

**Tilnærmede metoder for beregning
av maksimale søylemoment**

**Approximate methods for calculation
of maximum moment in columns**

av/by

John Bersvendsen

**Veileder/Supervisor:
Jostein Helleland**

**RESEARCH REPORT
IN MECHANICS**



**UNIVERSITY OF OSLO
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
MECHANICS DIVISION**

**UNIVERSITETET I OSLO
MATEMATISK INSTITUTT
AVDELING FOR MEKANIKK**

**Tilnærmede metoder for beregning
av maksimale søylemoment**

**Approximate methods for calculation
of maximum moment in columns**

av/by

John Bersvendsen

**Veileder/Supervisor:
Jostein Helleland**

Forord

Denne oppgaven er skrevet ved Avdeling for mekanikk, Matematisk institutt, på Universitetet i Oslo, i tidsrommet september 2003 til desember 2004. Det har vært en meget interessant og spennende oppgave, og jeg vil gjerne rette en stor takk til Prof. Jostein Hellesland for god veiledning og tilrettelegging av oppgaven. Jeg vil også takke mine nærmeste medstudenter Fredrik Mood og Eimund Gjerstad som var med på å skape en trivelig atmosfære under arbeidet.

Blindern 1. desember 2004

John Bersvendsen

Sammendrag

Kort problembeskrivelse

I rammekonstruksjoner, satt sammen av søyler og bjelker (plater o.l.), vil belastningene på bjelkene føre til momentbelastning også i søylene. For kortere søyler vil maksimalt moment vanligvis oppstå ved søylens ender, og kan da beregnes etter konvensjonell 1. ordens teori. Er derimot søylene lengre slik at de kan betraktes som slanke, vil 2. ordens lastvirkninger kunne føre til at maksimalt moment i søylene opptrer mellom søylens ender. 2. ordens lastvirkning vil si at det innkommer et ekstra momentbidrag til søylen som skyldes aksialkreftene på søylens utbøyning. Med andre ord kan man si at totalt moment som oppstår i søylen er 1.ordens momentet pluss momentet som skyldes 2. ordens lastvirkning. Når det utføres statiske analyser av slike konstruksjoner, er det viktig at maksimalt moment bestemmes riktig, og i hvert fall til den sikre siden. Er maksimalt moment beregnet til den usikre siden, kan det føre til store konsekvenser for dimensjoneringen av konstruksjonen.

I norske og utenlandske standarder gis det en tilnærmet metode for beregning av maksimalt moment, som er underbygget av omfattende forskningsresultater og som stort sett er akseptert i alle lands standarder. Metoden er i hovedsak utviklet for konstruksjoner som gir positiv rotasjonsinnspenning i søylene, som ansees som "vanlige". Men i noen tilfeller kan det oppstå negativ rotasjonsinnspenning. Spørsmålet er da om den tilnærmede metoden gir tilstrekkelig nøyaktighet, og om den gir resultater til den sikre eller usikre siden.

Hensikten med denne oppgaven er å foreta en undersøkelse av nøyaktigheten til konvensjonelle tilnærmede 2. ordens metoder for beregning av maksimalt moment i slanke søyler for et utvalg av noen "vanlige" og "uvanlige" rammekonstruksjoner. Det som menes med uvanlige rammekonstruksjoner er konstruksjoner der negativ innspenning oppstår. Det er også ønskelig å etablere gyldighetsgrenser for eksisterende metoder, eventuelt foreslå forbedrede metoder. Hovedvekten i undersøkelsen blir lagt på tilfeller der søylene får negativ rotasjonsinnspenning.

Løsningsmetode

Til å begynne med undersøkte jeg en uforskyvelig enkeltsøyle med forskjellig innspenningsforhold. Det ble benyttet tre forskjellige tilnærmede metoder for beregning av maksimalt moment, der en av disse var en konvensjonelle metode.

Resultatene ble deretter sammenlignet med eksakt utregning. For å være helt presis var det momentforstørrelsesfaktoren som ble sammenlignet, altså maksimalt moment delt på 1. ordens endemoment (hvilken ende det er snakk om blir gjennomgått siden). Eksakt utregning vil si beregning av maksimalt moment der det blir benyttet totale momenter. I avslutningen til denne delen har jeg kommet med et forslag til en tilnærmet metode, den er vistnok basert på en av de tre metodene nevnt ovenfor, og resultatene som da fremkom ble sammenlignet på lik linje som de andre. Jeg har ikke valgt å gi metoden noe nytt navn, men er å anse som en eventuell videreutvikling av eksisterende metode.

I oppgaven var det i hovedsak to typer beregningsmetoder som ble benyttet for beregning av tilnærmet maksimalt søylemoment: En beregningsmetode som var basert på bruk av eksakt knekk lengdefaktor, og en metode som var basert på bruk av knekk lengdefaktor beregnet etter konvensjonell fordeling av stivheter som møtes i et knutepunkt, såkalt konvensjonell knekk lengdefaktor. For enkeltsøylen nevnt ovenfor er det ingen fordeling, og blir derfor ikke berørt av stivhetsproblematikken. For disse tilfellene vil da eksakt og konvensjonell knekk lengdefaktor være like, så resultatene vil være de samme. Betraktes et system bestående av flere søyler kommer stivhetsproblematikken inn, og resultatene blir forskjellige avhengig av hvilken knekk lengdefaktor som benyttes. Så for å ikke skape en eventuell forvirring i senere tid, ble det benyttet eksakt knekk lengdefaktor i notasjonen for beregningene som er foretatt på enkeltsøylen nevnt ovenfor, men det må huskes på at bruk av konvensjonell knekk lengdefaktor gir de samme resultatene for disse tilfellene.

Senere i oppgaven undersøkte jeg en uforskyvelig to etasjes ramme, der jeg igjen benyttet de tilnærmede metodene, inkludert mitt forslag for beregning av maksimalt moment i søylene. Resultatene ble deretter sammenlignet med eksakt utregning. Det er hovedsakelig i denne delen av oppgaven kjernen ligger, i tillegg til å bruke eksakt knekk lengdefaktor, ble det også benyttet konvensjonell knekk lengdefaktor, og for tilfeller der negativ innspenning oppstod, ble en nøye studie gjennomført. Det var flere forskjellige forhold som kunne legges til grunn for å simulere en “vanlig” og “uvanlig” konstruksjon, så jeg tok først for meg det generelle tilfellet for rammen nevnt ovenfor, for senere å definere noen modeller som ble grunnlaget for undersøkelsen.

Resultater

For fullstendighetens skyld er det en ting som må gjøres helt klart før resultatet presenteres: Det skilles mellom konvensjonell metode og konvensjonell knekk lengdefaktor. Konvensjonell metode vil si beregning av tilnærmet maxi-

malt moment etter en spesifikk fremgangsmåte som har vært vanlig å bruke. Metoden vil bli presentert i detalj senere. Konvensjonell knekk lengdefaktor er en spesifikk faktor som kan benyttes i de tilnærmede metodene. Når maksimalt moment beregnes tilnærmet etter konvensjonell metode, gjøres dette enten med bruk av konvensjonell knekk lengdefaktor eller eksakt knekk lengdefaktor (knekk lengdefaktoren kan beregnes etter andre metoder, men i denne oppgaven forholdes det kun til disse to). For enkeltsøylen nevnt ovenfor, og som nevnt tidligere, gir bruk av eksakt og konvensjonell knekk lengdefaktor like resultater, men forsskjellige resultater når det betraktes ett system.

Fra resultatene som foreligger på grunnlag av beregninger utført på en enkeltsøyle, kan det diskuteres om en metode ga bedre tilnærmelse enn de øvrige. Resultatene var til en hver tid situasjonsavhengig, og det var ikke problemfritt å trekke en endelig konklusjon. Min konklusjon etter en helhetsvurdering, der jeg i dette tilfellet så bort ifra mitt forslag til ny metode, ble resultatene best tilnærmet for en metode som baserer seg på et forslag fra *Hellesland*, se [12], uavhengig av valg av knekk lengdefaktor som ble benyttet. Den konvensjonelle metoden var noe dårligere tilnærmet, og mesteparten av resultatene lå på den usikre siden. Om min metode ga bedre resultater enn de øvrige kommer frem i en endelig diskusjon på slutten av resultatdelen for enkeltsøylen, men som en forsmak kan jeg si at det ser lyst ut.

Fra resultatene som har fremkommet etter undersøkelsen av den to etasjes rammen, kan det igjen diskuteres om en metode ga bedre tilnærmelse enn de øvrige, og var det i så fall benyttet eksakt knekk lengdefaktor, eller konvensjonell knekk lengdefaktor. Igjen kan det sies at resultatene til enhver tid var situasjonsavhengig, og for rammen som sådan er det flere faktorer som gir utslag på resultatet enn for enkeltsøylen nevnt ovenfor. Det er vanskelig å gi en endelig entydig konklusjon, men min konklusjon etter en helhetsvurdering, ble også her metoden fra *Hellesland* å betrakte som mest pålitelig. Dette for vilkårlig valg av knekk lengdefaktor. Resultatene fra den konvensjonelle metoden var stort sett dårligere enn *Helleslands* metode. Resultatene som foreligger fra metoden jeg har foreslått, vil også her fremkomme i en endelig diskusjon på slutten av resultatdelen for rammen (systemet).

Det er flere faktorer enn knekk lengdefaktorene som er med på å bestemme om en tilnærmet metode er god (kommer tilbake til dette siden), men ser man bort ifra de andre, står jeg igjen med bare to valg (i denne oppgaven). Dette er om bruken av knekk lengdefaktoren beregnet etter konvensjonell fordeling av stivhetene er god nok, eller om eksakt knekk lengdefaktor bør benyttes. For noen rammemodeller som var lagt til grunn for beregning av maksimalt moment, fikk jeg illustrert noen tilfeller der negativ rotasjonsinnspenning oppstod. Det viste seg slik at maksimalt moment beregnet med konvensjonell knekk lengdefaktor, i de fleste av disse

tilfellene ikke egnet seg da dette medførte stor unøyaktighet, og stort sett til den usikre siden. Grunnen til dette var at konvensjonell knekkklengdefaktor ble beregnet for liten, dvs. i de ovennevnte tilfellene der resultatene var meget unøyaktig, var denne knekkklengdefaktoren alltid mindre enn eksakt knekkklengdefaktor. Det kommer også frem fra resultatene at bruk av konvensjonell knekkklengdefaktor viste seg å være noe mer nøyaktig og mer stabil for litt “fleksible” systemer, mens større unøyaktighet innkom etter hvert som systemet ble “stivere”. Min konklusjon til dette er at bruken av konvensjonell knekkklengdefaktor i tilfeller der negativ rotasjonsinnspenning oppstår, kan og vil i de fleste tilfeller være med på å beregne maksimalt moment feil og langt fra tilfredsstillende. Siden bruken av eksakt knekkklengdefaktor gir bedre tilnærming av maksimalt moment for ovennevnte tilfeller foreslår jeg at denne brukes, og at en “ny” konvensjonell knekkklengdefaktor må utvikles spesielt rettet mot tilfeller der negativ rotasjonsinnspenning oppstår.

En annen faktor som må defineres i tillegg til knekkklengdefaktoren ved beregning av maksimalt moment, er 1. ordens momentgradient over søylen. Den er definert for området 1 til -1, og det viste seg slik at stort sett alle resultatene for den uforskyvelige to etasjes rammen ga best tilnærming av maksimalt moment når 1. ordens momentgradient ble gitt verdien 1, og deretter ble tilnærmelsen mer unøyaktig og gikk mot, eller mer over til den usikre siden etter hvert som den gikk mot -1. Det er flere grunner til dette og jeg kan fortelle at fortegnet til rotasjonsinnspenningen igjen har stor innvirkning, og en oppklarende diskusjon / konklusjon angående dette er gjort i kapittel 11 på side 133. For det andre blir denne faktoren (1. ordens momentgradient) benyttet i en annen faktor kalt C_m , som er forskjellig avhengig av hvilken tilnærmet metode som benyttes, og er spesifikt angitt for hver metode senere i dokumentet. Denne faktoren har som oppgave å korrigere tilnærmet maksimalt moment når 1. ordens momentgradient er forskjellig fra verdien 1, dette må gjøres for å få en bedre tilnærming av maksimalt moment. Denne faktoren C_m er mye forsket på av andre, og det finnes mange mulige varianter, men av de jeg har benyttet i denne oppgaven, er det ingen som kan til enhver tid være med på å beregne maksimalt moment nøyaktig og kun til den sikre siden.

