

Masteroppgave

Brownske bevegelser på fraktale strukturer

Trym Clementz

Matematikk, Lektorprogrammet

30 studiepoeng

Matematisk institutt

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Våren 2023



Trym Clementz

Brownske bevegelser på fraktale
strukturer

Veileder:

Tom Lindstrøm

Sammendrag

Denne oppgaven kombinerer to ulike felt fra matematikken: fraktaler og Brownske bevegelser. Målet er å konstruere Brownske bevegelser på fraktaler, men før det vil vi introdusere de to temaene hver for seg. Først vil fraktaler introduseres. Der presenteres både hvordan man angir en dimensjon til fraktaler, og hvordan fraktaler kan konstrueres. Deretter tar vi for oss Brownske bevegelser i både én og to dimensjoner. Til slutt kombinerer vi forståelsen fra begge temaene til å konstruere Brownske bevegelser på fraktaler, der vi møter to hovedutfordringer.

Den ene utfordringen er å bestemme det vi kaller *overgangssannsynlighetene*. Disse må bestemmes slik at alle vandringene vi konstruerer treffer de samme punktene med like stor sannsynlighet. Den andre utfordringen er å bestemme *tidsskaleringsfaktoren*. Denne benyttes på de ulike vandringene, slik at alle bruker like lang tid. Oppgavens hoveddel består i å beregne overgangssannsynlighetene og tidsskaleringsfaktoren på diverse fraktaler.

Forord

Først vil jeg takke min veileder Tom Lindstrøm. Du har gitt meg en spennende oppgave som har introdusert meg for to temaer av matematikken jeg har vært lite borti tidligere. Arbeidet med oppgaven har vært utfordrende, men det har også vært svært givende å anvende mine kunnskaper og ferdigheter på nye områder. Takk også for god og trygg veiledning gjennom hele våren. Jeg vil også rette en takk til venner, familie og medstudenter for støtte gjennom dette semesteret. Spesielt takk til min kjære samboer Julie.

Trym Clementz
Oslo, 13.05.2023

Innhold

Sammendrag	1
Forord	2
1 Fraktaler	4
1.1 Introduksjon	4
1.2 Eksempler	5
1.2.1 Sierpiński-trekanten	5
1.2.2 Koch-kurven	5
1.2.3 Pentagon	6
1.3 Dimensjonen til fraktaler	8
1.3.1 Selv-similær dimensjon	9
1.4 Generere fraktaler	15
1.4.1 IFS	15
1.4.2 Sierpiński-trekanten som attraktor	19
1.4.3 Hausdorff-metrikken	21
2 Brownske bevegelser	25
2.1 Brownske bevegelser i én dimensjon	25
2.2 Brownske bevegelser i to dimensjoner	30
3 Brownske bevegelser på fraktaler	37
3.1 Konstruksjon av Brownske bevegelser	37
3.2 Sierpiński-trekanten	44
3.3 Vicsek-fraktalen	47
3.4 Pentagon	55
3.5 Usymmetrisk Sierpiński	65
4 Avslutning	71
5 Bibliografi	72

1 Fraktaler

1.1 Introduksjon

Fraktaler er geometriske objekter som kjennetegnes ved deres store kompleksitet og høye detaljnivå. I motsetning til andre geometriske figurer har fraktaler et detaljnivå på flere skalaer. Om du zoomer inn på hjørnet av en firkant så finner du ikke noe mer, det er kun det samme hjørnet. Men når vi zoomer inn på fraktaler dukker det opp nye strukturer og detaljer, og de fortsetter å dukke opp samme hvor langt inn vi måtte zoome. I matematikken kan vi lage slike figurer ved å gjenta en prosess om og om igjen i det uendelige. Men fraktaler har også sin plass i naturen. Systemer av blodårer og nervebaner ser ut til å gjenta seg på flere skalaer. Strukturen til et tre gjentar seg fra stammen til grenene, og fra grenene til de mindre grenene som sitter festet på dem. Kystlinjer har også en slags fraktal struktur; om vi ser på Norges kyst fra universet ser den glatt ut. Zoomer vi litt inn ser vi at det er mange fjorder som stikker inn i landet. Zoomer vi inn på en enkelt fjord har den ulike fjordarmer som sprer seg igjen. Så på samme måte som matematiske fraktaler finnes det objekter i naturen som viser et detaljnivå på flere skalaer; når vi zoomer inn oppdager vi nye detaljer.

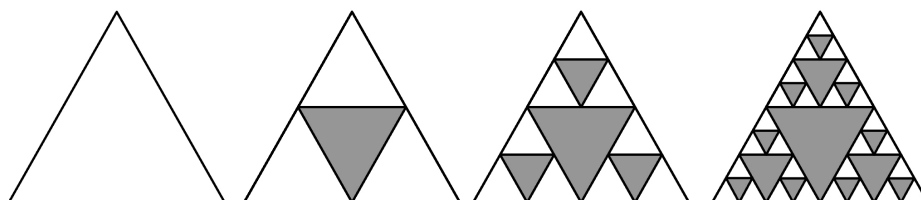
Men i matematikken krever vi at slike detaljer skal fortsette å dukke opp i det uendelige, samme hvor langt inn vi zoomer. Grunnet de fysiske lovene forstår vi at dette ikke kan gjelde fraktalene i naturen. Før eller siden kommer vi ned på molekylært nivå og har vanskelig for å si at det dukker opp nye detaljer. I siste instans er vi i hvert fall begrenset av Planck-lengden. Av den grunn kan vi si at dette ikke finnes fraktaler i naturen, hvert fall ikke «perfekte fraktaler». Noen vil derfor si at å studere matematiske fraktaler og deres egenskaper ikke har noen nytteverdi utenfor matematikken. Det er en påstand som lett kan motbevise anekdotisk ved å se på andre matematiske konstruksjoner vi ikke finner i naturen. I naturen finnes det ingen perfekte sirkler, ei heller perfekte rette linjer. Likevel er det, forhåpentligvis, ingen i denne verden som vil hevde at sirkler og rette linjer er konsepter som ikke har noen anvendelse og praktisk betydning utenfor matematikken. På samme måte kan en forståelse av de matematiske fraktalene ha stor betydning for en rekke fenomener og strukturer i naturen, selv om det ikke finnes «perfekte fraktaler» i verden vi lever i.

Vi skal i denne oppgaven fokusere på det som kalles selvsimilære fraktaler. Det er objekter der det samme mønsteret reproducerer seg på nytt og på nytt i mindre og mindre skala. Vi skal etter hvert i dette kapitlet se på hvordan vi kan angi en dimensjon til slike strukturer og deretter se hvordan de konstrueres. Men før det trenger vi en bedre intuisjon og forståelse av hva disse objektene er. Den beste måten å opparbeide en slik forståelse på er gjennom noen eksempler.

1.2 Eksempler

1.2.1 Sierpiński-trekanten

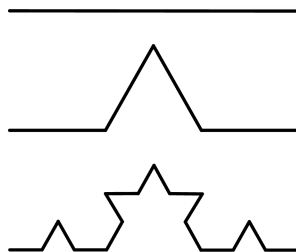
Et svært godt kjent eksempel på en fraktal er Sierpiński-trekanten (også kalt Sierpiński Gasket), navngitt etter den polske matematikeren Waclaw Sierpiński (1882-1969) som først konstruerte den. For å konstruere denne fraktalen starter man med en likesidet trekant slik som den helt til venstre i Figur 1.2.1. Deretter fjerner man den grå trekanten i midten slik vi ser i bilde to fra venstre. Man har da fått tre nye likesidede trekantene, men som er mindre enn den originale. For hver av disse tre trekantene gjør vi den samme prosessen på nytt som gir oss ni likesidede trekantene og deretter de 27 likesidede trekantene vi kan se til høyre i Figur 1.2.1. Denne prosessen gjentas så på nytt og på nytt for hver trekant som oppstår. Det er grensen av denne prosessen når vi fortsetter den i det uendelige som vi kaller for Sierpiński-trekanten. Det betyr at vi ikke kan illustrere selve fraktalen (i hvert fall ikke i et stasjonært format slik som PDF), men kun noen av stegene på veien.



Figur 1.2.1: Konstruksjon av Sierpiński-trekanten

1.2.2 Koch-kurven

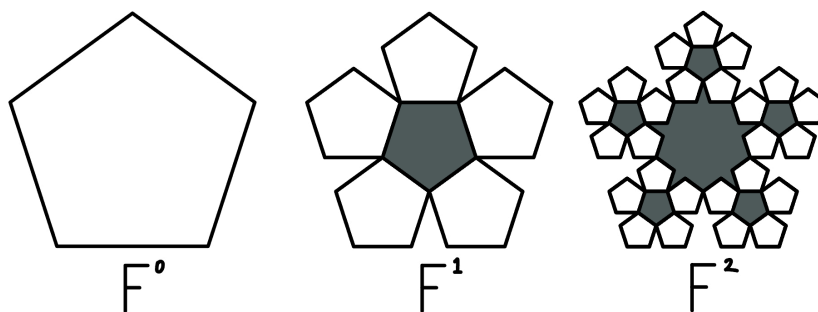
Koch-kurven, oppkalt etter den svenske matematikeren Helge von Koch (1870-1924), er en annen velkjent fraktal. Den tar utgangspunkt i noe enda enklere enn Sierpiński-trekanten, nemlig en rett linje av lengde l , som øverst i Figur 1.2.2. Denne linjen erstattes så av fire rette linjer, hver av lengde $\frac{1}{3}l$, som plasseres slik som vist i den midtre figuren i Figur 1.2.2. Denne prosessen gjentas så på hver av disse fire linjene, slik at vi får 16 linjer av lengde $\frac{1}{9}l$ plassert som vist i den nederste figuren. Dette gjentas så på nytt og på nytt for hver linje, og det er grensen av denne prosessen vi kaller Koch-kurven.



Figur 1.2.2: Konstruksjon av Koch-kurven

1.2.3 Pentagon

Før vi går videre tar vi ett eksempel til på en velkjent fraktal, der vi også introduserer litt relevant navnsetting som blir viktig senere. Femkantfraktalen, også kjent som Sierpiński Pentagon, konstrueres på en ganske lik måte som Sierpiński-trekanten. Her starter vi med en femkant, som så erstattes av fem mindre femkanter, slik som vist i figur 1.2.3. Den midtre grå femkanten er altså ikke med. Prosessen gjentas så på nytt på hver av de fem mindre femkantene, som gir oss de 25 små femkantene til høyre i figur 1.2.3.



Figur 1.2.3: Konstruksjon av femkantfraktalen

Den opprinnelige femkanten kaller vi for F^0 . Første iterasjon, dvs de fem små femkantene, kaller vi for F^1 . Andre iterasjon, altså de 25 små femkantene, kaller vi for F^2 . Siden selve fraktalen er den figuren vi får når denne prosessen gjentas i det uendelige, kan vi definere fraktalen F som

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n$$

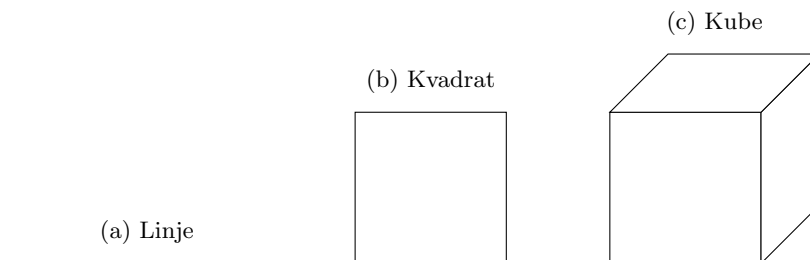
Det samme vil gjelde for de andre fraktalene vi arbeider med. Vi vil senere komme tilbake til hva dette grensebegrepet egentlig betyr, og hvordan det påvirker

bevegelsene vi skal konstruere. Men for nå nøyer vi oss med tanken på en fraktal som figuren som oppstår når vi fortsetter å gjenta en gitt prosess i det uendelige.

1.3 Dimensjonen til fraktaler

De fleste kjenner til ordet *dimensjon* fra dagligtalen, og har en klar forståelse av forskjellen på noe 2-dimensjonalt og 3-dimensjonalt. For å eksemplifisere de ulike dimensjonene bruker vi gjerne enkle geometriske figurer. En linje brer seg bare utover i én retning, den har bare lengde, og er derfor 1-dimensjonal. Et kvadrat har både lengde og bredde. Det brer seg altså utover i to retninger og er 2-dimensjonalt. En kube har både lengde, bredde og høyde. Den brer seg i tre retninger og er derfor 3-dimensjonal. Litt mindre kjent for Ola Nordmann, men velkjent for enhver matematiker, er at et punkt har dimensjon 0. Dette forstås intuitivt ved at et punkt ikke har noen utstrekning. Misforståelsene oppstår siden enhver representasjon av et punkt som en prikk på et ark eller en skjerm faktisk har et areal. Dette er tilsvarende hvordan enhver billedliggjøring av en linje har en liten tykkelse og dermed også et areal. Selv om linjen i seg selv ikke har noen tykkelse og heller ikke noe areal. Sett vekk fra dette har de fleste en klar forståelse av hva slags dimensjon andre geometriske figurer har. Sirkler og trekanter tegner vi i planet og de er derfor 2-dimensjonale, mens en kule eller et prisme bor i rommet og er derfor 3-dimensjonale. Generelt har altså polygoner dimensjon 2, mens polyedre har dimensjon 3.

Figur 1.3.1



På samme måte som en sirkel bor eller tegnes i planet så gjelder det forsåvidt også våre eksempler på fraktaler; både Koch-kurven, Sierpiński-trekanten og femkantfraktalen tegnes i planet. Men de skiller seg likevel fra de enkle geometriske figurene vi kjenner til. Hvis vi ser på Koch-kurven så starter den med et linjestykke av lengde l . Dette deles så i deler av lengde $\frac{l}{3}$ slik at den totale lengden etter én iterasjon er $4 \cdot \frac{l}{3} = \frac{4}{3}l$. Prosessen gjentas så igjen for hvert linjestykke på nytt og på nytt slik at vi etter n iterasjoner har 4^n linjestykker, hver av lengde $(\frac{l}{3})^n$. Dette gir da en total lengde på $(\frac{4}{3})^n l$. Selve Koch-kurven er den figuren vi får når vi lar antall iterasjoner gå mot uendelig. Dermed ser vi at Koch-kurven har uendelig lengde siden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

Lengde er derfor ikke noe godt mål å bruke på denne figuren, og det blir unaturlig å omtale den som 1-dimensjonal. Samtidig består Koch-kurven kun av linjer, og har dermed ikke noe areal. Den er derfor heller ikke 2-dimensjonal. Koch-kurven har altså uendelig lengde, men null areal. Om vi skulle angitt en dimensjon til Koch-kurven burde den sånn sett være et sted mellom 1 og 2. Vi skal i denne seksjonen se hvordan vi kan få en forståelse av at figurer kan ha dimensjoner annet enn de vante heltallene $0, 1, 2, 3, \dots$ og viser blant annet at Koch-kurven er omtrent 1.262 dimensjonal.

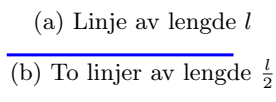
1.3.1 Selv-similær dimensjon

For å få en forståelse av hvordan noe kan ha dimensjon annet enn heltallene skal vi først ta for oss de kjente tilfellene der dimensjonen nettopp er et heltall. Hva vil det i det hele tatt si at noe er 2- eller 3-dimensjonalt? Alle figurene vi har sett på så langt har en form for selvsimilaritet. En linje kan deles opp i to linjer som er identiske til den originale linjen, bare mindre. Et kvadrat kan deles opp i fire mindre kopier av seg selv, og en kube kan deles opp i åtte små kopier. For en linje bruker vi lengde som mål, for kvadratet benytter vi areal, mens for kuben benytter vi volum. Men når vi skal generalisere er det en fordel å ha ett begrep som gjelder for alle, og for dette vil jeg bruke *masse*. For å få en intuitiv forståelse kan man tenke på linjen som en tynn metalltråd, kvadratet som en tynn metallplate og kuben som en solid metallboks.

Det er åpenbart at massen til hvert objekt vil variere avhengig av lengden l . Jo lengre tråden er desto mer masse har den. Jo lengre sidene i metallplaten er jo større er platen og den har dermed mer masse. Tilsvarende for sidene i kuben. Men hvor mye massen endrer seg når vi justerer lengden er ulikt, og det er dette som vil bestemme hvilken dimensjon objektet har.

Linjen kan vi dele opp i 2 kopier av seg selv, begge med halvparten av den opprinnelige lengden. Og siden de to kopiene til sammen utgjør den originale linjen vil hver av de ha halvparten av massen.

Figur 1.3.2: En linje kan deles i to mindre kopier av seg selv

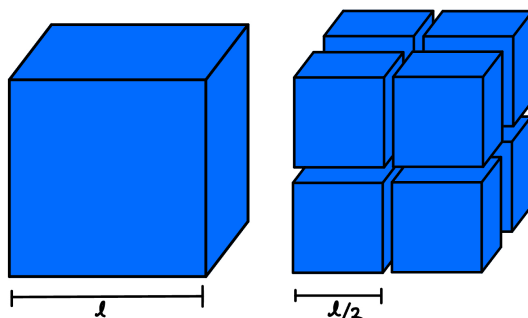


Et kvadrat kan vi dele i 4 mindre kopier med sidelengder $\frac{l}{2}$. Men massen til disse vil da bli kun $\frac{1}{4}$ av massen til det store kvadratet siden de 4 kopiene til sammen utgjør det originale kvadratet.



Figur 1.3.3: Kvadratet kan deles i 4 mindre kopier

For kubene kan vi lage 8 mindre kopier med sidelengder $\frac{l}{2}$. Hver av disse vil kun ha $\frac{1}{8}$ av massen til den store kubene siden de 8 mindre kopier til sammen utgjør den store kubene.



Figur 1.3.4: Kubene kan deles i 8 mindre kopier

La oss si at $M(l)$ uttrykker hvor stor massen er avhengig av lengden l . Om vi setter den opprinnelige massen lik 1 i hvert tilfelle så ser vi at $M(\frac{l}{2})$ blir ulik avhengig av hvilken figur vi jobber med:

- For linjen får vi to kopier så $M(\frac{l}{2}) = \frac{1}{2}$.
- For kvadratet får vi fire mindre kopier og dermed er $M(\frac{l}{2}) = \frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$.
- For kubene ser vi at de åtte mindre kopiene utgjør den opprinnelige kubene og dermed er $M(\frac{l}{2}) = \frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^3$.

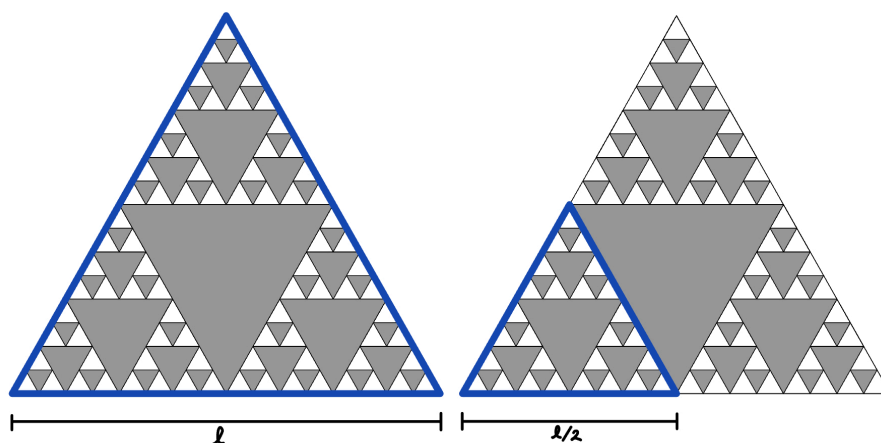
Denne forskjellen i hvordan massen skales for ulike figurer er kjernen i hvordan vi definerer dimensjonen til et objekt. Når lengden skales med $\frac{1}{2}$ så skales massen til objektet med $(\frac{1}{2})^D$, der D er dimensjonen til objektet. Det er slik en kube er tredimensjonal: når vi halverer lengden får vi kun $\frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^3$ av massen.

