

UiO : **Matematisk institutt**

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Dispersjonsrelasjon for tyngdebølger på den frie overflaten til en virvelstrøm

Martine Falch Løfsgaard

Masteroppgave, våren 2023



Denne masteroppgaven er levert inn som en del av programspesialiseringen *Mekanikk* under *Lektorprogrammet* ved Universitet i Oslo. Oppgaven er normert til 30 studiepoeng.

Forsiden viser et utsnitt av rotsystemet til den eksepsjonelle liegruppen E_S , projisert ned i planet. Liegrupper ble oppfunnet av den norske matematikeren Sophus Lie (1842–1899) for å uttrykke symmetriene til differensiallikninger og spiller i dag en sentral rolle i flere deler av matematikken.

Sammendrag

Bølgeforstyrrelser i en virvelstrøm kan observeres i naturen eller de kan lages av mennesker. I naturen kan man observere slike virvelstrømmer i bekker, elver eller på havet. Virvelstrømmene kan lages ved å røre i et begerglass eller tømme vann ut av et sluk. Det finnes flere videoer av virvelfontener som er plassert på ulike steder i verden. På mange av videoene ser det ut som bølgekamene har en spiralform som innebærer at bølgene beveger seg både oppover og rundt i virvelen.

I denne oppgaven har det vært gjennomført en empirisk undersøkelse av bølgeforstyrrelser på den frie overflaten av en virvelstrøm. Ulike metoder for å lage en virvelstrøm er utforsket. Bølgeforstyrrelsene er målt ved å analysere bilder av bølgene, som er tatt med et høyhastighetskamera. De målte bølgene er analysert med to-dimensjonal diskret Fourier transformasjon i tid og én romlig dimensjon. Dvs. bildene som er analysert viser den komponenten av bølgebevegelsen som beveger seg oppover i virvelen.

Den metoden som var best egnet for analyse av bølgeforstyrrelsen, var slukvirvelen der det ble laget en virvel ved å pumpe inn vann tangentielt i et beger og la det renne ut i et sluk i midten. Ved å studere plot av de målte bølgene, kan man se at disse bølgene er ganske regelmessige med en klart dominerende bølgelengde. Denne bølgelengde kan man finne igjen i spekteret for bølgetall som er funnet ved Fourieranalyse. Når man prøver å følge bølgene over tid ved å se på plott av hvordan overflaten varierer med tiden, er det ikke like tydelig å se en dominerende bølgeperiode for de bølgeforstyrrelsene i virveltrakten som vi har ønsket å studere. Det har vært en utfordring at midten av virveltrakten ikke alltid er en rett vertikal linje i sentrum av begeret, men at den traktformede virvelen beveger seg langsomt fra side til side.

Forord

Jeg ønsker å takke veilederen min Karsten Trulsen for å ha gitt meg tiltro til å gjennomføre denne eksperimentelle oppgaven. Takk for all inspirasjon du gir, oppmuntrende ord og god tålmodighet du har.

Tusen takk til Olav Gundersen på det hydrodynamiske laboratoriet for god hjelp, og som har bidratt til oppsett for utførelse av eksperimentet.

Martine Falch Løfsgaard
Oslo, 15.mai 2023

Innhold

Sammendrag	ii
Forord	iii
.....	iii
Innhold	iv
1 Introduksjon	1
2 Teori	3
2.1 Koordinatsystem	3
2.2 Notasjon	5
2.3 Rankine virvel	6
3 Fremgangsmåte	8
3.1 Beskrivelse av oppsett for å lage virvler.	8
3.2 Oppsett i Matlab	11
4 Resultater	13
5 Diskusjon	18
6 Konklusjon	21
Appendices	22
A Figurer A	23
B Figurer B	32
C Bilder opptak og oppsett	41
D Tabeller og lister	52
E Matlab kode	54
Bibliografi	60

KAPITTEL 1

Introduksjon

Bølgeforstyrrelser i en virvelstrøm kan observeres som synlige fenomener i naturen eller de kan lages av mennesker. I naturen kan man observere slike virvelstrømmer i bekker, elver eller på havet. Slike virvelstrømmer kan lages ved å røre i et begerglass ved hjelp av magnetrører eller tømme vann ut av et sluk. På Kistefos museum har de en installasjon av en stor virvelstrøm i mineralolje [mus]. Dersom man søker på vortex fountain på youtube finnes det flere videoer av virvelfontener som er plassert på ulike steder i verden. Ved å studere disse bølgeforstyrrelse ser de ut som de beveger seg oppover og utover. På mange av videoene ser det ut som bølgekamene har en spiralform som innebære at bølgene beveger seg både oppover og rundt i virvelen.

Tidligere arbeid

Slukvirvler har vært beskrevet og studert analytisk tidligere. Dreyer(2020) [Dre20] studerte bølger på overflaten av en bunnløs slukvirvel. Han modellerte overflaten av sluket som en likevektsflate for en Rankinvirvel, og viste hvordan man kan finne grensen for når overflatespenning kan neglisjeres. Han utviklet et koordinatsystem som fulgte likevektsflaten til sluket, og studerte bølger som beveger seg på likevektsflaten. Han fant en dispersjonsrelasjon for disse bølgene.

Fourieranalyse av laboratoriemålinger av bølger har blitt gjort av flere ved instituttet. Taklo (2016)[Tak16] utførte eksperimenter i bølgetanken ved Universitet i Oslo. Det ble generert langkammede bølger, dvs. bølger som går i én retning. De målte bølgene ble analysert ved hjelp av Fourieranalyse for å finne spekteret for bølgetall og bølgefrekvens, og dette ble sammenlignet med numeriske simuleringer av lineære bølger og ikke-lineære effekter. Taklo(2016)[Tak16] brukte også bølgedata fra laboratoriene til MARIN i Nederland. Der ble numeriske simuleringer sammenlignet med målinger av kortkammede bølger, dvs. bølger som beveger seg i flere retninger.

Fossum(2021)[Fos21] studerte langkammede irregulære bølger basert på JONSWAP-spektrum og Pierson-Moskowitz-spektrum. Det ble gjort eksperimenter med brytende og ikke-brytende bølger, og det ble gjort ikke-lineære simuleringer av bølger som ikke bryter. Målinger fra laboratorieeksperimentene og data fra simuleringene ble analysert ved hjelp av 2D rom-tid Fourier analyse.

Problemstilling og fremstilling av oppgaven

I denne oppgaven har det vært gjennomført en empirisk undersøkelse av bølgeforstyrrelser på den frie overflaten av en virvelstrøm. Bølgeforstyrrelsene er målt ved å analysere bilder av bølgene, som er tatt med et høyhastighetskamera. De målte bølgene er analysert med 2-dimensjonal diskret Fourier transformasjon i tid og rom, der hensikten har vært å undersøke om det lar seg gjøre bestemme dispersjonsrelasjonen for bølgene, og prøve å finne ut hvordan dispersjonsrelasjonen avhenger av forskjellige typer slukstrøm.

Disposisjon av hele oppgavens oppbygning.

Nedenfor er det kortfattet beskrevet innholdet i de etterfølgende kapitlene:

Kapittel 2 presenterer relevant teori for Fourier transformasjon og starter med en beskrivelse av koordinatsystemene som er brukt.

Kapittel 3 presenterer framgangsmåte og oppsett. Det beskriver utstyret som er brukt for å lage ulike virvelstrømmer, og hvordan dette er satt opp i laboratoriet, og hvilket forsøksprogram som er gjennomført. Det beskriver oppsett av kamera og hvordan bildene er analysert. Det beskriver også hvordan den diskrete Fourier transformasjonen er beregnet i MatLab.

Kapittel 4 presenterer resultatene fra analysene. I tillegg til resultatene av 2-dimensjonal Fouriertransformasjon er det presentert resultater for en-dimensjonal Fouriertransformasjon for tid og for rom, som gir et spekter for bølgefrequens og et spekter for bølgetall. Det er også presentert resultatet av en sammenligning mellom den målte fasongen på slukvirvelen og fasongen på sluket i en Rankine virvel.

Kapittel 5 inneholder diskusjon av resultatene, beskrivelse av erfaringer og anbefalinger for videre arbeid.

Kapittel 6 består av en oppsummering og konklusjon

KAPITTEL 2

Teori

2.1 Koordinatsystem

Vi skal studere bølger på overflaten til en virvelstrøm i et sylindrisk beger der virvelen befinner seg i sentrum av begeret. Virvelstrømmen har en krum fasong med bølgeforplantning på den uforstyrrede overflaten. Fra observasjon avtar bølgene, jo mer krum virvelstrømmen er.

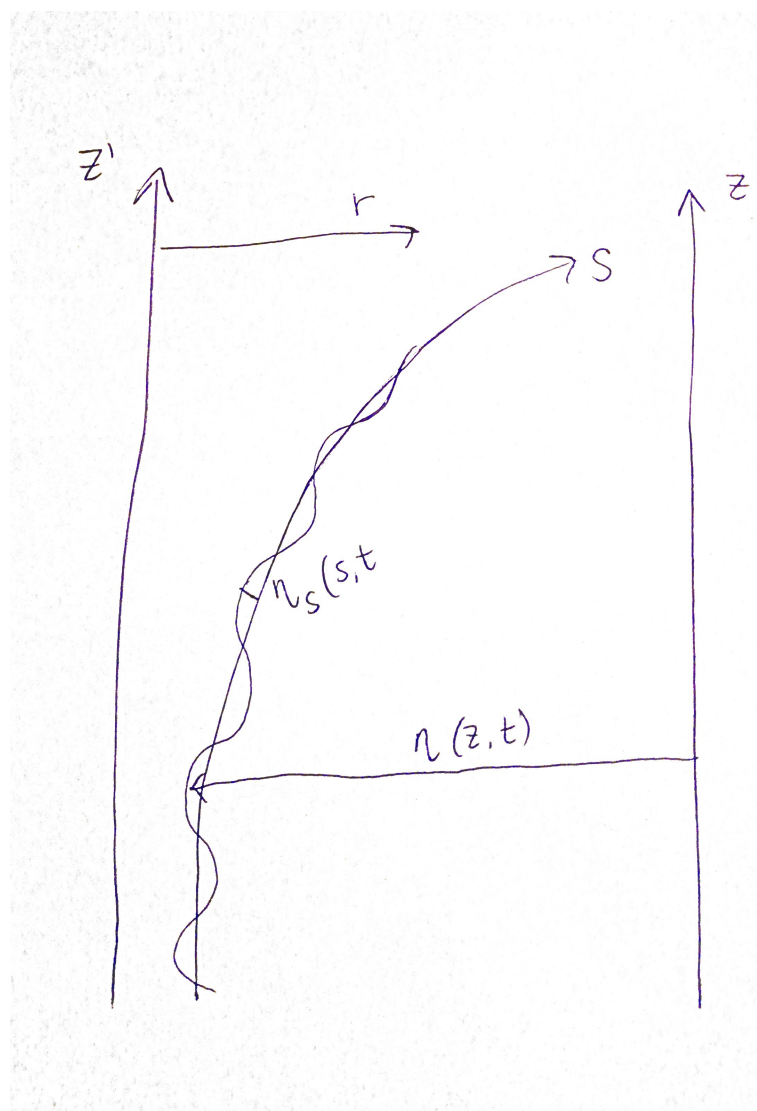
Vi vil begynne med å gjøre kort rede for et sylindrisk koordinatsystem som en tilnærming til et teoretisk koordinatsystem i denne oppgaven. Et sylindrisk koordinatsystem har koordinater (r, θ, z') der z' -aksen går vertikalt gjennom senter av begeret, z' er null på den uforstyrrede væskeoverflaten langt fra virvelen og z' er positiv oppover. Koordinaten r ligger i horisontalplanet og r er avstanden fra z' -aksen. θ er vinkelen i horisontalplanet. Eksperimentene som skal utføres vil være rotasjonssymmetriske uten noen foretrukne retninger, så det er ikke behov for å definere i hvilken retning θ er lik null. Den uforstyrrede væskeoverflaten vil vi kalle s og kan tenke oss er en krum koordinatakse som vi kaller s -akse. Bølgeforstyrrelsene på virvelen beskrives nå ved avstanden fra den krumme overflaten s til væskeoverflaten målt vinkelrett på s -aksen for hver posisjon langs den krumme s -aksen. Denne avstanden betegnes η_S som vist i figur 2.1 Den vil variere med posisjonen langs aksene s og med tiden t , slik at vi kan skrive $\eta_S(s, t)$.

Filmopptakene av virvelen i denne studien er imidlertid gjort på en slik måte at bildene i filmen viser virvelen i et plant snitt som går vertikalt gjennom z' -aksen i en vilkårlig vinkel θ . Beliggenheten til den krumme uforstyrrede væskeoverflaten på virvelen og dermed posisjonen til s -aksen er ikke kjent i utgangspunktet, og vil måtte baseres på målingene våre. Posisjonen til z' -aksen som ligger i senter av virvelstrømmen har ikke latt seg definere gjennom målinger. Derfor vil vi definere en z -akse som er vertikal og parallell med z' -aksen (figur 2.1). z er også null på den uforstyrrede væskeoverflaten langt fra virvelen og er positiv oppover. z -aksen ligger helt i den ytre kanten av bildene fra filmopptaket.

Ved fremstillingen av eksperimentet har vi gjort noen tilnærminger. Vi vil sette at avstanden fra z -aksen til overflaten vil betegne her med η , og nå vil denne avstanden variere med z og tiden t , slik at vi kan skrive $\eta(z, t)$. For den vinkelen θ som bildeplanet ligger i, vil da sammenhengen mellom $\eta(z, t)$ og $\eta_S(s, t)$ være vist i figur 2.1. På det bratte partiet av slanke virvler vil vinkelforskjellen mellom s -aksen og z -aksen være liten, og siden cosinus til små vinkler er tilnærmet

2.1. Koordinatsystem

lik 1, vil avstander mellom målepunkter langs z -aksen og langs s -aksen være tilnærmet like. Det er den samme vinkelforskjellen mellom retningen som η og η_S er målt i. Av samme grunn vil variasjoner i bølgeelevasjon målt ved hjelp av $\eta(z, t)$ og $\eta_S(s, t)$ være tilnærmet like. I tillegg er posisjonen til z' -aksen variere med tiden da hele virvelstrømmen beveger seg litt frem og tilbake, og gjør analysen mer unøyaktig. For enkelhets skyld vil vi derfor bruke $\eta(z, t)$ i våre analyser.



Figur 2.1: Skisse av vårt koordinatsystem

2.2 Notasjon

Ved hjelp av bildeanalyse av filmopptakene vil vi for diskrete verdier av z og t finne verdien av η . Vi vil se på et område av z -aksen med lengde L som vil bli delt opp i M elementer med lengde $\Delta L = L/M$, og vi ser på et tidsrom av varighet T som er delt inn i N tidsintervaller med varighet $\Delta T = T/N$.

