these have been compared with Borel. Many of these games did not meet the criteria we had set for rich mathematical games for use in secondary schools. Borel, on the other hand, fulfilled all the criteria, but with some shortcomings in one of the criterium. This is probably due to our choices and not the game itself. For the data collection, we used video observation and video interviews. Our data has been analyzed, interpreted and organized using the coding program NVivo. In the analysis, three aspects were used as a basis, all of which are central to any teaching session. These are the social, cognitive, and emotional aspects. We then created several subcategories to further assess how to use Borel in a teaching session. The results of the analysis were overwhelmingly positive. The students had many good discussions and were both engaged and efficient in their work with the probability tasks throughout the teaching session. However, we found that the tasks we had designed for the game were difficult for the students. The students nevertheless enjoyed playing Borel, which was clear from the observations of the teaching session, and which was confirmed by the students who were interviewed. It also became clear that not all the students had understood what complementary probability entailed. The students had no previous knowledge of either Borel or complementary probability. The fact that we introduced the students to a lot of new things at once during one teaching session may have contributed to the fact that most students did not understand what complementary probability was all about. Nevertheless, we believe that the students were able to use and develop language skills, problem-solving strategies and were both engaged and active during the teaching session. The teaching session we designed did not lend itself well as a problem-solving session. Therefore, it would be interesting in further research to look at other teaching sessions with Borel that focus on either problem solving or consolidation.

Forord

Det er med stor glede og lettelse vi nå kan presentere vår masteroppgave innen matematikkdidaktikk. Denne oppgaven er et gjennomarbeidet fellesprodukt av Simen Biribakken og Pål Fredrik Mørch-reiersen. Gjennom dette prosjektet opplevde vi at det var utfordrende å samarbeide til tider, men vi lærte også verdien av å ha noen å støtte seg på. Å jobbe sammen mot et felles mål var en verdifull erfaring som ga oss mulighet til å lære av hverandres styrker og svakheter, og skape et bedre resultat enn om vi hadde arbeidet individuelt. Det å gjennomføre denne oppgaven har vært en lang og krevende prosess, og vi er takknemlig for all støtte og hjelp vi har fått underveis. Vil vi rette en stor takk til vår veileder, Helmer Aslaksen, for hans verdifulle veiledning og støtte gjennom hele prosessen. Vi er takknemlig for all den tid og energi han har brukt på å hjelpe oss med å formidle på en klar og overbevisende måte. Vi er også takknemlig for at han viste oss et så godt spill. Uten han hadde vi ikke blitt introdusert til Borel og denne masteroppgaven ville aldri vært mulig.

Jeg Simen vil takke alle mine venner som inviterte til fest og moro når oppgaveskrivingen ble for mye. Jeg vil også takke Pål Fredrik som inviterte til skriving når det ble for mye fest og moro. Videre vil jeg takke alle mine venner som har lånt et øre og måttet høre på all syting og klaging gjennom hele masterskrivingen.

Jeg Pål Fredrik vil takke min kjære mamma, som har støttet meg gjennom hele prosessen og har hjulpet meg med mitt språk og strukturen i vår oppgave. Jeg vil også takke min samboer Maria Lyder for å holde ut med en stresset masterstudent hele dette halvåret. Hennes støtte og tålmodighet har betydd mye for meg, og jeg er takknemlig for å ha henne i livet mitt. Jeg vil også takke min pappa som også har vært engasjert og tok på seg å lese gjennom hele oppgaven før vi leverte. Jeg vil også takke min bror Carl Petter for hjelpen med å gjøre simuleringer av spill og den generelle positiviteten han har vist meg gjennom hele denne prosessen. Jeg setter virkelig stor pris på dere alle. Til slutt vil jeg takke min masterpartner Simen, som overlevde alle mine mystiske skriblerier. Vi har jobbet tett sammen i mange år, og jeg vil spesielt takke deg for dette tette samarbeidet opp mot alle eksamener og nå masteroppgave.

Innholdsfortegnelse

Figurliste:

Tabelliste:

1 Introduksjon

1.1 Bakgrunn for valg av oppgave

Fra egne erfaringer som tidligere elever er vi enige om at sannsynlighet var et vanskelig tema innenfor matematikk. Mye arbeid uten å oppleve suksess kan føre til at man mister interessen for det man jobber med og kan gi en følelse av håpløshet. Det er derfor viktig at alle elever uavhengig av nivå får oppleve suksess slik at motivasjonen for faget opprettholdes. De fleste er enige i at spill er underholdene og engasjerende, noe som gjør det veldig fristene å ta i bruk i undervisning. Det var en felles interesse for bruken av spill i undervisning som gjorde at vi bestemte oss for å skrive en master sammen. Mange lærere tar i bruk spill i undervisningen sin, men det er ikke alltid dette har en ønsket effekt. Etter vår erfaring ender det ofte bare opp som underholdning og et avbrekk fra den vante undervisningen. Vi var derfor interessert i å finne et spill som bydde på mer enn bare underholdning. Tidligere i vår utdanning ble vi introdusert til spillet Borel av vår veileder, og etter en samtale med ham ønsket vi å lage et undervisningsopplegg med utgangspunkt i dette spillet. I spillet Borel skal man vedde ja eller nei på et spørsmål om utfallet av et sannsynlighetseksperiment. Et eksempel på en slik oppgave kan være «Du trekker 3 kort fra en kortstokk, er minst 2 av de samme sort?». Etter man har veddet gjennomføres eksperimentet. Vedder elevene riktig beholder de innsatsen og får summen de veddet utbetalt, og mister den om de veddet feil. Elever med gode kunnskaper i sannsynlighet vil kunne vurdere sannsynligheter bedre og vil i det lange løp vinne oftere. Noen ganger vil likevel det mindre sannsynlige utfallet inntreffe, som gjør at spillet har et moment av flaks. På denne måten kan elever som ikke innehar gode kunnskaper for sannsynlighet fortsatt oppleve suksess og ha det gøy. I denne oppgaven ønsker vi å lage en liste av kriterier for spill som brukes i undervisning på ungdomsskolen, se om Borel møter disse kravene, lage en undervisningsøkt med bakgrunn i Borel og teste dette ut.

1.2 Rasjonale

I overordnet del av lærerplanen blir det sagt at skolen både har et danningsoppdrag og et utdanningsoppdrag (Kunnskapsdepartementet, 2017). Denne danningen skjer blant annet gjennom opplevelser og praktiske utfordringer i undervisningen, både når elevene jobber på egenhånd og når de samarbeider med andre (Kunnskapsdepartementet, 2017). «Grunnopplæringen er en viktig del av en livslang danningsprosess som har enkeltmenneskets frihet, selvstendighet, ansvarlighet og medmenneskelighet som mål» (Kunnskapsdepartementet, 2017). «Danning skjer når elevene lærer hvordan de kommer fram til riktig svar, men også når de forstår at det ikke alltid finnes enkle fasitsvar» (Kunnskapsdepartementet, 2017). I et læringsmiljø hvor spill er involvert vil elevene måtte følge regler, og de vil erfare følelser og sosiale roller, noe som er viktig for dannelsesprosessen (Rincon-Flores et al., 2022). Spill kan være med på å hjelpe elever utvikle bedre problemløsningsevner og strategier (Ernest, 1986). I følge Lach og Sakshaug (2005) kan spill også hjelpe elever å tenke på nye og andre måter. Å ta i bruk spill i undervisningen kan derfor være med på å fremme tenking på et høyere nivå og gi mulighet for resonering rundt spesielle matematiske konsepter (Jackson et al., 2013). «Et bredt spekter av aktiviteter, fra strukturert og målrettet arbeid til spontan lek, gir elevene en erfaringsrikdom» (Kunnskapsdepartementet, 2017) . Det viser seg at spillbaserte aktiviteter ofte påvirker elevenes interesse positivt, og da vil læreren kunne få bedre muligheter til å skape gode interaksjoner med elevene, og elevene få bedre muligheter til å skape gode interaksjoner med hverandre (Turgut & Temur, 2017). «Elevene dannes i møte med andre og gjennom fysisk og estetisk utfoldelse som fremmer bevegelsesglede og mestring» (Kunnskapsdepartementet, 2017). Slik kan spill være en god mulighet for elever til å utvikle sitt matematiske språk og kommunikasjon (Jackson et al., 2013). Det at elever får brukt det matematiske språket mer aktivt, vil kunne hjelpe elever å utrykke seg bedre matematisk, og det blir enklere å gjøre en fortløpende vurdering av elevene, samtidig som elevene enklere kan gjøre en god selvvurdering (Lee, 2006). Dette er fordi med økt diskurs i klasserommet vil det bli delt flere ideer mellom elever, samtidig som det blir enklere for læreren å vite om elevene har kontroll på det de jobber med (Lee, 2006). Hvis elever blir flinkere til å artikulere problemene sine, kan de enklere snakke seg gjennom dem. De kan derfor enklere bruke disse ideene og overføre dem til andre situasjoner. Spill kan også være med på å skape en mer avslappet atmosfære, hvor elever kan bygge selvtillit (Lach & Sakshaug, 2005). En studie gjort av Núñez Castellar et al. (2014) fant at elevene følelsesmessig var mer positive til matematiske spill i forhold til papirøvelser. I tillegg sier Russo et al. (2021) at lærere mener hensikten til et spill kan endre seg over tid. Det kan først brukes som et verktøy for å skape konseptuelle kunnskaper, som så kan brukes til å bygge forståelse i senere undervisningstimer ved å vise tilbake til spillet.

Ved inngangen til 2020 kom fornyelsen av læreplanen. For matematikk og andre fag medførte dette et større fokus på problemløsning og dybdelæring. «Elevene skal bli gode problemløsere og forstå hvordan matematikk henger tett sammen med andre fag» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Med fagfornyelsen ble blant annet fagområdene *statistikk* og *sannsynlighet* redusert for å gi plass til programmering. Dette er synd siden disse fagområde kanskje er de viktigste når det kommer til å forstå og oppdage sammenhenger mellom matematikk og andre fag. I tillegg er statistikk og sannsynlighet relevante temaer når man skal programmere. Alt fra simulering av utfall, lister og plot vil involvere sannsynlighet eller statistikk, eller begge deler. Skolen har som sagt et utdanningsoppdrag som tilsier at skolen også skal forberede elevene på videre studier. «Opplæringen skal gi et godt utgangspunkt for deltakelse på alle områder innenfor utdanning, arbeids- og samfunnsliv» (Kunnskapsdepartementet, 2017). Selv om kunnskap innenfor statistikk og sannsynlighet er noe ikke alle tar i bruk daglig, er disse emnene viktige for videre utdanning. Kompetansemålene for statistikk og sannsynlighet er ivaretatt som et læreplanmål i 9. klasse på ungdomsskolen og i videregående valgfagene Matematikk for samfunnsfag 1 og 2 (Kunnskapsdepartementet, 2019, 2020). Som voksne vil elevene møte på sannsynlighet og statistikk gjennom representasjoner i media knyttet til for eksempel medisin, finans og værvarsling (Gal, 2005). I tillegg er statistikk ofte et mye omdiskutert tema når det kommer til politiske debatter. Skal elevene vokse opp til å bli gode samfunnsborgere og aktive deltakere i politikk involverer dette å ta informerte valg (Kunnskapsdepartementet, 2017). Dette innebærer da at elevene kan forstå, tolke og vurdere representasjoner knyttet til statistikk.

«Organisation for Economic Co-operation and Development» (OECD) er en internasjonal organisasjon av industriland. Ser vi på resultater fra internasjonale studier viser disse at norske elever presterer på OECD-gjennomsnittet. En av disse undersøkelsene er «Trends in International Mathematics and Science Study» (TIMSS). Hensikten til TIMSS-undersøkelsen er å se på trender i elevers matematikk- og naturfagskompetanse, og sammenligne resultater mellom land. Når denne oppgaven skrives, var den siste TIMSS-undersøkelsen gjennomført i 2019. Som sagt viser denne undersøkelsen at norske elever ligger på OECD-gjennomsnittet, men den viser og' en signifikant nedgang innen emneområdene tall og statistikk og sannsynlighet fra samme undersøkelse i 2015. Norske elever viser at de er sterkest til å forstå og utforske problemsituasjoner og svakest i å overvåke løsningsprosessen og vurdere svar (Kaarstein et al., 2020). Med tanke på at denne undersøkelsen ble gjort i 2019 og fornyingen av læreplanen kom i 2020, er det sannsynlig at denne nedgangen i statistikk og sannsynlighet fortsetter. I denne oppgaven har vi også valgt å se på problemløsning, siden elevene møter på oppgaver hvor løsningsmetoden er ukjent for dem. Når det kommer til problemløsning viser en internasjonalstudie fra 2012 kalt «Programme for International Student Assesment» (PISA) at norske elever også her presterer på OECD-gjennomsnittet (Kjærnsli et al., 2014). PISA har som hensikt å måle elevers kompetanse og vurdere hvor godt skolene forbereder elevene til videre studier, arbeidsliv, samt aktiv og reflektert samfunnsdeltakelse. Undersøkelsen viser også at det er stor spredning i nivå hos norske elever. Ønsker vi å forbedre norske elevers problemløsningsevner er det viktig å inkludere situasjoner hvor elevene får mulighet til å bruke og utvikle problemløsningsstrategier. Vi mener at Borel kan være med på å skape situasjoner hvor elevene får bruke og utvikle problemløsningsstrategier, og samtidig forbedre elevers kompetanse i sannsynlighet.

Spillet Borel er oppkalt etter den franske matematikeren og statistikeren Émile Borel. Borel er et allsidig spill som er enkelt å lage oppgaver til. Dette gjør det enkelt å tilpasse oppgavene til å passe elevenes nivå. Samtidig gjør dette at man kan spille Borel flere ganger, fordi man kan øke vanskelighetsgraden til oppgavene eller ha tematiserte oppgaver. Et eksempel på dette er komplementær sannsynlighet. Borel er også et spill alle kan spille. Det er ikke nødvendig å ha gode kunnskaper i sannsynlighet, men er noe som vil være nyttig for å ta gode avgjørelser. I Borel er også matematikk sentralt, siden spillet er designet rundt matematiske oppgaver. Ønsker elevene å øke vinnersjansen sin, kan de derfor ikke unngå å tenke over sannsynligheten for utfallene. Likevel kan elever som ikke har gode kunnskaper innenfor sannsynlighet ha flaks, siden det mindre sannsynlige utfallet også kan inntreffe. På denne måten kan alle elever, uavhengig av nivå, oppleve suksess. Dette gjør at Borel også kan være fint å bruke som en introduksjon til sannsynlighet. Originalt var Borel et brettspill som i senere tid ble kalt Borel Dice (https://www.playborel.com/). Videre er ikke dette et kommersielt spill, siden man enkelt kan lage ja/nei kort og de fleste har tilgang til konkreter spillet tar i bruk, for eksempel terninger og kortstokk. I tillegg til å være engasjerende, gir spillet Borel en praktisk mulighet til å trene på sannsynlighetsregning. Bruken av konkreter gjør det lettere å visualisere det oppgavene spør etter. Dette kan gi elevene et bedre utgangspunkt for å vurdere hvordan de skal beregne sannsynligheten for utfallene. Vi mener at Borel fungerer best når elever jobber i grupper fordi når man spiller Borel er det ikke et enkelt fasitsvar, spillet legger derfor opp til diskusjon. På denne måten må elevene dele ideer og benytte seg av estimat, logikk og ulike problemløsningsstrategier for å kunne svare på oppgavene. Vi mener at spillet Borel kan være med på å gi læringsglede til sannsynlighet, samt at det gir elevene mulighet til å samarbeide, diskutere, artikulere egen kompetanse og vurdere andres og eget svar. Hensikten med dette prosjektet er å se på bruken av spill i matematikkundervisning, trekke frem kriterier for hva som gjør et spill egnet for undervisning i matematikk og hvorfor spillet Borel er et godt eksempel på et slikt spill.

1.3 Forskningsspørsmål

Denne oppgaven skal se på bruken av spill i undervisning, sette kriterier for bruk av spill i undervisning og svare på problemstillingen:

Hvordan fungerer spillet Borel som et rammeverk for å undervise sannsynlighet i ungdomsskolen, og hvordan skiller Borel seg fra andre matematiske spill?

Med rammeverk mener vi at reglene for spillet Borel er et rammeverk som kan brukes for å designe en undervisningsøkt. Siden man lett har tilgang på artefakter som tas i bruk og lett kan lage oppgaver til Borel, gjør dette spillet fleksibelt og man kan designe flere ulike undervisningsopplegg med utgangspunkt i Borel. For å svare på denne problemstillingen har vi laget et undervisningsopplegg med Borel for en klasse på 9 trinn, hvor elevene fikk arbeide i grupper. Vi mener at Borel er et fleksibelt verktøy som byr på mange muligheter når det kommer til hvordan man ønsker å designe et undervisningopplegg. Det er ikke nødvendig å designe det på samme måte som vi gjør i denne oppgaven. Vi har valgt at elevene skal arbeide i grupper slik at vi kan få innsyn i de matematiske diskusjonene og tankene elevene har rundt spillet, for å kunne vurdere egnetheten til Borel. Av de 36 elevene som deltok i de to undervisningsøktene var det fire elever fra hver økt som ble filmet, hvor to fra hver gruppe deltok på intervju. Oppgavene til undervisningsopplegget har vi laget selv og er tenkt å være tilpasset elever på 9 trinn. Vi har valgt å ha et elevfokus hvor elevenes diskusjoner, væremåte og svar på intervjuspørsmål utgjør dataene til oppgaven. Disse videoobservasjonene er blitt tolket og systematisert gjennom koder i NVivo. I tillegg vurderes Borel og andre spill fra tidligere forskning opp mot de kriterier som vi har satt for spill i undervisning. Alt dette tas i betraktning når vi skal vurdere hvordan det fungerte å ta i bruk Borel som et rammeverk for å undervise sannsynlighet.

1.4 Oppbygning

Denne masteroppgaven består av syv kapitler. I det første kapittelet har vi presentert bakgrunnen og rasjonale for valg av oppgaven. I det andre kapittelet skal vi se på noen spill som er brukt i undervisning og tidligere forskning knyttet til disse. Videre i kapittel tre vil vi legge fram relevant teori og litteratur. Her vil vi også definere noen kriterier for hva vi mener er et rikt matematisk spill i ungdomsskolen. I kapittel fire vil vi gå gjennom metodevalgene, forskningsdesignet og design av undervisningsopplegget, hvordan vi har gjennomført analysen, forskningsetikk og forskningskvalitet. Videre i kapittel fem vil vi presentere resultatene fra datainnsamlingen, hvor vi går gjennom relevante observasjoner og elevsvar. I det sjette kapitelet vil vi diskutere resultatene fra datainnsamlingen og vår opplevelse av undervisningsøkten. Videre i dette kapittelet vil vi sammenligne andre spill med Borel og med kriteriene vi har satt for rike matematiske spill i ungdomsskolen. I kapittel syv vil vi oppsummere funnene våre, gi et svar på problemstillingen og reflektere rundt videre forskning.

2 Tidligere forskning

I dette kapittelet skal vi se på tidligere forskning på bruken av ulike spill i undervisning og resultatene fra disse undersøkelsene. Disse spillene skal vi senere gå gjennom og sammenligne med Borel i diskusjonsdelen av oppgaven. Det er viktig å poengtere at ikke alle spillene som presenteres her er designet for ungdomstrinnet. Videre er de spillene som tas opp her bare en liten del av det som er tilgjengelig. Vi har valgt disse spillene for de er etter vår mening lignende de spillene vi selv har møtt i skolen.

Russo et al. (2021) er en studie som ser på læreres bruk av spill i undervisning av matematikk, hvor 248 grunnskolelærere fra Australia deltok i en spørreundersøkelse. Fra denne spørreundersøkelsen fant de at 98 % av lærerne tok i bruk spill i undervisningen minst en gang i uken (Russo et al., 2021). Av disse var det 79 % av lærerne som svarte at de brukte spill flere ganger i uken i sin undervisning (Russo et al., 2021). Videre fant de at ¾ av lærerne indikerte at de brukte spill som en oppvarmingsøvelse flere ganger i uken, mens 45 % av lærerne svarte at de brukte spill som en kontekst for å jobbe utforskende (Russo et al., 2021). Til forskjell fra det store fokuset på digitale spill i forskning var det bare 4 % av lærerne som svarte at de foretrakk spill hvor et digitalt verktøy ble tatt i bruk, mens bare 1 % svarte at de spesifikt foretrakk digitale spill (Russo et al., 2021). I tillegg til at 82 % av lærerne var enig i at spill var en effektiv metode for å engasjere elever i matematikk, mente de også at spill var en effektiv metode for å lære bort ferdigheter som: forståelse, problemløsning og resonnement (Russo et al., 2021). Spill brukes altså ofte av lærere og blant annet med hensikten til å skape engasjement. Skal derimot spillet ha et læringsmål er det viktig at spillets mekanikk er tilpasset læringsmålet for at det skal være effektivt (Farber, 2015). Er det slik, kan spillets mekanikk bli budskapet som driver innholdet hjem (Farber, 2015). Farber (2015) foreslår videre at lærere burde låne mekanikk fra spill og tilpasse dem til læringsmål.

I en artikkel skrevet av Ernest (1986) reklameres det for inkluderingen av spill som en del av pensum i matematikk. I artikkelen tar Ernest (1986) opp en rekke undersøkelser gjort av et Amerikansk forskningsteam (Bright, Harvey og Wheeler) som sammenligner undervisning med og uten spill. Disse undersøkelsene viser til at spill er en effektiv metode for å trene på og forsterke matematiske ferdigheter (Ernest, 1986). Ernest mener at elevenes aktive involvering er noe av det viktigste når det kommer til å ha suksess i å lære bort matematikk til elevene. Spill krever at man er involvert, spesielt om man ønsker å vinne (Ernest, 1986).

Videre skriver Ernest (1986) at om elevene kan lære matematikk gjennom spill, kan spill også være en god metode for å utvikle problemløsning, motivasjon, samarbeid og diskusjon. Ifølge Ernest er det å spille spill motiverende i seg selv, fordi dette er noe man gjør på fritiden som vanligvis er assosiert med entusiasme, spenning og moro (Ernest, 1986). I tillegg er det å spille spill med på å skape variasjon i undervisningen, noe som igjen bidrar til økt motivasjon (Ernest, 1986). «Games model real-world systems, which can help make learning concepts more relatable» (Farber, 2015, s. 23). Når en gruppe mennesker skal spille et spill må de snakke om valg, riktige og gale svar, og diskutere strategier. På denne måten er spill med på å skape diskurser både mellom elever og mellom elev og lærer. Altså når spill er involvert må elevene følge regler, og de vil kunne erfare følelser og sosiale roller som er viktig for dannelsesprosessen (Rincon-Flores et al., 2022). I følge Farber (2015) styres spillernes valg av reglene som settes av spillet. Reglene er med på å gi mening til spillet og gir spillerne muligheten til å vurdere valgene de tar ut ifra mulige hendelser eller utfall (Farber, 2015). Derfor krever spill at spillerne har en eksperimentell tankegang for å finne ut hvordan systemet/spillet fungerer. "Part of the challenge is to figure out what is to be done, and how" (Norman, 2013, s 256, referert i Farber, 2015, s. 25). Når det kommer til problemløsning viser Ernest (1986) til en studie gjort av (Edith Biggs) som viser at matematiske spill ikke bare kan bidra til å utvikle ulike problemløsningsstrategier, men også bygge videre på disse. Disse problemløsningsstrategiene er: prøving og feiling, forenkling av oppgaver, se etter mønstre, lage og teste hypoteser, begrunne/resonnere, og bekrefte eller avkrefte hypoteser.

I Bragg (2012) ble det gjennomført en studie om spill hadde noen effekt på elevers læring, hvor 8 klasser med elever fra 10 – 12 år deltok. Studien fulgte et «quasi-experimental design» (ser etter korrelasjoner, men har et ikke tilfeldig utvalg) med en pre-test, post-test og forsinket post-test. Spillene som ble tatt i bruk var Guestimate og «Hone on the Range». Disse spillene er relativt like og går ut på at en spiller oppgir et tosifret heltall eller desimal tall som skal multipliseres slik at summen ligger innenfor et bestemt intervall. Selv om resultatene fra denne studien viste at spill hadde noe effekt på elevers læring, var det ikke en like effektiv metode sammenlignet med andre aktiviteter. Et annet funn var at elevene over tid ikke fant spillet like engasjerende eller underholdende i motsetning til elevene som hadde fem ikke-spill aktiviteter. Bragg (2012) mener dette kommer av at spillene hadde liten verdi av å spilles flere ganger, siden de ble veldig repeterende over tid. Ut ifra dette konkluderer Bragg (2012) at lærere må tenke seg godt om på hvordan de ønsker å anvende spill og om det er hensiktsmessig, før det tas i bruk i undervisningen. I tillegg konkluderes det i en studie gjort av Onslow (1990, referert i Bragg, 2012) med at spill uten diskusjon bidrar lite til å fremme kognitiv utvikling i matematikk. Videre sier han at om man ikke eksplisitt går inn og utfordrer elevenes tro eller svar, så er det usannsynlig at de vil kunne overkomme konseptuelle hindringer Onslow (1990, referert i Bragg, 2012). Spill burde derfor ikke brukes isolert fra andre pedagogiske praksiser (Bragg, 2012).

Et annet eksempel på et matematisk spill som har blitt brukt i skolen er Jackson et al. (2013) sin versjon av Produkt Bingo. Jackson et al. (2013) ser på inkluderingen av spill i undervisning og prøver å vise at dette vil hjelpe elever med å bli motiverte problemløsere. For å gjøre dette viser de til dialoger fra en undervisning hvor en 7. klasse fikk spille Produkt Bingo og setter opp noen kriterier for bruken av spill i undervisning. I Produkt Bingo får elevene utdelt et ferdiglaget bingospillbrett. Læreren spinner så en spinner med tallene 2 til 9, to ganger. Elevene får så i oppgave å regne ut produktet før de krysser det av på eget spillbrett. Spillet fortsetter til elevene har fått fire på rad horisontalt, skrått eller vertikalt. Videre forklarer Jackson et al. (2013) at spillets dybde ligger i det faktum at ikke alle spillbrettene er mulig å vinne med, fordi produktene på noen av brettene ikke er mulig å oppnå med tall fra 2 til 9. Når elevene oppdaget dette fikk de utdelt blanke spillbrett hvor de fikk i oppgave å fylle disse slik at de hadde et best mulig utgangspunkt for å vinne. Det er denne strategiske forskjellen fra vanlig Bingo som Jackson et al. (2013) mener vil føre til at elevene deltar i dypere tenking. Jackson et al. (2013) argumenterer til slutt at sosiale aktiviteter som det å spille spill kan motivere elever til å jobbe mer med matematikk. Videre legger de frem noen kriterier, basert på egen praksis og tidligere forskning, som kan hjelpe ungdomsskolelærere til å velge spill som fremmer dypere forståelse av matematiske ideer. Disse kriteriene går ut på at spillet skal være grunnet i matematikk, det skal være selvgående og engasjerende og til slutt skal spillet være passe utfordrende for alle som deltar. Vi skal senere gå nøyere gjennom disse kriteriene når vi skal sette våre kriterier for et rikt matematisk spill i ungdomsskolen.

De siste årene har det vært mye forskning på digitale spill. Et eksempel på et digitalt spill som er forsket på er det virtuelle spillet presentert i teksten «Effects of Playing an Educational Math Game That Incorporates Learning by Teaching» av Fiorella et al. (2019). Dette spillet har vi valgt å kalle «Spacemath», siden teksten ikke navngir spillet. Spacemath er et virtuelt spill hvor man kan bevege seg rundt i et romskip og fullføre ulike matematiske oppgaver satt til å passe spillets rammer. Spillet fokuserer spesifikt på oppgaver hvor elevene «lærer av å lære bort». I spillet foregår dette ved at en rekke alternativer blir presentert for elevene hvor de kan vise en virtuell avatar det neste steget for å løse et problem eller vurdere om avatarens fremgangsmåte er riktig. Siden disse forklaringene er ferdig genererte i spillet og ikke ved hjelp av elevenes egne ord og forståelse av problemet, mister man litt av poenget med «å lære av å lære bort». Videre er det litt utydelig hvordan man vinner spillet eller hva motivasjonen bak det å fullføre disse oppgavene er. Resultatene fra undersøkelsen viser at det var liten forskjell mellom elevene som spilte spillet og kontrollgruppen, både når det kom til kompetanse og motivasjon for faget. Videre fant de også at mye av tiden som elevene brukte på spillet gikk med til å utforske verdenen og andre irrelevante aktiviteter. Fiorella et al. (2019) beskriver i sin artikkel at elevene jobbet med problemløsningsaktiviteter i 50 % av tiden, hvor 20 % av tiden ble brukt på aktiviteter knyttet til «læring ved å lære bort». I de resterende 50 % av tiden utforsket elevene spillets verden og gjorde andre ikke relevante aktiviteter. Fra denne studien kan man se hvor viktig design er for spill som brukes i undervisning. Det er viktig å ha en balanse mellom faktorer som er med på å fremme læring og underholdning. I tillegg er det viktig at disse ikke er urelatert fra hverandre.

