UNIVERSITETET
I OSLO

Masteroppgave

Å maksimere utbyttet av en ressurs

En optimal innhøstingsstrategi

Jenny Kolstad

Lektorprogrammet med masterspesialisering i matematikk
30 studiepoeng

Matematisk institutt
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Våren 2023

Jenny Kolstad

Å maksimere utbyttet av en ressurs

En optimal innhøstingsstrategi

Veileder:
Tom Lindstrøm

Sammendrag

I denne oppgaven betrakter vi en ressurs som høstes av. Innhøstingene gir et utbytte, og det er naturlig å tenke at personen som forvalter ressursen ønsker å maksimere utbyttet. Avhengig av om ressursen skal forvaltes med en sluttdato eller ikke, får vi to optimeringsproblemer; et med endelig horisont og et med uendelig horisont. Vi finner så de optimale innhøstingene. Det benyttes etablerte metoder, men gjøres også gjetninger for å komme frem til resultatene. Dermed er oppgaven til tider utforskende, men vi viser også at gjetningene er riktige. Innhøstingsstrategiene sammenliknes og utforskes. Til sist avslutter vi oppgaven med et mer konkret scenario der flere bønder har dyr på et felles beiteområde. De følger en kollektiv innhøstingsstrategi. En av bøndene ønsker å bryte ut for å se om det er mulig å oppnå et høyere utbytte enn de andre.

Innhold

Anerkjennelse

Tidlig i prosessen sa min veileder Tom Lindstrøm noe sånt som: «Kjører vi ut i grøfta, så gjør vi det sammen». I ettertid må vi kunne konkludere med at vi klarte å holde oss på veien. Takk for et fint og velfungerende samarbeid, for godt humør, og for tidsvis lynraske svar på mail. Jeg vil også takke ansatte på matematisk institutt som sitter med åpen dør. Om ikke bokstavelig talt, så hvert fall symbolsk.

Jeg kunne takket familie for støtte i skriveprosessen, men jeg er litt usikker på om de vet helt hva jeg har drevet med. Det går stort sett i «Hvordan går det med oppgaven?», der jeg svarer «Greit, takk». De gangene jeg faktisk har prøvd å forklare hva jeg skriver om, ser jeg at blikket blir glassaktig, og at de antakeligvis tenker på hva de skal ha til middag eller hva en dusj koster med dagens strømpris. Men de fortjener en takk for å ha holdt ut med meg dette halvåret, selv om jeg ikke vil si at jeg har vært noe mer gretten enn vanlig.

Fra spøk til alvor; til slutt vil jeg takke de jeg har omgitt meg med til daglig på Blindern. Takk for hverdagsrutinene vi har etablert med felles lunsjpauser og mulighet for utblåsning. Vi har stått i det sammen, og må kunne si å ha kommet oss gjennom masteren med helsa i god behold, muligens med en senebetennelse og kink i nakken på veien.

Kapittel 1

Introduksjon

I denne oppgaven betrakter vi en høstbar ressurs, for eksempel en avling, dyrebestand eller skog. Ressursens utvikling beskrives ved hjelp av en diskret tidslinje $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$, og ressursens størrelse ved tid n er gitt som x_n.

Vi ser for oss en bonde som forvalter ressursen. Ved hver tidsperiode gjøres en innhøsting. Innhøstingene danner en følge $c = \{c_n\}$ bonden selv kontrollerer. Begrepene kontroller og kontrollfølge danner naturlig nok synonymer til henholdsvis innhøstinger og innhøstingsstrategi. De vil bli brukt om hverandre gjennom oppgaven.

Vi ser for oss at spesielt én ting er av interesse: Å få størst mulig utbytte over tid. Inntjeningen kommer av innhøstingene. Så hvor mye lønner det seg å høste inn? Sagt med andre ord, hva er de optimale kontrollene? La oss få på plass noen detaljer.

Tidsutviklingen til ressursen er gitt ved

$$x_{n+1} = (1 + f(n, x_n))x_n - c_n, \tag{1.1}$$

der f er en gitt funksjon som angir hvor mye ressursen vokser fra tid n til $n + 1$ hvis den overlates til seg selv. Kontrollene er pålagt betingelsen

$$0 \leq c_n \leq (1 + f(n, x_n))x_n. \tag{1.2}$$

Bonden kan ikke høste mer enn det som er tilgjengelig av ressursen, og vi kan åpenbart ikke ha negative innhøstinger. Slik modellen er, foregår en tidsperiode n slik: Størrelsen på ressursen starter som x_n. I løpet av perioden vokser ressursen til $(1 + f(n, x_n))x_n$, og på slutten forekommer innhøstingen c_n. Ved starten av neste periode $n + 1$ er ressursens størrelse x_{n+1}.

Det løpende utbyttet, som er utbyttet ved hver tidsperiode, beskrives av en nyttefunksjon

$$u(n, c) = r^n u_0(c).$$

Det er skrevet mer om nyttefunksjonen og valg av den i Delkapittel 2.1. Diskonteringsraten r er en konstant i intervallet $(0, 1)$. Vi ønsker å kunne regne ut bondens totale utbytte gitt en valgt innhøstingsstrategi. Uten å gå dypt inn i økonomiteori, bør vi i hvert fall si følgende: løpende utbytter som regnes ut nå, men som bonden mottar i en fremtidig tidsperiode, vil være mindre verdt når de mottas grunnet inflasjon og risiko. Diskonteringsraten sørger for at utbyttene taper seg, avhengig av hvor lenge det er til innhøstingen gjøres.

Merknad 1.0.1. Jo nærmere 1 diskonteringsraten r er, desto høyere er den. Når diskonteringsraten er høy, taper det løpende utbyttet seg lite. Da sier vi at diskonteringen er lav. På samme måte sier vi at diskonteringen er høy når diskonteringsraten er lav. $\diamond$

Merknad 1.0.2. I denne oppgaven brukes notasjonen c både for en følge av innhøstinger $c = \{c_n\}$ og en variabel c. Det vil være selvforklarende ut i fra konteksten hvilken av de to det er snakk om. ◇

Hva som er de optimale kontrollene avgjøres av tidsrammen. Er det bestemt et fremtidig tidspunkt der driften skal avvikles, eller ser bonden for seg at driften alltid går i arv til neste generasjon og driftes med en uendelig horisont? Disse to scenarioene gir ulike optimeringsproblemer.

1.1 Det generelle optimeringsproblemet med endelig horisont

Dersom driften skal avvikles, også kalt termineres, må vi ha med en terminalfunksjon

$$T(N, x) = r^N T_0(x)$$

som beskriver utbyttet bonden får ved tidspunktet for terminering N gitt at ressursens størrelse er x. Det totale utbyttet bonden får gitt en kontrollfølge c og et termineringstidspunkt N er

$$U(N, c) = \sum_{n=0}^{N-1} r^n u_0(c_n) + r^N T_0(x_N).$$

Det leder til følgende optimeringsproblem:

Problem 1.1.1 (Det generelle optimeringsproblemet med endelig horisont). *For en gitt x_0 og N, finn $c_0, \ldots, c_{N-1}$ som maksimerer*

$$U(N, c_0, \ldots, c_{N-1}) = \sum_{n=0}^{N-1} r^n u_0(c_n) + r^N T_0(x_N)$$

gitt at

$$0 \leq c_n \leq (1 + f(n, x_n))x_n$$

der

$$x_{n+1} = (1 + f(n, x_n))x_n - c_n$$

for $n > 0$.

1.2 Det generelle optimeringsproblemet med uendelig horisont

Hvis driften aldri skal termineres, blir det totale utbyttet

$$U(\infty, c) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n u_0(c_n).$$

Det gir følgende optimeringsproblem:

Problem 1.2.1 (Det generelle optimeringsproblemet med uendelig horisont). *For en gitt x_0, finn $c_0, c_1, \ldots$ som maksimerer*

$$U(\infty, c_0, c_1, \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n u_0(c_n)$$

gitt at

$$0 \leq c_n \leq (1 + f(n, x_n))x_n$$

der

$$x_{n+1} = (1 + f(n, x_n))x_n - c_n$$

for $n > 0$.

1.3 Oppgavens oppbygning

I Kapittel 2 gis en definisjon av nyttefunksjoner, og det redegjøres for hvilket uttrykk vi benytter som nyttefunksjon og skrapverdifunksjon gjennom oppgaven. Videre gis en innføring i metodene som brukes for å løse Problem 1.1.1 og Problem 1.2.1.

I Kapittel 3 løser vi først Problem 1.1.1 med termineringstidspunkt $N = 1$ og $N = 2$ for å få en idé om hvordan de optimale kontrollene ser ut. Vi viser så at kandidaten er riktig. Når vi skal løse Problem 1.2.1 krever metoden at vi gjør en gjetning. Den baserer vi på løsningen av Problem 1.1.1. Metoden vi benytter for å løse Problem 1.2.1 har en betingelse nyttefunksjonen vår ikke oppfyller. Derfor henger det igjen en usikkerhet rundt løsningen.

I Kapittel 4 undersøker vi hva som er mest lønnsomt av en endelig og uendelig horisont, samt utforsker diskonteringsratens, vekstens og initialbetingelsens påvirkning på innhøstingene og utbyttesummene.

I Kapittel 5 presenteres et konkret scenario, der flere bønder som har dyr på et felles beiteområde ønsker å maksimere sitt utbytte. En bonde, som vi kaller utbryterbonden, lurer på om det fins andre kontroller som gir henne et større utbytte enn de andre. Vi presenterer noe ny teori som gjør oss kapable til å bevise at løsningen av Problem 1.2.1 faktisk er optimal.

Oppgaven bærer preg av å være utforskende. Det gjøres forenklinger tilpasset metodene, og for å ha mulighet til å finne analytiske løsninger. Når vi skriver overfor at vi løser Problem 1.1.1 og Problem 1.2.1, løser vi i realiteten forenklede og mer konkretiserte versjoner av problemene. Vi sparer detaljene til senere.

Kapittel 2

Teoretisk bakgrunn

I dette kapittelet begynner vi med en definisjon av nyttefunksjoner fra [Kar98] og [Hyl10], og presiserer hvilket funksjonsutttrykk vi kommer til å benytte gjennom oppgaven.

For å løse Problem 1.1.1, der horisonten er endelig, bruker vi Kuhn-Tucker optimering. Dette er en metode for å studere optimeringsproblemer der variablene er ilagt én eller flere bibetingelser i form av ulikheter. Kuhn-Tucker optimering er en generalisering av Lagranges multiplikatormetode, der bibetingelsene er likheter. Av den grunn presenteres først Lagranges multiplikatormetode, deretter Kuhn-Tucker optimering. Teorien om Lagrange baserer seg på [Syd10] og [Lin15], mens Kuhn-Tucker baserer seg på [Syd02].

Problem 1.2.1, der horistonten er uendelig, studerer vi ved hjelp av dynamisk programmering. Dette er en metode for å løse diskrete optimeringsproblemer der funksjonen som skal maksimeres eller minimeres avhenger av variabler som endres over tid. Teorien er basert på [Syd02].

Merknad 2.0.1. I Delkapittel 2.2, 2.3 og 2.4 holder vi notasjonen generell. I delkapittel 2.2 og 2.3 betegner f funksjonen som skal maksimeres. I Delkapittel 2.4 betegner f nyttefunksjonen. Den må ikke forveksles med funksjonen som angir veksten til ressursen i likning (1.1). Senere i oppgaven, når vi benytter Kuhn-Tucker optimering og dynamisk programmering til å finne de optimale kontrollene, vil f være henholdvis utbyttesummen U og nyttefunksjonen u_0. $\diamond$

2.1 Nyttefunksjonen og skrapverdifunksjonen

Definisjon 2.1.1 (Nyttefunksjon, [Kar98, s. 94–95] og [Hyl10, s. 18–19]). En nyttefunksjon er en konkav, ikke-avtakende, kontinuerlig og deriverbar funksjon $u_0 \colon \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$ som tilfredsstiller:

(i) Domenet

$$\mathrm{dom}(u_0) := \{c \in \mathbb{R} \colon u_0(c) > -\infty\}$$

er en ikke-tom delmengde av $[0, \infty)$.

(ii) u_0' er kontinuerlig, positiv og strengt avtakende på det indre av $\mathrm{dom}(u_0)$, og

$$u_0'(\infty) := \lim_{c \to \infty} u_0'(c) = 0.$$

Vi lar

$$\bar{c} := \inf\{c \in \mathbb{R} \colon u_0(c) > -\infty\}$$

slik at $\bar{c} \in [0, \infty)$, og domenet enten er $\mathrm{dom}(u_0) = [\bar{c}, \infty)$ eller $\mathrm{dom}(u_0) = (\bar{c}, \infty)$. Vi definerer

$$u_0'(\bar{c}+) := \lim_{c \to \bar{c}^+} u_0'(c)$$

slik at $u_0'(\bar{c}+) \in (0, \infty]$.

(iii) Vi antar at $u_0(\bar{c}) < 0$ og at $\exists \tilde{c}$ slik at $u_0(c) > 0 \;\; \forall c > \tilde{c}$.

Et eksempel på en vanlig nyttefunksjon som tilfredsstiller betingelsene i definisjonen er

$$u_0(c) = \begin{cases} \ln c & c \in (0, \infty) \\ -\infty & c \in [-\infty, 0] \end{cases}$$

der $\bar{c} = 0$, $\mathrm{dom}(u_0) = (\bar{c}, \infty)$ og $\tilde{c} = 1$.

Vi kommer til å benytte logaritmefunksjonen som nyttefunksjon gjennom oppgaven, men er uinteresserte i innhøstinger $c = 0$ når det gir utbyttet $-\infty$. Som nevnt i introduksjonen kan vi heller ikke ha negative innhøstinger. Derfor holder vi oss til $u_0(c) = \ln c$ med $\mathrm{dom}(u_0) = (0, \infty)$. Betingelse (1.2) justeres til

$$0 < c_n \leq (1 + f(n, x_n))x_n. \tag{2.1}$$

Det kan diskuteres om logaritmefunksjonen er økonomisk realistisk når argumenter mellom 0 og 1 returnerer negative verdier. Det får vi erfare i Kapittel 4. På en annen side egner logaritmefunksjonen seg godt til utregninger - den er for eksempel enkel å derivere. Av samme årsak benytter vi også logaritmefunksjonen som skrapverdifunksjon, slik at

$$T(N, x) = r^N \ln x.$$

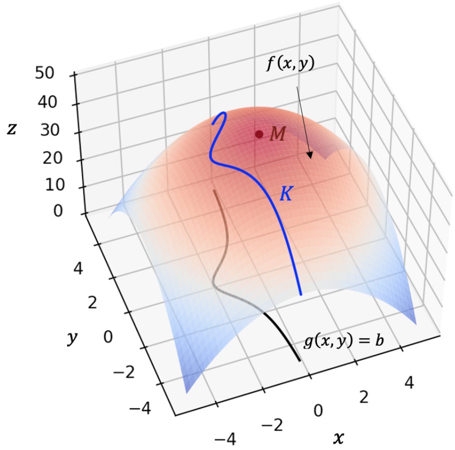
2.2 Lagranges multiplikatormetode

Vi ser på følgende generelle optimeringsproblem:

Problem 2.2.1. *Maksimer (minimer) $f(c_0, \ldots, c_{n-1})$ gitt at $g_l(c_0, \ldots, c_{n-1}) = b_l$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$.*

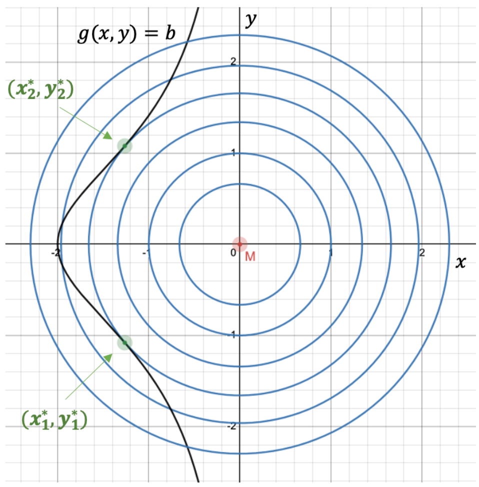
Vi ønsker å finne ekstremalpunktene til f, en funksjon av n variable, ilagt m bibetingelser. For å få bedre innsikt i metoden, betrakter vi tilfellet der vi ønsker å maksimere $f = f(x, y)$, en konkav funksjon av to variable, ilagt én bibetingelse $g(x, y) = b$. Figur 2.1 gir et eksempel på hvordan problemet kan se ut geometrisk.