Dette gjelder tilsvarende for andre tredimensjonale objekter vi kjenner til, f. eks en kule. Massen til en kule er gitt ved volumet multiplisert med massetettheten. Om vi setter massetettheten lik 1 får vi at $M(l) = \frac{4}{3}\pi \cdot l^3$ der l er radiusen til kulen. Om vi halverer radiusen(lengden) ser vi at vi får kun $\frac{1}{8}$ av massen:

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{l^3}{2^3} = \frac{1}{2^3} \frac{4}{3}\pi \cdot l^3 = \frac{1}{8}M(l)$$

Generelt kan vi si at om vi skalerer lengden av et D-dimensjonalt objekt med en faktor s så vil massen skaleres med s^D .

Vi er nå klare til å angi en dimensjon til Sierpiński-trekanten. Fra Figur 1.3.5 ser vi at om vi halverer lengden l får vi tre mindre kopier av den opprinnelige figuren. Sagt på en annen måte så består Sierpiński-trekanten av tre kopier av seg selv, hver med lengde $\frac{1}{2}$ av den opprinnelige.



Figur 1.3.5: Sierpiński-trekanten består av tre kopier av seg selv

Hver av de tre kopiene har da $\frac{1}{3}$ av massen til den opprinnelige, siden de tre kopiene til sammen utgjør den opprinnelige figuren. Sagt på en annen måte: om vi halverer lengden får vi kun en tredjedel av massen. Altså er $M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{3}M(l)$. Siden vi leter etter dimensjonen til Sierpiński-trekanten kan vi si at når vi skalerer trekanten med $s = \frac{1}{2}$ så skal massen skaleres med $s^D = \left(\frac{1}{2}\right)^D$, der D er dimensjonen. Men siden massen skaleres med $\frac{1}{3}$ betyr det at $\left(\frac{1}{2}\right)^D = \frac{1}{3}$, som

er en likning vi kan løse for D:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^D &= \frac{1}{3} \\ \ln\left(\frac{1}{2}\right)^D &= \ln\frac{1}{3} \\ D \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) &= \ln\frac{1}{3} \\ D \cdot (\ln 1 - \ln 2) &= (\ln 1 - \ln 3) \\ D \cdot \ln 2 &= \ln 3 \\ D &= \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.585\end{aligned}$$

Sierpiński-trekanten er altså et 1.585 dimensjonalt objekt.

La oss nå ta for oss Koch-kurven. Fra konstruksjonen av Koch-kurven i figur 1.2.2 ser vi at den endelige Koch-kurven vil bestå av 4 kopier av seg selv. Hver kopi er nedskalert med $\frac{1}{3}$. Det betyr altså at om vi skalerer Koch-kurven med $\frac{1}{3}$ så skal massen skales med $(\frac{1}{3})^D$, der D er dimensjonen. Men ettersom vi vet at massen til hver kopi er $\frac{1}{4}$ får vi, på samme måte som for Sierpiński-trekanten, en ligning vi kan løse for å finne dimensjonen:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}\right)^D &= \frac{1}{4} \\ \ln\left(\frac{1}{3}\right)^D &= \ln\frac{1}{4} \\ D \cdot \ln\left(\frac{1}{3}\right) &= \ln\frac{1}{4} \\ D \cdot (\ln 1 - \ln 3) &= (\ln 1 - \ln 4) \\ D \cdot \ln 3 &= \ln 4 \\ D &= \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.262\end{aligned}$$

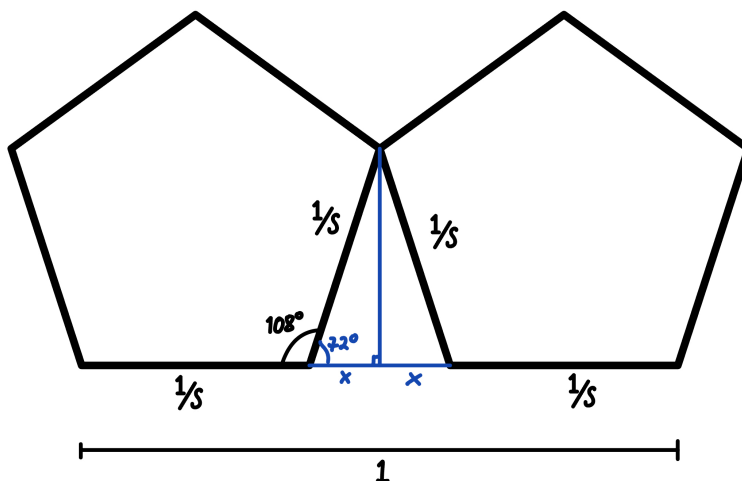
Og på denne måten kommer vi altså frem til at Koch-kurven et 1.262 dimensjonalt objekt.

Dette er en måte å definere dimensjonen til et objekt på som benytter seg av objektens selvsimilaritet. Vi ser at de enkle geometriske figurene våre har en heltallig dimensjon, mens fraktalene typisk ikke har det. Generelt kan vi nå definere dimensjonen for rent selv-similære objekter.

Definisjon 1.3.1 (Selv-similær dimensjon). *Gitt en mengde A som kan deles inn i k deler, hvor hver av dem er en kopi av hele mengden skalert med en faktor $\frac{1}{s}$ så er den selv-similær dimensjonen til A gitt ved:*

$$D = \frac{\ln(k)}{\ln(s)}$$

Vi kan nå bruke denne definisjonen til å angi dimensjonen til femkantfraktalen. Av figur 1.2.3 ser vi tydelig at femkanten erstattes av fem mindre kopier av seg selv, dermed er $k = 5$. Det vanskelige i denne sammenhengen er å se hvilken faktor $\frac{1}{s}$ disse femkantene er skalert ned med. For å beregne $\frac{1}{s}$ må vi benytte litt trigonometri. La den opprinnelige femkanten ha sidekanter av lengde 1. De mindre femkantene vil dermed ha sidelengder $\frac{1}{s}$. Vinkelsummen i en femkant er 540° , og i en regulær femkant er dermed hver vinkel 108° . Vi kan studere de to nederste femkantene i F^1 for å finne s .



Figur 1.3.6: De to nederste femkantene i F^1

Av figur 1.3.6 ser vi at $2\frac{1}{s} + 2x = 1$. Videre ser vi at x tilhører en rettvinklet trekant, dermed er

$$\begin{aligned} \cos(72^\circ) &= \frac{x}{\frac{1}{s}} \\ \Rightarrow x &= \cos(72^\circ) \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Vi setter dette uttrykket for x inn i den første likningen og løser for s :

$$\begin{aligned} 2\frac{1}{s} + 2x &= 1 \\ 2\frac{1}{s} + 2\cos(72^\circ) \frac{1}{s} &= 1 \\ \frac{1}{s}(1 + \cos(72^\circ)) &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow s &= 2(1 + \cos(72^\circ)) \end{aligned}$$

Videre er $\cos(72^\circ) = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$ slik at:

$$s = 2(1 + \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1))$$

$$s = (2 + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1))$$

$$s = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Vi har nå både verdien for antall kopier k og skaleringen s og kan dermed beregne dimensjonen til femkantfraktalen:

$$D = \frac{\ln(5)}{\ln(\frac{3+\sqrt{5}}{2})}$$

$$D \approx 1.672$$

Femkantfraktalen er dermed et 1.672 dimensjonalt objekt.

1.4 Generere fraktaler

1.4.1 IFS

En måte å fremstille fraktaler på er ved hjelp av såkalte itererte funksjonssystemer (Iterated Function Systems), IFS. Mange fraktaler består som vi har sett av mindre kopier av seg selv, og IFS utnytter denne egenskapen til å definere fraktalene gjennom en iterativ prosedyre. For å konstruere IFS trenger vi først å definere et par ting, der det første vi trenger er en metrikk.

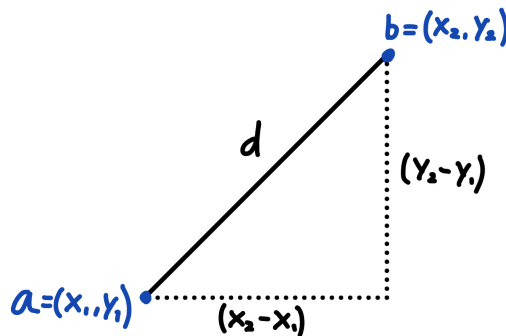
Definisjon 1.4.1 (Metrikk). *Gitt en mengde M er en metrikk d en funksjon som tar inn to elementer fra mengden og gir tilbake et ikke-negativt tall,*

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$$

og som oppfyller følgende krav $\forall x, y \in M$:

- Ikke-negativ: $d(x, y) \geq 0$
- Symmetri: $d(x, y) = d(y, x)$
- Trekantulikheten: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
- $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$

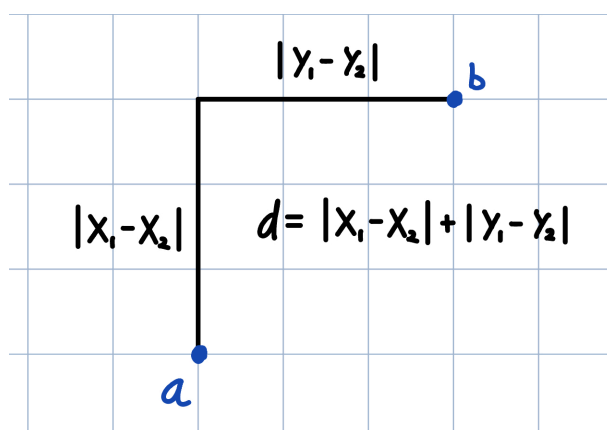
En metrikk er et mål på avstanden mellom to elementer i en mengde. For punkter i planet bruker vi ofte den Euklidske metrikken. Den er definert slik: for $a, b \in \mathbb{R}^2$ hvor $a = (x_1, y_1)$ og $b = (x_2, y_2)$ er avstanden d mellom punktene gitt ved $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Dette det vi i dagligtalen bare kaller for avstanden mellom punktene, illustrert i figur 1.4.1.



Figur 1.4.1: Den Euklidske avstanden mellom punktene a og b i planet

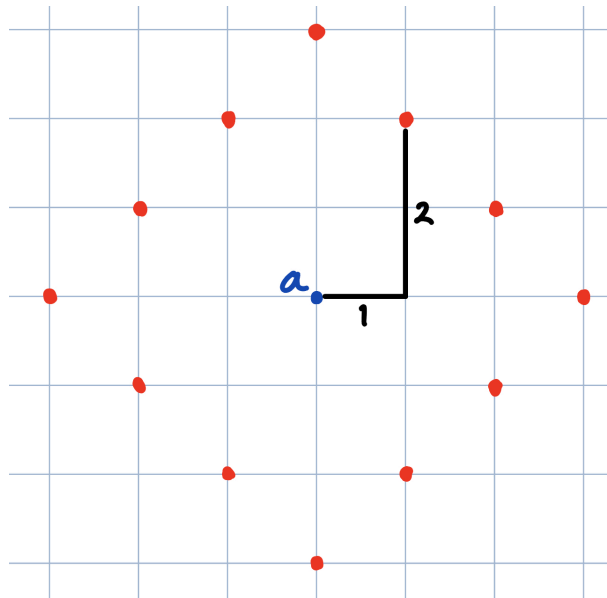
Metrikk er altså et generelt begrep, og den Euklidske avstanden mellom punkter er bare ett eksempel på en metrikk. Vi skal i denne seksjonen etter hvert komme frem til en ganske avansert metrikk, kalt *Hausdorff-metrikken*. Av den

grunn tar vi for oss et annet eksempel på en metrikk først for å øke forståelsen av som ligger i begrepet metrikk. Denne metrikken kalles *Manhattan-metrikken*. Manhattan, kanskje verdens mest kjente bydel, har et svært karakteristisk bydesign. Omtrent alle gatene ligger 90° på hverandre (utenom Broadway). Om du skal fra et sted i bydelen til et annet er det derfor ikke luftlinjen mellom stedene som er interessant, men antall kvartaler du må gå i hver retning. Eksempelvis 5 kvartaler nordover og 3 kvartaler østover, totalt 8 kvartaler. Dette er bakgrunnen for hvordan Manhattan-metrikken defineres. Gitt to punkter $a, b \in \mathbb{R}^2$, hvor $a = (x_1, y_1)$ og $b = (x_2, y_2)$ definerer vi Manhattan-metrikken mellom punktene som $d = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, slik som illustrert i figur 1.4.2



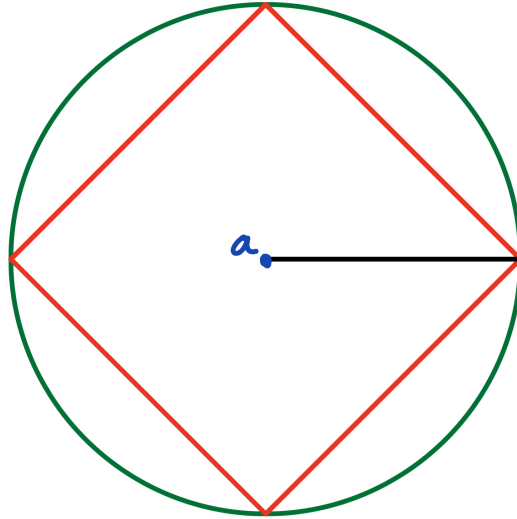
Figur 1.4.2: Avstanden mellom a og b med Manhattan-metrikken

Dette betyr at om vi vil se på alle punktene i en viss avstand fra der vi står får vi et veldig annet bilde enn med det vanlige Euklidske avstandsmålet. I figur 1.4.3 er alle de røde punktene en avstand $d = 3$ unna punktet a .



Figur 1.4.3: Avstanden mellom a og alle de røde punktene er lik 3 med Manhattan-metrikken

Siden Manhattan-metrikken ikke krever at vi beveger oss kun et heltallig antall steg i hver retning får vi dermed et helt kvadrat rundt punktet a , der alle punktene i kvadratet har lik avstand til a . Derimot vet vi at med Euklidsk avstandsmål er mengden av alle punkter i en gitt avstand fra et punkt måten vi definerer en sirkel. I figur 1.4.4 ser vi mengden av alle punkter med samme avstand til punktet a . Det røde kvadratet er med bruk av Manhattan-metrikken og den grønne sirkelen er avstanden målt med Euklidsk metrik.



Figur 1.4.4: Punkter med lik avstand til a med Manhattan-metrikken og Euklidisk metrikk

Med en god forståelse av begrepet *metrikk* kan vi nå bevege oss videre. Det neste vi vil definere er en kontraksjon.

Definisjon 1.4.2 (Kontraksjon). *En avbildning $m : M \rightarrow M$ kalles en kontraksjon dersom det finnes et tall $s \in [0, 1)$ slik at*

$$d(m(x), m(y)) \leq s \cdot d(x, y)$$

for alle $x, y \in M$. Det minste tallet s som oppfyller ulikheten kalles kontraksjonsfaktoren for m .

En kontraksjon er altså en avbildning som minsker avstanden mellom punkter. Det neste vi trenger er et komplett metrisk rom. Dette må vi bygge opp stegvis, der vi først trenger et metrisk rom.

Definisjon 1.4.3 (Metrisk rom). *Et metrisk rom (M, d) er en mengde M og en metrikk d .*

Definisjon 1.4.4 (Cauchy følge). *La (M, d) være et metrisk rom. En følge $\{x_n\}$ av elementer i M er en Cauchy-følge dersom det for alle $\epsilon > 0$ finnes et positivt heltall N slik at $\forall n, m \geq N$ er $d(x_n, x_m) < \epsilon$*

Definisjon 1.4.5 (Komplett metrisk rom). *Et metrisk rom (M, d) er komplett dersom enhver Cauchy-følge $\{x_n\}$ i M har en grense $x \in M$.*

Eksempelvis er \mathbb{R} et komplett metrisk rom, mens \mathbb{Q} ikke er det. Vi kan enkelt se hvorfor \mathbb{Q} ikke er komplett. Følgen $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ er en følge av rasjonale tall,

men den konvergerer mot det irrasjonale tallet e . Altså har vi en følge $\{a_n\} \in \mathbb{Q}$ som har en grense som ikke er i \mathbb{Q} , og \mathbb{Q} er derfor ikke komplett. Nå som vi har definert hva en kontraksjon og et komplett metrisk rom er har vi det vi trenger for å definere et iterert funksjonssystem.

Definisjon 1.4.6 (IFS). *Et iterert funksjonssystem er et komplett metrisk rom (M, d) og et endelig sett av kontraksjoner $\omega_n : M \rightarrow M$ med tilhørende kontraksjonsfaktor s_n for $n = 1, 2, \dots, N$. Et slikt system omtales da som $W = \{\omega_n : n = 1, 2, \dots, N\}$. Kontraksjonsfaktoren for hele systemet er gitt ved den største kontraksjonsfaktoren til sammentrekningene, $s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$*

Til ethvert iterert funksjonssystem har vi også det vi kaller for en attraktor. En attraktor kan defineres på flere måter, den første tar kun utgangspunkt i definisjoner vi allerede har.

Definisjon 1.4.7 (Attraktor). *La M være en lukket delmengde av \mathbb{R}^n og $W = \{\omega_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ være et iterert funksjonssystem bestående av kontraksjoner $\omega_n : M \rightarrow M$. Det finnes da en unik mengde $A \subseteq M$ slik at*

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N \omega_n(A)$$

Vi kaller denne mengden A for attraktoren til systemet.

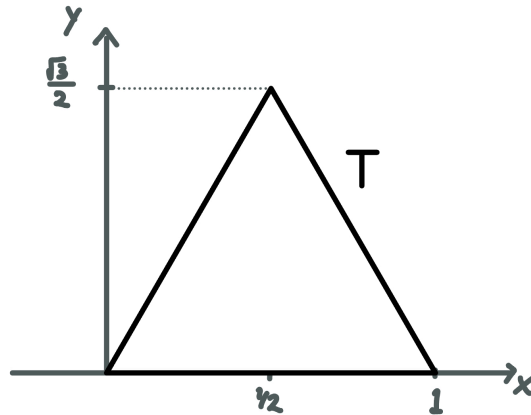
At hvert iterert funksjonssystem bestående av kontraksjoner har en unik attraktor er bevist blant annet av Hutchinson [HUT81]. Det er slike attraktorer som er det vi kaller for fraktaler i denne sammenhengen. Denne definisjonen utnytter selvsimilariteten til fraktalene og viser at de vil sendes på seg selv av et iterert funksjonssystem.

1.4.2 Sierpiński-trekanten som attraktor

Vi kan vise at Sierpiński-trekanten er attraktoren for et spesifikt iterert funksjonssystem. La den opprinnelige rettvinklede trekanten ha sidelengder $l = 1$, og plasser den med det ene hjørnet i origo. Da blir, ved Pytagoras, høyden av trekanten gitt ved:

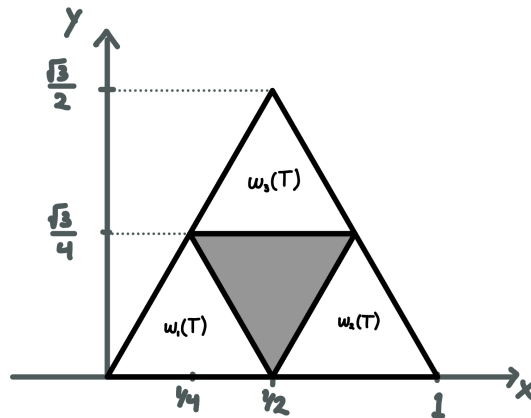
$$h = \left(1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Figur 1.4.5: Likesidet trekant med sidelengde 1, plassert med nedre venstre hjørne i origo.