Innhold

Forord	i
Sammendrag og resultater	ii
Innhold	vi
Notasjon	xi
Liste av figurer	xv
Liste av tabeller	xx
1 Grunnleggende informasjon om oppgaven	1
1.1 Problemstilling	1
1.2 Formål	2
1.3 Løsningsmetode	2
1.4 Organisering av oppgaven	4
2 Enkeltstøyle, 2. ordens elastisk teori	7
2.1 Generelt	7
2.2 Søylen utbøyningsform	7
2.3 Momentforløp og maksimalt moment	10
2.4 Definisjon av 1.ordens momentgradient r_1	11
2.5 Visualisering av momentforløp og maksimalt moment	12
2.5.1 Generelt	12
2.5.2 Eksempel med momentkurver	14
2.5.3 Illustrasjon av maksimalt moment	16

2.6	Diskusjon av maksimalt moment	18
3	Knekning av søyle	24
3.1	Generelt	24
3.2	Kort innblikk i historien om knekning	24
3.3	Kritisk last	27
3.4	Eksempler på knekk lengder	28
3.5	Søyle med vilkårlig innspenning, notasjon	29
3.6	Eksakt knekk lengdefaktor	30
3.7	Endemotstandsbegrensninger	31
4	Ramme, 2. ordens elastisk teori	33
4.1	Generelt	33
4.2	Maksimalt moment	33
4.3	Definisjon av 1.ordens momentgradient, $r_{1,1}$ og $r_{1,2}$	34
4.4	Nabosøylens påvirkning	34
4.5	Kort diskusjon	37
5	Knekning av ramme	38
5.1	Generelt	38
5.2	Krav ved systemknekning	39
5.3	Beregning av eksakt knekk lengdefaktor β_1 og β_2	39
6	Beregning av tilnærmet maksimalt moment for en enkeltsøyle	40
6.1	Generelt	40
6.2	Tilnærmede metoder og definisjon av C_m	42
6.2.1	Generelt	42
6.2.2	Konvensjonell metode	42
6.2.3	Forslag av J. Hellesland	43
6.2.4	Forslag av M. Vilette	45
6.3	Kort diskusjon og oppsummering	45
7	Beregning av tilnærmet maksimalt moment for en ramme	48
7.1	Generelt	48
7.2	Beregning av maksimalt moment med bruk av $\beta_{kon,i}$	49
7.3	Beregning av maksimalt moment med bruk av $\beta_{eks,i}$	50
7.4	Kort diskusjon og oppsummering	50

8	Resultater for enkeltsøyle	52
8.1	Valg av søyler som skal undersøkes	52
8.1.1	Generelt	52
8.1.2	Definisjon av søyletilfelle 1	52
8.1.3	Definisjon av søyletilfelle 2	53
8.1.4	Definisjon av søyletilfelle 3	53
8.2	Hvordan resultatene fremlegges	53
8.3	Resultater for enkeltsøyle basert på konvensjonell metode	54
8.3.1	Generelt	54
8.3.2	Presentasjon av resultater, tilfelle 1 - tilfelle 3	54
8.3.3	Diskusjon	56
8.4	Resultater for enkeltsøyle basert på forslag fra Helleland	59
8.4.1	Generelt	59
8.4.2	Presentasjon av resultater, tilfelle 1 - tilfelle 3	59
8.4.3	Diskusjon	63
8.5	Resultater for enkeltsøyle basert på forslag fra Villette	64
8.5.1	Generelt	64
8.5.2	Presentasjon av resultater, tilfelle 1 - tilfelle 3	64
8.5.3	Diskusjon	68
9	Enkeltsøyler - Konklusjon og forslag til forbedring	69
9.1	Vurdering og konklusjon av tilnærmede metoder	69
9.2	Grunnlag og definisjon av ny “ C_m ”	70
9.3	Hvordan resultatene fremlegges	74
9.4	Resultater for enkeltsøyle basert på Hellelands metode med ny “ C_m ”	74
9.4.1	Generelt	74
9.4.2	Presentasjon av resultater, tilfelle 1 - tilfelle 3	74
9.4.3	Diskusjon og konklusjon	75
10	Resultater for ramme	80
10.1	Forhold som definerer valg av rammer som skal undersøkes	80
10.2	Definisjon av modeller	82
10.2.1	Forskjellige måter å sammenligne resultatene	82
10.2.2	Definisjon av modell 1 - modell 3	83
10.2.3	Definisjon av modell 4 - modell 6	86
10.3	Hvordan resultatene fremlegges	87

10.4	Modell 1 - 3, sammenligning av metodene med bruk av β_{eks}	89
10.4.1	Generelt	89
10.4.2	Presentasjon av resultater	90
10.4.3	Diskusjon	91
10.5	Modell 1 - 3, sammenligning av metodene med bruk av β_{kon}	94
10.5.1	Generelt	94
10.5.2	Presentasjon av resultater	94
10.5.3	Diskusjon	96
10.6	Modell 4, parvis sammenligning	99
10.6.1	Generelt	99
10.6.2	Presentasjon av resultater	99
10.6.3	En grundigere gjennomgang av momentforstørrelsesfaktoren	103
10.6.4	Presentasjon av resultater	104
10.6.5	Diskusjon	108
10.7	Modell 5, parvis sammenligning	111
10.7.1	Generelt	111
10.7.2	Presentasjon av resultater	111
10.7.3	En grundigere gjennomgang av momentforstørrelsesfaktoren	115
10.7.4	Presentasjon av resultater	115
10.7.5	Diskusjon	119
10.8	Modell 6, parvis sammenligning	122
10.8.1	Generelt	122
10.8.2	Presentasjon av resultater	122
10.8.3	En grundigere gjennomgang av momentforstørrelsesfaktoren	126
10.8.4	Presentasjon av resultater	126
10.8.5	Diskusjon	130
11	Konklusjon og forslag til forbedring, ramme	133
11.1	Vurdering og konklusjon av tilnærmede metoder, modell 1-3	133
11.2	Vurdering og konklusjon av tilnærmede metoder, modell 4-6	134
11.3	Helleslands metode med bruk av C_m og $C_{m,mod}$ for β_{eks} og β_{kon}	136
11.3.1	Generelt	136
11.3.2	Presentasjon av resultater	136
11.3.3	Diskusjon	138
11.4	Konklusjon og forslag til videre arbeid	144

A	Anvendte dataprogrammer	146
A.1	Latex	146
A.2	Xfig	146
A.3	Matlab	146
B	Matriseregning og forklaringer for enkeltstående	148
B.1	Generelt	148
B.2	Beregning etter 1.ordens teori	148
B.3	Beregning etter 2.ordens teori	151
B.4	Definisjon av noen faktorer som er benyttet.	153
B.5	Beregning av eksakt knekkfaktor β	153
C	Matriseregning og forklaringer for ramme	156
C.1	Generelt	156
C.2	Beregning etter 1. ordens teori	156
C.3	Beregning etter 2. ordens teori	159
C.3.1	Generelt	159
C.3.2	Lokal og global relasjon	160
C.4	Definisjon av faktorer benyttet i ramme	161
C.5	Beregning av eksakte knekkdefaktorer β_1 og β_2	162
D	Brukerstøtte for bruk av CD-ROM med vedlagte dataprogram-	
	mer	164
D.1	Generelt	164
D.2	Hvordan CD-ROM platen er organisert	165
	Litteraturhenvisninger	167
	Register	169

Notasjon

a	-momentarm.
b_0	-konstant, for vårt tilfelle satt til 2.
f_m	-momentforstørrelsesfaktor (alt., momentforsterkningsfaktor).
\bar{f}_m	-momentforstørrelsesfaktor (alt., momentforsterkningsfaktor).
$f_m = \bar{f}_m \frac{M_B}{M_{1B}}$	
f_{m1}	-momentforstørrelsesfaktor = f_m for $C_m = 1$.
$f_{m,eks}$	-eksakt momentforstørrelsesfaktor beregnet etter 2. ordens teori for en enkeltstående søyle.
$f_{m,Eksakt}$	-eksakt momentforstørrelsesfaktor beregnet etter 2. ordens teori for en søyle som er en del av et større system.
$f_{m,Hellesland}$	-tilnærmet momentforstørrelsesfaktor beregnet etter et forslag fra J. Hellesland.
$f_{m,Konvensjonell}$	-tilnærmet momentforstørrelsesfaktor beregnet etter konvensjonell metode.
$f_{m,Villette}$	-tilnærmet momentforstørrelsesfaktor beregnet etter et forslag fra M. Villette.
k	-uten indeks: $k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$.
k	-med indeks: rotasjonsstivhet av fjær.
k_A	-rotasjonsstivhet av fjær ved ende A for søylen.
k_B	-rotasjonsstivhet av fjær ved ende B for søylen.
\bar{k}_A	-dimensjonsløs rotasjonsstivhet av fjær ved ende A for søylen.
\bar{k}_B	-dimensjonsløs rotasjonsstivhet av fjær ved ende B for søylen.
k_{1B}	-rotasjonsstivhet av fjær ved ende B for søyle 1.
k_{2B}	-rotasjonsstivhet av fjær ved ende B for søyle 2.
\bar{k}_{1B}	-dimensjonsløs rotasjonsstivhet av fjær ved ende B for søyle 1.
\bar{k}_{2B}	-dimensjonsløs rotasjonsstivhet av fjær ved ende B for søyle 2.
k_{bA}	-rotasjonsstivhet av fjær ved ende A som erstatter bjelke A .
k_{bB}	-rotasjonsstivhet av fjær ved ende B som erstatter bjelke B .
k_{bC}	-rotasjonsstivhet av fjær ved ende C som erstatter bjelke C .
\bar{k}_{bA}	-dimensjonsløs rotasjonsstivhet av fjær ved ende A som erstatter bjelke A .
\bar{k}_{bB}	-dimensjonsløs rotasjonsstivhet av fjær ved ende B som erstatter bjelke B .
\bar{k}_{bC}	-dimensjonsløs rotasjonsstivhet av fjær ved ende C som erstatter bjelke C .
$p = \frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	
$q = \frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	
r_1	-første ordens momentgradient for enkeltstående søyle.

$r_1 = -\frac{M_{1A}}{M_{1B}}$	-2. ordens momentgradient for enkeltstående søyle.
r	
$r = -\frac{M_A}{M_B}$	-første ordens momentgradient for system, søyle 1.
$r_{1,1}$	
$r_{1,1} = -\frac{M_{1AB}}{M_{1BA}}$	-første ordens momentgradient for system, søyle 2.
$r_{1,2}$	
$r_{1,2} = -\frac{M_{1CB}}{M_{1BC}}$	-2. ordens momentgradient for system, søyle 1.
$r_{2,1}$	
$r_{2,1} = -\frac{M_{AB}}{M_{BA}}$	-2. ordens momentgradient for system, søyle 2.
$r_{2,2}$	
$r_{2,2} = -\frac{M_{CB}}{M_{BC}}$	
$r_{1,betraktet}$	-1. ordens momentgradient i søylen som blir betraktet.
$r_{1,nabo}$	-1. ordens momentgradient i nabosøylen.
x	-koordinat i x retning (lengderetningen til søylen).
y	-koordinat i y retning (på tvers av søylenslengderetning).
u	-forskyvning i x retning.
v	-forskyvning i y retning.
v'	-den deriverte av forskyvningen i y retning.
v''	-den dobbeltderiverte av forskyvningen i y retning.
A	-areal.
C_m	-momentgradientfaktor.
$C_{m,mod}$	-modifisert momentgradientfaktor.
$C_{m,s}$	-momentgradientfaktor, for sinusformet 1. ordens momentgradient.
$C_{m,u}$	-momentgradientfaktor, for uniform 1. ordens momentgradient.
EI	-bøyetivhet i søyle.
EI_1	-bøyetivhet søyle 1.
EI_2	-bøyetivhet søyle 2.
EI_b	-bøyetivhet i bjelke.
EI_{bA}	-bøyetivhet bjelke A.
EI_{bB}	-bøyetivhet bjelke B.
EI_{bC}	-bøyetivhet bjelke C.
G	-motstand fleksibilitets parameter.
G_A	-stivhetsforhold ved ende A for søylen.
G_B	-stivhetsforhold ved ende B for søylen.
L	-lengde av søyle.
L_1	-lengde av søyle 1.
L_2	-lengde av søyle 2.
L_b	-lengde av bjelke.
L_e	-knekk lengde, effektiv lengde.
$L_e = \beta L$	
L_{e1}	-knekk lengde for søyle 1.

M_1	-1. ordens momenter.
M_{1A}	-1. ordens moment ved ende A for enkelt søyle.
M_{1B}	-1. ordens moment ved ende B for enkelt søyle.
M_{1AB}	-1. ordens moment ved ende A retning B for søyle tilhørende et system.
M_{1BA}	-1. ordens moment ved ende B retning A for søyle tilhørende et system.
M_{1BC}	-1. ordens moment ved ende B retning C for søyle tilhørende et system.
M_{1CB}	-1. ordens moment ved ende C retning B for søyle tilhørende et system.
M	-totale momenter (inkl. 2. ordens virkning).
M_A	-totale momenter ved ende A for enkelt søyle.
M_B	-totale momenter ved ende B for enkelt søyle.
M_{AB}	-totale momenter ved ende A retning B for søyle tilhørende et system.
M_{BA}	-totale momenter ved ende B retning A for søyle tilhørende et system.
M_{BC}	-totale momenter ved ende B retning C for søyle tilhørende et system.
M_{CB}	-totale momenter ved ende C retning B for søyle tilhørende et system.
$M(x)$	-totale momenter som funksjon av x .
\bar{M}_x	-dimensjonsløst totalt moment.
$\bar{M}_x = \frac{M(x)}{M_{1B}}$	
M_{maks}	-det største totale momentet langs en søyle.
\tilde{M}	-ytre moment.
\tilde{M}_A	-ytre moment ved ende A .
\tilde{M}_B	-ytre moment ved ende B .
\tilde{M}_C	-ytre moment ved ende C .
N	-aksialkraft i en søyle; positiv som trykk.
N_1	-aksialkraft i søyle 1.
N_2	-aksialkraft i søyle 2.
N_E	-Eulerlasten for en leddlagret stav.
$N_E = \pi^2 EI / L^2$	
N_{kr}	-kritisk aksialkraft i en søyle.
$N_{kr} = \pi^2 EI / L_e^2$	
$Q_{12} = \frac{\alpha_{E1}}{\alpha_{E2}}$	$\left(\frac{(NL)_1(EI/L)_2}{(NL)_2(EI/L)_1} \right)$.
$S - S$	-symmetriakse.
V	-Kraft som virker på tvers av søylens lengderetning.
$\alpha = N/N_{kr}$	-(kalles gjerne stabilitetsindeksen).
$\alpha_E = N/N_E$	

β	-knekk lengdefaktor.
β_1	-knekk lengdefaktor for søyle 1.
β_2	-knekk lengdefaktor for søyle 2.
β_{eks}	-eksakt knekk lengdefaktor.
$\beta_{eks,1}$	-eksakt knekk lengdefaktor for søyle 1.
$\beta_{eks,2}$	-eksakt knekk lengdefaktor for søyle 2.
β_{kon}	-konvensjonell knekk lengdefaktor.
$\beta_{kon,1}$	-konvensjonell knekk lengdefaktor for søyle 1.
$\beta_{kon,2}$	-konvensjonell knekk lengdefaktor for søyle 2.
γ_{kr}	-kritisk lastmultiplikator.
ϕ_A	-rotasjon ved ende A for en enkeltsøyle.
ϕ_B	-rotasjon ved ende B for en enkeltsøyle.