Området av z -aksen strekker seg over intervallet

$$z_0 \leq z < z_L$$

De diskrete verdiene av z vil være

$$z_j = z_0 + j\Delta L, \quad j = 0, M - 1$$

Tidsrommet strekker seg over intervallet

$$0 \leq t < T$$

De diskrete verdiene av t vil være

$$t_k = k\Delta T, \quad k = 0, N - 1$$

Resultat av bildeanalysen vil utgjøre en to-dimensjonal $M \times N$ matrise

$$\eta_{jk}, \quad j = 0, M - 1 \text{ og } k = 0, N - 1$$

Den to-dimensjonale diskret Fouriertransformerte (DFT) av η_{jk} er en matrise

$$Y_{pq}, \quad p = 0, M - 1 \text{ og } q = 0, N - 1$$

der

$$Y_{pq} = \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{h=0}^{N-1} \eta_{jh} \exp\left(-\frac{2\pi i}{M} jp\right) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} hq\right) \quad (2.1)$$

Se beskrivelse fra 2-D fast Fourier transform - MATLAB fft2 - MathWorks Nordic [Mat], der indeksene i matrisene er skiftet med 1 for å reflektere indeksene brukt i MATLAB.

Resultat Y_{pq} vil være gitt for følgende diskrete verdier av bølgetallet k og bølgefrequensen ω .

$$k_p = p\Delta k = \frac{2\pi p}{L} \quad p = 0, M - 1$$

$$\omega_q = q\Delta\omega = \frac{2\pi q}{T} \quad q = 0, N-1$$

En-dimensjonal DFT langs z-aksen for et gitt fast tidspunkt t_{hF} kan skrives som:

$$Y_p = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \eta_{jhF} \exp(-ik_p z_j) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \eta_{jhF} \exp(-\frac{2\pi i}{M} jp) \quad p = 0, M-1 \quad (2.2)$$

På tilsvarende måte kan en-dimensjonal DFT av variasjonen i tid for et gitt fast sted z_{jF} skrives som:

$$Y_q = \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} \eta_{jFh} \exp(-i\omega_q t_h) = \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} \eta_{jFh} \exp(-\frac{2\pi i}{N} hq) \quad q = 0, N-1 \quad (2.3)$$

Trulsen(2022)[Tru22].

2.3 Rankine virvel

Utenfor kjernen av virvelen modelleres virvelen som en potensial strøm, men nært inntil sentrum antas det en roterende bevegelse som i et fast legeme innenfor en liten radius a . I vårt sylindriske koordinatsystem vil hastighetskomponentene til Rankine virvelen være:

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \begin{cases} \frac{r}{a^2} & r \leq a \\ \frac{1}{r} & r > a \end{cases} \quad v_z = 0 \quad (2.4)$$

der Γ er sirkulasjonen til Rankine virvelen.

For vår slukvirvel vil vi anta at a er radiusen for bunnen av sluket og at det angitte hastighetsfeltet for $r \geq a$ vil gjelde overalt i væsken. Dvs.

$$v_r = 0, \quad v_z = 0, \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Vi antar at forsøkene gjøres i et gravitasjonsfelt der tyngdens akselerasjon betegnes g . Ved å bruke Eulers trykklikning og sette som grensebetingelse at trykket på overflaten av virvelen er konstant lik atmosfæretrykket, kan vi hvis vi neglisjerer overflatespenningen, finne at formen på overflaten kan skrives som

$$z' = -\frac{v_\theta^2}{2g} = -\frac{(\frac{\Gamma}{2\pi r})^2}{2g} = -\frac{\alpha}{r^2}$$

der α er en konstant for et gitt forsøk med en slukvirvel med en gitt sirkulasjon Γ .
[wik]

KAPITTEL 3

Fremgangsmåte

I dette kapittelet skal vi se nærmere på hvordan vi har gått frem for å lage ulike virvler i vann og hvordan oppsett av videokamera har vært for å gjøre opptak. Deretter kommer det beskrivelse av hvilken metode vi har brukt for å samle inn data som ble brukt til videre analyse. Alle forsøkene er utført på laboratoriet nede i kjelleren i Niels Henrik Abels hus på UiO.

3.1 Beskrivelse av oppsett for å lage virvler.

Ulike framgangsmåter for å generere en virvel ble prøvd og vurdert. Basert på vurderinger som ble gjort innledningsvis og erfaringer underveis i arbeidet, kom vi fram til noen krav som bør stilles til utstyret og forsøkene. Vi skal lage en virvel i vann som det er mulig å filme. Det betyr at den må være i en beholder som man kan se igjennom og ikke ha andre elementer oppi som forstyrrer utsikten til virvelen. Virvlingen må vare lenge nok til å ta tilstrekkelig opptak av, og det må være mulig å repetere opptaket og få samme resultater. I tillegg må man kunne lage en virvel som gir tydelige bølger over en viss distanse/høyde for bølgene å forplante seg.

Nedenfor er det beskrevet noen ulike forsøksoppsett som ble prøvd. I alle tilfeller er det brukt en gjennomiktig beholder, som er rotasjonssymmetrisk og som tilnærmet har fasongen til en sylinder.

Magnetrorer VWR Advanced

Først så prøvde vi å bruke en magnetrorer. Magnetroreren er av typen som brukes på laboratoriet for å blande og røre i væsker. Den vi brukte het VWR Advanced. Den består av en magnetrorer som man kan sette en beholder med væske oppå. Nede i beholderen legger man en magnet som snurrer rundt sin egen akse når man setter på magnetroreren. Magnetene kommer i ulike størrelser slik at man kan bruke ulike størrelser på beholderen og volum med væske. Når magneten spinner rask nok dannes det en virvelstrøm. VWR Advanced gir ikke en virvel som går helt til bunnen i beholderen. Den stopper ca $\frac{2}{3}$ fra vannoverflaten, dette er pga magneten i bunnen, dersom virvelen kommer for langt ned eller blir for kraftig, vil magneten hoppe ut av plassen sin. Magnetroreren har en bryter som gjør at man kan styre rotasjonshastigheten på magneten, og hvor fort vannet virvler. Bryteren har kun fire markører for å

3.1. Beskrivelse av oppsett for å lage virvler.

sette hastigheten, merket med tall fra 1 til 4, og man kan derfor ikke si noe om hvor mange omdreininger det er per tidsenhet.

I forsøket brukte vi to ulike størrelser på beholderen og ulike vannmengder for å lage den mest synlige virvelen. Uansett størrelsen på beholderen og hvilket volum som ble brukt, blir virvelen veldig bred og kort (liten høyde). Bølgene er synlige, men det er mye turbulens og siden virvelen blir kort, kan bølgene ikke forplante seg over så veldig lang avstand.

Magnetrorer (laboratorie-ingeniøren)

Laboratorie-ingeniøren på bølgelaboratoriet på UiO forsøkte å lage en magnetrorer som kunne være bedre enn VWR Advanced. Tanken var å lage en som var mer stabil, kraftigere og lettere å kontrollere hastigheten med. Den hadde i hovedsak samme funksjon/oppbygning som VWR Advanced. Den bestod av en motor med et bilbatteri. Dette var festet til en plate som hadde to magnetarmer under seg. Når man skrur på motoren, begynner armene å spinne. Oppå platen kan man sette et begerglass med magneter oppi. Ved hjelp av de to armene kan man ha to magneter oppi begerglasset. Dette gjør at virvelen fikk en større omkrets enn i VWR Advanced sin. Magnetroreren var koblet til en PC med et dataprogram der man kunne styre hastigheten. Det var mulig å angi hastigheten presist i omdreininger per minutt (rpm). Men den fungerte i praksis ikke noe bedre enn VWR Advanced. Selve apparaturet begynte å riste innimellom og magnetene hoppet fort ut av posisjonene sine.

Virvelfontene

Vi var ikke fornøyd med virvelene fra magnetrorerene da de var korte og bølgene ikke så markante. Og var usikre på om de ville være et godt grunnlag for en analyse. Jeg fant på youtube [The] en måte å lage en virvelfontene, og bygde en til forsøket. På grunn av mekanismen som lager virvelfontenen, varer den så lenge man ønsker for å kunne filme den. Den består av et gjenomsiktig beger med to hull i bunnen, et hull der vann blir pumpet inn og ett hull for vann å renne ut. Vannet blir pumpet inn i begeret fra et hull i bunnen i nærheten av ytterkanten av begeret ved hjelp av en pumpe som er koblet til et vannbasseng og en slange. Slangen går vertikal inn gjennom hullet i bunnen og deretter i et 90 graders bend slik at utløpet av slangen inne i begeret peker horisontalt og tangentielt langs ytterkanten av begeret. Vannstrømmen fra slangen får dermed vannet i begeret til å rotere. Vannet renner ut av det andre hullet, som er et sluk i senter av bunnen. Her er det festet en ventil til en skroggjennomføring slik at man kan styre mengden vann som renner ut. Pumpen vi brukte har også to ulike hastigheter for å pumpe vann inn. Dette gjør at man har en viss kontroll over vannstrømmen i begeret.

Virvelen dannes ved å først fylle opp vannmuggen for deretter å åpne ventilen slik at vannet renner ut og da dannes det en virvel. Ved hjelp av ventilen kan man styre vannmengden som renner ut og dermed vannivået i beholderen. Dette gir ulike størrelser på virvelen. Øverst på beholderen er det en renne slik at man har mulighet til at vannet renner over kanten uten å renne ned langs sidene av beholderen. Dette gjør at vannet som renner ut ikke forstyrrer

3.1. Beskrivelse av oppsett for å lage virvler.

filmopptakene og bilder av virvelen. Virvelfontenen lager en slukvirvel som er høy og slank og ligner på den på Kistefos museum[mus]. Den gir god avstand for bølgene til å forplante seg. Det er mindre forstyrrelser i virvelen og man kan mye tydeligere se bølgene som forplanter seg oppover. Virvelfontene gir rom for å kunne bruke mange ulike størrelser på beholderen, med eventuelle få justeringer på størrelsen på annet utstyr. I dette forsøket er det kun brukt en størrelse på beholderen. For fullstendig utstyrliste se tillegg D.

Den største utfordringen med å lage virvelfontene var å finne en beholder som er gjennomsiktig og sylindrisk, samtidig som man også kan bore hull i den. Et glassbeger fungerer veldig bra på magnetrøreren, men glass krever ekstra kunnskap og utstyr for å kunne bore hull i. Vi endte opp med å lete etter en beholder laget i pleksiglass. For vår prototype av virvelfontenen endte vi opp med et 1-liters målebeger. Målebegeret var i tynn plexiglass og nesten sylindrisk, men litt videre i toppen. Den hadde en størrelse som gav oss en stor nok virvel til å kunne filme. Bilder av oppsett kan sees i tillegg C.

Beskrivelse av oppsett med kamera

I denne oppgaven har jeg valgt å gjøre analysen i 2D med én steds-dimensjon i tillegg til tids-dimensjonen. Det vil si at jeg har sett på virvelen i et vertikalt plan gjennom sentrum av virvelen for en vilkårlig vinkel θ . Slik at bølgeforplantningen kun varierer med tiden og i én retning. For å finne overflatehevingen og forplantningen har jeg brukt verdiene til pixlene i bilde som senere er gjort om til cm ved beregning ved hjelp av et koordinatsystem.

Begeret med virvelen har blitt plassert på et bord med et kamera i samme høyde ca. en meter unna. For å skape kontrast mellom overflaten til virvelen og vannet har vi brukt lys og en hvit bakgrunn bak virvelen. Se figur C10 og C11.

Arbeid på laboratoriet

Da jeg hadde funnet ut av hvordan jeg skulle lage en virvel og hente informasjonen jeg trengte til analysen i Matlab, begynte jeg å se på prosessen for å samle inn tilstrekkelig data for å gjøre analysen. Jeg ønsket å ta opptak av ulike virvler for å både se om hvilken av dem som er best å analysere og om jeg kunne få samme resultater på de ulike virvlene. For å oppnå dette var planen og ta opptak av de tre ulike måtene og lage virvel på og å variere på vannmengde og størrelse på beholder samtidig som jeg fikk en virvel det var mulig å gjennomføre en analyse av.

Jeg hadde tre ulike metoder å lage virvel på, en virvelfontene og to ulike magnetrørere. For hver av disse tre metodene har jeg brukt ulik størrelse på beholder og/eller endret vannivået i beholderen. Full oversikt over opptak av de ulike metoden kan sees i tabell 1 og 2 i tillegg D.

Den største utfordringen har vært å lage en virvel som er av tilstrekkelig lengde og stabil nok til at man kan tenke seg at det er mulig å gjennomføre en analyse. Dette har satt begrensninger på antall ulike størrelser på vannbeholder

og vannmengde i forhold til hva man hadde tenkt i innledende faser. Det har også vært en utfordring å få tak i egnede beholdere.

For magnetrører VWR Advanced har jeg brukt to ulike størrelser på beholderne. Selve magnetrøeren setter begrensning på størrelsen på beholder da den ikke klarer å “dra” vannet nedover og sette i gang en virvel av tilstrekkelig størrelse. I tillegg kommer utfordringen med at magneten hopper ut av plassen sin dersom turbulensen i vannet blir for stor. For magnetrøeren til lab.ing har jeg kun brukt en beholder som gav en virvel det var mulig å tenke seg ville gi noen resultater. Virvelfontenen er den som har laget den mest stabile og lengste virvelen. Og jeg har tatt opptak av to ulike vannivåer i beholderen. Her hadde det vært ønskelig og prøvd å finne en beholder som er større, men det var vanskelig å finne en annen egnet beholder, så vi endte opp med bare en størrelse.

Jeg måtte også bestemme meg for hvor lenge jeg skulle ta opptak av hver virvel. Jeg ønsket å ta opptak lenge nok til å fange et passelig antall bølgeperioder for bølgeforstyrrelsen på virvelen. Samtidig er det ønskelig å begrense lengden av filmopptaket for at det ikke skal ta for lang tid å analysere alle bildene i et opptak. Vi kjente ikke på forhånd typiske eller dominerende bølgeperioder. Det er det vi skal forsøke å finne ved hjelp av analysene basert på målingene i denne oppgaven. Men ut fra en innledende visuell observasjon av bølgeforstyrrelsene på slukvirvelen, ville et filmopptak på 8 sekunder dekke ca 10 – 20 typiske bølgeperioder, som vi vurderte å være tilstrekkelig for å kunne gjøre interessante analyser. Bilder av de ulike opptakene kan sees i tillegg C.

3.2 Oppsett i Matlab

Opptakene fra laboratoriet er deretter blitt lastet inn på PC og analysert i matlab.

Utgangspunktet for analysen er fem opptak gjort i 8 sekunder hver, som tilsvarer 4000 bilder. Det er $\Delta T = 0.002s$ mellom hvert bilde.

Et bilde består av 2048×2048 piksler, der 0,0 i piksler i bildet ligger i øvre venstre hjørne og øker nedover og bortover til høyre. Når Matlab laster inn et bilde kan den lese av bildet som en $M \times N$ matrise der fargene i bildet representeres av ulike tall i matrisen. Det er dette som er utgangspunktet i programmet som er brukt i oppgaven for å finne bølgeforplantningen og videre analyse av dette. Når bildene blir lastet inn klippes bildene slik at man kun får med den delen av bildet man ønsker å studere. Bildet har nå en tydelig overgang i sort-hvitt der overflaten er. Når Matlab laster inn bildet vil det være en stor forskjell i talldifferansen der det går fra sort til hvitt . Dette gjør at man kan finne plasseringen til overflatehevingen η og lagre den i en ny matrise der man får en ny rad for hvert bilde. Slik får man en matrise for $\eta(z, t)$ som man kan analysere. Det er blitt klippet slik at man kan fremstille overflaten kun der det bølger og klippet slik at man får med overflaten helt opp til der det flater horisontalt ut og z nærmer seg null.