I likhet med oss har Handeland (2021) sett på bruken av spillet Borel i en undervisningsøkt. Til forskjell fra oss har han sett på hvordan Borel kan brukes som et diagnostisk verktøy for å avdekke misoppfatninger knyttet til sannsynlighet og prøver å svare på problemstillingen «Hvordan kan bruken av spillet Borel være en ressurs i matematikkundervisning for å gi informasjon om elevers misoppfatninger innenfor sannsynlighet?». For å svare på dette benyttet Handeland (2021) seg av en strukturert spørreundersøkelse, også kalt surveyundersøkelse. Denne surveyen bestod av to deler, hvor den første delen var tre kartleggingsspørsmål. Dette ble gjort for å avgjøre om elevenes feilsvar var knyttet til manglende ferdigheter eller misoppfatninger. Videre bestod den andre delen av ti sammensatte spørsmål, hvor hvert spørsmål korresponderte til et av eksperimentene som elevene gjennomførte. Undersøkelsen ble gjennomført på 10. trinn med elever i alderen 15 – 16 år med 107 deltakende respondenter. Handeland (2021) forklarer selv at siden dataene fra spørreundersøkelse ga rom for tolkning kunne man ikke nødvendigvis konkluderende med at Borel var et godt diagnostisk verktøy. Handeland spekulerer at dette resultatet kommer av forskningsdesginet natur og at spørreskjema burde ha inkludert begrunnelser for elevenes svar. Handeland (2021) skriver at de ble vanskelig å vite om elevenes fordeling av innsatser skyltes «… misoppfatninger, eller forvirring rundt en uklar eksperimentformulering? Gir elevene bestemte estimat fordi det er det de tror, eller fordi det var det tidsbegrensningen tillot dem å beregne? Veddet elevene store beløp fordi utfallet opplevdes veldig sannsynlig, fordi deres spillintuisjon tilsa at sannsynligheten ikke trengte å være stor før det var fornuftig å vedde maks, eller var beløpet helt vilkårlig?» (Handeland, 2021, s. 63 - 64). Likevel skyer ikke Handeland seg vekk fra at Borel kan være et nyttig verktøy for undervisning og peker på spillets evne til å engasjere elevene, samt muligheten til å skape samtaler om matematikken som ligger til grunn.

3 Teori

3.1 Sannsynlighetskompetanse

3.1.1 Historisk perspektiv

Rundt det 16. århundre hadde sannsynlighetsspill en nøkkelrolle i samfunnet (English, 2005). Det var da interessant å utvikle nye tellemåter og matematiske ideer som fostret opp ny matematisk teori. Det å drive med sannsynlighet hadde tidligere blitt sett på som å prøve å spå fremtiden. Spesielt innenfor religioner som Kristendommen, Jødedommen og Islam ble dette slått hardt ned på. Ved den vitenskapelige revolusjon på 1600 tallet, fikk arbeidet med vitenskapsteorier endelig bryte gjennom når det mer teologiske natursynet til kirken ble erstattet med et mer mekanistisk natursyn (Sletnes, 2019). Dette ga matematikere muligheten til å endelig begynne å utvikle sannsynlighetsteori. Spesielt ble arbeidet til Pascal og Fermat innenfor kombinatoriske problemer viktig, da det var med på å legge et fundament for sannsynlighetsteorien (English, 2005; Taraldsen, 1997). Det ble tydelig at det er viktig å kunne kombinatoriske regnemetoder for å drive med sannsynlighetsregning.

3.1.2 Sannsynlighetsferdigheter på ungdomsskolen

En forutsetning for å forstå sannsynlighet er at en har en god forståelse for kombinatorikk. Videre er det en forutsetning å ha en god forståelse for brøkregning for å forstå kombinatorikk. Brøkregning med de fire regneartene er derfor kritisk kunnskap som elevene må være trygge på for å kunne arbeide med sannsynlighet. Det å kunne regne ut gunstige og mulige utfall er helt sentralt i sannsynlighet, og dette er viktig at elevene har kontroll på når kompleksiteten i oppgavene øker.

Polaki (2005) har skrevet et kapittel i boken *Exploring probability in school: Challenges for Teaching and Learning*, hvor han beskriver elevers evne til å oppgi det totale utfallsrommet knyttet til hendelser. Han ser spesifikt på elever på øvre barneskoletrinn og ungdomsskolen. Målet hans er å utvikle detaljert oversikt over elevers sannsynlighetsberegning i form av to rammeverk. Når elever lærer om sannsynlighet på ungdomsskolen er temaet sammensatte hendelser et utfordrende tema for mange (Polaki, 2005). Når man går fra enkle hendelser til sammensatte hendelser, økes kompleksiteten drastisk. Dette krever at elever kjenner alle utfallene for hver av hendelsene og klarer å bruke utvalgsromssymmetri, komposisjon eller utprøvelse som basis for å gjøre sannsynlighets spådommer (Polaki, 2005). Polaki (2000) beskriver fire nivåer av sannsynlighetsforståelse innenfor kategoriene: utfallsrom, sannsynligheten for en hendelse, sannsynlighetssammenligninger, betinget sannsynlighet og uavhengig sannsynlighet. Disse fire nivåene er beskrevet som subjektiv, overgangs, uformell kvantitativ og numerisk. Elever med nivå 1 sannsynlighetsforståelse vil ha problemer med å bestemme det totale utfallsrommet i enkle hendelser, de vil også ha en tendens til å blande inn subjektive følelser når de skal bestemme hva som er mest sannsynlig. Et eksempel på dette kan være en elev som tror at når en terning landet på fem, så vil den ikke lande på fem neste gang de kaster fordi dette allerede har skjedd. Elever på nivå to, altså overgangsnivået, vil klare å bestemme utfallsrommet i enkle hendelser, men vil slite med å finne utfallsrom for sammensatte hendelser. Elever på dette nivået har begynt å legge fra seg sine subjektive følelser ovenfor sannsynlighet, men mangler fortsatt kunnskapen til å se det totale utfallsrommet i mer komplekse situasjoner. Elever på dette nivået bruker ofte kvantitative observasjoner for å bedømme hva som er mest sannsynlig. Et viktig mål er å få elever fra disse lavere nivåene opp på et høyere nivå av forståelse innenfor sannsynlighet. Når elevene når det tredje og fjerde nivået, vil de kunne oppgi det fulle utfallsrommet for sammensatte hendelser.

3.1.3 Heuristisk framgangsmåte

Heuristikk er en enkel fremgangsmåte som kan hjelpe med å løse en oppgave, uten at man har noen prinsipiell grunn for å bruke metoden (Teigen, 2021). Tversky og Kahneman (1974) hevder at mennesker med manglende kunnskaper innenfor emnet sannsynlighet vil ta i bruk heuristiske metoder for å begrunne sine svar. Dette stemmer godt med elever på nivå 2 i Polaki (2005) sitt rammeverk for elevers nivå av sannsynlighetsforståelse. Eksempler på heuristiske metoder kan komme i form av intuisjon eller en tommelfinger regel som har vist seg å gi praktiske resultater. Tversky og Kahneman (1974) beskriver tre ulike heuristiske metoder. Disse metodene er heuristisk representativitet, heuristisk tilgjengelighet og tilpassing og forankring, som vi nå skal beskrive.

Hvis noen bruker heuristisk representativitet, vurderer de sannsynligheten ut ifra tidligere hendelser. Sannsynligheten blir da vurdert ved hjelp av kjente lignende fenomener. Dette kan føre til misoppfatninger. «This approach to the judgment of probability leads to serious errors, because similarity, or representativeness, is not influenced by several factors that should affect judgments of probability» (Tversky & Kahneman, 1974, s. 1124). Selv om to hendelser ligner er det fortsatt forskjeller som må vurderes. Et eksempel på dette kan være det å kaste 1 terning mot det å kaste 2. Når du kaster en terning, er det like sannsynlig å få alle tallene på terningen. En vanlig misoppfatning er at når man kaster to terninger vil det være like sannsynlig å få alle mulige summer av de to terningene. I virkeligheten er dette ikke sant, da det for eksempel er mye mer sannsynlig å få summen syv over det å få summen to.

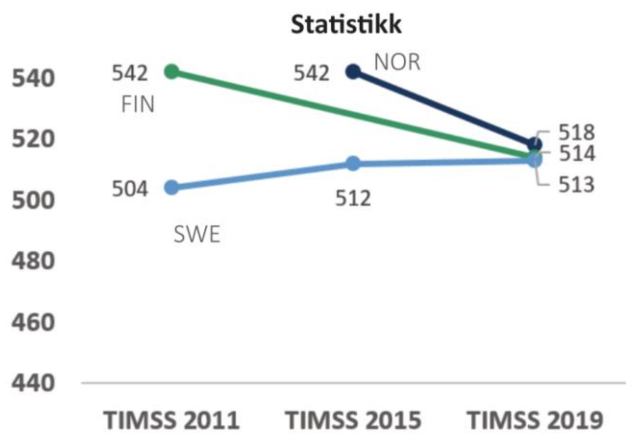
Hvis noen bruker heuristisk tilgjengelighet, vurderer de sannsynligheten for en hendelse ut ifra hvor enkelt det er å komme på bestemte tilfeller av denne hendelsen. I likhet med heuristisk representativitet kan denne metoden også føre til misforståelser og feiltolkninger. Når noen tar i bruk heuristisk tilgjengelighet, baserer de seg bare på en del av det totale utfallsrommet. I stedet for å se det fullstendige utfallsrommet, baserer de seg på de utfallene de enkelt kan komme på. «However, availability is affected by factors other than frequency and probability. Consequently, the reliance on availability leads to predictable bias» (Tversky & Kahneman, 1974, s. 1127). Et eksempel på heuristisk tilgjengelighet er når man kan komme på ulike kombinasjoner av terningkast som gir en spesifikk verdi. Ut ifra dette vurderer de at denne verdien har en høy sannsynlighet for å oppstå, selv om den i realiteten utgjør en veldig liten del av det totale utfallsrommet.

Hvis noen bruker tilpasning og forankring for å gjøre en vurdering, estimerer de en verdi ved å tilpasse en utgangsverdi (et anker). «The initial value, or starting point, may be suggested by the formulation of the problem, or it may be the result of a partial computation. In either case, adjustments are typically insufficient.» (Tversky & Kahneman, 1974, s. 1128). Poenget er at forskjellige utgangspunkt gir ulike estimater med partiskhet mot startverdien. To eksempler på dette er konjunksjonsfeil og disjunksjonsfeil. Konjunksjonsfeil skjer når man tror at sannsynligheten for to hendelser er større enn sannsynligheten for at en av hendelsene inntreffer. Et eksempel på denne feilforestillingen er når man tror at det er større sannsynlighet å få to seksere på rad, enn det er å få en sekser på et kast. En disjunksjonsfeil vil oppstå når man tror at sjansen for å få en sekser på et kast er høyere enn minst en sekser på flere kast.

3.1.4 Viktigheten av sannsynlighetsforståelse

Det å henge med i den teknologiske utviklingen har tradisjonelt vært et av de viktigste argumentene for å undervise matematikk (Mellin-Olsen, 1981). Gjennom arbeid med tverrfaglige temaer skal elever kunne utvikle en forståelse som vil hjelpe elever med å ta ansvarlige livsvalg, og være bevist på hvordan de tenker knyttet til beslutninger i samfunnet og eget liv (Kunnskapsdepartementet, 2017). I beskrivelsen av det matematiske kunnskapsområde statistikk og sannsynlighet blir det beskrevet at kunnskap om statistikk og sannsynlighet skal være med på å danne et grunnlag for å gjøre gode valg i elevenes egne liv, i samfunnet og i arbeidslivet (Kunnskapsdepartementet, 2019). Dette tyder på at statistikk og sannsynlighet er et kunnskapsområde som er viktig i mange tverrfaglige situasjoner og for samfunnet som en helhet.

Som beskrevet tidligere har TIMSS undersøkelsen fra 2019 viste en signifikant nedgang i elevers kompetanse innen emneområdene sannsynlighet fra samme undersøkelsen i 2015, se Figur 1(Kaarstein et al., 2020). I tillegg til dette er sannsynlighet et av de temaene som ble kuttet ned på etter fagfornyelsen 2020 (Kunnskapsdepartementet, 2019). Vi finner i dag bare sannsynlighet som et læreplanmål i 9. klasse på ungdomsskolen og i videregående skole i valgfagene Matematikk for samfunnsfag 1 og 2 (Kunnskapsdepartementet, 2019, 2020). Dette vil trolig føre til at den nedadgående trenden i elevers kompetanse i statistikk og sannsynlighet fortsetter.



Figur 1: Nordiske prestasjoner i emneområdet statistikk og sannsynlighet (Kaarstein et al., 2020, s. 18)

3.2 Kelly-kriteriet

Et viktig spørsmål når man skal vedde i et spill som Borel, er hvor mye man burde vedde. Det kunne tenkes at det lønnet seg å satse så mye som mulig, gitt at sjansen for å vinne er mer enn 50 %. Dette er derimot bare sant om man har en uendelig kapital. Hvis man satser mye, har man også en stor risiko for å tape mye. Det er derfor viktig å vurdere hvilken mengde som lønner seg å satse i den situasjonen man er i. Kelly-kriteriet er et kriterium som kan brukes til å beregne hvor mye man objektivt burde satse. Innsatsen bestemmes av en formel basert på kapital, spillets odds og sannsynligheten av utfallet man satser på (Wikepedia, 2023a). Kelly-kriteriet utledes ved å maksimere forventningsverdien av logaritmen til kapitalen. Bruk av dette kriteriet til å bestemme innsatsen vil gi størst avkastning over tid (Wikepedia, 2023a). Borel er et spill med odds 1:1 og involverer variablene kapital (W) og sannsynlighet (p). Gitt at oddsen er 1:1 vil den gunstige innsatsen (I_k) være gitt ved:

$$I_k(p, W) = (2 \times p - 1) \times W \tag{1}$$

Ettersom oddsen i Borel alltid er 1:1, vil likning 1 alltid kunne brukes for å beregne hva som er mest gunstig å vedde i dette spillet. Som et eksempel; gitt at man har en kapital på 20 mynter, og man vet at sannsynligheten for å vinne er 60 %, vil bruk av likning 1 gi følgende:

$$I_k(0.6, 20) = (2 \times 0.6 - 1) \times 20 = 4$$

Dette betyr at den gunstige innsatsen (I_k) i dette eksempelet er 4 mynter. Det er viktig å legge merke til at likning 1 vil gi 0 i gunstig innsats gitt en sannsynlighet for å vinne lik 50 %. Dette betyr at ved 50 % eller lavere sannsynlighet for å vinne er det ikke gunstig å satse noe som helst.

3.3 Matematisk diskurs

Lee (2006) definerer diskurs som alle typer språk som kan bli bragt inn i klasserommet. Hun forklarer videre at det er elevene som er sentrale i prosessen. Det er elevene som driver diskusjonen og forhandlingene. Læreren hjelper elevene med å sette i gang diskursen. Læreren kan selv delta i diskursen, men skal primært jobbe for å la elevene holde diskursen gående uten direkte involvering fra lærer. Hvis elevene er involvert i diskursen betyr det at de kan være med på å artikulere egne ideer og egen forståelse, samtidig som de får høre på og reflektere over det andre utrykker. De kan så bringe dette med seg videre til andre og nye situasjoner. Ved at læreren får innblikk i den diskursen elevene er i, får læreren også muligheten til å drive formativ vurdering. Ved å øke diskursen i matematikkundervisningen vil man også øke de formative vurderingsmulighetene (Lee, 2006). Matematisk språk kan være en barriere for elevers læring av matematikk. Læreren kan ofte ta i bruk et matematisk språk som elevene ikke er kjent med. Lee (2006) beskriver det å lære matematiske begreper som å lære et nytt språk. Altså er det viktig at læreren forklarer de matematiske ordene som brukes, siden dette ikke er noe elevene kan lære seg på egen hånd. Når elever kan utrykke sine matematiske ideer kan dette hjelpe elever med å forstå hva de kan og hva de ikke kan. Når elevene prøver å utvide sin egen forståelse av matematiske konsepter eller reflekterer over organisering, strategier eller konsepter de allerede har utviklet forståelse for, tar de del i matematikken. Når elevene arbeider med matematikk utvikler de sin egen matematiske kunnskap, og bruker språk til å utrykke sine egne matematiske ideer og utforsker sine nye erfaringer. Det er viktig at elevene strekker seg etter kvalitet, presisjon og klarhet i det de utrykker. I tillegg burde det være et fokus på å utrykke seg selv med nøyaktighet fremfor å si noe kort og konsist (Lee, 2006). Når det er åpenlyst hvordan språk brukes til å utrykke matematiske ideer, kan elevene lære seg å bruke språket til å utrykke sine tanker effektivt.

Russo et al. (2021) intervjuet barneskolelærere om spill i skolen. Et av funnene var at mange av lærerne mente at spill også er effektivt for å utvikle språklig forståelse, problemløsning og argumentasjon. Spill vil være med på å skape diskurs, da interaksjoner mellom deltagerne er nødvendig, både for å diskutere regler og strategi, men også for å argumentere for valg på et lag. Dette vil være med på å forklare hvorfor disse lærerne knytter bruk av spill med utvikling av språklig flyt og argumentasjon. Dette stemmer godt overens med Lee (2006) sin beskrivelse av hvordan diskurs kan gjøre elever bevisst på misforståelser og egen forståelse.

3.4 Konkreter

Bartolini og Martignone (2020) definerer konkreter (Manipulatives) som artefakter brukt av elever for å utforske matematiske konsepter eller for å forstå matematiske prosesser, og for å gjennomføre problemløsningsaktiviteter der det trekkes linjer ved hjelp av persepsjon gjennom sanseinntrykk. Nührenbörger og Steinbring (2008) sammenligner bruken av konkreter med bruken av et verktøy. I motsetning til verktøy, krever derimot ikke konkreter bare korrekt og god bruk, men også at konkreten er generelt konstruert. Verdien av en konkret er basert på den sammenhengen konkreten har til den matematiske sammenhengen den skal representere (Nührenbörger & Steinbring, 2008). Det finnes ulike klassifiseringer av konkreter. Vi skiller først og fremst mellom fysiske og virtuelle konkreter. Fysiske konkreter behandles av elever fysisk, og gir mulighet for mange rike sanseinntrykk som syn, følelse og hørsel (Bartolini & Martignone, 2020). Virtuelle konkreter er digitale artefakter som ligner på fysiske objekter og kan manipuleres på måter som ligner dens fysiske motpart (Bartolini & Martignone, 2020). Dette skjer som oftest med en PC-mus eller berøring på nettbrett. Hunt et al. (2011) sammenlignet virtuelle og fysiske konkreter. Her viste det seg at fysiske konkreter var enklere å bruke og bedre til å bygge konseptuell forståelse enn de virtuelle konkretene. Hunt et al. (2011) la også vekt på at det var fordeler med å bruke begge typer konkreter sammen for å bygge opp den totale konseptuelle forståelsen.

Bartolini og Martignone (2020) problematiserer at konkreter hovedsakelig har blitt brukt på barnehage og barneskolenivå, og argumenterer for bruk av konkreter for utvikling av konseptuell forståelse helt opp til universitetsnivå. Nührenbörger og Steinbring (2008) understreker at konkreter er symbolske representasjoner som inneholder matematiske sammenhenger, strukturer og mønster. Disse konkretene kan aktivt tolkes, utveksles innenfor den diskursive konteksten og vurderes etter deres eksakthet. Bartolini og Martignone (2020) mener at tvetydigheten som konkreten bringer burde være en sentral del av matematikktimen i undervisning med konkreter. «This very ambiguity makes manipulatives suitable to all school levels, up to university, as a context where fundamental processes, as defining, conjecturing, arguing, and proving, are fostered.» (Bartolini & Martignone, 2020, s. 490). Med dette argumenterer de for at konkreter kan brukes på alle skolenivåer. Dette innebærer også ungdomsskolen, som er fokuset i denne oppgaven.

3.5 Rike matematiske spill for ungdomsskolen

Når matematikklærere skal velge spill for bruk i en undervisning er det viktig å velge et spill som både fremmer en dypere forståelse for matematikk og sikrer læring og mestring. På bakgrunn av dette ønsker vi å definere noen kriterier for spill som skal brukes i undervisningssammenheng. I denne delen har vi tenkt til å se på hva tidligere forskere har brukt som kriterier for spill i matematikkundervisning i grunnskolen. Med bakgrunn i disse kriteriene vil vi definere våre egne kriterier for hva som er et rikt matematisk spill for bruk på ungdomsskolen.

3.5.1 Andre forskeres kriterier for matematiske spill i skolen

Som nevnt tidligere la Jackson et al. (2013) frem tre grunnprinsipper for hva som skal til for at et spill er med på fremme dypere forståelse av matematikk. Det første prinsippet går ut på at spillet burde være forankret i matematikk. Med dette mener de at elevene må få muligheten til å diskutere matematikk på et høyt kognitivt nivå. Det andre prinsippet sier at spillet burde være selvgående og engasjerende. Dette betyr at elevene har lite behov for instrukser fra lærer og kan holde en diskusjon uten lærerens oppfølging. Til slutt forteller de at spillet burde være passende og utfordrende for alle elever. Med dette mener de at alle elever skal kunne delta og at spillet kan være med på å ta opp flere matematiske konsepter som gjør at elever på ulikt nivå kan få noe ut av spillet.

Russo et al. (2018) legger i sin artikkel frem fem kriterier de mener må være til stede for at et spill skal kunne kalles et rikt matematisk spill. Det første kriteriet Russo et al. (2018) legger frem er at rike matematiske spill skal være morsomme og engasjerende. I følge Russo et al. (2018) innebærer dette blant annet at spillet skal være med på å skape matematiske diskusjoner. Det andre kriteriet til Russo et al. (2018) forteller at spillet bør ha en balanse mellom evne og flaks. I konkurranser uten flaks har elevene med best evne en stor fordel, og vil ha mulighet til å dominere et hvert spill. Dette kan gjøre aktiviteten mindre engasjerende og demotiverende, både for de som ikke har muligheten til å vinne og for de eller den som vil vinne hver gang. Det tredje kriteriet til Russo et al. (2018) går ut på at matematikken må stå sentralt i spillet. Dette betyr at spillet må få elever til å utforske matematiske konsepter ved at de må velge matematiske strategier som bidrar til å utvikle deres matematiske evner. Det fjerde kriteriet handler om at spillet skal være fleksibelt for undervisning og læring. Dette betyr at spillet bør gi muligheter for differensiering mellom elever og at spillet burde kunne tilpasses ulike situasjoner og elevgrupper. Spillet burde også kunne brukes gjentatte ganger for de samme elevene, da det er tidkrevende å lære nye spill (Russo et al., 2018). Til slutt presenterer Russo et al. (2018) et femte prinsipp om at spill skal være med på å skape en kobling mellom skole og hjem. Tanken bak dette kriteriet er at elevene kan ta spillet med hjem og spille med foresatte, slik at de foresatte kan få et bedre innsyn i hva elevene lærer i matematikk.

3.5.2 Våre kriterier for rike matematiske spill

Vi tar utgangspunkt i de tre kriteriene til Jackson et al. (2013) og de fem kriteriene til Russo et al. (2018). Jackson et al. (2013) forteller om erfaringer med matematiske spill på ungdomsskoletrinn, mens Russo et al. (2018) viser til kilder og egne erfaringer med rike matematiske spill på barneskolen. I vår oppgave har vi sett på bruken av rike matematiske spill på ungdomsskolen. Vi ser en stor overføringsverdi til ungdomsskolen av de fleste kriteriene Russo et al. (2018) legger frem fra barneskolen.

Vi ser tydelige likheter mellom flere av kriteriene til Jackson et al. (2013) og Russo et al. (2018). Begge er opptatt av at spillet burde være engasjerende for elevene og forankret i matematikk. Begge er også enige om at spillet må passe til elevgruppens nivå. Her skiller Russo et al. (2018) seg fra Jackson et al. (2013) ved at de også ønsker at spillet skal være fleksibelt for å kunne tilpasses situasjonen og for å kunne brukes gjentatte ganger på samme elevgruppe. Jackson et al. (2013) er på sin side opptatt av at elevene skal kunne være selvgående, noe som er mer relevant på ungdomsskolen enn på barneskolen. Det femte kriteriet fra Russo et al. (2018), nemlig kriteriet om kommunikasjon mellom skole og hjem, ser vi på som unødvendig på ungdomsskolen. Fra våre erfaringer i arbeid på ungdomsskolen mener vi at dette ikke er like viktig som på barneskolen. Elevene er blitt eldre og er bedre til å kommunisere hva de har lært og gjort på skolen til foreldre og foresatte. Elever blir også mer selvstendig etter hvert som de vokser opp og det blir ikke like nødvendig å følge dem opp så tett som man gjør på barneskolen. Dette kriteriet er heller ikke et som Jackson et al. (2013) tar opp.

Videre skal vi legge frem våre kriterier for hva som er et rikt matematisk spill i ungdomsskolen, basert på det vi vet fra tidligere forskning og teori. Vi har tydelige likheter til både Russo et al. (2018) og Jackson et al. (2013). Vi har beholdt fire av kriteriene til Russo et al. (2018), samtidig som vi har utvidet de for å få med deler av Jackson et al. (2013) sine kriterier som vi mener burde være med. Vi mener altså at rike matematiske spill for ungdomsskolen skal fylle følgende kriterier.

1. Være engasjerende og selvgående

2. Ha en balanse mellom evne og flaks

3. Matematikken skal være sentral i spillet

4. Ha fleksibilitet for læring og undervisning

Det første kriteriet vi har valgt er at spillet skal være engasjerende og legge til rette for selvstendig jobbing. Spill sin hovedoppgave i skolen er å engasjere elevene i det fagstoffet de jobber med, samtidig som det skal motivere elevene for videre arbeid i faget ved å skape positive læringssituasjoner (Russo et al., 2018). Det er viktig at spillet kan være med på å skape matematiske diskusjoner blant elevene (Jackson et al., 2013; Russo et al., 2018). Tidligere forskning tyder på at spill uten diskusjon bidrar lite til å fremme kognitiv utvikling i matematikk (Onslow, 1990). I spillsituasjoner får man muligheten til å drive med matematisk diskurs. Vi vet at matematisk diskurs gir elevene mulighet til å artikulere egne ideer og forståelse, som gir dem mulighet til å bruke det matematiske språket effektivt (Lee, 2006). Når elever argumenterer for valg de gjør i spill, må de utrykke det de tenker og får da konsolidert sin egen forståelse (Ernest, 1986; Lee, 2006). Videre skal spillet være engasjerende nok til at elevene fortsetter den matematiske diskusjonen uten videre oppfølging fra læreren (Jackson et al., 2013).

Det andre kriteriet vi har valgt er at spill skal ha en balanse mellom evne og flaks. Gough (1999) argumenterer for at spill ikke skal være 100 % basert på verken flaks eller evner. Spill med 100 % flaks er det vi definerer som gambling, og dette er noe Gough (1999) ser på som upassende for bruk i skolen. Unntaket er når hensikten er å lære elever om sannsynlighet relatert til hvordan kasinoer kontrollerer og rigger spillene. Fra egen spillerfaring vet vi at spill som er 100 % basert på evne ikke passer i en klassesetting, da de samme vil vinne hver gang og spillet vil bli mindre spennende. Et godt eksempel på et spill som bare er basert på evner er sjakk. Problemet med sjakk er at når to personer på svært ulike nivå spiller mot hverandre, vil den beste alltid vinne. Leenheer et al. (2015) diskuterer også samhandlingen mellom evne og flaks i sin forskning på brettspill. I denne sammenheng gjør de seg noen lærdommer, som også er relevante utenfor deres spesifikke spillsituasjon. De påpeker at det er viktig at alle som deltar kan vinne, og at det alltid burde være muligheter for å komme tilbake hvis man blir puttet i en tapende situasjon. Spillet skal inneholde nok usikkerhet eller flaks slik at alle som deltar kan vinne, samtidig skal vinneren føle at evne deres hadde noe å si for deres seier (Leenheer et al., 2015).