Figurer

1.1	Oversikt over søler som skal studeres (a, b og c), ved hjelp av idealisert tilfelle, (d).	4
1.2	Oversikt over rammen som skal studeres, (a), ved hjelp av idealisert tilfelle, (b).	5
2.1	Utbøyd søyle -(a) Stavendekrefter, (b) Snittkrefter. Figuren er hentet fra [5].	8
2.2	Rettvinklet trekant, visualisering av ligning 2.13	11
2.3	Noen mulige momentforløp ved forskjellige aksialkraftnivåer. Figuren er hentet fra [5].	12
2.4	Noen forskjellige valg av 1. ordens momentgradienter.	13
2.5	Momentkurver for søyletilfellet vist i figur 1.1(b), der det er benyttet $\bar{k}_A = 10000$ og $\bar{k}_B = 0$	15
2.6	Momentkurver for søyletilfellet vist i figur 1.1(c), der det er benyttet ($\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$).	16
2.7	Maksimalt moment, f_m , for søyletilfellet vist i figur 1.1(b), der det er benyttet $\bar{k}_A = 10000$ og $\bar{k}_B = 0$ med økende α_E	17
2.8	Maksimalt moment, f_m , for søyletilfellet vist i figur 1.1(c), der det er benyttet $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$ med økende α_E	17
2.9	Maksimalmomentkurve, f_m , for økende aksialkraft i form av α_E , med $\bar{k}_A = 10000$, $\bar{k}_B = 0$ og 1. ordens momentgradient $r_1 = -1$. Totale endemomenter (M_A og M_B) dividert på 1. ordens endemoment i ende B , (M_{1B}) er vist med M_B/M_{1B} og M_A/M_{1B} . Det kommer noe utydelig frem, med det er slik at M_A/M_{1B} etter en stund overlapper kurven for f_m	18
2.10	Momentkurve for $\bar{k}_A = 10000$, $\bar{k}_B = 0$ og $r_1 = -1$	19
2.11	Maksimalmomentkurve, f_m , for økende aksialkraft i form av α_E , med $\bar{k}_A = 10000$, $\bar{k}_B = 0$ og 1. ordens momentgradient $r_1 = -1$. Totale endemomenter (M_A og M_B) dividert på 1. ordens endemoment i ende B , (M_{1B}) er vist med M_B/M_{1B} og M_A/M_{1B} . I tillegg er kx_m , kL og $kx_m + \pi$ plottet.	20

2.12	Sirkel med radius $R = 1$ (a), og fortegnene til de trigonometriske funksjonene i de fire kvadratene er angitt i (b).	21
2.13	Maksimalmomentkurve, f_m , for økende aksialkraft i form av α_E , med $\bar{k}_A = 10000$, $\bar{k}_B = 0$ og 1. ordens momentgradient $r_1 = -1$. Totale endemomenter (M_A og M_B) dividert på 1. ordens endemoment i ende B , (M_{1B}) er vist med M_B/M_{1B} og M_A/M_{1B} . Her er maksimalt moment plottet uten hensyn til fortegnskifte av trigonometriske funksjoner.	22
3.1	Søyle undersøkt av Euler	25
3.2	Euler-søylen	26
3.3	Knekkformer og knekk lengder for en enkelt søyle for elementærtilfeller. Knekk lengdefaktoren er representert med konstanten forran L	28
3.4	Fastholdt søyle med to rotasjonsfjærer, idealisert modell (a). Eksempel på virkelig modell (b).	29
3.5	Endemotstandsbegrensning	32
4.1	Eksempel på to mulige lastvirkninger.	35
4.2	System bestående av to søyler, tre fjærer og ytre momenter.	35
4.3	Kurver for maksimalt moment, f_m , i søyle 1 når: $\bar{k}_A = \bar{k}_B = \bar{k}_C = 1$	36
4.4	Kurver for maksimalt moment, f_m , i søyle 1 når: $\bar{k}_A = \bar{k}_B = \bar{k}_C = 2$	37
6.1	Leddlagret søyle med 1. ordens endemomenter (a), søyle med kjente totale endemomenter (b).	41
6.2	C_m som funksjon av r_1	43
6.3	C_m som funksjon av r_1 og α	45
6.4	C_m som funksjon av r_1 og α	46
7.1	To etasjes søyle (a), med "isolert" betraktning (b).	49
8.1	Beregningene foretas der den tilnærmede kurven gir $f_m = 1.25$ og 1.5.	53
8.2	Momentforstørrelsesfaktor, f_m , eksakt og tilnærmet for tilfelle 1. Tilnærmet kurve er beregnet etter <i>konvensjonell</i> metode. For å simulere fri innspenning i endene er det valgt å bruke $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.0001$	56
8.3	Momentforstørrelsesfaktor, f_m , eksakt og tilnærmet for tilfelle 1. Tilnærmet kurve er beregnet etter et forslag fra Hellesland, <i>Hellesland</i> metode. For å simulere fri innspenning er det valgt å bruke $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.0001$	60

8.4	Momentforstørrelsesfaktor, f_m , eksakt og tilnærmet for tilfelle 1. Tilnærmet kurve er beregnet etter forslag fra Villette. For å simulere fri innspenning er det valgt å bruke $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.0001$	65
9.1	Søyler med aksilkraft, bøyelinje og symmetriakse (S-S).	71
9.2	Søyler med 1. ordens momentgradient og symmetriakse (S-S).	71
9.3	$C_{m,mod}$ som funksjon av α , r_1 og β , for dette tilfellet er $\beta = 0.5$	72
9.4	$C_{m,mod}$ som funksjon av α , r_1 og β , for dette tilfellet er $\beta = 0.7$	73
9.5	$C_{m,mod}$ som funksjon av α , r_1 og β , for dette tilfellet er $\beta = 1$	73
9.6	Momentforstørrelsesfaktor, f_m , eksakt og tilnærmet for tilfelle 1. Tilnærmet kurve er beregnet etter forslag fra Helleland [12], med bruk av $C_{m,mod}$. For å simulere fri innspenning er det valgt å bruke $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.0001$	76
10.1	To etasjes ramme (a) med idealisering (b).	81
10.2	Oversikt over metodene, og hvordan de sammenlignes.	82
10.3	Idealisert tilfelle av modell 1.	84
10.4	Idealisert tilfelle av modell 2.	85
10.5	Idealisert tilfelle av modell 3.	86
10.6	Forklaring av tabeller som benyttes i modell 1 - 3, det vises at alle verdier sammenlignes ved $f_{m,Konvensjonell} = 1,5$. Indeksen "i" angir søylenummeret, "valg" angir <i>eks</i> eller <i>kon</i>	88
10.7	Eksempel på hvordan målingene for modell 4 - 6 foretas. Resultatene måles ved den verdi av α_{Ei} som gir $f_{m,i} = 1.5$ beregnet tilnærmet med bruk av $\beta_{kon,i}$. Indeksen "i" angir søylen som betraktes.	89
10.8	f_m for modell 1 (se side 83), eksakt og tilnærmet for søyle 1 og 2.	91
10.9	f_m for modell 2 (se side 84), eksakt og tilnærmet for søyle 1 og 2.	92
10.10	f_m for modell 3 (se side 85), eksakt og tilnærmet for søyle 1 og 2.	93
10.11	f_m for modell 1 (se side 83), eksakt og tilnærmet for søyle 1 og 2.	95
10.12	f_m for modell 2 (se side 84), eksakt og tilnærmet for søyle 1 og 2.	96
10.13	f_m for modell 3 (se side 85), eksakt og tilnærmet for søyle 1 og 2.	97
10.14	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 1, eksakt, og tilnærmet med β_{eks}	105
10.15	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 1, eksakt, og tilnærmet med β_{kon}	106
10.16	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 2, eksakt, og tilnærmet med β_{eks}	106

10.17	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 2, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .	107
10.18	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 3, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .	107
10.19	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 3, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .	108
10.20	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 4, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .	108
10.21	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 4, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .	109
10.22	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 1, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .	116
10.23	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 1, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .	117
10.24	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 2, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .	117
10.25	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 2, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .	118
10.26	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 3, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .	118
10.27	Momentforstørrelsesfaktor eksempel 3, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .	119
10.28	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 4, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .	119
10.29	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 4, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .	120
10.30	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 1, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .	127
10.31	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 1, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .	128
10.32	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 2, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .	128
10.33	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 2, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .	129
10.34	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 3, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .	129
10.35	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 3, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .	130

10.36	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 4, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .	130
10.37	Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 4, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .	131
11.1	f_m modell 1, søyle 1, med $C_m, C_{m,mod}, \beta_{eks}, \beta_{kon}$ og var. av $r_{1,1}$.	138
11.2	f_m modell 1, søyle 2, med $C_m, C_{m,mod}, \beta_{eks}, \beta_{kon}$ og var. av $r_{1,1}$.	139
11.3	f_m modell 2, søyle 1, med $C_m, C_{m,mod}, \beta_{eks}, \beta_{kon}$ og var. av $r_{1,1}$.	140
11.4	f_m modell 2, søyle 2, med $C_m, C_{m,mod}, \beta_{eks}$ og β_{kon} , med $r_{1,1} = 0.5$ og $r_{1,2} = 1$.	141
11.5	f_m modell 3, søyle 1, med $C_m, C_{m,mod}, \beta_{eks}, \beta_{kon}$ og var. av $r_{1,1}$.	142
11.6	f_m modell 3, søyle 2, med $C_m, C_{m,mod}, \beta_{eks}$ og β_{kon} , med $r_{1,1} = 0.5$ og $r_{1,2} = 1$.	143
B.1	Søyle som skal undersøkes.	149
B.2	Element med 4 frihetsgrader	149
B.3	Søyle med 2 globale rotasjonsfrihetsgrader θ_1 og θ_2 (a). Global og lokal modell med frihetsgrader og tilhørende krefter for hhv. figur (b) og (c).	150
C.1	To etasjes søyle med globale frihetsgrader.	157
C.2	Eksempel på hvordan determinanten forandrer seg med økende aksialkraft. $\bar{k}_A = \bar{k}_B = \bar{k}_C = q = p = r_{1,1} = r_{1,2} = 1$	163

Tabeller

8.1	Tilfelle 1 (med $\bar{k}_A = 0.0001$ og $\bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.25$	55
8.2	Tilfelle 1 (med $\bar{k}_A = 0.0001$ og $\bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$	55
8.3	Tilfelle 2 (med $\bar{k}_A = 10000$ og $\bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.25$	57
8.4	Tilfelle 2 (med $\bar{k}_A = 10000$ og $\bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$	57
8.5	Tilfelle 3 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$). Resultatene er målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.25$	57
8.6	Tilfelle 3 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$). Resultatene er målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$	58
8.7	Tilfelle 1 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.25$	61
8.8	Tilfelle 1 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$	61
8.9	Tilfelle 2 (med $\bar{k}_A = 10000$ og $\bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.25$	61
8.10	Tilfelle 2 (med $\bar{k}_A = 10000$ og $\bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$	62
8.11	Tilfelle 3 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.25$	62
8.12	Tilfelle 3 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$	62
8.13	Tilfelle 1 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Villette} = 1.25$	66
8.14	Tilfelle 1 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Villette} = 1.5$	66
8.15	Tilfelle 2 (med $\bar{k}_A = 10000$ og $\bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Villette} = 1.25$	66

8.16	Tilfelle 2 (med $\bar{k}_A = 10000$ og $\bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Villette} = 1.5$.	67
8.17	Tilfelle 3 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$). Resultatene er målt ved $f_{m,Villette} = 1.25$.	67
8.18	Tilfelle 3 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$). Resultatene er målt ved $f_{m,Villette} = 1.5$.	67
9.1	Tilfelle 1 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.25$.	75
9.2	Tilfelle 1 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$.	77
9.3	Tilfelle 2 (med $\bar{k}_A = 10000$ og $\bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.25$.	77
9.4	Tilfelle 2 (med $\bar{k}_A = 10000$ og $\bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$.	77
9.5	Tilfelle 3 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.25$.	78
9.6	Tilfelle 3 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$.	78
10.1	f_m for modell 1 (se side 83), søyle 1, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.	91
10.2	f_m for modell 1 (se side 83), søyle 2, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.	91
10.3	f_m for modell 2 (se side 84), søyle 1, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.	92
10.4	f_m for modell 2 (se side 84), søyle 2, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.	92
10.5	f_m for modell 3 (se side 85), søyle 1, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.	93
10.6	f_m for modell 3 (se side 85), søyle 2, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.	93
10.7	f_m for modell 1 (se side 83), søyle 1, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.	96
10.8	f_m for modell 1 (se side 83), søyle 2, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.	96
10.9	f_m for modell 2 (se side 84), søyle 1, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.	97
10.10	f_m for modell 2 (se side 84), søyle 2, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.	97
10.11	f_m for modell 3 (se side 85), søyle 1, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.	98
10.12	f_m for modell 3 (se side 85), søyle 2, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.	98
10.13	Momentforstørrelsesfaktor modell 4 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 1/500$, se side 86), søyle 1, sammenligning ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .	100
10.14	Momentforstørrelsesfaktor modell 4 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 1/500$, se side 86), søyle 2, sammenligning ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .	101

10.15	Momentforstørrelsesfaktor modell 4 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 1/500$, se side 86), søyle 1, sammenligning ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .	101
10.16	Momentforstørrelsesfaktor modell 4 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 1/500$, se side 86), søyle 2, sammenligning ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .	102
10.17	Momentforstørrelsesfaktor modell 4 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 1/500$, se side 86), søyle 1, sammenligning ved $f_{m,Villette} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .	102
10.18	Momentforstørrelsesfaktor modell 4 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 1/500$, se side 86), søyle 2, sammenligning ved $f_{m,Villette} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .	103
10.19	Nummerering av eksemplene som skal gjennomgås.	104
10.20	Faktorer som benyttes i eksempel 1.	105
10.21	Faktorer som benyttes i eksempel 2.	105
10.22	Faktorer som benyttes i eksempel 3.	106
10.23	Faktorer som benyttes i eksempel 4.	107
10.24	Momentforstørrelsesfaktor modell 5 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 2$, se side 86), søyle 1, sammenligning ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .	112
10.25	Momentforstørrelsesfaktor modell 5 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 2$, se side 86), søyle 2, sammenligning ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .	112
10.26	Momentforstørrelsesfaktor modell 5 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 2$, se side 86), søyle 1, sammenligning ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .	113
10.27	Momentforstørrelsesfaktor modell 5 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 2$, se side 86), søyle 2, sammenligning ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .	113
10.28	Momentforstørrelsesfaktor modell 5 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 2$, se side 86), søyle 1, sammenligning ved $f_{m,Villette} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .	114
10.29	Momentforstørrelsesfaktor modell 5 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 2$, se side 86), søyle 2, sammenligning ved $f_{m,Villette} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .	114
10.30	Faktorer som benyttes i eksempel 1.	116
10.31	Faktorer som benyttes i eksempel 2.	116
10.32	Faktorer som benyttes i eksempel 3.	117
10.33	Faktorer som benyttes i eksempel 4.	118