I konstruksjonen av Sierpiński trekanten starter vi med en likesidet trekant. Så lager vi tre kopier med halvparten av lengden av den originale, som vi plasserer som i Figur 1.4.6. Dersom vi lar T være den opprinnelige trekanten vil kontraksjonen $w_1(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)$ sende T til trekanten nede i venstre hjørne i Figur 1.4.6. For å avbilde T til de to andre kopiene gjør vi først det samme, skalerer ned med $\frac{1}{2}$, men så må vi forskyve (translere) trekantene for å plassere de rett sted. Fra figuren ser vi at vi kan sette $w_2(x, y) = \frac{1}{2}(x, y) + (\frac{1}{2}, 0)$ og $w_3(x, y) = \frac{1}{2}(x, y) + (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$



Figur 1.4.6: Tre kopier av den opprinnelige likesidede trekanten, med sidelengder $\frac{1}{2}$

Om vi isteden starter med hele Sierpiński-trekanten ser vi at om vi sender den gjennom systemet $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ så sendes fraktalen på seg selv. Dermed er Sierpiński-trekanten attraktorer til systemet W . Dette stemmer overens med hvordan vi i forrige seksjon så at Sierpiński-trekanten består av tre mindre kopier av seg selv.

1.4.3 Hausdorff-metrikken

Det finnes også en annen måte å definere en attraktor på, som i større grad tydeliggjør hvorfor vi kaller det en attraktor (tiltrekker). For å formulere denne definisjonen trenger vi et annet avstandsmål. Til nå har vi definert hva en metrikk er, og sett på noen spesifikke metrikker som måler avstanden mellom punkter. Men når vi skal arbeide med fraktaler ønsker vi et mål på avstanden mellom ulike mengder og det er der Hausdorff-metrikken kommer inn.

Definisjon 1.4.8 (Hausdorff-metrikken). *La (M, d) være et komplett metrisk rom. Vi definerer $\mathcal{H}(M)$ til å være rommet bestående av alle ikke-tomme kompakte delmengder av M . Dersom $A \subseteq M$ lar vi A_δ være δ -forstørrelsen av denne mengden gitt ved:*

$$A_\delta = \{x \in M \mid \exists a \in A \quad d(x, a) \leq \delta\}$$

For to mengder $A, B \subseteq M$ lar vi Hausdorff-metrikken h være den minste δ slik at $A_\delta \supseteq B$ og $A \subseteq B_\delta$. Det vil si:

$$h(A, B) = \inf\{\delta \mid A \subseteq B_\delta \text{ og } B \subseteq A_\delta\}$$

Siden vi her definerer en *metrikk* er det verdt å gjøre øvelsen med å vise at Hausdorff-metrikken faktisk er en metrikk.

Bevis. Vi må dermed vise at h oppfyller kravene om ikke-negativitet, symmetri, trekantulikheten og at avstanden fra en mengde til seg selv er null.

- Ikke-negativ:

For alle settene vi arbeider med så utvider vi de hele tiden til større mengder A_δ og B_δ der $\delta \geq 0$. Og dermed blir $h(A, B)$ aldri negativ siden den er definert til å være lik den minste δ som oppfyller kravene. Dermed er $h(A, B) \geq 0$

- Symmetri:

Kravet om symmetri får vi rett ut av definisjonen av h :

$$h(A, B) = \inf\{\delta \mid A \subseteq B_\delta \text{ og } B \subseteq A_\delta\} = \inf\{\delta \mid B \subseteq A_\delta \text{ og } A \subseteq B_\delta\} = h(B, A)$$

- Avstanden fra en mengde til seg selv er null:

For å vise ekvivalensen må vi vise at implikasjonen går begge veier. Først la $A = B$. Da får vi at $h(A, B) = h(A, A) = \inf\{\delta \mid A \subseteq A_\delta \text{ og } A \subseteq A_\delta\}$. Men siden $A \subseteq A_0$ får vi at $\delta = 0$ og altså er $h(A, B) = 0$ dersom

$A = B$.

Motsatt vei antar vi at $h(A, B) = 0$. Siden A og B er kompakte betyr det at $\delta = 0$ og dermed må $A \subseteq B_0$ og $B \subseteq A_0$. Men siden $A_0 = \{x \in M \mid \exists a \in A, d(0, a) \leq 0\} = A$ og $B_0 = B$ får vi at $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$, som betyr at $A = B$. Dermed har vi vist ekvivalensen begge veier og får at

$$A = B \Leftrightarrow h(A, B) = 0$$

- Trekantulikheten:

La $A, B, C \subseteq \mathcal{H}(M)$. Vi ønsker å vise at $h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$. La $h(A, B) = c$, $h(B, C) = a$ og $h(A, C) = b$. Det vi da må vise er at $b \leq a + c$. Dersom $a = \infty$ eller $c = \infty$ er beviset ferdig, så vi antar at a og c er endelig. Det betyr at $c < r$ og $a < s$ for noen tall $r, s \in \mathbb{R}^+$. Dette gir oss at $A \subset B_r$ og $B \subset C_s$. Dette kan vi kombinere til å si at

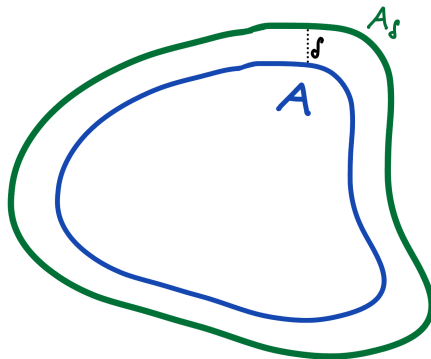
$$A \subset (C_s)_r \subset C_{r+s}$$

Og siden $C \subset B_s \subset A_{r+s}$ får vi at $b \leq r + s$. Siden vi kan presse r og s så nærme c og a vi vil får vi oppfylt at $b \leq a + c$ som altså betyr at

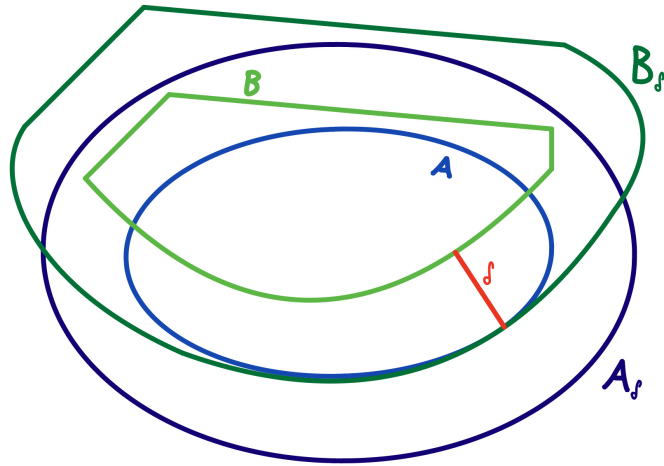
$$h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$$

□

Hausdorff-metrikken er altså en metrikk, og den gir oss et mål på avstanden mellom to mengder. Den forteller hvor mye vi må forstørre en mengde for at den skal dekke den andre mengden, og tilsvarende motsatt. Den minste forstørrelsen av begge mengdene slik at de hver inneholder den andre opprinnelige mengden er det vi kaller Hausdorff-metrikken. I figur 1.4.7 ser vi et eksempel på en mengde A i planet \mathbb{R}^2 og en tilhørende δ -forstørrelse av mengden gitt ved A_δ . Og i figur 1.4.8 ser vi et eksempel på Hausdorff-metrikken mellom to mengder A og B .



Figur 1.4.7: En mengde A og en tilhørende δ -forstørrelse av mengden



Figur 1.4.8: Hausdorff metrikken gir avstanden mellom mengdene A og B . Det er den minste $\delta \geq 0$ slik at δ -forstørrelsen A_δ av A inneholder B , og δ -forstørrelsen B_δ av B inneholder A

Når vi har et komplett metrisk rom (M, d) viser det seg at også rommet $(\mathcal{H}(M), h)$ er et komplett metrisk rom. Bevis for dette finnes blant annet i Michal F. Barnsleys bok *Fractals Everywhere*[BAR14]

Teorem 1.4.9. *Dersom (M, d) er et komplett metrisk rom så er $(\mathcal{H}(M), h)$ et komplett metrisk rom.*

Gitt Hausdorff metrikken kan vi nå formulere en annen definisjon for en attraktor.

Definisjon 1.4.10 (Attraktor). *La M være en lukket delmengde av \mathbb{R}^n og (M, d) et komplett metrisk rom. La $W = \{w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ være et iterert funksjonssystem bestående av kontraksjoner $w_n : M \rightarrow M$. Definer funksjonen $F : \mathcal{H}(M) \rightarrow \mathcal{H}(M)$ ved:*

$$F(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B), \quad \forall B \in \mathcal{H}(M)$$

hvor $w_n(B) = \{w_n(x) : x \in B\}$ er en kontraksjon på $(\mathcal{H}(M), h)$. Det unike fikspunktet for W er da gitt ved

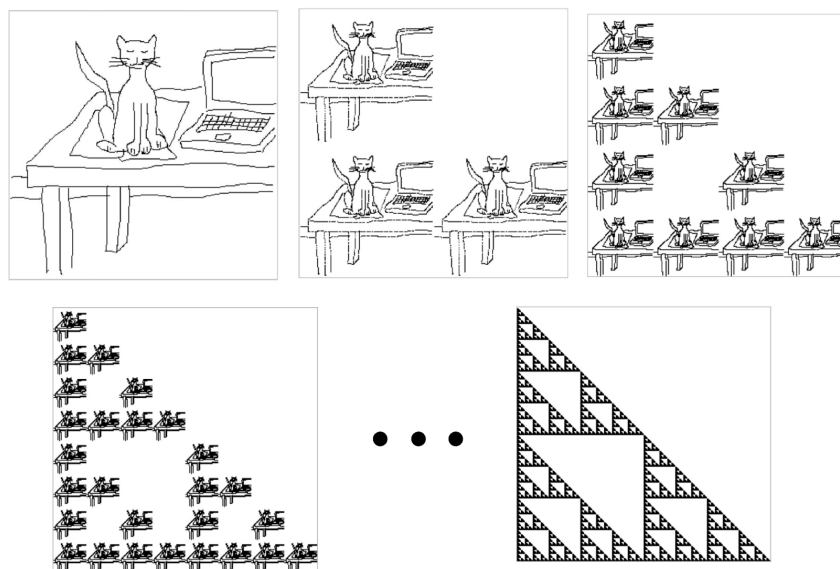
$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(B), \quad \forall B \in \mathcal{H}(M)$$

Vi kaller mengden A for attraktoren til systemet.

Her ser vi bakgrunnen for navnet attraktor mye tydeligere. Av denne definisjonen ser vi at vi kan starte med en hvilken som helst mengde $B \in \mathcal{H}(M)$.

Når vi så gjentar prosessen med å kjøre B gjennom det itererte funksjonssystemet W så kommer vi nærmere og nærmere A , der vi måler avstanden mellom $F^n(B)$ og A ved hjelp av Hausdorff metrikken. Bevis for at denne attraktoren er unik finnes blant annet i boken til Falconer[FAL04] og vil ikke presenteres her. Det er også verdt å merke seg at disse to definisjonene av attraktor ikke er helt like. Siden det finnes ikke-tiltrekkende fikspunkt er den siste definisjonen sterkere, men for itererte funksjonssystem så sammenfaller disse to definisjonene.

Siden de to definisjonene sammenfaller når vi arbeider med IFS betyr det at om vi benytter samme system som i foregående seksjon, som hadde Sierpiński-trekanten som attraktor, skal vi kunne starte med en hvilken som helst kompakt mengde og ende opp med Sierpiński-trekanten om vi kjører gjennom systemet uendelig antall ganger. Dette er perfekt demonstrert av Michael Frame, fra Yale University, og hans animasjon av hvordan bildet av en katt blir mer og mer likt Sierpiński-trekanten etter gjentatte iterasjoner[FRA19]. Han bruker en annen versjon av trekanten som er rettvinklet og ikke likesidet, men poenget er fortsatt akkurat det samme. Dette er illustrert i figur 1.4.9



Figur 1.4.9: Et bilde av en katt sendes gjennom et IFS gjentatte ganger og går mot Sierpiński-trekanten

2 Brownske bevegelser

Brownske bevegelser er navngitt etter den skotske botanikeren Robert Brown (1773-1858). Han studerte hvordan pollenkorner i vann tilsynelatende beveget seg helt tilfeldig, hoppende frem og tilbake. Det er denne type bevegelse som har blitt kjent som Brownske bevegelser. Forklaringen på dette fenomenet ble formalisert matematisk først 80 år senere av Albert Einstein. Han viste hvordan pollenkornets bevegelser skyldes mange kollisjoner med de mye mindre og ”usynlige” vannmolekylene, og klarte å modellere lignende bevegelser [EIN05]. Ettersom det er svært mange vannmolekyler i vannglasset, og de beveger seg i alle retninger, gir det en uforutsigbar og hoppende bevegelse for pollenkorneret.

2.1 Brownske bevegelser i én dimensjon

For å kunne konstruere Brownske bevegelser på fraktaler må vi først få en god intuisjon på hva Brownske bevegelser er. Vi vil derfor først studere Brownske bevegelser i én dimensjon, deretter i to dimensjoner, før vi går over til Brownske bevegelser på fraktaler. Med kun én dimensjon å jobbe med vil dette bli som å se for seg en partikkel som hopper frem og tilbake på den reelle tallinjen \mathbb{R} . Anta at ved små tidsintervall τ vil partikkelen hoppe et lite stykke δ enten opp eller ned på tallinjen.

Deler av den følgende konstruksjonen av Brownske bevegelser er hentet fra Kenneth Falconers bok *Fractal Geometry* [FAL04]. La $X_\tau(t)$ være posisjonen til partikkelen etter tiden t . Vi lar partikkelen starte i origo slik at $X_\tau(0) = 0$. Etter et tidsintervall τ vil partikkelen hoppe enten opp eller nede, slik at $X_\tau(\tau) = \delta$ eller $X_\tau(\tau) = -\delta$. Begge med sannsynlighet $\frac{1}{2}$. Tilsvarende om vi kjenner posisjonen til partikkelen $X_\tau(k\tau)$ ved tiden $k\tau$, for $k \in \mathbb{Z}$, vil posisjonen $X_\tau((k+1)\tau)$ ved tiden $(k+1)\tau$ enten være $X_\tau(k\tau) + \delta$ eller $X_\tau(k\tau) - \delta$. Begge med sannsynlighet $\frac{1}{2}$. Om vi lar $\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor$ være det største heltallet som er mindre eller lik $\frac{t}{\tau}$ kan vi uttrykke partikkelens posisjon ved tiden t som

$$X_\tau(t) = \delta(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor})$$

hvor hver Y_i er en uavhengig tilfeldig variable som har sannsynlighet $\frac{1}{2}$ for å være lik 1 og $\frac{1}{2}$ for å være lik -1. Altså steg opp eller ned på tallinjen. Partikkelens posisjon ved en gitt tid er dermed summen av antall steg opp og ned frem til dette tidspunktet. Her følger et kort Python program som simulerer slike bevegelser:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random as random
```

```
#Tid
dt =0.01      #Tidssteg
```

```

n = 1000    #Antall steg
t = dt*n    #Total tid
d = 0.001   #Lengde paa steg

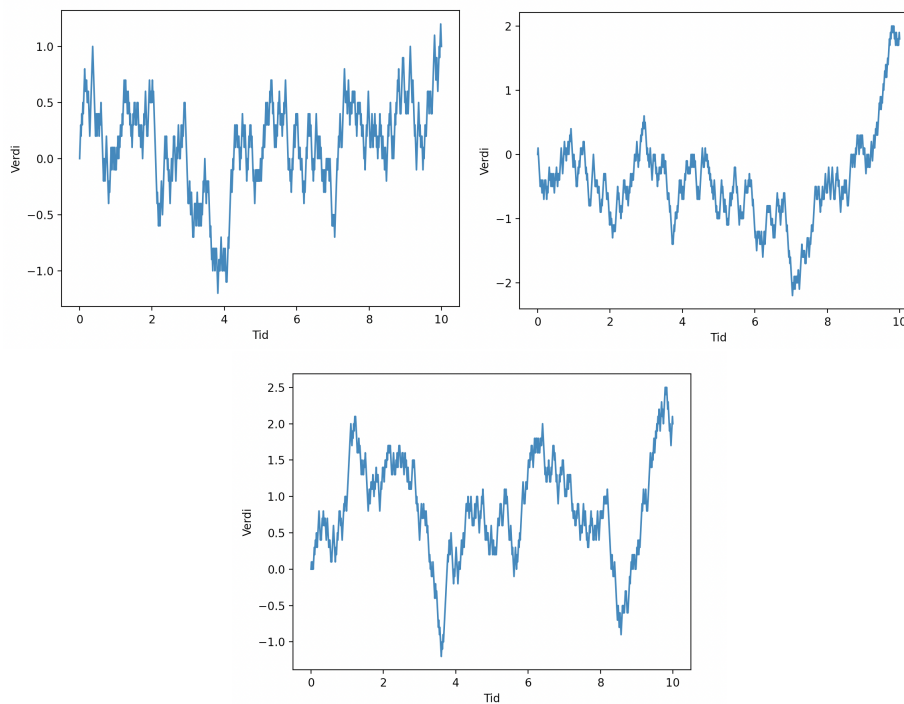
X = np.zeros(n+1)    #Tomme lister for posisjon og tid
T = np.zeros(n+1)