Betrakt grafen til f i Figur 2.1. Punktet M er maksimum dersom vi ikke ilegger løsningen betingelser. Vi kan kalle M et fritt maksimumspunkt. Vi ønsker derimot å finne maksimum til f slik at $g(x, y) = b$ er oppfylt. Vi kaller $g(x, y) = b$ for beskrankningskurven. Den ligger i xy-planet. Kurven K er punktene på f som ligger direkte over beskrankingskurven - de oppfyller dermed bibetingelsen. Kandidatene til maksimum er altså punktene på K.



Figur 2.1: Geometrisk fremstilling av et optimeringsproblem der vi ønsker å finne maksimum av en konkav funksjon $f(x, y)$ gitt betingelsen $g(x, y) = b$.

I Figur 2.2 ser vi Figur 2.1 i fugleperspektiv. Den viser beskrankningskurven og noen nivåkurver av f.



Figur 2.2: Nivåkurver av $f(x, y)$, samt beskrankningskurven $g(x, y) = b$.

Fordi M er det frie maksimumspunktet til f, og f er konkav, vil f ha høyere verdi langs en nivåkurve desto nærmere nivåkurven er M. Å finne punktet på K med høyest verdi, er det samme som å finne punktet på beskrankningskurven der f har sin høyeste verdi. Betrakt beskrankningskurven i Figur 2.2. Dersom den i et punkt krysser en nivåkurve av f, kan vi alltids bevege oss videre langs beskrankningskurven, i den retningen som tar oss nærmere M, for å oppnå høyere verdier av f. I punkter der beskrankningskurven berører en nivåkurve av f uten å krysse den, kan vi ikke oppnå høyere verdier. I Figur 2.2 er (x_1^*, y_1^*) og (x_2^*, y_2^*) slike punkter.

Gradienten til en funksjon står alltid normalt på nivåkurver av funksjonen. Det betyr at dersom vi i et punkt tegner tangenten til en nivåkurve, vil gradienten i dette punktet stå normalt på tangenten. I punktene (x_1^*, y_1^*) og (x_2^*, y_2^*) deler beskrankningskurven og nivåkurven til f tangent. Det betyr at gradienten til beskrankningskurven og gradienten til nivåkurven er parallelle. De behøver ikke å peke i samme retning eller ha samme størrelse.

Merknad 2.2.2. Hvis vi følger beskrankningskurven på vei vekk fra M, vil vi også kunne komme til punkter der beskrankningskurven berører en nivåkurve av f uten å krysse den. Slike punkter løser minimeringsproblemet. Vi får tilsvarende geometriske argument som for maksimum. ◇

Vi kaller (x^*, y^*) løsningspunkter. Siden gradientene til g og f er parallelle i løsningspunktene, er de skalarmultipler av hverandre, og tilfredsstiller

$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

I Lagranges multiplikatormetode dannes Lagrange-funksjonen

$$L(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - b), \tag{2.3}$$

og løsningspunkter skal tilfredsstille

$$\nabla L(x, y) = \nabla f(x, y) - \lambda \nabla g(x, y) = 0.$$

Dette blir å finne punkter som tilfredsstiller (2.2). Metoden konverterer et optimeringsproblem til å skulle finne stasjonære punkter til Lagrange-funksjonen. Stasjonære punkter kan være maksimum-, minimum- og sadelpunkter. Derfor trenger vi følgende setning:

Setning 2.2.3 (Tilstrekkelige betingelser for Lagrange-funksjonen [Syd10, s. 447]). *La (x^*, y^*) være et stasjonært punkt for Lagrange-funksjonen $L(x, y)$. Dersom L er konkav (konveks) løser (x^*, y^*) maksimeringsproblemet (minimeringsproblemet).*

Selv om vi lot $f = f(x, y)$ være en være en funksjon av to variable, vil Setning 2.2.3 også gjelde for funksjoner av flere variable. Med det sagt returnerer vi til Problem 2.2.1, der f er en funksjon av n variable ilagt m bibetingelser. Følgende teorem danner en analogi til (2.2):

Teorem 2.2.4 (Lagranges multiplikatormetode [Lin15, s. 540]). *La $\mathbf{c}^* = (c_0^*, \ldots, c_{n-1}^*)$. Anta at U er en åpen delmengde av $\mathbb{R}^n$, og at $f, g_0, \ldots, g_{m-1} : U \to \mathbb{R}$ er funksjoner i C^1. La $b_0, \ldots, b_{m-1} \in \mathbb{R}$, og la mengden S være definert som*

$$S = \{\mathbf{c} \in U : g_l(\mathbf{c}) = b_l \ \text{for} \ l = 0, \ldots, m-1\}.$$

Dersom $\mathbf{c}^*$ er et lokalt minimums- eller maksimumspunkt for f på S, er enten $\nabla g_0(\mathbf{c}^*), \ldots, \nabla g_{m-1}(\mathbf{c}^*)$ lineært avhengige, eller så finnes det konstanter $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}$ slik at

$$\nabla f(\mathbf{c}^*) = \sum_{l=0}^{m-1} \lambda_l \nabla g_l(\mathbf{c}^*).$$

Bevis. Se [Lin15, s. 542–544]. ■

Problem 2.2.1 kan løses med følgende metode:

Lagranges multiplikatormetode [Syd10, s. 435, 452]

I Dann Lagrange-funksjonen

$$L(\mathbf{c}) = f(\mathbf{c}) - \sum_{l=0}^{m-1} (\lambda_l (g_l(\mathbf{c}) - b_l)),$$

der $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}$ er Lagrange-multiplikator tilhørende de m bibetingelsene.

II Sett de partielle deriverte av $L(\mathbf{c})$ lik 0:

$$\frac{\partial L(\mathbf{c})}{\partial c_i} = \frac{\partial f(\mathbf{c})}{\partial c_i} - \sum_{l=0}^{m-1} \lambda_l \frac{\partial g_l(\mathbf{c})}{\partial c_i} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.4}$$

III En optimal løsning $\mathbf{c}^*$ tilfredsstiller (2.4), samt bibetingelsene $g_l(\mathbf{c}) = b_l$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$.

2.3 Kuhn-Tucker optimering

Kuhn-Tucker optimering er en generalisering av Lagrange, der bibetingelsene er ulikheter på formen $g_l(\mathbf{c}) \leq b_l$. Når vi bruker denne metoden, finner vi kun maksimumspunkter. Vi får følgende generelle optimeringsproblem:

Problem 2.3.1. *Maksimer $f(c_0, \ldots, c_{n-1})$ gitt at $g_l(c_0, \ldots, c_{n-1}) \leq b_l$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$.*

Problem 2.3.1 kan løses med følgende metode:

Kuhn-Tucker optimeringsmetode [Syd02, s. 259]

I Dann Lagrange-funksjonen

$$L(\mathbf{c}) = f(\mathbf{c}) - \sum_{l=0}^{m-1} (\lambda_l (g_l(\mathbf{c}) - b_l)),$$

der $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}$ er Lagrange-multiplikator tilhørende de m bibetingelsene.

II Sett de partielle deriverte av $L(\mathbf{c})$ lik 0:

$$\frac{\partial L(\mathbf{c})}{\partial c_i} = \frac{\partial f(\mathbf{c})}{\partial c_i} - \sum_{l=0}^{m-1} \lambda_l \frac{\partial g_l(\mathbf{c})}{\partial c_i} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.5}$$

III Innfør de komplementære slakkhetsbetingelsene

$$\lambda_l \geq 0 \quad (\lambda_l = 0 \text{ dersom } g_l(\mathbf{c}) < b_l), \quad l = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.6}$$

IV En optimal løsning $\mathbf{c}^*$ tilfredsstiller (2.5 - 2.6), samt bibetingelsene $g_l(\mathbf{c}) \leq b_l$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$.

Merknad 2.3.2. Betingelse (2.6) betyr også at $\lambda_l > 0$ dersom $g_l(\mathbf{c}) = b_l$. ◇

Merknad 2.3.3. En bibetingelse kalles *aktiv* dersom $g_l(\mathbf{c}) = b_l$ og *inaktiv* dersom $g_l(\mathbf{c}) < b_l$. ◇

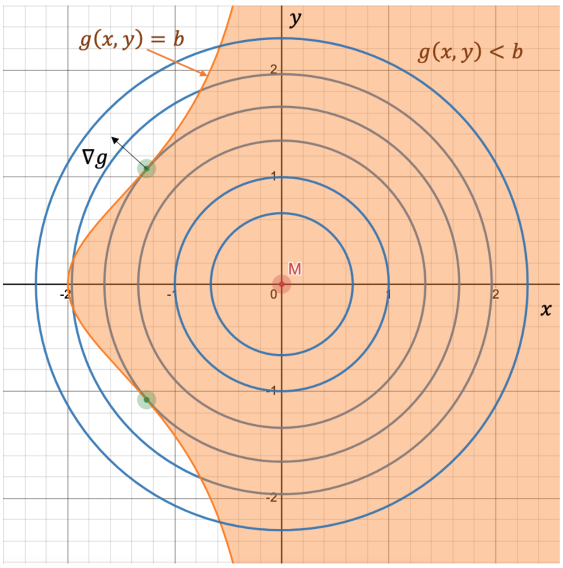
Merknad 2.3.4. (1) En bibetingelse på formen $g(\mathbf{c}) \geq b_l$ kan alltids skrives om til $-g(\mathbf{c}) \leq -b_l$. (2) En bibetingelse $g(\mathbf{c}) = b_l$ kan skrives som en dobbeltuliket, nemlig at $g(\mathbf{c}) \leq b_l$ og $-g(\mathbf{c}) \leq -b_l$. ◇

Merknad 2.3.5. Å minimere f er ekvivalent med å maksimere $-f$. ◇

Analogt til Setning 2.2.3 er følgende:

Setning 2.3.6 (Kuhn-Tuckers tilstrekkelige betingelser [Syd02, s. 260]). *Anta at $\mathbf{c}^*$ tilfredsstiller (2.5-2.6) og beskrankningene $g_l(\mathbf{c}) \leq b_l$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$. Dersom Lagrange-funksjonen $L(\mathbf{c})$, med de tilhørende verdiene vi får for λ_l, er konkav, vil $\mathbf{c}^*$ være en optimal løsning.*

For å få en bedre forståelse av hva de komplementære slakkhetsbetingelsene betyr, ser vi igjen på tilfellet der $f = f(x, y)$ er en konkav funksjon av to variable, nå ilagt bibetingelsen $g(x, y) \leq b$. Figur 2.3 eksemplifiserer hvordan dette kan se ut geometrisk. Den ligner Figur 2.2, bortsett fra at vi grunnet bibetingelsen får markert ut et større område, og ikke bare en beskrankningskurve. Vi kaller mengden der $g(x, y) \leq b$ for den tillatte mengden.



Figur 2.3: Nivåkurver av $f(x, y)$ og den tillatte mengden $g(x, y) \leq b$.

Gradienten til en funksjon peker i den retningen funksjonen vokser raskest. I den tillatte mengden er g mindre eller lik b. Da må ∇g peke ut av mengden. Løsningen på optimeringsproblemet tilfredsstiller enten $g(x, y) = b$ eller $g(x, y) < b$. La oss se nærmere på førstnevnte.

Hvis $g(x, y) = b$, befinner løsningen seg på beskrankningskurven, og vi er tilbake i det samme tilfellet vi var i for Lagranges multiplikatormetode. Én ting er likevel annerledes: Det kreves at $\lambda > 0$. Dette kan forklares geometrisk. Husk at i de grønne punktene (x^*, y^*) vil $\nabla f(x^*, y^*)$ og $\nabla g(x^*, y^*)$ være skalarmultipler av hverandre. (Punktene er ikke nødvendigvis løsningspunkter for Problem 2.3.1, selv om vi for enkelthets skyld benytter samme notasjon). At λ er positiv, betyr at gradientene også må peke i samme retning. Av figuren måtte $\nabla f(x^*, y^*)$ ha pekt ut fra den tillatte mengden. Det vet vi derimot at ikke er tilfellet, fordi f er en konkav funksjon og øker innover mot M. Da har vi slettes ikke noe maksimumspunkt på beskrankningskurven.

Dette bringer oss over til det andre tilfellet, nemlig at $g(x,y) < b$. Fra (2.6) har vi at $\lambda = 0$. Når $\lambda = 0$, blir Lagrange-funksjonen (2.3) redusert til funksjonen f, og å finne løsninger som tilfredsstiller at de partiellderiverte av Lagrange-funksjonen er lik 0, er å finne de stasjonære punktene til f. Betingelsen om konkavitet (Setning 2.3.6) sørger for at løsningen er maksimum. I figuren er M den optimale løsningen - det er det frie maksimumspunktet til f **og** det ligger i den tillatte mengden.

2.4 Dynamisk programmering med uendelig tidshorisont

Vi betrakter et system som observeres på tidspunktene $n = 0, 1, 2, \ldots$, og som er i tilstand x_n ved tidspunkt n. Eksempelvis kan x_n betegne størrelsen på en bestand husdyr. Systemet styres av en kontroll c_n. I tråd med eksempelet vil c_n være antall dyr som skal slaktes hver tidsperiode. Kontrollene kan velges fritt, dog gitt noen naturlige begrensninger, som at det for eksempel aldri kan slaktes flere dyr enn det bestanden består av. En slik type begrensning er for eksempel (2.1). Sagt mer presis: Kontrollene kan velges fritt fra et gitt kontrollområde C. Generelt er systemets utvikling gitt av en differenslikning

$$x_{n+1} = d(x_n, c_n), \quad x_0 \text{ gitt}, \quad c_n \in C, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

der d er en gitt funksjon. La nyttefunksjonen $f(x_n, c_n)$ beskrive det løpende utbyttet. Dersom vi ønsker å maksimere det totale utbyttet får vi følgende problem:

Problem 2.4.1. *Maksimer*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n f(x_n, c_n) \tag{2.7}$$

gitt at

$$x_{n+1} = d(x_n, c_n), \quad x_0 \text{ } \textit{gitt}, \quad c_n \in C, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Merknad 2.4.2. Verken f eller d avhenger eksplisitt av n. Problem 2.4.1 kalles da autonomt. $\diamond$

Anta at f tilfredsstiller

$$M_1 \leq f(x,c) \leq M_2 \text{ for alle } (x,c) \text{ der } M_1, M_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Med denne betingelsen vil utbyttesummen (2.7) alltid konvergere. I denne oppgaven antar vi at utbyttesummen konvergerer selv om logaritmefunksjonen ikke tilfredsstiller betingelsen.