10.34	Momentforstørrelsesfaktor modell 6 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 20$, se side 86), søyle 1, sammenligning ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .	123
10.35	Momentforstørrelsesfaktor modell 6 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 20$, se side 86), søyle 2, sammenligning ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .	123
10.36	Momentforstørrelsesfaktor modell 6 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 20$, se side 86), søyle 1, sammenligning ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .	124
10.37	Momentforstørrelsesfaktor modell 6 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 20$, se side 86), søyle 2, sammenligning ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .	124
10.38	Momentforstørrelsesfaktor modell 6 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 20$, se side 86), søyle 1, sammenligning ved $f_{m,Villette} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .	125
10.39	Momentforstørrelsesfaktor modell 6 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 20$, se side 86), søyle 2, sammenligning ved $f_{m,Villette} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .	125
10.40	Faktorer som benyttes i eksempel 1.	127
10.41	Faktorer som benyttes i eksempel 2.	127
10.42	Faktorer som benyttes i eksempel 3.	128
10.43	Faktorer som benyttes i eksempel 4.	129
11.1	f_m modell 1 (se side 83), søyle 1, ved $f_{m,Eksakt} = 1.5$.	137
11.2	f_m modell 1 (se side 83), søyle 2, ved $f_{m,Eksakt} = 1.5$.	138
11.3	f_m modell 2 (se side 84), søyle 1, ved $f_{m,Eksakt} = 1.5$.	139
11.4	f_m modell 2 (se side 84), søyle 2, ved $f_{m,Eksakt} = 1.5$.	140
11.5	f_m modell 3 (se side 85), søyle 1, ved $f_{m,Eksakt} = 1.5$.	141
11.6	f_m modell 3 (se side 85), søyle 2, ved $f_{m,Eksakt} = 1.5$.	141

Kapittel 1

Grunnleggende informasjon om oppgaven

1.1 Problemstilling

I rammekonstruksjoner, satt sammen av søyler og bjelker (plater o.l.) vil belastningene på bjelkene føre til momentbelastning også i søylene. I Norske og utenlandske standarder for beregning og dimensjonering av konstruksjoner i forskjellig materiale (stål, aluminium, armert betong, tre osv.), er det beskrevet en definisjon på hva som kan betraktes som korte søyler, og søyler som kan betraktes som slanke. For de søyler som kan betraktes som korte, vil maksimalt moment vanligvis oppstå ved søylens ender, og kan da beregnes etter 1. ordens konvensjonell teori. Dersom søylene er av den slanke typen, vil 2. ordens lastvirkninger kunne føre til at maksimalt moment i søylene opptrer mellom søylens ender. 2. ordens lastvirkning vil si at det innkommer et ekstra momentbidrag til søylen som skyldes aksialkreftene på søylens utbøyning. Med andre ord kan man si at totalt moment som oppstår i søylen er 1.ordens momentet pluss momentet som skyldes 2. ordens lastvirkning. For å kunne beregne 2. ordens lastvirkning benyttes det 2. ordens bøyningsteori. Når det utføres statiske analyser av slike konstruksjoner, er det viktig at maksimalt moment beregnes riktig, og i hvert fall til den sikre siden. Er maksimalt moment beregnet til den usikre siden, kan det føre til store konsekvenser for dimensjoneringen av konstruksjonen.

I standardene nevnt ovenfor gis det en tilnærmet metode for beregning av maksimalt moment, som er underbygget av omfattende forskningsresultater og som stort sett er akseptert i alle lands standarder. Metoden behandler kompliserte prob-

lemstillinger og krever ikke bruk av avanserte dataprogrammer. Dette er ønskelig da en nøyaktig beregning etter 2. ordens teori kan bli ganske omfattende. Det er også slik i de europeiske standardene som er under utvikling (eksempelvis Eurocode 2 og Eurokode 3 for hhv. konstruksjoner i armert betong og stål), disse vil også bli gjort gjeldende for Norge. Metoden som er beskrevet her er i hovedsak utviklet for konstruksjoner som gir positiv rotasjonsinnspenning i søylene, som ansees som “vanlige”. Men i noen tilfeller kan det oppstå negativ rotasjonsinnspenning. Spørsmålet er da om den tilnærmede metoden gir tilstrekkelig nøyaktighet, og om den gir resultater til den sikre eller usikre siden. Dette er kjernen til denne oppgaven.

1.2 Formål

Hensikten med denne oppgaven er å foreta en undersøkelse av nøyaktigheten til konvensjonelle tilnærmede 2. ordens metoder for beregning av maksimalt moment i slanke søyler for et utvalg av noen “vanlige” og “uvanlige” rammekonstruksjoner (det vil senere bli definert noen modeller som vil være grunnlaget for undersøkelsen). Og om mulig etablere gyldighetsgrenser for eksisterende metoder, eventuelt foreslå forbedrede metoder. Hovedvekten i undersøkelsen blir lagt på tilfeller der søylene får negativ rotasjonsinnspenning.

1.3 Løsningsmetode

Å kjenne til det maksimale momentet som opptrer i en enkelt søyle, eller i en søyle som er en del av et større system, er vesentlig for dimensjonering av konstruksjoner. I denne oppgaven skal hovedsakelig tre tilnærmede metoder for beregning av maksimalt moment undersøkes, og resultatene blir sammenlignet med eksakt utregning. Disse tilnærmede metodene blir gjennomgått siden, nærmere bestemt i kapittel 6 på side 40.

Til å begynne med startes det med en gjennomgang av nyttig teori som er nødvendig for beregningene som skal foretas for en uforskyvelig enkelt søyle, altså beregning av maksimalt moment ved hjelp av ovennevnte metoder. Det hjelper til med å få en klar forståelse av hva som fysisk skjer, og i noen tilfeller kan det oppstå noen fallgruver som gjør at resultatene som fremkommer kan virke noe forvirrende, dette blir det satt søkelys på senere, og en diskusjon vil avklare en eventuell forvirring. Ved beregning av maksimalt moment for denne søylen

(uforskyvelig enkeltsøyle), skal søylen grundig undersøkes og modeleres med tre forskjellige randbetingelser, disse er vist i figur 1.1 (a), (b) og (c), der det vises en fritt opplagert søyle 1.1a. Søyle som er fastspenst ved ende A og fritt opplagert ved ende B 1.1b. Søyle som er fast inspent ved begge ender 1.1c. For vilkårlig valg av innspenning kan søylen modeleres ved hjelp av fjærer (rotasjonsfjærer) plassert i hver ende av søylen. Ved så å definere fjærstivhetene k_A og k_B , som vist i figur 1.1d, kan de tre randbetingelsene nevnt over tilfredsstilles. Alle søylene har lengde L , elastisitetsmodul E , treghetsmoment I og aksialkraft N . Det skal senere bestemmes hva disse verdiene skal være. I avslutningen til denne delen har jeg kommet med et forslag til en tilnærmet metode, den er vistnok basert på en av de tre metodene nevnt ovenfor, og resultatene som da fremkommer blir sammenlignet på lik linje som de andre. Jeg har ikke valgt å gi metoden noe nytt navn, men er å anse som en eventuell videreutvikling av eksisterende metode.

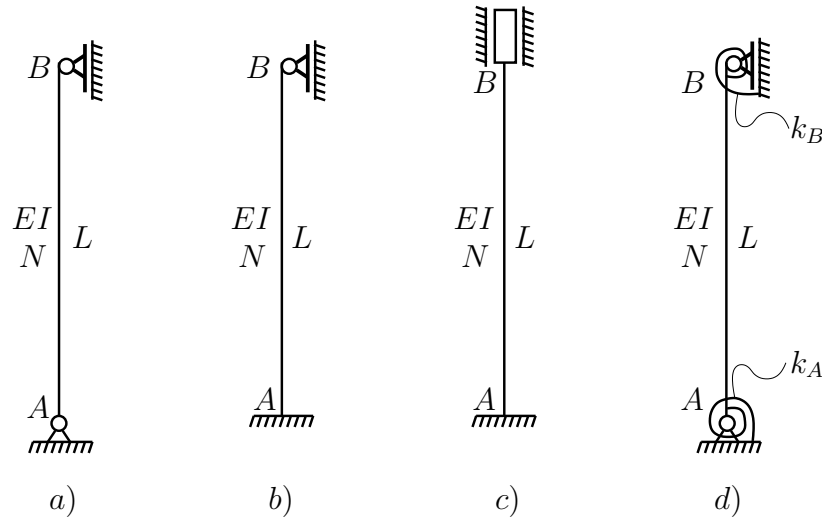
I oppgaven er det i hovedsak to typer beregninger som foretas for de tilnærmede metodene: En beregningsmetode som er basert på bruk av “eksakt knekk lengdefaktor”, og en metode som er basert på bruk av knekk lengdefaktor beregnet etter konvensjonell fordeling av stivheter som møtes i et knutepunkt, såkalt “konvensjonell knekk lengdefaktor”.

For å klargjøre hva som menes med knekk lengdefaktor, kan jeg si at for en søyle med en bestemt knekk lengde L_e , kan denne uttrykkes med en knekk lengdefaktor β , multiplisert med lengden av søylen L , mer om dette siden.

Når enkeltsøylen nevnt ovenfor betraktes, benyttes det kun eksakt knekk lengdefaktor fordi den ikke blir berørt av stivhetsproblematikken. Eksakt og konvensjonell knekk lengdefaktor er like for dette tilfellet. Konvensjonell knekk lengdefaktor benyttes derfor kun når det betraktes et system (konstruksjon) bestående av flere søyler, altså fordeling av stivhet mellom søyler blir mulig. For søyler som er del av et større system kan det enten benyttes eksakt systemknekk lengdefaktor, eller konvensjonell knekk lengdefaktor (for søylen som betraktes). Så for å være helt konkret blir det kun benyttet eksakt knekk lengdefaktor i alle beregningene som utføres på enkeltsøylen nevnt ovenfor (konvensjonell knekk lengdefaktor gir like resultater for dette tilfellet). Resultatene blir forskjellige først når det studeres ett system der stivhetsproblematikken oppstår. For de tre enkeltsøylene som undersøkes, studeres kun tilfeller med positiv innspenning, negativ innspenning blir tema når beregningene utføres på et større system.

Senere i oppgaven skal det betraktes et system som består av en uforskyvelig to etasjes ramme, se figur 1.2a på side 5, som kan forenkles (ved hjelp av symmetribetraktninger) til det idealiserte tilfellet vist i figur 1.2b. For det idealiserte tilfellet er bjelkestivhetene blitt erstattet med fjærstivheter. Igjen benyttes de tilnærmede metodene for beregning av maksimalt moment i søylene, inkludert mitt forslag.

Resultatene blir deretter sammenlignet med eksakt utregning. Det er i denne delen av oppgaven som mesteparten av kjernematerialet ligger, i tillegg til å bruke eksakt knekkleingdefaktor, blir det også brukt konvensjonell knekkleingdefaktor (for de tilnærmede metodene), og i tilfeller der negativ innspenning oppstår, blir en nøye diskusjon gjennomgått. Det er utallige mange mulige forhold som kan legges til grunn for å simulere en “vanlig” og “uvanlig” konstruksjon, så jeg tar først for meg det generelle tilfellet for rammen nevnt ovenfor, for senere å definere noen modeller som blir grunnlaget for undersøkelsen.

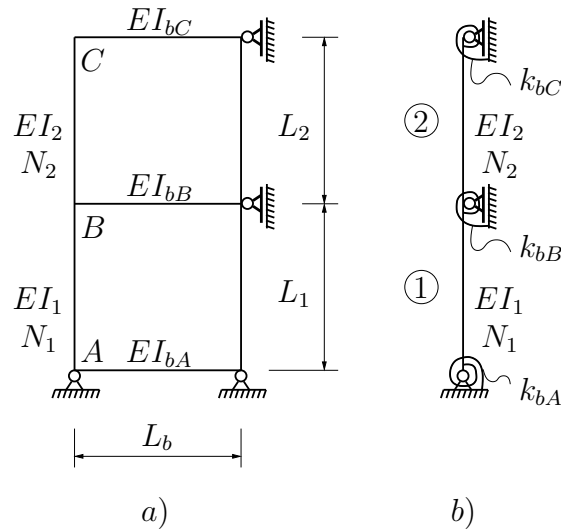


Figur 1.1: Oversikt over søler som skal studeres (a, b og c), ved hjelp av idealisert tilfelle, (d).

De faktorer som er med på å bestemme størrelsen til det maksimale momentet, tilnærmet eller eksakt, er noe varierende avhengig av hvilken metode som benyttes, og om det betraktes en enkeltstøyle eller et system bestående av bjelker og søyler. Nyttig teori vil fremkomme i bakgrunnsteorien, som avsluttes med en kort og detaljert oversikt over de forskjellige metodene og hvilke faktorer som benyttes.

1.4 Organisering av oppgaven

Tidligere i innledningen ble det klart hva som er problemstillingen og formålet med oppgaven. Videre fulgte en løsningsmetode og en kort oversikt over forskjellige beregningsmetoder og faktorer som i denne sammenheng er essensielle. Etter innledningen starter bakgrunnsteorien, her vil all nødvendig teori bli pressnetert.



Figur 1.2: Oversikt over rammen som skal studeres, (a), ved hjelp av idealisert tilfelle, (b).

Teori som er “kjent fra før” blir også presentert her, og en referanse som angir hvor den spesifikke teorien er hentet fra, er selvsagt inkludert. I noen tilfeller der utledninger eller utregninger blir forholdsvis store, vil hovedpoengene bli belyst, mens selve systematikken og “gangen” blir gjennomgått i detalj i henvisne vedlegget. Bakgrunnsteorien er delt inn i seks kapitler, der to kapitler omhandler *eksakte* beregninger for en enkeltsøyle (2. ordens elastisk teori og knekning av søyle), to kapitler som tar for seg *eksakte* beregninger for et system bestående av bjelker og søyler (2. ordens elastisk teori og knekning av ramme), og til slutt to kapitler som tar for seg noen *tilnærmede* metoder for beregning av maksimale søylemoment, enten enkeltstående søyler eller søyler som er en del av et system. Hvert av disse kapitlene avsluttes med en liten diskusjon og en kort oppsummering. Resultatdelen som kommer til slutt er delt inn i to “deler”, en del som tar for seg beregninger utført på en enkeltsøyle, og avsluttes med en del som tar for seg beregninger utført på søyler i et system. Det er hovedsakelig i den sistnevnte delen kjernerresultatene ligger, mens første del kan ansees som en innledning. Det er først i resultatdelen at mitt forslag til ny metode blir presentert og studert. Etter resultatet avsluttes oppgaven med en diskusjon og et forslag til forbedring med en konklusjon og anbefaling.