Presentasjon av overflatehevning og gjennomsnittlig overflatehevning

I fremstillingen av overflatehevning er det kun tatt med den ene siden av virvelstrømmen og piksler blir regnet om til cm. Langs den horisontale akse er 0 punktet der piksel 2048 i bildet er, altså helt til høyre i det originale bildet.

For å finne gjennomsnittlig overflatehevning over tid er z_j for $t_0, t_1, t_1 \dots T$ summert sammen for så delt på N . I opptakene var tiden mellom bildene 0.002, det viser seg at dette var for tett da bølgeforplantningen nesten ikke har flyttet seg på så kort tid. Det er derfor kun lastet inn hvert femte bilde som gir tid per bilde til $\Delta T = 0.01$ s.

Rotasjonsaksen

Det kunne vært ønskelig å finne plasseringen til z' -aksen. Dersom venstre og høyre side av virvelstrømmen hadde vært symmetriske kunne man funnet avstanden mellom dem for deretter funnet z' -aksen for hvert tidspunkt. Men venstre og høyre side er nok ikke helt symmetriske eller vi har ikke grunnlag for å påstå dette. Basert på opptakene vi har tatt er det derfor ingen eksakt måte å finne plasseringen til z' -aksen.

Som en del av analysen har vi prøvd å sammenligne fasongen på virvelstrømmen med fasongen til en rankinevirvel. Derfor er det gjort en tilnærming til å finne plasseringen til z' -aksen. Siden virvelstrømmen er litt skrå pga vann som strømmer inn av pumpen er tilnærmingen gjort ved å finne midtpunkt mellom venstre og høyre side helt nede i virvelen ved z_0 og øverst ved z_L for et gitt tidspunkt t_k . Deretter er z' -aksen generert som en rett linje mellom disse to punktene.

For å finne en tilnærming til rankine virvelen er det gjort en regresjonsanalyse i matlab ved hjelp av en innebygd matlabapplikasjon med funksjonen

$$z' = -\frac{\alpha}{r^2}$$

Fft av tid og rom

Det er gjort en fourier analyse av overflatehevningen for tid og rom respektivt. For fft av rom og ett gitt tidspunkt finner man et spektrum som skal kunne vise de mest dominerende bølgelengdene for et gitt tidspunkt. Den første verdien i $F(k)$ er fjernet og spekteret viser kun den ene siden. Tilsvarende er det gjort for $F(\omega)$

Fft2 av tid og rom

Det er gjort en 2D fourier analyse av overflatehevning for tid og rom med fft2 i matlab. I plottene som er presentert, er det valgt et område av aksene for de interessante delen at det to-dimensjonale spekteret i tid og rom.

KAPITTEL 4

Resultater

Visuelle observasjoner av bølgene og bevegelse av virvelen

Når man ser på virvelen, ser man tydelig bølgene som beveger seg på overflaten i den traktformede delen av virvelen. Bølgene beveger seg oppover og rundt i virvelen. Dvs at de beveger seg i en spiralformet retning. Det betyr at bølgeakkordene som går på tvers av bølgenes forplantningsretningen også har en spiralform på overflaten av den traktformede delen av virvelen.

Det er denne bølgebevegelsen som det er et mål for denne oppgaven å studere. Som forklart tidligere er de målingene som er gjort, basert på bilder at et plan som går vertikalt gjennom sentrum av virvelen i en vilkårlig valgt vinkel. Det betyr at vi har studert den komponenten av bølgebevegelsen som går i retning oppover.

Både ved visuell observasjon og ved å studere plot av de målte bølgene, kan man se at disse bølgene er ganske regelmessige med en klart dominerende bølgelengde, som riktignok kan se ut til å variere noe både i tid og rom, men som ikke virker å inneholde mange ulike bølgelengder overlappende hverandre. Når man prøver å følge bølgene over tid enten visuelt eller ved å se på plott av hvordan overflaten varierer med tiden, er det ikke like tydelig å se en dominerende bølgeperiode. Hvis man sammenligner med regelmessige bølger i en bølge tank der det er lett å følge en bølgetopp med øynene når den beveger seg langs tanken, er det her ikke lett å følge en bølgetopp som beveger seg oppover virveltrakten. Det kan se ut som den forsvinner og blir erstattet av en annen bølge før den kommer til toppen av trakten.

Et annet fenomen som ble observert er at den traktformede virvelen beveger seg langsamt fra side til side med en svingeperiode som er vesentlig lenger enn bølgeperioden på de spiralformede bølgene omtalt i forrige avsnitt. Denne langsomme bevegelsen er ikke helt lik hele veien langs virvelen, slik at det som visuelt ser ut som sentrum av virveltrakten ikke alltid er en rett vertikal linje i sentrum av begeret. Det ble også observert at den midlere plasseringen av sentrum av virveltrakten kan helle litt på skrå til den ene siden gjennom hele forsøket.

Resultater av målinger og analyse

Vi vil presentere resultater av målingene fra to ulike forsøk, som er gjort med slukvirvelen. Begge er gjort med samme hastighet på pumpen som pumper vann inn i begeret. Forskjellen på de to forsøkene er vanngjennomstrømmingen i sluket. I forsøk A er ventilen i bunnen av sluket satt slik at utstrømmingen gjennom sluket er noe mindre enn innstrømmingen fra pumpa, slik at noe av vannet renner over kanten av begeret. I forsøk B er ventilen som regulerer utstrømmingen gjennom sluket i midten av bunnen satt slik at vannivået i begeret holder seg konstant. Det betyr at åpningen av ventilen er noe større i forsøk B enn i forsøk A. Når man observerer de to virvlene, er den mest karakteristiske forskjellen, at den frie overflaten av virvelen ikke strekker seg helt ned til bunnen i forsøk A, mens det gjør den i forsøk B. Se tillegg C for et enkelt bilde av opptak fra forsøk A og B i figur C1 og C2. Vi har ikke presentert analyse for de tre andre forsøkene da disse er laget med magnetrører. Disse er veldig mye mer ustabile i bevegelsene. Det er mye bevegelser fra side til side, opp og ned. Itillegg er det kort avstand for bølgeforplantningen og bølgene endrer seg mye.

Forsøk A er presentert først, og er valgt ut fra at det er det forsøket som viser den mest stabile virvelen og der det ser ut til å være de mest regelmessige og tydelige bølgene. Vi bruker den samme notasjonen som er beskrevet i Teori-delen.

Sammenligning med Rankine virvel

Fasongen på væskeoverflaten til slukvirvelen er sammenlignet med en Rankine virvel. Her bruker vi det sylindriske koordinatsystemet med z' -aksen i sentrum av virvelen, positiv oppover og med $z' = 0$ på væskeoverflaten langt fra virvelen. r peker horisontalt og radielt utover fra sentrum. I kapitlet med teori er det vist at væskeoverflaten til en Rankine virvel har formen:

$$z' = -\frac{\alpha}{r^2}$$

der α er en konstant for et gitt forsøk med en slukvirvel med en gitt sirkulasjon Γ .

For sammenligningen har vi brukt data fra bildeanalysen av forsøkene våre. Overflaten av virvelen for et gitt valgt tidspunkt er vist i figurene A2 og B2. Avstanden fra sentrum til overflaten er plottet som en funksjon av z' . De målte dataene for overflaten er brukt i en regresjonsanalyse for å finne den verdien av alpha som gir den beste tilpasningen. Med denne verdien av alpha er Rankine virvelen plottet i den samme figuren slik at man ser sammenligningen. Sammenligningen er gjort for de to forsøkene våre.

Resultatet av forsøk A er vist i figur A2. Som man kan se på figuren, er det ikke helt overensstemmelse i fasong. Rankine virvelen er noe brattere nede i trakten og har en noe krappere sving øverst enn den målte virvelen.

Resultatet av forsøk B er vist i figur B2. Her er det bedre overensstemmelse i fasong. I det midtre partiet er Rankine virvelen noe slakkere enn den målte virvelen, mens det i det øverste partiet er veldig lik krumming.

Resultater av Fourieranalyse

I alle forsøkene har vi i det lokale koordinatsystemet funnet overflatehevingen $\eta(z, t)$. Ved hjelp av bildeanalyse av filmopptakene har vi for diskrete verdier av z og t funnet verdien av η .

Spekter for bølgetall

Vi starter med å beskrive resultatet av målinger og analyse av forsøk A.

I figur A4 er det for et valgt tidspunkt vist et plot av overflatehevingen η som en funksjon av z .

Det er gjort en en-dimensjonal diskret Fourieranalyse av $M \times 1$ matrisen for η . Det resulterende spekteret for bølgetallet k er vist i figur A3. Bølgetallet k har dimensjon cm^{-1} .

Plottet av spekteret viser en høy verdi for $k = 1,004$ som er det første punktet i plottet. Det svarer til en bølgelengde på 6,26 cm som er det samme som målelengden L og derfor ikke så interessant. De neste to peakene i plottet er for $k = 6,02$ og $k = 8,03$. Dette svarer til en bølgelengde på henholdsvis 1,04 cm og 0,78 cm.

Hvis vi ser på plottet av overflatehevingen i figur A4 og betrakter bølge-
ne, vil en bølgelengde på ca 0,78 cm passe bra for den nederste delen av virvelen, mens en bølgelengde på ca 1,04 cm passer bra for den øverste delen av bølge-
ne. Dette er derfor et interessant resultat.

Resultater av målinger og analyse for forsøk B er vist i figurene B3 og B4. Plottet av spekteret viser en høy verdi for $k = 0,688$ som er det første punktet i plottet. Det svarer til en bølgelengde på 9,12 cm som er det samme som målelengden L og derfor ikke så interessant. De neste to peakene i plottet er for $k = 5,51$ og $k = 6,88$. Dette svarer til en bølgelengde på henholdsvis 1,14 cm og 0,91 cm. I dette tilfellet må vi også ta med at det er noen mindre topper i området $k = 12$ til $k = 15$, som svarer til bølgelengder på ca 0,4 – 0,5 cm.

Hvis vi ser på plottet av overflatehevingen i figur B4 og betrakter bølge-
ne, ser vi at bølge-
ne er ikke så regelmessige som i forsøk A, men vi kan kjenne igjen disse bølgelengdene på ca 0,9-1,1 cm og ca 0,4-0,5 cm. Dette er derfor også et interessant resultat.

Spekter for bølgefrequens

Forsøk A

I figur A6 er det for et valgt sted (verdi av z) vist et plot av overflatehevingen η som en funksjon av t .

Det er gjort en en-dimensjonal diskret Fourieranalyse av $1 \times N$ matrisen for η . Det resulterende spekteret for bølgefrequensen omega er vist i figur A5.

Plottet viser mange topper og det er ikke så enkelt å trekke noen klare konklusjoner.

De to første toppene i plottet, der $\omega = 3,13$ og $\omega = 5,22$ svarer til en bølgeperiode på henholdsvis 2,0 sek og 1,2 sek. Hvis vi ser på plottet av overflatehevingen som funksjon av tiden i figur A6 , kan dette passe bra med avstanden mellom noen av de tydelige bølgetoppene i plottet. Hvis vi sammenholder det med den visuelle observasjonen av virvelen som er omtalt ovenfor, er det mulig at disse bølgeperiodene kan skrive seg fra den langsomme vandringsen av hele virvelen fra side til side.

Det er også en topp i spekteret for $\omega = 7,3$ og en bredere topp for omega = 10. Det svarer til en bølgeperiode på henholdsvis 0,86 sek og 0,63 sek. Vi kan heller ikke neglisjere de neste toppene som er for $\omega = 14,6$ $\omega = 16,7$ og omega = 18,8. Dette svarer til bølgeperioder på 0,33 – 0,43 sek

Det er vanskelig å si hvilke av disse bølgeperiodene som er mest typisk for de spiralformede bølgene vi studerer.

Forsøk B

I figur B6 er det for et valgt sted (verdi av z) vist et plot av overflatehevingen η som en funksjon av t .

Det er gjort en en-dimensjonal diskret Fourieranalyse av $1 \times N$ matrisen for η . Det resulterende spekteret for bølgefrequensen ω er vist i figur B5.

Også i dette tilfellet viser plottet mange topper og det er ikke så enkelt å trekke noen klare konklusjoner.

Den første tydelige toppen i plottet, der omega = 8,83 svarer til en bølgeperiode på 1,3 sek. Hvis vi ser på plottet av overflatehevingen som funksjon av tiden i Figur B6. , kan dette passe bra med avstanden mellom noen av de tydelige bølgetoppene i plottet. Hvis vi sammenholder det med den visuelle observasjonen av virvelen som er omtalt ovenfor, er det også i dette tilfellet mulig at denne bølgeperioden kan skrive seg fra den langsomme vandringsen av hele virvelen fra side til side.

Det er også en topp i spekteret for $\omega = 8,85$ og en høyere topp for $\omega = 13,68$. Det svarer til en bølgeperiode på henholdsvis 0,71 sek og 0,46 sek. Vi kan heller ikke neglisjere de neste toppene som er for $\omega = 15,3$ og omega = 17,7. Dette svarer til bølgeperioder på 0,35 – 0,41 sek

Selv om toppene er for litt ulike frekvenser enn i forsøk A, er resultatene ganske like, og det er også her vanskelig å si hvilke av disse bølgeperiodene som

er mest typisk for de spiralformede bølgene vi studerer.

2D Spekter

Det er gjort en 2-dimensjonal diskret Fourieranalyse av $M \times N$ matrisen for η . Det resulterende spekteret for bølgetall og bølgefrequens er vist i figur A7 og B7. der styrken i spekteret er vist med ulike farger som angitt i figuren.

Forsøk A

I plottet i figur A7 kan man kjenne igjen verdier som er omtalt ovenfor i det en-dimensjonale spekteret for bølgetall. Det er høye verdier for $k = 1$ som svarer til en bølgelengde tilnærmet lik målelengden. Man kan også se høye verdier for k i området 6 – 8 og videre til $k = 10$, som svarer til bølgelengder på ca 0,6 – 1 cm.

I dette området omkring $k = 8$, kan man se høye verdier for $\omega = 5$ og for $\omega = 10$, som svare til bølgeperioder på henholdsvis ca 1,2 sek og ca 0,6 sek.

Langs venstre kant av figuren for $k = 1$, er det høye verdier i et stort område som strekker seg fra $\omega = 1$ og til $\omega = 10$. Hvis vi går litt lengre ut til $k = 2$, er det høye verdier i området ved $\omega = 4,5$ og for $\omega = 8$.