La $c_{\geq s} = \{c_s, c_{s+1}, \ldots\}$ være en virkårlig kontrollfølge. La $x := x_s$, slik at systemet er i tilstand x ved tidspunkt s. Den totale utbyttet fra og med tid s er

$$V_s(x, c_{\geq s}) = \sum_{n=s}^{\infty} r^n f(x_n, c_n) = r^s \sum_{n=s}^{\infty} r^{n-s} f(x_n, c_n).$$

La

$$V^s(x, c_{\geq s}) = \sum_{n=s}^{\infty} r^{n-s} f(x_n, c_n).$$

Merknad 2.4.3. Både V_s og V^s angir det totale utbyttet fra og med tidspunkt s. Forskjellen ligger i diskonteringen. I V_s er diskonteringen r^s for $f(x_s, c_s)$, r^{s+1} for $f(x_{s+1}, c_{s+1})$, og så videre. I V^s er diskonteringen $r^0 = 1$ for $f(x_s, c_s)$ og $r^{s+1-s} = r$ for $f(x_{s+1}, c_{s+1})$. ◇

Vi er interesserte i det *maksimale* totale utbyttet. La

$$J_s(x) = \max_{c_{\geq s}} V_s(x, c_{\geq s}) = r^s \max_{c_{\geq s}} \sum_{n=s}^{\infty} r^{n-s} f(x_n, c_n) = r^s \max_{c_{\geq s}} V^s(x, c_{\geq s}). \tag{2.9}$$

Funksjonen $J_s(x)$ er det maksimale totale utbyttet som kan oppnås fra og med tidspunkt s, gitt at $x = x_s$. Funksjonen kalles verdifunksjonen for Problem 2.4.1. La

$$J^s(x) = \max_{c_{\geq s}} V^s(x, c_{\geq s}). \tag{2.10}$$

Lemma 2.4.4. $J^s(x) = J^0(x)\ \forall s \geq 0.$

Bevis. Vi har

$$J^s(x) = \max_{\mathbf{c}_{\geq s}} V^s(x, \mathbf{c}_{\geq s}) \ \text{ og } \ J^0(x) = \max_{\mathbf{c}_{\geq 0}} V^0(x, \mathbf{c}_{\geq 0}).$$

Problemet er autonomt, og vi starter i samme tilstand x. Dermed ser fremtiden helt lik ut. Kontrollene $c_{\geq s} = \{c_s, c_{s+1}, \ldots\}$ som maksimerer V^s og kontrollene $c_{\geq 0} = \{c_0, c_1, \ldots\}$ som maksimerer V^0 vil være de samme. ■

Vi har fra (2.9) og (2.10) at $J_s(x) = r^s J^s(x)$. Lemma 2.4.4 medfører at

$$J_s(x) = r^s J^0(x). \tag{2.11}$$

Dersom vi kjenner $J^0(x)$, kan vi finne $J_s(x)$ for alle $s > 0$. Merk også at $J_0(x) = r^0 J^0(x) = J^0(x)$. Definer $J(x) := J_0(x) = J^0(x)$. $J(x)$ er det maksimale totale utbyttet som kan oppnås fra tid $n = 0$. Setning 2.4.5 er hovedresultatet i dette delkapittelet.

Setning 2.4.5 (Fundamentalliknigen for uendelig horisont [Syd02, s. 327]). *Verdifunksjonen $J(x)$ for Problem 2.4.1 tilfredsstiller*

$$J(x) = \max_{c \in C} \{f(x, c) + rJ(d(x, c))\}. \tag{Bellmans likning}$$

Rent intuitivt kan vi begrunne setningen slik: Vi ønsker å maksimere det totale utbyttet fra tid $n = 0$. Vi starter i tilstand $x := x_0$. Kontrollen $c := c_0$ gir en øyeblikkelig fortjeneste $f(x, c)$. Deretter havner vi i tilstanden $x_1 = d(x, c)$. Det maksimale totale utbyttet vi kan oppnå fra tid $n = 1$ er $J_1(d(x, c))$, som er lik $rJ(d(x, c))$. Den optimale kontrollen c er dermed den som maksimerer summen $f(x, c) + rJ(d(x, c))$, og maksimum er nettopp $J(x)$.

Bevis. Hentet fra [Syd02, s. 329].

$$\begin{aligned} J_0(x_0) &= \max_{\mathbf{c}_{\geq 0}} \sum_{n=0}^{\infty} r^n f(x_n, c_n) = \max_{c_0}\{f(x_0, c_0) + \max_{\mathbf{c}_{\geq 1}} \sum_{n=1}^{\infty} r^n f(x_n, c_n)\} \\ &= \max_{c_0}\{f(x_0, c_0) + J_1(d(x_0, c_0))\} = \max_{c_0}\{f(x_0, c_0) + rJ_0(d(x_0, c_0))\}. \end{aligned}$$

■

Bellmans likning er en funksjonallikning, som betyr at verdifunksjonen $J(x)$ opptrer på begge sider. Derfor vil det være nødvendig å gjette på strukturen til $J(x)$. Dersom betingelse (2.8) er oppfylt, har Bellman likningen en unik løsning som automatisk er verdifunksjonen til problemet, og kontrollen vi får av maksimeringen er automatisk den optimale kontrollen. Kontrolluttrykket er det samme for alle n. Hvis betingelse (2.8) svikter, kan Bellman likningen ha flere løsninger, der løsningene ikke nødvendigvis er verdifunksjonen.

Kapittel 3

Jakten på den optimale kontrollen

3.1 Endelig horisont

Før vi studerer Problem 1.1.1 ved hjelp av Kuhn-Tucker optimering, forenkler vi differenslikningen (1.1) som angir tidsutviklingen til ressursen. Dette gjøres for å ha mulighet til å finne en analytisk løsning. Den blir nå på formen

$$x_{n+1} = (1 + f(n))x_n - c_n. \tag{3.1}$$

La oss fornye Problem 1.1.1.

Problem 3.1.1 (Optimeringsproblemet med endelig horisont). *For en gitt x_0 og N, finn $c_0, \dots, c_{N-1}$ som maksimerer*

$$U(N, c_0, \dots, c_{N-1}) = \sum_{n=0}^{N-1} r^n \ln c_n + r^N \ln x_N \tag{3.2}$$

gitt at

$$c_n > 0 \tag{3.3}$$

$$c_n \leq (1 + f(n))x_n \tag{3.4}$$

for $n > 0$.

I Underkapittel 3.1.2 og 3.1.3 løser vi problemet for terminering ved henholdsvis $N = 1$ og $N = 2$. Resultatene gjør oss kapable til å gjette på en optimal løsning $c^* = \{c_n^*\}$. I underkapittel 3.1.5 løser vi problemet når driften skal termineres ved tid N, og får bekreftet at gjetningen er riktig. For å kunne gjøre alt dette, trenger vi løsningen av (3.1). Vi starter der.

3.1.1 Løsning av den forenklede differenslikningen (3.1)

Vi starter med å finne uttrykk for x_1, x_2 og x_3.

$$x_1 = (1 + f(0))x_0 - c_0 \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= (1 + f(1))x_1 - c_1 = (1 + f(1))[(1 + f(0))x_0 - c_0] - c_1 \\ &= (1 + f(0))(1 + f(1))x_0 - (1 + f(1))c_0 - c_1 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= (1 + f(2))x_2 - c_2 \\ &= (1 + f(2))[(1 + f(0))(1 + f(1))x_0 - (1 + f(1))c_0 - c_1] - c_2 \\ &= (1 + f(0))(1 + f(1))(1 + f(2))x_0 - (1 + f(1))(1 + f(2))c_0 \\ &\quad - (1 + f(2))c_1 - c_2. \end{aligned}$$

På grunnlag av uttrykkene dannes induksjonshypotesen

$$x_n = [\prod_{i=0}^{n-1}(1+f(i))]x_0 - \sum_{k=1}^{n-1}[c_{k-1}\prod_{j=k}^{n-1}(1+f(j))] - c_{n-1}. \tag{3.7}$$

For å vise at formelen stemmer, gjennomfører vi et induksjonsbevis.

Bevis. Vi starter med grunntilfellet. For $n = 1$ får vi

$$\begin{aligned} x_1 &= [\prod_{i=0}^{0}(1+f(i))]x_0 - \sum_{k=1}^{0}[c_{k-1}\prod_{j=k}^{0}(1+f(j))] - c_0 \\ &= (1+f(0))x_0 - c_0, \end{aligned}$$

som stemmer med uttrykket for x_1 (3.5). Anta videre at induksjonshypotesen stemmer for $n = s$, altså

$$x_s = [\prod_{i=0}^{s-1}(1+f(i))]x_0 - \sum_{k=1}^{s-1}[c_{k-1}\prod_{j=k}^{s-1}(1+f(j))] - c_{s-1}. \tag{3.8}$$

Vi ønsker å vise at dette medfører at induksjonshypotesen stemmer for $n = s+1$, altså

$$x_{s+1} = [\prod_{i=0}^{s}(1+f(i))]x_0 - \sum_{k=1}^{s}[c_{k-1}\prod_{j=k}^{s}(1+f(j))] - c_s. \tag{3.9}$$

For å gjøre dette, benytter vi (3.1) med $n = s$, og setter inn antakelsen (3.8) for x_s:

$$\begin{aligned} x_{s+1} &= (1+f(s))x_s - c_s \\ &= (1+f(s))\left[[\prod_{i=0}^{s-1}(1+f(i))]x_0 - \sum_{k=1}^{s-1}[c_{k-1}\prod_{j=k}^{s-1}(1+f(j))] - c_{s-1}\right] - c_s \\ &= (1+f(s))\cdot[\prod_{i=0}^{s-1}(1+f(i))]x_0 - (1+f(s))\cdot\sum_{k=1}^{s-1}[c_{k-1}\prod_{j=k}^{s-1}(1+f(j))] \\ &- (1+f(s))c_{s-1} - c_s \\ &= [\prod_{i=0}^{s}(1+f(i))]x_0 - \sum_{k=1}^{s-1}[c_{k-1}\prod_{j=k}^{s}(1+f(j))] - (1+f(s))c_{s-1} - c_s. \end{aligned}$$

Dersom indekseringen på summasjonstegnet hadde gått opp til s, hadde vi fått enda et ledd $(1+f(s))c_{s-1}$. Et slikt ledd har vi allerede. Vi innlemmer det i summasjonstegnet, og får uttrykket

$$x_{s+1} = [\prod_{i=0}^{s}(1+f(i))]x_0 - \sum_{k=1}^{s}[c_{k-1}\prod_{j=k}^{s}(1+f(j))] - c_s, \tag{3.9}$$

som var det vi ønsket å vise. ■

3.1.2 Terminering ved $N = 1$

Dersom bonden bestemmer seg for å avvikle driften ved tidspunkt $N = 1$, gjøres det én innhøsting. Vi skal løse følgende problem:

Problem 3.1.2 (Optimeringsproblemet med termineringstidspunkt $N = 1$). *For en gitt x_0, finn c_0 som maksimerer*

$$U(1, c_0) = \ln c_0 + r \ln x_1$$

gitt at

$$c_0 > 0 \tag{3.10}$$
$$c_0 \leq (1 + f(0))x_0. \tag{3.11}$$

Merknad 3.1.3. Hvis bibetingelsene skulle vært skrevet på formen som oppgis i teoridelen, burde (3.10) stått som $c_0 \geq 0$ eller $-c_0 \leq 0$. Det er derimot unødvendig å gå via den generelle notasjonen når modellen vår ikke tillater innhøstinger lik 0. Vi lar (3.10) stå, og fastslår at den tilhørende Lagrange-multiplikatoren er $\lambda_0 = 0$. ⋄

Siden x_1 er avhengig av c_0, setter vi inn (3.5) for x_1. Utbyttesummen kan da skrives som

$$U(1, c_0) = \ln c_0 + r \ln[(1 + f(0))x_0 - c_0].$$

Lagrange-funksjonen blir

$$\begin{aligned} L_1(c_0) &= \ln c_0 + r \ln[(1 + f(0))x_0 - c_0] + \lambda_0 c_0 - \lambda_1(c_0 - (1 + f(0))x_0) \\ &= \ln c_0 + r \ln[(1 + f(0))x_0 - c_0] - \lambda_1(c_0 - (1 + f(0))x_0). \end{aligned}$$

En optimal løsning c_0^* må tilfredstille de generelle Kuhn-Tucker betingelsene (2.5-2.6), som i dette tilfellet blir

$$L_1'(c_0) = \frac{1}{c_0} - \frac{r}{(1 + f(0))x_0 - c_0} - \lambda_1 = 0 \tag{3.12}$$
$$\lambda_0 = 0 \text{ fordi } c_0 > 0 \tag{3.13}$$
$$\lambda_1 \geq 0 \ (\lambda_1 = 0 \text{ dersom } c_0 < (1 + f(0))x_0). \tag{3.14}$$

Vi går systematisk gjennom de ulike kombinasjonene av bibetingelsene, og har to muligheter: (I): Begge bibetingelser inaktive, (II): Bibetingelse (3.10) inaktiv og bibetingelse (3.11) aktiv.

Begge bibetingelser inaktive. Da er $c_0 > 0$ og $c_0 < (1 + f(0))x_0$, og $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$. Likning (3.12) gir

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0} &= \frac{r}{(1 + f(0))x_0 - c_0} \\ rc_0 &= (1 + f(0))x_0 - c_0 \\ (1 + r)c_0 &= (1 + f(0))x_0 \\ c_0 &= \frac{1}{1 + r}(1 + f(0))x_0. \end{aligned}$$

(II): (3.10) inaktiv, (3.11) aktiv. Da er $c_0 > 0$ og $c_0 = (1 + f(0))x_0$. I henhold til Merknad 2.3.2 er $\lambda_1 > 0$. Likning (3.12) kan skrives om til

$$\lambda_1 = \frac{1}{c_0} - \frac{r}{(1 + f(0))x_0 - c_0}.$$

Dersom $\lambda_1 > 0$, må

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c_0} > \frac{r}{(1+f(0))x_0 - c_0} \\
\iff & rc_0 < (1+f(0))x_0 - c_0 \\
\iff & (1+r)c_0 < (1+f(0))x_0 \\
\iff & c_0 < \frac{1}{1+r}(1+f(0))x_0.
\end{aligned}$$

Det motsier den aktive formen av bibetingelse (3.11), nemlig at $c_0 = (1+f(0))x_0$. Vi får ingen løsningskandidat.