for i in range(n):
    y = random.random()
    if y<=1/2:
        X[i+1] = X[i] + d    #Steg opp
        T[i+1] = T[i] + dt
    else:
        X[i+1] = X[i] - d    #Steg ned
        T[i+1] = T[i] + dt
plt.plot(T, X)
plt.xlabel("Tid")
plt.ylabel("Verdi")
plt.show()

```

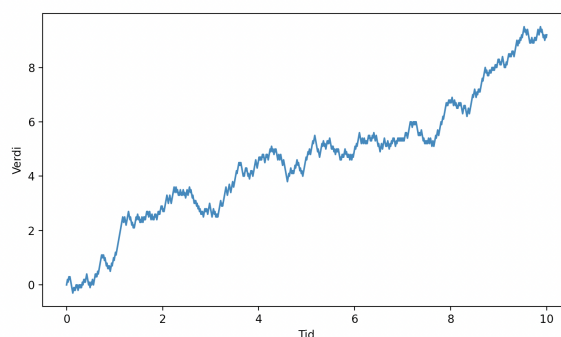
Ved kjøring av koden kan vi se et par realiseringer av denne bevegelsen:

Figur 2.1.1: Realiseringer av 1-dimensjonal bevegelse



I eksemplene går grafen som forventet helt tilfeldig, noe som også betyr at den i enkelte tilfeller kan gå mye opp eller mye ned. Men i gjennomsnitt har den ingen tendens til å gå den ene eller andre veien. Mange vil kanskje se likheter med grafene og prisutviklingen til et aksjemarked. Dette er ikke tilfeldig. Mange finansielle markeder kan nemlig modelleres ved hjelp av Brownske bevegelser. I vårt enkle eksempel kan vi få bevegelsene til å minne mer om aksjemarkedet ved å gi det en liten skjevhet i sannsynligheten mot å gå opp fremfor ned ved hvert tidsintervall, slik som aksjemarkedet historisk sett går oppover.

Figur 2.1.2: Brownsk bevegelse vs Oslo Børs



(a) Realisering med 55% sannsynlighet for å gå opp ved hvert tidssteg



(b) Hovedindeksen på Oslo Børs siste 10 år,
(<https://e24.no/bors/instrument/OSEBX.OSE>)

I Figur 2.1.2 a) ser vi en realisering av den Brownske Bevegelsen med 55% sannsynlighet for å gå opp og 45% for å gå ned ved hvert steg, mens i b) ser vi den faktiske prisutviklingen til hovedindeksen på Oslo Børs de siste 10 årene.

Vi har nå konstruert en stokastisk prosess kjent som en virrevandring. Men for at denne prosessen skal kunne kalles en Brownsk bevegelse må vi gjøre noen justeringer. For at en kontinuerlig stokastisk prosess X_t skal kunne kalles en Brownsk bevegelse må den tilfredsstille følgende betingelser:

1. $X_\tau(0) = 0$
2. $X_\tau(t)$ er kontinuering mtp. tidsinkrementene
3. $X_\tau(t)$ har uavhengige inkrement og $X_\tau(t) - X_\tau(s)$ er normalfordelt med forventningsverdi 0 og varians $t - s$

Vår prosess starter i 0 så den første betingelsen er oppfylt. Prosessen er også kontinuerlig med tanke på tidsinkrementene våre når vi lar $\tau \rightarrow 0$. Så de to første betingelsene er oppfylt. I den tredje betingelsen krever vi at forventningsverdiene til hvert steg er 0, dette kan vi oppnå ved å gå tilbake til den opprinnelige prosessen der vi har like stor sannsynlighet for å gå opp og ned ved hvert tidssteg. Det som så gjenstår, er å justere stegene i denne vandringen slik at vi får rett varians. Vi kan legge merke til at om vi minker lengden på hvert tidssteg τ så vil vi i løpet av den samme tiden t gå flere steg. Om disse stegene fortsatt har samme lengde vil vandringen få en større variasjon. For å fikse dette må vi normalisere steglengden.

Hver Y_i har variasjon lik 1

$$Var[Y_i] = 1 \quad \forall i$$

Og siden alle Y_i -ene er uavhengig har de kovarians lik null

$$Cov[Y_i, Y_j] = 0 \quad \forall i, j$$

Dermed er $Var[Y_i + Y_j] = Var[Y_i] + Var[Y_j] + Cov[Y_i, Y_j] = Var[Y_i] + Var[Y_j]$ og videre er altså:

$$\begin{aligned} Var[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor}] &= Var[Y_1] + Var[Y_2] + \dots + Var[Y_{\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor}] \\ &= 1 + 1 + \dots + 1 \\ &= \lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor \end{aligned}$$

Siden $Var[aX] = a^2 Var[X]$ for en konstant a og stokastisk variabel X får vi dermed at variansen til X_τ er gitt ved:

$$\begin{aligned} Var[X_\tau(t)] &= Var[\delta(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor})] \\ &= \delta^2 Var[(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor})] \\ &= \delta^2 \lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor \end{aligned}$$

Vi ønsker at variansen til $X_\tau(t)$ skal være lik t . For å få til det må vi normalisere steglengden, dette gjør vi ved å sette steglengden til $\sqrt{\tau}$. Da får vi at variansen til $X_\tau(t)$ er :

$$\begin{aligned}
\text{Var}[X_\tau(t)] &= \text{Var}[\sqrt{\tau}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor})] \\
&= (\sqrt{\tau})^2 \text{Var}[(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor})] \\
&= \tau \lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor \\
&\approx t
\end{aligned}$$

Vi har nå en stokastisk prosess med en normalisert steglengde, som gjør at variansen for en gitt tid t blir den samme uansett hva vi setter τ til å være.

$$X_\tau(t) = \sqrt{\tau}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor})$$

Vi kan skrive et kort Python program som plotter realiseringer av denne stokastiske prosessen for ulike verdier for τ , men samme totaltid $t = 1$.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random as random

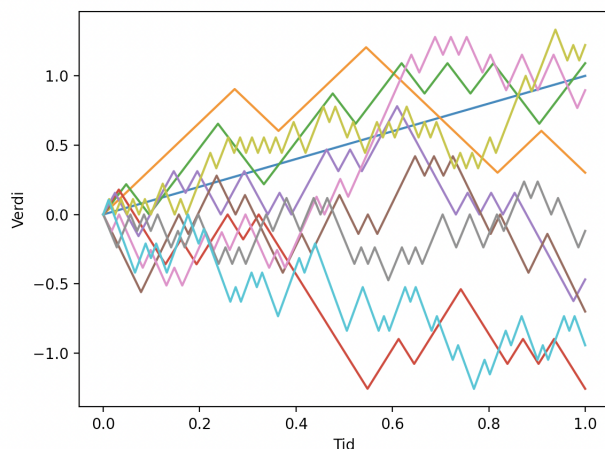
for j in range(10):
    t = 1 #Total tid
    dt = 1/(j*10 + 1) #Tidssteg
    n = np.int(t/dt) #Antall steg
    d = np.sqrt(dt) #Lengde p steg

    X = np.zeros(n+1) #Tomme lister for posisjon og tid
    T = np.zeros(n+1)

    for i in range(n):
        y = random.random()
        if y <= 1/2:
            X[i+1] = X[i] + d #Steg til høyre
            T[i+1] = T[i] + dt
        else:
            X[i+1] = X[i] - d #Steg til venstre
            T[i+1] = T[i] + dt

    plt.plot(T, X)
    plt.xlabel("Tid")
    plt.ylabel("Verdi")
plt.show()

```



Figur 2.1.3: Realisering av den virrevandringer for ulike verdier av τ

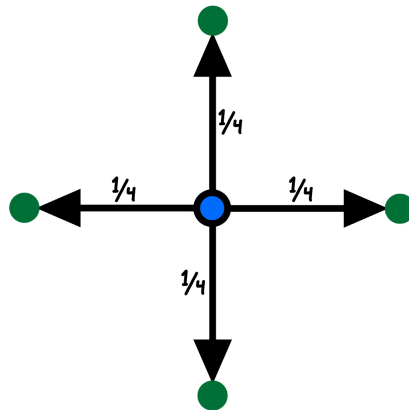
Av figur 2.1.3 ser vi at alle vandringene holder seg innenfor samme område selv om vi endrer tidsintervallet τ . Dette skyldes at vi har normalisert steglengden og får lik varians uansett hva τ er. Den Brownske bevegelsen i én dimensjon definerer vi nå som grensen av virrevandringen X_τ når $\tau \rightarrow 0$

$$B = \lim_{\tau \rightarrow 0} X_\tau(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sqrt{\tau}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor})$$

2.2 Brownske bevegelser i to dimensjoner

Det neste naturlige steget er å se på Brownske bevegelser i to dimensjoner. I denne seksjonen forsøker vi først å konstruere en bevegelse som minner mest mulig om de uforutsigbare bevegelsene til en partikkel som Brown selv observerte. Dette er for å få en god forståelse av hvordan Brownske bevegelser fungerer og hvordan man kan konstruere dem. Deretter vil vi formalisere dette og se hvordan man generelt kan konstruere Brownske bevegelser i n dimensjoner. I to dimensjoner er situasjonen i utgangspunktet ganske lik som for den 1-dimensjonale bevegelsen. Vi ser for oss en partikkel som ved hvert tidsintervall hopper tilfeldig i en retning. Men nå har ikke partikkelen kun to valg, men flere. Hvor mange flere avhenger av hva slags modell vi lager. Den enkleste videreutviklingen er å la partikkelen hoppe opp og ned, samt til høyre og venstre. Men det er også mulig å gi partikkelen f.eks kun tre valg: opp, skrått ned til høyre og skrått ned til venstre. Eller vi kan lage uendelig mange muligheter der partikkelen velger et tall mellom 0 og 2π og så går et stykke i den retningen vinkelen tilsvarer.

Vi starter med den enkleste. Partikkelen kan hoppe i fire retninger og alle har lik sannsynlighet, $\frac{1}{4}$. I Figur 2.2.1 ser vi en partikkel som befinner seg i det blå punktet. Den har da like stor sannsynlighet, $\frac{1}{4}$, til å bevege seg til hvert av de grønne punktene.



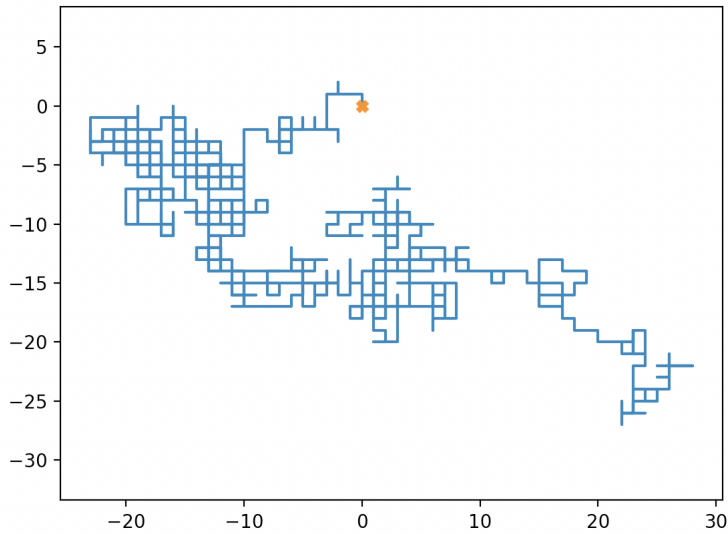
Figur 2.2.1: Partikkelen kan bevege seg til alle de grønne punktene

Om vi setter steglengden lik 1 vil partikkelen da bevege seg langs linjene i koordinatsystemet og kan lande på alle punkter (a, b) der $a, b \in \mathbb{Z}$. Vi lager et enkelt Python-program som kan simulere denne bevegelsen.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random as random
n=1000
d = 1 #Lengde paa steg
X = np.zeros(n+1)
Y = np.zeros(n+1)
#Fire muligheter
for i in range(n):
    z = random.random()
    if z<=1/4:
        X[i+1] = X[i] + d #Steg til hoyre
        Y[i+1] = Y[i]
    elif z<=1/2:
        X[i+1] = X[i] - d #Steg til venstre
        Y[i+1] = Y[i]
    elif z<=3/4:
        X[i+1] = X[i]
        Y[i+1] = Y[i] + d #Steg opp
    else:
        X[i+1] = X[i]
        Y[i+1] = Y[i] - d #Steg ned
plt.plot(X, Y)
plt.plot(0,0, "X") #Markerer origo
plt.axis("equal")
plt.show()

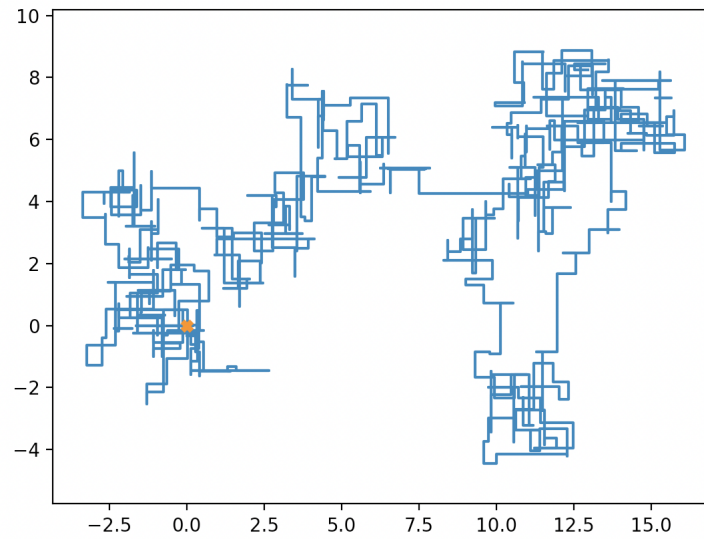
```



Figur 2.2.2: Realisering av 2-dimensjonal bevegelse

I figur 2.2.6 ser vi en realisering av denne todimensjonale bevegelsen. Startpunktet er markert med et oransje kryss. Vi ser at bevegelsen kun beveger seg mellom punkter med heltallskoordinater og kan dermed ikke treffe alle punkter i planet.

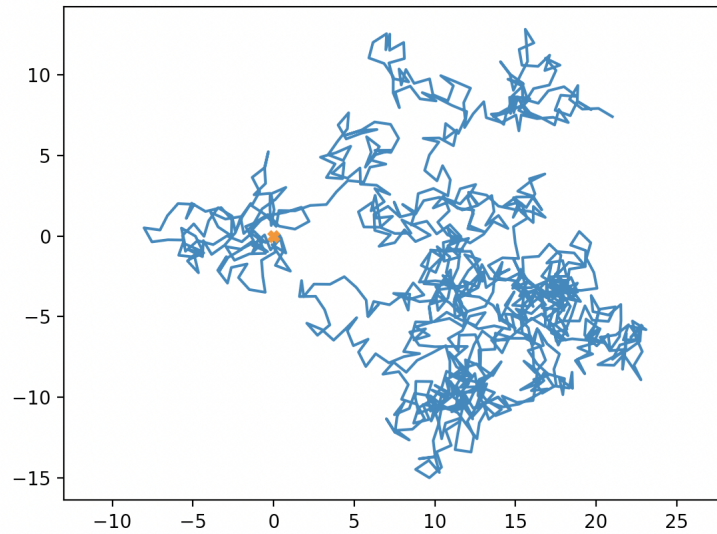
Om vi derimot ønsker at bevegelsen skal kunne treffe et hvilket som helst punkt i \mathbb{R}^2 har vi et par muligheter. Vi kan gjøre steglengden om til en tilfeldig variabel. Alternativt kan vi la steglengden stå fast og la partikkelen bevege seg i en hvilken som helst retning. For det første tilfellet kan vi bare flytte steglengden d inn i for-løkka i programmet og sette den til $d = \text{random.random}()$ slik at den blir et tilfeldig tall mellom 0 og 1 ved hvert steg. En realisering av denne bevegelsen kan se slik ut:



Figur 2.2.3: Realisering av 2-dimensjonal bevegelse med tilfeldig steglengde

Som vi ser er bevegelsen ganske lik som før, men steglengden varierer slik at vi ikke bare treffer punkter med heltallskoordinater.

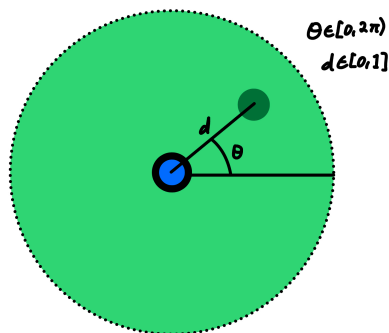
Den andre modellen tar utgangspunkt i at vi kan bevege oss i en hvilken som helst retning $\theta \in [0, 2\pi)$. Med en fast steglengde d vil vi, gitt vinkelen, bevege oss $d \cdot \cos(\theta)$ i x-retning og $d \cdot \sin(\theta)$ i y-retning. En realisering av en slik bevegelse er illustrert i figur 2.2.4



Figur 2.2.4: Realisering av 2-dimensjonal Brownsk bevegelse med tilfeldig bevegelsesretning

I denne realiseringen ser vi at partikkelen beveger seg i tilfeldig retning, men med en fast steglengde.

Til slutt kan vi kombinere disse to modellene for å få noe som enda bedre simulerer en partikkels bevegelse. Vi benytter oss av både tilfeldig steglengde og tilfeldig vinkel ved hvert tidsintervall. Dermed får vi en partikkel som kan nå alle punktene i planet \mathbb{R}^2 og som hopper i tilfeldig retning og med tilfeldig lengde (mellom 0 og 1) ved hvert tidssteg.

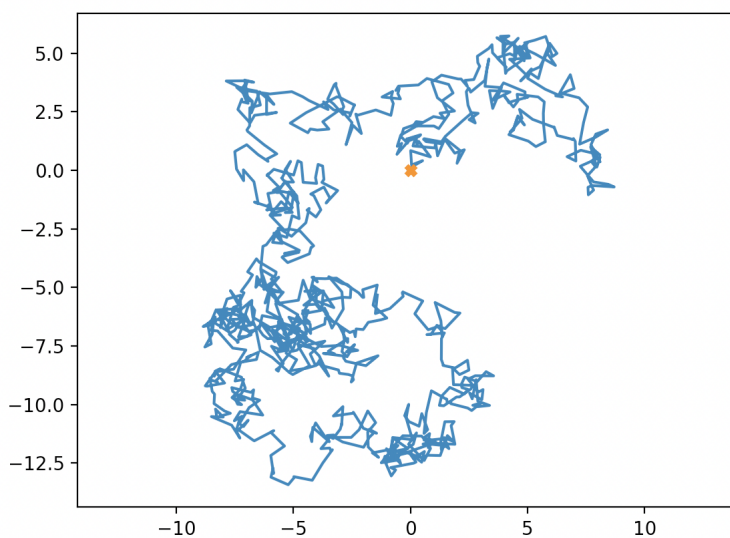


Figur 2.2.5: Partikkelen kan bevege fra det blå punktet til hvor som helst innenfor den grønne sirkelen med radius 1

For å simulere en slik bevegelse trenger vi bare å juster litt på variablene i for-løkken:

```
for i in range(n):
    d = random.random()           #Tilfeldig lengde paa steg
    z = 2*np.pi*random.random()  #Vinkel, tall fra 0 til 2pi
    X[i+1] = X[i] + d*np.cos(z)
    Y[i+1] = Y[i] + d*np.sin(z)
```

Kjøring av koden gir oss en realisering av denne bevegelsen.



Figur 2.2.6: Realisering av 2-dimensjonal Brownsk bevegelse med tilfeldig bevegelsesretning og tilfeldig steglengde

Vi har nå konstruert en bevegelse som beveger seg fritt rundt og kan treffe alle punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ved hvert tidssteg hopper partikkelen i en tilfeldig retning med en tilfeldig lengde mellom 0 og 1 og på den måten har vi en bevegelse som godt repliserer bevegelsen til et pollenkorn i vann.

For å formalisere og generalisere Brownske bevegelser i to dimensjoner tenker vi først tilbake på bevegelsen vi konstruerte for én dimensjon. Der konstruerte vi en Brownsk bevegelse som vi nå for enkelthets skyll vil navngi som $X_1(t)$. Denne tar inn verdier $t \in [0, \infty)$ og gir oss tilbake ett reelt tall. Altså $X_1(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Gitt en annen uavhengig endimensjonal Brownsk bevegelse $X_2(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ kan vi konstruere en todimensjonal Brownsk bevegelse $X(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ved

$$X(t) = (X_1(t), X_2(t))$$

Generelt kan vi formalisere dette for n dimensjoner. Gitt n uavhengige 1-dimensjonale

Brownske bevegelser $X_i(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ for $i = 1, 2, \dots, n$ er $X(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ gitt ved

$$X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$$

en n -dimensjonal Brownsk bevegelse.

3 Brownske bevegelser på fraktaler

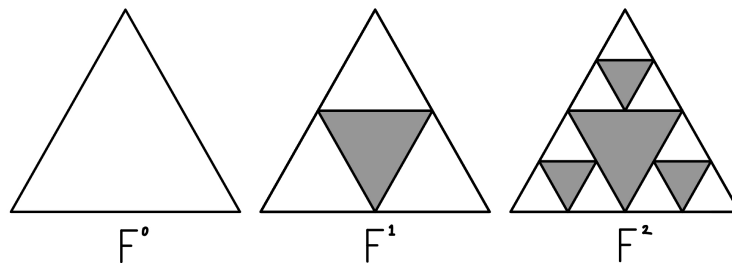
3.1 Konstruksjon av Brownske bevegelser

Når vi skal forsøke å konstruere Brownske bevegelser på fraktaler er situasjonen ganske annerledes enn det vi til nå har sett på. Som vi vet fra før, har fraktaler typisk ikke en heltallig dimensjon. Det er derfor ikke tilstrekkelig å konstruere en n -dimensjonal Brownsk bevegelse for $n \in \mathbb{N}$. Sierpiński-trekanten har eksempelvis dimensjon $d \approx 1.585$ og vi kan derfor hverken bruke en endimensjonal eller todimensjonal bevegelse direkte. Konseptene og forståelsen fra de foregående avsnittene er likevel nyttige for konstruksjonene vi skal lage her.

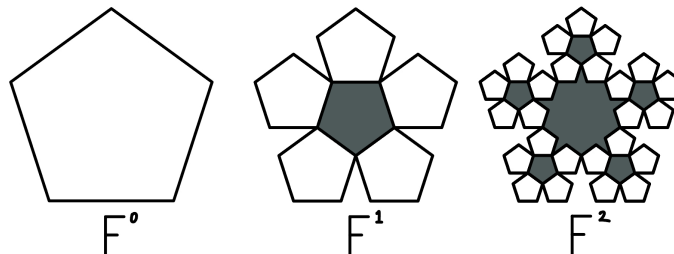
For en gitt fraktal lar vi F^n være den n -te iterasjonen. For Sierpiński-trekanten er eksempelvis F^0 den opprinnelige trekanten, mens F^1 er de tre mindre trekantene med sidelengde $\frac{1}{3}$ av den opprinnelige og F^2 er de 9 mindre trekantene med sidelengder $\frac{1}{9}$ av den opprinnelige trekanten. Selve fraktalen er da gitt som grensen

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n$$

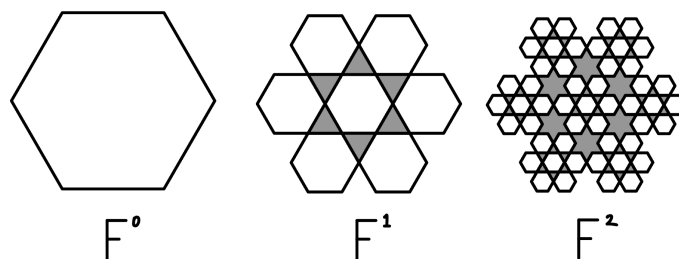
For Sierpiński-trekanten består F^n av 3^n trekantene med sidelengde 3^{-n} av den opprinnelige trekanten.



Figur 3.1.1: De første iterasjonene av Sierpinksi-trekanten



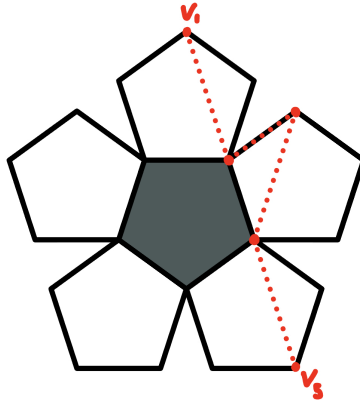
Figur 3.1.2: De første iterasjonene av femkantfraktalen



Figur 3.1.3: De første iterasjonene av sekskantfraktalen

Måten vi skal konstruere bevegelsene følger i stor grad oppsettet til Tom Lindstrøm i *Brownian Motion on Nested fractals* [LIN90]. I utgangspunktet konstruerer vi en virrevandring X^n som beveger seg på F^n . Denne vandringen beveger seg da mellom de ulike knutepunktene i figuren, men vandringen kan ikke hoppe helt vilt rundt. Når den står i ett punkt, kan den kun hoppe til det vi kaller et *nabopunkt*. For Sierpiński-trekanten er to punkter nabopunkter dersom de hører til samme trekant med sidelengde 3^{-n} . For de andre fraktalene er tilsvarende to punkter nabopunkter om de hører til samme minimale polygon i F^n . En virrevandring X^n på F^n er dermed gitt som en følge v_1, v_2, \dots, v_k av punkter der v_i og v_{i+1} alltid er to nabopunkter, og $v_i \neq v_{i+1}$.

En virrevandring X^1 på F^1 av femkantfraktalen kan for eksempel se ut som i figur 3.1.4. Der går vandringen fra v_1 og ender opp i v_5 . Merk at noen punkter på figuren tilhører to minimale femkanter. Disse punktene vil dermed ha flere nabopunkter enn de som kun tilhører én femkant. Merk også at vandringen starter og slutter i to av hjørnene i den opprinnelige femkanten F^0 . Dette vil gjelde alle vandringene våre. En vandring på F^n starter altså i et av punktene på F^0 og går helt til den treffer et av de andre punktene på F^0 .



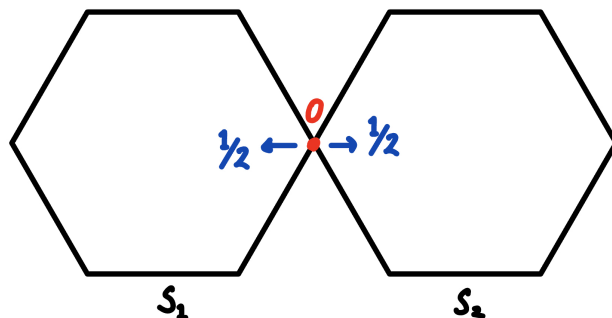
Figur 3.1.4: Realisering av en virrevandring X^1 på F^1 av femkantfraktalen

Det vi vil kalle for en Brownsk bevegelse, B , definerer vi som grensen av disse vandringene når n blir stor.

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} X^n$$

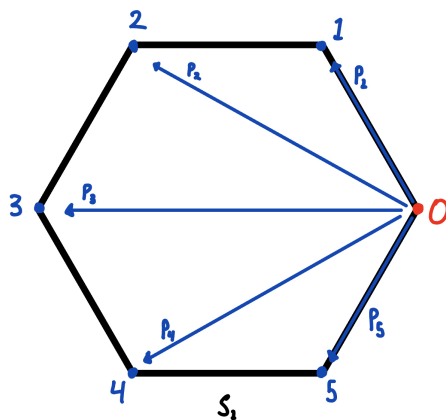
der vandringen beveger seg på F^n . Det er åpenbart man kan konstruere mange ulike slike virrevandringer. For å formalisere dette og å kunne skille ulike konstruksjoner fra hverandre trenger vi å spesifisere ytterligere. Vi vil videre se på sekskantfraktalen siden den får frem mange av de kravene vi vil stille til vandringene vi skal konstruere. Kravene vi stiller her vil også gjelde for de andre, mindre kompliserte, fraktalene.

Tenk deg at vi står i punkt 0 i figur 3.1.5 Vi ser at punkt 0 hører til to minimale sekskanter. Derfor kaster vi først en rettferdig mynt som bestemmer hvilken sekskant vi skal bevege oss på, S_1 eller S_2 .



Figur 3.1.5: Om vi står i punkt 0 kaster vi mynt for å bestemme om vi skal bevege oss på S_1 eller S_2

Tenk deg nå at vi har kastet mynt og bestemt oss for at vandringen skal gå på S_1 . Fra punkt 0 kan vi da bevege oss til de fem andre hjørnene i sekskanten. Vi ønsker å tilordne en sannsynlighet for å bevege seg til hvert av disse punktene. Vi beveger oss derfor til punkt i med sannsynlighet p_i for $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ som illustrert i figur 3.1.6.



Figur 3.1.6: Sannsynligheter for å gå til hvert punkt på S_1

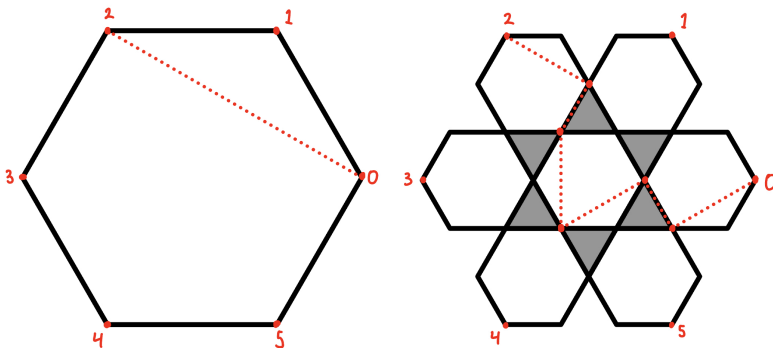
Disse sannsynlighetene vil vi at skal være like ut ifra symmetriene, altså er $p_1 = p_5$ og $p_2 = p_4$. Videre er sannsynlighetene p_i lik for alle de minimale sekskantene, altså at p_1 er å gå langs en sidekant, p_2 er å gå skrått over og p_3 svarer til å gå rett over sekskanten. Vi krever også at disse sannsynlighetene minker med avstanden til punktet vi står i, dvs $p_3 \leq p_2 \leq p_1$. Til slutt krever vi naturligvis også at de summerer til 1. Dermed blir det å spesifisere en virrevandring

på F^n det samme som å velge oss et sett med sannsynligheter (p_1, p_2, p_3) fra mengden

$$\mathcal{P} = \{(p_1, p_2, p_3) \mid p_1 \geq p_2 \geq p_3 \text{ og } 2p_1 + 2p_2 + p_3 = 1\}$$

Vi kan nå egentlig bare velge oss et element fra \mathcal{P} og så har vi tilhørende virrevandringer X^n på F^n . Problemet er at om vi forsøker å regne på sannsynlighetene for ulike realiseringer av slike vandring oppstår det svært store kombinatoriske utfordringer. Et annet problem er at vandringene kan bli svært ulike avhengig av hva slags nivå n vi velger å jobbe på. Istedenfor å velge ut et tilfeldig element fra \mathcal{P} skal vi velge ut et helt spesielt element som fikser disse problemene.

At prosessene er ulike for ulike valg av n høres i første omgang banalt ut, og det kan virke som prosessene vil være ulike uansett hva slags element fra \mathcal{P} vi måtte velge. Men vi ønsker her å konstruere en bevegelse som skal være grensen av disse vandringene når $n \rightarrow \infty$. Det betyr at forskjellen på disse vandringene skal gå mot null når n blir stor. Men hva mener vi i det hele tatt med forskjellen mellom disse vandringene, og hvordan kan vi få de til å bli like? Om vi lar $m < n$ for to heltall så har vi to ulike vandring X^m og X^n som beveger seg på henholdsvis F^m og F^n . Disse vandringene beveger seg altså på to ulike iterasjoner. For enkelthets skyld kan vi se for oss vandringene X^0 på F^0 og X^1 på F^1 , slik som i figur 3.1.7



Figur 3.1.7: Realisering av virrevandringer på F^0 og F^1

Disse realiseringene av vandring er åpenbart ulike da de beveger seg på to ulike iterasjoner. Men merk at vi har navngitt ytterpunktene i F^1 på samme måte som punktene i F^0 . Dette er noe av kjernene i hvordan vi skal konstruere disse vandringene. Når vi igjen ser på figur 3.1.7 ser vi at det også er noe felles ved dem, begge starter i 0 og ender opp i 2. Dette er hva vi mener med at to vandring er like. Vi ser på hvordan X^1 treffer punkter på F^0 , og vil at X^1 skal treffe punktene på samme måte som X^0 . Generelt ser vi altså på hvordan

X^n treffer punkter på F^m når $m < n$. Utfordringen blir da hvordan vi skal få X^n til å treffe punkter på F^m på samme måte som X^m .

X^0 beveger seg fra 0 til 2 med sannsynligheten p_2 , men hvor stor sannsynligheten er for at X^1 ender sin vandring i 2 er ikke like åpnebart. Ved hvert knutepunkt har vandringen mange mulige valg der vi bruker myntkast og de tilhørende sannsynlighetene p_1, p_2, p_3 for å bestemme hvor vandringen går videre. Enn så lenge kaster vi alt dette kombinatoriske arbeidet under teppet, og sier at X^1 ender sin vandring i punkt 2 med sannsynligheten \tilde{p}_2 . Tilsvarende ender X^1 vandringen i de andre ytterpunktene med sannsynligheten \tilde{p}_i . Av symmetrien ser vi at $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_5$ og $\tilde{p}_2 = \tilde{p}_4$ siden $p_1 = p_5$ og $p_2 = p_4$. For et gitt valg av sannsynligheter $(p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{P}$ får vi altså sannsynligheten for at en vandring X^n ender sin vandring i punkt i gitt ved $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) \in \mathcal{P}$. Vi har med andre ord en funksjon $m : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ der $m(p_1, p_2, p_3) = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$.

Målet vårt var som sagt at X^1 skal ende sin vandring i punkt i med samme sannsynlighet som X^0 . Det vi ønsker oss blir dermed $\tilde{p}_i = p_i$. Om vi får til det for $i = 1, 2, 3$ vil vandringen X^1 treffe punkter i F^0 på samme måte som X^0 . Med tanke på funksjonen vår tilsvarer dette at vi må ha et fikspunkt, $m(p_1, p_2, p_3) = (p_1, p_2, p_3)$. Tom Lindstrøm viste at en slik funksjon er kontinuerlig og sender \mathcal{P} til \mathcal{P} , og at et slikt fikspunkt dermed må eksistere[LIN90]. At et fikspunkt for slike funksjoner er unikt og entydig ble senere bevist parallelt og uavhengig av Christophe Sabbot [SAB97], Volker Metz [MET96] og Roberto Peirone [PEI00]. Dette motiverer vårt arbeid med å lete etter fikspunkt ettersom vi vet at de finnes. Entydigheten gjør også at vi kan ha et mål om å konstruere den ene naturlige Brownske bevegelsen som oppfyller kravene våre på ulike fraktaler, og at det ikke finnes flere.

Hovedoppgaven i konstruksjonen av Brownske bevegelser på fraktaler ser dermed ut til å være å bestemme det vi kan kalle *overgangssannsynlighetene* p_1, p_2, \dots . Hvor mange p_i -er vi har avhenger av hva slags fraktal vi arbeider med. Tenk deg at vi nå har funnet disse slik at vi har et fikspunkt og $\tilde{p}_i = p_i$ for alle i . Vandringene X^m og X^n vil da treffe punkter i F^m på samme måte. Men det er fortsatt en justering til vi må gjøre. Tilbake til figur 3.1.7 ender begge vandringene opp i punkt 2, men de er fortsatt ulike. Den ene bruker nemlig mange flere steg på å nå målet. Om hvert steg tar like lang tid vil den ene vandringen bruke mye lenger tid på å nå ytterpunktene. Når vi lar $n \rightarrow \infty$ vil tiden t vi må vente før vandringen X^n når målet også gå mot uendelig. Vi må derfor finne ut hvor mange steg X^1 i snitt bruker på å nå et av ytterpunktene i F^0 . Sagt på en måte kan vi si at X^m bruker en tid t_m på å bevege seg over en av de minimale sekskantene i F^m og X^n bruker en tid t_n på å bevege seg over en av de minimale sekskantene i F^n . Om vi kan finne forholdet mellom t_m og t_n kan vi reskalere tiden slik at prosessene tar like lang tid.

Fordelen er at vi bare trenger å justere dette for den først iterasjonen og så kan vi bruke dette videre ned på de andre iterasjonene. Om X^1 i snitt bruker

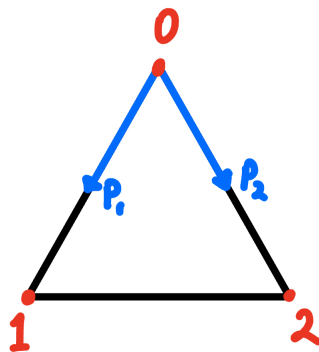
λ antall steg og ett steg tar tiden 1 vil vandringen X^1 i snitt bruke λ ganger så lang tid som X^0 . Vi kan derfor skalere tiden hvert steg i X^1 tar med λ^{-1} . Videre kan vi da skalere hvor lang tid et steg i prosessen X^n bruker med λ^{-n} . Når vi gjør dette, vil alle prosessene X^n i snitt bruke like lang tid fra 0 til et av de andre punktene på F^0 . Uansett hva n er.

For å konstruere Brownske bevegelser på fraktaler er det altså hovedsakelig to ting vi må bestemme, overgangssannsynlighetene og tidsskaleringsfaktoren λ . Vi vil i resten av denne oppgaven forsøke å beregne disse for noen konkrete fraktaler.

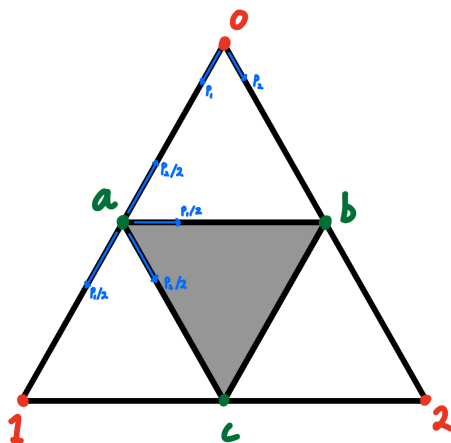
3.2 Sierpiński-trekanten

Overgangssannsynlighetene:

Det første vi ønsker å bestemme er overgangssannsynlighetene, her p_1 og p_2 . Målet er å finne et fikspunkt $(p_1, p_2) = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$. Dvs at sannsynligheten for at virrevandringen stopper i henholdsvis punkt 1 og punkt 2 er den samme enten vi beveger oss på trekanten i figur 3.2.1 eller 3.2.2. I den første er dette veldig tydelig. Vi starter i 0 og beveger oss til punkt 1 med sannsynlighet p_1 og til punkt 2 med sannsynlighet p_2 , slik figur 3.2.1 illustrerer.



Figur 3.2.1: Sannsynlighetene for å gå til punkt 1 og 2



Figur 3.2.2

For vandringen i figur 3.2.2 starter vi også i 0, men så blir det litt mer kom-

plisert. Fra 0 kan vi bevege oss til punkt a med sannsynlighet p_1 eller punkt b med sannsynlighet p_2 . Når vi står i punkt a er situasjonen enda mer komplisert, siden dette punktet er et hjørne i to forskjellige trekanter. Vi må derfor først kaste mynt for hvilken trekant vi skal bevege oss på og så benytte sannsynlighetene p_1 og p_2 for om vi skal gå til høyre eller venstre. De fire mulighetene, og tilhørende sannsynligheter for hver mulighet, fra punkt a er illustrert i figur 3.2.2. Slik fortsetter vandringen til den treffer enten punkt 1 eller 2. Vandringen starter altså i punkt 0 og går rundt til den treffer $\{1, 2\}$.