Det tredje kriteriet går ut på at matematikken skal være sentralt i spillet. Spillet skal ikke bare inneholde matematikk, men matematikken må være en sentral del av spillets kjerne. Dette er et kriterium som både Russo et al. (2018) og Jackson et al. (2013) peker på som viktig. Som

Russo et al. (2018) påpeker, kan spill skape et konkurranseaspekt i læringssituasjonen. Hvis matematikken ikke er integrert godt nok vil dette konkurranseaspektet kunne distrahere elevene fra de matematiske konseptene som burde stå sentralt i læringssituasjonen. Ved å ha matematikken underliggende, som en sentral del i strategien, må elevene interagere med matematikken og anvende matematiske konsepter da de er tett innlemmet i spillet. Det burde være muligheter for elever i spillet å diskutere matematiske konsepter, hvor de også får utfordret sin forståelse og eventuelle misoppfatninger (Jackson et al., 2013).

Det fjerde kriteriet går ut på at hvis et spill skal anses som et rikt matematisk spill for ungdomsskolen, må det være fleksibelt for læring og undervisning. Det betyr at spillet må være tilpasningsvennlig til ulike klasser og situasjoner. Som Jackson et al. (2013) legger fram burde et spill være hensiktsmessig og utfordrende for alle elevene som spiller spillet. Dette kriteriet vil sikre at læreren kan tilpasse spillet til sin elevgruppe eller sine enkeltelever. Det å lære seg reglene for et spill er en innvestering som kan ta mye tid fra undervisningen (Russo et al., 2018). Dette betyr at hvis en lærer gjør denne investeringen burde spillet kunne være brukbart i flere situasjoner, for å gi tilbake for den tiden det tok å lære spillet. Manglende enhetlig forståelse av spilleregler kan også være med på å skape en hindring mellom elevene og den kunnskapen man ønsker å formidle. Dette er også med på å styrke viktigheten av at spillet skal være fleksibelt, slik at spillet kan spilles flere ganger av samme elevgruppe.

3.6 Problemløsning

Schoenfeld (2016) trekker frem at problem og problemløsning har hatt mange ulike definisjoner i litteraturen opp igjennom tidene. I problemløsning innenfor matematikken ønsker man å overføre et dagligdags problem til et «enkelt symbolsk problem», som består av ikoniske og/eller symbolske representasjoner (Mataka, Cober, Grunert, Mutambuki & Akom, 2014, s. 165, refferert i Mwei, 2017). Dette gir elevene strategier for å finne matematiske løsninger på svaret. I følge Polya sitt banebrytende arbeid innebærer dette å løse problemer gjennom fire viktige steg (Polya, 1945). Disse stegene er:

1. Forstå problemet: I det første steget i problemløsningsprosessen må problemløseren passe på at problemet er forstått. Her skal problemløseren møte problemet på en mer generell måte, gjennom å stille spørsmål som: Hva er ukjent? Hva skal jeg finne ut av?

2. Utforme en plan: I dette steget skal problemløseren prøve å tenke på og formulere ulike strategier for å løse problemet. Det vil som oftest være noen løsningsmetoder som er bedre egnet enn andre. Strategier baserer seg som oftest på hvordan problemløseren har forstått problemet.

3. Utføre planen: Nå har problemløseren i forrige steg kommet opp med en mulig liste av måter å løse problemet på. Fra denne listen skal problemløseren individuelt velge den metoden som fungerer best for en selv. Dette kan være basert på faktorer som problemløserens evne til å håndtere en bestemt strategi effektivt, eller hvor enkelt det er for problemløseren å gjennomføre denne metoden.

4. Se tilbake: Her skal problemløseren vurdere metodens nøyaktighet og effektivitet. Problemløseren trenger å se etter svakheter eller styrker ved metoden for å forbedre metoden, slik at problemløseren kan ta i bruk samme eller lignende metode i møte med nye problemsituasjoner.

Problemløsning står oppført som en del av kjerneelementene i matematikk i norsk grunnskole i dag (Kunnskapsdepartementet, 2019). Her blir problemløsning beskrevet som det å danne seg metoder for å løse problemer som man ikke har tidligere erfaringer med. Her blir også algoritmisk tenking trukket frem som en sentral egenskap for å drive med problemløsning. Dette innebærer blant annet å dele opp problemet i mindre delproblemer.

3.7 Matematisk engasjement

For å kunne snakke om engasjement må vi først ta for oss hva indre motivasjon er. Når elever gjør handlinger som er indre motiverte, gjør de dette fordi aktiviteten gir glede eller tilfredstillelse i seg selv (Skaalvik & Skaalvik, 2018). Dette stemmer godt overens med hvordan Bragg (2003) beskriver indre motivasjon knyttet til læring. Hun beskriver indre motivasjon som noe som oppstår når elevene engasjerer seg i læringen for læringens skyld. Vi ønsker å bruke Hannula et al. (2016) sin definisjon for matematisk engasjement. Elevene skal få erfaring både fra motiverende og følelsespregede strukturer som skal hjelpe dem med å nå vedvarende produktiv læringsadferd (Hannula et al., 2016). Vi har tolket denne definisjonen som elevenes villighet til å være aktive deltakere i undervisningen, og at den produktiviteten elevene viser er en følge av indre motivasjon basert på følelser eleven har for matematikk. Hannula et al. (2016) forklarer så videre at «produktiv læringsadferd» er en sosial konstruksjon som skapes gjennom interaksjoner mellom elever. Slike interaksjoner danner så strukturer for engasjement som kan være stabile under visse forhold hvor elevene aktiviseres. Poenget til Hannula et al. (2016) er at en kombinasjon av indre, ytre, sosiale og individuelle faktorer er sammenkoblet når en elev engasjerer seg i matematikk. Ved å observere interaksjoner mellom disse faktorene kan det hjelpe oss med å identifisere strukturer for engasjement, støtte, og sosiale begrensninger (Hannula et al., 2016). Det er også mulig at dette kan hjelpe med å forme strategier og verktøy, som lærere kan bruke til å forbedre engasjement for flere elever i mer utfordrende deler av matematikken (Hannula et al., 2016). Basert på Hannula et al. (2016) sin beskrivelse av engasjement, og det at spill oftest er en sosial aktivitet hvor deltakerne interagerer med hverandre, så kan spill også være en god metode for å observere og innhente informasjon om elevers kunnskaper og begrensninger. Dette kan så brukes videre av læreren til å forme strategier og verktøy for å skape engasjement i senere undervisningstimer.

I en spørreundersøkelse gjennomført av Russo et al. (2021) spurte de 248 barneskolelærere om bruk av spill for å støtte instruksjoner i matematikkundervisningen. Et av resultatene fra denne spørreundersøkelsen viste at 82 % av lærerne var enige i at spill var en effektiv metode for å engasjere elever i matematikk. Det kom også frem at lærere i stor grad likte å bruke analoge spill fremfor digitale spill i klasserommet. Farber (2015) prøvde å forstå spill i en obligatorisk undervisningssituasjon, og intervjuet i 2014 spillforskeren James Paul Gee. I denne sammenheng ga han sin mening om motivasjonen til spill i skolen:

> *What I believe is, if the child is motivated enough motivated intrinsically then it [the activity] becomes like play. He is not doing it for the external factors; he's not doing it for extrinsic reward piece. [When] children and animals are playing, they are learning. And when they are learning, they are playing. Learning is an appetite for human beings. When you put it in school and make it boring and decontaminated, then of course you kill that appetite (Farber, 2015, s. 27-28).*

Her påpeker han et stort problem med mange spill i skolen. Spillene som lages og brukes i undervisning ender ofte med å ikke være spennende. Ofte er disse spillene brukt for å vise et viktig poeng som læreren vil ha frem. Dette er noen ganger knyttet til en optimal strategi, som gjør at spillet mister all hensikt når elevene har funnet denne strategien. Disse spillene ligner mer på utforskende aktiviteter enn spill. Det er viktig å beholde den faktiske spillkomponenten som skaper glede og motivasjon fra gang til gang. James Paul Gee forteller videre:

> *The fact of the matter is that when you trigger the human instinct of learning and this is true of adults, not just children you're triggering a deeply satisfying thing. When people learn something new and they gain mastery, they are profoundly satisfied. The issue is how do we get engagement by an affiliation, not whether we call it play or call it a game (Farber, 2015, s. 27-28).*

Her blir det påpekt at det å lære er veldig tilfredsstillende, og når man får til noe så føler man på mestring. Dette er med på å styrke viktigheten av at alle elever skal føle på mestring, noe som er inkludert i kriteriet om balanse mellom evne og flaks. Elever skal føle at de har mestret noe i spillsituasjonen.

Farber (2015) påpeker også et spills evne til å skape et lærerikt øyeblikk. Farber (2015) intervjuet spillutvikleren Jesse Schell. I dette intervjuet sier Jesse Schell: «One of the biggest things a teacher may overlook one of the greatest powers of games in the classroom is the ability of a game to introduce a teachable moment» *(Farber, 2015, s. 29).* Videre påpeker James Schell hvordan spill ofte har vært et forsøk på å erstatte læreren. Han mener derimot at spill skal brukes for å styrke lærerens undervisning. Spill er ikke gode til å vurdere når elevene har hatt et lærerikt øyeblikk, men det er derimot læreren. Det er derfor viktig at læreren også er involvert i spillsituasjonen for å forsikre seg om at elevene har disse lærerike øyeblikkene og kan supplere med relevant informasjon. Å engasjere elevene vil også være essensielt for en god bruk av spill i undervisningstimen. I det samme intervjuet påpeker Jesse Schell at konkurranse i spill er noe som kan virke mot sin hensikt. Han mener derimot at det å dele elever inn i grupper, hvor de kan jobbe sammen mot et felles mål, vil være positivt. Jesse Schell påpeker at mennesker liker å løse oppgaver sammen. Han forteller at det å drive med spill i grupper, hvor man får jobbet sammen mot et felles mål, trekker mange linjer til problembasert læring.

4 Metode

Ideen med å bruke Borel fikk vi da spillet ble presentert for oss på universitetet av en professor i matematikk, som også ble vår veileder til denne oppgaven. Etter å ha erfart en undervisningsøkt med Borel ble vi selv inspirert til å teste ut dette på en 9. klasse, i sammenheng med vikarjobb på en ungdomsskole. Vi gjennomførte da flere undervisningsøkter med Borel på samme klasse over en periode på 2-3 uker. Dette viste seg å være populært blant elevene, som viste god arbeidslyst og som etterspurte Borel flere ganger etter første undervisningsøkt i sannsynlighet. Dette gjorde oss interessert i å forske på spillet Borel som utgangspunkt til et undervisningsopplegg. For å kunne forske på bruken av Borel i en undervisningssammenheng måtte vi designe en undervisningsøkt. Dette involverte blant annet å bestemme hvordan elevene skulle jobbe og hvilke oppgaver som skulle brukes. Videre var det viktig å bestemme en god metode for innhenting av opplysninger om elevenes opplevelse og utbytte av timen. I denne delen av oppgaven vil vi gjøre rede for oppbygning av undervisningen, valg av metode og forskningsdesign, etiske aspekter knyttet til databehandling, beskrive hvordan vi analyserte dataene og drøfte forskningskvaliteten.

4.1 Hvordan fyller Borel våre kriterier

Vi har i vår oppgave valgt det analoge spillet Borel, da vi mener dette er et godt eksempel på et rikt matematisk spill. Vi vil i denne delen se på Borel i lys av de kriteriene vi har lagt frem i seksjon 3.5.2. Vi vil senere også se på om kriteriene ble ivaretatt i vår undervisningsøkt med Borel.

Det første kriteriet går ut på at spillet skal være engasjerende og elevene skal kunne være selvgående. Vi mener Borel er engasjerende. Dette baserer vi både på egen undervisningserfaring med spillet i ungdomsskolen, men også erfaringene Handeland (2021) gjorde seg da han testet ut Borel. Handeland (2021) beskrev elevenes reaksjon slik: «[…]de deltagende elevene uttrykte stort engasjement i form av høylytte gledesutbrudd og ønsker om å være med å delta i forsøkene» Handeland (2021, s. 27). Borel er et spill som introduserer et konkurranseaspekt til matematikktimen. Fra vår egen erfaring i skolen er konkurranse noe som skaper mye engasjement i en undervisning. Når Borel spilles gruppevis vil det kunne åpne for matematisk diskusjon. Elevene må bli enige både på hva de vil vedde og hvor mye de ønsker å satse. Når elevene først har lært seg reglene for Borel mener vi at spillet er engasjerende nok til at det vil fungere selvgående uten direkte støtte fra lærer. Dette gjorde at vi på forhånd kunne være rimelig trygge på at Borel oppfylte det første kravet.

Det andre kriteriet går ut på at det skal være en balanse mellom evne og flaks. Vi mener at Borel oppfyller dette kriteriet, da det både er en stor verdi å ha gode kunnskaper i sannsynlighetsregning og spillteori. Samtidig vil det på grunn av spillets natur være en sjanse for at man kan vinne uten å ha disse evnene. Læreren kan også være med på å påvirke balansen mellom evne og flaks gjennom valg av oppgaver. Ved å lage oppgaver hvor sannsynligheten for ja eller nei nærmer seg 50 %, vil flaks ha en større betydning. Elever som kan finne sannsynligheten for utfallene vil i slike oppgaver ha et mindre fortrinn enn i oppgaver med en skjevere fordeling. Selv om de har funnet sannsynligheten for de to utfallene er det fortsatt stor sannsynlighet for at det mindre sannsynlige skjer. Altså har de funnet ut av at det ikke hadde så mye å si hva de valgte, derimot har de et bedre utgangspunkt for hva de burde vedde. På samme måte vil kunnskaper innenfor sannsynlighet ha større betydning om man lager oppgaver hvor sannsynligheten nærmer seg 100 %. I dette tilfelle vil den som klarer å regne ut riktig svar kunne nesten garantere en seier og mange mynter, da sjansen for at det motsatte skjer vil nærme seg 0 %. Dersom man som lærer er bevisst på denne nyansen kan man ha en riktig balanse mellom evne og flaks i oppgavene, hvor alle elevene uavhengig av nivå kan oppleve suksess. Det er også viktig å legge merke til at elevers intuisjon om hva som er mest sannsynlig også er påvirket av denne dynamikken. Hvis forskjellen i sannsynlighet mellom de to utfallene er større blir det åpenbart enklere å anta at noe er mer sannsynlig. Ved å gjøre bevisste valg når det kommer til å ha en god balanse mellom evne og flaks kan man oppfylle det andre kriteriet.

Det tredje kriteriet går ut på at matematikken skal være sentral i spillet. Matematikk er sentralt i de oppgavene elevene må ta stilling til når de spiller Borel. Matematikken er så iboene at de faktisk er mulig å ta oppgaver direkte fra et sannsynlighetskapittel i matematikkboka til elevene og justere oppgavene slik at de passer Borel sitt oppgaveformat. Skal elevene ha en god sjanse til å vinne må de ikke bare finne hvilket utfall som er mest sannsynlig, de må også kunne vurdere hvor mye de burde vedde. Ligger sannsynligheten for de to utfallene nærme 50 % er det ikke nødvendigvis lønnsomt å gå inn med en stor sum. Dette skal vi se nærmere på i neste kapittel, når vi skal snakke om optimal innsats. Dersom elevene finner sannsynligheten for de to utfallene vil de derfor ha et bedre utgangspunkt for hvor mye de burde vedde enn elevene som bare tipper. Sannsynlighet er en del av pensum på 9. trinn

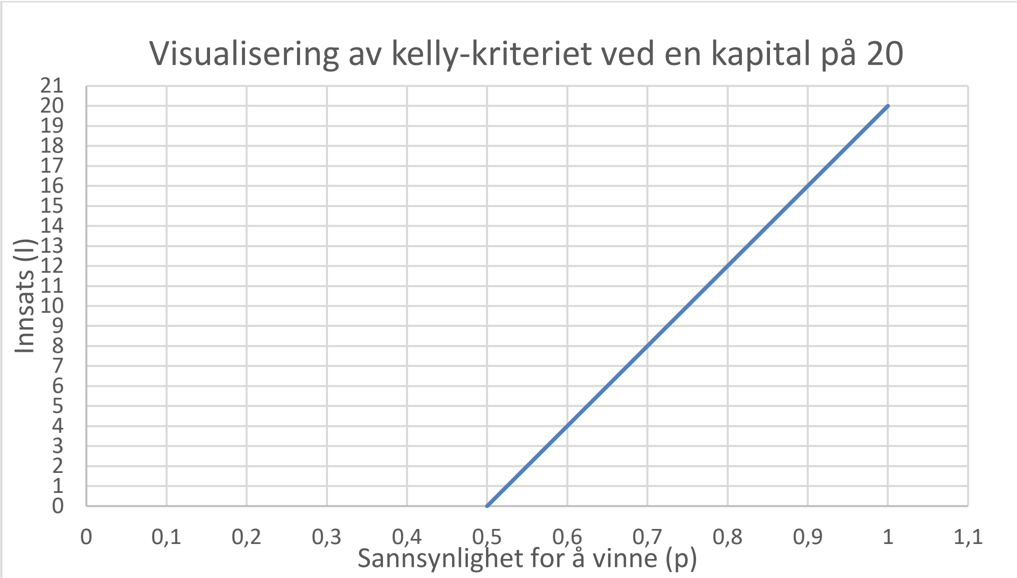
(Kunnskapsdepartementet, 2019). Dette gjør at Borel er en relevant aktivitet man kan bruke i undervisning på dette trinnet for å trene på matematiske ferdigheter innenfor sannsynlighet og kombinatorikk.

Det siste kriteriet går ut på at spillet skal gi fleksibilitet for læring og undervisning. Oppgavene i Borel kan velges av læreren for å tilpasse spillet til en gitt klasse. Spillet kan også brukes for en rekke temaer innenfor sannsynlighet. Dette gjør at spillet kan brukes flere ganger i samme klasse. På denne måten kan læreren ta i bruk samme spill flere ganger og elevene slipper å sette seg inn i nye regler for hver gang. Når man bruker Borel som et rammeverk til en undervisning har man flere muligheter til hvordan man ønsker å bygge opp timen. Man kan blant annet sette opp en plenumsdiskusjon til en utfordrende oppgave eller bruke det som en introduksjon til sannsynlighet, som vi gjorde i vår undervisning. I tillegg kan Borel brukes som et konsolideringsverktøy for å teste elevene i det de har gjennomgått i tidligere undervisninger. Borel kan spilles i grupper hvor elevene samarbeider og konkurrerer med andre grupper, eller elevene kan spille mot hverandre innad i gruppa. I det siste eksempelet gir Borel også mulighet for usynlig differensiering, da en kan gi ulike oppgaver til de ulike gruppene uten at dette trenger å være åpenlyst for elevene. Man kan lage oppgaver som gir mulighet for ulike løsningsmetoder som kan være med på å gi mulighet for differensiering. Med tanke på alle mulighetene man har med Borel som et rammeverk, mener vi at Borel gir fleksibilitet for både læring og undervisning.

4.2 Gunstig innsats i vår modell

I vår versjon av Borel får deltagerne bare lov til å vedde en, tre eller fem mynter. Elevene starter med en kapital på 20 mynter. Det er da interessant å se på hva sannsynligheten må være for at det skal være gunstig å satse henholdsvis en, tre eller fem mynter gitt en kapital på 20 mynter.

Her er det relevant og ta utgangspunkt i Kelly-kriteriet, og da spesifikt likning 1 som beskriver Kelly-kriteriet når oddsen er 1:1. Sammenhengen mellom innsats og sannsynlighet er grafisk fremstilt i Figur 2, gitt en kapital på 20 mynter og odds 1:1. En forutsetning er at sannsynligheten for hendelsen er kjent.



Figur 2: Visualisering av Kelly-kriteriet ved en kapital på 20

Ved hjelp av likningen som beskriver Kellys-kriterium der oddsen er 1:1, se likning 1 i 3.2 Kelly-kriteriet, ser vi at det lønner seg å satse fem mynter når sannsynligheten for å vinne er 62.5 % eller mer. Videre kan vi beregne at det lønner seg å satse tre mynter når sannsynligheten er 57.5 % eller mer, derimot vil der være mer lønnsomt å satse 5 mynter når sannsynligheten er 62.5 % eller mer. I vår versjon av Borel, hvor det bare kan satses en, tre eller fem mynter, burde man derfor satse tre mynter når sannsynligheten er fra og med 57.5 % og opp til 62.5 %. I dette spillet er det tvungen innsats, og du må minimum satse en mynt. Det vil derfor være gunstig å satse kun en mynt når sannsynligheten for å vinne er mindre enn 57.5 %. Dette er da gitt at man har en kapital på 20 mynter og vil endre seg etter hvert som kapitalen endrer seg, men dette gir en ide om hvordan man burde satse.

Tabell 1: Gunstig innsats ved ulike sannsynlighetsintervaller gitt 20 mynter

Innsats	**Sannsynlighetsintervall**
En	$p < 57.5\ \%$
Tre	$57.5\ \% \leq p < 62.5\ \%$
Fem	$p \geq 62.5\ \%$

Det kan i Borel virke åpenbart at man alltid burde vedde på svaret med høyest sannsynlighet. Dette er derimot ikke nødvendigvis sant. Det finnes situasjoner der det kan være riktig med det motsatte, nemlig å satse på svaret med lavest sannsynlighet. Dersom man er i en situasjon hvor man ligger an til å tape, kan det å satse på det mindre sannsynlige være nødvendig for å øke sjansen for å vinne spillet. Dette vil senke sjansen for å vinne den spesifikke runden, men vil gi en drastisk økning for å vinne spillet skulle man ha flaks. Hvis gruppen din ligger 5 mynter bak gruppen som leder, kan det å vedde på det mindre sannsynlige i den siste runden være det eneste som gir deg en mulighet til å vinne spillet, gitt at gruppen som leder velger det mest sannsynlige. Dette har med spillstrategi å gjøre. Da handler det ikke lenger om å gjøre det best innad i en isolert oppgave, men se spillet i en helhet, og øke oddsen for å vinne.

4.3 Forskningsdesign

Vi skal besvare problemstillingen: *Hvordan fungerer spillet Borel som et rammeverk for å undervise sannsynlighet i ungdomsskolen, og hvordan skiller Borel seg fra andre matematiske spill?*

Hensikten med denne undersøkelsen er å begrunne hvorfor vi tror Borel passer som et godt rammeverk for å undervise sannsynlighet i skolen og hvorfor vi mener Borel skiller seg fra andre spill som brukes i skolen. For å kunne bruke Borel som et rammeverk for å undervise sannsynlighet måtte vi først bestemme oss for hvordan vi ønsket å bygge opp en undervisningsøkt. Vi designet først oppgaver som vi tenkte kunne være passe utfordrende for elever på 9. trinn. Disse oppgavene blir så testet i en piloteringsfase på to 9. klasser fra samme skole som skolen vi skal samle data på. Etter denne piloteringsfasen var planen å gjøre justeringer på oppgavene og undervisningsøkten før vi gjennomfører selve datainnsamlingen noen dager senere.

Figur 3: Utvikling fra pilotering til datainnsamling

For å vurdere hvordan Borel fungerer som et rammeverk for å undervise sannsynlighet er vi interessert i elevenes reaksjoner til Borel og hvilke tanker de har rundt undervisningsøkten. Vi bestemte oss derfor for å gjennomføre et videointervju med et par elever og en videoobservasjon av en gruppe i undervisningsøkten. Gjennom intervjuene vil vi få et innblikk i elevenes tanker rundt Borel og undervisningen, og kan se om dette samsvarer med data fra videoobservasjonen. Videoobservasjonen gir oss også innblikk i elevenes tankegang gjennom diskusjonene mellom elevene på gruppen. Disse kvalitative dataene blir så sett i sammenheng og blir tolket innenfor ulike kategorier som vi bestemmer etter å ha transkribert dataene. Disse kategoriene blir så brukt som koder i kodingsprogrammet NVivo for å kartlegge funn.

4.4 Utvalg

Hovedgrunnen til valg av ungdomsskolen over videregående var at vi hadde bedre kontakter i ungdomskolen, som betydde at det var enklere for oss å få tak i en ungdomsskoleklasse. Elevene i piloteringsfasen og datainnsamlingsfasen gikk alle i 9. trinn på en skole litt utenfor en storby. De aller fleste elever på dette trinnet vil være i aldersgruppen 14 til 15 år. Som tidligere nevnt er sannsynlighet en del av pensum på 9. trinn (Kunnskapsdepartementet, 2019). Dette gjør at Borel er aktuelt å bruke i undervisning av elever på 9. trinn for å trene matematiske ferdigheter innenfor sannsynlighet. Vi valgte en ungdomsskole som vi var kjent med fra før gjennom vikararbeid. Vi spurte om samtykke fra to klasser på 9 trinn, og hadde tenkt til å bruke den klassen hvor vi fikk flest samtykker til datainnsamlingsfasen. Vi fikk dessverre færre samtykker enn ønsket, så vi gjennomførte datainnsamlingsfasen to ganger med en gruppe på fire fra hver av klassene. Disse to gruppene vil fremover bli kalt gruppe 1 og gruppe 2. Fra disse to gruppene som ble filmet i datainnsamlingsfasen valgte vi en gutt og en jente fra hver firergruppe til videointervju.

4.5 Design av undervisningsopplegg

4.5.1 Design før piloteringsfasen

I begynnelsen var vi usikre om vi ønsket at elevene skulle spille Borel hele undervisningsøkten. Vi ble til slutt enige om at vi ønsket å gjennomføre en runde med Borel i begynnelsen av timen og en ny runde til slutt. Dette var for å kunne se om elevenes tankegang hadde endret seg gjennom undervisningsøkten. Mellom disse to rundene med Borel ønsket vi at elevene skulle jobbe med oppgavene fra den første runden med Borel, og finne sannsynligheten for utfallene. Tanken var at siden de allerede hadde gjort seg kjent med disse oppgavene kunne de ha en bedre forståelse for hva oppgavene spurte etter og komme raskere i gang med arbeidet. Vi ønsket først å bruke Borel som et konsolideringsverktøy, men på grunn av streik i skolen fikk elevene mindre undervisning i forkant av vårt prosjekt. Dette medførte at elevene manglet kunnskaper vi hadde forutsatt, når vi planla prosjektet og hvilke oppgaver elevene skulle bruke i spillrunden med Borel. Elevene hadde blitt introdusert til kombinatorikk, konseptet «gunstige over mulig» og sammensatte hendelser, men de hadde ikke full forståelse av disse konseptene. Dette medførte at vi måtte gjøre noen raske tilpasninger til undervisningsøkten vi hadde planlagt for piloteringstimen. Vi bestemte oss for å bruke Borel som en introduksjon, fremfor konsolidering, og ha en problemløsningsøkt.

Til undervisningsøkten lagde vi ni oppgaver for spillrunden med Borel, hvor de fleste av disse omhandlet komplementær sannsynlighet. For å gi elevene mestringsfølelse, og på denne måten motivere for videre spilling, vurderte vi at den første oppgaven skulle omhandle et tema hvor elevene var kjent med løsningsmetoden fra før. Vi valgte oppgavens tema til å være «gunstige over mulige». Vi kommer senere til å beskrive de ni oppgavene valgt for undervisningstimen gjennomført i piloteringsfasen.

Fordi dette skulle være en problemløsningsøkt ville vi at elevene skulle jobbe i grupper. På denne måten kunne elevene dele ideer og hjelpe hverandre, noe som også ga oss et innblikk i elevenes tankegang. Vi delte elevene i grupper på fire. Bakgrunnen for valget av gruppestørrelsen var blant annet at vi hadde fått få tilbakemeldinger på spørreskjemaet til de foresatte, som gjorde at vi bare hadde fire til seks elever som hadde fått tillatelse til å delta fra hver klasse. Det var også normalt for elevene å jobbe i firergrupper på den skolen vi gjennomførte pilotering og datainnsamling på.