Konklusjon Vi har én kandidat til maksimum, nemlig

$$c_0 = \frac{1}{1+r}(1+f(0))x_0.$$

Vi skal nå bevise at $U(1, c_0)$ oppnår maksimum i den tillatte mengden. Vi innfører en vilkårlig liten verdi $\varepsilon > 0$. La

$$S_{1,\varepsilon} = \{c_0 : \varepsilon \le c_0 \le (1+f(0))x_0\}$$

betegne mengden tillatte verdier. $S_{1,\varepsilon}$ er lukket og begrenset, og $U(1, c_0)$ er kontinuerlig på $S_{1,\varepsilon}$. Ifølge ekstremalverdisetningen oppnår $U(1, c_0)$ maksimum i $S_{1,\varepsilon}$.

3.1.3 Terminering ved $N = 2$

Dersom bonden bestemmer seg for å avvikle driften ved tidspunkt $N = 2$, gjøres det to innhøstinger. Vi skal løse følgende problem:

Problem 3.1.4 (Optimeringsproblemet med termineringstidspunkt $N = 2$). *For en gitt x_0, finn c_0 og c_1 som maksimerer*

$$U(2, c_0, c_1) = \ln c_0 + r \ln c_1 + r^2 \ln x_2 \tag{3.15}$$

gitt at

$$c_0 > 0 \tag{3.16}$$
$$c_0 \le (1+f(0))x_0 \tag{3.17}$$
$$c_1 > 0 \tag{3.18}$$
$$c_1 \le (1+f(1))x_1. \tag{3.19}$$

Siden x_1 er avhengig av c_0, og x_2 er avhengig av c_0 og c_1, setter vi inn (3.5) for x_1 og (3.6) for x_2 i henholdsvis (3.19) og (3.15). Vi formulerer problemet på nytt:

Problem 3.1.5. *For en gitt x_0, finn c_0 og c_1 som maksimerer*

$$U(2, c_0, c_1) = \ln c_0 + r \ln c_1 + r^2 \ln[(1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0 - c_1] \tag{3.20}$$

gitt at

$$c_0 > 0 \tag{3.21}$$
$$c_0 \le (1+f(0))x_0 \tag{3.22}$$
$$c_1 > 0 \tag{3.23}$$
$$c_1 \le (1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0. \tag{3.24}$$

Lagrange-funksjonen blir

$$
\begin{aligned}
L_2(c_0, c_1) = {} & \ln c_0 + r \ln c_1 + r^2 \ln[(1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0 - c_1] \\
& - \lambda_1(c_0 - (1+f(0))x_0) - \lambda_3(c_1 - (1+f(0))(1+f(1))x_0 + (1+f(1))c_0),
\end{aligned}
$$

og et optimalt løsningspar (c_0^*, c_1^*) må tilfredstille

$$
\frac{\partial L_2}{\partial c_0} = \frac{1}{c_0} - \frac{r^2(1+f(1))}{(1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0 - c_1} - \lambda_1 - \lambda_3(1+f(1)) = 0 \tag{3.25}
$$

$$
\frac{\partial L_2}{\partial c_1} = \frac{r}{c_1} - \frac{r^2}{(1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0 - c_1} - \lambda_3 = 0 \tag{3.26}
$$

$$
\lambda_0 = 0 \text{ fordi } c_0 > 0 \tag{3.27}
$$

$$
\lambda_1 \geq 0 \ \Big(\lambda_1 = 0 \text{ dersom } c_0 < (1+f(0))x_0\Big) \tag{3.28}
$$

$$
\lambda_2 = 0 \text{ fordi } c_1 > 0 \tag{3.29}
$$

$$
\lambda_3 \geq 0 \ \Big(\lambda_3 = 0 \text{ dersom } c_0 < (1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0\Big). \tag{3.30}
$$

Bibetingelsene kan kombineres på fire måter.

(I): Alle bibetingelser inaktive. Da er $c_0 > 0$, $c_0 < (1+f(0))x_0$, $c_1 > 0$ og $c_1 < (1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0$, som betyr at $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. De partiellderiverte av L_2 kan omskrives, og danner likningssystemet

$$
\begin{aligned}
r^2(1+f(1))c_0 &= (1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0 - c_1 \qquad (3.31) \\
rc_1 &= (1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0 - c_1.
\end{aligned}
$$

Det vil si at sammenhengen mellom c_0 og c_1 er

$$
c_1 = r(1+f(1))c_0. \tag{3.32}
$$

Vi setter inn uttrykket for c_1 i (3.31) og løser for c_0:

$$
\begin{aligned}
r^2(1+f(1))c_0 &= (1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0 - r(1+f(1))c_0 \\
(1+r+r^2)(1+f(1))c_0 &= (1+f(0))(1+f(1))x_0 \\
c_0 &= \frac{1}{1+r+r^2}(1+f(0))x_0.
\end{aligned}
$$

Vi setter resultatet inn i (3.32) og får

$$
c_1 = \frac{r}{1+r+r^2}(1+f(0))(1+f(1))x_0,
$$

som betyr at vi har løsningskandidaten

$$
(c_0, c_1) = \left(\frac{1}{1+r+r^2}(1+f(0))x_0, \frac{r}{1+r+r^2}(1+f(0))(1+f(1))x_0\right).
$$

(II): (3.21), (3.22), (3.23) inaktive, (3.24) aktiv. Da er $c_0 > 0$, $c_0 < (1+f(0))x_0$, $c_1 > 0$ og $c_1 = (1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0$. Det betyr at $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, mens $\lambda_3 > 0$. Innsatt i (3.25) får vi:

$$\begin{aligned}(1+f(1))\lambda_3 &= \frac{1}{c_0} - \frac{r^2(1+f(1))}{(1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0 - c_1}\\ \lambda_3 &= \frac{1}{(1+f(1))c_0} - \frac{r^2}{(1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0 - c_1}.\end{aligned}$$

Dersom $\lambda_3 > 0$, må

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1+f(1))c_0} > \frac{r^2}{(1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0 - c_1}\\ \iff &r^2(1+f(1))c_0 < (1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0 - c_1\\ \iff &c_1 < (1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+r^2)(1+f(1))c_0.\end{aligned}$$

Dette motsier den aktive formen av bibetingelse (3.24).

(III): (3.21), (3.23), (3.24) inaktive, (3.22) aktiv. Da er $c_0 > 0$, $c_0 = (1+f(0))x_0$, $c_1 > 0$ og $c_1 < (1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0$. Det betyr at $\lambda_0 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, mens $\lambda_1 > 0$. Ved hjelp av (3.26) finner vi et uttrykk for c_1:

$$\begin{aligned}\frac{r}{c_1} &= \frac{r^2}{(1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0 - c_1}\\ r^2c_1 &= r(1+f(0))(1+f(1))x_0 - r(1+f(1))c_0 - rc_1\\ (r+r^2)c_1 &= r[(1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0]\\ c_1 &= \frac{1}{1+r}[(1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0]. \qquad (3.33)\end{aligned}$$

Fra (3.25) får vi

$$\lambda_1 = \frac{1}{c_0} - \frac{r^2(1+f(1))}{(1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0 - c_1}.$$

Dersom $\lambda_1 > 0$, må

$$\begin{aligned}\frac{1}{c_0} &> \frac{r^2(1+f(1))}{(1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0 - c_1}\\ r^2(1+f(1))c_0 &< (1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0 - c_1.\end{aligned}$$

Ved å sette inn uttrykket for c_1 (3.33) får vi

$$\begin{aligned}r^2(1+f(1))c_0 &< (1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0\\ &\quad - \frac{1}{1+r}[(1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0]\\ (r^2+r^3)(1+f(1))c_0 &< (1+r)(1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+r)(1+f(1))c_0\\ &\quad - (1+f(0))(1+f(1))x_0 + (1+f(1))c_0\\ (r^2+r^3)(1+f(1))c_0 &< r(1+f(0))(1+f(1))x_0 - r(1+f(1))c_0\\ (r+r^2+r^3)(1+f(1))c_0 &< r(1+f(0))(1+f(1))x_0\end{aligned}$$

$$c_0 < \frac{1}{1+r+r^2}(1+f(0))x_0.$$

Dette motsier den aktive formen av bibetingelse (3.22).

(IV): (3.21), (3.23) inaktive, (3.22), (3.24) aktive. Da er $c_0 > 0$, $c_0 = (1+f(0))x_0$, $c_1 > 0$ og $c_1 = (1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0$. Det betyr at $\lambda_0 = \lambda_2 = 0$, mens $\lambda_1, \lambda_3 > 0$. Fra (3.26) får vi

$$\lambda_3 = \frac{r}{c_1} - \frac{r^2}{(1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0 - c_1}.$$

Dersom $\lambda_3 > 0$, må

$$\begin{aligned}
\frac{r}{c_1} &> \frac{r^2}{(1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0 - c_1} \\
r^2 c_1 &< r(1+f(0))(1+f(1))x_0 - r(1+f(1))c_0 - rc_1 \\
(r+r^2)c_1 &< r[(1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0] \\
c_1 &< \frac{1}{1+r}[(1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0].
\end{aligned}$$

Dette motsier den aktive formen av bibetingelse (3.24).

Konklusjon Vi har løsningskandidaten

$$(c_0, c_1) = \left(\frac{1}{1+r+r^2}(1+f(0))x_0,\ \frac{r}{1+r+r^2}(1+f(0))(1+f(1))x_0\right).$$

Det gjenstår å bevise at $U(2, c_0, c_1)$ oppnår maksimum i den tillatte mengden, som nå er

$$S_{2,\varepsilon} = \{c_0, c_1 : \varepsilon \le c_0 \le (1+f(0))x_0,\ \ \varepsilon \le c_1 \le (1+f(0))(1+f(1))x_0 - (1+f(1))c_0\}.$$

$U(2, c_0, c_1)$ er kontinuerlig på $S_{2,\varepsilon}$, som er lukket og begrenset. Dermed oppnår $U(2, c_0, c_1)$ maksimum i $S_{2,\varepsilon}$.

3.1.4 Forslag til løsning på Problem 3.1.1

La oss stoppe opp og betrakte resultatene hittil. Vi har funnet ut at dersom bonden ønsker å terminere ved tid $N = 1$ eller $N = 2$, er de optimale kontrollene henholdvis

$$c_0^* = \frac{1}{1+r}(1+f(0))x_0$$

og

$$(c_0^*, c_1^*) = \left(\frac{1}{1+r+r^2}(1+f(0))x_0,\ \frac{r}{1+r+r^2}(1+f(0))(1+f(1))x_0\right).$$

Det ser ut til at uttrykkene for kontrollvariablene gitt et termineringstidspunkt $N \in \mathbb{N}$ blir

$$c_n^* = \frac{r^n}{\sum_{i=0}^{N} r^i}[\prod_{i=0}^{n}(1+f(i))]x_0 \tag{3.34}$$

for $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Dette er naturligvis kalkulert gjetting. Vi trenger et argument for å vise at gjetningen er riktig. I neste underkapittel løser vi Problem 3.1.1, og får bekreftet at uttrykket stemmer.

3.1.5 Det generelle tilfellet. Terminering ved tid N

Før vi kunne løse optimeringsproblemet for terminering ved tid $N = 1$ og $N = 2$, måtte vi omformulere det, slik at vi hadde problemer der kontrollene var de eneste variablene. Det samme gjelder her. Vi gjentar problemet for å friske opp hukommelsen.

Problem 3.1.1 (Optimeringsproblemet med endelig horisont). *For en gitt x_0 og N, finn $c_0, \ldots, c_{N-1}$ som maksimerer*

$$U(N, c_0, \ldots, c_{N-1}) = \sum_{n=0}^{N-1} r^n \ln c_n + r^N \ln x_N \tag{3.2}$$

gitt at

$$c_n > 0 \tag{3.3}$$

$$c_n \leq (1 + f(n))x_n \tag{3.4}$$

for $n > 0$.

Hver x_n er avhengig av de foregående kontrollene $c_0, \ldots, c_{n-1}$. Vi bruker løsningen (3.7) av den forenklede differenslikningen (3.1) til å erstatte x_N i U og x_n i bibetingelsen. Det resulterer i følgende omformulering:

Problem 3.1.6. *For en gitt x_0 og N, finn $c_0, \ldots, c_{N-1}$ som maksimerer*

$$\begin{aligned} U(N, c_0, \ldots, c_{N-1}) = \sum_{n=0}^{N-1} r^n \ln c_n + r^N \ln \Big([\prod_{i=0}^{N-1} (1 + f(i))]x_0 \\ - \sum_{k=1}^{N-1} [c_{k-1} \prod_{j=k}^{N-1} (1 + f(j))] - c_{N-1} \Big) \end{aligned}$$

gitt at

$$-c_n \leq 0 \tag{3.35}$$

$$c_n - (1 + f(n))\Big([\prod_{i=0}^{n-1} (1 + f(i))]x_0 - \sum_{k=1}^{n-1} [c_{k-1} \prod_{j=k}^{n-1} (1 + f(j))] - c_{n-1} \Big) \leq 0 \tag{3.36}$$

for $n > 0$.

Vi lot nå være å skrive (3.35) som en streng ulikhet, slik at $g_l(c_0, \ldots, c_{N-1}) \leq 0$ betegner de $2N$ bibetingelsene, med $l = 0, 1, \ldots, 2N - 1$.
Lagrange-funksjonen blir

$$\begin{aligned} L_N(c_0, \ldots, c_{N-1}) = \sum_{n=0}^{N-1} r^n \ln c_n + r^N \ln \Big([\prod_{i=0}^{N-1} (1 + f(i))]x_0 \\ - \sum_{k=1}^{N-1} [c_{k-1} \prod_{j=k}^{N-1} (1 + f(j))] - c_{N-1} \Big) - \sum_{l=0}^{2N-1} \lambda_l g_l. \end{aligned}$$

Da vi løste for $N = 1$ og $N = 2$, fikk vi kun løsning når alle bibetingelser var inaktive. I og med at det er dette uttrykket vi ønsker å vise at stemmer, lar vi alle bibetingelsene være inaktive. Det vil si at $g_l(c_0, \ldots, c_{N-1}) < 0 \ \forall l$, og dermed er $\lambda_l = 0 \ \forall l$.