Forsøk B

I plottet i figur B7 kan man også til en viss grad kjenne igjen verdier som er omtalt ovenfor i det en-dimensjonale spekteret for bølgetall. Men som vi allerede har vært inne på er bølgene noe mindre regelmessige i dette forsøket enn de var i forsøk A, så det er ikke så lett å lese resultater ut av plottet. Dette gjelder for både bølgetall og bølgefrequens.

KAPITTEL 5

Diskusjon

Oppsummering og tolking av resultatene

I Kap. 4 er det vist og beskrevet resultater fra to forsøk. Begge er gjort med slukvirvelen. Vann-innstrømningen fra pumpa er den samme i begge forsøkene. I forsøk A renner noe av vannet over kanten av begeret mens resten renner ut gjennom sluket i bunnen. I forsøk B er ventilen som regulerer utstrømningen gjennom sluket i midten av bunnen satt slik at vannivået i begeret holder seg konstant uten at noe vann renner over kanten.

Når man observerer de to virvlene, er den mest karakteristiske forskjellen, at den frie overflaten av virvelen ikke strekker seg helt ned til bunnen i Forsøk A, mens det gjør den i Forsøk B. Det innebærer at man fra bildene kan studere bølgene over en litt lengre målelengde i forsøk B. På den andre siden viser forsøk A den mest stabile virvelen med de mest regelmessige og tydelige bølgene.

Resultatene fra begge forsøkene viser bølgelengder i området 0,8 – 1,1 cm. For de regelmessige bølgene i forsøk A kan det se ut som vi kan observere bølgelengder på ca. 0,8 cm nederst i virvelen og ca. 1 cm i den øvre del av virvelen. I forsøk B kan det se ut som bølger med en bølgelengde i området 0,9-1,1 cm blir overlappet av kortere forstyrrelser/ bølger med bølgelengde 0,4-0,5 cm.

Når det gjelder variasjoner med tiden har vi flere ganger i oppgaven vært inne på de visuelle observasjonene av en langsom vandring av hele virvelen fra side til side. Det er grunn til å tro at de korteste bølgefrequensene vi finner i spekteret, som svarer til de lengste bølgeperiodene, skriver seg fra denne langsomme vandringen. Når vi ser på resten av spekteret er det noen bølgefrequenser som stikker seg ut med bølgeperioder fra 0,3 sek og oppover mot 0,8 sek, men det er vanskelig å si hvilke av disse bølgeperiodene som er mest typisk for de spiralførmede bølgene vi studerer.

Når vi ser på plottet av det to-dimensjonale spekteret for bølgetall k og bølgefrequens ω , understøtter det til en viss grad resultatene som kan ses i de en-dimensjonale spektrene. Det er vanskelig å se noen relasjon mellom ω og k . Så ut fra analysen av målinger fra disse forsøkene er det vanskelig å si noe om dispersjonsrelasjonen for bølgene på slukvirvelen.

Erfaringer og anbefalinger

I Kapittel 3 Framgangsmåte er det beskrevet tre ulike forsøksoppsett for å lage virvler. Den som var best egnet, var virvelfontenen med et sluk i midten. Den er forholdsvis stabil og kan være i operasjon så lenge man ønsker med konstante driftsforhold i form av vannstrøm og sirkulasjon. Virvelen som dannes er slank og strekker seg hele høyden fra vannoverflaten til bunnen av begeret, eller nesten til bunnen av begeret.

I våre forsøk er det brukt et litermål i gjennomsiktig plexiglass. Begeret har et sluk i midten påmontert en regulerbar ventil, og en pumpe får vannet til å strømme inn gjennom en slange med et utløp inne i begeret som peker horisontalt og tangentielt like ved ytterkanten i bunnen av begeret.

Utstyret som ble brukt viste seg å være godt tilpasset hverandre og vel-egnet for formålet. Til tross for den beskjedne størrelsen på begeret ble det dannet en slank og stabil virvel der en tydelig ser bølgene som beveger seg, og der høyden av virvelen er tilstrekkelig til flere bølgelengder.

Selv om utstyret fungerte forholdsvis bra, kan det likevel være rom for forbedringer. Basert på erfaringer som ble gjort, er det mulig å gi noen anbefalinger:

Som beskrevet i Kapittel 4 var et av fenomenene som ble observert, var at sentrum av virveltrakten kan helle litt på skrå til den ene siden. Det er mulig dette skyldes at innløpet i begeret der vannet blir pumpet inn, er på den ene siden av bunnen. For å oppnå symmetri kunne det vært en fordel å ha to innløp, plassert tvers over for hverandre, på hver sin side av bunnen.

Et annet fenomen som ble observert er at den traktformede virvelen beveger seg langsomt fra side til side. Det er vanskelig å si om dette skyldes spesielle forhold ved vårt forsøksoppsett, eller om det er et vanlig fenomen for slike virvler, som det finnes en del video-opptak av fra ulike steder. Hvis det skyldes spesielle forhold ved vårt forsøksoppsett, kan man prøve å bli kvitt fenomenet ved å gjøre endringer i forsøksoppsettet. Det kunne være særlig interessant å endre hvordan man starter forsøket og setter i gang virvelen. Det er mulig det vil ha en effekt hvis man øker innstrømmingen fra pumpa langsomt, og at man åpner ventilen i sluket langsomt over et lengre tidsrom.

Et forhold som vi vil drøfte litt nærmere er valg av målelengde og måleperiode for filmopptakene som ble brukt i analysene.

Vi hadde en målelengde L på 6 - 10 cm, og gjorde opptak med en varighet på $T = 6 - 8$ sek. Når en gjør en diskret Fourier transformasjon vil målelengden bestemme oppløsningen i spekteret for bølgetallet k , dvs. avstanden mellom de beregnede verdiene i spekteret vil være $\Delta k = \frac{2\pi}{L}$.

På tilsvarende måte vil varigheten på opptaket bestemme oppløsningen i spekteret for bølgefrequensen ω , dvs. avstanden mellom de beregnede verdiene i spekteret vil være $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Når en ser på de plottene av spektrene som ble resultatet av analysen og som er presentert i kap. 4, ser en at det er mange topper som består av bare en beregnet verdi. For å få bedre informasjon om både plasseringen og maksverdien til disse toppene, hadde det vært en fordel om punktene i spekteret hadde ligget tettere, dvs. at henholdsvis Δk og $\Delta \omega$ hadde vært mindre. Dette er mest framtrepende når en ser på plottet av spekteret for bølgefrequensen. For at $\Delta \omega$ skal bli mindre, må man ha et filmopptak av lengre varighet slik at en får en lengre måleperiode T . Problemet er ikke så tydelig i plottet av spekteret for bølgetallet, men der hadde det også vært en fordel med bedre oppløsning. For at Δk skal bli mindre, må man ha en større målelengde L .

For å kunne ha en større målelengde, vil det være nødvendig med et større beger som er høyere. Vi har tidligere vært inne på at det var en utfordring å finne egnede beger i gjennomsiktig plexiglass som var lett tilgjengelig i vanlige butikker. En mulig løsning kan være å lage et beger på laboratoriet med utgangspunkt i et rør i plexiglass som man kapper i passende lengde og monterer en plate i den ene enden, som blir bunnen i begeret. Det anbefales også å montere et overløp i toppen av begeret. Hvis man har et vesentlig større beger, vil det være nødvendig å gjøre tilpasninger på størrelsen av utløpet og på utstyret som brukes for å pumpe vann inn i begeret.

KAPITTEL 6

Konklusjon

I denne masteroppgaven har det vært gjennomført en empirisk undersøkelse av bølgeforstyrrelser på den frie overflaten av en virvelstrøm. Ved observasjon av bølgeforstyrrelsene ser det ut som bølgeakkordene har en spiralform som innebærer at bølgene beveger seg både oppover og rundt i virvelen. Bølgeforstyrrelsene er målt ved å analysere bilder av bølgene, som er tatt med et høyhastighetskamera. Bildeplanet ligger i et vertikalt snitt gjennom sentrum av virvelen. De målte bølgene er analysert med to-dimensjonal diskret Fourier transformasjon i tid og én romlig dimensjon. Dvs. bildene som er analysert viser den komponenten av bølgebevegelsen som beveger seg oppover i virvelen.

Ulike metoder for å lage en virvelstrøm er utforsket. Den metoden som var best egnet for analyse av bølgeforstyrrelsen, var slukvirvelen der det ble laget en virvel ved å pumpe inn vann tangentielt i et beger og la det renne ut i et sluk i midten. Slukvirvelen lager en virvel som er høy og slank. Den gir god avstand for bølgene til å forplante seg. Det er lite forstyrrelser i virvelen og man kan tydelig se bølgene som forplanter seg oppover.

Det er presentert målinger og analyser fra to forsøk med slukvirvelen. Ved å studere plot av de målte bølgene i det ene forsøket, kan man se at bølgene er ganske regelmessige med en klart dominerende bølgelengde. Denne bølgelengde kan man finne igjen i spekteret for bølgetall som er funnet ved Fourieranalyse. I det andre forsøket kan det se ut som bølger med omtrent samme bølgelengde som i det første forsøket blir overlappet av kortere forstyrrelser/ bølger med bølgelengder som er omtrent halvparten så lange. Når man prøver å følge bølgene over tid ved å se på plott av hvordan overflaten varierer med tiden, er det ikke like tydelig å se en dominerende bølgeperiode for de bølgeforstyrrelsene i virveltrakten som vi har ønsket å studere. Ut fra analysen av målinger fra disse forsøkene er det vanskelig å si noe om dispersjonsrelasjonen for bølgene på slukvirvelen.

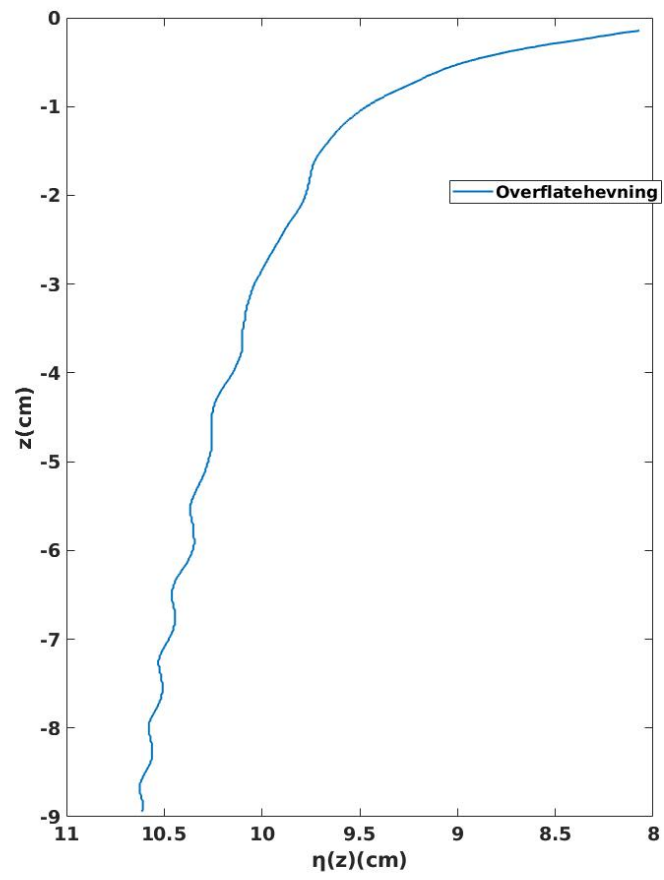
Det har vært en interessant observasjon, men samtidig en utfordring at midten av virveltrakten ikke alltid er en rett vertikal linje i sentrum av begeret, men at den traktformede virvelen beveger seg langsomt fra side til side.

Appendices

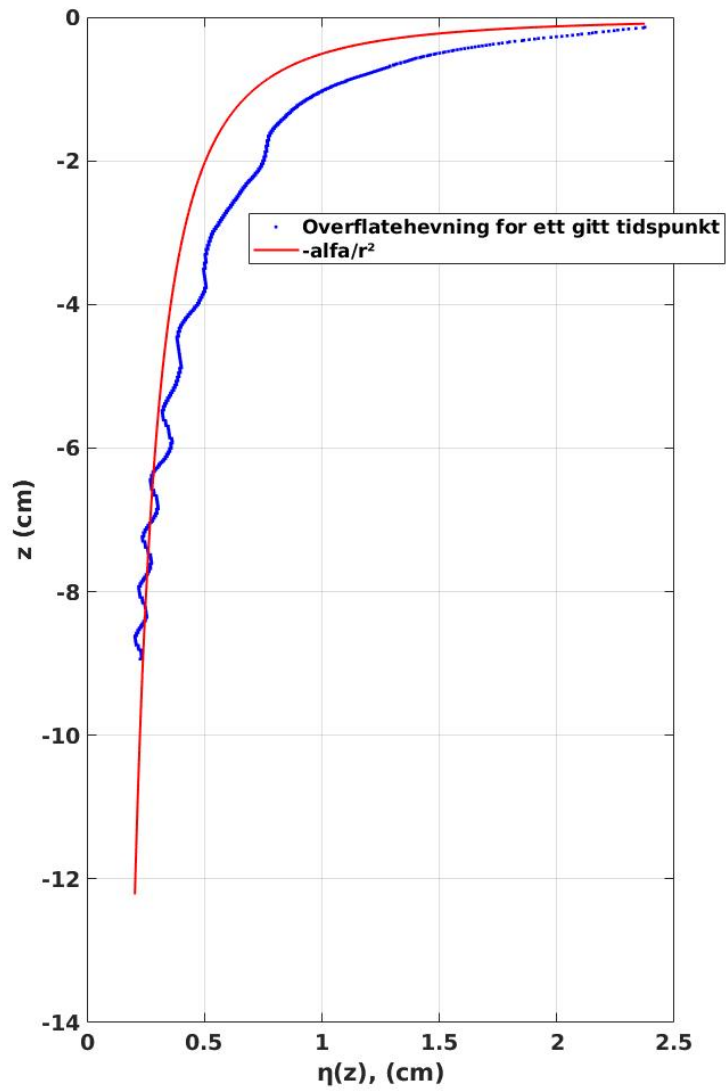
TILLEGG A

Figurer A

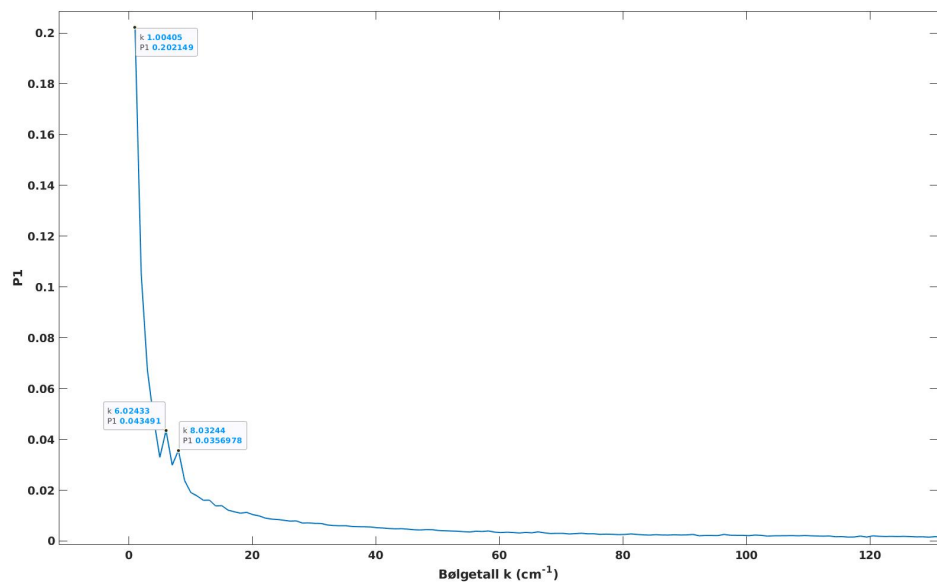
Figurer av opptak med virvelfontene der sluk ikke er helt åpent, og det renner vann over kanten.