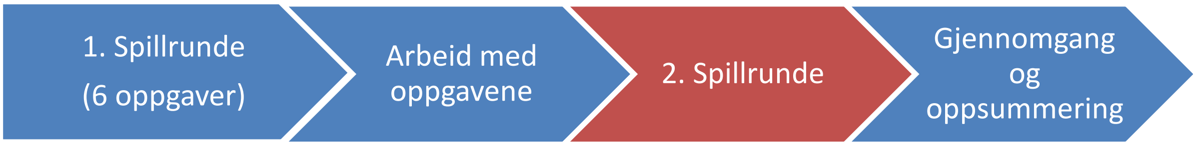
Undervisningsøkten starter med første spillrunde. I spillet leser læreren opp en og en Borel-oppgave, som også blir presentert visuelt for elevene på en skjerm. Elevene får så noen minutter til å diskutere oppgaven med hverandre i grupper, og blir enige om hvor mange mynter de vil vedde. Vi har valgt å bruke perler istedenfor mynter. Elevene kan velge om de ville vedde en, tre eller fem mynter. Når elevene diskuterer oppgavene, skal læreren bevege seg mellom gruppene og svare på spørsmål om dette skulle være nødvendig. Når tiden er ute, får en av elevene gjennomføre eksperimentet. Gruppene som vedder riktig får så utdelt antall mynter som tilsvarer innsatsen, mens de gruppene som vedder feil mister antall mynter de satser. Deretter går spillet videre til neste oppgave etc. Etter første spillrunde skal elevene arbeide videre med de samme oppgavene, hvor de får bedre tid til å beregne sannsynligheten i hver av oppgavene. I denne delen av undervisningsøkten skal læreren bevege seg mellom gruppene og komme med hint. Etter dette skal elevene få spille en runde til med de samme oppgavene. Tanken var at denne spillrunden skulle være rask å gjennomføre, da elevene allerede hadde regnet ut hva som var den mest sannsynlige hendelsen i hver av oppgavene. Til slutt la vi opp til at det skulle være en gjennomgang av noen av oppgavene for å oppsummere og presisere hva komplementær sannsynlighet går ut på. Ettersom det mindre sannsynlige kan skje mens man spiller, var det viktig for oss å ha en gjennomgang av oppgavene mot slutten av timen. På denne måten ville elever som hadde tenkt riktig, men likevel tapt, få bekreftet at de har valgt riktig løsningsmetode. Opplegget som ble designet for piloteringstimen er illustrert i **Feil! Fant ikke referansekilden.**.

Figur 4: Undervisningsopplegg planlagt for piloteringen

4.5.2 Justeringer etter pilotering

Vi observerte i piloteringsfasen at elevene hadde det gøy (jublet, etc.), og var engasjerte i matematiske diskusjoner rundt oppgavene gjennom hele undervisningsøkten. Derimot ble det i piloteringsfasen klart at vi hadde undervurdert hvor tidkrevende undervisningsopplegget var. Vi fikk ikke tid til å gjennomføre andre spillrunde, og opplevde også at både antall oppgaver og vanskelighetsgraden ble for høy. Vi måtte derfor gjøre noen grep for å tilpasse undervisningsopplegget til elevgruppen før datainnsamlingsfasen. Piloteringen av undervisningsopplegget ble gjennomført noen dager før datainnsamling, noe som gjorde at vi hadde begrenset med tid til å gjøre justeringer. Et problem vi møtte på var at det var svært få av gruppene som hadde tid til å arbeide seg gjennom alle oppgavene i arbeidsøkten etter første spillrunde. En mulig forklaring på dette kan være at oppgavene og temaet var nytt for dem. Vi valgte derfor å redusere antall oppgaver i Borel fra ni til seks for datainnsamlingsøkten. På denne måten ble det mer tid til hver av oppgavene både når elevene spilte Borel, og når de arbeidet med oppgavene. Vi kommer tilbake til hvilke vurderinger vi la til grunn for det endelige utvalget av oppgaver. Vi valgte også bort andre spillrunde med

Borel for å ha mer tid til gjennomgangen av oppgavene og oppsummeringen på slutten av timen. Det justerte opplegget er illustrert i **Feil! Fant ikke referansekilden.**.



Figur 5: Justert opplegg for datainnsamling, hvor rød del illustrerer det som ble utelukket i justeringen etter pilotering

Et annet problem vi møtte på var at flere av elevene ikke hadde kontroll på brøkregning. Hadde vi fått tildelt mer tid med klassen skulle vi ha brukt en undervisningsøkt på dette i forkant av datainnsamlingstimen.

4.5.3 Valg av oppgaver

I planleggingen av undervisningsopplegget til piloteringsfasen hadde vi opprinnelig laget ni oppgaver. Vi ønsket å velge ut oppgaver som skulle utfordre elevene til å tenke problemløsende og designet derfor en del oppgaver som omhandlet komplementær sannsynlighet. Dette var noe elevene ikke hadde jobbet med tidligere, så det var viktig for oss å lage oppgaver hvor elevene kunne ta i bruk logisk tenkning og intuisjon for å komme seg frem til det mer sannsynlige svaret. Så lenge elevene har gode logiske tankerekker vil dette sannsynligvis belønnes i spillet. Vi fant også andre oppgaver som skulle være litt annerledes enn oppgaver elevene hadde jobbet med tidligere. Vi fikk blant annet inspirasjon fra «Monty Hall problemet», som er et kjent sannsynlighetsproblem (Wikepedia, 2023b). Med tanke på at undervisningen skal være en problemløsningstime er det viktig at elevene får muligheten til å fundere over matematiske konsepter. Et av kriteriene vi satte opp for rike matematiske spill var det å ha en god balanse mellom evne og flaks. Ved å ha en god blanding av oppgaver med kjente konkreter, men ukjent løsningsmetode mener vi at vi oppnår dette. Likevel fant vi det utfordrende å tilpasse oppgavene til elevenes nivå uten å ha kjennskap til klassen på forhånd.

Vi erfarte i piloteringsfasen at vi hadde for mange oppgaver, og vi reduserte derfor antallet oppgaver fra ni til seks. Vi skal nå presentere de seks oppgavene vi endte opp med å bruke i undervisningen knyttet til datainnsamlingen, og begrunne hvorfor vi valgte disse.

Deretter skal vi presentere de tre oppgavene fra piloteringsfasen som vi valgte å utelukke for datainnsamlingen. På tilsvarende måte skal vi komme med en begrunnelse for hvorfor vi valgte disse i utgangspunktet og hvorfor vi valgte å utelukke akkurat disse tre oppgavene fra datainnsamlingstimen.

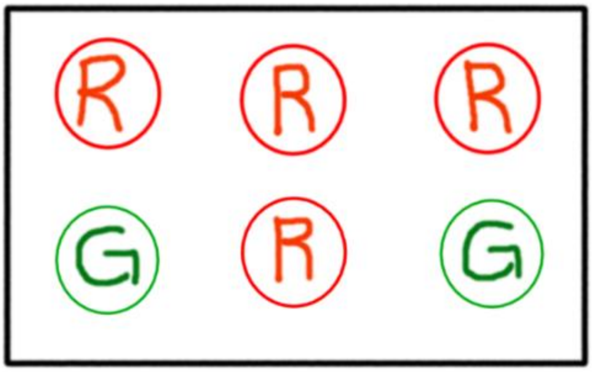
Utvalgte oppgaver for datainnsamlingen

De seks oppgavene vi brukte i datainnsamlingen samlet vi i et eget oppgavedokument, som ble delt ut til elevene etter spillrunden, se Vedlegg 1. Elevene hadde tidligere hatt litt undervisning om sannsynlighet. Et av målene fra piloteringen til datainnsamlingen var at vi ønsket å spisse omfanget til et spesifikt tema, slik at elevene fikk én type problem å prøve seg på og ikke ble overveldet av et stort omfang av temaer. Vi skal nå gå gjennom de seks oppgavene som vi valgte å beholde fra piloteringen. Det er bare fem hovedoppgaver, men oppgave 1 er delt i to deloppgaver a og b.

Oppgave 1: Vi trekker to baller. Vil de være samme farge?

a. Med tilbakelegging

b. Uten tilbakelegging



Figur 6: Visualisering av røde og grønne baller i en boks

Utregning 1a: $P\big(\text{Samme farge } (med\ tilbakelegging)\big) = \frac{(4^2+2^2)}{6^2} = \frac{5}{9} \approx 56\ \%$

Det lønner seg å satse ja, da ballene vil ha samme farge ca. 56 % av tiden.

Utregning 1b: $P\big(\text{Samme farge } (uten\ tilbakelegging)\big) = \frac{(4\times3+2\times1)}{6\times5} = \frac{7}{15} \approx 47\ \%$

Det lønner seg å satse nei, da ballene vil ha samme farge ca. 47 % av tiden.

Den første oppgaven er basert på å trekke ut baller fra en boks (se Figur 6). Oppgave 1a er med tilbakelegging, mens oppgave 1b er uten tilbakelegging. Noe som gjør denne oppgaven interessant, er at man får oppleve at tilbakelegging har noe å si for hva man burde vedde. Hvis man regner ut sannsynligheten for å få to like med tilbakelegging (se utregning 1a) så vil man se at det er mer enn 50 % sannsynlighet for å trekke to baller av samme farge. Derimot om man regner uten tilbakelegging (se utregning 1b) så vil man se at det blir mindre enn 50 % sannsynlighet for å få to baller av samme farge. Denne dualiteten så vi på som veldig spennende å presentere for elevene. Samtidig tenkte vi at denne oppgaven ikke introduserte for mye nytt, og kunne derfor være en fin oppvarming som ga mestringsfølelse for elevene. Vi ønsket derfor å starte spillet med denne oppgaven. Dette opplevde vi fungerte godt i piloteringen, og vi ønsket derfor å beholde denne oppgaven som en startoppgave i datainnsamlingsøkten. Et annet interessant aspekt ved disse oppgavene er at det i begge deloppgavene, ifølge Kelly-kriteriet, er objektivt riktig å satse bare en mynt gitt en kapital på 20. Dette er fordi begge oppgavene gir mindre enn 57.5 % sannsynlighet for å vinne om man velger svaret med høyest sannsynlighet. Fra egen erfaring opplevde vi at elever alltid ønsket å satse fem for å sikre størst mulig gevinst. Vi ønsket derfor at det ikke alltid skulle være optimalt for elevene å vedde fem hver gang. Det var derfor viktig for oss å legge inn oppgaver hvor det objektivt sett, ifølge Kelly-kriteriet, er gunstig å satse en eller tre også. Dette gjorde vi med et utgangspunkt i en kapital på 20, men hva som lønner seg å satse endrer seg gjennom spillet når elevenes kapital endrer seg.

Oppgave 2: Du trekker tre kort fra en kortstokk. Er minst to av de samme sort? (med tilbakelegging)

Utregning 2: $P\big(\text{Minst to av de samme sort (med tilbakelegging)}\big) = 1 - \frac{(4\times3\times2)}{4^3} = \frac{5}{8} \approx$ 63 %

I oppgave 2 lønner det seg å satse ja, da kortene vil være av samme sort ca. 63% av tiden. Her kan man også tenke på en annen måte. Antar man at det er trukket to ulike kort etter to trekk, vil det være like stor sannsynlighet for å trekke et kort som gir ulik sort, som det vil være for å trekke et kort som gir samme sort. Her er det viktig å huske på at dette er basert på antagelsen om at de to første kortene som ble trukket ikke var like, noe de kunne ha vært. Dette leder oss til samme konklusjonen som i utregning 2, nemlig at det er mer enn 50 % sannsynlighet for å trekke minst to like kort når vi trekker tre kort fra en kortstokk med tilbakelegging.

Denne oppgaven tenkte vi kunne egne seg som en introduksjonsoppgave til temaet komplementær sannsynlighet. Det viktigste for alle oppgavene om komplementær sannsynlighet er å oppdage at man må finne sannsynligheten for det motsatte av hva oppgaven spør om, slik at man kan bruke dette til å finne sannsynligheten for det man leter etter. Når man regner ut svaret (se utregning 2) ser man at det er ganske stor sannsynlighet for å trekke minst to like. Tenker man logisk over oppgaven kan man resonnere seg fram til at det er mer sannsynlig at man trekker 2 av samme sort, enn at alle blir ulike. På denne måten kan elevene komme fram til det mest sannsynlige svaret uten at de nødvendigvis har regnet det ut eksakt. Likevel er det vanskelig å si hvor mye det er lurt å vedde om man ikke eksplisitt vet hvor stor sannsynligheten for utfallet er. Vi valgte denne oppgaven nettopp fordi den gir muligheten for elevene å gjøre en rask logisk vurdering av sannsynligheten for hendelsen, og introduserer samtidig konseptet bak komplementær sannsynlighet. Ifølge Kelly-kriteriet burde man i denne oppgaven vedde fem mynter på ja, gitt at man har 20 mynter eller mer, da sannsynligheten for at man vinner er over 62.5 %. Når vi skulle redusere antallet oppgaver var det naturlig å beholde denne oppgaven da den ivaretok introduksjon til temaet vi ønsket å spisse fokuset mot, nemlig komplementær sannsynlighet.

Oppgave 3: Du kaster to D6 terninger to ganger: Får du to like eller syv på minst et av kastene?

Utregning 3:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Figur 7: Visualisering av det totale utfallsrommet når man kaster to terninger

Når man skal løse denne oppgaven er det først viktig å finne hvor mange utfall som utgjør to like eller syv. Det finnes seks utfall som gir to like når man kaster to terninger. Disse utfallene er markert blått i Figur 7. Det finnes også seks utfall som gir summen syv når man kaster to terninger. Disse utfallene er markert i grønt i Figur 7. Det er også viktig å påpeke at sannsynligheten for å få syv og to like ikke overlapper, som betyr at hver hendelse utgjør en sjettedel hver. Altså vil sannsynligheten for å få to like eller syv være:

$$P(To\ like\ eller\ summen\ syv) = P(To\ like) + P(Summen\ syv) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Med dette kan vi nå regne ut svaret på oppgaven:

$$P(\text{To like eller syv på minst et av kastene}) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \approx 56\ \%$$

Det lønner seg å satse på ja, da sannsynligheten for å få syv eller to like minst en gang er ca. 56 %.

Denne oppgaven omhandler også komplementær sannsynlighet, men introduserer samtidig også noe nytt. I denne oppgaven er det to disjunkte hendelser som utgjør to deler av samme utfallsrom, nemlig det å få to like eller syv. Det er viktig at elevene ser at disse hendelsene er disjunkte om de skal finne antall gunstige utfall. Regner man ut sannsynligheten for denne oppgaven (se utregning 3) ser man at den ligger rett under 57.5 %. Ifølge Kelly-kriteriet er det mest gunstig å vedde bare en mynt, gitt at man har 20 mynter eller mindre, da 56 % er mindre enn 57.5 %, som er det som er nødvendig for at det skal være gunstig å vedde tre mynter. Dette avhenger derimot av kapitalen til elevene. Som vi tidligere har presentert vil en økt kapital gi grunnlag for en økt innsats.

Denne oppgaven valgte vi fordi den krever bruk av komplementær sannsynlighet og, i motsetning til oppgave 2, ikke gir en like intuitiv alternativ løsningsmetode. Samtidig vil oppgaven være straffende for elever som utelukkende legger inn maksimal innsats (5 mynter) hver gang. Når vi skulle redusere antallet oppgaver var dette momenter som var viktig for oss å beholde, og vi valgte derfor å beholde oppgave 2.

Oppgave 4: Du trekker seks kort fra kortstokk. Er minst to av dem samme verdi? (med tilbakelegging)

Utregning 4: $P(Minst\ to\ kort\ med\ samme\ verdi\ (med\ tilbakelegging)) = 1 - \frac{(13\times 12\times 11\times 10\times 9\times 8)}{13^6} = \approx 74\ \%$

Det lønner seg å satse ja, da du vil trekke minst to kort med samme verdi 74% av tiden.

Oppgave 5: Du kaster to D6 terninger fem ganger. Får du to like på ett kast minst en gang?

Utregning 5: $P(To\ like\ på\ minst\ et\ kast) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 60\ \%$

Det lønner seg å satse ja, da du vil få to like minst en gang 60% av tiden.

Både oppgave 4 og 5 byr på mye av de samme utfordringene som de foregående, og begrunnelsen for inkluderingen av disse er derfor den samme. Siden komplementær sannsynlighet var nytt for elevene ønsket vi å inkludere oppgaver hvor elevene kunne komme frem til det mer sannsynlige utfallet med litt logisk tenkning og intuisjon. På denne måten kan elevene få oppleve suksess når de spiller Borel for første gang, og samtidig få bekreftet eller avkreftet sin egen tankegang når de arbeider med oppgavene i etterkant. Vi mener at disse oppgavene derfor var relevante å beholde i datainnsamlingen, nettopp for å sikre at elevene fikk bryne seg på denne type problem i ulike fremstillinger.

Oppgaver som ble utelukket fra datainnsamlingen

Vi skal nå presentere de tre oppgavene som ble utelukket fra piloteringen til datainnsamlingen. Her skal vi forklare hvorfor vi i utgangspunktet likte oppgavene og hvorfor nettopp disse senere ble utelukket i datainnsamlingen.

Oppgave 6: Det er 3 poser med 2 baller i hver pose. Nr. 1 har to blå baller, nr. 2 har en blå ball og en rød ball og nr. 3 har to røde baller. Du velger en pose tilfeldig, og trekker en av ballene i posen. Er den andre ballen i posen den samme fargen?

Utregning 6: 2 av 3 ganger vil dette være tilfelle, da 2 av 3 poser har to like baller. Det lønner seg derfor å svare ja, da det er 67 % sannsynlighet for at du har to like baller i posen.

Monty Hall er et kjent matematisk problem som har skapt mye debatter gjennom tidene (Wikepedia, 2023b). Fra egen erfaring har dette problemet og lignende problemer skapt mange gode og spennende diskusjoner, både rundt middagsbordet og i klasserommet. Vi ønsket derfor å inkludere en oppgave med dette problemet som bakgrunn, men valgte å lage en forenklet utgave med et utgangspunkt i det klassiske «Monty Hall problemet». Vi erfarte i piloteringen at denne oppgaven ikke var egnet til å bruke i vår undervisningstime. Denne versjonen av problemet var ikke like spennende sammenliknet med «Monty Hall problemet», da svaret ble litt for opplagt. I tillegg omhandlet ikke oppgaven komplementær sannsynlighet, som var det temaet vi ønsket å spisse undervisningen mot. På grunn av dette valgte vi å ekskludere denne oppgaven fra datainnsamlingen. Monty Hall er et spennende problem å ta utgangspunkt i, og skulle vi gjort dette igjen ville vi ha utformet denne oppgaven på en annen måte.

Oppgave 7: Vil antall øyne summeres til <u>mer</u> enn 12 når du kaster fire D6 terninger?

Det er ganske innviklet å finne et eksakt svar på denne oppgaven. Vi vil først vise hvordan vi fant et eksakt svar før vi beskriver hvordan vi forventet at elevene skulle tenke. Den eksakte utregning er noe som kunne blitt tatt opp og forklart i en senere økt.

Eksakt utregning 7:

Muligheter		1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
	Terning øyne	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
2	3	2	4	6	8	10	12	10	8	6	4	2
3	4	3	6	9	12	15	18	15	12	9	6	3
4	5	4	8	12	16	20	24	20	16	12	8	4
5	6	5	10	15	20	25	30	25	20	15	10	5
6	7	6	12	18	24	30	36	30	24	18	12	6
5	8	5	10	15	20	25	30	25	20	15	10	5
4	9	4	8	12	16	20	24	20	16	12	8	4
3	10	3	6	9	12	15	18	15	12	9	6	3
2	11	2	4	6	8	10	12	10	8	6	4	2
1	12	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Gunstige:	Antall utfall med sum større enn 12	861
Mulige:	Totalt antall utfall	1296
Gunstige/Mulige:	Sannsynlighet mer enn 12	66,44 %

Figur 8: Utregning av oppgave 7 gjort i regneark

Vi løser problemet i to bolker ved hjelp av Figur 8:
Først finner vi alle muligheter for summer av to terninger (blå markering) og hvor mange utfall som korresponderer til hver sum (grønn markering).
Vi brukte så denne kunnskapen til å finne alle mulige summer av fire terninger og hvor mange utfall som kan gi hvert tall. Summen av to terninger nedover (blå søyle) blir summert med de to andre terningene bortover (blå rad). Tallet som blir presentert der disse møtes i tabellen (gult/hvitt felt) er produktet av antall mulige utfall for de to parrene med terninger. Alle celler hvor summen av øyne på de fire terningene blir mer en 12 er markert med gult (gunstige utfall). Tallene i disse cellene er så summert (861) og delt på det totale antall utfall som kan oppstå (alle mulige utfall), altså summen av alle hvite og gule celler (1296). Man kan også finne antall mulige utfall ved å multiplisere antall øyne på hver terning med hverandre:

$$Mulige = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$$

Svaret blir da de gunstige utfallene delt på alle mulige utfall.

$$P(Mer\ enn\ 12) = \frac{Gunstige}{Mulige} = \frac{861}{1296} \approx 66\%$$

Det er altså ca. 66% sjanse for at tallet blir mer enn 12. Du burde derfor satse på ja.

Forventet utregning 7:

Vi forventet ikke at elevene skulle finne den eksakte sannsynligheten som beskrevet over, men ved å finne gjennomsnittlig øyne på en terning, og så multiplisere dette med fire. Hvis vi vet hva svaret blir gjennomsnittlig, kan dette hjelpe oss å avgjøre om vi burde svare ja eller nei, basert på om snittet er mer eller mindre enn 12.

$$Gjennomsnittsverdi \text{ på } D6 \; terning \times 4 = \frac{(1+2+3+4+5+6)}{6} \times 4 = 14$$

Da gjennomsnittet er 14 vil dette implisere at det er større sjanse for å få et tall som er høyere enn 12. Altså er det mer sannsynlig å få mer enn 12 når du kaster fire terninger. Dette burde lede elevene til å satse på ja.

Denne oppgaven er veldig ulik de fleste andre oppgavene vi designet for prosjektet. I alle de andre oppgavene kan elevene trolig finne frem til den eksakte sannsynligheten for ja eller nei. I denne oppgaven derimot er det lite realistisk at elever på ungdomsskoletrinnet kan finne den eksakte sannsynligheten. De kan gjøre et estimat basert på den ønskede utregningen. Ettersom sannsynligheten for å få 12 er ca. 66% sier Kelly-kriteriet at elevene bør satse fem mynter, gitt en kapital på 20 eller mer. I og med at elevene ikke finner den eksakte sannsynligheten blir det å bestemme hvor mye man burde satse en større utfordring enn for de andre oppgavene. Vi valgte å ekskludere denne oppgaven fra undervisningstimen knyttet til datainnsamlingsfasen, utelukkende fordi vi ønsket å spisse undervisningstimen til komplementær sannsynlighet. Vi mener at dette er en god oppgave som byr på andre utfordringer enn mange av de andre oppgavene, og det er derfor en oppgave vi ville tatt i bruk i en annen undervisningstime med Borel.

Oppgave 8: Kast først en D6 terning, og så kast en D8 terning. Vil resultatet være i strengt økende rekkefølge?

Utregning 8:

D6/D8	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1

Gunstige:	Utfall med økende rekkefølge	27
Mulige:	Totalt antall utfall	48
Gunstige/Mulige:	Sannsynlighet for økende rekkefølge	56,25 %

Figur 9: Utregning av oppgave 8 gjort i regneark

Her er det flere måter å tenke på. Først og fremst kan man tegne en tabell og telle opp alle utfall som oppfyller kriteriet. Altså at kastet som ble gjort med D8 terningen gir flere antall øyne enn kastet som ble gjort med D6 terningen. Et eksempel på en slik tabell er vist i Figur 9. Vi finner her at det er 27 muligheter som gir en økende rekkefølge, altså de gunstige utfallene (grønt felt). Man finner antall mulige utfall ved å summere opp alle mulige utfall i tabellen, eventuelt kan man finne produktet av antall øyne på terningene.

$Mulige = 6 \times 8 = 48$

Svaret blir da de gunstige utfallene delt på alle mulige utfall.

$$P(Strengt\ økende\ rekkefølge) = \frac{Gunstige}{Mulige} = \frac{27}{48} \approx 56\%$$

Det er altså en 56% sannsynlighet for at terningene blir kastet i strengt økende rekkefølge, som betyr at man burde satse på ja. Det er også mulig å gjøre et lignende argument som i oppgave 7. Vi kan regne ut hva som gjennomsnittlig blir kastet på både en D6 og en D8 terning:

$$Gjennomsnittsverdi\ \text{på}\ D6\ terning = \frac{(1+2+3+4+5+6)}{6} = 3.5$$

$$Gjennomsnittsverdi\ \text{på}\ D8\ terning = \frac{(1+2+3+4+5+6+7+8)}{8} = 4.5$$

Vi ser her at en D8 terning vil gjennomsnittlig gi en høyere verdi enn en D6 terning. Dette kan derfor også brukes som et argument for å satse ja i denne oppgaven.

Sett i forhold til mange av de andre oppgavene vi har presentert er dette en enklere oppgave, hvor elevene faktisk kan sette opp en tabell. Elevene fra piloteringen var litt forvirret rundt hva vi mente med strengt voksende. Dette er et begrep som elevene ikke var kjent med fra før, som vi endte opp med å måtte forklare i timen. Dette var en unødvendig distraksjon i en time som allerede utforsket flere nye og ukjente temaer. Dette var også en del av bakgrunnen for hvorfor vi valgte bort oppgaven når vi skulle redusere antall oppgaver fra piloteringen til datainnsamlingen. Oppgaven var heller ikke innenfor det temaet vi ville spisse timen mot. Dette er fortsatt hva vi vil kalle en god Borel oppgave, og kunne fint vært brukt i en annen undervisningsøkt med Borel.

4.6 Datainnsamling

I denne oppgaven har vi valgt å se på bruken av spill i undervisning av matematikk. Til dette har vi laget et undervisningsopplegg med spillet Borel som et utgangspunkt. I dette kapittelet skal vi gå gjennom forberedelsene til forskningsprosjektet, begrunne valgene vi gjorde underveis og se på gjennomføringen av datainnsamlingen. Hva gikk bra? Hva kunnet blitt gjort bedre?

4.6.1 Videoobservasjon

Som sagt tidligere valgte vi videoobservasjon fordi vi ønsket å få med oss hva elevene diskuterte og hvordan de opplevde Borel som undervisningsmetode. Til forskjell fra andre kvalitative datainnsamlingsmetoder som observasjonsnotater og transkripsjoner kan videoopptak lagres i sin helhet (Dalland & Hølland, 2021). Ved å ha video av undervisningen kunne vi fange elevenes reaksjoner til oppgavene og spillet, samtidig som vi fikk høre diskusjonene i sin helhet. På denne måten sørget vi for at interessante hendelser ikke ble oversett, noe som kunne vert tilfellet om vi hadde tatt i bruk observasjonsnotater (Dalland & Hølland, 2021). En av hovedfordelene ved videoopptak er at dataene kan observeres gjentatte ganger. Dette gjør det mulig å observere videoopptakene med andre forskere som har lov til å se filmene. Fordi vi har hatt muligheten til å benytte oss av dette kunne vi komme frem til det som kalles en intersubjektiv enighet når det gjaldt kategorier, analyser, tolkninger og slutninger (Dalland & Hølland, 2021). På denne måten kan videodata bidra til å sikre mer pålitelige observasjoner og redusere subjektive tolkninger (Dalland & Hølland, 2021). Videoopptaket gjorde at selve gjennomføringen av undervisningen ikke var like stressende som det ville vært om vi skulle notere ned alt av interesse i timesforløpet. Likevel ble det ikke mindre arbeid ved å gjøre videoobservasjon, noe vi fant ut tidlig. «Videodata regnes som personidentifiserende data og krever derfor ekstra varsomhet når det gjelder lagring og bruk. Dette gjør også forskningsprosessen mer tidkrevende og omstendelig både i søknadsfasen og ved analyse» (Dalland & Hølland, 2021, s. 264). Et problem som dukket opp tidlig var det å få godkjenning fra foreldrene. Over en 3 ukers periode hadde vi bare fått godkjenning fra foreldrene til elleve elever. Vi løste dette ved å filme to grupper på 4, til sammen 8 elever. Når det kom til transkriberingen av videoopptakene tok dette mye lengre tid enn forventet. Lydkvaliteten var god, men mye tid gikk likevel med til å prøve å skille ut hva elevene på gruppen sa. Dette var vanskelig siden mange av de andre gruppene hadde høylytte diskusjoner rundt oppgavene. Det var også noen ganger det var umulig å høre hva som ble sagt, noe som gjorde det vanskelig å følge elevenes resonnering.