I tillegg som er å finne bakerst i oppgaven er det fortalt litt om hvilke dataprogrammer som er benyttet, og i tillegg vist en del utregning som forklarer noe av grunnlaget til oppgaven. De mest interessante programmene som jeg har programmert og benyttet, er lagt ved på en cd-rom plate som er limt fast på

bakerste side, denne kan benyttes ved f.eks videre forskning på dette området.

Kapittel 2

Enkeltstående, 2. ordens elastisk teori

2.1 Generelt

I dette avsnittet skal det betraktes en enkeltstående, det skal gjøres rede for tilstrekkelig bakgrunnsstoff, nok til å få en fulstendig forståelse for det som følger. Det skal bl.a.gjøres noen utledninger, og der det er nødvendig også å foreta noen forutsetninger. Definisjoner og forklaring av kanskje uvante begreper omtales underveis.

Sentrale emner som momentforløp og maksimalt moment vil bli spesielt vektlagt, og noen eksempler med figurer er tatt med for å belyse viktige detaljer.

Til slutt avsluttes dette kapitlet med en liten diskusjon rundt matematikken og hva som fysisk skjer.

2.2 Søylenes utbøyningsform

Kjernestoffet i dette og neste kapittel er hentet fra [5] men er noe modifisert med hensyn på notasjonen.

Søylenes utbøyningsform og stavendekrefter kan lett bestemmes fra søylenes differensialligning. Løsningen av denne vil gi summen av 1. og 2. ordens effekter.

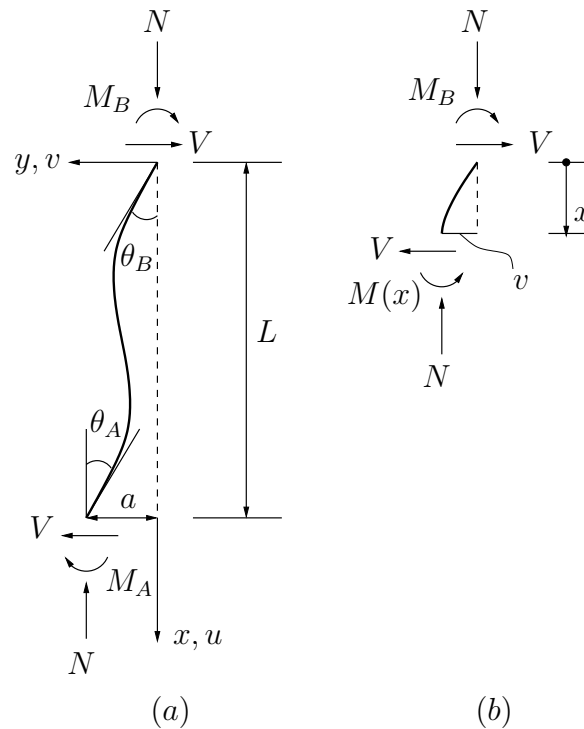
Ved forutsetning om at forskyvningene er små

$$(v')^2 \ll 1 \quad (2.1)$$

kan differensialligningen for søylen med konstant elastisk bøyestivhet EI i fig 2.1a gis ved

$$v'' = -\frac{M(x)}{EI} \quad (2.2)$$

hvor momenter $M = M(x)$ kan finnes fra en enkel likevektsbetraktning av den utbøyde søylen under.



Figur 2.1: Utbøyd søyle - (a) Stavendekrefter, (b) Snittkrefter. Figuren er hentet fra [5].

Momentlikevelt om ett snitt i avstand x (fig. 2.1b) gir

$$M(x) = M_B + Nv + Vx \quad (2.3)$$

Ligning 2.3 innsatt i ligning 2.2 gir

$$v'' + k^2 v = -\frac{M_B + Vx}{EI} \quad (2.4)$$

der

$$k^2 = \frac{N}{EI} \quad (2.5)$$

For $N > 0$ (trykkraft) har ligning 2.4 homogenløsningen

$$v_h = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) \quad (2.6)$$

og partikulærløsningen

$$v_p = -\frac{M_B + Vx}{N} \quad (2.7)$$

hvor skjærkraften også kan gis ved

$$V = -\frac{M_A + M_B + Na}{L} \quad (2.8)$$

Den totale søyleforskyvningen finnes da ved å summere homogen- og partikulærløsningen

$$v = v_h + v_p \quad (2.9)$$

C_1 og C_2 er konstanter og kan finnes ved hjelp av grensebetingelsene $v(0) = 0$ og $v(L) = a$ ved søylens ender. Etter litt mellomregning kan endelig utbøyning uttrykkes ved følgende relasjon (2.10, kan bla.a finnes i [5]).

$$v = \frac{ax}{L} + \frac{M_B}{N} \left[\frac{r - \cos(kL)}{\sin(kL)} \sin(kx) + \cos(kx) + (1 - r) \frac{x}{L} - 1 \right] \quad (2.10)$$

Her er forholdet r mellom endemomentene innført:

$$r = -\frac{M_A}{M_B} \quad (2.11)$$

For $N < 0$ (strekraft) gjelder fortsatt ligning 2.10 dersom \sin og \cos byttes ut med \sinh og \cosh henholdsvis. For endemomenter er det valgt å definere disse som positive når de dreier med urviseren (figur 2.1a). Dersom et av momentene virker motsatt av det som er vist i figuren blir altså momentforholdet (r) positivt.

2.3 Momentforløp og maksimalt moment

Forutsatt at utbøyning som funksjon av stavendemomentene er kjent, kan momentet i et vilkårlig snitt bestemmes fra ligning 2.2 og 2.10. To gangers derivering av ligning 2.10 og innsetting i ligning 2.2 gir

$$M(x) = M_B \left[\frac{r - \cos(kL)}{\sin(kL)} \sin(kx) + \cos(kx) \right] \quad (2.12)$$

Positivt snittmoment finnes i det snittet ($x = x_m$) hvor $\frac{dM(x)}{dx} = 0$. Dette gir

$$\tan(kx_m) = \frac{r - \cos(kL)}{\sin(kL)} \quad (2.13)$$

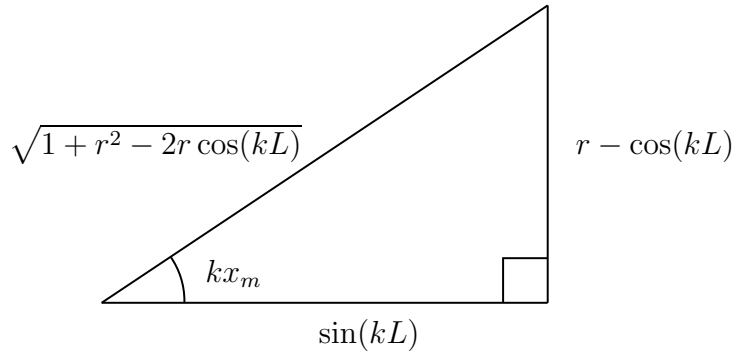
som innsatt i ligning 2.12 gir følgende uttrykk for maksimalt moment

$$M_{maks} = \frac{M_B}{\cos(kx_m)} = \bar{f}_m M_B \quad (2.14)$$

der det i mellomregningen er brukt

$$\sin^2(kx_m) + \cos^2(kx_m) = 1 \quad (2.15)$$

Ved å betrakte nevneren og telleren i brøken, ligning 2.13, som kortsidene i en rettvinklet trekant, kan hypotenusen uttrykkes som kvadratroten av summen av kvadratene av disse, dette har jeg illustrert i figur 2.2. Dermed kan “forstørrelsesfaktoren” \bar{f}_m for endemomentet også uttrykkes ved følgende relasjon (2.16, finnes bl.a. i [5]).



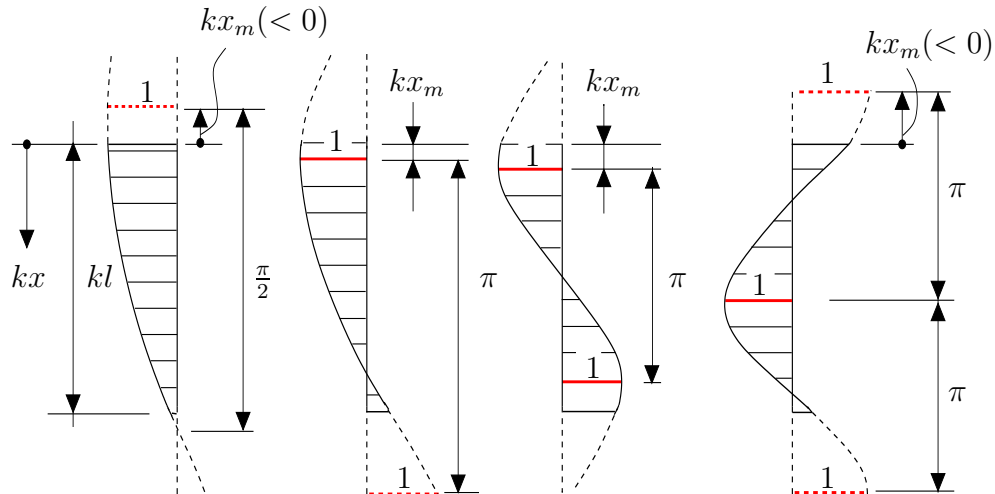
Figur 2.2: Rettvinklet trekant, visualisering av ligning 2.13

$$\bar{f}_m = \frac{1}{\cos(kx_m)} = \frac{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(kL)}}{\sin(kL)} \quad (2.16)$$

Noen typiske momentforløp er skissert i figur 2.3 på side 12. Figuren er hentet fra [5]. Søyelengden er representert ved kL (hvor k kan finnes fra ligning 2.5). Dersom kx_m , som finnes ved å ta arctan til ligning 2.13, eller $kx_m + \pi$ ikke gir maksimal “bølgeverdi” innenfor søylelengden kL betyr dette at søylens maksimale moment er gitt ved det største endemomentet. En mer detaljert diskusjon om beregning av maksimalt moment vil bli tema i kapittel 2.5 side 12.

2.4 Definisjon av 1.ordens momentgradient r_1

Definisjon av 1. ordens momentgradient, r_1 , altså forholdet mellom 1. ordens momenter, er vist ved relasjon 2.17, der det velges største 1.ordens moment alltid ved ende B av søylen. I figur 2.4 har jeg vist noen eksempler med en søyle med ytre momenter \tilde{M}_A og \tilde{M}_B med rotasjonsfjærer k_A og k_B , der forskjellig valg av r_1 er tatt til betraktning.



Figur 2.3: Noen mulige momentforløp ved forskjellige aksialkraftnivåer. Figuren er hentet fra [5].

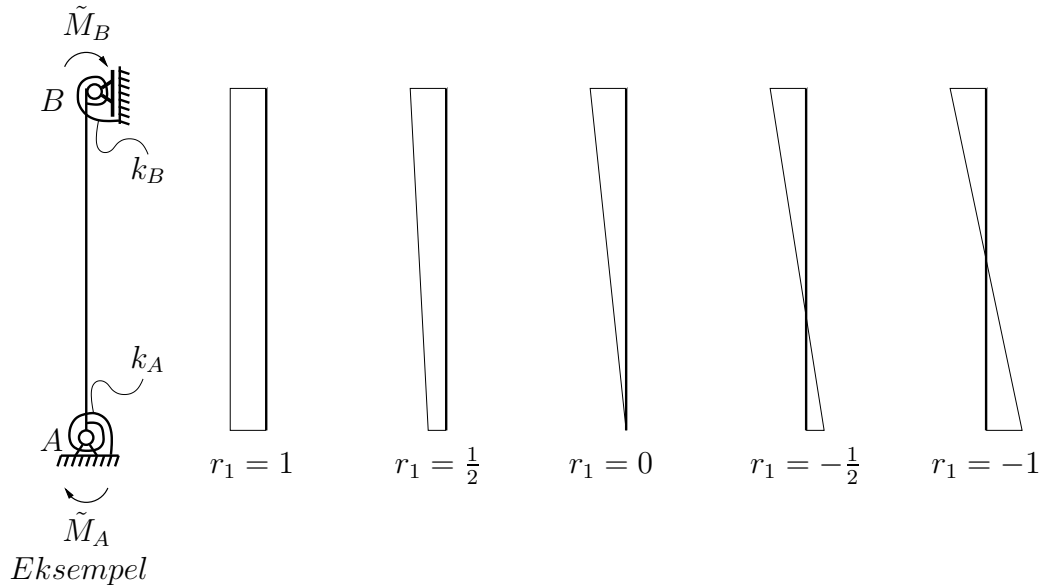
$$r_1 = -\frac{M_{1A}}{M_{1B}} \quad \text{der } \{-1 < r_1 < 1\} \quad (2.17)$$

2.5 Visualisering av momentforløp og maksimalt moment

2.5.1 Generelt

I en søyle med aksialkraft kan maksimalt moment opptre mellom endene selv om søylen kun er påkjent av endemomenter og aksialkraft. Når momentene beregnet etter 2. ordens teori er kjent ved søylens ender, kan et eventuelt maksimalt moment mellom endene beregnes fra ligning 2.14 på side 10.

Det kom også frem et uttrykk for momentforløpet (ligning 2.12 side 10), og jeg skal nå vise to eksempler på hvordan momentet over en søyle fordeles og forskyves med økende aksialkraft for forskjellig valg av r_1 .



Figur 2.4: Noen forskjellige valg av 1. ordens momentgradienter.