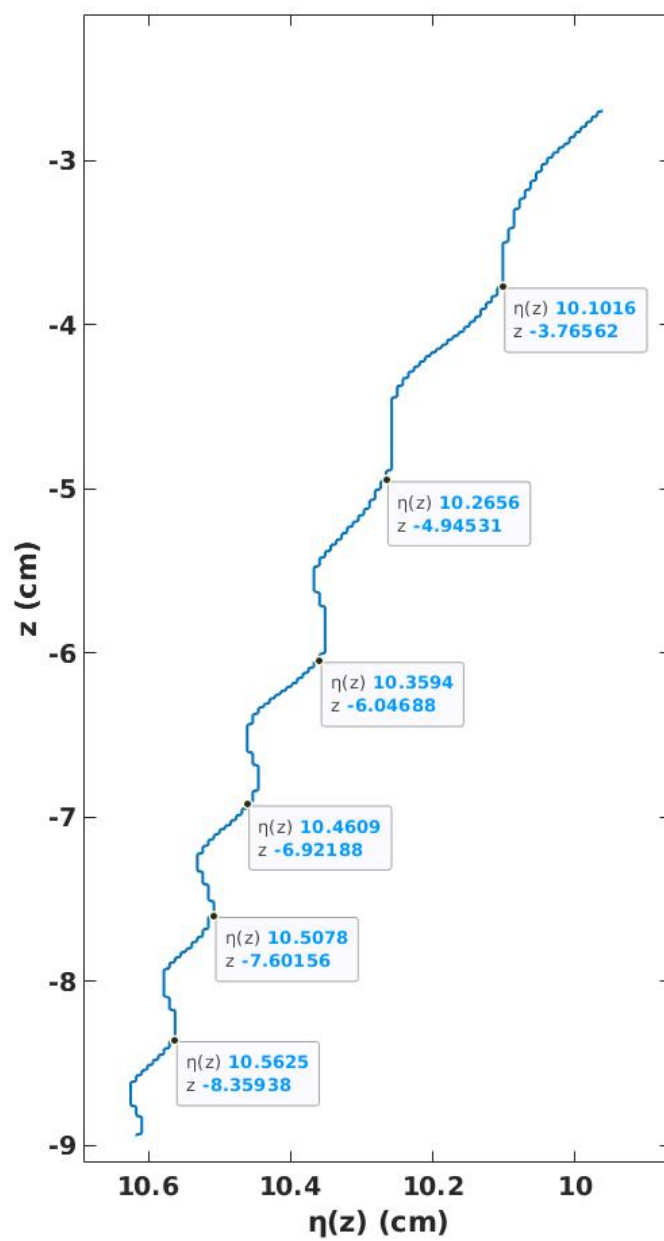
Figur A.1: Overflatehevning for ett gitt tidspunkt, målt overflate til nesten $z=0$



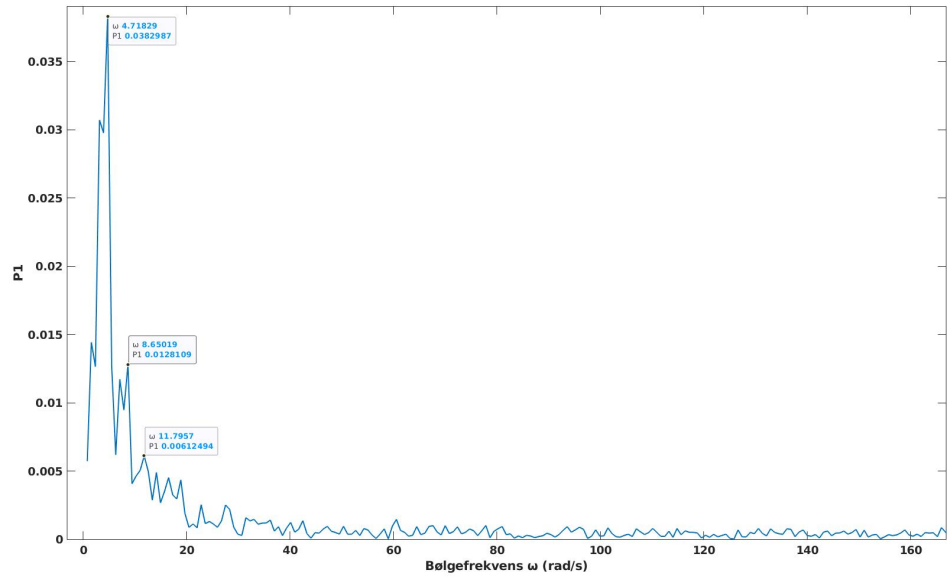
Figur A.2: Sammenligning med rankinevirvel



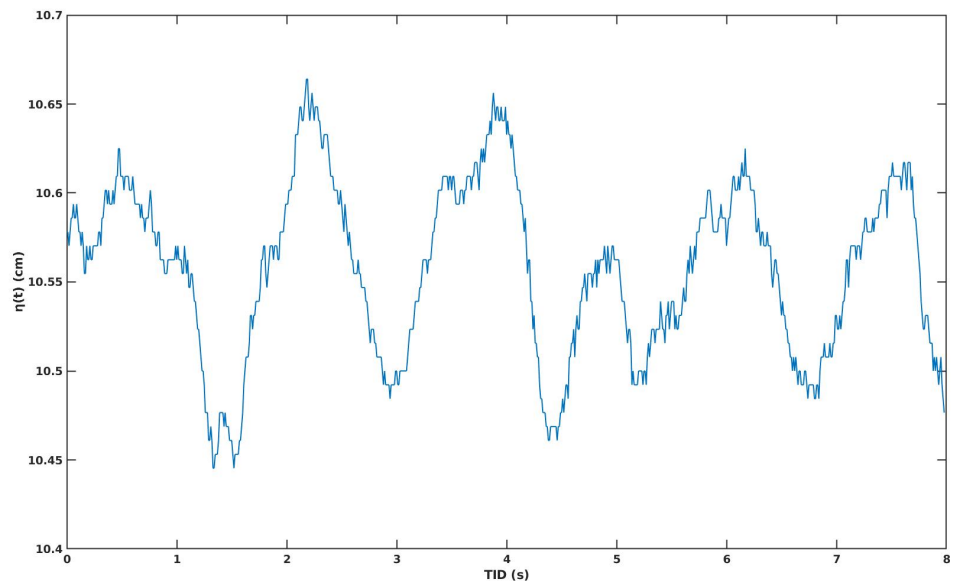
Figur A.3: Ensidedt amplitudespektrum $\eta(z)$



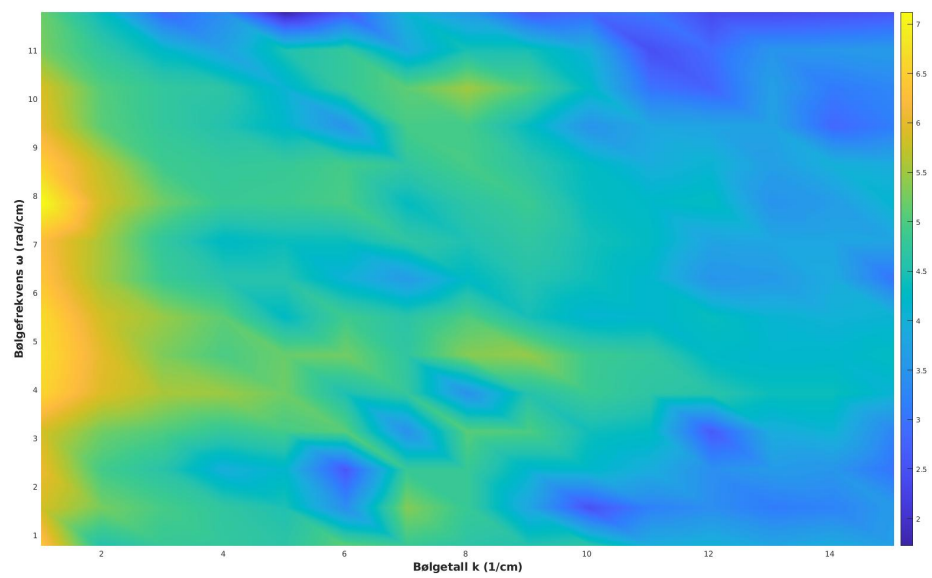
Figur A.4: Overflatehevning for ett gitt tidspunkt, målt kun der det er bølgehevning.



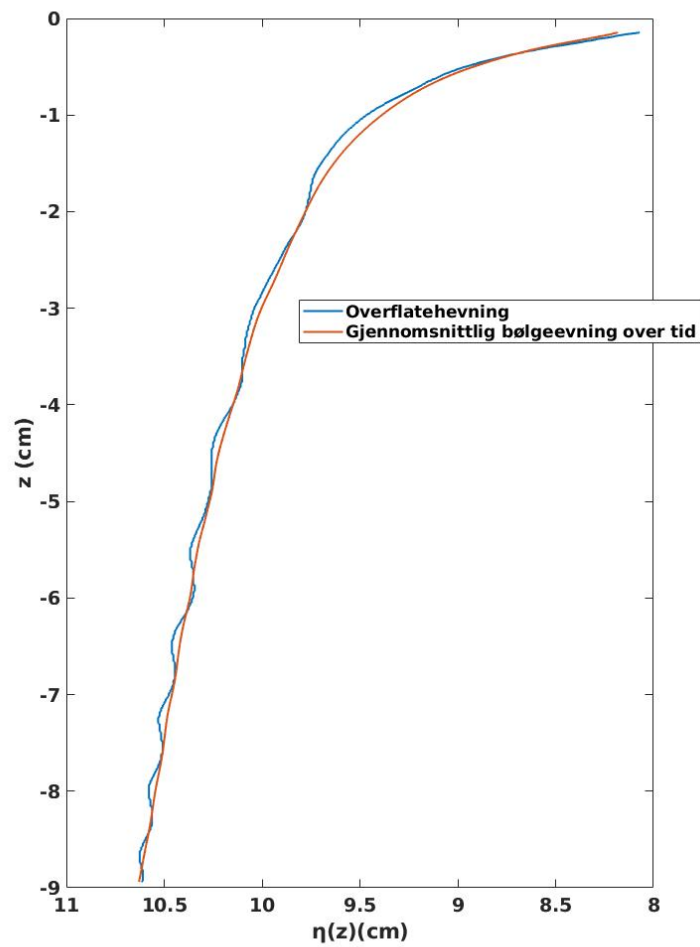
Figur A.5: Ensidet amplitudespektrum $\eta(t)$



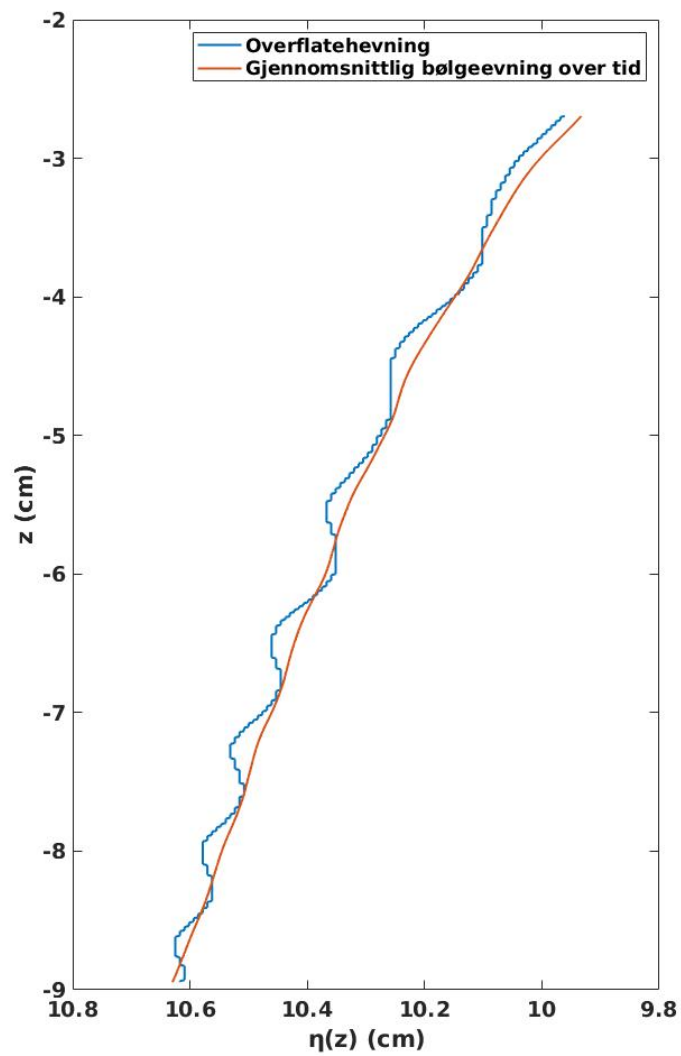
Figur A.6: Bølger over tid



Figur A.7: Fft2



Figur A.8: Overflatehevning for ett gitt tidspunkt og gjennomsnittlig bølgeevning over tid. Målt til nesten $z=0$

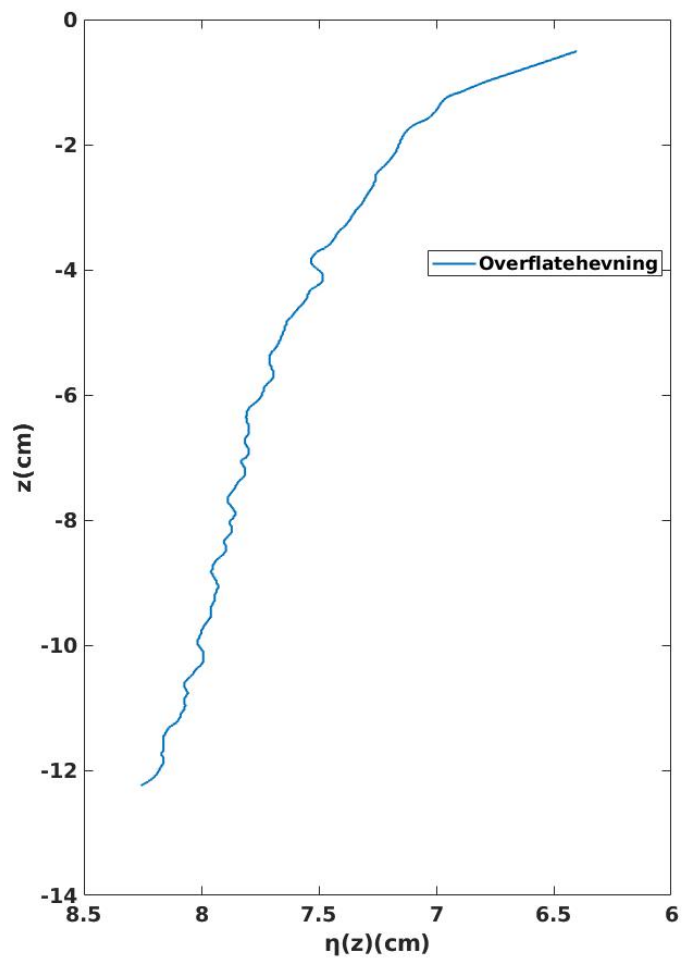


Figur A.9: Overflatehevning for ett gitt tidspunkt og gjennomsnittlig bølgeevning over tid. Målt der det er bølger