La \tilde{p}_1 være sannsynligheten for at denne vandringen stopper i punkt 1 og \tilde{p}_2 sannsynligheten for at den stopper i punkt 2. For at vi skal ha et fikspunkt må $\tilde{p}_1 = p_1$ og $\tilde{p}_2 = p_2$. Dette vil være en stor utfordring for de neste fraktalene vi skal se på. Men for Sierpiński-trekanten ser vi av symmetrien at vi kan sette $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ og få et fikspunkt. Og siden vi vet at det kun finnes ett fikspunkt er arbeidet med å bestemme overgangssannsynlighetene ferdig.

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$$

Tidsskaleringsfaktoren λ :

Det som gjenstår, er å bestemme er tidsskaleringsfaktoren λ . Det vi lurer på er hvor mye lenger tid virrevandringen bruker på å nå punkt 1 eller 2 når vi beveger oss på figur 3.2.2 i forhold til figur 3.2.1. På den opprinnelige trekanten går vi rett fra 0 til enten 1 eller 2. Denne vandringen bruker dermed bare ett steg. Om vi sier at ett steg tar tiden t , bruker denne vandringen tiden t på å komme i mål. Vandringen på den andre figuren bruker åpenbart lenger tid siden den ikke kan komme i mål på kun ett steg. Vi må derfor finne ut hvor mange steg vandringen i gjennomsnitt bruker på å komme i mål.

La S_i være gjennomsnittlig tid vandringen bruker fra punkt i til enten punkt 1 eller 2, dvs mengden $\{1, 2\}$. Målet er å finne ut er hvor lang tid vandringen i gjennomsnitt tar fra punkt 0 til $\{1, 2\}$, i figur 3.2.2, altså S_0 . Men for å gå fra 0 til $\{1, 2\}$ må vi innom noen andre punkt på veien. Og for å finne ut hva S_0 er må vi derfor ta en omvei om disse andre S_i -ene og sette opp et likningssystem. For å tydeliggjøre hva som menes kan vi se på S_a , altså gjennomsnittlig antall steg fra punkt a til $\{1, 2\}$. Fra a går vi til enten 0, b , c eller 1. Uansett hvor vi går har vi gått ett steg og derfor brukt tiden t , så $S_a = t + \text{noe mer}$.

Med sannsynlighet $\frac{1}{4}$ havner vi i punkt 1, og om vi havner i 1 er vandringen ferdig. Så dette gir ikke noe bidrag til S_a . Med sannsynlighet $\frac{1}{4}$ går vi tilbake til punkt 0, og derfra vil vandringen bruke tiden S_0 på å komme i mål. Dette gir oss et bidrag på $\frac{S_0}{4}$. Tilsvarende er det sannsynlighet $\frac{1}{4}$ for å gå til de to andre punktene, b og c , også. Totalt blir dermed den gjennomsnittlige tiden vandringen bruker fra a til $\{1, 2\}$ gitt ved

$$S_a = t + \frac{S_0}{4} + \frac{S_b}{4} + \frac{S_c}{4}$$

På samme måte setter vi opp likninger for de andre punktene. Det gir oss

følgende likningsystem:

$$\begin{aligned}S_0 &= t + \frac{S_a}{2} + \frac{S_b}{2} \\S_a &= t + \frac{S_0}{4} + \frac{S_b}{4} + \frac{S_c}{4} \\S_b &= t + \frac{S_0}{4} + \frac{S_a}{4} + \frac{S_c}{4} \\S_c &= t + \frac{S_a}{4} + \frac{S_b}{4}\end{aligned}$$

Dette er et likningssett med fire lineært uavhengige linkinger med fire ukjente. Vi kan derfor sette opp en matrise og radredusere for å finne svaret. Dette er metoden vi vil bruke på de andre fraktalene, men akkurat her finnes det en enda raskere vei til mål. Vi utnytter symmetrien i at gjennomsnittlig antall steg til $\{1, 2\}$ må være den samme fra både a og b , altså er $S_a = S_b$. Gjør vi dette får vi:

$$S_0 = t + S_a$$

Videre får vi da

$$S_c = t + \frac{1}{2}S_a \quad \text{og} \quad S_c = 2S_a - 5$$

Setter vi disse lik hverandre får vi:

$$\begin{aligned}t + \frac{1}{2}S_a &= 2S_a - 5 \\ \Rightarrow S_a &= 4t\end{aligned}$$

Dette gir oss videre

$$S_b = 4t, \quad S_c = 3t, \quad S_0 = 5t$$

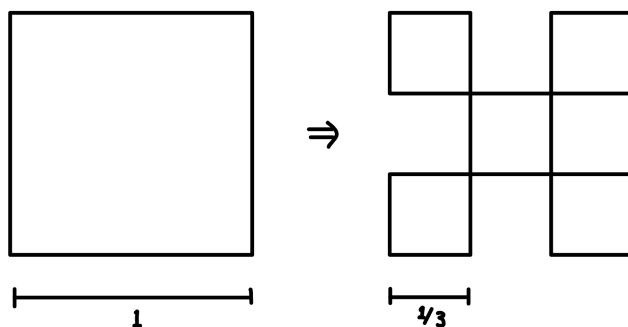
Av disse er det kun den siste vi er interessert i, $S_0 = 5t$. Virrevandringen bruker altså fem ganger så lang tid på å gå fra 0 til $\{1, 2\}$ når vi beveger oss på første iterasjon kontra den opprinnelige trekanten. Dette betyr at tidsskaleringsfaktoren må være

$$\lambda = 5$$

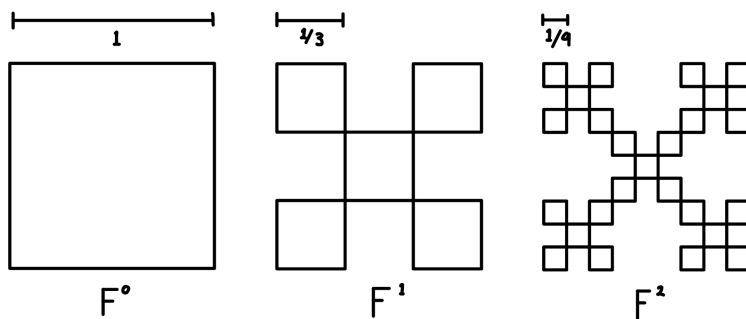
3.3 Vicsek-fraktalen

Overgangssannsynlighetene:

Vicsek-fraktalen starter med et kvadrat. Dette erstattes av fem kvadrater med $\frac{1}{3}$ så lange sidekanter som plasseres slik figur 3.3.1 viser. I hvert steg av prosessen erstattes hvert kvadrat med fem nye kvadrater skalert med $\frac{1}{3}$. I figur 3.3.2 er de første iterasjonene av Vicsek-fraktalen illustrert.



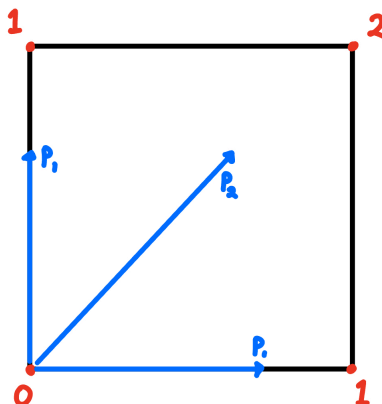
Figur 3.3.1: Konstruksjon av Vicsek-fraktalen



Figur 3.3.2: De første iterasjonene av Vicsek-fraktalen

I det opprinnelige kvadratet starter vi i et av hjørnene og kan bevege oss til de tre andre. Vi tenker oss at vi starter i nedre venstre hjørne, og kaller dette punktet for 0. Derfra kan vi gå langs hver av sidekantene for å komme til to av de andre hjørnene. Siden disse er helt symmetriske, gir vi dem samme navn: 1. Vi kan også bevege oss langs diagonalen og komme til punkt 2. Vi lar p_1 være sannsynligheten for å gå langs hver av sidekantene og havne i punkt 1 og p_2

være sannsynligheten for å gå langs diagonalen og havner i punkt 2.



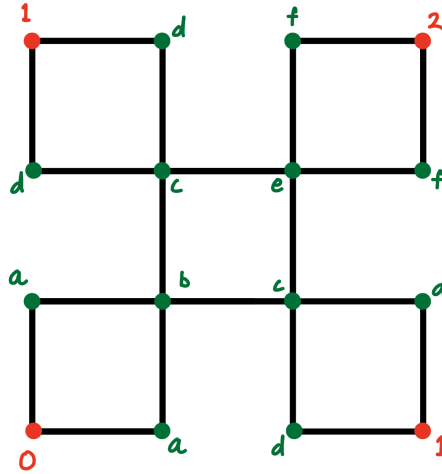
Figur 3.3.3: Vandringen på F^0 går fra punkt 0 til 1 eller 2

Siden sannsynlighetene må summere til 100% får vi altså et krav om at $2p_1 + p_2 = 1$. Dette kan vi utnytte til å gå fra to ukjente til én. Vi setter $p_2 = p$ og får

$$2p_1 + p = 1$$

$$p_1 = \frac{1}{2}(1 - p)$$

Videre ser vi så på første iterasjon av Vicsek-fraktalen. Målet er å bestemme p slik at sannsynligheten for at en virrevandring som starter i 0 fortsatt har like stor sannsynlighet for å havne i henholdsvis punkt 1 og 2 som før. For å forenkle døper vi igjen to punkter som er helt symmetriske i denne situasjonen til samme navn. I figur 3.3.4 er for eksempel alle punkter med navn d identiske med tanke på hva vi er interessert i. De er alle helt like i form av hvor sannsynlig det er at en virrevandring fra dette punktet skal havne i 1 eller 2.



Figur 3.3.4: Navnsetting av punktene i F^1

Virrevandringen starter i punkt 0 og fortsetter helt til den treffer enten punkt 1 eller 2. La q_i være sannsynligheten for at en vandring fra punkt i ender opp i punkt 2, uten å gå innom punkt 1. Fra punkt 0 går vandringen med sannsynlighet p til punkt 2 og $\frac{1}{2}(1-p)$ til hvert av de to punktene med navn a . Dermed får vi at uttrykket for q_0 blir:

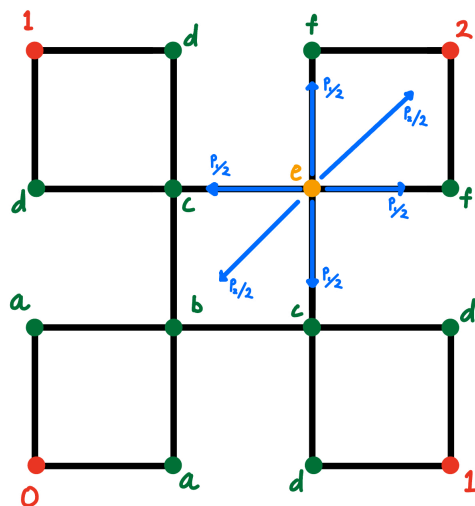
$$q_0 = (1-p)q_a + pq_b$$

Tilsvarende kan vi se at fra punkt a kan vi gå til punkt 0 eller punkt b , men også til det andre punktet med navn a . Igjen går vandringen langs hver sidekant med sannsynlighet $\frac{1}{2}(1-p)$ og langs diagonalen med sannsynlighet p . For vandringen fra a får vi derfor:

$$q_a = \frac{1}{2}(1-p)q_0 + pq_a + \frac{1}{2}(1-p)q_b$$

Slik kan vi sette opp likninger for alle q_i -ene. For å tydeliggjøre enda mer går vi gjennom hvordan uttrykket for q_e ser ut. Dette er illustrert i figur 3.3.5 (husk at $p_2 = p$ og $p_1 = \frac{1}{2}(1-p)$). Punkt e er hjørne i to forskjellige firkanter, vi kaster derfor først en rettferdig mynt slik at vi går til hver firkant med sannsynlighet $\frac{1}{2}$. Om vi går til den midtre firkanten går vi igjen langs diagonalen med sannsynlighet p og langs hver sidekant med sannsynlighet $\frac{1}{2}(1-p)$. Totalt går vi dermed til punkt b med $\frac{p}{2}$ og punkt c med $\frac{1}{2}(1-p)$. Om vi går til den andre firkanten har vi igjen $\frac{1}{2}(1-p)$ for å gå langs hver sidekant, så vi går til punkt f med $\frac{1}{2}(1-p)$. Og vi går langs diagonalen med sannsynlighet p , så fra punkt e går vi til punkt 2, og dermed i mål, med sannsynlighet $\frac{p}{2}$. Totalt får vi dermed:

$$q_e = \frac{1}{2}((1-p)q_c + pq_b) + \frac{1}{2}((1-p)q_f + p)$$



Figur 3.3.5: Fra punkt e kan vandringen gå seks veier

Om vi står i punkt d eller c ser vi at virrevandringen kan gå til punkt 1. Men vi har satt at q_i er sannsynligheten for at vandringen ender i punkt 2 uten å gå innom punkt 1. Så for disse punktene vil dette ikke gi noe bidrag, eller om du vil så kan vi si at $q_1 = 0$, slik at $p \cdot q_1 = 0$. Totalt sett får vi følgende likninger:

$$\begin{aligned}
 q_0 &= (1-p)q_a + pq_b \\
 q_a &= \frac{1}{2}(1-p)q_0 + pq_a + \frac{1}{2}(1-p)q_b \\
 q_b &= \frac{1}{2}(pq_0 + (1-p)q_a) + \frac{1}{2}((1-p)q_c + pq_e) \\
 q_c &= \frac{1}{2}((1-p)q_d) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(1-p)q_b + pq_c + \frac{1}{2}(1-p)q_e) \\
 q_d &= \frac{1}{2}(1-p)q_c + pq_d \\
 q_e &= \frac{1}{2}((1-p)q_c + pq_b) + \frac{1}{2}((1-p)q_f + p) \\
 q_f &= \frac{1}{2}(1-p)q_e + pq_f + \frac{1}{2}(1-p)
 \end{aligned}$$

Med et lite stykke arbeid kan vi systematisere disse likningene litt og løse likningssystemet med matrisereduksjon. Vi multipliserer så vi blir kvitt brøkene, løser hver likning for konstantleddet, og sorterer de andre leddene *alfabetisk*. Gjør vi alt dette får vi følgende likningssystem:

$$\begin{aligned}
0 &= -q_0 + (1-p)q_a + pq_b \\
0 &= q_0 - 2q_a + q_b \\
0 &= pq_0 + (1-p)q_a - 2q_b + (1-p)q_c + pq_e \\
0 &= (1-p)q_b + (2p-4)q_c + 2(1-p)q_d + (1-p)q_e \\
0 &= q_c + -2q_d \\
-p &= pq_b + (1-p)q_c + -2q_e + (1-p)q_f \\
-1 &= q_e - 2q_f
\end{aligned}$$

Dette likningssystemet kan representeres med følgende matrise, der konstantleddene lagt i siste kolonne:

Figur 3.3.6: Matriserepresentasjon av likningssystemet

$$\begin{pmatrix}
-1 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p & 1-p & -2 & 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1-p & 2p-4 & 2-2p & 1-p & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & p & 1-p & 0 & -2 & 1-p & -p \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1
\end{pmatrix}$$

For å finne løsningen på likningssystemet radreduserer vi matrisen. Dette gir oss følgende:

Figur 3.3.7: Radredusert matrise

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3p-4} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3p-4} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3p-4} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{p-1}{3p-4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{p-1}{2(3p-4)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{p-2}{3p-4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2p-3}{3p-4}
\end{pmatrix}$$

Fra den radreduserte matrisen ser vi en del interessante resultater. For det første ser vi at $q_0 = q_a = q_b$. Altså er sannsynligheten for å havne i punkt 2 den samme enten vi står i punkt 0, a eller b . Dette er riktignok ikke så overraskende siden den eneste måten å komme seg til punkt 2 fra 0 eller a er å gå innom b . Så disse sannsynlighetene burde være like uansett hva vi setter p til å være. Selve poenget med all denne jobben var å bestemme q_0 , og fra den radreduserte

matrisen ser vi at:

$$q_0 = -\frac{1}{3p-4} = \frac{1}{4-3p}$$

Dette forteller oss sannsynligheten for at vandringen fra 0 ender opp i 2, uten å gå innom punkt 1. Målet vårt er at denne sannsynligheten skal være den samme som før, derfor krever vi at $q_0 = p$.

$$\begin{aligned} q_0 &= p \\ \frac{1}{4-3p} &= p \\ 1 &= p(4-3p) \\ 3p^2 - 4p + 1 &= 0 \\ \Rightarrow p = 1 \quad \text{eller} \quad p &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vi har to mulige løsninger for p . Den første, $p = 1$, svarer til at virrevandringen kun beveger seg langs diagonalen. Da er det klart at sannsynligheten for å ende opp i punkt 2 er 100% samme hvor mange mindre kvadrater vi skal bevege oss på. Dette er ikke av interesse siden denne vandringen ikke vil kunne bevege seg på hele fraktalen. Det bryter også med kravet om at $p_1 \geq p_2$. Den andre løsningen, $p = \frac{1}{3}$, tilsvarer at vandringen beveger seg langs diagonalen $\frac{1}{3}$ av gangene, det gir videre:

$$p_1 = \frac{1}{2}(1-p) = \frac{1}{3}$$

slik at hver av de to sidekantene også har sannsynlighet $\frac{1}{3}$.

Vi har nå funnet fikspunktet for overgangssannsynlighetene, nemlig $p_1 = p_2 = \frac{1}{3}$. For å dobbeltsjekke at dette er et fikspunkt kan vi vise at dette valget oppfyller kravene våre. Vi ønsker at sannsynligheten for å havne i punkt 2 er den samme for begge vandringene: For den første er den $p_2 = \frac{1}{3}$ og for den andre har vi $\tilde{p}_2 = q_0 = \frac{1}{4-3p} = \frac{1}{4-3\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$. På samme måte er sannsynligheten for at vi havner i punkt 1 i det første tilfellet gitt ved $2p_1 = \frac{2}{3}$ og i det andre tilfellet har vi $2\tilde{p}_1 = 1 - q_0 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Kravet $2p_1 + p_2 = 1$ er også oppfylt. Vi har dermed funnet fikspunktet vårt for overgangssannsynlighetene

$$(p_1, p_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Tidsskaleringsfaktoren λ :

Det som gjenstår, er å finne tidsskaleringsfaktoren λ . For virrevandringen på det opprinnelige kvadratet går vandringen rett fra punkt 0 til $\{1, 2\}$. Den bruker kun ett steg, som vi kan si at tar tiden t . For virrevandringen på første iterasjon av Vicsek-fraktalen er det åpenbart at vandringen bruker flere steg på å nå $\{1, 2\}$.

Om hvert steg fortsatt tar tiden t vil denne prosessen ta mye lenger tid. Vi må derfor finne tidsskaleringsfaktoren slik at disse vandringene i gjennomsnitt tar like lang tid. For å få til dette benytter vi samme teknikk som på Sierpiński-trekanten.

La S_i være gjennomsnittlig tid en vandring fra punkt i bruker på å treffe $\{1, 2\}$. Vi lar fortsatt ett steg ta tiden t . Fra 0 går vi ett steg og havner $\frac{2}{3}$ av gangene i punkt a , og $\frac{1}{3}$ av gangene i punkt b . Når vi havner i punkt a vil vandringen bruke tiden S_a derfra og i mål, og tilsvarende S_b fra punkt b og i mål. Uttrykket for S_0 blir derfor:

$$S_0 = t + \frac{2}{3}S_a + \frac{1}{3}S_b$$

Siden $p_1 = p_2 = \frac{1}{3}$ har alle veiene fra punkt $0, a, d$ og f samme sannsynlighet, nemlig $\frac{1}{3}$. Derimot har alle veiene fra b, c og e sannsynlighet $\frac{1}{6}$ siden disse punktene tilhører to minimale kvadrater. Her er figur 3.3.5 til god hjelp for å forstå uttrykkene som settes opp. Fra punkt c, d, e og f kan vandringen komme i mål. For eksempel går vandringen fra punkt f til punkt 2 med sannsynlighet $\frac{1}{3}$. Dette vil ikke gi noe bidrag til uttrykket S_f siden det betyr at vandringen har kommet i mål og ikke skal videre. Ellers kan vandringen gå til f eller e fra f . Uttrykket for S_f blir derfor:

$$S_f = t + \frac{1}{3}S_e + \frac{1}{3}S_f$$

Setter vi opp alle uttrykkene for $i \in \{0, a, b, c, d, e, f\}$ får vi:

$$\begin{aligned} S_0 &= t + \frac{2}{3}S_a + \frac{1}{3}S_b \\ S_a &= t + \frac{1}{3}S_0 + \frac{1}{3}S_a + \frac{1}{3}S_b \\ S_b &= t + \frac{1}{6}S_0 + \frac{1}{3}S_a + \frac{1}{3}S_c + \frac{1}{6}S_e \\ S_c &= t + \frac{1}{6}S_b + \frac{1}{6}S_c + \frac{1}{3}S_d + \frac{1}{6}S_e \\ S_d &= t + \frac{1}{3}S_c + \frac{1}{3}S_d \\ S_e &= t + \frac{1}{6}S_b + \frac{1}{3}S_c + \frac{1}{3}S_f \\ S_f &= t + \frac{1}{3}S_e + \frac{1}{3}S_f \end{aligned}$$

Her har vi syv likninger med syv ukjente, som vi igjen kan løse med en matrise og radreduksjon. Vi gjør grovarbeidet med å manipulere likningene og får:

$$\begin{aligned} -3t &= -3S_0 + 2S_a + S_b \\ -3t &= S_0 - 2S_a + S_b \\ -6t &= S_0 + 2S_a - 6S_b + 2S_c + S_e \\ -6t &= S_b - 5S_c + 2S_d + S_e \\ -3t &= S_c - 2S_d \\ -6t &= S_b + 2S_c - 6S_e + 2S_f \\ -3t &= S_e - 2S_f \end{aligned}$$

Dette gir oss følgende matrise:

Figur 3.3.8: Matriserepresentasjon av likningssystemet

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3t \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3t \\ 1 & 2 & -6 & 2 & 0 & 1 & 0 & -6t \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 1 & 0 & -6t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -3t \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -6 & 2 & -6t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3t \end{pmatrix}$$

Vi radreduserer matrisen og får:

Figur 3.3.9: Radredusert matrise

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5t \end{pmatrix}$$

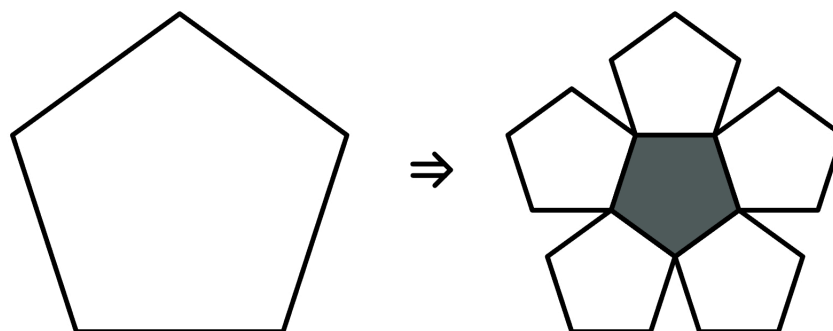
Fra den redreduserte matrisen får vi at $S_0 = 15t$. Det vil si at virrevandringen på de fem små kvadratene bruker 15 ganger så lang tid på å nå ytterpunktene $\{1, 2\}$ som vandringen på det opprinnelige kvadratet. Altså må vi sette tidsskaleringsfaktoren til $\lambda = 15$ for at de to vandringene skal ta like lang tid. Av resultatene ser vi også et par andre interessante ting: $S_0 = S_a = 15t$, vandringen tar med andre ord like lang tid fra punkt 0 og a . Om vi går fra 0 til a har vi sånn sett ikke kommet noe nærmere mål. Dette kan modelleres ved at å gå fra 0 til a egentlig er det samme som å bli stående i 0, alternativt kan vi navngi de to punktene likt. Tilsvarende ser vi både at $S_c = S_e = 7t$ og $S_d = S_f = 5t$. Dette skyldes symmetrien fra $p_1 = p_2 = \frac{1}{3}$, så det er egentlig ikke noen forskjell på de tre små kvadratene som er knyttet til midtkvadratet gjennom henholdsvis c og e . Men hovedresultatet fra denne delen er altså tidsskaleringsfaktoren for Vicsek-fraktalen:

$$\lambda = 15$$

3.4 Pentagon

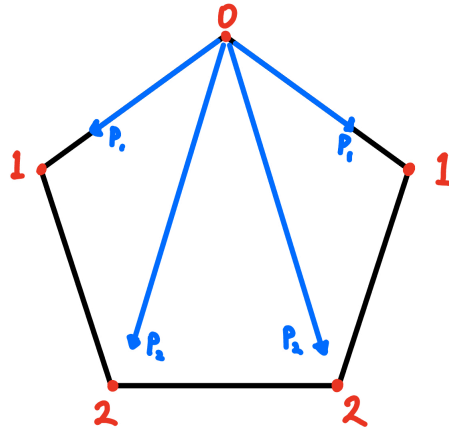
Overgangssannsynlighetene:

Femkantfraktalen (også kjent som Sierpiński pentagon) konstrueres som illustrert i figur 3.4.1. Man starter med én femkant, denne erstattes så med fem mindre femkanter, den grå femkanten i midten er altså ikke med. Denne prosessen gjentas på nytt og på nytt på hver femkant som oppstår, og det er grensen av denne prosessen når vi fortsetter den i uendeligheten som er selve fraktalen.



Figur 3.4.1: Konstruksjon av femkantfraktalen

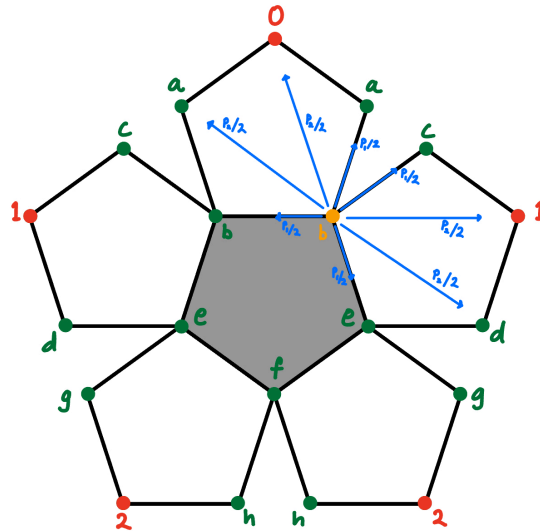
Igjen gjelder det å være smarte med navnsettingen når vi skal se på virrevandringene. Det første vi vil se på er hvordan vi beveger oss på den opprinnelige femkanten. For å utnytte symmetrien mest mulig sier vi at vi starter på toppen, som vi kaller punkt 0. Derfra kan vi bevege oss langs kantene til de to punktene kalt 1 med sannsynlighet p_1 eller på tvers av femkanten til de to punktene kalt 2 med sannsynlighet p_2 , som illustrert i figur 3.4.2.



Figur 3.4.2: Sannsynligheter for å gå til punkt 1 og 2

Dermed blir sannsynligheten for å havne i 1 gitt ved $2p_1$ og sannsynligheten for å havne i 2 er $2p_2$. Vi krever derfor at $2p_1 + 2p_2 = 1$. For å komme ned til én variabel dører vi om $p_2 = p$, som videre gir oss $p_1 = \frac{1}{2} - p$.

Når vi nå beveger oss over på første iterasjon, dvs de fem femkantene i figur 3.4.1, vil vi igjen gi tilsvarende punkter samme navn. Dette gir oss navnsettingen illustrert i figur 3.4.3.



Figur 3.4.3: Navnsetting og sannsynligheter fra punkt b

La q_i være sannsynligheten for at en virrevandring fra punkt i ender i 2, uten å gå innom 1. Det vi ønsker å finne her er dermed q_0 som er sannsynligheten for at vandringen ender i 2 når vi går fra 0. Den vil vi at skal være det samme som for vandringen på den opprinnelige femkanten, altså $q_0 = 2p_2$. Før vi kommer dit må vi igjen sette opp likningene for hver av q_i -ene slik at vi kan lete etter dette fikspunktet.

Fra punkt 0 går vi til a med sannsynlighet $2p_1$ og til b med sannsynlighet $2p_2$ (husk at $p_2 = p$ og $p_1 = \frac{1}{2} - p$). Derfor får vi at

$$q_0 = 2\left(\frac{1}{2} - p\right)q_a + 2pq_b$$

Noen av punktene tilhører to femkanter. I disse tilfellene kastes en rettfærdig mynt slik at vi går til hver femkant med sannsynlighet $\frac{1}{2}$. Sannsynlighetene for de ulike veiene fra punkt b er illustrert i figur 3.4.3. Fra figuren ser vi at q_b er gitt ved:

$$q_b = \frac{p_2}{2}q_0 + \frac{p_1}{2}q_a + \frac{p_2}{2}q_a + \frac{p_1}{2}q_b + \frac{p_1}{2}q_c + \frac{p_2}{2}q_d + \frac{p_1}{2}q_e$$

Fra b kan vandringen gå til punkt 1 med sannsynlighet $\frac{p_2}{2}$. Men dette gir ikke noe bidrag til q_b siden vandringen skal ende i 2 uten å gå innom 1 først. Når vi igjen benytter at $p_2 = p$ og $p_1 = \frac{1}{2} - p$ får vi:

$$q_b = \frac{1}{2}(pq_0 + \left(\frac{1}{2} - p\right)q_a + pq_a + \left(\frac{1}{2} - p\right)q_b) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2} - p\right)q_c + pq_d + \left(\frac{1}{2} - p\right)q_e\right)$$

Vi setter opp alle uttrykkene for q_i -ene på denne måten. Her er figur 3.4.3 til god hjelp.

$$\begin{aligned} q_0 &= 2\left(\frac{1}{2} - p\right)q_a + 2pq_b \\ q_a &= \left(\frac{1}{2} - p\right)q_0 + pq_a + pq_b + \left(\frac{1}{2} - p\right)q_b \\ q_b &= \frac{1}{2}(pq_0 + \left(\frac{1}{2} - p\right)q_a + pq_a + \left(\frac{1}{2} - p\right)q_b) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2} - p\right)q_c + pq_d + \left(\frac{1}{2} - p\right)q_e\right) \\ q_c &= \left(\frac{1}{2} - p\right)q_b + pq_d + pq_e \\ q_d &= pq_b + pq_c + \left(\frac{1}{2} - p\right)q_e \\ q_e &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2} - p\right)q_b + pq_c + \left(\frac{1}{2} - p\right)q_d\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2} - p\right)q_f + \left(\frac{1}{2} - p\right)q_g + pq_h + p\right) \\ q_f &= \left(\frac{1}{2} - p\right)q_e + pq_g + \left(\frac{1}{2} - p\right)q_h + p \\ q_g &= \left(\frac{1}{2} - p\right)q_e + pq_f + pq_h + \left(\frac{1}{2} - p\right) \\ q_h &= pq_e + \left(\frac{1}{2} - p\right)q_f + pq_g + \left(\frac{1}{2} - p\right) \end{aligned}$$

Herfra kan vi igjen sortere og manipulere likningene. Hovedsakelig består dette i å løse dem for konstantleddet og sortere de andre leddene *alfabetisk*. Gjør vi

dette får vi:

$$\begin{aligned}
 0 &= -q_0 + (1 - 2p)q_a + 2pq_b \\
 0 &= (1 - 2p)q_0 + (2p - 2)q_a + q_b \\
 0 &= 2pq_0 + q_a + (-3 - 2p)q_b + (1 - 2p)q_c + 2pq_d + (1 - 2p)q_e \\
 0 &= (1 - 2p)q_b - 2q_c + 2pq_d + 2pq_e \\
 0 &= 2pq_b + 2pq_c - 2q_d + (1 - 2p)q_e \\
 -2p &= (1 - 2p)q_b + 2pq_c + (1 - 2p)q_d - 4q_e + (1 - 2p)q_f + (1 - 2p)q_g + 2pq_h \\
 -2p &= (1 - 2p)q_e - 2q_f + 2pq_g + (1 - 2p)q_h \\
 2p - 1 &= (1 - 2p)q_e + 2pq_f - 2q_g + 2pq_h \\
 2p - 1 &= 2pq_e + (1 - 2p)q_f + 2pq_g - 2q_h
 \end{aligned}$$

Vi har nå et likningssystem med ni lineært uavhengige likninger og ni ukjente, så vi setter nok en gang opp en matrise og radreduserer.

Figur 3.4.4: Matriserepresentasjon av likningssystemet

$$\begin{pmatrix}
 -1 & 1 - 2p & 2p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 - 2p & 2p - 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2p & 1 & -3 - 2p & 1 - 2p & 2p & 1 - 2p & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 - 2p & -2 & 2p & 2p & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 2p & 2p & -2 & 1 - 2p & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 - 2p & 2p & 1 - 2p & -4 & 1 - 2p & 1 - 2p & 2p & -2p \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 2p & -2 & 2p & 1 - 2p & -2p \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 2p & 2p & -2 & 2p & 2p - 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2p & 1 - 2p & 2p & -2 & 2p - 1
 \end{pmatrix}$$

Vi radreduserer matrisen, dette gir oss følgende:

Figur 3.4.5: Radredusert matrise

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3p-2}{2(2p-3)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3p-2}{2(2p-3)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3p-2}{2(2p-3)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{p+1}{2(2p-3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{p-4}{2(2p-3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5(p-1)}{2(2p-3)} \end{pmatrix}$$

Fra den radreduserte matrisen får vi altså hovedresultatet:

$$q_0 = \frac{3p-2}{2(2p-3)}$$

Før vi går videre er det interessant å legge merke til at noen av q_i -ene ikke avhenger av p . Vi får nemlig $q_d = \frac{1}{4}$, $q_e = \frac{1}{2}$ og $q_g = \frac{3}{4}$. Igjen ser vi også at $q_0 = q_a = q_b$, sannsynligheten for å komme til punkt 2 er altså den samme om vi står i punkt 0, a eller b . Fra figur 3.4.3 ser vi at dette gir mening siden vi må innom punkt b på veien, så om vi står i 0 eller a så vil vi før eller siden komme til punkt b . Det vi videre ønsker er å velge p slik at vi får et fikspunkt.

For at vi skal ha et fikspunkt må sannsynligheten for å havne i henholdsvis 1 og 2 være den samme nå som på den opprinnelige femkanten. I den opprinnelige var sannsynligheten $2p$ for å havne i punkt 2, mens den nå er q_0 . Vi setter de lik hverandre og løser for p :

$$\begin{aligned} q_0 &= 2p \\ \frac{3p-2}{2(2p-3)} &= 2p \\ 3p-2 &= 4p(2p-3) \\ 0 &= 8p^2 - 15p + 2 \\ \Rightarrow p &= \frac{15}{16} \pm \frac{\sqrt{161}}{16} \end{aligned}$$

Dette gir $p \approx 0.1446$ og $p \approx 1.7305$. Den siste løsningen kan forkastes da dette

er en sannsynlighet større enn 1. Vi får altså:

$$p = \frac{15}{16} - \frac{\sqrt{161}}{16} \approx 0.1446$$

som løsning. Videre finner vi p_1 ved å bruke $p_1 = \frac{1}{2} - p$. Dette gir oss overgangs-sannsynligheten p_1 og p_2 for femkant fraktalen:

$$p_1 = \frac{\sqrt{161} - 7}{16} \approx 0.3555$$

$$p_2 = \frac{15 - \sqrt{161}}{16} \approx 0.1445$$

Det som mangler er å finne tidsskaleringsfaktoren for femkantfraktalen.

Tidsskaleringsfaktoren λ :

På samme måte som i de tidligere eksemplene lar vi S_i være gjennomsnittlig tid en virrevandring bruker fra punkt i og i mål. Her er $i \in \{0, a, b, c, d, e, f, g, h\}$ og målet for vandringen er hjørnene i den opprinnelige femkanten, dvs mengden $\{1, 2\}$. I likningene benytter vi nå p_1 og p_2 for å gjøre det mer oversiktlig, men disse har altså verdiene vi nettopp fant.

$$S_0 = t + 2p_1S_a + 2p_2S_b$$

$$S_a = t + p_1S_0 + p_2S_a + p_2S_b + p_1S_b$$

$$S_b = t + \frac{1}{2}(p_1S_a + p_2S_0 + p_2S_a + p_1S_b) + \frac{1}{2}(p_1S_c + p_2S_d + p_1S_e)$$

$$S_c = t + p_1S_b + p_2S_d + p_2S_e$$

$$S_d = t + p_2S_b + p_2S_c + p_1S_e$$

$$S_e = t + \frac{1}{2}(p_1S_b + p_2S_c + p_1S_d) + \frac{1}{2}(p_1S_f + p_1S_g + p_2S_h)$$

$$S_f = t + p_1S_e + p_2S_g + p_1S_h$$

$$S_g = t + p_1S_e + p_2S_f + p_2S_h$$

$$S_h = t + p_2S_e + p_1S_f + p_2S_g$$

Nok en gang sorterer vi likningene litt, der vi utnytter at $p_1 + p_2 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
-t &= -S_0 + 2p_1S_a + 2p_2S_b \\
-t &= p_1S_0 + (p_2 - 1)S_a + \frac{1}{2}S_b \\
-2t &= p_2S_0 + \frac{1}{2}S_a + (p_1 - 2)S_b + p_1S_c + p_2S_d + p_1S_e \\
-t &= p_1S_b - S_c + p_2S_d + p_2S_e \\
-t &= p_2S_b + p_2S_c - S_d + p_1S_e \\
-2t &= p_1S_b + p_2S_c + p_1S_d - 2S_e + p_1S_f + p_1S_g + p_2S_h \\
-t &= p_1S_e - S_f + p_2S_g + p_1S_h \\
-t &= p_1S_e + p_2S_f - S_g + p_2S_h \\
-t &= p_2S_e + p_1S_f + p_2S_g - S_h
\end{aligned}$$

For å forenkle kan vi sette vi $t = 1$. Vi setter også inn at $p_2 = p$ og at $p_1 = \frac{1}{2} - p_2 = (\frac{1}{2} - p)$.

$$\begin{aligned}
-1 &= -S_0 + 2(\frac{1}{2} - p)S_a + 2pS_b \\
-1 &= (\frac{1}{2} - p)S_0 + (p - 1)S_a + \frac{1}{2}S_b \\
-2 &= pS_0 + \frac{1}{2}S_a + ((\frac{1}{2} - p) - 2)S_b + (\frac{1}{2} - p)S_c + pS_d + (\frac{1}{2} - p)S_e \\
-1 &= (\frac{1}{2} - p)S_b - S_c + pS_d + pS_e \\
-1 &= pS_b + pS_c - S_d + (\frac{1}{2} - p)S_e \\
-2 &= (\frac{1}{2} - p)S_b + pS_c + (\frac{1}{2} - p)S_d - 2S_e + (\frac{1}{2} - p)S_f + (\frac{1}{2} - p)S_g + pS_h \\
-1 &= (\frac{1}{2} - p)S_e - S_f + pS_g + (\frac{1}{2} - p)S_h \\
-1 &= (\frac{1}{2} - p)S_e + pS_f - S_g + pS_h \\
-1 &= pS_e + (\frac{1}{2} - p)S_f + pS_g - S_h
\end{aligned}$$

Vi manipulerer likningene litt så vi unngår brøker. Det gir følgende likningssystem:

$$\begin{aligned}
-1 &= -S_0 + (1 - 2p)S_a + 2pS_b \\
-2 &= (1 - 2p)S_0 + (2p - 2)S_a + S_b \\
-4 &= 2pS_0 + S_a + ((-3 - 2p)S_b + (1 - 2p)S_c + 2pS_d + (1 - 2p)S_e \\
-2 &= (1 - 2p)S_b - 2S_c + 2pS_d + 2pS_e \\
-2 &= 2pS_b + 2pS_c - 2S_d + (1 - 2p)S_e \\
-4 &= (1 - 2p)S_b + 2pS_c + (1 - 2p)S_d - 4S_e + (1 - 2p)S_f + (1 - 2p)S_g + 2pS_h \\
-2 &= (1 - 2p)S_e - 2S_f + 2pS_g + (1 - 2p)S_h \\
-2 &= (1 - 2p)S_e + 2pS_f - 2S_g + 2pS_h \\
-2 &= 2pS_e + (1 - 2p)S_f + 2pS_g - 2S_h
\end{aligned}$$

Fra dette kan vi sette opp følgende matrise:

Figur 3.4.6: Matriserepresentasjon av likningssystemet

$$\begin{pmatrix} -1 & 1-2p & 2p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1-2p & 2p-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2p & 1 & -3-2p & 1-2p & 2p & 1-2p & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1-2p & -2 & 2p & 2p & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2p & 2p & -2 & 1-2p & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1-2p & 2p & 1-2p & -4 & 1-2p & 1-2p & 2p & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2p & -2 & 2p & 1-2p & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2p & 2p & -2 & 2p & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2p & 1-2p & 2p & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Igjen ønsker vi å få matrisen på radredusert trappeform slik at vi enkelt kan hente ut verdien for S_0 . Men med så mange likninger er vi over grensen av hva diverse online matrisekalkulatorer kan takle, og de fleste kalkulatorene gir beskjed om at kalkulasjonen tar for lang tid. Det nærmeste noen av kalkulatorene kommer er å få matrisen på trappeform (og ikke redusert trappeform).