Merknad 3.1.7. Hvis bibetingelse (3.4)/(3.36) på et tidspunkt n er aktiv, høster bonden alt, og det vil ikke være noe igjen av ressursen ved neste tidsperiode. Da blir det heller ingen vekst slik modellen er. Derfor er det realistisk - når man betrakter problemet i en praktisk forstand - at bonden høster en andel av ressursen, og at bibetingelsene dermed er inaktive. $\diamond$

Nå, kjære leser, kommer det noen stygge uttrykk. Jeg lover at det ender godt.
Lagrange-funksjonen reduseres til

$$\begin{aligned} L_N(c_0,\dots,c_{N-1}) = \sum_{n=0}^{N-1} r^n \ln c_n + r^N \ln\Big([\prod_{i=0}^{N-1}(1+f(i))]x_0 \\ - \sum_{k=1}^{N-1}[c_{k-1}\prod_{j=k}^{N-1}(1+f(j))] - c_{N-1}\Big) \end{aligned}$$

og de partiellderiverte av L, som må være lik 0, blir på formen

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_N}{\partial c_n} &= \frac{r^n}{c_n} + \frac{r^N \frac{\partial}{\partial c_n}\Big([\prod_{i=0}^{N-1}(1+f(i))]x_0 - \sum_{k=1}^{N-1}[c_{k-1}\prod_{j=k}^{N-1}(1+f(j))] - c_{N-1}\Big)}{[\prod_{i=0}^{N-1}(1+f(i))]x_0 - \sum_{k=1}^{N-1}[c_{k-1}\prod_{j=k}^{N-1}(1+f(j))] - c_{N-1}} \\ &= \frac{r^n}{c_n} - \frac{r^N(1+f(n+1))\cdots(1+f(N-1))}{[\prod_{i=0}^{N-1}(1+f(i))]x_0 - \sum_{k=1}^{N-1}[c_{k-1}\prod_{j=k}^{N-1}(1+f(j))] - c_{N-1}} = 0 \end{aligned}$$

for $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Merknad 3.1.8. Betrakt summeformelen i telleren. Når $k = n+1$ får vi leddet $(1+f(n+1))\cdots(1+f(N-1))c_n$. Når dette deriveres med hensyn på c_n, står vi igjen med koeffisienten $(1+f(n+1))\cdots(1+f(N-1))$. $\diamond$

Vi kryssmultipliserer og får N likninger på formen

$$r^N[\prod_{i=n+1}^{N-1}(1+f(i))]c_n = r^n\Big([\prod_{i=0}^{N-1}(1+f(i))]x_0 - \sum_{k=1}^{N-1}[c_{k-1}\prod_{j=k}^{N-1}(1+f(j))] - c_{N-1}\Big)$$

for $n = 0, 1, \dots, N-1$, som også kan skrives som

$$\frac{1}{r^n}[\prod_{i=n+1}^{N-1}(1+f(i))]c_n = \frac{1}{r^N}\Big([\prod_{i=0}^{N-1}(1+f(i))]x_0 - \sum_{k=1}^{N-1}[c_{k-1}\prod_{j=k}^{N-1}(1+f(j))] - c_{N-1}\Big). \tag{3.37}$$

Merk at høyresiden i likningen over vil være den samme uansett hva n er. Generelt har vi at

$$\frac{1}{r^s}[\prod_{i=s+1}^{N-1}(1+f(i))]c_s = \frac{1}{r^n}[\prod_{i=n+1}^{N-1}(1+f(i))]c_n$$

for $n = 0, 1, \dots, s-1, s+1, \dots, N-1$. (Vi unnlater å ta med s fordi det gir likningen $c_s = c_s$, som ikke gir noe ytterligere informasjon). Spesielt har vi (når $s = 0$) at

$$[\prod_{i=1}^{N-1}(1+f(i))]c_0 = \frac{1}{r^n}[\prod_{i=n+1}^{N-1}(1+f(i))]c_n$$

for $n = 1, 2, \ldots, N-1$. Dette er det samme som at

$$c_n = r^n [\prod_{i=1}^{n} (1 + f(i))] c_0 \tag{3.38}$$

for $n = 1, 2, \ldots, N-1$. Vi benytter (3.37) med $n = 0$ for å finne et uttrykk for c_0:

$$[\prod_{i=1}^{N-1} (1 + f(i))] c_0 = \frac{1}{r^N}\Big([\prod_{i=0}^{N-1} (1 + f(i))] x_0 - \sum_{k=1}^{N-1} [c_{k-1} \prod_{j=k}^{N-1} (1 + f(j))] - c_{N-1}\Big).$$

For å få et uttrykk med c_0 som den eneste ukjente, bruker vi (3.38) for å uttrykke c_{i-1} og c_{N-1} ved hjelp av c_0. Likningen vi skal løse blir da på formen

$$\begin{aligned}[\prod_{i=1}^{N-1} (1 + f(i))] c_0 = \frac{1}{r^N}\Big([\prod_{i=0}^{N-1} (1 + f(i))] x_0 - \sum_{k=1}^{N-1} [r^{k-1} [\prod_{i=1}^{k-1} (1 + f(i))] c_0 \prod_{j=k}^{N-1} (1 + f(j))] \\ - r^{N-1} [\prod_{i=1}^{N-1} (1 + f(i))] c_0\Big).\end{aligned}$$

Vi forenkler til

$$\begin{aligned}[\prod_{i=1}^{N-1} (1 + f(i))] c_0 = \frac{1}{r^N}\Big([\prod_{i=0}^{N-1} (1 + f(i))] x_0 - \sum_{k=1}^{N-1} (r^{k-1} [\prod_{i=1}^{N-1} (1 + f(i))] c_0) \\ - r^{N-1} [\prod_{i=1}^{N-1} (1 + f(i))] c_0\Big),\end{aligned}$$

og multipliserer med r^N, som gir

$$\begin{aligned}r^N [\prod_{i=1}^{N-1} (1 + f(i))] c_0 = [\prod_{i=0}^{N-1} (1 + f(i))] x_0 - (1 + r + \cdots + r^{N-2}) [\prod_{i=1}^{N-1} (1 + f(i))] c_0 \\ - r^{N-1} [\prod_{i=1}^{N-1} (1 + f(i))] c_0.\end{aligned}$$

Samler vi leddene med c_0, får vi

$$(1 + r + \cdots + r^N) [\prod_{i=1}^{N-1} (1 + f(i))] c_0 = [\prod_{i=0}^{N-1} (1 + f(i))] x_0,$$

som igjen kan forenkles til

$$\begin{aligned}(\sum_{i=0}^{N} r^i) [\prod_{i=1}^{N-1} (1 + f(i))] c_0 &= [\prod_{i=0}^{N-1} (1 + f(i))] x_0 \\ c_0 &= \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} r^i} (1 + f(0)) x_0.\end{aligned}$$

Ved å sette inn uttrykket for c_0 i (3.38) får vi

$$c_n = r^n [\prod_{i=1}^{n} (1 + f(i))] \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} r^i} (1 + f(0)) x_0,$$

som blir

$$c_n^* = \frac{r^n}{\sum_{i=0}^{N} r^i} [\prod_{i=0}^{n} (1 + f(i))] x_0, \tag{3.34}$$

nemlig uttrykket vi gjettet på. Vi kaller herved den optimale kontrollen gitt en endelig horisont for $c_{n,N}^*$.

3.2 Uendelig horisont

Nå skal vi studere Problem 1.2.1 ved hjelp av dynamisk programmering. Som for endelig horisont, forenkler vi differenslikningen (1.1) som beskriver tidsutviklingen til ressursen. Vi ønsker et autonomt system. Den blir på formen

$$x_{n+1} = (1 + f(x_n))x_n - c_n. \tag{3.39}$$

Følgende er en fornyet versjon av Problem 1.2.1:

Problem 3.2.1 (Optimeringsproblemet med uendelig horisont). *La $C = \{c_n : 0 < c_n \leq (1 + f(x_n))x_n\}$. For en gitt x_0, finn $c_0, c_1, \ldots$ som maksimerer*

$$U(\infty, c_0, c_1, \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \ln c_n \tag{3.40}$$

gitt at

$$x_{n+1} = (1 + f(x_n))x_n - c_n,$$

der $c_n \in C$ $\forall n$.

Bellmans likning, som verdifunksjonen $J(x)$ må tilfredsstille, er

$$J(x) = \max_{c \in C} \ \{\ln c + rJ[(1 + f(x))x - c]\} \tag{3.41}$$

Vi er nødt til å gjette hvordan verdifunksjonen ser ut. Vi benytter de optimale kontrollene $c^*_{n,N}$. Da har vi noe å basere gjettingen på. Det er nærliggende å tenke at kontrollene gitt uendelig horisont likner på (3.34), med unntak av at $N = \infty$, og argumentet til f er størrelsens ressurs x. Da får vi

$$c_n = \frac{r^n}{\sum_{i=0}^{\infty} r^i} [\prod_{i=0}^{n} (1 + f(x_i))] x_0.$$

Nevneren er en uendelig geometrisk rekke, så vi forenkler til

$$c_n = \frac{r^n}{(\frac{1}{1-r})} [\prod_{i=0}^{n} (1 + f(x_i))] x_0 = (1 - r) r^n [\prod_{i=0}^{n} (1 + f(x_i))] x_0. \tag{3.42}$$

Setter vi inn (3.42) for c_n - som nettopp er de kontrollene vi tipper vil maksimere det totale utbyttet - inn i utbyttesummen (3.40), kan vi gjette på et uttrykk for $J(x)$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} r^n \ln \left[(1 - r) r^n [\prod_{i=0}^{n} (1 + f(x_i))] x_0 \right] \\
=&\sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[\ln(1 - r) + n \ln r + \ln [\prod_{i=0}^{n} (1 + f(x_i))] + \ln x_0 \right] \\
=&\sum_{n=0}^{\infty} r^n \ln(1 - r) + \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(n \ln r + \ln [\prod_{i=0}^{n} (1 + f(x_i))] \right) + \sum_{n=0}^{\infty} r^n \ln x_0 \\
=&\frac{\ln(1 - r)}{1 - r} + \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(n \ln r + \ln [\prod_{i=0}^{n} (1 + f(x_i))] \right) + \frac{\ln x_0}{1 - r}.
\end{aligned}$$

Vi antar at rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \Big(n \ln r + \ln [\prod_{i=0}^{n} (1 + f(x_i))] \Big)$$

konvergerer, og gjetter på uttrykket

$$J(x) = \frac{1}{1-r} \cdot \ln x + K$$

der

$$K = \frac{\ln (1-r)}{1-r} + \sum_{n=0}^{\infty} r^n \Big(n \ln r + \ln [\prod_{i=0}^{n} (1 + f(x_i))] \Big)$$

og $x := x_0$ er initialbetingelsen. Bellmans likning blir

$$\frac{1}{1-r} \cdot \ln x + K = \max_{c \in C} \ \{\ln c + r(\frac{1}{1-r} \cdot \ln [(1 + f(x))x - c] + K)\}.$$

La

$$\Phi(c) := \ln c + r(\frac{1}{1-r} \cdot \ln [(1 + f(x))x - c] + K).$$

Vi ønsker å finne den kontrollen c som maksimerer $\Phi(c)$. Først verifiserer vi at $\Phi(c)$ er konkav:

$$\begin{aligned} \Phi'(c) &= \frac{1}{c} - \frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{(1 + f(x))x - c} \\ \Phi''(c) &= -\frac{1}{c^2} - \frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{((1 + f(x))x - c)^2} < 0. \end{aligned}$$

Siden Φ er konkav, finner vi maksimum ved å sette $\Phi'(c) = 0$. Det gir

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} &= \frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{(1 + f(x))x - c} \\ rc &= (1-r)(1 + f(x))x - (1-r)c \\ c &= (1-r)(1 + f(x))x. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Setter vi $n = 0$ i kontrolluttrykket vi gjettet (3.42), får vi $c_0 = (1-r)(1 + f(x_0))x_0$. Vi gjettet med andre ord riktig. Siden kontrolluttrykket er det samme for alle n, har vi at den optimale kontrollen er

$$c_n^*(x_n) = (1-r)(1 + f(x_n))x_n. \tag{3.44}$$

En ting må adresseres; som nevnt i Delkapittel 2.4 oppfyller ikke nyttefunksjonen $u_0(c) = \ln c$ betingelse (2.8), som er

$$M_1 \leq \ln c \leq M_2 \text{ for alle } c \text{, der } M_1, M_2 \in \mathbb{R}.$$

Dermed er det ikke garantert at Bellman likningen har en unik løsning. Vi antar enn så lenge at $J(x)$ er verdifunksjonen til Problem 3.2.1, og at (3.44) faktisk er optimal. Vi gir den herved notasjonen $c_{n,\infty}^*$.

Kapittel 4

En utforskning av strategiene

Det er naturlig å spørre seg om det er mest lønnsomt å terminere driften eller opprettholde den med uendelig horisont. Vi starter med å undersøke dette. Diskonteringsraten r, initialbetingelsen x_0 og en konstant vekst G - mer om den nedenfor - varieres. Hvordan påvirker parametrene dette spørsmålet? Vi presenterer også plott som viser hvordan diskonteringsraten påvirker størrelsen på innhøstingene, og plott som viser hva det totale utbyttet er ved hver tidsperiode av driftingen. Med det gjort, er det på sin plass med en diskusjon rundt logaritmefunksjonens skikkethet som nyttefunksjonen. Vi avslutter kapittelet med en oppsummering.

Moderering av uttrykkene

Før vi går løs på utforskningen, må vi moderere uttrykkene for de optimale kontrollene og utbyttesummene. Vi benytter resultatene fra Kapittel 3, men for å ha et sammenlikningsgrunnlag mellom drift med endelig og uendelig horisont, er vi nødt til å foreta nok en forenkling av differenslikningen som beskriver ressursens tidsutvikling (1.1). Da vi gjorde Kuhn-Tucker optimering og dynamisk programmering ble likningen forenklet til henholdsvis

$$x_{n+1} = (1 + f(n))x_n - c_n \tag{3.1}$$

og

$$x_{n+1} = (1 + f(x_n))x_n - c_n. \tag{3.39}$$

Nå lar vi funksjonen f, som angir hvor mye ressursen vokser fra tidspunkt n til $n+1$, være lik en konstant G. Vi får

$$x_{n+1} = (1 + G)x_n - c_n. \tag{4.1}$$

De optimale kontrollene med endelig horisont blir på formen

$$c^*_{n,N} = \frac{r^n}{\sum_{i=0}^N r^i}[\prod_{i=0}^n (1+G)]x_0 = \frac{r^n}{\sum_{i=0}^N r^i}(1+G)^{n+1}x_0,$$

mens vi for uendelig horisont får

$$c^*_{n,\infty}(x_n) = (1-r)(1+G)x_n.$$

Vi setter de optimale kontrollene inn i utbyttesummene ((3.2) og (3.40)) for å kunne regne ut hva det maksimale totale utbyttet blir. For uendelig horisont får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \ln(c^*_{n,\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \ln[(1-r)(1+G)x_n].$$