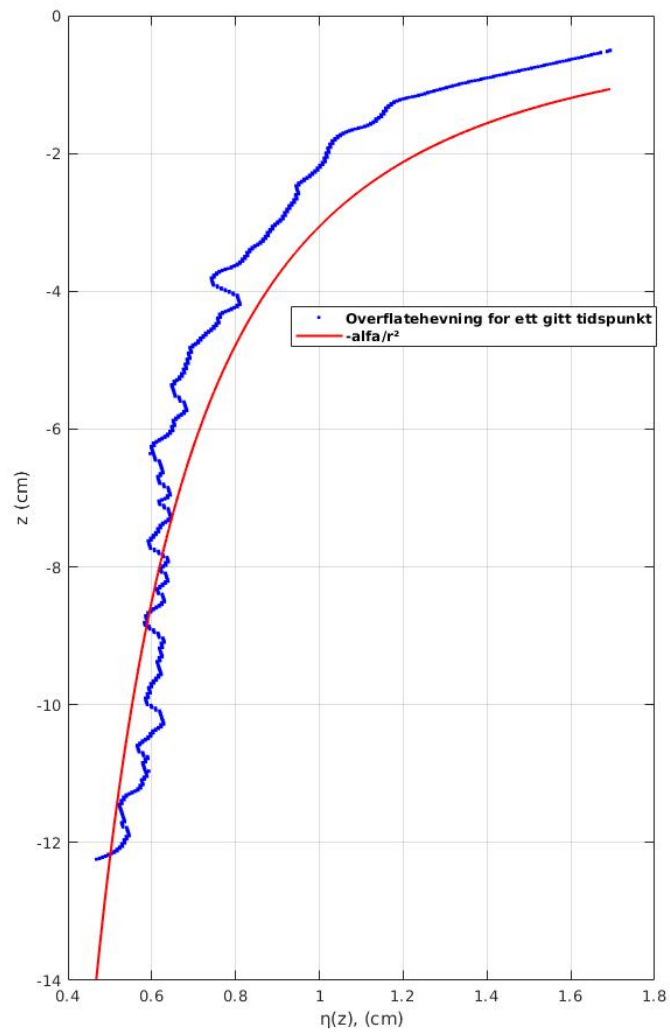
TILLEGG B

Figurer B

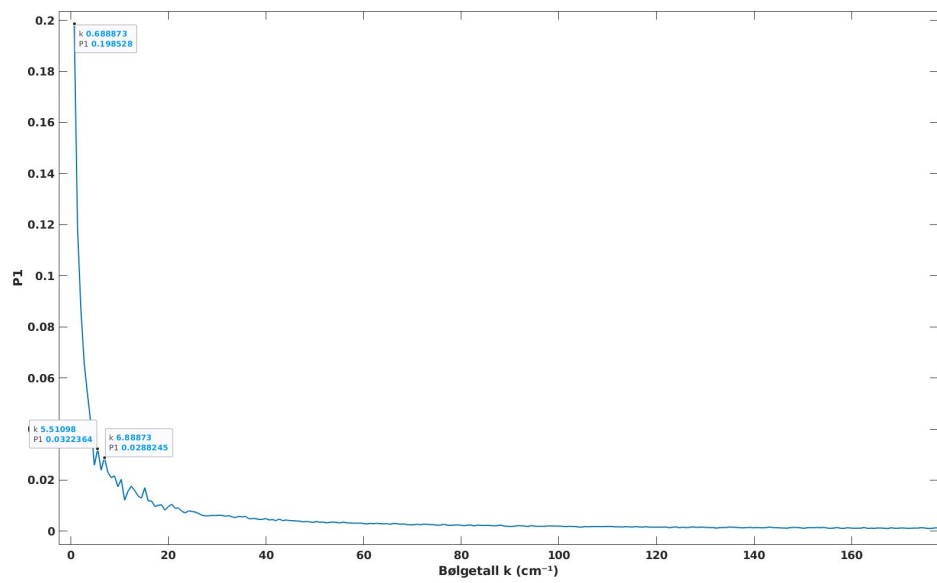
Figurer av opptak med virvelfontene der sluk er helt åpent, og det renner vann til kanten.



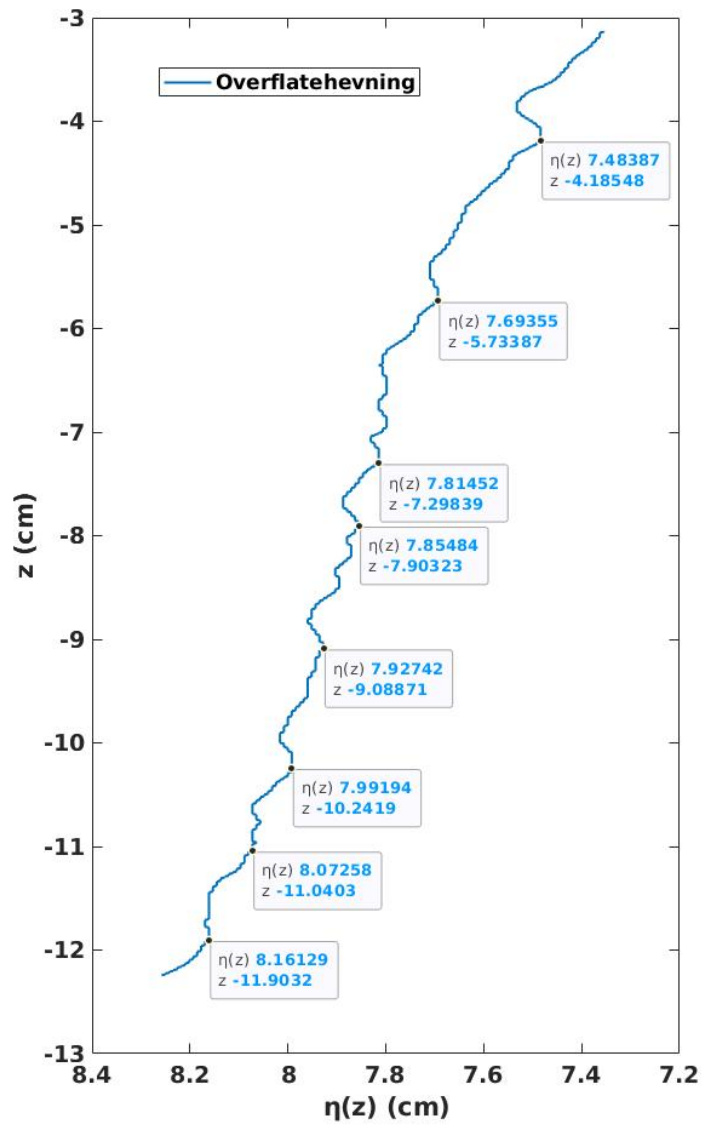
Figur B.1: Overflatehevning for ett gitt tidspunkt, målt overflate til nesten $z=0$



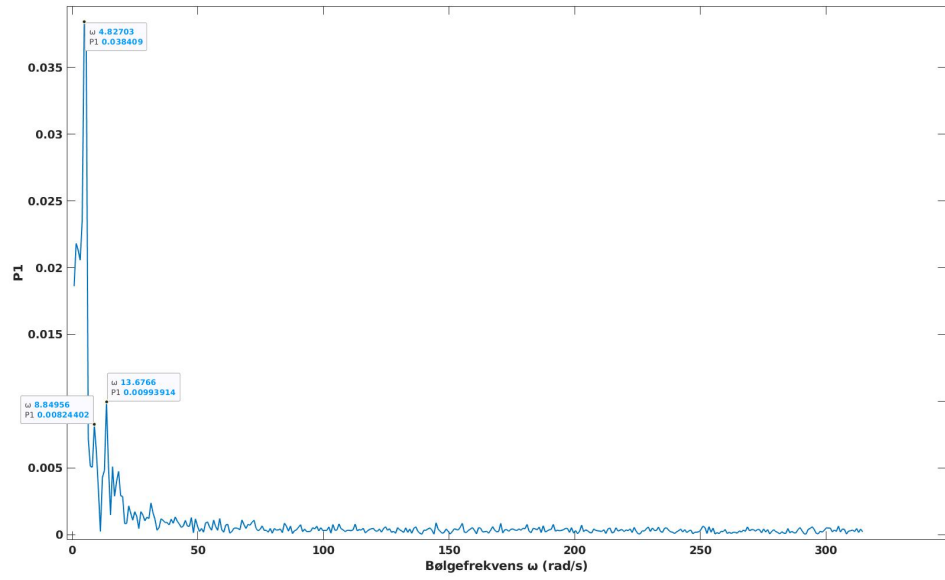
Figur B.2: Sammenligning med rankinevirvel



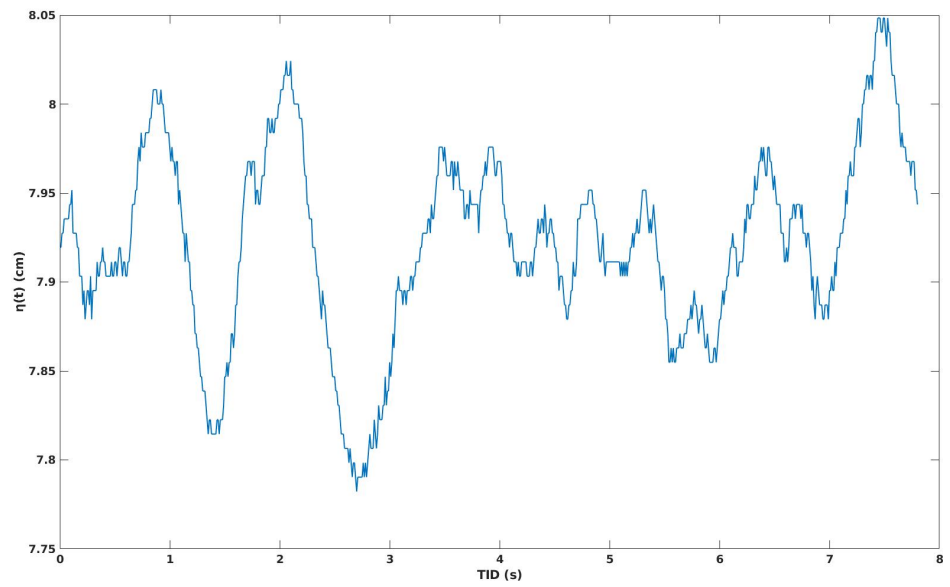
Figur B.3: Ensidet amplitudespektrum $\eta(z)$



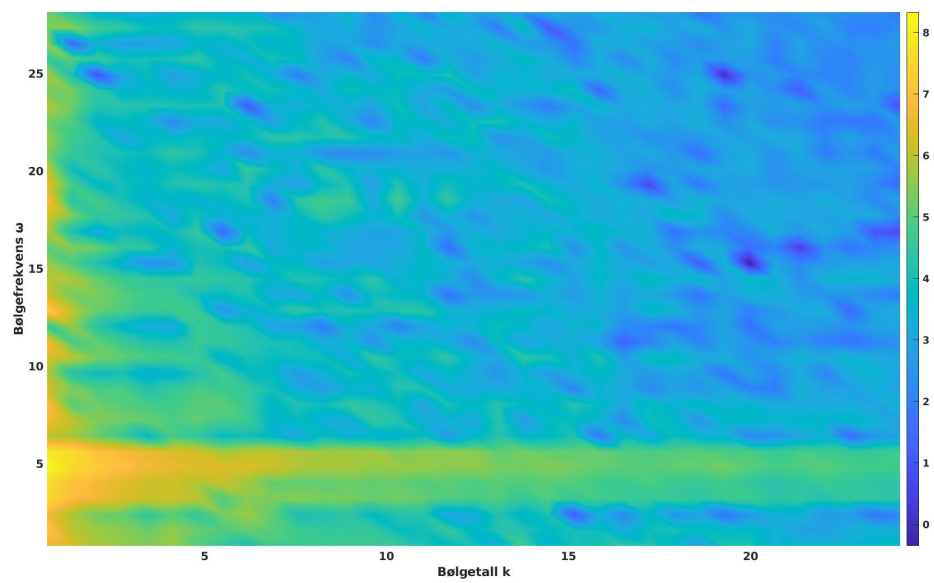
Figur B.4: Overflatehevning for ett gitt tidspunkt, målt kun der det er bølgehevning.