Figur 3.4.7: Matrise på trappeform. Det er kun én matrise, men den er såpass stor at den må deles i to for å få plass på siden

$$\begin{pmatrix} 1 & 2p-1 & -2p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4p^2-2p-1 & -4p^2+2p+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1-2p & 2p & 1-2p \\ 0 & 0 & 0 & (2p-1)^2-4 & 6p-4p^2 & 4p^2+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(4p^2-2p-1) & -(4p^2-2p-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(-20p^2+2p+17) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2p-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14p-11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2(11p+1) \\ 2(1-2p)(2p-3) & 2(1-2p)(2p-3) & 4p(2p-3) & -56p^3+56p^2+20p-17 & 62-58p & 76p^2-178p+96 \\ 4(4p^3-20p^2+8p+7) & 2(p-1)(28p^2+6p+3) & (2p-3)(11p+1) & \frac{5(2p-3)(4p^2-2p-1)}{p+1} & \frac{(p+1)(2p-3)(19p-16)}{(4p^2-2p-1)} & 70-55p \\ 0 & -(p+1)(9p-11) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Selv om matrisen ikke er på redusert trappeform, kan vi fortsatt hente ut relevant informasjon. Fra nederste rad ser vi at vi kan finne sammenhengen mellom S_h og p . Nederste rad forteller oss nemlig at:

$$\frac{5(2p-3)(4p^2-2p-1)}{p+1} S_h = 70 - 55p$$

Dette kan vi løse for S_h slik at vi får et uttrykk for S_h som kun avhenger av p :

$$S_h = \frac{(70 - 55p)(p + 1)}{5(2p - 3)(4p^2 - 2p - 1)}$$

Deretter kan vi fra nest nederste rad finne S_g uttrykt ved S_h og p . Videre finner vi S_f uttrykt ved S_g, S_h og p . Slik fortsetter vi for alle S_i -ene. Dette gir oss følgende uttrykk:

$$\begin{aligned} S_h &= \frac{(70 - 55p)(p + 1)}{5(2p - 3)(4p^2 - 2p - 1)} \\ S_g &= \frac{(2p - 3)(19p - 16)}{(9p - 11)(4p^2 - 2p - 1)} + \frac{(2p - 3)(11p + 1)}{2(p + 1)(9p - 11)} S_h \\ S_f &= \frac{(76p^2 - 178p + 96)}{4(4p^3 - 20p^2 + 8p + 7)} - \frac{(p - 1)(28p^2 + 6p + 3)}{2(4p^3 - 20p^2 + 8p + 7)} S_g - \frac{(-56p^3 + 56p^2 + 20p - 17)}{4(4p^3 - 20p^2 + 8p + 7)} S_h \\ S_e &= \frac{2(31 - 29p)}{(-20p^2 + 2p + 17)} + \frac{2(2p - 1)(2p - 3)}{(-20p^2 + 2p + 17)} S_f + \frac{2(2p - 1)(2p - 3)}{(-20p^2 + 2p + 17)} S_g + \frac{-4p(2p - 3)}{(-20p^2 + 2p + 17)} S_h \\ S_d &= -\frac{(11p + 1)}{(4p^2 - 2p - 1)} + \frac{S_e}{2} \\ S_c &= \frac{(14p - 11)}{(2p - 1)^2 - 4} - \frac{2p(3 - 2p)}{(2p - 1)^2 - 4} S_d - \frac{(4p^2 + 1)}{(2p - 1)^2 - 4} S_e \\ S_b &= \frac{7}{2} + \frac{1 - 2p}{2} S_c + p S_d + \frac{1 - 2p}{2} S_e \\ S_a &= \frac{2p - 3}{4p^2 - 2p - 1} + S_b \\ S_0 &= 1 + (1 - 2p) S_a + 2p S_b \end{aligned}$$

Vi er ute etter verdien til S_0 . Av det siste uttrykket ser det ut som vi bare har gått i sirkel siden vi har fått tilbake det samme uttrykket for S_0 som vi begynte med. Men siden vi nå har S_h kun uttrykt ved p kan vi sette inn verdien for p , nemlig $p = \frac{15 - \sqrt{161}}{16}$ og finne ut hva S_h er. Denne verdien bruker vi så for å finne verdien til S_g . Dette gir oss så verdien S_f , og så videre helt til vi finner verdiene til S_b og S_a . Disse bruker vi til å finne verdien til S_0 . Når vi gjør dette, får vi

følgende verdier:

$$S_h \approx 4.34625816$$

$$S_g \approx 4.447439794$$

$$S_f \approx 5.249015305$$

$$S_e \approx 5.797636733$$

$$S_d \approx 5.046652038$$

$$S_c \approx 5.49803061$$

$$S_b \approx 8.245076526$$

$$S_a \approx 10.49409183$$

$$S_0 \approx 10.84428877$$

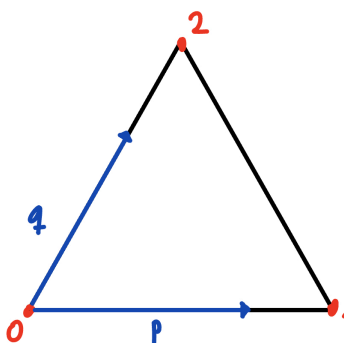
Dette betyr altså at virrevandringen bruker omtrent 10.844 ganger så lang tid på å nå mengden $\{1, 2\}$ når vi går på første iterasjon av femkantfraktalen som på den opprinnelige femkanten. Vi har dermed funnet tidsskaleringsfaktoren for den Brownske bevegelsen på femkantfraktalen:

$$\lambda = 10.844$$

3.5 Usymmetrisk Sierpiński

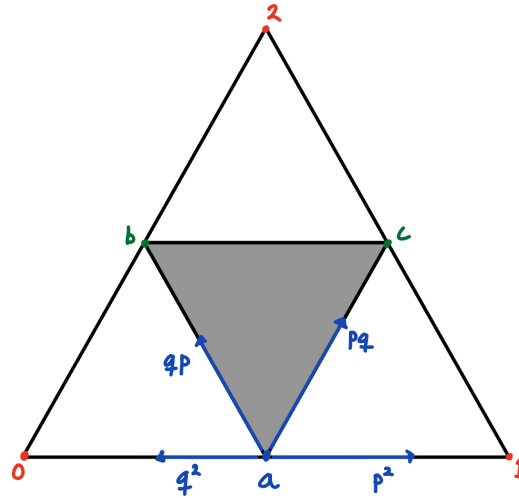
Overgangssannsynlighetene:

Til nå har vi sett på vandringer som har en stor grad av symmetri. I alle tilfellene har det kun eksistert ett fikspunkt for sannsynlighetene våre. Vi skal nå se på et litt annet tilfelle der vi ikke har den samme symmetrien. Dette arbeidet ble først gjort av japaneren Takashi Kumagai [KUM93]. Vandringen vi skal utvikle vil igjen bevege seg på Sierpiński-trekanten. I den opprinnelige trekanten går vi til punkt 1 med sannsynlighet p , som vi kan kalle å ta et steg til høyre. Tilsvarende går vi til punkt 2 med sannsynligheten q , som vi kan si at er å ta et steg til venstre, som illustrert i figur 3.5.1. Her må både p og q være ikke-negative og de må summere til 1.



Figur 3.5.1

Foreløpig er situasjonen identisk som vandringen vi konstruerte på Sierpiński-trekanten tidligere. Forskjellen oppstår når vi i neste steg ser på sannsynlighetene på første iterasjon av fraktalen. Når vi tidligere har stått i et punkt som tilhører to trekanter har vi kastet en rettferdig mynt slik at vi beveger oss til hver trekant med sannsynlighet $\frac{1}{2}$. Nå vil vi isteden bruke sannsynlighetene p og q for å bestemme hvilken trekant vi skal gå til. Om vi står i et punkt som tilhører to trekanter vil vandringen bevege seg til den høyre trekanten med sannsynlighet p og til den venstre trekanten med sannsynlighet q . Når vi så har valgt trekant beveger man seg igjen til høyre på den trekanten med sannsynlighet p og til venstre med sannsynlighet q . Dermed er for eksempel sannsynligheten for å gå til venstre i den høye trekanten gitt ved pq . I figur 3.5.2 ser vi første iterasjon av Sierpiński-trekanten. Om vi står i punkt a har vi valget mellom to trekanter. For å gå til punkt 1 må vi først velge trekanten til høyre og så gå til høyre på denne trekanten, altså $pp = p^2$. Tilsvarende er de resterende mulige veiene fra a illustrert i figur 3.5.2.

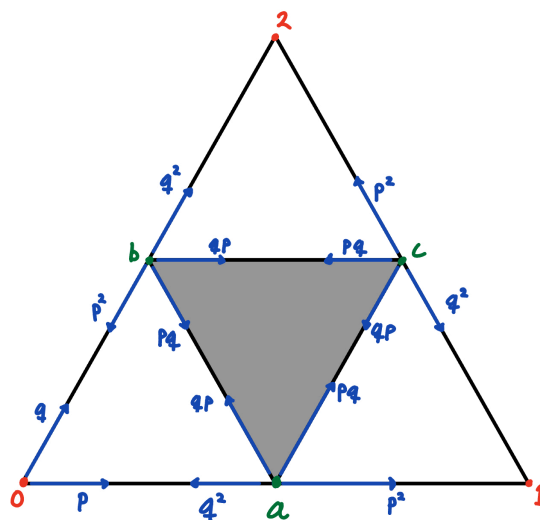


Figur 3.5.2: Sannsynlighetsfordeling fra punkt a

Det første som er verdt å sjekke er at disse sannsynlighetene summerer opp til 1, hvis ikke er det noe galt med oppsettet vårt. Vi vet fra før at $p + q = 1$ og benytter dette til å se at

$$p^2 + pq + qp + q^2 = p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)(p + q) = 1$$

Vi setter tilsvarende opp sannsynlighetene for vandringene fra punkt b og c . For å tydeliggjøre: Vi ser alltid fra punktet og inn mot trekanten når vi skal bestemme hva vi mener med høyre og venstre. Så fra punkt b ligger 0 langs den høyre veien i trekanten til høyre. Alle veiene og deres tilhørende sannsynligheter er illustrert i figur 3.5.3.



Figur 3.5.3

Det vi er ute etter er fortsatt å bestemme overgangssannsynlighetene slik at vi får et fikspunkt. Det vil si at sannsynligheten for at vandringen stopper i henholdsvis punkt 1 og 2 er den samme enten vi beveger oss på den opprinnelige trekanten eller på første iterasjon. Siden vi har brukt opp bokstaven q lar vi nå E_i være sannsynligheten for at en vandring som starter i punkt i ender opp i punkt 1, uten å gå innom punkt 2. Altså er E_0 sannsynligheten for at vandringen havner i 1 fra 0. Vårt mål er å få $E_0 = p$.

Før vi starter å sette opp likningene kan vi merke oss at det allerede finnes en åpenbar løsning, nemlig å sette $p = q = \frac{1}{2}$. Da blir valget mellom høyre og venstre trekant igjen symmetrisk og tilsvarende myntkastet vi benyttet tidligere. Valget mellom høyre og venstre arm i hver enkelt trekant er da også likt som vandringen vi konstruerte på Sierpiński-trekanten tidligere. Siden dette også er et fikspunkt for vandringen vi konstruerer her, kan det tenkes at det ikke finnes andre fikspunkter. Men siden denne vandringen ikke har samme krav til symmetri gjennom bruken av myntkast kan det også tenkes at det finnes flere fikspunkter. Vi etter opp likningene for E_i -ene og leter etter flere fikspunkt.

$$\begin{aligned}
 E_0 &= pE_a + qE_b \\
 E_a &= p^2 + q^2E_0 + qpE_b + pqE_c \\
 E_b &= p^2E_0 + pqE_a + qpE_c \\
 E_c &= q^2 + qpE_a + pqE_b
 \end{aligned}$$

Vi utnytter at $q = 1 - p$ og løser likningene for konstantleddet slik at vi får

følgende:

$$\begin{aligned} 0 &= -E_0 + pE_a + (1-p)E_b \\ -p^2 &= (1-p)^2E_0 - E_a + p(1-p)E_b + p(1-p)E_c \\ 0 &= p^2E_0 + p(1-p)E_a - E_b + p(1-p)E_c \\ -(1-p)^2 &= p(1-p)E_a + p(1-p)E_b - E_c \end{aligned}$$

Dette representerer vi med en matrise som vi så kan radredusere for å finne løsningen vår:

Figur 3.5.4: Matriserepresentasjon av likningssystemet

$$\begin{pmatrix} -1 & p & 1-p & 0 & 0 \\ (1-p)^2 & -1 & p(1-p) & p(1-p) & -p^2 \\ p^2 & p(1-p) & -1 & p(1-p) & 0 \\ 0 & p(1-p) & p(1-p) & -1 & -(1-p)^2 \end{pmatrix}$$

Figur 3.5.5: Radredusert matrise

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{p(p-2)}{p^2-p-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{p}{-p^2+p+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{(p-1)(p^2+1)}{(p^2-p-1)} \end{pmatrix}$$

Fra den radreduserte matrisen får vi ut at $E_0 = p$. Vi kan altså sette p til å være hva vi vil, og sannsynligheten for å havne i punkt 1 fra 0, altså E_0 , vil bli lik p uansett. Alle valg av p vil dermed gi oss et fikspunkt. Sannsynligheten for å havne i punkt 2 fra 0 er den komplementære hendelsen til å havne i 1, dvs. $1 - E_0 = 1 - p = q$. Dermed ser vi tydelig at vi også havner i punkt 2 med samme sannsynlighet, nemlig q , enten vi beveger oss på den opprinnelige trekanten eller på første iterasjon. Vi kan altså velge oss $p \in (0, 1)$ og få et fikspunkt for overgangssannsynlighetene.

Tidsskaleringsfaktoren λ :

Selv om denne vandringen åpenbart har en annen struktur enn de vi har sett på tidligere, og gir oss uendelig antall fikspunkt, kan vi likevel fullføre ved å se om vi kan finne tidsskaleringsfaktoren. Siden vi kan sette p til hva vi vil og få et fikspunkt er det naturlig å tenke at tidsskaleringsfaktoren vil avhenge av p . Om vi for eksempel setter $p = 0.99$ vil vandringen bruke veldig få steg fra 0 til $\{1, 2\}$ siden den vil gå til høyre nesten hver gang. Vi lar et steg ta tiden $t = 1$ og lar S_i være gjennomsnittlig tid vandringen bruker fra punkt i til $\{1, 2\}$. Dette

gir oss følgende likninger:

$$\begin{aligned} S_0 &= 1 + pS_a + qS_b \\ S_a &= 1 + q^2S_0 + pqS_b + pqS_c \\ S_b &= 1 + p^2S_0 + pqS_a + pqS_c \\ S_c &= 1 + pqS_a + pqS_b \end{aligned}$$

Vi bruker at $q = 1 - p$ for å komme oss ned til én variabel og sorterer linkingene:

$$\begin{aligned} -1 &= -S_0 + pS_a + (1 - p)S_b \\ -1 &= (1 - p)^2S_0 - S_a + p(1 - p)S_b + p(1 - p)S_c \\ -1 &= p^2S_0 + p(1 - p)S_a - S_b + p(1 - p)S_c \\ -1 &= p(1 - p)S_a + p(1 - p)S_b - S_c \end{aligned}$$

Nok en gang benytter vi oss av radreduksjon av matriserepresentasjonen av likningssystemet for å finne S_0

Figur 3.5.6: Matriserepresentasjon av likningssystemet

$$\begin{pmatrix} -1 & p & 1 - p & 0 & -1 \\ (1 - p)^2 & -1 & p(1 - p) & p(1 - p) & -1 \\ p^2 & p(1 - p) & -1 & p(1 - p) & -1 \\ 0 & p(1 - p) & p(1 - p) & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Figur 3.5.7: Radredusert matrise

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2p^2+2p+2}{2p^2-2p+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3-2p}{2p^2-2p+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2p+1}{2p^2-2p+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-2p^2+2p+1}{2p^2-2p+1} \end{pmatrix}$$

Fra den radreduserte matrisen får vi som ventet at S_0 avhenger av p :

$$S_0(p) = \frac{-2p^2 + 2p + 2}{2p^2 - 2p + 1}$$

For å sjekke at dette stemmer overens med vandringen vi arbeider med kan vi se hva S_0 blir dersom vi setter $p = \frac{1}{2}$ slik som i den opprinnelige vandringen på Sierpiński-trekanten.

$$S_0\left(\frac{1}{2}\right) = 5$$

Vi ser altså at for $p = \frac{1}{2}$ får vi samme resultat som tidligere. Vi kan også se hva vi får om vi setter $p = 1$:

$$S_0(1) = 2$$

Dette stemmer også siden $p = 1$ tilsvarer å gå til høyre hver gang: først fra 0 til a og så fra a til 1 i figur 3.5.3. Dermed kun to steg. Tidsskaleringsfaktoren for denne vandringen blir dermed avhengig av p :

$$\lambda = \frac{-2p^2 + 2p + 2}{2p^2 - 2p + 1}$$

Skriver vi om uttrykket litt til $\lambda = -1 + \frac{3}{2p^2 - 2p + 1}$ ser vi at λ er størst for $p = \frac{1}{2}$, som tilsvarer den symmetriske vandringen. Dette gir også intuitivt sett mening. Når $p = \frac{1}{2}$ sprer vandringen seg mest mulig. Mens for alle andre valg av p har vi en tendens til å gå oftere enten til høyre eller venstre, og vandringen vil derfor bruke kortere tid på å nå $\{1, 2\}$.

4 Avslutning

I denne oppgaven har vi sett på to temaer fra matematikken: fraktaler og Brownske bevegelser. Vi har vist hvordan fraktaler kan konstrueres, og sett på hvordan man kan beregne dimensjonene til slike objekter. Deretter studerte vi hvordan man konstruerer Brownske bevegelser på fraktaler. Her var det hovedsakelig to ting vi måtte beregne for å konstruere den ene naturlige Brownske bevegelsen på en fraktal. Nemlig overgangssannsynligheter og tidsskaleringsfaktoren λ . Disse har vi beregnet for tre forskjellige fraktaler: Sierpiński-trekanten, Vicsek-fraktalen og femkantfraktalen. Avslutningsvis så vi hvordan overgangssannsynligheter og tidsskaleringsfaktoren ser ut for en konstruksjon som ikke følger denne samme symmetrien.

5 Bibliografi

- BAR14 Barnsley, M. F. (2014). *Fractals everywhere*. Academic press.
- EIN05 Einstein, A. (1905). *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*. *Annalen der physik*, 4.
- FAL04 Falconer, K. (2004). *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons.
- FRA19 Frame, M., Urry, A. (2019). *Fractal Worlds: Grown, Built, and Imagined*.
- HUT81 Hutchinson, J. E. (1981). *Fractals and self similarity*. *Indiana University Mathematics Journal*, 30(5), 713-747.
- KUM93 Kumagai, T (1993). *Construction and some properties of a class of non-symmetric diffusion process on the Sierpiński gasket, to appear*. *Asymptotic Problems in Probability Theory*.
- LIN90 Lindstrøm, T. (1990). *Brownian motion on nested fractals* (No. 420). American Mathematical Soc.
- MET96 Metz, V. (1996). *Renormalization contracts on nested fractals*. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1996(480), 161-176.
- PEI00 Peirone, R. (2000). *Convergence and uniqueness problems for Dirichlet forms on fractals*. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 3, 431-460.
- SAB97 Sabot, C. (1997). *Existence and uniqueness of diffusions on finitely ramified self-similar fractals*. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* (Vol. 30, No. 5, pp. 605-673).