For endelig horisont er utregningen mer omfattende. Husk at utbyttesummen gitt en endelig horisont inneholder skrapverdifunksjonen med x_N som argument, og x_N er avhengig av de foregående kontrollene $c_0, \ldots, c_{N-1}$. Vi trenger, som tidligere, et uttrykk for x_N, og det får vi fra løsningen av (4.1). Vi tar utgangspunkt i løsningen (3.7) fra underkapittel 3.1.1, men med $f := G$. Da får vi

$$x_n = [\prod_{i=0}^{n-1}(1+G)]x_0 - \sum_{k=1}^{n-1}[c_{k-1}\prod_{j=k}^{n-1}(1+G)] - c_{n-1}$$

$$= (1+G)^n x_0 - \sum_{k=1}^{n-1} c_{k-1}(1+G)^{n-k} - c_{n-1}.$$

Bevis. Merk at beviset er svært likt induksjonsbeviset i underkapittel 3.1.1. Vi starter med grunntilfellet. For $n = 1$ får vi

$$x_1 = (1+G)x_0 - c_0.$$

Anta videre at induksjonshypotesen stemmer for $n = s$, altså

$$x_s = (1+G)^s x_0 - \sum_{k=1}^{s-1} c_{k-1}(1+G)^{s-k} - c_{s-1}. \tag{4.2}$$

Vi ønsker å vise at dette medfører at induksjonshypotesen stemmer for $n = s+1$, altså

$$x_{s+1} = (1+G)^{s+1} x_0 - \sum_{k=1}^{s} c_{k-1}(1+G)^{s+1-k} - c_s.$$

Vi benytter (4.1) og antakelsen (4.2) og får

$$\begin{aligned}
x_{s+1} &= (1+G)x_s - c_s \\
&= (1+G)[(1+G)^s x_0 - \sum_{k=1}^{s-1} c_{k-1}(1+G)^{s-k} - c_{s-1}] - c_s \\
&= (1+G)^{s+1} x_0 - \sum_{k=1}^{s-1} c_{k-1}(1+G)^{s+1-k} - (1+G)c_{s-1} - c_s \\
&= (1+G)^{s+1} x_0 - \sum_{k=1}^{s} c_{k-1}(1+G)^{s+1-k} - c_s,
\end{aligned}$$

som var det vi ønsket å vise. ■

Utbyttesummen gitt endelig horisont kan da skrives som

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n \ln\left(c^*_{n,N}\right) + r^N \ln x_N$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} r^n \ln\left[\frac{r^n}{\sum_{i=0}^{N} r^i}(1+G)^{n+1}x_0\right]$$

$$+ r^N \ln\left[(1+G)^N x_0 - \sum_{k=1}^{N-1} [c_{k-1}(1+G)^{N-k}] - c_{N-1}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} r^n \ln\left[\frac{r^n}{\sum_{i=0}^{N} r^i}(1+G)^{n+1}x_0\right]$$

$$+ r^N \ln\left[(1+G)^N x_0 - \sum_{k=1}^{N-1} [\frac{r^{k-1}}{\sum_{i=0}^{N} r^i}(1+G)^k x_0 (1+G)^{N-k}] - \frac{r^{N-1}}{\sum_{i=0}^{N} r^i}(1+G)^N x_0\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} r^n \ln\left[\frac{r^n}{\sum_{i=0}^{N} r^i}(1+G)^{n+1}x_0\right]$$

$$+ r^N \ln\left[(1+G)^N x_0 - \sum_{k=1}^{N-1} [\frac{r^{k-1}}{\sum_{i=0}^{N} r^i}(1+G)^N x_0] - \frac{r^{N-1}}{\sum_{i=0}^{N} r^i}(1+G)^N x_0\right].$$

Uttrykkene er for komplekse til å utlede noe generelt. Derfor blir dette kapittelet utforskende snarere enn teoretisk. Resultatene i tabellene og figurene som følger i kapittelet, baserer seg på funksjonene i Python-koden i Tillegg A.

Hva lønner seg?

Vi stiller først spørsmålet: Kan det lønne seg å terminere fremfor å opprettholde driften med uendelig horisont? Det som da er interessant, er ved hvilket termineringstidspunkt det totale utbyttet, som vi kaller $U(N)$, er større eller lik utbyttet med uendelig horisont, kalt $U(\infty)$. La $N_{\text{inf}} = \inf\{N : U(N) \geq U(\infty)\}$ være termineringstidspunktet som skal til for at det er like lønnsomt eller mer lønnsomt å terminere.

Merknad 4.0.1. Slik modellen vår er nå, finnes det ikke noe tak for hvor stor ressursen kan bli. Dette er urealistisk hvis ressursen for eksempel er en dyrebestand. Vi er nødt til å ta hensyn til dette i utforskingen. ◇

Tabell 4.1 viser N_{inf} og utbyttet $U(N_{\text{inf}})$, gitt varierende diskonteringsrate r og vekst G. Utbyttet med uendelig horisont, $U(\infty)$, avhenger naturligvis kun av r, G og x_0. Ressursens størrelse ved start er satt til $x_0 = 20$. Vi ser kun på noen begrensede verdier av G, i et forsøk på å holde systemet innenfor grensene av det realistiske. Dette er allikevel nok til å se noen trender.

r	G	x_0	N_{inf}	$U(\infty)$	$U(N_{\text{inf}})$
0.85	0.10	20	3	5.42	5.82
0.85	0.11	20	3	5.82	5.88
0.85	0.12	20	4	6.22	6.30
0.90	0.10	20	5	6.98	7.09
0.90	0.11	20	9	7.89	7.92
0.90	0.12	20	59	8.78	8.78
0.95	0.10	20	195	18.63	18.63
0.95	0.11	20	199	22.25	22.25
0.95	0.12	20	212	25.84	25.84

Tabell 4.1: Med en startressurs $x_0 = 20$, ser vi når utbyttet med terminering, N_{inf}, er like stort som eller større enn utbyttet med uendelig horisont, $U(\infty)$, gitt varierende diskonteringsrate r og vekst G. Disse tidspunktene er kalt N_{inf}.

Det er tydelig at når diskonteringen er høy, for eksempel $r = 0.85$, kan man terminere tidlig og likevel få et større totalt utbytte enn med uendelig horisont. Det er logisk at det er lite gunstig å drifte ressursen i det uendelige når de løpende utbyttene etter hvert blir veldig små. Da kan det være bedre å gjøre større innhøstinger tidlig, mens disse utbyttene ennå ikke har fått merke diskonteringsratens effekt for hardt. Dersom $r = 0.85$ og G øker, ser vi at N_{inf} øker moderat. Når ressursen vokser raskere, vil bonden kunne høste inn mer. Da blir de løpende utbyttene større, og det skal antakeligvis flere tidsperioder til før $U(N)$ tar igjen $U(\infty)$.

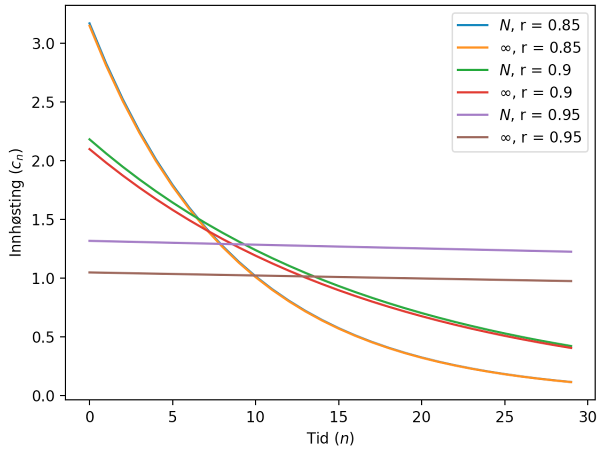
Når horisonten er uendelig, vil diskonteringen på et eller annet tidspunkt gjøre at utbyttene blir tilnærmet lik null. Da har ikke bonden nytte av ressursen lenger. Dette tidspunktet kommer tidligere desto lavere diskonteringsraten er. Jo mindre utbyttene taper seg, desto lenger må en bonde med endelig horisont forvalte ressursen for å oppnå samme utbyttet som med uendelig horisont. Vi ser samme økende tendens for N_{inf} når $r = 0.90$, bare at de respektive verdiene av N_{inf} er større. Sammenlikner vi for eksempel $r = 0.85$ og $r = 0.90$, når $G = 0.10$, ser vi at N_{inf} er henholdvis 3 og 5. Det bør nevnes at $r = 0.85$ er en svært høy diskontering, men den er allikevel nyttig for å illustrere diskonteringsratens effekt.

At det ikke fins noe tak for hvor stor ressursen kan bli, ser vi konsekvensene av i de tre nederste radene av Tabell 4.1 når $r = 0.95$. N_{inf} har svært høye verdier. Bruker vi Python-koden, finner vi at ressursens størrelse ved $n = 195$ når $G = 0.10$ er omtrent 5 300 gitt endelig horisont, og 107 000 gitt uendelig horisont. Dette kan vi trygt si er forbi grensene av det realistiske.

Diskonteringsratens effekt på innhøstingene

Så langt har vi funnet ut at terminering kan lønne seg når diskonteringen er høy. Da er innhøstingene mest sannsynlig store i starten. Derfor er det interessant å se nærmere på disse kontrollene. Grunnet de urealistiske tendensene vi fikk i Tabell 4.1 når $r = 0.95$, senker vi den konstante veksten til $G = 0.05$. Vi ønsker å undersøke hvordan diskonteringsraten påvirker størrelsen på innhøstingene.

Figur 4.1 viser innhøstingene ved hvert tidspunkt n gitt varierende diskonteringsrate, og gitt termineringstidspunktet $N = 30$ eller uendelig horisont.



Figur 4.1: Innhøstinger ved tidspunkt n, gitt de ulike diskonteringsratene $r = \{0.85, 0.90, 0.95\}$. Veksten G er fiksert til 0.05, og $x_0 = 20$. Tidspunktet for terminering er $N = 30$. Grafene som viser innhøstingene gitt terminering, er merket med N. Grafene med uendelig horisont er merket ∞, og er plottet frem til termineringstidspunktet. Vær oppmerksom på at grafene med diskonteringsrate $r = 0.85$ ligger oppå hverandre.

Vi får bekreftet våre teorier så langt. Jo høyere diskontering, desto større er innhøstingene i starten. Alle grafene er avtakende, og de avtar raskere desto høyere diskonteringen er. Grafene der $r = 0.95$ kan sies å nesten være konstante. Det er nærliggende å spørre seg om en diskonteringsrate på for eksempel 0.98 vil gi en voksende graf. Først undersøker vi hva $U(N)$ og $U(\infty)$ blir når $r = 0.98$.

Merknad 4.0.2. En diskonteringsrate $r = 0.98$ er mer realistisk enn $r = 0.85$. Av den grunn er $r = 0.98$ resten av kapittelet. ◇

En mer realistisk diskontering

Kan det lønne seg å terminere driften hvis de løpende utbyttene taper seg lite? Basert på resultatene så langt, vet vi at ressursen antar en lite virkelighetsnær utvikling når både diskonteringsraten og veksten er høy. I Tabell 4.2 lar vi derfor veksten være $G = 0.05$. Parametrene r og x_0 holdes også konstant. Vi varierer termineringstidspunktet N, og ser hva de totale utbyttene blir.

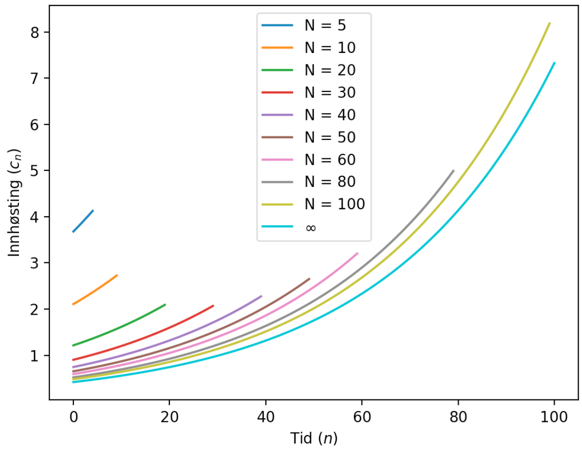
r	G	x_0	N	U(∞)	U(N)
0.98	0.05	20	5	26.66	7.79
0.98	0.05	20	10	26.66	8.76
0.98	0.05	20	20	26.66	7.91
0.98	0.05	20	30	26.66	6.49
0.98	0.05	20	40	26.66	5.57
0.98	0.05	20	50	26.66	5.31
0.98	0.05	20	60	26.66	5.66
0.98	0.05	20	80	26.66	7.64
0.98	0.05	20	100	26.66	10.49

Tabell 4.2: $U(N)$ gitt varierende N. Diskonteringsraten r, veksten G og ressursens starttilstand x_0 er fiksert. $U(\infty)$ vises også.

Det ser ut til at det lønner seg med en uendelig horisont når diskonteringen og veksten er lav. Når veksten er lav tar det tid før ressursen vokser seg stor. Hvis bonden skal terminere tidlig, blir antakeligvis innhøstingene aldri spesielt store. Dermed kan det, hvis bonden skal avvikle driften, likevel lønne seg å opprettholde den i såpass mange perioder at innhøstingene antar en viss størrelse. I tabellen ser vi at $U(N)$ er størst når $N = 100$. Vi benytter ikke større verdier av N fordi ressursen etter hvert blir veldig stor.

Størrelsen på innhøstingene og utbyttesummens utvikling

Et annet interessant funn i Tabell 4.2 er at utbyttet ved terminering ser ut til å avta før det øker igjen. Utbyttet kommer fra innhøstingene. Derfor er det interessant å nok en gang plotte dem, nå med $r = 0.98$. Figur 4.2 viser innhøstingene ved hvert tidspunkt n gitt de samme termineringstidspunktene som i Tabell 4.2.



Figur 4.2: Innhøstinger ved tidspunkt n, gitt tidspunkt for terminering N. De øvrige parametrene er satt til $r = 0.98, G = 0.05$ og $x_0 = 20$. Innhøstingene gitt uendelig horisont vises frem til $N = 100$.

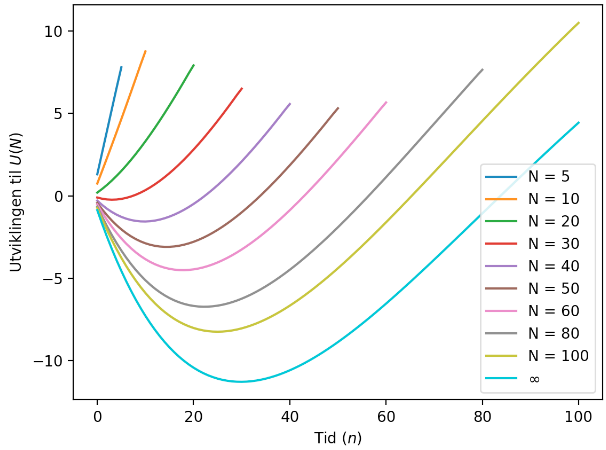
Etter å ha plottet Figur 4.1, mistenkte vi at $r = 0.98$ ga en voksende graf. Det får vi bekreftet. Interessant er det også at jo lenger ressursen skal driftes, desto mindre er innhøstingene i starten. Det bekrefter at det i starten, dersom veksten er lav, lønner seg å la ressursen vokse.

En viktig bemerkning er at $\ln c < 0$ for $c < 1$. Et tidlig termineringstidspunkt gir større innhøstinger i starten, og da unngås negative løpende utbytter. I Figur 4.2 ser vi at det gjelder grafene for $N = \{5, 10, 20\}$. Hvis bonden skal holde på lenger, er innhøstingene først så små at de gir negative bidrag til det totale utbyttet. Etter hvert øker innhøstingene betraktelig. Da vil de løpende utbyttene veie opp for negative bidrag i starten.