Ligning 2.12 og 2.14 gjøres hhv. først om til dimensjonsløs form på følgende måte

$$\bar{M}_X = \frac{M(x)}{M_{1B}} = \frac{M_B}{M_{1B}} \left[\frac{r - \cos(kL)}{\sin(kL)} \sin(kx) + \cos(kx) \right] \quad (2.18)$$

$$f_m = \frac{M_{maks}}{M_{1B}} = \frac{1}{\cos(kx_m)} \frac{M_B}{M_{1B}} = \bar{f}_m \frac{M_B}{M_{1B}} \quad (2.19)$$

der momentene er dividert på 1.ordens endemoment ved ende B , M_{1B} . Videre kommer det frem at for $x = 0$ gir $\bar{M}_{(x=0)} = \frac{M_B}{M_{1B}}$, og $x = L$ gir $\bar{M}_{(x=L)} = \frac{M_A}{M_{1B}}$ (i ligning 2.18). f_m er en dimensjonsløs *momentforstørrelsesfaktor* som forteller hvordan momentet forsterkes med økende aksiallast. Denne faktoren, f_m , er sentral i denne oppgaven, og i resultatdelen vil denne bli mye omtalt.

Ved hjelp av relasjonene

$$N_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \text{Knekklast for en leddlagret søyle, Eulerlast} \quad (2.20)$$

$$\alpha_E = \frac{N}{N_E} \quad (2.21)$$

$$kL = L\sqrt{\frac{N}{EI}} = \pi\sqrt{\alpha_E} \quad (2.22)$$

$$kx = kL\frac{x}{L} = \pi\sqrt{\alpha_E}\frac{x}{L} \quad (2.23)$$

kan ligning 2.18 gjøres om til å bli

$$\bar{M}_X = \frac{M_B}{M_{1B}} \left[\frac{r - \cos(\pi\sqrt{\alpha_E})}{\sin(\pi\sqrt{\alpha_E})} \sin(\pi\sqrt{\alpha_E}\frac{x}{L}) + \cos(\pi\sqrt{\alpha_E}\frac{x}{L}) \right] \quad (2.24)$$

For å vise eksemplene er det nødvendig og kjenne til $\frac{M_B}{M_{1B}}$, dette finnes detaljert utledet i tillegg B side 148, der $\frac{M_B}{M_{1B}}$ er representert ved relasjon B.12.

2.5.2 Eksempel med momentkurver

Søylene som er avbildet i figur 1.1(b) og (c) på side 4, undersøkes, og momentfordelingen for de to tilfellene gjennomgås.

I første tilfelle settes \bar{k}_A lik 10000 og \bar{k}_B lik 0, der

$$\bar{k}_i = \frac{k_i}{\frac{EI}{L}} \quad \text{der } i = A, B \quad (2.25)$$

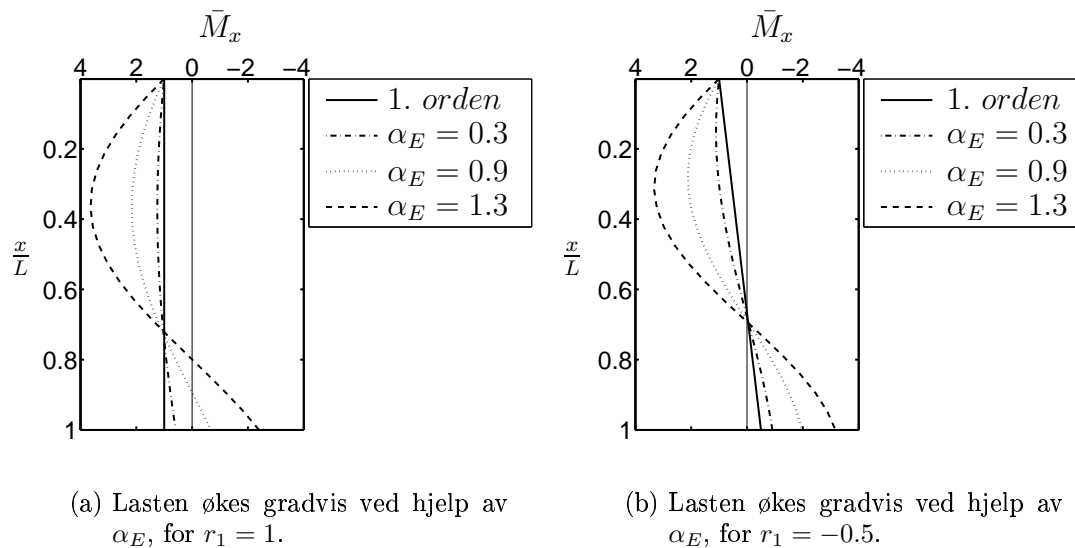
er en dimensjonsløs motstands stivhets parameter (k_i er dividert med stivheten $\frac{EI}{L}$ for søylen). Altså en økning av \bar{k}_i øker graden av fastholdelse (innspenning).

Hvis \bar{k}_A hadde vært “uendelig” stor kan en idealisering av tilfellet være slik som i figur 1.1b der søylen er fast innspent i ende A og fri til å rotere i ende B.

I neste tilfelle settes $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$ som representerer nesten full innspenning i begge ender. Et grensetilfelle der søylen er fast innspent i begge ender er illustrert

i figur 1.1c. Størrelsen på \bar{k}_A og \bar{k}_B er også et taktisk valg, og senere i et kapittel om knekning, nærmere bestemt kapittel 3 side 24, kommer det frem noen essensielle sammenhenger mellom momentkurver og kritisk last, mer om dette siden. Hvordan momentene fordeles ved økende aksialkraft for de to tilfellene med forskjellig valg av r_1 , er vist under. Understreker med det samme at figur 1.1(b) og (c), er bare en illustrasjon av grensetilfellene nevnt ovenfor.

I figur 2.5 og 2.6 har jeg plottet momentkurvene for økende last i form av α_E , og forskjellig valg av r_1 for hhv. første og andre tilfelle.

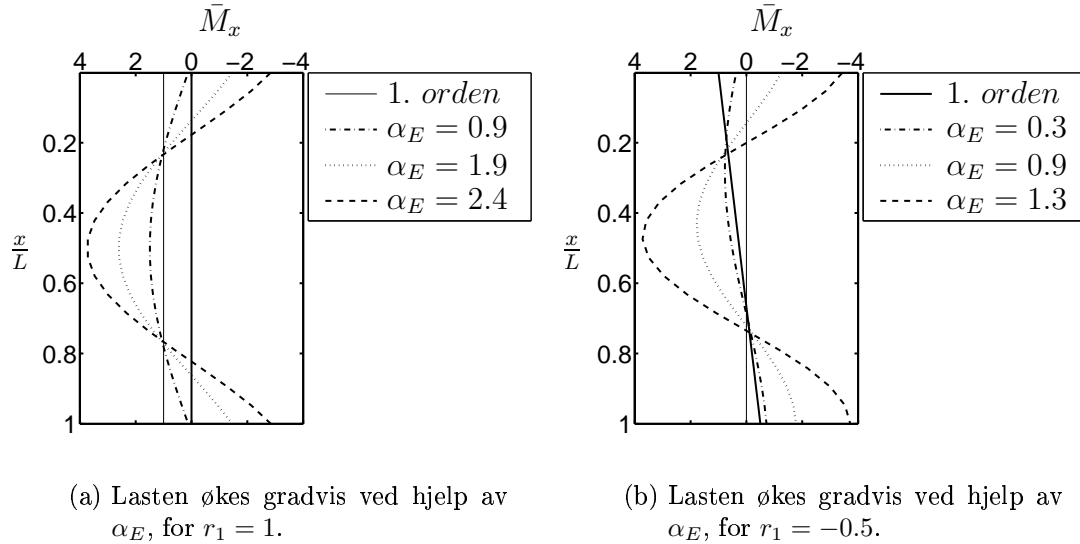


Figur 2.5: Momentkurver for søyletilfellet vist i figur 1.1(b), der det er benyttet $\bar{k}_A = 10000$ og $\bar{k}_B = 0$.

I figur 2.5a kommer det frem at 1. ordens momentet er lik 1 i begge ender før det påføres aksialkraft. Det maksimale momentet er da ved endene av søylen. Grunnen til at maksimalt moment oppstår i begge ender er at $r_1 = 1$. Tidligere ble det bestemt at største 1. ordens moment skulle være ved ende B , og for å få det til må r_1 være mindre enn 1 og større enn -1 (se relasjon 2.17 på side 12). Etter hvert som aksialkraften øker, avtar momentet ved ende A , og det maksimale momentet forskyves fra å være i endene til å være mellom endene.

I figur 2.5b derimot starter det maksimale momentet ved ende B , og deretter forskyves det fra enden ettersom aksialkraften økes.

I figur 2.6a er igjen det maksimalt moment ved endene før aksialkraften får innvirkning, deretter forskyves det til å ligge imellom endene. Det kommer også



Figur 2.6: Momentkurver for søyletilfellet vist i figur 1.1(c), der det er benyttet ($\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$).

frem at momentet i endene er like hverandre, dette skyldes momentgradienten ($r_1 = 1$) og lik innspenning i endene. Til slutt i figur 2.6b starter maksimalt moment ved ende B og deretter forskyves det til å ligge imellom. Det som er litt spesielt med denne figuren er at det fremkommer en tendens til at det kan oppstå to maksimale momenter mellom endene, og det er faktisk mulig.

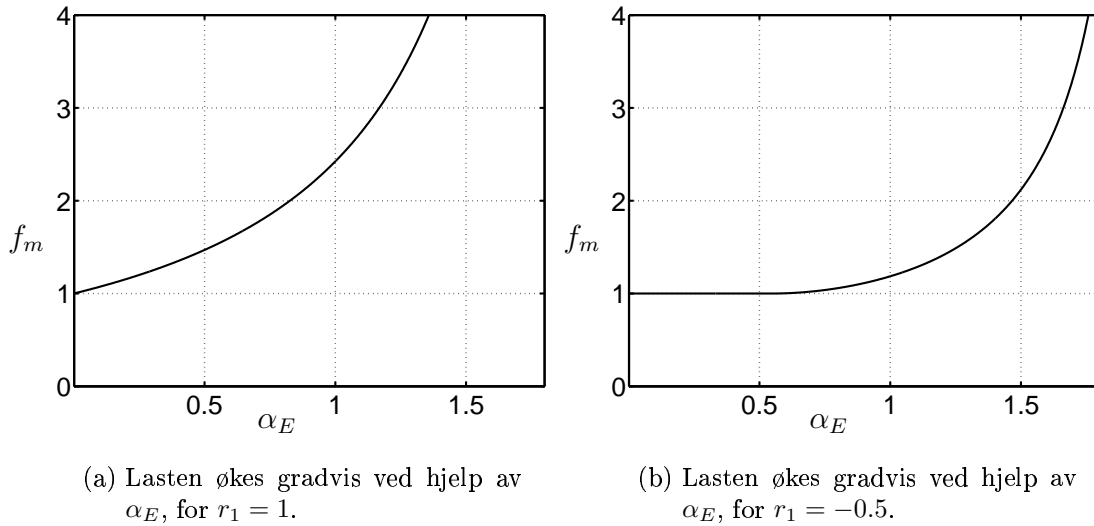
2.5.3 Illustrasjon av maksimalt moment

På side 13 ble det presentert et uttrykk for hvordan maksimalt moment dividert på 1. ordens endemoment ved ende B kunne uttrykkes i form av en momentforstørrelsesfaktor f_m i relasjon 2.19, og i kapittel 2.5.2 side 14 ble det presentert momentkurver (figur 2.5 og 2.6) for to tilfeller.

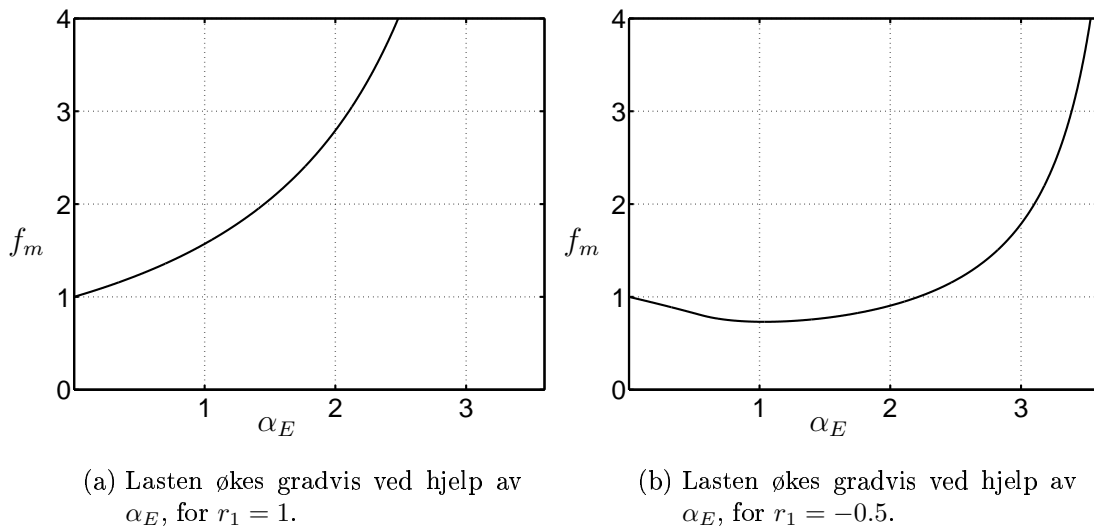
Det skal nå vises hvordan f_m endrer seg for økende aksialkraft, og de samme to tidligere beskrevne tilfellene benyttes. Dette gjøres fordi figurene for moment og momentforstørrelsesfaktor, f_m , kan synkroniseres sammen.

Momentforstørrelsesfaktoren for de to tilfellene har jeg plottet og vist i figur 2.7 og 2.8, og figurene kan sammenlignes parvis, dvs. figur 2.5a med figur 2.7a, figur 2.5b med figur 2.7b, o.s.v.

Sammenhengen er ganske innlysende, der momentkurven har høyest verdi, viser også kurven for f_m det samme (for same verdi av α_E). Det kurven for f_m ikke viser, er hvor på søylen maksimalt moment oppstår.