4.6.2 Videointervju

Mange av de samme fordelene og ulempene ved videoobservasjon er også å finne ved videointervju. I tillegg vil det å ha både lyd og bilde gi tilgang til nonverbal kommunikasjon som gester, blikkutveksling og lignende (Dalland & Hølland, 2021). På denne måten kunne vi ta i betraktning elevenes kroppsspråk og/eller gester når de svarte på spørsmålene. Intervjuene var også enklere å transkribere siden det bare var intervjuer og intervjuobjektet som snakket i tur. Vi valgte semistrukturert intervju fordi det ga oss muligheten til å forberede spørsmål på forhånd, samtidig som det ga oss muligheten til å stille oppfølgings- og tilleggsspørsmål i intervjuet. Til dette lagde vi en intervjuguide (Vedlegg 2) med spørsmål som fokuserte på elevenes meninger rundt undervisningsopplegget, samt hva som foregikk på gruppene og hva som ble sagt i diskusjonene. Det var utfordrende å finne gode spørsmål som samtidig ikke skulle være ledende, men vi fikk til slutt noe vi var fornøyde med. Intervjuene foregikk på et grupperom hvor det bare var intervjuer og intervjuobjektet som var til stede. Elevene ble også informert før intervjuet startet om hvem som kom til å ha tilgang til informasjonen. Dette gjorde vi for å avstresse situasjonen og senke skuldrene til de mer kamerasky. I Etterkant viste dette seg å ha en liten effekt siden flere av elevene virket nervøse både ved kroppsspråk og røst. Hos noen av intervjuobjektene var det vanskelig å få utfyllende svar. Dette kan komme av at spørsmålene vi stilte var spørsmål elevene ikke hadde tenkt over tidligere, som medførte at de ikke hadde mye refleksjon rundt de svarene de ga. Det er også mulig at elevene ville raskest mulig vekk fra en ubehagelig situasjon. Dette så ut til å være tilfellet siden noen av elevene gikk tilbake på de svarte når de ble bedt om å utdype. I begynnelsen av intervjuene var de flere av elevene som kikket bort på kameraet noe som tydet på at de fant dette ubehagelig. Kameraet var plassert på en måte som gjorde at det alltid var i elevens synsvinkel. Skulle vi gjennomført intervjuene på nytt ville vi ha plassert dette annerledes. I tillegg ville vi ha inkludert et spørsmål hvor eleven fikk beskrive egne tanker rundt en oppgave. På denne måten kunne vi sett om eleven trakk tråder til Borel.

4.7 Analyse

Til analysen har vi benyttet oss av en deduktiv framgangsmåte (Dalland & Hølland, 2021). Vi har en teori om at Borel er et godt rammeverk for å drive undervisning i sannsynlighet og ønsker å teste om dette er tilfellet. For analysen har vi først transkribert alt fra både videoobservasjonen og intervjuene. Dette har vi så gått systematisk igjennom ved å kode i

NVivo. For å kunne svare på problemstillingen vår «Hvordan fungerer spillet Borel som et rammeverk for å undervise sannsynlighet i ungdomsskolen, og hvordan skiller Borel seg fra andre matematiske spill?» har vi valgt å se på tre aspekter som er viktige i læringsprosessen: det sosiale, kognitive og emosjonelle. I resultatdelen skal vi ta for oss hver av disse aspektene individuelt med eksempler fra undervisningen. I tillegg til dette har vi sett på hvordan Borel måler opp til de kriteriene vi satte for et rikt matematisk spill. Disse er om spillet var engasjerende og selvgående, har en balanse mellom evne og flaks, at matematikken skal være sentral og det skal ha fleksibilitet for læring og undervisning. Når det kommer til andre delen av problemstillingen har vi ikke gjort noe forskning på andre spill enn Borel. Derfor kommer vi til å sammenligne Borel med andre spill som er blitt tatt i bruk i tidligere forskning i drøftingsdelen av oppgaven. Det er i hovedsak funnene fra videoobservasjonen som blir tatt opp, hvor svarene fra intervjuene supplerer til dette. Vi kommer også til å drøfte hva som gikk bra og hva som kan forbedres ved undervisningen. Hva vi spesifikt så etter i hver av kategoriene vi undersøkte skal vi nå se litt nærmere på.

1. Didaktisk aspekt

Når det kommer til det didaktiske aspektet ved undervisningen, har vi fokusert på to ting knyttet til Borel. Disse er om spillet var selvgående og om elevene følte at evnene deres påvirket resultatet.

1.1. Selvgående

For å kunne si om elevene var selvgående gjennom undervisningsøkten har vi sett etter øyeblikk eller instanser hvor elevene har ikke-matematiske samtaler. I tillegg har vi sett etter om elevene har forstått reglene til Borel og kan spille spillet uten mye instrukser fra læreren. Kommentarer som «jeg skjønte ikke» eller en feiltolkning av hva man kan gjøre som for eksempel: «vi vedder 4», ser vi på som tegn til at elevene ikke har fått med seg eller forstått reglene.

1.2. Evneverdi

Når de kommer til evneverdi så vi etter tegn hvor elevene ga uttrykk for at kunnskapene deres påvirket resultatet. Dette kan komme i form av kommentarer som for eksempel «Dette hadde dere ikke fått til uten meg», «Dette får jeg ikke til», «Jeg skjønner ikke», «Da tenkte vi riktig da!».

2. Emosjonelle aspekt

For det emosjonelle aspektet har vi valgt å se etter øyeblikk hvor elevene gir uttrykk for følelser knyttet til spillet og undervisningen, og om elevene er engasjerte.

2.1. Uttrykk for følelser

For denne kategorien har vi sett etter øyeblikk eller instanser hvor elevene gir uttrykk for følelsene sine, enten gjennom gledesutbrudd eller frustrasjon. Tegn på dette kan være uttrykk som for eksempel «JAAA!», «Vi vant!», «Da tapte vi da» eller visuelle tegn som om elevene smiler eller ikke. Altså så vi etter om elevene hadde det gøy og om de var opptatte av å vinne.

2.2. Engasjement

I denne kategorien har vi sett etter om elevene arbeider med og diskuterer matematikk. Dette har vi gjort gjennom hele undervisningsøkten. Denne kategorien er sterkt knyttet til den forrige, siden vi også her har sett på om elevene opplever glede eller frustrasjon i arbeidet med oppgavene. Vi ser altså etter om elevene arbeidet med det de skulle og om de fortsatte arbeidet uavhengig av om de hadde det gøy eller opplevde frustrasjon.

3. Sosiale aspekt

For denne kategorien har vi sett på interaksjonene mellom elevene på gruppene. Vi har sett etter noen spesifikke momenter som er med på å utgjøre det sosiale aspektet i timen. Kommer elevene frem til løsninger på oppgavene sammen? Har elevene gode matematiske diskusjoner? Oppklarer elevene misforståelser for hverandre? Vi ser med andre ord etter situasjoner hvor elevene samarbeider eller har konstruktive diskusjoner innad i gruppen. Vi ser også etter om elevene inntar ulike sosiale roller i spillsituasjonen.

4. Kognitive aspekt

Når det kommer til det kognitive aspektet har vi sett etter situasjoner hvor elevene deler tanker og ideer, gjør rede for egen tankegang og kritiserer hverandre. For å se på dette har vi tatt for oss tre underkategorier som er idemyldring, problemløsning og misforståelser.

4.1. Idemyldring

I denne kategorien har vi sett etter situasjoner hvor elevene deler tanker og ideer rundt oppgavene. Vi har også sett etter øyeblikk hvor elevene kritiserer hverandre.

4.2. Misforståelser

For denne kategorien har vi sett etter øyeblikk hvor elevene misforstår noe matematisk, feiltolker oppgaver og regler, og sett etter feil i utregningene deres.

4.3. Problemløsning

Her har vi sett etter om elevene jobber problemløsende. Altså om de benytter problemløsningsstrategier i arbeidet med oppgaven. Disse er prøving og feiling, forenkling av oppgaver, se etter mønstre, lage og teste hypoteser, begrunne/resonnere, og bekrefte eller avkrefte hypoteser.

4.8 Personvern og forskningsetikk

I innsamling av data ønsket vi å bruke videoobservasjon og videointervju av elever. Studien ble forhåndsgodkjent av Norsk senter for forskningsdata (NSD), og vi fikk tillatelse til å behandle spesifiserte personopplysninger om elevene i form av navn, video og lyd og relevante bakgrunnsopplysninger for oppgaven. Innsamling av personopplysninger av elever under 16 år krever samtykke fra foresatte (Datatilsynet, 2022). Vi sendte derfor ut et samtykkeskjema til de foresatte, med en beskrivelse av hvordan videoobservasjonene og intervjuene kom til å foregå, og hvilke opplysninger som kom til å bli samlet inn. Vi la ved et informasjonsskriv som forklarte hva det innebar å delta, at det er frivillig, hvordan vi bevarer deres personvern, hva som skjer med personopplysninger ved avslutting av forskningsprosjektet og deres rettigheter (Vedlegg 3). NSD godkjente at personopplysningene vi samlet inn ikke er å anse som personopplysninger med særskilt hensyn, så lenge vi fulgte de retningslinjene vi informerte om i meldeskjema og infoskrivet, se Vedlegg 4.

Informasjonsskriv og samtykkeskjema ble distribuert til de foresatte gjennom et nettskjema, som ble laget gjennom UiOs nettside for nettskjemaer. I dette nettskjemaet kunne de foresatte krysse av for om eleven kunne delta i både videoobservasjon og -intervju, bare en av dem eller ikke i det hele tatt. Videodata ble spilt inn på et videokamera lånt av UiO, spesifikt til dette formålet, og videoene ble lagret på UiO sine servere. Alle filer ble så slettet fra kameraet før vi leverte det tilbake til UiO. Deltakerlisten med elevenes autentiske navn ble holdt adskilt fra resten av dataene. Videodataene ble så transkribert og samtidig anonymisert av oss. Dette innebar endring av navn og fjerning av fysiske beskrivelser som kunne være med på å bakveisidentifisere elevene. Dette er viktig da deltakere ikke skal kunne identifiseres i publikasjoner fra prosjektet. Når prosjektet er avsluttet vil alt av ikke anonymiserte data og koblingsnøkler bli slettet. NSD, elever og foresatte er informert om dette.

4.9 Forskningskvalitet

«Relabilitet handler om kvaliteten på forskningsprosessen og hvorvidt undersøkelsen er til å stole på» (Gleiss & Sæther, 2021, s. 202). Dette kan påvirkes av metodene som er tatt i bruk for innsamlingen av datamaterialet, utvalget av elever og klasse og vår tilstedeværelse i både undervisningen og intervjuene. Som sagt tidligere valgte vi videoobservasjon og videointervju, som gjorde at vi kunne se gjennom opptakene flere ganger med ulikt fokus. I tillegg kunne vi ha en intersubjektiv enighet når det kom til kategorier, analyse, tolkninger og slutninger. Vi har likevel ikke fått innspill fra noen med et annet forskningsmessig ståsted. Selv om vi har forsøkt å objektivt gå gjennom datamaterialet og kommet til enighet, kan vi ikke med sikkerhet si at det ikke forekommer noe subjektivitet i de tolkningene vi gjør. Samtidig er kategoriene og kodene vi har jobbet med valgt med tanke på hva som ble observert i opptakene. Siden vi jobber med kvalitative data er det ikke sikkert at andre finner det samme som vi gjorde, selv om de skulle følge den samme forskningsprosessen. Vi valgte å fokusere på de sosiale, kognitive og emosjonelle aspektene for å vurdere om Borel egnet seg som et rammeverk for å undervise sannsynlighet. Disse aspektene er alle viktige i læringsprosessen og var noe vi så tegn til gjentatte ganger i videoopptakene. Det er vanskelig å si noe om det kognitive aspektet, men vi mener at gjennom diskusjonene elevene har med hverandre på gruppen kan vi få innsikt i hvordan de har tenkt. Vi har i tillegg laget underkategorier for å spesifisere hva vi ser etter i hvert aspekt. For datainnsamlingen valgte vi å ha et elevfokus hvor vi så på hvordan elevene arbeidet, både underveis i spillet og i etterkant. Til videointervjuene valgte vi et semistrukturert intervju fordi dette ga oss muligheten til å stille oppfølgings- eller tilleggsspørsmål om det skulle dukke opp noe interessant. Vi lagde en intervjuguide med spørsmål til undervisningsopplegget og Borel. Vi var veldig opptatt av at spørsmålene ikke skulle være ledene siden dette ville påvirke dataene.

At vi valgte et semistrukturert intervju satte større krav til intervjuer fordi det krever at man kjapt kan komme med godt formulerte spørsmål. Intervjuer var ikke erfaren med holde et intervju og slet derfor med å få utdypende svar fra elevene. Undervisningsopplegget ble gjennomført til sammen fire ganger på fire forskjellige grupper på samme trinn, hvor datainnsamlingen ble gjennomført i de to siste. Fra observasjoner av disse elevene var det tydelig at mange av de hadde manglende kunnskaper når det gjaldt brøkregning. Dette påvirket dataene vi fikk, fordi sannsynlighetsregning krever at man har kontroll på brøkregning. Selv om vi så mye av det samme i alle gjennomføringene er dette fortsatt et lite representativt utvalg for å kunne gjøre en generalisering.

«Validitet – eller gyldighet – kan defineres som kvaliteten på data materialet og forskerens fortolkninger og konklusjoner» (Gleiss & Sæther, 2021, s. 204). Vi har valgt problemstillingen «Hvordan fungerer spillet Borel som et rammeverk for å undervise sannsynlighet i ungdomsskolen, og hvordan skiller Borel seg fra andre matematiske spill?». Slik problemstillingen er formulert legges det opp til en generalisering, men siden dataene våre bare består av kvalitative data kan vi ikke med sikkerhet si at dette er tilfellet. Fra begynnelsen lente vi mot en kvalitativ undersøkelse, siden vi uansett ikke kunne gjøre en generalisering med de ressursene vi hadde tilgjengelig. Vi vurderte å ha spørreundersøkelse fremfor intervju, men endte til slutt med å velge intervju siden vi hovedsakelig ønsket innspill fra de elevene som deltok på videoobservasjonen. I ettertid tror vi likevel en spørreundersøkelse hadde vært fint for å få et bilde av hvordan klassen som helhet opplevde undervisningsøkten. På denne måten ville vi også hatt en *triangulering* med både kvalitative og kvantitative data som ville være med på å styrke tolkningene av observasjonsdataene. Når det kommer til metodevalgene våre, mener vi at disse passer bra for å hente ut de dataene vi ønsker. Gjennom videoopptakene får vi observert diskusjonene mellom elevene i sin helhet og får sett reaksjonene de har til Borel og undervisningsøkten. Ved å kombinere videoobservasjon med videointervju kunne vi bruke elevsvar fra intervjuene til å bekrefte eller avkrefte de tolkningene vi gjorde av observasjonsdataene, en såkalt *respondentvalidering*. Dette ble gjort i liten grad, da det var vanskelig å få utdypende svar fra elevene som ble intervjuet. En annen begrensning for validiteten i denne oppgaven er vår uerfarenhet når det kommer til didaktisk forskning. Et eksempel på dette forekommer i intervjuene hvor elevene selv sier de var engasjerte, men hvor deres forståelse av engasjement ikke blir utforsket. Fordelingen av arbeidsoppgaver i denne undersøkelsen medførte at intervjuer ikke hadde en relasjon til de elevene som ble intervjuet. Dette kan ha vært en faktor som gjorde at et flertall av intervjuobjektene var nervøse da de ble intervjuet. En annen ting som kan ha påvirket elevsvarene var at elevene ikke hadde fått tid til å tenke over spørsmålene på forhånd. Dette kan ha vært årsaken for de kortfattede svarene vi fikk på intervjuene. Vår uerfarenhet når det kommer til didaktisk forskning kan også være en faktor når det kommer til kategoriseringen av observasjonsdata og de fortolkningene vi gjør.

Vi har hatt mange muligheter når det kommer til spill vi kan sammenligne med Borel. Fra tidligere forskning har vi tatt utgangspunkt i spill fra tidligere undersøkelser, samt Handeland (2021) sine funn i hans forskning på Borel som et diagnostisk verktøy. Som nevnt tidligere har vi tenkt til å sammenligne disse spillene med Borel ut ifra de kriteriene vi har satt for rike matematiske spill. Vi vil også se om våre resultater samsvarer med funnene fra undersøkelsene på disse spillene. Med dette mener vi at vi har et godt utgangspunkt for å trekke frem hvordan Borel skiller seg fra disse spillene og hva som gjør Borel egnet som et rammeverk for å undervise sannsynlighet.

5 Resultater

Vi skal i denne delen av oppgaven gå igjennom resultatene fra datainnsamlingen knyttet til de ulike aspektene vi har beskrevet i 4.7 Analyse. Vi skal se på observasjonsdata fra undervisningstimen med Borel i lys av det elevene selv fortalte i intervjuet om sin opplevelse av undervisningstimen.

5.1 Emosjonelt aspekt

5.1.1 Utrykk av følelser

Gjennom spillet ga elevene utrykk for flere følelser knyttet til spillsituasjonen. Det var klare tegn på at elevene var opptatt av å vinne og gjøre det bra. Når et eksperiment skulle gjennomføres var det mange elever som rakk opp hånda og viste tegn til at de ville ta del i eksperimentet. Elevene sto på stolene sine for å kunne få se hva som ble resultatet når eksperimentene ble gjennomført. Vi observerte mange gledesutbrudd når elevene veddet riktig, og tilsvarende observerte vi «sukk» når de tapte. Etter at elevene i gruppe 1 vant en runde fikk vi disse kommentarene.

> ***Arne:*** *Yes!*
>
> ***Ole:*** *Yes!*
>
> ***Tuva:*** *Oh, vi vant!*

Det var ikke bare fra gruppe 1 vi fikk gledesutbrudd. I en lignende situasjon fikk vi denne kommentaren fra en elev fra gruppe 2:

> ***Åse:*** *Nå ble jeg veldig gira!*

I en situasjon hvor gruppe 2 tapte fikk vi denne kommentaren fra Åse:

> ***Åse:*** *Søren! Vi kommer sist!*

Dette tyder på at elevene er følelsesmessig investert i timen og det som skjer i spillsituasjonen. Elevene gir utrykk for både glede og frustrasjon gjennom timen. Når vi intervjuene spurte elevene om hva de syntes om å bruke spill i matematikktimen, fikk vi svar som dette:

> ***Intervjuer:*** *Hva synes du om bruken av spill i matematikkundervisningen?*
>
> ***Dina:*** *Det syntes jeg er veldig bra.*

> ***Intervjuer:*** *Har du noen tanker om hvorfor det er bra?*
>
> ***Dina:*** *Fordi det er gøyere.*
>
> ***Intervjuer:*** *Det er gøyere?*
>
> ***Dina:*** *Ja, og kanskje man husker mer av å ha det gøy.*

Her forteller Dina at hun syntes det å spille i matematikktimen er gøy. Hun reflekterer også rundt det at man har det gøy i matematikktimen gjør at man husker mer av det som skjer. Dina forteller også spesifikt om noe fra denne timen hun syntes var gøy:

> ***Intervjuer:*** *Ja, var det noe du synes var positivt med denne undervisningsøkten?*
>
> ***Dina:*** *Jeg synes det var gøy når vi utførte handlingene.*

Dina sier spesifikt at hun syntes at det å gjennomføre de ulike sannsynlighetseksperimentene var gøy, noe som tydelig stemte overens med det vi observerte i timen.

Vi opplevde også at elever diskuterte poeng og hvordan de lå an i forhold til de andre gruppene. Et godt eksempel på dette er etter en runde når gruppe 1 tapte. Da kommer Ole med denne kommentaren:

> ***Ole:*** *De der fikk fem stykker nå da, nå må vi steppe opp!*

og

> ***Ole:*** *Vi burde tatt fem på nei, da hadde vi fått ti stykker, da hadde vi jo nesten hatt 30. Jeg tror kanskje vi leder.*

Dette tyder på at det var et konkurranseaspekt som Ole og resten av gruppen hans følte på da de spilte Borel. Det at elevene var opptatt av hva de andre elevene veddet, vant og tapte viser at elevene konkurrerte. Elevene beskriver også at de likte å spille Borel, fant det engasjerende og at dette var gøy. Dette tolker vi som at elevene likte å konkurrere med hverandre og at dette også var med på å påvirke beløpet elevene veddet.

5.1.2 Engasjement

Det var tydelig at begge elevgruppene vi observerte virket engasjerte i arbeidet med oppgavene. Når elevene spilte Borel var det sjeldent at samtalen gikk vekk fra matematikk. Elevene var ivrige på å delta både i diskusjonene i gruppene og i utførelsen av eksperimentene. I likhet med første del av undervisningsøkten, da vi spilte gjennom Borel, forholdt diskusjonene og samtalene seg til matematikk også i den andre delen av undervisningen når elevene arbeidet med oppgavene.

Elevene viste et generelt engasjement for spillet og matematikken. De diskuterte sjeldent temaer som ikke var relevante, og hadde et klart fokus på spillet og oppgavene. Vi fikk også noen elevsvar i intervjuene som indikerer spesifikt at elevene var engasjerte i timen:

> ***Intervjuer:*** *Er det noe du synes var spesielt positivt ved denne undervisningsøkten? Var det noe du likte bedre enn andre ting?*
>
> ***Arne:*** *Ja, det var litt mer engasjerende, litt mer gøy.*
>
> ***Intervjuer:*** *Hva var det du syntes var gøy med undervisningen.*
>
> ***Arne:*** *At vi fikk, ble mer engasjert og fikk faktisk gjøre noe ordentlig. I stedet for å bare høre på og skrive et par oppgaver.*
>
> ***Intervjuer:*** *Var det noe du syntes var negativt ved undervisningsøkten?*
>
> ***Arne:*** *Egentlig ikke, annet enn at det var litt vanskelig, men det var ganske bra, og ganske bra måte å lære på.*

Her sier eleven spesifikt at timen var engasjerende. Han begrunner svaret sitt med at de faktisk fikk gjøre noen konkrete eksperimenter. Dette var noe vi også opplevde at elevene likte. Som nevnt tidligere var dette et av de momentene som virket mest engasjerende fra vårt observasjonssynspunkt. Berit forteller at hun syntes timen fungerte bra. Når vi så spør Berit om hvorfor timen fungerte bra forteller hun dette:

> ***Intervjuer:*** *Har du noen ide om hvorfor det fungerer bra?*
>
> ***Berit:*** *Man får jo tenke litt på en annen måte, enn å bare se oppgaver og skrive på ark. Så, man må liksom teste ut det man gjør, eller det man kommer frem til da på en måte, hvis det gir mening.*

Hun påpeker at denne praktiske utførelsen av eksperimentene er noe som skiller timen fra en vanlig oppgaveregningssøkt. Når vi spurte Arne om han ønsker å prøve Borel igjen svarer han dette:

> ***Intervjuer:*** *Ja, kunne du tenke deg å ha en undervisningsøkt til med Borel?*
>
> ***Arne:*** *Ja, hvis det er noe annet da. Som kanskje noe annet i sannsynlighet, eller et helt annet tema.*

Her identifiserer Arne at Borel kan brukes for gjentagende med nye temaer innenfor sannsynlighet. Han forteller også at han ser for seg helt andre temaer. Dette er nok ikke mulig, men det går an å bruke andre temaer i sannsynlighet som fokus for en ny time. Her virker det også som at Arne har fått et positivt inntrykk av Borel, da han kunne tenke seg å spille Borel igjen med et nytt tema.

5.2 Sosialt aspekt

Det sosiale aspektet i klasserommet har en viktig rolle i læringsprosessen (Rincon-Flores et al., 2022). Elevene peker selv på det sosiale gruppearbeidet som noe som gjør timen morsom:

> ***Intervjuer:*** *Var det noe spesielt du likte?*
>
> ***Carl:*** *Timen var gøy.*
>
> ***Intervjuer:*** *Ja, det var gøy?*
>
> ***Carl:*** *Vi spilte, vi hadde gruppearbeid.*

Noe av det første vi la merke til var at elevene leste oppgavene høyt for hverandre. De passet på at alle på gruppen forstod oppgavene og reglene i spillet. Hvis noen misforstod noe oppklarte de andre på gruppen misforståelsen. Et godt eksempel på elever som oppklarer regler for hverandre er når en elev fra gruppe 1 har misforstått hvor mye som kan satses på enten ja eller nei.

> **Ole:** Ok, hvor mye skal vi ta.
>
> **Arne:** To på ja.
>
> **Berit:** Nei, dere kan ikke ta to. Det er en, tre eller fem.

Vi ser også et slikt eksempel fra gruppe 2, når en elev på gruppen har misforstått reglene. Eleven har ikke forstått at gruppen må satse enten 1, 3 eller 5 perler.

> ***Elin:*** *Må vi satse noe som helst?*
>
> ***Dina:*** *Ja, vi må satse 1, 3 eller 5. Vi må ta 1, 3 eller 5!*

Her kommer det sosiale aspektet frem, da elevene kommuniserer reglene seg imellom. Elevene støtter seg også på hverandre i problemløsningsprosessen. De retter på en del feil eller misforståelser som oppstår underveis. Et godt eksempel på dette er når gruppe 1 prøver å finne ut av hva sannsynligheten for å trekke en spesifikk ball er i oppgave 1.

> ***Tuva:*** *Det er ikke 60 % for å få rød.*
>
> ***Ole:*** *Jo.*
>
> ***Arne:*** *Jo det er 60 % sjanse for å få rød.*
>
> ***Berit:*** *Det er det.*
>
> ***Ole:*** *Det er 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15, det blir 100.*
>
> ***Tuva:*** *Hvis det er 15 så blir det ikke 100.*
>
> ***Arne:*** *Matten din går ikke opp, du har gjort feil.*
>
> ***Tuva:*** *Vi må ta 100 delt på 6, nei 6/100.*
>
> ***Arne:*** *Er det ikke 17 komma et eller annet.*

Ole: *Å jo, det er det. Det er sånn 16,666666, det er sånn 17.*

Her utfordrer de hverandres ideer og argumenterer matematisk. De kommer til slutt frem til det riktige svaret og kan jobbe videre med hovedproblemet i oppgave 1. Når Arne blir spurt om hvordan arbeidsmetoden hans endrer seg i en gruppesituasjon svarer han:

> ***Arne:*** *Ja, noen ganger så kan det hende at jeg tar feil og noen må liksom vise hvor jeg tar feil, eller så er det så er det motsatt. At jeg tar riktig og noen andre tar feil*

Vi har tolket dette som at Arne mener at man i gruppesituasjoner skal dele ideer, kritisere og/eller utfordre disse. På denne måten får elevene hørt hverandres meninger og tanker, de får diskutert disse og til slutt komme frem til et felles svar. Carl trekker frem at han verdsetter kommunikasjon i gruppen, og at dette er noe han opplever som nyttig.

> ***Intervjuer:*** *Ja, hva synes du om bruken av spill i matematikkundervisningen?*
>
> ***Carl:*** *Bra.*
>
> ***Intervjuer:*** *Bra? Har du noen tanker om hvorfor du synes det er bra?*
>
> ***Carl:*** *Vi snakket mye i gruppa.*
>
> ***[…]***
>
> ***Intervjuer:*** *Ok, kunne du tenke deg å ha flere undervisningsøkter med spill?*
>
> ***Carl:*** *Ja.*
>
> ***Intervjuer:*** *Har du noen tanker om hvorfor du ønsker det?*
>
> ***Carl:*** *Så, vi kan snakke mer og diskutere.*
>
> ***Intervjuer:*** *Føler du du lærer eller får noe mer ut av det når du diskuterer med de andre?*
>
> ***Carl:*** *Ja, fordi alle har sine egne tanker.*

Tankene Carl gir utrykk for, om kommunikasjon og samarbeid i gruppa, støtter vår oppfattelse av at det var mye og rik kommunikasjon i gruppene.

5.3 Didaktisk aspekt

Gjennom timen ønsket vi å se om det didaktiske aspektet av spillet kom frem. Vi vet fra kriteriene at elevene bør føle at deres evner betyr noe. Vi har derfor spesifikt sett etter om elevene gir uttrykk for at de føler at deres evner har noe å si for om de gjør det bra eller dårlig. Dette har vi kalt for evneverdi. Vi vet også fra kriteriene at det er viktig at elevene gis mulighet til å kunne være selvgående. Vi så derfor også på om gruppene var selvgående i sin diskusjon og ikke trengte direkte innblanding av lærer for å holde den matematiske diskursen gående.