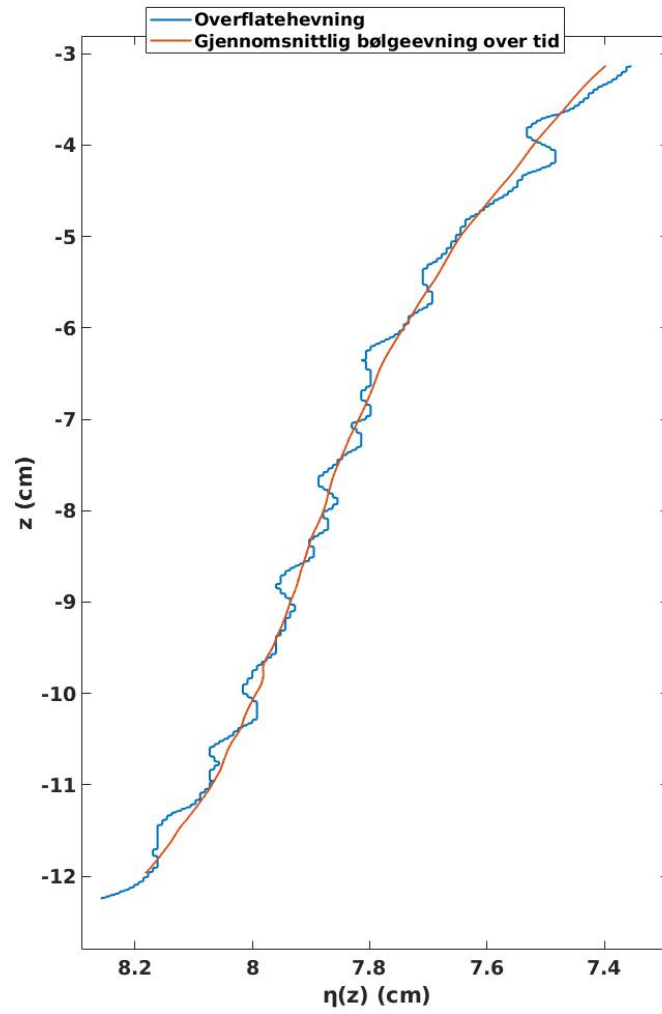
Figur B.5: Ensidet amplitudespektrum $\eta(t)$



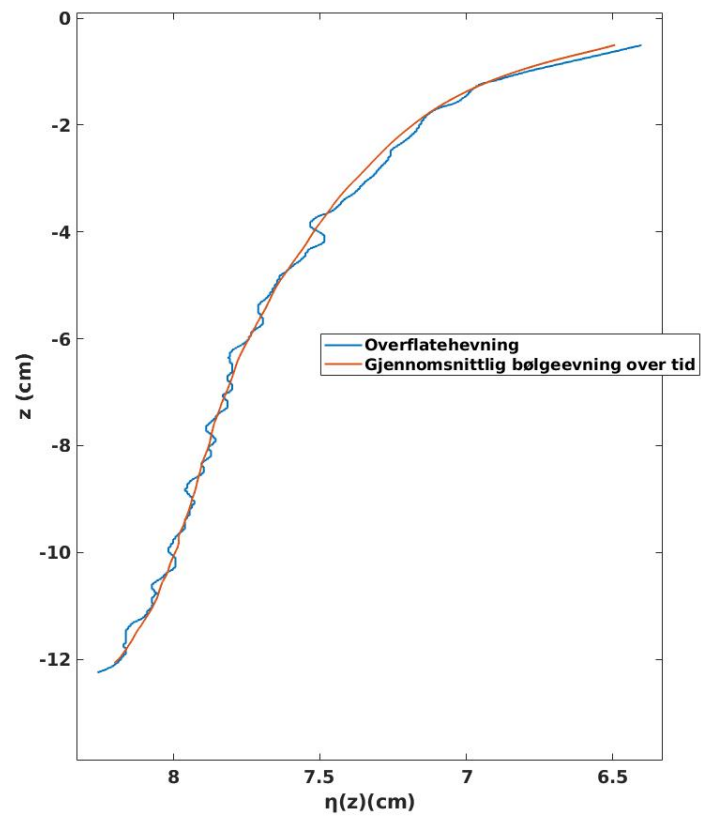
Figur B.6: Bølger over tid



Figur B.7: Fft2



Figur B.8:



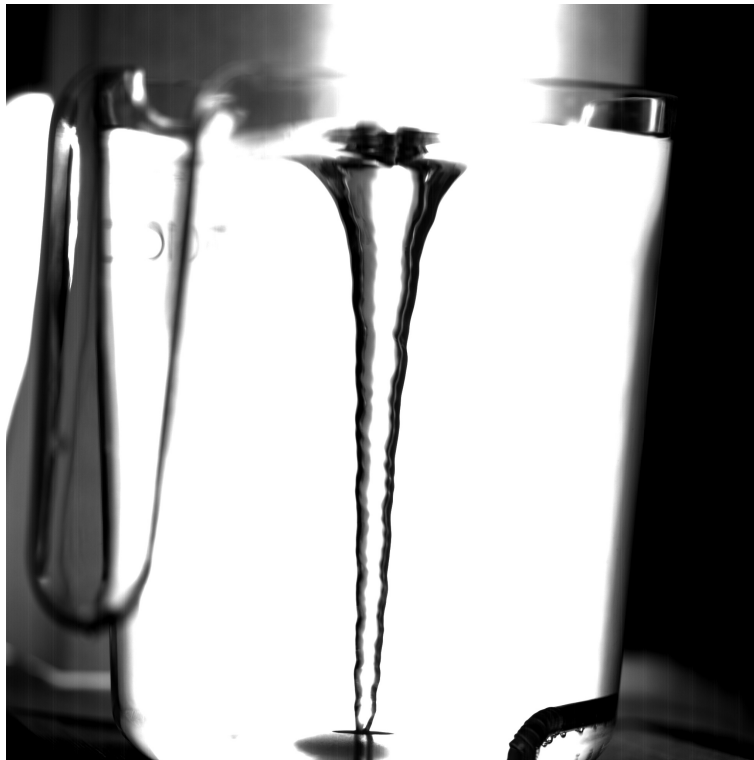
Figur B.9: Overflatehevning for ett gitt tidspunkt og gjennomsnittlig bølgeevning over tid. Målt til nesten $z=0$

TILLEGG C

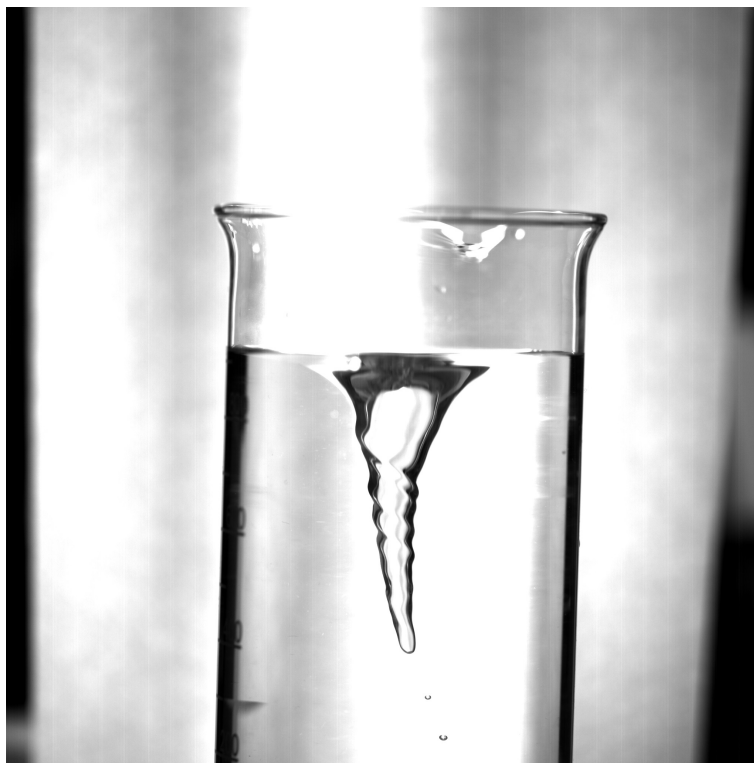
Bilder opptak og oppsett



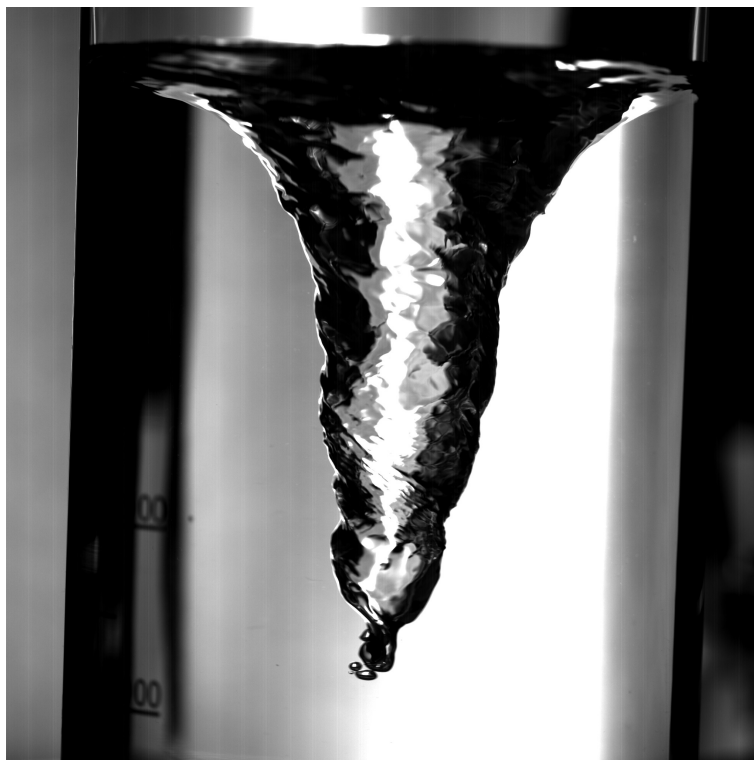
Figur C.1: Virvelstrøm med virvelfontene. Delvis åpnet sluk , renner vann over kanten



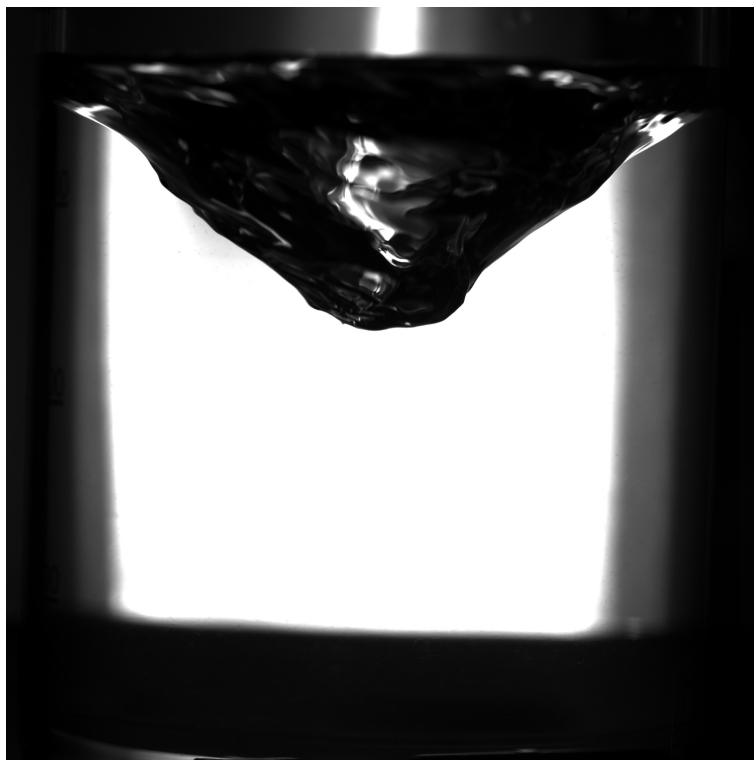
Figur C.2: Virvelstrøm med virvelfontene. Helt åpnet sluk , renner ikke vann over kanten



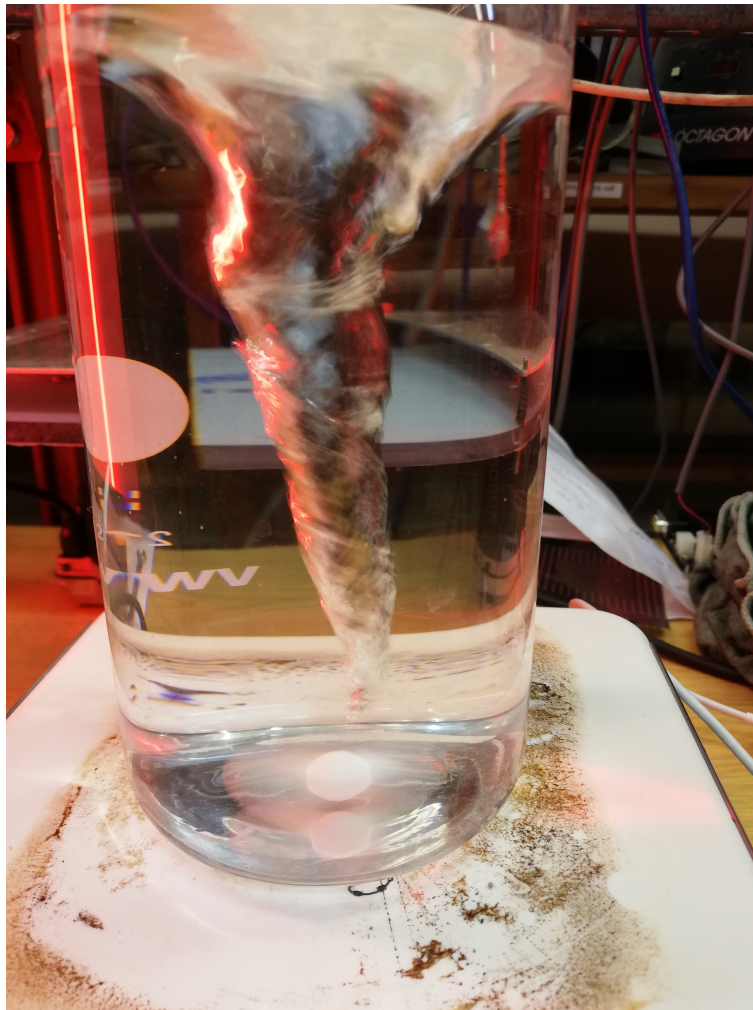
Figur C.3: Virvelstrøm med magnetrører VWR Advanced. 1000ml



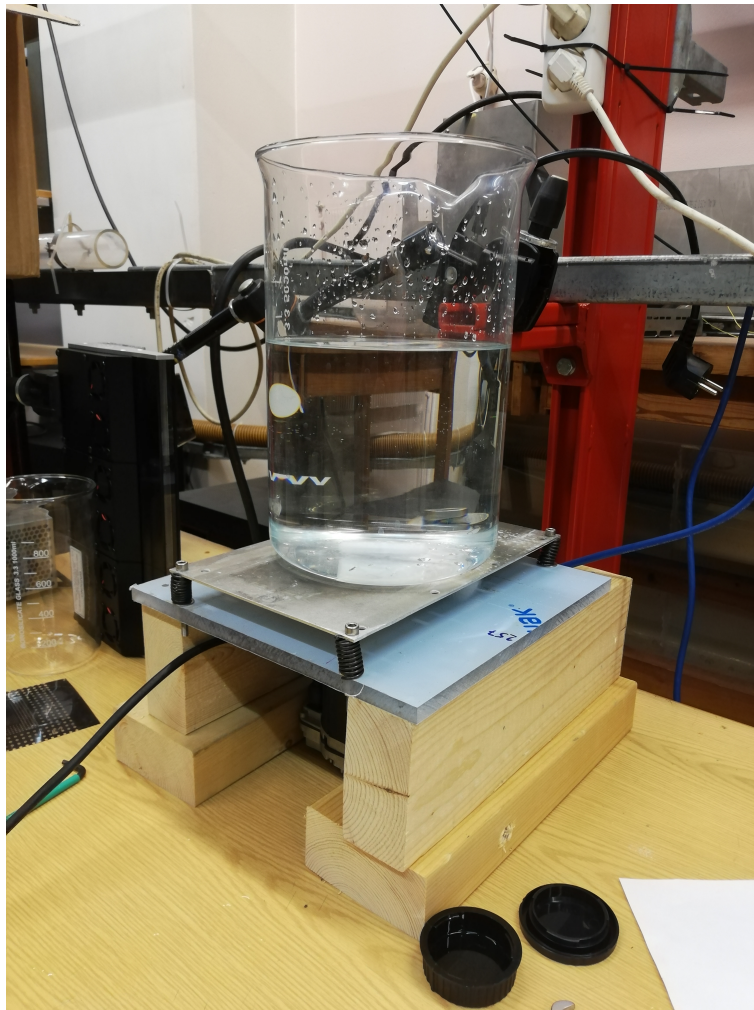
Figur C.4: Virvelstrøm med magnetrører VWR Advanced. 5000ml