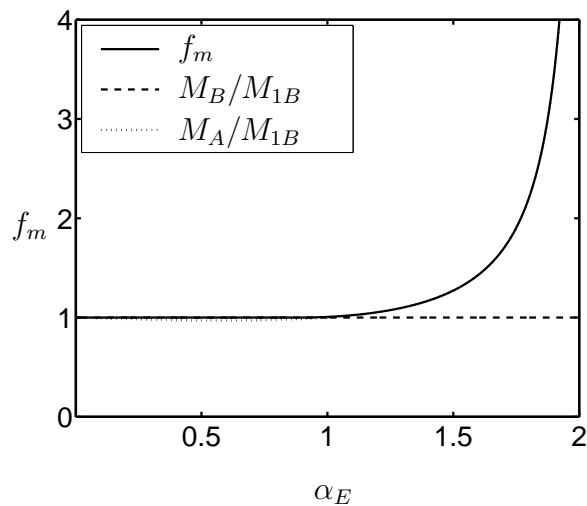
Figur 2.7: Maksimalt moment, f_m , for søyletilfellet vist i figur 1.1(b), der det er benyttet $\bar{k}_A = 10000$ og $\bar{k}_B = 0$ med økende α_E .



Figur 2.8: Maksimalt moment, f_m , for søyletilfellet vist i figur 1.1(c), der det er benyttet $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$ med økende α_E .

2.6 Diskusjon av maksimalt moment

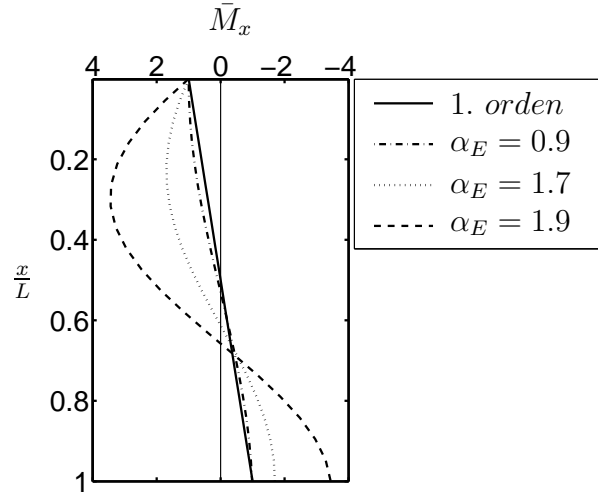
Tidligere kom det frem hvordan momentkurven over en søyle forandrer seg for økende aksialkraft (se kapittel 2.5.2), og at maksimalt moment kan beregnes etter relasjon 2.19, men plasseringen kommer da ikke direkte frem. 1. ordens momentgradient, r_1 , sørger for at maksimalt moment alltid starter ved ende B før aksialkraften får innvirkning, så lenge definert område betraktes (se relasjon 2.17 side 12). Betraktes grenseverdiene, eller verdier utenfor definert område, vil maksimalt moment starte i begge ender eller i ende A . Et eksempel der grenseverdien $r_1 = -1$, nesten full innspenning ved ende A ($\bar{k}_A = 10000$), og fri til å rotere ved ende B ($\bar{k}_B = 0$), har jeg vist i figur 2.9 under (eksempel med $r_1 = 1$ og -0.5 er tidligere vist i kapittel 2.5).



Figur 2.9: Maksimalmomentkurve, f_m , for økende aksialkraft i form av α_E , med $\bar{k}_A = 10000$, $\bar{k}_B = 0$ og 1. ordens momentgradient $r_1 = -1$. Totale endemomenter (M_A og M_B) dividert på 1. ordens endemoment i ende B , (M_{1B}) er vist med M_B/M_{1B} og M_A/M_{1B} . Det kommer noe utydelig frem, med det er slik at M_A/M_{1B} etter en stund overlapper kurven for f_m .

Siden $r_1 = -1$, er det kjent at maksimalt moment er ved begge endene før aksialkraften påføres, og dette fremgår av figur 2.9. Det kommer også frem at når α_E blir større enn 1, er f_m og M_A/M_{1B} ganske like, men er da maksimalt moment ved ende A ? Momentdiagrammet for dette tilfellet har jeg vist i figur 2.10.

Som figur 2.10 viser, kommer det klart frem at maksimalt moment er ved ende A eller ved ca. $\frac{x}{L} = 0.3$, eller kanskje begge steder, ved $\alpha_E = 1.9$. Men ved hjelp



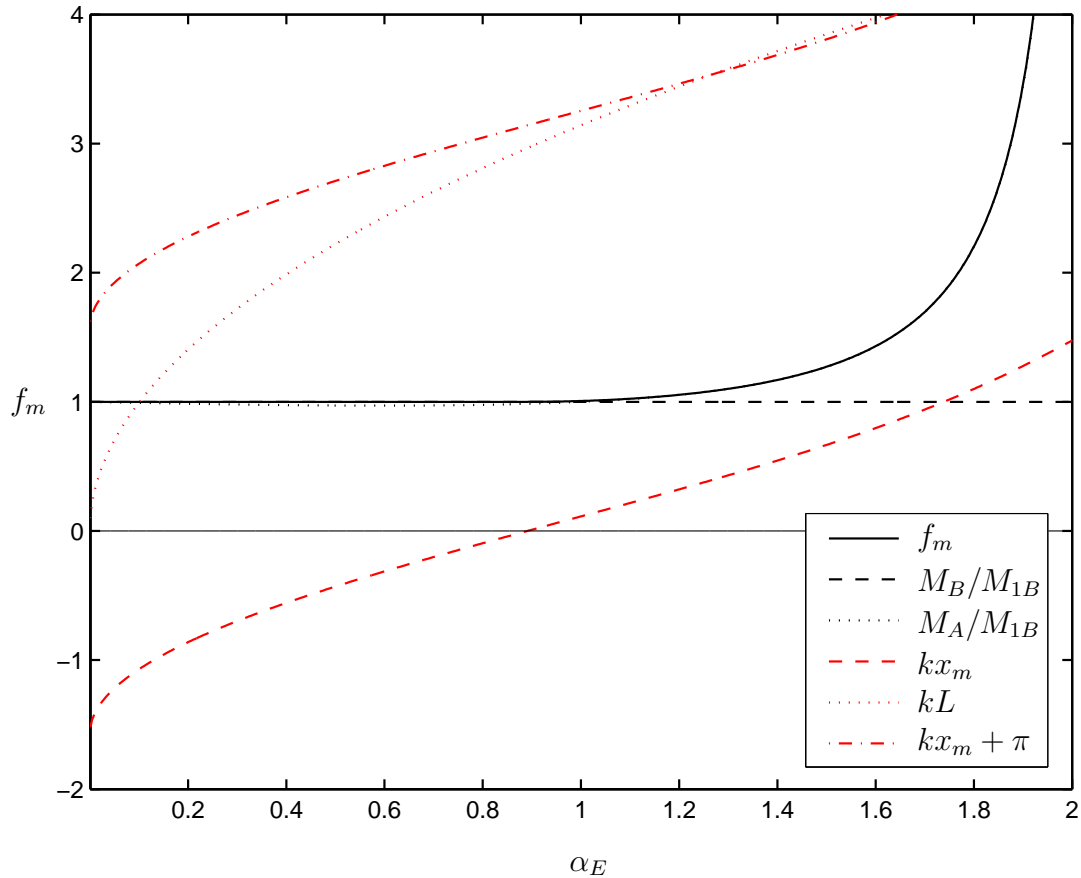
Figur 2.10: Momentkurve for $\bar{k}_A = 10000$, $\bar{k}_B = 0$ og $r_1 = -1$

av noen forutsetninger som ble avklart i kapittel 2.3 og figur 2.3 side 12, kan det kartlegges om maksimalt moment er ved endene, mellom endene, eller om det er flere maksimale momenter på søylen. Matematisk er disse forutsetningene som følger (for flere detaljer, se [5]):

1. Hvis $kx_m < 0$ og $\frac{M_A}{M_{1B}} > \frac{M_B}{M_{1B}}$
 - og hvis $kx_m + \pi \leq kL$
gir dette ett maksimalt moment mellom endene.
 - og hvis $kx_m + \pi > kL$
gir dette maksimalt moment ved ende A.
2. Hvis $kx_m < 0$ og $\frac{M_A}{M_{1B}} < \frac{M_B}{M_{1B}}$
 - og hvis $kx_m + \pi \leq kL$
gir dette ett maksimalt moment mellom endene.
 - og hvis $kx_m + \pi > kL$
gir dette maksimalt moment ved ende B.
3. Hvis $kx_m \geq 0$
 - og hvis $kx_m + \pi \geq kL$
gir dette ett maksimalt moment mellom endene.

- og hvis $kx_m + \pi \leq kl$
gir dette to maksimale momenter mellom endene.

Jeg har plottet kx_m , $kx_m + \pi$ og kL samens med figur 2.9, og resultatet er vist i figuren under.



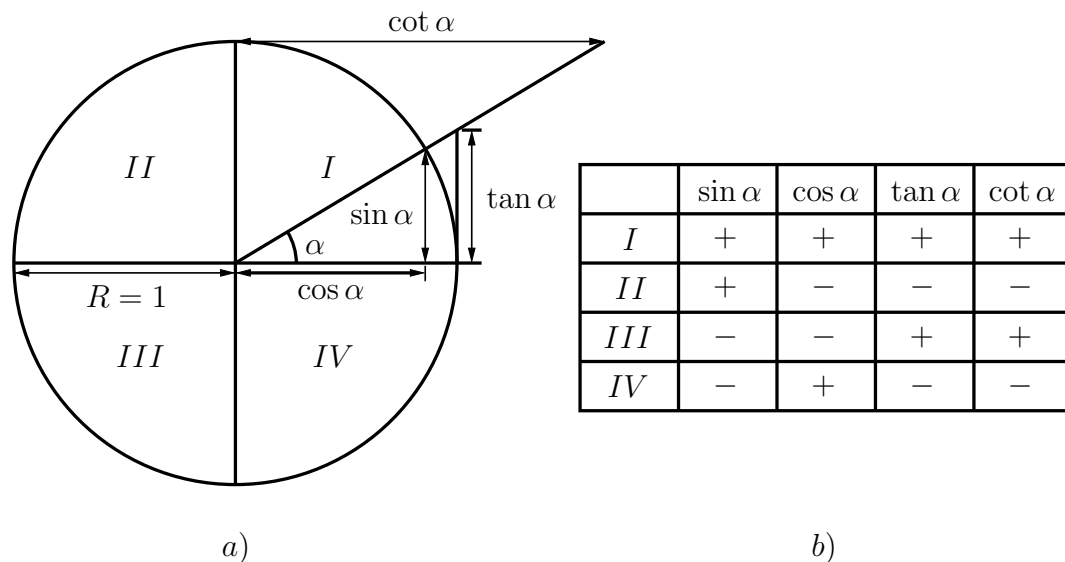
Figur 2.11: Maksimalmomentkurve, f_m , for økende aksialkraft i form av α_E , med $\bar{k}_A = 10000$, $\bar{k}_B = 0$ og 1. ordens momentgradient $r_1 = -1$. Totale endemomenter (M_A og M_B) dividert på 1. ordens endemoment i ende B , (M_{1B}) er vist med M_B/M_{1B} og M_A/M_{1B} . I tillegg er kx_m , kL og $kx_m + \pi$ plottet.

Det fremkommer da at maksimalt moment oppstår ved ende B helt frem til α_E er ca. 0.9, da blir kx_m positiv (Se også figur 2.10 og følg linjen for $\alpha_E = 0.9$). Deretter forskyves maksimalt moment til å ligge mellom endene, og ved α_E lik ca. 1.3 oppstår det faktisk to maksimale momenter i det $kx_m + \pi \leq kl$.

Ved beregning av maksimalt moment (eller momentforstørrelsesfaktoren, f_m) er det noen ting man må passe på. Som tidligere nevnt i kapittel 2.3 kom det frem en relasjon 2.16 side 11, denne gir muligheten til å bestemme maksimalt moment på to forskjellige måter. Det skal nå forklares hva som fysisk skjer, og hva matematikken sier i forbindelse med disse relasjonene. Momentforstørrelsesfaktoren f_m blir på formen

$$f_m = \frac{M_{maks}}{M_{1B}} = \frac{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(kL)}}{\sin(kL)} \frac{M_B}{M_{1B}} = \bar{f}_m \frac{M_B}{M_{1B}} \quad (2.26)$$

Det er allment kjent at trigonometriske funksjoner skifter fortegn periodisk, og dette kan vises i figur 2.12 under, som er hentet fra [13].

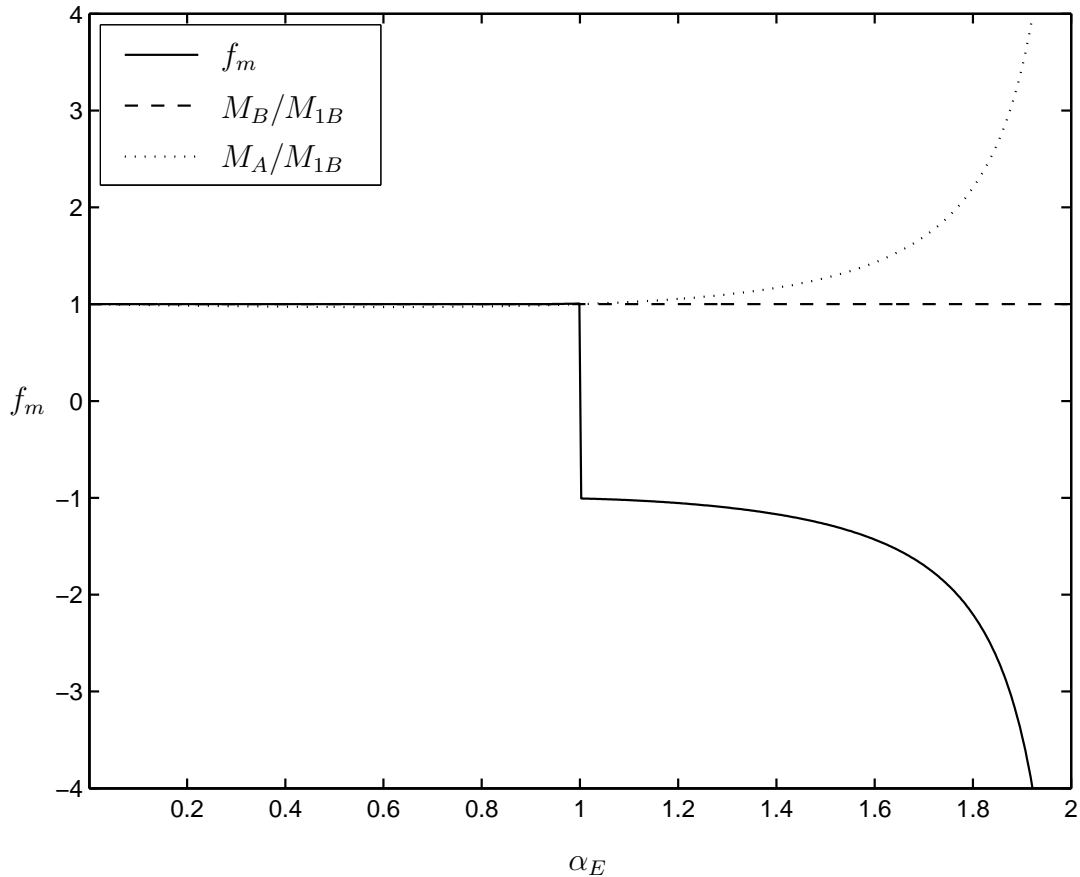


Figur 2.12: Sirkel med radius $R = 1$ (a), og fortegnene til de trigonometriske funksjonene i de fire kvadratene er angitt i (b).