5.3.1 Evneverdi

Det er gitt fra kriteriene at elevenes skal føle at deres valg og evner påvirker resultatet av spillet. Elevene hadde i stor grad et tydelig eierskap til sine valg. Det kommer flere ganger relativt tydelig frem at elevene så på de utregningene og de slutningene de hadde kommet frem til som viktige:

> ***Ole:*** *Det er jo jævlig bra da, se da trenger dere ikke å skylde på meg, nå fikk vi tre stykker på grunn av meg.*
>
> ***Arne:*** *Ikke bare på grunn av deg da, du må gi litt credit til meg også.*

Her har en gruppe hatt en diskusjon om hva de burde vedde. Det virker det som om Arne og Ole føler at de fortjener anerkjennelse for det de argumenterte og løsningene de kom med tidligere. Det er også flere utrop som kan tyde på at elevene har fått en følelse av evneverdi. Uttalelser som:

> ***Arne:*** *Vi er bedre!*

og

> ***Arne:*** *Yes, vi er så flinke!*
>
> ***Berit:*** *Du reddet oss!*

Vi så også tilfeller hvor elevene ga utrykk for at evnene deres ikke var tilstrekkelige. For eksempel i gruppe 2, hvor de diskuterer komplementær sannsynlighet etter at læreren har gitt noen hint:

> ***Åse:*** *Det vi vil ha… for det her er alt vi ikke, det her er alt, det er sånn mulige, så må vi ta det minus gunstige, er det ikke noe sånn? Jeg skjønte ikke hva han sa.*
>
> ***Åse:*** *Det var litt vanskelig.*
>
> ***Elin:*** *Det var ikke så mye av det vi skjønte egentlig, vi har ikke gjort så mye av dette før.*

Når vi spurte elevene hvordan de syntes arbeidet med oppgavene gikk, fikk vi blant annet dette svaret fra Berit:

> ***Intervjuer:*** *Ok, hvordan følte du arbeidet gikk med oppgavene etter spillingen?*
>
> ***Berit:*** *Jeg synes de var ganske vanskelig egentlig jeg, jeg var ikke helt med, jeg prøvde bare liksom høre på hva de andre sa og lære litt av det på en måte. Ja…*

> ***[…]***
>
> **Intervjuer:** *Du sa jo tidligere at du synes oppgavene var vanskelige, tror du du kunne, eller hadde det gjort at opplevelsen av timen hadde vært bedre, om det hadde vært enklere oppgaver?*
>
> **Berit:** *Ja det hadde sikkert vært litt bedre hvis det var litt lettere for da kunne jeg liksom skjønt mer, eller jeg fikk liksom ikke, jeg skjønte det liksom ikke i det hele tatt, det ble ikke så lett. Da hadde det sikkert vært bedre om det var lettere oppgaver som jeg også forsto, og kunne hjelpe til med.*
>
> ***[…]***
>
> **Intervjuer:** *Litt av poenget med timen var jo å prøve å utsette dere for noe dere ikke hadde fått presentert tidligere. Følte du du lærte noe, eller fikk du mer kontroll over sannsynlighet etter undervisningsøkten?*
>
> **Berit:** *Ja, sånn passe. Jeg tror hvis det hadde vært litt sånne oppgaver jeg skjønte, tror jeg liksom jeg hadde fått bedre ut av det, men samtidig når vi liksom gjorde det der spillet og sånn, jeg forsto det mer da på en måte. Jeg synes sannsynlighet ga litt mere mening sånn realistisk sett på en måte.*

Det er tydelig her at Berit utrykker at hun føler at evnene hennes ikke strekker til. Hun tenker selv at hun kanskje hadde fått mer ut av undervisningen om oppgavene hadde vært enklere. Selv om dette ville hjulpet med mestringsfølelsen er det ikke sikkert at hun hadde fått mer ut av undervisningen. Berit mener fortsatt at det var mange positive sider ved undervisningsøkten:

> **Intervjuer:** *Er det noe du syns var positivt med denne undervisningsøkten?*
>
> **Berit:** *Ja, det var hyggelig å teste sånn sannsynlighet på en annen måte, enn å bare lære det på sånn Ipad og sånne ting. Litt mer sånn realistiske situasjoner. Også ja, også fikk vi litt sånn undervisning, forklaring på slutten. Det syntes jeg hjalp.*

Berit syntes at gjennomgangen på slutten av timen var en god hjelp. De praktiske innslagene, hvor de fikk utføre eksperimenter var også noe hun likte. Det virker som at de praktiske innslagene var noe som gjorde timen mer spennende for Berit.

I et intervju med Dina kommer det frem at hun har hatt tidligere erfaring med bruken av spill i undervisning. Da Dina fikk spørsmål om det tidligere spillet var mer krevende enn Borel poengterer hun at bingo spillet egentlig ikke var særlig krevende, fordi det bare involverte å rulle treninger og multiplisere.

Intervjuer: *Kan du beskrive noen av disse tidligere spillene dere har hatt?*

Dina: *Eh, tror vi har hatt sånn slags bingo og så skulle man få terninger som kunne ganges sammen to og to. Så får man det ganget samme også ser man at man har et ferdig på brettet. Hvis det ga mening?*

Intervjuer: *Ja, det ga mening. Ja, hvordan vil du sammenligne det spillet med Borel?*

Dina: *Ehh, det var kanskje litt mer, litt tilfeldig hva som ble trukket. Selv om det er sannsynlighet. Er det litt tilfeldig.*

Intervjuer: *Ja ikke sant, selv om en ting er mer sannsynlig så kan den usannsynlige også skje, ikke sant, mhm. Men hvordan var det i forhold til bingoen da?*

Dina: *Det var vanskeligere.*

Intervjuer: *Det var vanskeligere?*

Dina: *Ja, bingoen var jo bare å kaste terning og så putte på riktig sted.*

5.3.2 Selvgående

Vi ønsket å tilrettelegge undervisningsøkten på en slik måte at elevene kunne være mest mulig selvgående, da det å være selvgående er en del av kriteriene for et rikt matematisk spill. Med selvgående menes her hvorvidt elevene krevde direkte input fra lærer, eller om de klarte å jobbe uten at lærer måtte direkte bryte inn for å hjelpe gruppen. Vi så i undervisningstimene at det meste av input fra lærer krevdes tidlig i økten, når elevene fortsatt ikke hadde en full forståelse av spillets ramme og regler. Når intervjueren spør Dina hva hun syntes var negativt ved økten, forteller hun dette:

Intervjuer: *Er det noe du syntes var negativt ved undervisningsøkten*

Dina: *Kanskje litt. Jeg skjønte ikke helt hvordan man skulle gjøre med de perlene først. Det kunne vært forklart litt mere. Kanskje dere kunne hatt med et eksempel.*

Dette stemmer godt overens med det vi observerte i timene. Elevene var litt usikre i starten, men når de først forsto konseptet og ble komfortable med reglene gikk resten av timen uten mange spørsmål om spillet eller hva de skulle gjøre. Et eksempel på en situasjon hvor elevene trengte lærerinput i starten av timen får vi her, når læreren skulle dele ut poeng til gruppe 2 i første runde av spillet:

Lærer: *Hvor mye satset dere?*

Åse: *To.*

Lærer: *Dere må satse 1, 3 eller 5, så da må jeg gå opp til 3 dessverre*

Dina: *Hva hvis vi vinner.. hva skjer da?*

Lærer: *Hvis du vinner?*

Åse: *Da får du en perle.*

Lærer: *Da gir jeg deg så mange som du satset.*

Dina: *Å ja.*

Når elevene først var i gang og hadde forstått konseptet observerte vi at de i større grad holdt fokus slik vi ønsket. Elevene diskuterte både oppgavene og gunstig innsats.

5.4 Kognitivt aspekt

Vi ønsket at spillet både skulle være engasjerende og lærerikt. Derfor ønsket vi å se på elevenes diskusjoner rundt oppgavene og hva de kom fram til. Når det kommer til det kognitive aspektet har vi sett etter situasjoner hvor elevene gjør rede for egen tankegang, utfordrer hverandres svar og oppklarer misforståelser. Det var ikke mangler på diskusjoner som oppstod gjennom timen, men det var ikke alltid like enkelt å følge elevenes tankegang. Vi har valgt å dele det kognitive aspektet i tre underkategorier. Disse er idemyldring, misforståelser og problemløsning.

5.4.1 Idémyldring

Det var ofte elevene delte tanker rundt oppgavene og prøvde å redegjøre for egen tankegang. Et eksempel på dette er Elin fra gruppe 2 og Ole fra gruppe 1 som prøver å forklare for resten av gruppen at sannsynligheten for å trekke en ball/perle endrer seg neste gang du skal trekke. Elin forklarer det slik:

Elin: *Men det er forskjellig sannsynligheter da for hvilken gang du, hvis du trekker første gang så er det 1, 1/3 også hvis du trekker andre gang så er det jo...mindre.. så det er.*

Ola forklarer det slik:

Ole: *Ja, fordi. Vi må egentlig, egentlig så må vi hvis vi tenker at hvis vi får en rød, så har vi bare, hvis vi trekker en rød nå så har vi bare tre muligheter i neste trekkinga for å få en rød igjen.*

Det var dessverre ofte at elevene ikke fullførte resonneringen, eller ikke trengte å gjøre det for å få de andre med på lasset. Grunnen for dette var nok fordi elevene var usikre på egne kunnskaper i sannsynlighet. Dette medførte at flere gode/riktige tankeganger ikke ble utforsket eller akseptert uten mye forklaring på hvorfor. Likevel var det øyeblikk hvor elevene var flinke til å kritisere hverandres tankegang. Et eksempel på dette er hvor Ole forklarer for resten av gruppen at det ikke er to like og syv, men to like eller syv som de skal finne sannsynligheten for.

> ***Ole:*** *Du kan ja, men det eneste som er, er at vi skal. Vi skal ikke få, vi skal ikke få to like og 7, vi kan få begge deler.*
>
> ***Arne:*** *Nei 2/6, .1/3 forså vidt. Nei hva.*
>
> ***Tuva:*** *Ja jeg vet det, det er derfor vi må plusse.*
>
> ***Ole:*** *Ja.*
>
> ***Arne:*** *Så nei vent. Hvis vi skal få 7 eller 2 like så er det 1/3 sjanse for å få det, fordi det er, du kan få to forskjellige tall og det vil begge være riktig og det første er riktig uansett.*

I interjuvet forklarer Dina fra gruppe 2 at da de spilte Borel var det i hovedsak magefølelsen som styrte, men at de også tenkte over sannsynligheten for utfallene. Dette stemmer godt med det vi selv observerte gjennom undervisningsøkten. Mange av elevene hadde en formening om hva som var mest sannsynlig og et estimat på hvor sannsynlig dette var.

> ***Intervjuer:*** *Nei, nei det er jo lov det. Hva du tenkte du i første omgang med Borel, da vi spilte i første del av undervisningen.*
>
> ***Dina:*** *Vi skjønte ikke helt i starten hva vi skulle. Skjønte ikke hva det gikk ut på, men så skjønte vi det etter hvert. (fniser) Ehh, det var litt gøy og så var det litt vanskelig å tenke hva som var lurt.*
>
> ***Intervjuer:*** *Ja, kan du huske hva dere diskuterte i gruppene?*
>
> ***Dina:*** *Kanskje hvor mange perler vi skulle satse, og vi tenkte eller var sånn, da vi følte mere på magefølelsen.*
>
> ***Intervjuer:*** *Ja, dere gikk litt mere for magefølelsen.*
>
> ***Dina:*** *Ja, også tenkte, ja noe av det så vi at var større sjanse.*

5.4.2 Misforståelser

Det oppstod flere misforståelser gjennom timen. Slike misforståelser kan håndteres på flere ulike måter. Medelever i gruppen kan plukke opp misforståelsen og be om hjelp for å oppklare. Eleven kan også selv finne logiske brister i det de sier når de har misforstått noe. Det er også mulig for læreren å plukke opp misforståelser i diskusjoner mellom elever. Når vi i intervjuet spurte elevene hvordan nivået i timen var i forhold til andre timer de hadde hatt om sannsynlighet, var det flere av elevene som sa seg enig i at denne timen var en del vanskeligere:

> ***Intervjuer:*** *Hvordan synes du denne timen som vi hadde fredag med Borel var sammenlignet med de tidligere undervisningene dere har hatt om sannsynlighet?*
>
> ***Arne:*** *Den vi hadde der var litt vanskeligere enn det vi har hatt fra før.*

Berit forteller i intervjuet at hun synes spesielt matematikk er utfordrende. I undervisningstimen når gruppe 1 prøver å bestemme seg for hva de skal satse på, sier Berit dette:

> ***Berit:*** *Ja, det er bare flaks.*

Hun forteller i intervjuet:

> ***Intervjuer:*** *Kan du huske hva du tenkte i første omgang med Borel da vi spilte i starten?*
>
> ***Berit:*** *Ehm, ja jeg tenkte liksom at, jeg vet ikke helt hvordan, eller jeg bare tenkte at jeg gjetter bare litt på en måte, fordi jeg klarer liksom ikke å regne det ut i hodet hvor stor sannsynlighet det er og sånt. Så ja, det ble egentlig bare sånn gjetting. Og hva jeg følte for at det er.*

Berit fikk ikke noe grep på hvordan hun skulle kunne regne ut sannsynligheten for det som skjedde, som endte opp med at hun bare gjettet. Dette er kanskje med på å forklare hennes ytring om at det bare er flaks om gruppen vinner eller ei. Dette er så klart en misforståelse av situasjonen hun er i. Vi opplevde også mye brøkregningsfeil knyttet til sannsynlighet. Et eksempel på dette er når en gruppe prøver å finne ut hva sjansen er for å få hjerter fra en kortstokk to ganger på rad:

> **Arne:** Men *det er 1/8 for at det blir riktig begge gangene.*
>
> ***Ole:*** *Det er sant.*
>
> ***Berit:*** *(Nikker)*

Her virker det som elevene bare har addert nevnerne i stedet for å multiplisere (vanlig feil i matematikk) teller med teller og nevner med nevner. Dette er et av flere steder hvor elevene gjør regnefeil med brøk. En annen misforståelse som vi observerte, var at i gruppe 1 hadde den ene eleven fått det for seg at sjansen for å få syv med to terninger var høyere enn alle de andre tallene til sammen. Dette er trolig et eksempel på heuristisk representativitet, som betyr at eleven har opplevd å få syv mange ganger, og bruker dette som basis for å argumentere for at syv er mer sannsynlig enn alle andre tall til sammen. Dette ser vi også tegn på i en diskusjon hvor gruppe 1 skulle svare på om det var sannsynlig og få to like eller syv når de kastet to terninger.

> ***Arne:*** *Ja, men det er flest muligheter for at det blir syv, og så to like så legger vi bare på.*

Det er mer sannsynlig å få syv på terningene sett opp mot et annet tall, men ikke mer sannsynlig enn alle andre tall til sammen. Det er trolig at Arne har misforstått hva som har blitt undervist tidligere, eller at han har opplevd å få syv mange ganger når han har kastet to terninger. Dette er også et tegn på at Arne ikke helt har tatt til seg sannsynlighetskonseptet og i stedet tror blindt på noe han har hørt eller opplevd. Dessverre er det ingen på gruppen hans som plukker opp feilen hans i denne timen. Vi opplevde også at elever ofte bare kastet ut tilfeldige tall i diskusjoner, dersom de var usikre på hvordan de skulle gå frem. De brukte da gjerne tall som var tematiske for situasjonen. Hvis vi snakket om terninger regnet de med 1/6 og hvis vi snakket om spillkort så regnet de med 1/4. Dette kan virke som en tilpasning og forankringsfeil, som er en type heuristisk feil som handler om å tilpasse en utgangsverdi (et anker) som så blir tilpasset til situasjonen på en eller annen måte. Denne tilpasningen tar ofte ikke høyde for alle faktorer som spiller inn i situasjonen. Elevene har et tall assosiert med for eksempel terninger, og bruker dette utgangspunktet (ankeret) til å finne på regnestykker (tilpasning).

5.4.3 Problemløsning

En ting vi så mye til var at elevene brukte problemløsningsstrategier. Fra egen erfaring i skolen vet vi at det ikke alltid er lett å få elevene til å jobbe problemløsende. Vanligvis ender de opp med å sette seg fast og gi opp tidlig. Likevel var dette noe vi opplevde lite av i våre undervisningsøkter. Det er selvsagt ikke nødvendigvis Borel som er årsaken til dette, men kan være noe som er vert å utforske. Det startet med mye prøving og feiling, hvor elevene utforsket noen av ideene de hadde. Etter hvert gikk de over til å forenkle oppgavene ved å dele de opp i mindre delproblemer. Elevene hadde også flere ganger hypoteser om hva utfallet kom til å bli og hvorfor. Disse hypotesene fikk de enten bekreftet eller avkreftet i gjennomgangen mot slutten av undervisningsøkten. Det første eksempelet vi skal ta for oss er hvor gruppe 2 prøver seg frem på den første oppgaven. Her bestemmer de seg for å forenkle oppgaven ved å først finne sannsynligheten for å trekke 2 røde baller, forså å finne sannsynligheten for å trekke to grønne baller og til slutt addere disse.

Elin: *Uansett så er det større sannsynlighet for at rød blir trukket ut, men det er ikke så stor sannsynlighet om vi tar nei.*

Elin: *Det kan tegnes to brøker da det kan tegnes to brøker.*

Dina: *Men det må være pluss…*

Et annet eksempel fra samme gruppe hvor de prøver seg fram og deler ideer rundt oppgave 3, men hvor de ikke kommer helt i mål:

Dina: *Også hvor mange ganger kan du få 2, 6.*

Åse: *Da tar du 6 minus.. det er 30.*

Dina: *Jeg tror det er 36 minus 12 tror jeg.*

Åse: *Men hvordan.*

Dina: *Fordi er det ikke sånn, nei 36.*

Åse: *Ja hvis det er, da er det 30.*

Dina: *36 minus 6 også 6 til på like, det er jo 6 like eller?*

Dina: *1 pluss 1, 2 pluss 2, 3 pluss 3.*

Åse: *Jo, jo, jo, men 6 og da blir det... 36 minus 12 ..Åja da blir det 36 minus 12, og da er det 24 ..er det ikke?*

Dina: *Okei, 24 over 36 da?*

Åse: *24 over 36 ja.*

Dina: *Kan man skrive det mindre?*

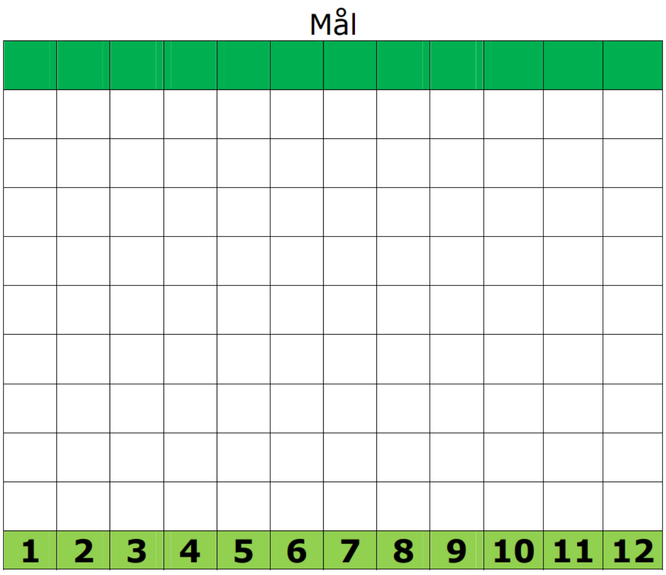
Åse: *Ja det kan du, du kan dele det på to.*

Det var mange ganger elevene prøvde seg fram på oppgaven, men hvor de ikke kom fram til svaret. Dette kan også sees fra eksemplene i de andre kategoriene, og vi velger derfor å ikke inkludere flere eksempler på dette her.

6 Diskusjon

6.1 Tilgjengeligheten av spill

Ettersom skolen har begrensede ressurser, er det relevant at spillet er tilgjengelig og at prisen på elementene som inngår er lavest mulig eller at innkjøpt materiell kan gjenbrukes. Et viktig spørsmål blir da: Hvor kan en lærer på ungdomsskolen finne matematiske spill som kan brukes i undervisningen? Et naturlig sted å lete er internett. Det er naturlig å søke etter spill på nettsider som https://www.matematikk.org/ og https://www.delmatte.no/. Det er også noen spill tilgjengelige i enkelte læreverk. Et godt eksempel på et tilgjengelig spill om sannsynlighet er «Det store hesteveddeløpet», som blant annet ble i brukt i forbindelse med Abelsprisutdelingen i 2010 (Matematikk.org, 2010). Spillet er beskrevet i et ressurshefte laget for denne anledningen (Davidsen & von Zernichow, 2010). Vi har selv observert en versjon av dette spillet i bruk på 9. trinn på ungdomsskolen hvor elevene multipliserte i stedet for å addere terninger. Spillet er et hesteløp der målet er å komme først til mållinjen, vist i Figur 10. Elevene plasserer hesten sin på en tallinje fra en til tolv. De får velge hvilket tall de plasserer hesten sin på selv før de starter løpet. Gjennom spillet bytter elevene på å kaste to terninger. Hesten som står på et felt i kolonnen som tilsvarer summen av terningene får bevege seg et felt fremover. Fra runde til runde skal elevene reflektere over hvilken kolonne det lønner seg å putte hesten på neste gang de spiller.



Figur 10: Spillbrett i Det store hesteveddeløp (Davidsen & von Zernichow, 2010, s. 9)

Dette spillet illustrerer hvordan summen av to terninger fordeler seg i en normalfordeling rundt tallet syv, se Figur 10. Dette er et klassisk eksempel på sammensatte hendelser. Det er åpenbart at man alltid burde satse på syv, da sannsynligheten er størst for å få syv. Når elevene har forstått dette prinsippet vil gjenbruksverdien bli lav, da den beste måten å vinne på alltid vil være å plassere hesten på kolonne nr. syv. Spillet er lite ressurskrevende da det krever lite eller allerede tilgjengelig materiale, og reglene er enkle. Spillbrettet kan enkelt skrives ut eller tegnes opp. Terninger finnes ofte allerede tilgjengelig i skolen.

Vi har i tidligere forskning presentert flere spill som er brukt i skolesammenheng. Felles for alle disse er at de er lite ressurskrevende. I spill som Produktbingo, kan spillbrettene enkelt lages, mens «Hone on the range» bare krever en kalkulator. På samme måte er Borel er et spill som kan brukes av hvem som helst, uten at det krever spesielle gjenstander eller spillbrett. Et unntak kan være spillet Spacemath, som krever digitale enheter for å kunne tas i bruk. Det er mer og mer vanlig at elever i skolen har tilgang på egne nettbrett eller PC-er, som også vil gjøre dette spillet lite ressurskrevende å bruke. Borel tar i bruk gjenstander man allerede finner på en skole, som kortstokk og terninger, som gjør at spillet er enkelt å ta i bruk. Vi ønsker med denne masteroppgaven å gjøre Borel mer tilgjengelig for lærere i skolen som leter etter gode spill å bruke i sin matematikkundervisning.

6.2 Vår undervisningstime

Vi har allerede stadfestet at Borel som læringsverktøy oppfyller våre kriterier for hva som er et rikt matematisk spill for bruk på ungdomsskolen. Vi vil først diskutere vår opplevelse av undervisningene. Deretter vil vi diskutere om kriteriene ble ivaretatt når vi brukte Borel som et rammeverk for en undervisningsøkt. Til tross for at ikke alle kriteriene er direkte målbare i en undervisningssammenheng vil vi likevel gå gjennom alle kriteriene og diskutere i hvilken grad vi klarte å ivareta disse, og også komme med noen refleksjoner rundt muligheter for forbedring.

6.2.1 Vår opplevelse av undervisningstimene

Til tross for at elevene aktivt diskuterte matematikk gjennom hele undervisningsøkten var det klart at klassen hadde manglende kunnskaper når det kom til brøkregning. Dette medførte at elevene brukte lang tid på oppgavene og ofte ente opp med galt svar, selv om de hadde riktig tankegang. I tillegg valgte vi et tema som var vanskelig med tanke på hva elevene hadde lært om sannsynlighet og det totale utfallsrom fra tidligere. Det faktum at elevene ikke hadde støtt på lignende oppgaver, samt manglende kunnskaper innenfor brøkregning begrenset diskusjonene elevene hadde i begynnelsen. Dette gjorde at elevene veddet basert på magefølelse eller elementære slutninger fra informasjon de hadde om oppgaven. Et eksempel på dette er hvis en oppgave bruker en kortstokk, forslår en elev en fjerdedel som en løsning, bare fordi det finnes fire sorter. Bruker vi Polaki (2005) sitt rammeverk for elevers sannsynlighetsforståelse vil store deler av elevene vi møtte i vår undervisningstime ligge på nivå 2, altså overgangsnivået. Ut ifra det vi observerte kunne alle elevene oppgi alle utfall for en endimensjonal hendelse, men det var flere tilfeller hvor sammensatte hendelser viste seg å være noe som var utfordrende for elevene. Et godt eksempel på dette er når gruppe 1 trodde at syv var mer sannsynlig enn alle andre tall til sammen på terningene. I denne sammenhengen og andre tok elevene i bruk ulike heuristiske metoder for å begrunne svarene sine. Arne hadde trolig opplevd at man ofte får syv når man kaster to terninger, som er et godt eksempel på heuristisk representativitet. At elever bruker kvantitative observasjoner for å bestemme hvor sannsynlig noe er, er også noe som kjennetegner elever på nivå 2 i Polaki (2005) sitt rammeverk for elevers sannsynlighetsforståelse. Dette kan også være med på å forklare hvorfor elevene strevde med oppgavene, når vi i tillegg til sammensatte hendelser introduserte de til komplementær sannsynlighet. Det at vi i tillegg til å introdusere elevene for et spill samtidig ville ha dem til å jobbe problemløsende med et helt nytt tema var nok overveldende for mange av elevene. Til tross for at elevene flere ganger tok i bruk ulike problemløsningsstrategier og var engasjerte i arbeidet, fungerte ikke dette særlig bra. På intervjuene er det flere som gir uttrykk for at oppgavene var vanskelige og at de ikke helt hadde skjønt det som ble gjennomgått. Arne sa for eksempel: «Den vi hadde der var litt vanskeligere enn det vi har hatt fra før» og Berit sa: «Jeg synes de var ganske vanskelig egentlig jeg, jeg var ikke helt med, jeg prøvde bare liksom høre på hva de andre sa og lære litt av det på en måte» Til tross for at dette var tilfellet jobbet elevene kontinuerlig med oppgavene og ga ikke opp. Vi kan ikke med sikkerhet si at dette er på grunn av Borel, men vi observerte at elevene jublet når de vant og sukket når de tapte. Dette tolket vi som at elevene syntes Borel var underholdene, noe som støttes av svarene elevene ga på intervjuene i etterkant:

> ***Intervjuer:*** *Er det noe du synes var spesielt positivt ved denne undervisningsøkten? Var det noe du likte bedre enn andre ting?*
> ***Arne:*** *«Ja, det var litt mer engasjerende, litt mer gøy»*

og

Intervjuer: *Hva synes du om bruken av spill i matematikkundervisningen?*

Dina: *Det syntes jeg er veldig bra.*

Intervjuer: *Har du noen tanker om hvorfor det er bra?*

Dina: *Fordi det er gøyere*

Intervjuer: *Det er gøyere?*

Dina: *Ja, og kanskje man husker mer av å ha det gøy.*

En ting vi var positivt overasket over var hvor engasjerte elevene var når de diskuterte oppgavene. Det var sjeldent at vi observerte elevene snakke om noe urelatert til oppgavene og dette foregikk heller ikke over lengre tid. Det kan være mange faktorer som spiller inn på dette, som for eksempel at elevene var oppmerksomme på at de ble filmet eller at de hadde det gøy med å spille Borel.

Vi hadde som sagt lyst til å gjennomføre en runde til med Borel mot slutten av undervisningen for å se hvordan diskusjonene og svarene endret seg fra første runde. Dette endte vi opp med ikke å gjennomføre, da det gikk mer tid til arbeidet med oppgavene og gjennomgangen av dem enn det vi hadde regnet med. Vi hadde likevel en gjennomgang av oppgavene på slutten av timen, noe som vi tror var veldig nyttig for elevene. Berit forklarer selv på intervju at hun hadde nytte av dette og forstod bedre hva komplementær sannsynlighet gikk ut på: «[…] også fikk vi litt sånn undervisning, forklaring på slutten. Det syntes jeg hjalp». Samtidig forklarer Berit at hun likte denne undervisningen, fordi den til forskjell fra andre undervisninger var mer praktisk: «Ja, det var hyggelig å teste sånn sannsynlighet på en annen måte, enn å bare lære det på sånn Ipad og sånne ting. Litt mer sånn realistiske situasjoner». Som beskrevet av Farber (2015) er spill gode til å skape lærerike øyeblikk, men dårlige på å forsikre at elevene har fått dette med seg. Lærere er derimot flinke til dette og det er derfor viktig at læreren kontrollerer at elevene har fått med seg det lærerike øyeblikket (Farber, 2015). Dette stemmer med Bragg (2012), som påpeker at aktiviteter som spill ikke burde brukes utenom andre pedagogiske praksiser og fungerer best når man bruker dette i kombinasjon med hverandre. Dette stemmer godt med hva vi selv opplevde. Elevene kunne svært lite om komplementær sannsynlighet etter spillingen og det var først etter gjennomgangen av oppgavene at flere elever forstod konseptet.