Figur C.5: Virvelstrøm med magnetrører UiO



Figur C.6: Virvelstrøm med magnetrører VWR Advanced



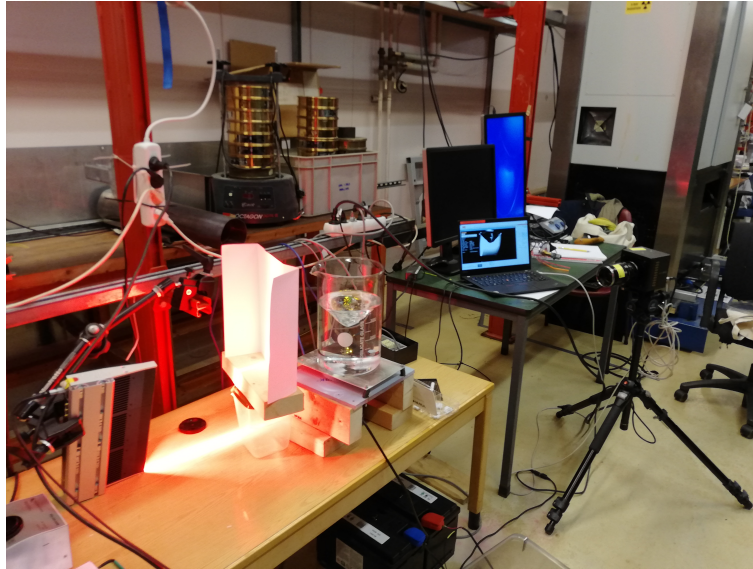
Figur C.7: Magnetorører UiO



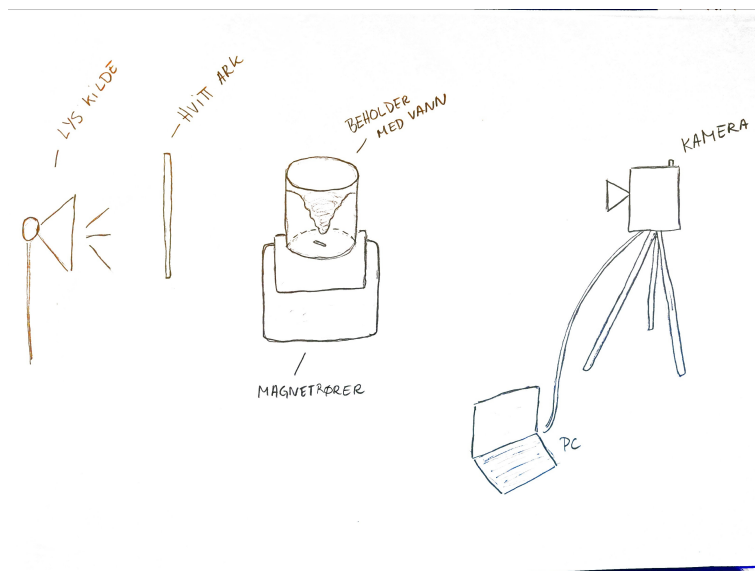
Figur C.8: Virvelfontene med helt åpnet sluk



Figur C.9: Virvelfonten oppsett



Figur C.10: Oppsett av opptak på laboratoriet



Figur C.11: Skisse av oppsett på laboratoriet

TILLEGG D

Tabeller og lister

Volum glassbeholder	Vannivå	Kamera: Shutter speed	Kamera: fps	Tid opptak
1000 mL	Til kanten av glasset	1/1000	500	8 sek - 4000 bilder
1000 mL	Renner over kanten av glasset	1/1000	500	8 sek - 4000 bilder

Tabell D.1: Tabell over opptak av virvelfontenen

	Volum glassbeholder	Volum vann	Magnet	Hastighet	Kamera: Shutter speed	Kamera: fps	Tid opptak
VWR Adv. magnetrører	1000 mL	900 mL	2.5 cm	Max	1/1000	500	8 sek - 4000 bilder
VWR Adv. magnetrører	5000 mL	4250 mL	6.5 cm	max	1/1000	500	8 sek - 4000 bilder
Bølgelab. magnetrører	5000 mL	3500 mL	2x5.1cm	250 rpm	1/1000	500	8 sek - 4000 bilder

Tabell D.2: Tabell over opptak med magnettrører VWR Advanced og bølgelaboratoriet sin magnettrører

Utstyrliste

- CMOS kamera
- Hvitt ark
- Lyskilde
- Magnet rører - VWR Advanced
- Magnet rører - UiO
- Magneter størrelser 2.5 cm, 6.5 cm og 2x5.1 cm
- Begerglass 1000 mL
- Begerglass 5000 mL
- PC
- Matlab
- Virvelfontene:
- Sugerør
- Del til å skjøte mellom sugerør og slange
- 1 L vannmugge
- Skroggjennomføring
- Ventil
- Slange
- Pumpe
- Balje

TILLEGG E

Matlab kode

Listing E.1: Laster inn bildene

```
for i = 1000:5:4000
    disp (i)
    filnavn=sprintf('/home/martine/mek4350/Master/run3_2503/run3_2503_C001H001S000100%d.bmp',i);
    I=imread(filnavn);

    rect=[652 640 150 800]; %[x y a b] (x,y) er vren v hjorne, a,b er forflytningen til nedre h hjoren
    icropped = imcrop(I,rect);

    img = imrotate(icropped,90);
    figure(1)
    imshow(img)

    [rows, columns, numberOfColorBands] = size(img);

    greenChannel = img(:, :, 1);
    img(1,1,1);

    binaryImage = greenChannel < 100;%;tar ut det som er sort , hitt har h ye verdier, 255 er hvitt
    %figure(2)
    %imshow(binaryImage);
    for col = 1 : columns
        yy= 652 + 150 - find(binaryImage(:, col), 1, 'first');

        if isempty(yy)

            y(col) = NaN;

        else
            y(col) = yy;
        end
    end
    eta4000(:,(i/5)-199)=y;%obs den f rste m v re 1

end

figure(3);
%plot(1 : columns, eta(:,1), 'LineWidth', 1);
```

```

plot(eta4000)
%axis([0 800 665 735])
xlabel('Pixler')
ylabel('Pixler')
title('B lgehevning for ett gitt tidspunkt')

```

Listing E.2: fft og fft2 av tid og rom

```

Load run3_2503_3

n=length(eta3(:,1));
k=length(eta3(1,:));

for j = 1:k %301 eta(801,301)
    for i=1:n %801
        eta3(i,j)=2048-eta3(i,j);
    end
end

eta3=eta3./128;

nx=length(eta3(:,1));
nt= length(eta3(1,:));
dt=1/100; %tid per bilder(forflytning).
Fs=1./dt; %bilder per sekund.
dF=Fs./nx;
t=(0:nt-1)*dt;
z=(-1035:1:-300);
dx=1/128; % lengde mellom vert punkt. cm

L= nx.*dx; %
dkx = 2.*pi./L% cm.

kmax=L.*dkx;
k1 = (1:(nx/2+1))*dkx; %f = Fs*(0:(L/2))/L;
k=(1:15)*dkx;
dw=(2.*pi.*Fs)./(nt);
wmax=nt.*dw;
w1 = (1:nt/2+1)*dw;
w = (1:15)*dw;
[kk,ww]=meshgrid(k,w);

Y_x= ((fft(eta3(:,720))));%
Y_t = (fft(eta3(700,:))); %
P2_x= abs(Y_x/nx);
P1_x = P2_x(1:nx/2+1);
P1_x(1:end-1) = 2*P1_x(2:end);

P2_t= abs(Y_t/nt);

```

```

P1_t = P2_t(1:nt/2+1);
P1_t(1:end-1) = 2*P1_t(2:end);

z=(-1145:1:-345);
z=z./128;

etat=rot90(eta3);
Y = log(abs(fft2(etat))); %returnerer F(kx,w)
Y1=(fftshift(Y));

%Y2(Y2>1)= NaN;

%overflaten for eta(x) og eta(t)
figure(1)
plot(eta3(:,720))
%axis([0 800 665 735])
xlabel('r (cm) ')
ylabel('z (cm)')
title('Blgehevning for ett gitt tispunkt')
%set(gca, 'xdir','reverse')

figure(2)
plot(t, eta3(700,:))
xlabel('TID (s)')
ylabel(' (t) (cm)')
%axis([0 6.5 680 710 ])
%title('Blgehevning for et gitt punkt/sted')

%Spektrum

figure(3)
plot(k1 ,P1_x) % plotter gjeldene blgetall.
xlabel('Blgetall k (cm-1)')
ylabel('PI')
%axis([-10 400 0 1000])
%title('Ensidet amplitude spektrum (x)')
%}

figure(4)
plot( w1, P1_t)
xlabel('Blgefrekvens (rad/s)')
ylabel('PI')
%axis([-10 400 0 1000])
%title('Ensidet amplitude spektrum for X(t)')

%fft2

figure(5)

Y2 =Y(2:20,2:20);
clf
pcolor(kk,ww,Y(2:16,2:16))
shading interp,colorbar
%title('F(kx,0,w)')
xlabel('Blgetall k')
ylabel('Blgefrekvens ')

```

```
%figure (6)
%plot(Y)
```

```
xlabel('k')
ylabel('w')
%}
```

Listing E.3: Rankine og tidsmidling og overflate

```
%% Fit: 'untitled fit 1'.
load run3_2503_3
load run3_2503_4
%Finne r0

n=length(eta3(:,1)); %801
k=length(eta3(1,:)); %301
b=length(eta4(:,1));

for j = 1:k %301 eta(801,301)
    for i=1:n %801
        eta3(i,j)=2048-eta3(i,j);
    end
end

for j = 1:k %301 eta(801,301)
    for i=1:b %1127
        eta4(i,j)=2048-eta4(i,j);

    end
end

for i=1:n
    %eta_tidsmidle(i)=sum(eta1(i,:))/301;
    eta_tidsmidle2(i)=sum(eta3(i,:))/k;
end
for i=1:b
    eta_tidsmidle3(i)=sum(eta4(i,:))/k;
end
%r0(801);
% eta_tidsmidle(i,j)=sum(eta1(i,j))/301;

%pixel to cm

eta3=eta3./128;
eta4=eta4./128;

eta_tidsmidle2=eta_tidsmidle2./128;
eta_tidsmidle3=eta_tidsmidle3./128;

z=(345:1:1145);
z=z./-128;
z3=(18:1:1144);
z3=z3./-128;
```

```

z4=(-1144:1:-18)
z4=z4./128;

r2=2048-711
r1= 2048 -660

dr=(r2-r1)/(b-1);
r=r1:dr:r2;
r=r./128;

for i =1:b

    x(i)=(r(i)-eta4(b+1-i,720));
end

x(801)
[xData, yData] = prepareCurveData( x, z4 );

% Set up fitttype and options.
ft = fitttype( 'a/(x^2)', 'independent', 'x', 'dependent', 'y' );
opts = fitoptions( 'Method', 'NonlinearLeastSquares' );
opts.Display = 'Off';
opts.StartPoint = 0.141886338627215;

% Fit model to data.
[fitresult, gof] = fit( xData, yData, ft, opts );

% Plot fit with data.
figure( 'Name', '-alfa/r ' );
h = plot( fitresult, xData, yData );
legend( h, 'Overflatehevning for ett gitt tidspunkt', '-alfa/r ', 'Location', 'East', 'Interpreter', 'none'

%title('Utsnitt av hele overflaten med regresjonsanalyse rankine-virvel')
xlabel( ' (z), (cm)', 'Interpreter', 'none' );
ylabel( 'z (cm)', 'Interpreter', 'none' );
grid on
%set(gca, 'xdir','reverse')

hold off

figure(2)
plot(eta4(:,720), z3)
hold on
plot(eta_tidsmidle3,z3)
%axis([0 2.5 -10 0])
%title('Utsnitt av hele overflaten')
legend('Overflatehevning', 'Gjennomsnittlig blgeevning over tid', 'Location', 'NorthEast', 'Interpreter', '
xlabel( ' (z)(cm)' );
ylabel( 'z (cm)', 'Interpreter', 'none' );
set(gca, 'xdir','reverse')

figure(3)
plot(eta4(:,720), z3)
%title('Utsnitt av hele overflaten')
legend('Overflatehevning', 'Gjennomsnittlig blgeevning over tid', 'Location', 'NorthEast', 'Interpreter', '
xlabel( ' (z)(cm)' );
ylabel( 'z(cm)', 'Interpreter', 'none' );
set(gca, 'xdir','reverse')

figure(4)

```

```

plot(eta3(:,720), z)
hold on
plot(eta_tidsmidle2,z)
%title('Utsnitt av overflaten kun der det er b lger')
legend('Overflatehevning','Gjennomsnittlig b lgeevning over tid', 'Location', 'NorthEast', 'Interpreter', 'none');
xlabel( ' (z) (cm)', 'Interpreter', 'none' );
ylabel( 'z (cm)', 'Interpreter', 'none' );
%axis([0 0.8 -10 0])
set(gca, 'xdir','reverse')
figure(5)
plot(eta3(:,720), z)
%title('Utsnitt av overflaten kun der det er b lger')

xlabel( ' (z) (cm)', 'Interpreter', 'none' );
ylabel( 'z (cm)', 'Interpreter', 'none' );
set(gca, 'xdir','reverse')

figure(6)
plot(eta3(:,400), z)
title('Utsnitt av overflaten kun der det er b lger')
legend('Overflatehevning', 'Location', 'NorthEast', 'Interpreter', 'none' );
xlabel( ' (z) (cm)', 'Interpreter', 'none' );
ylabel( 'z (cm)', 'Interpreter', 'none' );
set(gca, 'xdir','reverse')

```

Bibliografi

- Dreyer** [Dre20] Dreyer, L. W. «Bølger i en slukstrøm». I: *MEK 3200 - Prosjektarbeid i mekanikk* (2020).
- Fossum** [Fos21] Fossum, M. Y. «The group line in wavenumber-frequency spectra of water waves». I: *Universitet i Oslo* (2021).
- mathworks** [Mat] Mathworks. *fft2*. URL: <https://se.mathworks.com/help/matlab/ref/fft2.html>. (accessed: 13.05.2023).
- kistefos** [mus] museum, K. *Energy-Matter-Space-Time av Petroc Sesti*. URL: <https://www.kistefosmuseum.no/skulptur/energy-matter-space-time>. (accessed: 14.05.2023).
- Taklo** [Tak16] Taklo, T. M. A. *On the dispersion relation and spectral properties of surface gravity waves*. Universitet i Oslo, 2016.
- vortex** [The] TheKingofRandom. *Homemade Perpetual Vortex Fountain! TKOR's Guide On How To Make The Best Water Vortex Fountain*. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=CCd3My1xeXM&t=2s>. (accessed: 14.05.2023).
- Trulsen** [Tru22] Trulsen, K. «Forelesningsnotater MEK 4350». I: *Universitetet i Oslo* (2022).
- rankine** [wik] wikipedia. *Rankine vortex*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Rankine_vortex. (accessed: 14.05.2023).