I Figur 4.3 følger vi utviklingen til utbyttesummen $U(N)$, gitt et tidspunkt for terminering N. Vi plotter også $U(\infty)$.

Merknad 4.0.3. Slik systemet vårt er, gjøres innhøstinger fra og med tidspunkt $n = 0$ som gir utbyttet $\ln c_0$. Derfor starter ikke grafene i et felles punkt $(0, 0)$. ⋄

Jo lenger ressursen skal forvaltes, desto større negativ er utbyttesummen før den begynner å stige igjen. Som forventet ser vi at $U(5), U(10)$ og $U(20)$ er positive hele veien.

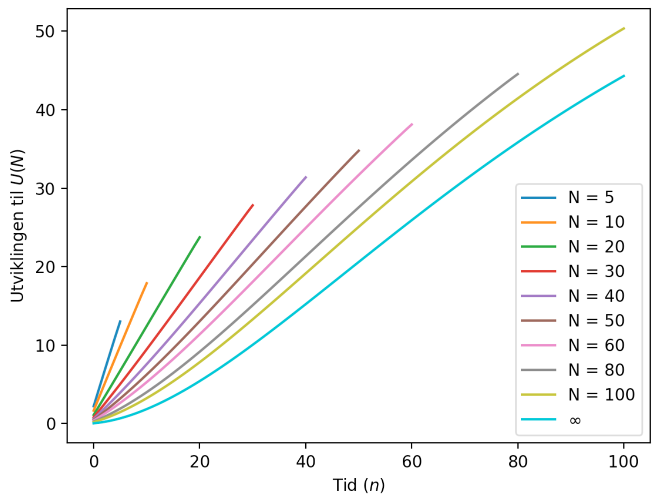


Figur 4.3: Utviklingen til $U(N)$ gitt et tidspunkt for terminering N. De øvrige parametrene er satt til $r = 0.98, G = 0.05$ og $x_0 = 20$. Utviklingen til $U(\infty)$ vises frem til $N = 100$.

Logaritmefunksjonens skikkethet som nyttefunksjon

La oss ta et skritt tilbake fra matematikken, og drøfte problemet i en praktisk forstand ved hjelp av et eksempel. En bonde kjøper seg et gårdsbruk, og skaffer seg dyr. I starten ønsker bonden å la bestanden vokse, og slakter derfor ingen dyr de første periodene. Bondens inntjening kommer fra slakt. Dersom ingen dyr slaktes, blir utbyttet lik null. La oss kalle tidsperioder der ingen dyr slaktes for hvileperioder. I denne oppgaven blir logaritmefunksjonen brukt som nyttefunksjon fordi det ga oss mulighet til å finne analytiske løsninger på optimeringsproblemene, og fordi den egner seg godt til utregninger. Men dens svakheten blir veldig tydelig nå. Vi påpekte tidligere at $\ln c < 0$ for $c < 1$. Mer presist har vi at $\ln c \to \infty$ når $c \to 0$. Med modellen vår gir små innhøstinger negative utbytter når de i realiteten burde vært positive. I tillegg er hvileperioder umulig, siden $\text{dom}(u_0) = (0, \infty)$.

Hvis ressursen er større ved start, unngår vi problemet med negative løpende utbytter. Figur 4.4 viser utviklingen til $U(N)$ med samme verdi på parametrene som i Figur 4.3, med unntak av at nå er $x_0 = 50$.



Figur 4.4: Utviklingen til $U(N)$ gitt et tidspunkt for terminering N. De øvrige parametrene er satt til $r = 0.98, G = 0.05$ og $x_0 = 50$. Utviklingen til $U(\infty)$ vises frem til $N = 100$.

Modellen vår har kort oppsummert to svakheter. Logaritmefunksjonen gir negative løpende utbytter når innhøstingene er mindre enn 1. Dette problemet unngår vi dersom ressursen er større ved start. Da er innhøstingene større, og de løpende utbyttene er positive. Men siden veksten er konstant, er det fare for at ressursen raskt blir urealistisk stor. Å holde utforskningen innenfor grensene av det realistiske, er derfor en balansegang mellom disse to svakhetene. På hvilket tidspunkt ressursen kan kalles urealistisk stor, avhenger naturligvis av hva ressursen er. Det kommer vi ikke til å konkretisere i dette kapittelet.

Oppsummering

- Når diskonteringen er høy, er de optimale kontrollene store i starten og avtar med tiden. De løpende utbyttene vil tape seg betydelig med tiden. Når vi høster inn mye tidlig, får vi store løpende utbytter før de rammes for hardt av diskonteringen.
- Det later til at høy diskontering er en forutsetning for at det skal lønne seg å terminere fremfor å drifte med uendelig horisont. Hvis driften avvikles på et tidspunkt N, men utbyttene taper seg så lite at vi fremdeles kunne fått betydelig bidrag til det totale utbyttet hvis driften ble opprettholdt, vil det lønne seg å holde på lenger. Når diskonteringen er lav, særlig kombinert med lav vekst, ser vi at det totale utbyttet med terminering i beste fall blir like stort som utbyttet med uendelig tidshorisont. Det skal også gjerne mange tidsperioder til før dette skjer. Innen den tid er modellen sannsynligvis ikke lenger realistisk.
- Når diskonteringen er lav, kombinert med lav vekst, øker størrelsen på innhøstingene med tiden. Størrelsen på innhøstingene avhenger naturligvis også av hvor stor ressursen er ved start. Små innhøstinger kan gi negative løpende utbytter grunnet logaritmefunksjonen. De burde i realiteten vært positive.

I neste kapittel betrakter vi et system av bønder som har dyr på et felles beiteområde. Hver bonde slakter dyr til kjøttproduksjon hver tidsperiode, og ønsker å maksimere sitt totale utbytte. I dette kapittelet fantes det ikke noe begrensning på hvor stor ressursen kunne bli. Det har vi i neste kapittel, og får på den måten et mer realistisk system. Vi tar også opp tråden fra Delkapittel 3.2, der vi ikke kunne være helt sikre på om kontrollen vi fant faktisk er optimal.

Kapittel 5

En utbryterbonde og en epilog

I dette kapittelet ser vi for oss et scenario der flere bønder har dyr på samme beiteområde. Det totale antallet dyr har en bærekapasitet. Overskrider antallet bærekapasiteten, avtar antall dyr. Bøndene fører en kollektiv politikk, og bestemmer seg for en felles innhøstingsstrategi. En av bøndene ønsker å bryte ut av den felles ordningen i skjul. Vi kaller herved denne bonden for utbryterbonden. Spørsmålet er om hun kan forbedre sitt utbytte ved å velge en annen innhøstingsstrategi enn de andre. Utbryterbonden regner med at de andre fortsetter å følge den kollektive strategien, og at hennes bidrag er så lite at det kan neglisjeres i det store bildet.

5.1 Utbryterbonden

Den tilgjengelige føden F_n ved tid n er

$$F_{n+1} = s(n, F_n, X_n).$$

Variabelen X_n betegner det totale antall dyr ved tid n, og s er avtakende i tredje variabel, siden flere dyr på beiteområdet fører til mindre føde. Hver dyrebestand har tidsutviklingen

$$x^k_{n+1} = g_k(n, x^k_n, F_n) - c^k_n,$$

der c^k_n er kontrollvariabler, i dette tilfellet kjøttproduksjon. Hver bonde ønsker å maksimere sitt utbytte

$$U(c^k_0, c^k_1, \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \ln c^k_n,$$

der $0 < r < 1$. Vi er nødt til å gjøre noen forenklinger for å kunne jobbe videre med scenariet. Vi fjerner avhengigheten av tiden n, og antar at alle bestandene følger samme dynamikk. Da får vi at

$$F_{n+1} = s(F_n, X_n)$$

og

$$x^k_{n+1} = g(x^k_n, F_n) - c^k_n.$$

Den totale dyrebestanden X har en bærekapasitet B. Dersom $X > B$, avtar tilgjengelig føde, og dermed også bestandene. En modell av denne typen er

$$F_{n+1} = (1 + a(B - X_n))F_n$$

der a er en liten, positiv konstant. Føden vokser når $B > X$ og avtar når $B < X$. Vi setter opp differenslikningen for bestandenes dynamikk på liknende vis, og får

$$x_{n+1}^k = (1 + b(B - X_n))x_n^k - c_n^k \tag{5.1}$$

der b er en liten, positiv konstant. Det er samme betingelse som avgjør om føden og bestandene vokser. Derfor er bestandenes avhengighet av F_n kun indirekte. Anta at bøndene starter med like mange dyr, slik at $x_0^1 = x_0^2 = \ldots = x_0^K$. Da er $X_n = Kx_n^k$ og (5.1) blir til

$$x_{n+1}^k = (1 + b(B - Kx_n^k))x_n^k - c_n^k. \tag{5.2}$$

I Delkapittel 3.2 hadde vi systemet

$$x_{n+1} = (1 + f(x_n))x_n - c_n, \tag{3.39}$$

og den optimale kontrollen var

$$c_{n,\infty}^*(x_n) = (1 - r)(1 + f(x_n))x_n. \tag{3.44}$$

Systemet (5.2) er bare en mer spesifikk versjon av (3.39), med $f(x_n) = b(B - Kx_n)$. Det betyr at den optimale kontrollen for bøndene - som blir den kollektive innhøstingsstrategien - er

$$c_{n,\infty}^*(x_n^k) = (1 - r)(1 + b(B - Kx_n^k))x_n^k.$$

Vi vender tilbake til utbryterbonden. Siden hun regner med at sitt eget bidrag kan neglisjeres, ønsker hun å optimere

$$x_{n+1}^1 = (1 + b(B - X_n))x_n^1 - c_n^1,$$

der X_n er den optimale løsningen til det kollektivistiske problemet. Dette blir det samme systemet som i (5.2). Spørsmålet er om det fins en annen kontroll enn den kollektive som vil gi utbryterbonden større totalt utbytte enn de andre. Det henger igjen en usikkerhet rundt resultatene fra Delkapittel 3.2. Siden betingelse (2.8) ikke var tilfredsstilt, kunne vi ikke være helt sikre på at (3.44) var den optimale kontrollen. Det skal vi sjekke i dette kapittelet. Siden den kollektive strategien og initialbetingelsen $X_0 = Kx_0^k$ er kjent for alle bøndene, kan de i prinsippet regne seg fram til hvordan følgen $\{X\} = \{X_0, X_1, \ldots\}$ ser ut. Vi antar at utbryterbonden gjør det. Gitt et tidspunkt n, kjenner hun da det totale antall dyr X_n på beiteområde. Det betyr at problemet blir ikke-autonomt. For å skille mellom utbryterbonden og de andre, lar vi y_n betegne utbryterbondens bestand og z_n betegne innhøstingen ved tid n. Vi holder de matematiske uttrykkene så generelle som mulig. Utbryterbondens problem blir følgende:

Problem 5.1.1 (Utbryterbondens problem). *La $\mathbb{I} = \{z_n \colon 0 < z_n \leq (1 + h(n))y_n\}$. For en gitt y_0, finn $z_0, z_1, \ldots$ som maksimerer*

$$U(\infty, z_0, z_1, \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \ln z_n \tag{5.3}$$

gitt at

$$y_{n+1} = (1 + h(n))y_n - z_n, \tag{5.4}$$

der $z_n \in \mathbb{I}\ \forall n$.

Spørsmålet er om kontrollen

$$z_n(y_n) = (1-r)(1+h(n))y_n, \tag{5.5}$$

som er den kollektive strategien, faktisk er optimal. I så fall finnes det ingen annen kontroll utbryterbonden kan velge for å oppnå større totalt utbytte enn de andre.

I [Wis11] benyttes en mer generell Bellman-likning enn den vi har brukt hittil i oppgaven, der systemet kan være ikke-autonomt. I tillegg presenteres et teorem med betingelser som garanterer at en funksjon faktisk er verdifunksjonen til et problem, og at kontrolluttrykket vi får er optimalt. Vi skal benytte oss av denne teorien. Først en innføring i notasjon:

La $\mathbb{Y} = \{y_0, y_1, \ldots\}$ betegne mengden tilstandsvariabler, og $\zeta = \{z_0, z_1, \ldots\}$ betegne mengden kontrollvariabler.

Det løpende utbyttet er en funksjon $u_0\colon \mathbb{Y}\times\zeta\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ med diskonteringsrate $0 < r \leq 1$.

Funksjonen $d\colon \mathbb{Y}\times\zeta\times\mathbb{N} \to \mathbb{Y}$ beskriver tilstandsvariabelens utvikling.

La $\mathbb{I}$ betegne mengden av tillatte kontroller. Enhver kontrollfunksjon $Z\colon \mathbb{Y}\times\mathbb{N} \to \zeta$ som tilfredsstiller $Z(y,n) \in \mathbb{I}$ for alle $y \in \mathbb{Y}$ og for alle $n \in \mathbb{N}$ kalles tillatt. La Γ være mengden av tillatte kontrollfunksjoner.

Gitt en kontrollfunksjon $Z \in \Gamma$, så kalles enhver funksjon $Y\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Y}$ gitt induktivt av betingelsene $Y(0) = y_0$ og $Y(n+1) = d(Y(n), Z(Y(n), n), n)$ for hver n banen til tilstandsvariablene.

Vi ønsker å maksimere

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n u_0(Y(n), Z(Y(n), n), n)$$

der Y er banen korresponderende til kontrollfunksjonen Z og $Y(0) = y_0$. Den generelle Bellman likningen gis i følgende setning:

Setning 5.1.2 ([Wis11]). *Verdifunksjonen* $J\colon \mathbb{Y}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ *tilfredsstiller*

$$J(y,n) = \max_{z\in\mathbb{I}}\{u_0(y,z,n) + r\cdot J(d(y,z,n), n+1)\}. \tag{5.6}$$

Først vil vi sjekke om utbyttesummen (5.3) med kontrollene (5.5) tilfredsstiller den generelle Bellman likningen. Dette blir à la noe det vi gjorde i Delkapittel 3.2. I tillegg skal vi benytte teoremet i [Wis11] til å sjekke om kontrollen (5.5) er optimal. Teoremet presenteres senere.