Da elevene jobbet med oppgavene etter spillingen ble det observert flere ganger at elevene mimet utførelsen av eksperimentene og reflekterte på hva de hadde svart og diskutert tidligere. Det ble også observert at elevene flere ganger reiste seg opp på stolene for å bedre få med seg hva utfallet av eksperimentene ble. Det er tydelig fra både observasjonene og intervjuene at elevene likte å utføre eksperimentene. Når vi på intervjuet spurte Dina om det var noe hun syntes var positivt med undervisningsøkten sa hun: «Jeg synes det var gøy når vi utførte handlingene». Elevene sier også at det var enklere å komme i gang med oppgavene når de hadde møtt dem tidligere i Borel. Ved å bruke de samme oppgavene som da elevene spilte Borel fikk elevene noe konkret å se tilbake på og tenke over. Dette er ikke noe som er unikt til Borel, men er noe vi opplever som et positivt trekk ved dette spillet.

6.2.2 Vår undervisning opp mot kriteriene

Det første kriteriet: Engasjerende og selvgående

Vi har tidligere definert engasjement som at elevene skal få erfaring både fra motiverende og følelsespregede strukturer, som skal hjelpe dem med å nå vedvarende produktiv læringsadferd (Hannula et al., 2016). Vi har videre tolket dette som elevenes villighet til å være aktive deltakere i undervisningen, og at produktiviteten elevene viser er en følge av indre motivasjon basert på følelser elevene har for matematikk. I resultatdelen så vi på det emosjonelle aspektet, her også spesifikt engasjement. Vi kan dessverre ikke si noe spesifikt om elevene er indre motiverte, men ut ifra våre observasjoner kan vi si noe om inntrykket vi fikk av hvordan elevene opplevde undervisningsøkten. I gjennomførelsen av sannsynlighet eksperimentene stod elevene på stolene for å bedre kunne se utfallet av eksperimentet. Dette er noe som vi tolker som et tydelig tegn på at elevene var interesserte i det som skjedde i undervisningen. I intervjuene virket elevene stort sett positive til å bruke spillet Borel som en del av matematikkundervisningen. Elevene forteller at de syntes timen var morsom, og at de gjerne kunne hatt en lignende undervisningsøkt med Borel. Da Arne ble spurt om hva han syntes om undervisningsøkten sier han spesifikt i intervjuet: «*Ja, det var litt mer engasjerende, litt mer gøy*». Her antar vi at Arne sammenligner vår undervisningsøkt med det han ser på som en vanlig undervisningsøkt i matematikk. Hva Arne legger i engasjerende er usikkert og er noe vi burde ha spurt om på intervjuet, likevel stemmer det Arne sier godt overens med inntrykket vi fikk av hvordan elevene opplevde undervisningen. Det ble observert at elevene diskuterte mye, uttrykte interesse for det som skjedde i spillet og arbeidet flittig i grupper.

Det at elever er selvgående forklarte vi som at de arbeider/spiller uten mye instruksjoner fra læreren. Fra våre observasjoner var elevene selvgående i store deler av undervisningstimen. Det var bare i de først minuttene, hvor elevene ble introdusert til Borel, at læreren måtte komme med forklaringer til noen av gruppene som ikke hadde fått med seg alle reglene.

Lærer: *Hvor mye satset dere?*

Åse: *To.*

Lærer: *Dere må satse 1, 3 eller 5, så da må jeg gå opp til 3 dessverre.*

Når elevene først hadde forstått reglene var lærerinput ikke lenger nødvendig. For å oppsummere fikk vi inntrykk av at elevene var både engasjerte og selvgående i vår undervisningsøkt med Borel. Vi mener derfor at vi har ivaretatt det første kriteriet; Engasjerende og selvgående.

Det andre kriteriet: Ha en balanse mellom evne og flaks

Det ble observert at elevene kjente på mestringsfølelsen ved at de viste eierskap til svarene de hadde resonnert seg frem til og ble begeistret når de fikk rett. Dette ble observert både i gjennomføringen av eksperimentene og når læreren gikk gjennom oppgavene i etterkant. Et problem var at elevene følte at flaks hadde mye å si for om de vant eller ei. Berit sier i intervjuet at hun finner matematikk utfordrende. Hun sier i timen: «Ja, det er bare flaks». Det var ikke ønskelig at elevene skulle se på Borel som ren gambling. Gough (1999) mener at ren gambling ikke burde være en del av skolen, med unntak av når det brukes til å belyse hvorfor gambling er uhensiktsmessig og lite formålstjenlig. Dette er også en del av hvorfor det er viktig å ha denne balansen mellom evne og flaks. Flere av elevene uttrykker at de fant oppgavene vanskelige, både i intervjuene og gjennom samtaler med hverandre i løpet av undervisningsøkten. Berit forteller i intervjuet: «Jeg tror hvis det hadde vært litt sånne oppgaver jeg skjønte, tror jeg liksom jeg hadde fått bedre ut av det […]» Det er ingen tvil om at nivået på oppgavene var for høyt for Berit og trolig mange andre elever. Dette kom tydelig frem i arbeidet med oppgavene etter elevene spilte Borel. Her brukte de veldig lang tid på hver oppgave og diskuterte mye og lenge. Det at oppgavene ikke var tilpasset elevenes nivå, skyldes i all hovedsak av at vi ikke hadde noe kjennskap til klassen eller klassens nivå før gjennomføringen av undervisningsopplegget. Det at noen elever gir utrykk for at «*det er bare flaks*» om de vinner eller ei, skyldes trolig at elevene ikke hadde tilstrekkelig kunnskap til å faktisk regne ut oppgavene. Når oppgavene blir for vanskelige kan det medføre at elevene føler at evnene deres ikke har noe å si for om de vinner eller ei. Når elevenes evner ikke strekker til, slik at de må gjette fremfor å resonnere seg frem til en løsning, kan dette føre til at elevene føler at spillet bare blir ren gambling. Av denne grunn ble kriteriet om balanse mellom evne og flaks i denne undervisningsøkt bare delvis oppfylt. Dette skyldes utelukkende våre valg av oppgaver, og ikke Borel som et spill og rammeverk for å undervise sannsynlighet. Når Berit blir spurt om hva som kunne ha gjort timen bedre, sier hun:

> *Ja det hadde sikkert vært litt bedre hvis det var litt lettere for da kunne jeg liksom skjønt mer, eller jeg fikk liksom ikke, jeg skjønte det liksom ikke i det hele tatt, det ble ikke så lett. Da hadde det sikkert vært bedre om det var lettere oppgaver som jeg også forsto, og kunne hjelpe til med.*

Det å ha god kjennskap til elevenes ferdighetsnivå nivå er viktig for å velge oppgaver som sikrer en god balanse mellom evne og flaks. Klassene som deltok i vår datainnsamling hadde nylig vært gjennom en periode med streik, og hadde i tillegg hatt mye hjemmeskole som følge av nedstenging av samfunnet i pandemiperioden. Dette kan være med på å forklare hvorfor ferdighetsnivået var så mye lavere enn forventet. Hvis vi skulle gjennomført en ny undervisningstime med Borel, ville vi ha gjort et grundigere forarbeid for å kartlegge elevenes ferdighetsnivå og dermed gjort et bedre utvalg av oppgaver med tanke på å sikre en god balanse mellom evne og flaks. Vi hadde derimot gode erfaringer med å lage oppgaver. Ved å legge oppgavene et sted mellom 55 % og 75%, kunne vi sikre en viss balanse mellom evne og flaks. Elever som hadde logiske tanker som styrte dem mot det mer sannsynlige svaret hadde en bedre mulighet til å gjøre det bra, samtidig som sjanse hadde en stor innvirkningskraft på hvem som vant. Ved å bruke Kelly-kriteriet kunne vi samtidig passe på at oppgavene var balansert på en måte som gjorde at det ga mening å satse ulike mengder med mynter.

Det tredje kriteriet: Matematikken skal være sentral i spillet

I undervisningsøktene ble det observert at elevene hadde gode matematiske diskusjoner. Elevene hadde stort sett gjennom hele timen fokus på matematikken rundt oppgavene og på hvor mye de skulle satse. Dette støtter vår oppfattelse av at matematikken er sentral i Borel. Dette er et kriterium som Borel oppfyller, da matematikken er essensiell for å ha et fortinn i konkurransen. Det at flere av elevene opplevde at nivået på oppgavene var for høyt gjorde at de ikke fikk diskutert hver oppgave godt. Selv om dette var tilfellet så det ikke ut til å påvirke elevenes villighet til å engasjere seg i matematikken knyttet til oppgavene. Elevene var ivrige til å dele ideer og tanker rundt både sannsynlighetsfordelingen og hvor mye de skulle vedde. Når elevene får drive denne diskursen får de utfordret sin egen forståelse, og utrykt sine misforståelser slik at de kan korrigeres av andre elever eller lærere (Lee, 2006). En annen ting var at det var enkelt å lage oppgaver til Borel som var rettet mot temaet for undervisningen. Dette er fordi regelverket til Borel fungerer som en ramme, og man kan enkelt finne oppgaver som kan omformuleres til en Borel-oppgave. Det blir derfor enkelt å omgjøre oppgaver fra læreverket til å passe inn i Borel.

Det fjerde kriteriet: Fleksibilitet for læring og undervisning

Fra tidligere diskusjon om Borel opp mot kriteriene for et rikt matematisk spill i ungdomsskolen, ble det sagt at Borel er tilpasningsvennlig. Ved å tilpasse oppgavene til elevenes nivå kan elevene få mer ut av undervisningsøkten. Borel er et spill som er lett å lage oppgaver til, fordi man lett kan ta sannsynlighetsoppgaver fra en undervisningsbok i matematikk å endre de til en Borel-oppgave. I arbeidet med å lage oppgaver var det enkelt å lage oppgaver til komplementær sannsynlighet. Det er også mulig å lage oppgaver hvor elevene kan finne alternative løsningsmetoder. Et eksempel på dette er oppgave 8, hvor elevene kan bruke gjennomsnitt for å gjøre et estimat i tillegg til å regne med gunstige delt på mulige. Det å lage oppgaver som kan løses og analyseres på flere ulike måter vil kunne åpne opp for differensiering. Slike oppgaver kunne vi tenke oss å ha flere av i en ny undervisningsøkt med Borel. Til tross for at det ble observert at elevene ikke hadde kontroll på brøkregning i piloteringen var det vanskelig å gjøre tilpasninger mellom piloteringen og datainnsamlingen, når fokuset for oppgaven skulle være et sannsynlighetsspill. Likevel ble det gjort et forsøk ved å kutte ned antall oppgaver og fjerne noen av de mer utfordrende oppgavene. Dette hjalp i liten grad, men disse endringene hadde trolig vært tilstrekkelig om grunnkunnskapene var på plass. Det var altså ikke spillets evne til å tilpasses, men vår evne og mulighet for å tilpasse oppgavene til denne spesifikke elevgruppen som ga dette resultatet. Borel er ikke et kommersielt spill som er tilgjengelig og det er lett for enhver å skaffe konkretene man trenger for å spille. Fra intervjuene kommer det frem at elevene var positive til Borel og kunne tenke seg å spille det igjen. Når intervjuer spurte om Arne ville ha en økt til med Borel, svarte han: «Ja, hvis det er noe annet da. Som kanskje noe annet i sannsynlighet, eller et helt annet tema.» En positiv ting ved at man kan bruke Borel flere ganger, er at elevene kan reglene for spillet. Dette vil være med på å effektivisere en ny time med Borel med denne klassen. Borel kan også spilles på ulike måter og man trenger ikke gjøre det på samme måte som det ble gjort i denne undervisningsøkten. Man kan for eksempel spille innad i grupper hvor elevene på hver gruppe konkurrerer med hverandre. Det var vanskelig å se hvor godt Borel la opp til å differensiere, da vi ikke kjente klassen vi underviste godt nok til å tilpasse oppgaver for enkeltelever. Det som derimot kan kommenteres var elevenes motivasjon til å diskutere oppgavene. Selv om oppgavene var på et høyt nivå, var elevene stort sett hele tiden aktive i arbeidet med oppgavene.

6.2.3 Forbedringer av undervisning

Vi opplevde at elevene var mest usikre på spillet i starten av timen. Dette er ikke rart siden aktiviteten vi presenterer for dem var helt ny. I gjennomføringen av første eksperiment var det mange elever som var usikre og noen grupper som satset ulovlige mengder. Dina påpeker dette som en negativt ting ved timen, og kommer med et forslag til endring: **«***Jeg skjønte ikke helt hvordan man skulle gjøre med de perlene først. Det kunne vært forklart litt mere. Kanskje dere kunne hatt med et eksempel*». Vi er enig med Dina som foreslår at vi kunne hatt en rask prøverunde med en Borel-oppgave før vi begynte. På denne måten kunne flere elever ha forstått konseptet og reglene bak Borel før vi begynte å spille. Det kom frem, både i undervisningstimen og i intervjuene, at de justeringene vi gjorde fra piloteringen ikke var tilstrekkelige for å tilpasse oppgavene til elevenes nivå. I undervisningen sier Åse: «Det var litt vanskelig». Videre sier Elin: «Det var ikke så mye av det vi skjønte egentlig, vi har ikke gjort så mye av dette før». For å jobbe med motsatt sannsynlighet, må man jobbe med det komplementære utfallsrommet til det man ønsker å se på. Dette var noe ikke alle elevene fikk til, hverken i spillrunden eller i arbeidet med oppgavene. Et godt eksempel er oppgave 2. Elevene blir bedt om å finne sannsynligheten for å få to like eller syv på to kast med to terninger. Vi observerte at elevene brukte mesteparten av tiden til å diskutere hva sannsynligheten for å få syv eller to like var. Uten å ha kjennskap til løsningsmetoden var det vanskelig for elevene å komme fram til et svar, likevel var det gode matematiske diskusjoner rundt oppgavene hvor elevene delte ideer og kritiserte disse. Med tanke på at elevene hadde hatt mye hjemmeskole under Korona perioden og mistet mye undervisningstid i matematikk i forbindelse med streiken som skolen var tatt ut til, var det kanskje ikke så overraskende at elevene var på et lavere nivå. Skulle vi gjennomført undervisningsøkten med Borel på nytt med de samme klassene, ville vi først hatt en gjennomgang med brøkregning. Brøk er en essensiell ferdighet i arbeid med sannsynlighet og kombinatorikk på ungdomsskolen. Videre ville vi ha endret temaet for Borel oppgavene til å hovedsakelig være «gunstige over mulige» og sammensatte hendelser. Temaet komplementær sannsynlighet har et viktig poeng som må begripes, nemlig at for å finne det man er ute etter må finne det motsatte. I tillegg er det viktig å ha en god forståelse av det totale utfallsrommet. Hvis elevene ikke klarte å se denne sammenhengen kom de ikke så langt. I undervisningstimen var det svært få elever fra gruppene vi observerte som forstod denne sammenhengen før vi forklarte konseptet mot slutten av timen. Vi fikk også inntrykk av at det fortsatt var mange som ikke helt hadde forstått konseptet etter at vi gikk gjennom oppgavene på tavla til slutt. Onslow (1990, referert i Bragg, 2012) sier at om man ikke eksplisitt går inn og utfordrer elevenes tro eller svar, så er det usannsynlig at de vil kunne overkomme konseptuelle hindringer. Spill burde derfor ikke brukes isolert fra andre pedagogiske praksiser (Bragg, 2012). Vi ville også gjennomført denne undervisningsøkten i en dobbeltime og spilt en runde til med Borel, hvor elevene ville hatt en bedre ide for hvordan de skulle løse oppgavene. På denne måten kunne de ha kjent på mestringsfølelsen.

6.3 Andre spill

Vi skal nå se på de ulike spillene som ble presentert tidligere, under tidligere forskning. I tillegg skal vi diskutere spillet «Det store hesteveddeløpet». Spillene vil både diskuteres opp mot våre definerte kriterier og opp mot Borel.

6.3.1 Produktbingo

Som beskrevet i tidligere forskning er Produktbingo en vri av vanlig bingo. Her får elevene utdelt ferdige spillbrett og bruker en spinner med tallene fra to til ni. Spinneren blir spunnet to ganger og om produktet av de to tallene multiplisert med hverandre befinner seg på brettet, krysser man av. Deretter følges vanlige Bingoregler. Med utgangspunkt i deres egne kriterier beskriver Jackson et al. (2013) at elevene var engasjerte og selvgående i arbeidet med Produktbingo.

> *[…] Marshall and Jimmy engaged in rich mathematical discourse as they analyzed their boards in light of the potential for winning. In their conversation, they challenged each other's ideas and generated questions that the class could investigate (Jackson et al., 2013, s. 428).*

Produktbingo kan altså bidra til å engasjere elever i rike matematiske diskurser. Reglene er enkle å forstå, så elevene kan også være selvgående i arbeidet med spillet. På denne måten oppnår Produktbingo det første kriteriet som vi satte for rike matematiske spill, «selvgående og engasjement». Poenget med spillet er at elevene skal oppdage at flere av brettene inneholder tall som ikke er produkter av tall mellom to og ni.

> *Katie then recognizes that she is not the only one with impossible products. She points out to another student that he will never obtain the 13 on his board because the only way to get a product of thirteen is for the spinner to land on 13 and 1, which again is impossible (Jackson et al., 2013, s. 426).*

Når de har forstått dette og selv laget optimale brett vil det lærerike øyeblikket ha funnet sted og det vil ha liten hensikt å spille dette på nytt med de samme elevene. Det vil heller ikke bidra til å engasjere elever om man spiller flere ganger. Det er av denne grunn vi ikke ser på Produktbingo som et spill. Når elevene får udelt spillbrettene vil det være flaks som styrer hvem som vinner. Derimot hvis vi går ut ifra at elevene velger egne brett vil det være evnen til å finne hvilke brett det er mulig å vinne med som styrer hvem som vinner. Slik vil spillet være over før det har begynt. Videre om elevene skulle spille dette spillet flere ganger vil det være de som får velge brett først som har størst sjanse for å vinne. På denne måten vil det ikke være en god balanse mellom evne og flaks, og spillet oppnår derfor ikke det andre kriteriet vi har satt for rike matematiske spill.

Produktbingo skaper en «aha opplevelse», hvor elevene innser at ikke alle brettene er mulig å vinne med. Når dette skjer blir det, som Jackson et al. (2013) beskriver, skapt mange gode diskusjoner. Jackson et al. (2013) trekker frem at Produktbingo åpner opp for diskusjon rundt temaer som primtall, utfallsrom, sannsynlighet og rettferdighet. Elevene får prøvd seg på og utviklet flere viktige evner som resonnering, bevis, kommunikasjon og problemløsning. Elevene får også mulighet for å forstå problemer, ha utholdenhet i løsningsprosessen, konstruere gode argumenter og kritisere andres begrunnelser. Er læreren flink til å sette lys på disse temaene slik at elevene kan ha rike matematiske diskusjoner rundt rettferdigheten av spillet, kan vi si at spillet oppnår det tredje kriteriet vi har satt for rike matematiske spill at «Matematikk skal være sentral i spillet».

Det som etter vår mening er Produktbingos største problem, er spillets mangel på fleksibilitet for læring og undervisning. Spillet legger til en viss grad til rette for differensiering ved at ulike nyanser av vinnersjanser til de ulike brettene kan identifiseres og diskuteres på ulike nivåer. Svakere elever kan diskutere hvilke tall som er mulig å få på brettet og snakke om primtall, mens elever på et høyere nivå vil kunne begynne å diskutere talls plassering på brettet og hvor sannsynlig det er å få disse tallene. Spillet vil trolig være spennende å ta i bruk for én undervisningsøkt, men det vil ha liten hensikt å bruke dette flere ganger på samme klasse. Det at spillet blir mindre spennende og lærerikt ved gjentatt bruk, fører til at spillet ikke oppfyller det fjerde kriteriet vi har satt for rike matematiske spill, «fleksibilitet for læring og undervisning». Produktbingo er etter vår mening en utforskende aktivitet fremfor et spill, fordi det ikke kan brukes flere ganger.

6.3.2 Spacemath

Fiorella et al. (2019) testet spillet vi har døpt Spacemath som et læringsverktøy i ungdomsskoleklasse. Spacemath, som vi har beskrevet i kapittelet om tidligere forskning, er et virtuelt spill som gir spilleren muligheten til å bevege seg rundt i et romskip og utføre ulike matematiske oppgaver innenfor spillets rammer. Et fokus i dette spillet er at elevene skulle lære av å lære bort. Vi vil nå se på dette spillet i lys av våre fire kriterier for et rikt matematisk spill for bruk i ungdomsskolen.

Fiorella et al. (2019) beskriver i sin artikkel at elevene jobbet med problemløsningsaktiviteter i 50 % av tiden i det virtuelle spillet, hvor av 20 % av tiden ble brukt på aktiviteter knyttet til «læring ved å lære bort». I de resterende 50 % av tiden utforsket elevene spillets verden og gjorde andre ikke relevante aktiviteter. Ut ifra artikkelen virker det som om spillet var engasjerende for elevene, men siden så mye tid ble brukt på ikke relevante aktiviteter er det tvilsomt at dette engasjementet var knyttet til matematikk. Det var med andre ord mange distraksjoner i spillet som forstyrret elevenes mulighet for å jobbe med oppgavene. På bakgrunn av dette vil vi si at spillet ikke var optimalt for at elevene skal kunne jobbe selvgående med matematikk. Dermed er vårt første kriterium om elevenes engasjement og mulighet til å være selvgående bare delvis oppfylt.

Videre vil vi argumentere for at det ikke er noen balanse mellom evne og flaks i dette spillet. Elevene gjør rene matematikkoppgaver i en virtuell verden, hvor de velger svaralternativer til oppgaven er løst. På denne måten kan elevene ha flaks ved å velge riktig alternativ med en gang, men artikkelen beskriver ingenting som tilsier at dette er lønnsomt. Altså kan elevene gjette seg fram til riktig svar uten at utfallet påvirkes. Slik kan elevene komme seg gjennom spillet uten å tenke over matematikken, noe som til og med kan være raskere enn å faktisk tenke over problemet og finne den rette løsningen. På denne måten vil evner ha alt å si for å komme seg videre eller ingenting å si. Altså oppfyller ikke spillet det andre kriteriet vi satte for rike matematiske spill. Resultatene i artikkelen viser at spillet ikke hadde mye innvirkning på prestasjonsnivået til elevene som spilte spillet. Det at elevene kan ignorere matematikken i spillet og det faktum at de brukte 50% av tiden til ikke-relevante aktiviteter gjør at spillet heller ikke oppfyller det tredje kriteriet om at matematikken skal være sentral. På bakgrunn av dette vil vi argumentere for at dette ikke er et spill, men i stedet et forsøk på å kontekstualisere praktiske matematikk oppgaver for å gjøre dem mer relevante og spennende å jobbe med.

Spillet har muligheter for å tilpasses for læring og undervisning. Det kan tilpasses ferdighetsnivået til en klasse og kan tilpasses for gjentatt bruk. Spørsmålet er om dette er realistisk at en ungdomsskolelærer klarer å gjøre. Dette er et digitalt spill, og det er usikkert for oss hvorvidt det vil kreve høy programmeringskunnskap for å kunne tilpasse spillet. Dersom det er tilrettelagt for en enkel og brukervennlig måte å justere eller bytte ut oppgaver, ville dette i større grad gjøre at spillet oppfyller vårt fjerde kriterium om fleksibilitet for læring og undervisning.

6.3.3 Hone on the range

«Hone on the range» er et spill som Bragg (2012) brukte i undervisning for elever på barneskolen. Som nevnt tidligere går dette spillet ut på at to spillere konkurrerer om å først nå et spesifikt intervall ved å multiplisere et tall med en tosifret startverdi, ved hjelp av en kalkulator. Spillet utføres som en stafett der en spiller overtar produktet fra den andre, som utgangspunkt for neste multiplikasjon. Dette spillet var laget for å trene barneskoleelever i multiplikasjon med desimaltall. Kriteriene som er satt for rike matematiske spill i denne oppgaven er derimot laget med tanke på ungdomsskoleelever. Disse er likevel de samme kriteriene som Russo et al. (2018) satte i sin artikkel for rike matematiske spill med en liten endring i det første kriteriet. Det som skiller kriteriene i denne oppgaven fra Russo et al. (2018) er kravet om at elevene skal kunne jobbe selvgående med spillet. Kriteriene i denne oppgaven vil av denne grunn være overførbare til barneskolen, fordi Russo et al. (2018) sine kriterier er laget med bakgrunn i deres egne erfaringer fra barneskolen.

Elevene i denne undersøkelsen var barneskolebarn, noe som ofte betyr at de i større grad trenger oppfølging, likevel forteller Bragg (2012) at elevene var relativt selvstendige i spillingen: «In the classes that played games, 32 children played them fairly independently with assistance from the teacher as needed […]». Med bakgrunn i dette vil vi si at Bragg (2012) oppfyller kriteriet for engasjement og selvgåenhet.

Det er en viss mulighet for flaks i «Hone on the range», ettersom man bruker kalkulator. Elevene kan gjette og tilfeldigvis treffe et tall som vil plassere de innenfor intervallet de prøver å treffe. Når elevene etter hvert blir flinkere til å multiplisere vil deres strategiske valg av tall ha mer å si for hvem som vinner enn flaks. Spillet vil da i mindre grad kunne påvirkes av flaks og det vil være elevenes individuelle evne til å multiplisere som avgjør hvem som vinner. Bragg (2012) skriver at elevene fort fant ut at det å gi enkle startverdier var en dårlig strategi. Dette førte til at elevene begynte å bruke desimaltall for å gjøre det vanskeligere for motstanderen å komme på et tall som ville putte de innenfor intervallet. Dette betyr at spillet har en skjev balanse mellom evne og flaks, og det vil være eleven med den beste strategien og evnen til å multiplisere som oftest vil vinne. I lys av dette vil vi si at spillet ikke oppfyller kriteriet om å ha en balanse mellom evne og flaks.

Matematikken er sentral i «Hone on the range», siden strategien for å vinne innebærer å se sammenhengen mellom tall og hvordan ditt valg påvirker videre utregninger. Selv i situasjoner der man kun velger tilfeldige tall på kalkulatoren får man likevel en opplevelse av hvordan tallene man multipliser påvirkes. Altså er kriteriet om at matematikken skal stå sentralt ivaretatt i «Hone on the range».

«Hone on the range» har en del fleksibilitet for læring og undervisning. Det åpner opp for differensiering ettersom det er mulig å variere vanskelighetsgraden ved å endre på intervallet elevene skal nå og regnemetoden som elevene har lov til å bruke. Spillet har muligheter for å bli brukt med alle fire regnearter, som gjør at spillet kan brukes for å trene elevene i hver av disse for hver regneart. For å tilpasse spillet for de ulike regneartene kan man også gjennomføre spillet uten bruk av kalkulator. På denne måten for elevene også trent på hoderegning eller andre regnemetoder. Spillet kan altså brukes flere ganger over en lengere periode for å trene på ulike regnearter og metoder. I tillegg kan spillet tas i bruk med svært enkle midler, da alt man trenger er en kalkulator. Altså oppfyller «Hone on the range» kriteriet om fleksibilitet for læring og undervisning.

6.3.4 Det store hesteveddeløpet

«Det store Hesteveddeløpet» er et veldig lett tilgjengelig spill på norske nettsider. Versjonen av spillet som blir tatt opp her ble funnet i et aktivitetshefte på matematikk.org (Davidsen & von Zernichow, 2010). Aktivitetsheftet er laget for 5. klassetrinn, men spillet har også applikasjoner for ungdomsskolen, da sammensatte hendelser er et viktig tema i pensum på 9. trinn (Kunnskapsdepartementet, 2019). Det er ikke gjort tidligere forskning på dette spillet, men er inkludert her for å vurdere et lett tilgjengelig spill fra internett opp mot kriteriene og Borel.

Når det kommer til det første kriteriet «engasjement og selvgående», ligner dette spillet på flere av de andre spillene. Spillet har stor mulighet for å skape en engasjerende spillsituasjon, da elevene får konkurrere og utforske et ukjent fenomen. Når elevene innser at det lønner seg å satse på syv vil denne interessen forsvinne fordi elevene vil ha funnet den beste strategien. Spillet er relativt selvgående, da reglene er ganske enkle og klare på hva elevene skal gjøre til enhver tid. Første gang elevene spiller «Det store hesteveddeløpet» vil de trolig være engasjerte og selvgående mens spillet pågår. Det er derimot ved gjentatt bruk at dette kriteriet ikke vil oppfylles, da det mest sannsynlig vil være et tap av engasjement hos elevene.

Når det kommer til det andre kriteriet «balansen mellom evne og flaks», vil «Det store hesteveddeløpet» delvis oppnå dette. Elevene vil få utforske hvordan fordelingen av summen av to terninger fungerer og etter å ha spilt spillet et par ganger vil de innse at tallene seks, syv og åtte vinner oftere enn andre tall. Dette betyr ikke at elever som har valgt andre tall ikke kan vinne, bare at dette er usannsynlig. Når elevene spiller spillet for første gang vil det være de som har kjennskap til statistikk og sannsynlighet eller som har møtt på lignende problemer som vil ha en fordel. Det er også mulig at elevene raskt klarer å resonnere seg fram til hva som er mest sannsynlig. I dette spillet kan elevene ha flaks enten ved å velge en av de mer sannsynlige tallene eller at en av de mindre sannsynlige utfallene inntreffer. Når elevene har funnet ut at man oftest vil vinne om man plaserer hesten sin på syv vil hverken flaks eller evner ha noe innvirkning på spillet, da alle vil satse på syv. Hvis alle elevene satser på syv kan man trekke inn spillteori og unngå syv med vilje, da det blir mulig at du alene vinner på et annet tall. Altså oppfyller ikke «Det store hesteveddeløpet» det andre kriteriet «balanse mellom evne og flaks».

Det tredje kriteriet: «matematikken skal være sentral i spillet» blir oppfylt til dette lærerike øyeblikket er oppnådd. Før elevene har funnet den beste strategien er gode kunnskaper i både statistikk og sannsynlighet en fordel. Det vil derimot ikke være en fordel etter at alle elevene har skjønt at den beste strategien er å satse på syv. På grunn av dette vil det heller ikke ha noen hensikt å gjenta spillet etter denne «aha opplevelsen». Altså oppfyller spillet heller ikke det siste kriteriet «fleksibilitet for læring og undervisning». Spillet legger ikke opp til noen differensiering, da hele poenget er å forstå at syv er det mest sannsynlige. Det er mulig å gjøre små justeringer av spillet ved å la elevene multiplisere tallene på terningene i stedet for å addere, men i denne versjonen av spillet møter man også på de samme utfordringene med tanke på gjenbruk. Spillet har altså liten mulighet for justeringer og det har ingen hensikt å spille det etter at elevene har skjønt poenget. Spillet har derimot enkle regler og får fram et viktig poeng om sammensatte hendelser. Dette kan skape et lærerikt øyeblikk og er derfor fint å bruke som en demonstrasjon. Spillet oppnår derimot ikke kriteriene og vil derfor ikke være et rikt matematisk spill.

6.3.5 Sammenligning av andre spill mot Borel

Som tidligere nevnt så er det mange av spillene som brukes i skolen som ikke kan kategoriseres som spill. Ofte ender disse «spillene» med å være matematikkoppgaver «forkledd» som et spill eller utforskende aktiviteter. I eksempelet med Spacemath, hvor elevene gjennomfører praktiske matematikkoppgaver satt i spillets kontekst, hender det at oppgavene bare er rene matematikkoppgaver. Videre lider de fleste av disse spillene av at enten evner eller flaks har for mye innvirkning på hvem som vinner. Dette kan best vises ved bingobrettspillet til Jackson et al. (2013), hvor det i første omgang er flaks som har størst innvirkning på hvem som vinner. Derimot når de skal lage egne brett er det evner som har størst innvirkning på hvem som vinner. Dette gjør at enten de sterke elevene ikke får utnyttet evnene sine når de spiller, eller at de svake elevene ikke har sjans til å vinne. Når dette er tilfellet kan ikke alle elevene få oppleve suksess, noe som er med på å svekke motivasjonen de har for faget (Bragg, 2003). Et annet problem spillene i skolen ofte har, er at matematikken ikke er sterkt knyttet til det underholdende momentet. Om elevene kan utforske, som i Spacemath, uten å måtte gjøre matematikk, tar dette vekk poenget med spill i undervisning. Når det underholdende momentet ikke er tilknyttet matematikken vil ikke spillet hjelpe elevene med å engasjere seg for matematikk, og læringsutbyttet vil også påvirkes. Borel skiller seg fra disse spillene, ved at matematikken og det underholdende momentet er sterkt knyttet til hverandre. Det er mulig å spille Borel uten å tenke over sannsynligheten for utfallene, men dette er etter vår erfaring sjeldent tilfellet. Matematikken er sterkt knyttet til det underholdende momentet og ønsker man å vinne i Borel, i det lange løp, kan man derfor ikke unngå å engasjere seg i matematikken. Borel stiller spørsmål om utfallet av et sannsynlighetsekspriment, og det er vanskelig å ikke ha en formening om hva dette utfallet kommer til å bli. Når man setter elever i grupper kan derfor uenighet oppstå, hvor elevene naturlig må argumentere for hvorfor de tror det de tror. Som nevnt tidligere i resultatdelen var vi overasket over hvor villige elevene var til å jobbe problemløsende. Ofte er det slik at elevene gir opp etter første forsøk. Det at elevene ikke gir opp her, men engasjerer seg i matematikk gjennom hele undervisningsøkten, kan også være en følge av at Borel legger opp til diskusjon. Borel skiller seg også fra disse spillene ved at det kan brukes flere ganger på samme klasse over en periode. Hverken «Det store hesteveddeløpet» eller Produktbingo gir mye nytte av å gjennomføres flere ganger, fordi de er utforskende aktiviteter som har som hensikt å skape et spesifikt lærerikt øyeblikk. Borel skiller seg også fra de andre spillene ved at det er lett å både lage og tilpasse oppgaver som passer spillets rammer. Dette gjør at man kan lage oppgaver til spesifikke temaer innenfor sannsynlighet ettersom man beveger seg gjennom pensum, og øke vanskelighetsgraden på oppgavene ettersom elevene forbedrer seg. På denne måten er det mulig å skape flere lærerike øyeblikk når man spiller Borel gjentatte ganger. Det at man enkelt kan lage oppgaver til Borel gjør det også mulig å bruke det som et verktøy for konsolidering.

7 Konklusjon

Vi skulle i denne masteroppgaven svare på forskningsspørsmålet: *Hvordan fungerer spillet Borel som et rammeverk for å undervise sannsynlighet i ungdomsskolen, og hvordan skiller Borel seg fra andre matematiske spill?* For å svare på dette designet vi et undervisningsopplegg med Borel og testet dette i to klasser på 9. trinn. Vi så også på tidligere spill brukt i forskning og sammenlignet disse med Borel. I tillegg utarbeidet vi fire kriterier som skulle beskrive hva et matematisk spill måtte oppfylle for å regnes som et rikt matematisk spill for bruk i ungdomsskolen. Disse kriteriene ble utarbeidet med bakgrunn i kriterier fra tidligere forskning på spill.

Borel utmerker seg som et godt spill opp mot samtlige av våre kriterier. I undervisningstimen vi gjennomførte opplevde vi at elevene virket engasjerte. Dette er også noe elevene gir utrykk for i intervjuet. Elevene jobber med oppgavene, uten at lærer trenger å korrigere hvor de har fokuset sitt. Elevene var altså stort sett selvgående i arbeidet med Borel. Dette er trolig både en følge av at elevene var engasjerte og at matematikken er veldig sentral i Borel. Det er mulig å plukke ut helt vanlige oppgaver i sannsynlighet og tilpasse dem til Borel sine rammer. Borel gir altså en unik mulighet til å ramme inn oppgaver i en spillsituasjon. En god balanse mellom evne og flaks kan i Borel sikres ved å velge oppgaver. Dette krever derimot at en er bevisst på å balansere sannsynligheten for ja og nei når man velger oppgaver. I denne forbindelse er det også fint å ha kjennskap til Kelly-kriteriet, som forteller noe om hvor mye elevene objektivt sett oppfordres til å satse. Borel er tilpasningsvennlig hovedsakelig på grunn av at den som tar i bruk spillet kan velge oppgavene selv. Vi erfarte også at det var enkelt å lage oppgavene til undervisningsøktene. Til sammen gjør dette Borel meget godt egnet til å brukes flere ganger med samme klasse over en lengre periode og med ulike sannsynlighetstemaer. Dette er fint da det tar tid å lære bort et nytt spill. Ved å selv kunne velge oppgaver har man også større mulighet for å tilpasse oppgavene til elevenes nivå. Vi sammenlignet Borel med fire andre spill ved hjelp av de fire kriteriene vi definerte. I denne sammenligningen skilte Borel seg ut. De andre spillene hadde alle et eller flere større problemer knyttet til våre kriterier.

Undervisningen vi designet fungerte ikke så bra for å introdusere elevene for Borel samtidig som de skulle jobbe problemløsende. Dette ble overveldende for mange, noe som påvirket diskusjonene og videre også dataene i denne oppgaven. Bare noen få av elevene skjønte hva komplementær sannsynlighet gikk ut på. Til tross for dette fikk vi likevel en god økt hvor elevene var ivrige til å dele både ideer og meninger rundt oppgavene gjennom hele undervisningsøkten, og det var ingen av gruppene som ga opp. Hadde vi hatt kjennskap til klassen kunne vi ha tilpasset oppgavene bedre og elevene ville fått mer ut av undervisningsøkten. Det at undervisningsopplegget ikke gikk som planlagt og at vi fortsatt fikk en god undervisningsøkt, tyder på at Borel er et robust undervisningsverktøy. En utfordring med mange spill er at de raskt blir kjedelige når man setter de i en undervisningssituasjon. Dette var noe som ikke var tilfellet for undervisningen med Borel. Elevene syntes det var gøy å spille Borel og ville gjerne ha en ny økt med dette. Det at elevene fikk jobbe med oppgavene i grupper var også noe som fungerte bra. Det ble flere gode diskusjoner, elevene utrykte sine matematiske idéer og det ble mulighet til å identifisere misforståelser, både mens elevene spilte og i arbeidet med oppgavene. Selv om ikke alt ved undervisningen gikk som ønsket mener vi at Borel fungerer godt som et rammeverk for å undervise sannsynlighet på ungdomskolen. Vi vil også poengtere at spill ikke burde brukes uten andre pedagogiske praksiser og fungerer best når dette kombineres, siden veldig få hadde forstått hva komplementær sannsynlighet gikk ut på etter spillingen. Det er viktig at spill brukes på en slik måte at læreren involveres underveis og kan forsikre seg om at elevene forstår hva de jobber med, og at de utvikler seg faglig.

Vi ønsker å reklamere for Borel som et undervisningsverktøy, i håp om at det kan bli tatt i bruk i skolen av lærere som ønsker å finne et egnet spill for undervisning om sannsynlighet. Fra egen erfaring er dette et vanskelig tema som kan by på utfordringer hos mange elever. Vår forskning åpner likevel opp for mange nye spørsmål, og i videre forskning vil det blant annet være spesielt interessant å se hvordan Borel fungerer ved gjentatt bruk over en lengre periode. I tillegg burde det testes ulike undervisningsopplegg som tar i bruk Borel. Derfor ville det være interessant i videre forskning å se på andre undervisningsopplegg med Borel som fokuserer på enten problemløsning eller konsolidering og hvordan man lager oppgaver som treffer de ulike måtene å bruke Borel på. Det gjenstår også å teste hvorvidt bruken av Borel i større grad fremmer læring.

8 Litteraturliste

Bartolini, M. G. & Martignone, F. (2020). Manipulatives in Mathematics Education. 487-494. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_93

Bragg, L. (2003). Children's perspectives on mathematics and game playing. Mathematics education research: innovation, networking, opportunity: proceedings of the 26th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, held at Deakin University,

Bragg, L. A. (2012). Testing the effectiveness of mathematical games as a pedagogical tool for children's learning. *International journal of science and mathematics education*, *10*(6), 1445-1467. https://doi.org/10.1007/s10763-012-9349-9

Dalland, C. & Hølland, S. (2021). Analyse og kategorisering av videodata. I E. Andersson-Bakken, C. Dalland, E. Andersson-Bakken & C. Dalland (Red.), *Metoder i klasseromsforskning : forskningsdesign, datainnsamling og analyse* (s. 364 sider). Universitetsforlaget.

Datatilsynet. (2022, 25. april). *Samtykke fra mindreårige*. https://www.datatilsynet.no/personvern-pa-ulike-omrader/skole-barn-unge/samtykkje-fra-mindrearige/

Davidsen, H. S. & von Zernichow, A. G. (2010). Ressurshefte til aktiviteter under arrangementet Abeldager i matematikk på Universitetet i Agder 27. og 28. mai 2010. 9. https://www.matematikk.org/artikkel.html?tid=89956&within_tid=66124

English, L. D. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 121-141.

Ernest, P. (1986). Games. A Rationale for Their Use in the Teaching of Mathematics in School. *Mathematics in school*, *15*(1), 2-5.

Farber, M. (2015). Chapter 2. What are games? I *Gamify your classroom : a field guide to game-based learning* (Bd. 77, s. 23-37) (New literacies and digital epistemologies). Peter Lang.

Fiorella, L., Kuhlmann, S. & Vogel-Walcutt, J. J. (2019). Effects of Playing an Educational Math Game That Incorporates Learning by Teaching. *Journal of educational computing research*, *57*(6), 1495-1512. https://doi.org/10.1177/0735633118797133

Gal, I. (2005). Towards "Probability Literacy" for All Citizens: Building Blocks and Instructional Dilemmas. I J. Graham A. (Red.), *Exploring Probability in School : Challenges for Teaching and Learning* (1st 2005. utg., Bd. 40, s. s.39-64). Springer US : Imprint: Springer.

Gleiss, M. S. & Sæther, E. (2021). Metodekapitlet: Beskrive, begrunne og reflektere over stegene i forskningsprosessen. I E. Sæther & M. S. Gleiss (Red.), *Forskningsmetode for lærerstudenter: å utvikle ny kunnskap i forskning og praksis* (1. utgave. utg., s. 191-209). Cappelen Damm akademisk.

Gough, J. (1999). Playing mathematical games: When is a game not a game? *Australian primary mathematics classroom*, *4*(2), 12-15.

Handeland, A. E. (2021). Masteroppgave om misoppfatninger innenfor sannsynlighet - En vurdering av et spill som diagnostisk verktøy. I.

Hannula, M. S., Di Martino, P., Pantziara, M., Zhang, Q., Morselli, F., Heyd-Metzuyanim, E., Lutovac, S., Kaasila, R., Middleton, J. A., Jansen, A. & Goldin, G. A. (2016). *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education : An Overview of the Field and Future Directions* (1st 2016. utg.). Springer International Publishing : Imprint: Springer.

Hunt, A. W., Nipper, K. L. & Nash, L. E. (2011). Virtual vs. Concrete Manipulatives in Mathematics Teacher Education: Is One Type More Effective than the Other? *Current issues in middle level education*, *16*(2), 1.

Jackson, C., Taylor, C. & Buchheister, K. (2013). Bingo! Select Games for Mathematical Thinking. *Mathematics teaching in the middle school*, *18*(7), 424-429. https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.18.7.0424

Kjærnsli, M., Nortvedt, G. A. & Jensen, F. (2014). Norske elevers kompetanse i problemløsing i PISA 2012. *Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo*.

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. . https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/om-overordnet-del/?kode=mat01-05&lang=nob

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob

Kunnskapsdepartementet. (2020). *Læreplan i matematikk for samfunnsfag (matematikk S) (MAT04-02)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat04-02?lang=nob

Kaarstein, H., Radišić, J., Lehre, A.-C. W., Nilsen, T. & Bergem, O. K. (2020). TIMSS 2019-Kortrapport.

Lach, T. M. & Sakshaug, L. E. (2005). LET'S DO MATH: WANNA PLAY? *Mathematics teaching in the middle school*, *11*(4), 172-176. https://doi.org/10.5951/MTMS.11.4.0172

Lee, C. S. (2006). *Language for Learning Mathematics : Assessment for Learning in Practice*. Open University Press. https://www.uio.no/studier/emner/uv/ils/PROF3025/v17/language-for-learning-mathematics-%28osborne-oracle-press%29.pdf

Leenheer, R., Geerts, D. & Vanattenhoven, J. (2015, 2015). Learning Lessons for Second Screen from Board Games.*TVX '15* ACM International Conference on Interactive Experiences for TV and Online Video,

Matematikk.org. (2010, 1. juni). *Hesteveddeløp med mer*. Matematikk.org. Hentet 09. mai 2023 fra https://www.matematikk.org/artikkel.html?tid=89956&within_tid=66124

Mellin-Olsen, S. (1981). Instrumentalism as an Educational Concept. *Educational studies in mathematics*, *12*(3), 351-367. https://doi.org/10.1007/BF00311065

Mwei, P. K. (2017). Problem Solving: How Do In-Service Secondary School Teachers of Mathematics Make Sense of a Non-Routine Problem Context? *International Journal of Research in Education and Science*, *3*(1), 31-41.

Núñez Castellar, E., Van Looy, J., Szmalec, A. & de Marez, L. (2014). Improving arithmetic skills through gameplay: Assessment of the effectiveness of an educational game in terms of cognitive and affective learning outcomes. *Information sciences*, *264*, 19-31. https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.09.030

Nührenbörger, M. & Steinbring, H. (2008). Manipulatives as tools in teacher education. I *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2* (s. 157-181). Brill Sense.

Onslow, B. (1990). Overcoming conceptual obstacles: The qualified use of a game. *School Science and Mathematics*, *90*(7), 581-592.

Polaki, M. V. (2000). *Using instruction to trace Basotho elementary students' growth in probabilistic thinking*. Illinois State University.

Polaki, M. V. (2005). Dealing with compound events. I G. A. Jones (Red.), *Exploring Probability in School : Challenges for Teaching and Learning* (1st 2005. utg., Bd. 40, s. s.191-213). Springer US : Imprint: Springer.

Polya, G. (1945). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press. https://doi.org/10.2307/j.ctvc773pk

Rincon-Flores, E. G., Mena, J. & López-Camacho, E. (2022). Gamification as a Teaching Method to Improve Performance and Motivation in Tertiary Education during COVID-19: A Research Study from Mexico. *Education sciences*, *12*(1), 1-14. https://doi.org/10.3390/educsci12010049

Russo, J., Russo, T. & Bragg, L. A. (2018). Five principles of educationally rich mathematical games. *Australian primary mathematics classroom*, *23*(3), 30-34. https://doi.org/10.3316/aeipt.223103

Russo, J., Russo, T. & Bragg, L. A. (2021). Why That Game? Factors Primary School Teachers Consider When Selecting Which Games to Play in Their Mathematics Classrooms. *Mathematics Education Research Group of Australasia*, 337-344.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics (Reprint). *Journal of education (Boston, Mass.)*, *196*(2), 1-38. https://doi.org/10.1177/002205741619600202

Skaalvik, E. M. & Skaalvik, S. (2018). Motivasjon. I *Skolen som læringsarena* (s. 137 - 194). Universitetsforlaget.

Sletnes, K. B. (2019, 19. august). *Naturvitenskap*. Store norske leksikon. Hentet 24.april 2023 fra https://snl.no/naturvitenskap

Taraldsen, G. (1997). Litt historikk og mengdeteori. I *Grunnkurs i statistikk og sannsynlighetsteori* (s. 11-15). Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet.

Teigen, K. H. (2021, 9. juli). *heuristikk*. Store norske leksikon. Hentet 31. mars 2023 fra https://snl.no/heuristikk

Turgut, S. & Temur, Ö. D. (2017). The effect of game-assisted mathematics education on academic achievement in Turkey: A meta-analysis study. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *10*(2), 195-206.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1974). Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases: Biases in judgments reveal some heuristics of thinking under uncertainty. *science*, *185*(4157), 1124-1131.

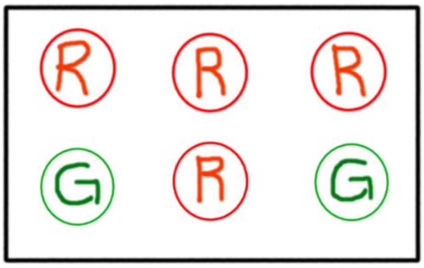
Wikepedia. (2023a, 9. april). *Kelly criterion*. Wikepedia.org. Hentet 15. april 2023 fra https://en.wikipedia.org/wiki/Kelly_criterion

Wikepedia. (2023b, 10. mai). *Monty Hall problem*. Wikepedia.org. Hentet 20. mai 2023 fra https://en.wikipedia.org/wiki/Kelly_criterion

9 Vedlegg

9.1 Vedlegg 1

Boreloppgaver:



Oppgave 1: Vi trekker to baller. Vil de være samme farge?

a) Med tilbakelegging

b) Uten tilbakelegging

Oppgave 2: Du trekker tre kort fra en kortstokk. Er minst to av de samme sort? (med tilbakelegging)

Oppgave 3: Du kaster to D6 terninger to ganger: Får du to like eller syv på minst et av kastene?

Oppgave 4: Du trekker seks kort fra kortstokk. Er minst to av dem samme verdi? (med tilbakelegging)

Oppgave 5: Du kaster to D6 terninger fem ganger. Får du to like på ett kast minst en gang?

9.2 Vedlegg 2

Intervju spørsmål

1. Hvordan vil du beskrive ditt forhold til matematikk?
2. Synes du sannsynlighet er utfordrende/vanskelig?
3. Hvordan synes du denne timen med Borel var sammenlignet med de tidligere timene dere har hatt om sannsynlighet?
4. Hvordan går du frem med arbeidet når du møter på et nytt og ukjent problem i matematikk?
   - Endrer dette seg når du jobber i grupper?
5. Hva tenkte du i første omgang med Borel?
6. Hva diskuterte dere i gruppene? / Hvordan foregikk diskusjonen?
   - Hva ble sagt? (matematisk, magefølelse)?
   - Ble dere enige?
   - Fikk dere mye ut av tenkepausen mellom de to rundene med Borel?
7. Hvordan var arbeidet med oppgavene etter spillingen?
8. Er det noe du synes var positivt ved denne undervisningsøkten?
   - I så fall hva?
   - Var det noen deler av undervisningen du likte spesielt godt? … Hvorfor?
9. Er det noe du synes var negativt ved denne undervisningsøkten?
   - I så fall hva?
   - Var det noen deler av undervisningen du mislikte? …. Hvorfor?
10. Hva synes du om bruken av spill i matematikkundervisning?
11. Har dere hatt spill som en del av undervisningen deres i matematikk tidligere eller var dette første gangen?
    - I så fall kan du kort beskrive det spillet?
    - Hvordan vil du sammenligne det spillet med Borel?
12. Kunne du tenke deg å ha flere undervisningsøkter med spill?
    - Hvorfor?

9.3 Vedlegg 3

Vil du delta i forskningsprosjektet

Utforskende spill i matematikkundervisning

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å lage oppgaver med fokus på problemløsning eller utforskning ved hjelp av spillet Borel som ramme. Det er også et mål å få fram elevens meninger om oppgavene og bruk av Borel som undervisningsmetode.. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

(Borel er et spill om sannsynlighet hvor man vedder ja eller nei svar på utfallet av eksperimenter relatert til sannsynlighetsregning)

Hovedmålet med prosjektet vårt er å lage oppgaver med fokus på problemløsning eller utforskning ved hjelp av spillet Borel som ramme. Vi ønsker at opplegget vårt skal kunne tas i bruk av andre og at oppgavene lagres i en online database hvor de er tilgjengelig for andre som ønsker å bruke eller videreutvikle oppgavene til sitt formål. Vi er også interessert i elevens meninger om oppgavene og bruk av Borel som undervisningsmetode. Vi ønsker også å vise at spillet vi har valgt (Borel) skiller seg ut fra andre matematiske spill.

Problemstillingen vi vil svare på er: Hvordan opplever elever bruken av matematisk spill i møte med problemløsning og utforskende arbeid i tema sannsynlighet på 9. trinn.

Dette er et masterprosjekt. Det er mulig at vi til slutt lager en artikkel for et lærertidsskrift om oppgaven og opplegget.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet i Oslo, instituttet for lærerutdanning og skoleforskning er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Du får spørsmål fordi din sønn/datter går i 9. klasse på ***** Skole som er med i dette prosjektet.

Hva innebærer det for deg å delta?

- Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det å bli observert med video i en undervisningstime i matematikk.
- Det er også mulig at vi spør om du vil delta i et intervju. Her vil vi vise videoklipp fra timen og spørre spørsmål rundt elevens tanker rundt disse klippene. Det vil bli tatt videoopptak av intervjuet. Lengden på intervjuet vil variere, men vil ta rundt 30 til 60 min.
- Hvis dere ønsker å se opplegget på forhånd, ta kontakt med oss.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Denne timen som blir gjennomført vil være en del av normal undervisning, men det vil være mulig å få et alternativt opplegg, eller ta del i en annen time som gjennomgår det samme. Ditt valg vil ikke påvirke din behandling av din lærer eller skole.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Videoklipp blir lagret på Universitetets servere, og vil bare være tilgjengelige for databehandlere til prosjektet avsluttes. Dette innebærer mastergradsstudentene; Simen Biribakken og Pål Fredrik Mørch-Reiersen, og vår veileder. I selve masteroppgaven og transkriberingen vil all persondata være anonymisert.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?
Prosjektet vil etter planen avsluttes 18.06.2024. Etter prosjektslutt vil datamaterialet med dine personopplysninger anonymiseres. Dette inkluderer sletting av video-opptak.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Oslo, instituttet for lærerutdanning og skoleforskning har Personverntjenester vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Oslo, veileder Helmer Aslaksen. Mobil: +4746234554 E-post: helmer.aslaksen@ils.uio.no
- Universitetet i Oslo, Masterstudentene Simen Biribakken og Pål Fredrik Mørch-Reiersen. Henholdsvis, Mobil: +4748125693, E-post: simenbi@student.uio.uv.no, Mobil: +4795496763, E-post: paalfredrikmorchreiersen@gmail.com
- Vårt personvernombud: Roger Markgraf-Bye ved UIO som kan nås på personvernombud@uio.no

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen

Simen Biribakken og Pål Fredrik Mørch-Reiersen

Helmer Aslaksen
(Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *[sett inn tittel]*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i videoobservasjon i klasseromssetting
- ☐ at videoklipp fra undervisningen vises i andre elevers intervjuer
- ☐ å delta i intervju

Jeg samtykker til at min sønn/datters opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av foresatte til prosjektdeltaker, dato)

9.4 Vedlegg 4

Vurdering av behandling av personopplysninger

01.08.2022

Referansenummer

598494

Vurderingstype

Standard

Dato

01.08.2022

Prosjekttittel

Utforskende spill i matematikkundervisning

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Oslo / Det utdanningsvitenskapelige fakultet / Institutt for lærerutdanning og skoleforskning

Prosjektansvarlig

Helmer Aslaksen

Student

Pål Fredrik Mørch-Reiersen

Prosjektperiode

18.07.2022 - 18.06.2024

Kategorier personopplysninger

- Alminnelige

Lovlig grunnlag

- Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 18.06.2024.

Meldeskjema

Kommentar

OM VURDERINGEN
Personverntjenester har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket.

Personverntjenester har nå vurdert den planlagte behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at behandlingen er lovlig, hvis den gjennomføres slik den er beskrevet i meldeskjemaet med dialog og vedlegg.
VIKTIG INFORMASJON TIL DEG Du må lagre, sende og sikre dataene i tråd med retningslinjene til din institusjon. Dette betyr at du må bruke leverandører for spørreskjema, skylagring, videosamtale o.l. som institusjonen din har avtale med. Vi gir generelle råd rundt dette, men det er institusjonens egne retningslinjer for informasjonssikkerhet som gjelder.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET Prosjektet vil behandle alminnelige personopplysninger frem til 18.06.2024. LOVLIG GRUNNLAG Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrertes foresatte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 nr. 11 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse, som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. For alminnelige personopplysninger vil lovlig grunnlag for behandlingen være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 a.

PERSONVERNPRINSIPPER Personverntjenester vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen:
• om lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte og deres foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
• formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål • dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
• lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet.

DE REGISTRERTES RETTIGHETER Vi vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13. Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20). Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32). For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må prosjektansvarlig følge interne retningslinjer/rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilken type endringer det er nødvendig å melde: https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema Du må vente på svar fra oss før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET Vi vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.
Lykke til med prosjektet!