Setter vi (5.5) inn i (5.4), får vi

$$y_{n+1} = r(1+h(n))y_n.$$

Ved induksjon gir det

$$\begin{aligned} y_1 &= r(1+h(0))y_0 \\ y_2 &= r(1+h(1))y_1 = r^2 y_0 \prod_{i=0}^{1}(1+h(i)), \end{aligned}$$

som generelt kan skrives som

$$y_n = r^n y_0 \prod_{i=0}^{n-1}(1+h(i)).$$

Vi gjør tilsvarende for kontrollene og får

$$z_0 = (1-r)(1+h(0))y_0$$
$$z_1 = (1-r)(1+h(1))y_1 = (1-r)ry_0 \prod_{i=0}^{1} (1+h(i)),$$

som generelt blir

$$z_n = (1-r)r^n y_0 \prod_{i=0}^{n} (1+h(i)).$$

Utbyttesummen er dermed

$$\begin{aligned} U(y_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \ln z_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \Big(\ln(1-r) + n \ln r + \ln y_0 + \sum_{i=0}^{n} \ln(1+h(i)) \Big). \end{aligned}$$

Vi generaliserer problemet, og antar at vi starter ved et tidspunkt N med initialbetingelsen $y := y_N$. Med samme strategi får vi

$$\begin{aligned} y_{N+1} &= r(1+h(N))y \\ y_{N+2} &= r(1+h(N+1))y_{N+1} \\ &= r^2(1+h(N))(1+h(N+1))y, \end{aligned}$$

som gjør at vi ved tid $n > N$ får

$$y_n = r^{n-N} y \prod_{i=N}^{n-1} (1+h(i)).$$

Induksjon av kontrollene gir

$$\begin{aligned} z_N &= (1-r)(1+h(N))y \\ z_{N+1} &= (1-r)(1+h(N+1))y_{N+1} \\ &= (1-r)ry(1+h(N))(1+h(N+1)), \end{aligned}$$

som generelt kan skrives som

$$z_n = (1-r)r^{n-N} y \prod_{i=N}^{n} (1+h(i)).$$

Det gir et totalt utbytte

$$\begin{aligned} U_N(y) &= \sum_{n=N}^{\infty} r^n \ln z_n \\ &= \sum_{n=N}^{\infty} r^n \Big(\ln(1-r) + (n-N) \ln r + \ln y + \sum_{i=N}^{n} \ln(1+h(i)) \Big). \end{aligned}$$

For at strategien vår skal være optimal, må $U_N(y)$ tilfredsstille

$$U_N(y) = \max\{ r^N \ln z + U_{N+1}((1+h(N))y - z) : 0 < z \le (1+h(N))y \},$$

der maksimum oppnås for $z = (1-r)(1+h(N))y$. Vi sjekker. Først deriverer vi høyresiden med hensyn på z:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z}[r^N \ln z + U_{N+1}((1+h(N))y - z)] \\
=&\frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=N+1}^{\infty} r^n \Big(\ln(1-r) + (n-(N+1)) \ln r + \ln((1+h(N))y - z) + \sum_{i=N+1}^{n} \ln(1+h(i)) \Big) \\
+&\frac{\partial}{\partial z} r^N \ln z \\
=& \sum_{n=N+1}^{\infty} r^n \frac{-1}{(1+h(N))y - z} + r^N \frac{1}{z} \\
=& -\frac{r^{N+1}}{(1-r)((1+h(N))y - z)} + r^N \frac{1}{z}.
\end{aligned}
$$

Ved å sjekke den dobbeltderiverte, får vi bekreftet konkavitet, og ekstremalpunktet er dermed et maksimum. Utregning likner den i Delkapittel 3.2, så vi inkluderer den ikke her. Vi setter uttrykket lik null og får

$$
\begin{aligned}
\frac{r}{(1-r)((1+h(N))y - z)} &= \frac{1}{z} \\
rz &= (1-r)(1+h(N))y - (1-r)z \\
z &= (1-r)(1+h(N))y,
\end{aligned}
$$

som er det vi ønsket. I [Wis11] presenteres følgende teorem, som vi skal benytte til å sjekke om denne kontrollen er optimal:

Teorem 5.1.3 ([Wis11]). *Anta at funksjonen $J\colon \mathbb{Y} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tilfredsstiller Bellman likningen (5.6) og følgende betingelser er oppfylt for enhver bane Y:*

(i) $\limsup_{n\to\infty} r^n \cdot J(Y(n), n) \leq 0$.

(ii) *Hvis* $\limsup_{n\to\infty} r^n \cdot J(Y(n), n) < 0$ *så er*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n u_0(Y(n), Z(Y(n), n), n) = -\infty$$

for hver bane Z slik at Y korresponderer til Z og $Y(0)$.

Da er J verdifunksjonen til det dynamiske optimeringsproblemet, og kontrollen Z vi får av maksimeringen er den optimale kontrollen.

Bevis. Se [Wis11]. ∎

Vi skal vise at kontrollen er optimal forutsatt følgende: Vi antar at én bonde sin dyrebestand aldri kan overskride bærekapasiteten, at det finnes øvre grense for hvor mye en bestand kan vokse i løpet av en tidsperiode, og at det finnes en nedre grense for hvor mye en bestand kan avta i løpet av en tidsperiode. Altså har vi at $Y(n) \leq B$ for alle n, $1 + h(n) \leq 1 + \delta$ for alle n med $\delta > 0$, og at $\varepsilon \leq 1 + h(n)$ for alle n med $0 < \varepsilon < 1$.

Bevis. La Z være en tillatt kontrollfunksjon og Y banen som korresponderer til Z og initialbetingelsen $y := y_N$.

(i) Siden $Y(n) \leq B$ for alle n, er

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} r^n \cdot U_N(Y(n)) \leq \limsup_{n\to\infty} r^n \cdot U_N(B) \\
&= \limsup_{n\to\infty} r^n \cdot \sum_{i=N}^{\infty} r^i \Big(\ln(1-r) + \ln B + (i-N)\ln r + \sum_{j=N}^{i} \ln(1+h(j)) \Big) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} r^n \cdot \sum_{i=N}^{\infty} r^i \Big(\ln(1-r) + \ln B + (i-N)\ln r + \sum_{j=N}^{i} \ln(1+\delta) \Big) \\
&= \limsup_{n\to\infty} r^n \cdot \sum_{i=N}^{\infty} r^i \Big(\ln(1-r) + \ln B + (i-N)\ln r + (i-N+1)\ln(1+\delta) \Big) \\
&= \limsup_{n\to\infty} r^n \Big(\sum_{i=N}^{\infty} r^i \ln(1-r) + \sum_{i=N}^{\infty} r^i \ln B + \sum_{i=N}^{\infty} r^i (i-N)\ln r \\
&+ \sum_{i=N}^{\infty} r^i (i-N+1)\ln(1+\delta) \Big) \\
&= \limsup_{n\to\infty} r^n \Big(\frac{r^N \ln(1-r)}{1-r} + \frac{r^N \ln B}{1-r} + \sum_{i=N}^{\infty} r^i (i-N)\ln r + \sum_{i=N}^{\infty} r^i (i-N+1)\ln(1+\delta) \Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(De to rekkene i linjen over konvergerer. Det kan vises med forholdstesten. Uttrykket inni parentesen er dermed lik en konstant).

(ii) Anta at

$$\limsup_{n\to\infty} r^n \cdot U_N(Y(n)) < 0.$$

Siden vi for hver n har at $Z(Y(n), n) \leq (1-r)(1+\delta)Y(n)$, får vi at

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N}^{\infty} r^n \ln Z(Y(n), n) &\leq \sum_{n=N}^{\infty} r^n \ln \Big((1-r)(1+\delta)(Y(n)) \Big) \\
&= \frac{r^N \ln((1-r)(1+\delta))}{1-r} + \sum_{n=N}^{\infty} r^n \ln Y(n).
\end{aligned}$$

Hvis

$$\limsup_{n\to\infty} r^n \ln Y(n) < 0 \tag{5.7}$$

går summen $\sum_{n=N}^{\infty} r^n \ln Y(n)$, og dermed også utbyttesummen, mot $-\infty$.

$$\begin{aligned}
U_N(Y(n)) &= \sum_{n=N}^{\infty} r^n \Big(\ln(1-r) + (n-N)\ln r + \ln Y(n) + \sum_{i=N}^{n} \ln(1+h(i)) \Big) \\
U_N(Y(n)) &= \frac{r^N \ln(1-r)}{1-r} + \sum_{n=N}^{\infty} r^n (n-N)\ln r + \frac{r^N \ln Y(n)}{1-r} + \sum_{n=N}^{\infty} r^n \sum_{i=N}^{n} \ln(1+h(i)) \\
\frac{r^N \ln Y(n)}{1-r} &= U_N(Y(n)) - \frac{r^N \ln(1-r)}{1-r} - \sum_{n=N}^{\infty} r^n (n-N)\ln r - \sum_{n=N}^{\infty} r^n \sum_{i=N}^{n} \ln(1+h(i))
\end{aligned}$$

$$\ln Y(n) = \frac{1-r}{r^N}\Big(U_N(Y(n)) - \frac{r^N \ln(1-r)}{1-r} - \sum_{n=N}^{\infty} r^n (n-N)\ln r - \sum_{n=N}^{\infty} r^n \sum_{i=N}^{n} \ln(1+h(i))\Big)$$

Vi substituerer $\ln Y(n)$ i (5.7) og får

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} r^n \ln Y(n) \\
&= \limsup_{n\to\infty} r^n \cdot \frac{1-r}{r^N}\Big(U_N(Y(n)) - \frac{r^N \ln(1-r)}{1-r} - \sum_{i=N}^{\infty} r^i (i-N)\ln r - \sum_{i=N}^{\infty} r^i \sum_{j=N}^{i} \ln(1+h(j))\Big) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} r^n \cdot \frac{1-r}{r^N}\Big(U_N(Y(n)) - \frac{r^N \ln(1-r)}{1-r} - \sum_{i=N}^{\infty} r^i (i-N)\ln r - \sum_{i=N}^{\infty} r^i \sum_{j=N}^{i} \ln\varepsilon\Big) \\
&= \limsup_{n\to\infty} r^n \cdot \frac{1-r}{r^N}\Big(U_N(Y(n)) - \frac{r^N \ln(1-r)}{1-r} - \sum_{i=N}^{\infty} r^i (i-N)\ln r - \sum_{i=N}^{\infty} r^i (i-N+1)\ln\varepsilon\Big) \\
&< 0 \quad \text{(fra antakelse)}.
\end{aligned}$$

■

Kontrollen

$$z^*_{n,\infty}(y_n) = (1-r)(1+h(n))y_n$$

er optimal. Det betyr at utbryterbonden ikke kan velge en annen innhøstingsstrategi for å øke eget utbytte.

5.2 Epilog

Med den generelle Bellman likningen for hånd (5.6), kan man undre seg over hvorfor ikke den dynamiske programmeringen i Delkapittel 3.2 ble gjort for et mer generelt, ikke-autonomt system $x_{n+1} = (1 + f(n, x_n))x_n - c_n$. Da kunne sammenlikningen i Kapittel 4 tatt utgangspunkt i systemet $x_{n+1} = (1+f(n))x_n - c_n$ i stedet for $x_{n+1} = (1+G)x_n - c_n$. Det enkle svaret er at vi på dette tidspunktet kun kjente til dynamisk programmering for autonome problemer. Python-koden hadde også blitt noe mer kompleks, i tillegg til at vi hadde måttet bestemme et uttrykk for $f(n)$. Da var på et vis enklere å la veksten være lik en konstant G, og heller være tydelig på modellens svakheter.

Veien blir til mens man går. Artikkelen med den generelle Bellman likningen og Teorem 5.1.3 ble oppdaget mot slutten av prosessen. Som følge av det ble Kapittel 5 til.

Referanser

[Hyl10] Hylland, K. T. «Optimization by controlled outphasing given a pasture-livestock system». Masteroppg. 2010.

[Kar98] Karatzas I. Shreve, S. *Methods of Mathematical Finance*. Springer, 1998.

[Lin15] Lindstrøm T. Hveberg, K. *Flervariabel analyse med lineær algebra*. 2.utg. Gyldendal Akademisk, 2015.

[Syd02] Sydsæter, K. *Matematisk analyse. Bind 2*. 4.utg. Gyldendal Akademisk, 2002.

[Syd10] Sydsæter, K. *Matematisk analyse. Bind 1*. 8.utg. Gyldendal Akademisk, 2010.

[Wis11] Wiszniewska-Matyszkiel, A. «On the terminal condition for the Bellman equation for dynamic optimization with an infinite horizon». I: *Applied mathematics letters* 24.6 (2011), s. 943–949.

Tillegg A

Kode tilhørende Kapittel 4

```
import numpy as np
from numpy import log as ln
import matplotlib.pyplot as plt

#Uendelig horisont

eps = 1e-30
def c_uendelig(r, G, x_0):

    x_liste = [x_0]
    c_liste = []

    n = 0
    while r**n >= eps:
        c = (1-r) * (1+G) * x_liste[n]
        c_liste.append(c)
        x = (1+G) * x_liste[n] - c
        x_liste.append(x)
        n += 1

    return c_liste

def x_uendelig(r, G, x_0):

    x_liste = [x_0]
    c_liste = []

    n = 0
    while r**n >= eps:
        c = (1-r) * (1+G) * x_liste[n]
        c_liste.append(c)
        x = (1+G) * x_liste[n] - c
        x_liste.append(x)
        n += 1

    return x_liste
```

```
def utbytte_uendelig(r, G, x_0):

    utbytte = 0
    c = c_uendelig(r, G, x_0)
    for n in range(len(c)):
        utbytte += r**n * ln(c[n])

    return round(utbytte, 2)

def ledd_uendelig(r, G, x_0, N): #leddene i utbyttesummen, printer opp
↪   til ledd N

    ledd = []
    c = c_uendelig(r, G, x_0)[:N]
    for n in range(len(c)):
        l = r**n * ln(c[n])
        ledd.append(l)

    return ledd

#Endelig horisont

# \sum_{i=0}^{N}{r^i}
def a(r, N):
    s = 0
    for i in range(N + 1):
        s += r**i
    return s

def c_endelig(r, G, x_0, N):

    c_list = []

    for n in range(N):
        c = (r**n)/a(r, N) * (1+G)**(n+1) * x_0
        c_list.append(c)

    return c_list

def x_endelig(r, G, x_0, N):

    x_list = [x_0]
    c = c_endelig(r, G, x_0, N)

    for n in range(len(c)):
        x = (1+G) * x_list[n] - c[n]
        x_list.append(x)
```

```
    return x_list

def ledd_endelig(r, G, x_0, N):

    c = c_endelig(r, G, x_0, N)
    ledd = []

    for n in range(len(c)):
        l = r**n * ln(c[n])
        ledd.append(l)

    return ledd

def utbytte_endelig(r, G, x_0, N):

    # \sum_{n=0}^{N-1}{r^n
     ↪  \ln{\bigg[\frac{r^n}{\sum_{i=0}^{N}{r^i}}(1+G)^{n+1}x_0\bigg]}}
    sum_1 = 0
    for n in range(N):
        sum_1 += r**n * ln((r**n)/a(r, N) * (1+G)**(n+1) * x_0)

    #
     ↪  \sum_{k=1}^{N-1}{[\frac{r^{k-1}}{\sum_{i=0}^{N}{r^i}}(1+G)^{N}x_0]}
    sum_2 = 0
    for k in range(1, N):
        sum_2 += (r**(k-1))/a(r, N) * (1+G)**N * x_0

    total_nytte = sum_1 + r**N * ln((1+G)**N * x_0 - sum_2 -
     ↪  (r**(N-1))/a(r, N) * (1+G)**N * x_0)

    return round(total_nytte, 2)

def skrapverdi(r, G, x_0, N):

    sum_2 = 0
    for k in range(1, N):
        sum_2 += (r**(k-1))/(a(r, N)) * (1+G)**N * x_0

    return r**N * ln((1+G)**N * x_0 - sum_2 - (r**(N-1))/a(r, N) *
     ↪  (1+G)**N * x_0)
```