Fra figuren 2.12, kan det konkluderes med at andre ledd i ligning 2.16 skifter fortegn når $kx_m = \frac{\pi}{2}$ og $\frac{3\pi}{2}$ og siste ledd i ligning 2.16 skifter fortegn når $kL = \pi$ og 2π , i området fra 0 til 2π . Tidligere når det ble beregnet maksimalt moment, ble det tatt utgangspunkt i det tallmessige største momentet, deretter ble absoluttverdien til denne betraktet. Hvis maksimalt moment for tilfellet omtalt i kapittel 2.6 side 18 blir plottet, og relasjon 2.26 blir benyttet uten å ta hensyn til trigonometrisk fortegnskifte, fåes følgende resultat som jeg har vist i figur 2.13 på side 22. Dette resulterer i at kurven for maksimalt moment får et hakk midt på

figuren for så å stupe nedover. Dette kan forklares enkelt ved følgende uttrykk

$$kL = L\sqrt{\frac{N}{EI}} = \pi\sqrt{\frac{NL^2}{\pi^2 EI}} = \pi\sqrt{\alpha_E} \quad (2.27)$$



Figur 2.13: Maksimalmomentkurve, f_m , for økende aksialkraft i form av α_E , med $\bar{k}_A = 10000$, $\bar{k}_B = 0$ og 1. ordens momentgradient $r_1 = -1$. Totale endemomenter (M_A og M_B) dividert på 1. ordens endemoment i ende B , (M_{1B}) er vist med M_B/M_{1B} og M_A/M_{1B} . Her er maksimalt moment plottet uten hensyn til fortegnsskifte av trigonometriske funksjoner.

som forklarer at fortegnsskiftet kommer for $\alpha_E = 1$. I noen tilfeller kan også $\frac{M_B}{M_{1B}}$ skifte fortegn, og grafen for maksimalt moment får da ett hakk til. Siden interessen er i det tallmessige største momentet, innføres tallverdi på hele uttrykket slik at en jevn og fin kurve fremkommer, og uttrykket for maksimalt moment blir som følger

$$f_m = \left| \frac{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(kL)}}{\sin(kL)} \frac{M_B}{M_{1B}} \right| \quad (2.28)$$

For andre ledd i ligning 2.16 skiftes det også fortegn i likhet som tidligere nevnt, men ikke på samme sted på kurven, og for å få en glatt og fin kurve innføres også her absoluttverdi. Den andre relasjonen for beregning av maksimalt moment blir da

$$f_m = \left| \frac{1}{\cos(kx_m)} \frac{M_B}{M_{1B}} \right| \quad (2.29)$$

Kapittel 3

Knekning av søyle

3.1 Generelt

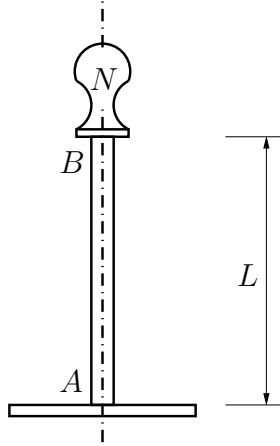
Kritisk last og knekk lengde er sentrale emner i dette avsnittet. Det generelle tilfellet med knekning av en søyle med vilkårlig innspenning i søylens endener er også omtalt. For å få en myk start på problematikken gjennomgås litt historie, eller gå direkte til underkapittel 3.3 på side 27 hvis dette ansees kjent.

3.2 Kort innblikk i historien om knekning

Teksten i dette avsnittet og figur 3.1 og figur 3.2 er hentet fra [3]. Gjennom tidene har det vært uhell og katastrofer i forbindelse med konstruksjoner. Det er også slik at en stor andel av disse ulykkene skyldtes knekning eller instabilitet. Og århundrer har folk spekulert på hvorfor konstruksjoner kan ha en slik dramatisk oppførsel.

Stabilitetsproblemet ble løst av matematikere med Leonard Euler (1707-1783) i spissen (for flere detaljer, se [14]). Ved hjelp av variasjonsregning kom Euler frem til differensialligningen for en bjelke med store forskyvninger. Denne ligningen var riktignok utledet tidligere av Jacob Bernoulli (1654-1705) ved en direkte metode, men Euler klarte ved hjelp av rekkeutviklinger å beregne den elastiske formen for et stort antall kompliserte bjelkeformasjonsstillinger. Han greide også å fastslå at en søyle med lengde L som er fast innspent i den ene enden og påkjent av en trykkraft N i den andre, se figur 3.1, ikke klarer å bære mer enn

$$N = \frac{C\pi^2}{4L^2} \quad (3.1)$$



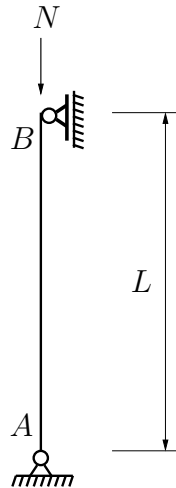
Figur 3.1: Søyلة undersøkt av Euler

Denne viktige ligningen viser at en fordobling av søylens lengde vil redusere bæreevnen til en fjerdedel. Konstanten C betegnet Euler "absolutt elastisitet". Han trodde at for et rektangulært tverrsnitt var denne størrelsen proporsjonal med bredden og kvadrat (!) av høyden. Sett i relasjon til den store matematiske innsikt man hadde på den tiden synes det bemerkelsesverdig at sansen for ingeniørmessige og fysikalske vurderinger var så lite utviklet.

J.L. Lagrange (1736-1813) tok for seg en lang rekke knekningsproblemer, deriblant det klassiske tilfellet med en søyle som er fritt opplagret i begge ender. Han beregnet den kritiske last for dette tilfellet til å være fire ganger så stor som den Euler hadde funnet for søylen med en fast innspenning. Sett i dette historiske lys synes det noe merkelig at man vanligvis betegner den fritt opplagte søylen for "Euler-søylen" eller "Euler-tilfellet", se figur 3.2.

Den moderne forskning dreier seg mye om videreutvikling av numeriske beregningsmetoder. Elementmetoden er et utgangspunkt for en rekke numeriske beregningsmetoder, og simulering av svært kompliserte konstruksjoner lar seg utføre.

For praktiske konstruksjoner er det nødvendig å definere hva som velges å oppfatte med uttrykket *kritisk last*. Det velges da å se på et *idealisert* tilfelle. Dette betyr at en må:



Figur 3.2: Euler-søylen

- Fjerne alle initialspenninger i materialet.
- Fjerne alle inhomogeniteter i materialet.
- Forutsette ideelt elastisk materiale.
- Alle ytre laster virker eksakt sentrisk uten å medføre momenter.
- Konstruksjonen må være uten initialdeformasjoner.

N_{kr} blir på denne måten en referanseverdi som markerer den teoretiske grensen for et transformasjonsområde der konstruksjonen får vesentlige tverrforskyvninger. Men det er viktig å merke seg at i praksis kan konstruksjoner få sammenbrudd lenge *før* referanseverdien N_{kr} nås, dette skyldes gjerne flytning og sammenbrudd i materialet.

Den norske standarden for stålkonstruksjoner, NS 3472, definerer en knekklast $N_k = \sigma_k A$. Denne størrelsen avhenger av N_{kr} for den lineariserte konstruksjonen, men tar også hensyn til egenspenninger i tverrsnittet og slankhetsavhengige initialdeformasjoner. N_k er derfor en del mindre enn N_{kr} .

Praktiske knekningsundersøkelser må ofte utføres på forskjellige nivåer. Bjelke- og stavkomponenter må undersøkes og kontrolleres i henhold til forskriftene. Stabilitet må sjekkes for deler av konstruksjonen som igjen er sammensatt av flere

komponenter. Til slutt kan det være nødvendig å utføre en global stabilitetsundersøkelse for hele konstruksjonen. En slik beregningsgang må f.eks. benyttes for kraftledningsmaster. Først må alle stavnene kontrolleres, deretter delkonstruksjoner som vangeben og til slutt den totale masten.

3.3 Kritisk last

Momenter og forskyvninger vokser mot uendelig når lasten nærmer seg søylens kritiske last (N_{kr}). Den kritiske last er identisk med knekklasten (funnet fra egenverdiproblemet i tillegg) og representerer en øvre grensetilstand for systemet.

En grunnverdi i forbindelse med den kritiske lasten er for en søyle med lengde L som er leddlagret i begge ender, er gitt ved

$$N_{kr} = N_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (3.2)$$

Den kritiske lasten for den leddlagrede staven kalles som kjent gjerne for Eulerlasten (N_E).

Fra ligning 2.6 side 9 kan det finnes kritiske laster for staver med vilkårlig inspenning. De kan uttrykkes på samme form som relasjon 3.2 dersom den virkelige stavlengden L erstattes av den såkalte knekk lengden eller effektive lengden L_e , slik at

$$N_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(L_e)^2} \quad (3.3)$$

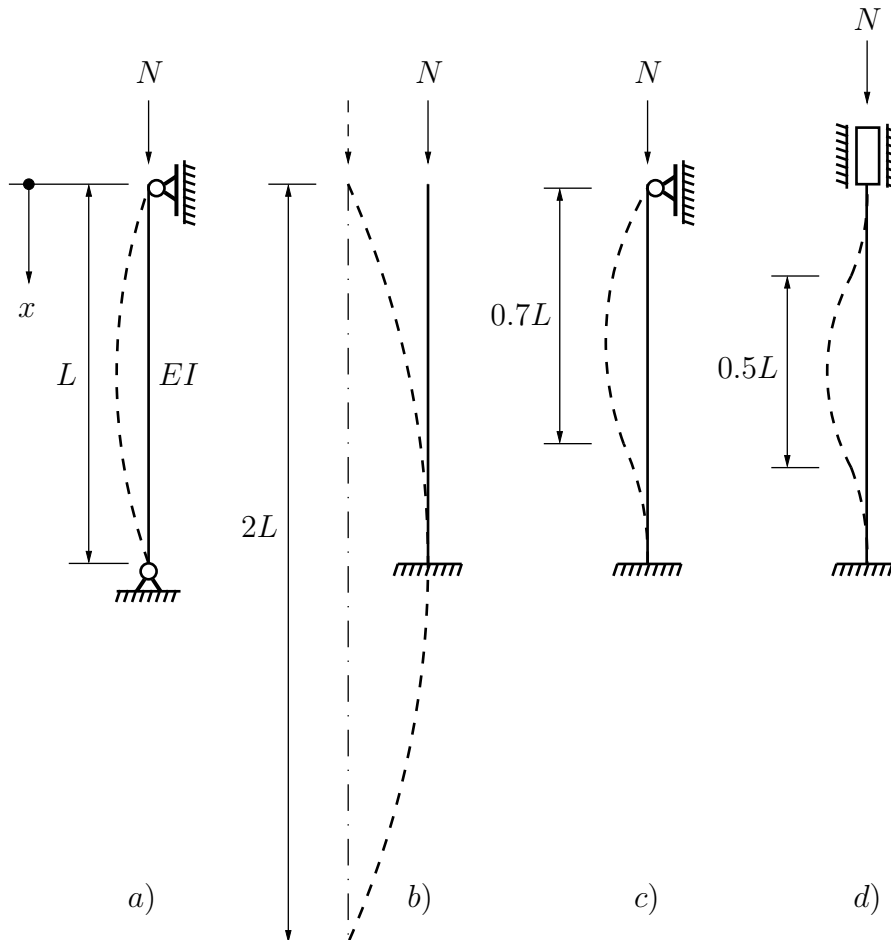
L_e er altså å betrakte som lengden av en leddlagret stav med samme kritiske last (knekklast) som den virkelige staven. Uttrykket over kan også skrives på formen

$$N_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(\beta L)^2} \quad \text{der } \beta L = L_e \quad (3.4)$$

der β er knekk lengdefaktoren for søylen (for flere detaljer, se [3]).

3.4 Eksempler på knekk lengder

Knekk lengdefaktorer kan utledes for en søyle med vilkårlig innspenning, dette er tema i underkapittel 3.6 på side 30, men først noen eksempler på elementære knekk tilfeller med tilhørende knekk lengder, se figur 3.3 under. Figuren er hentet fra [5], men er noe modifisert.

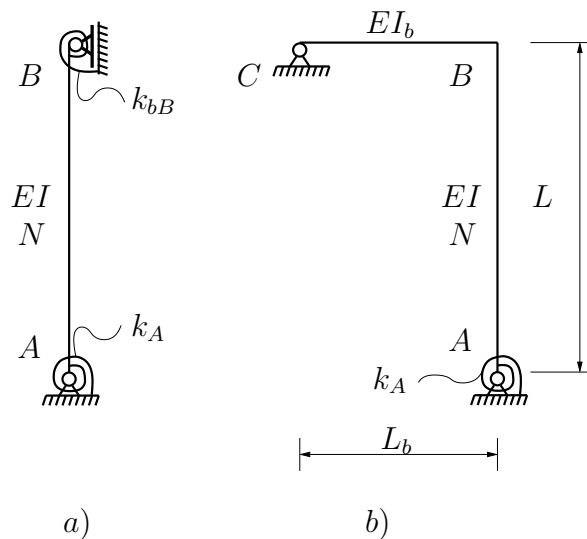


Figur 3.3: Knekkformer og knekk lengder for en enkeltsøyle for elementært tilfeller. Knekk lengdefaktoren er representert med konstanten foran L .

Fysisk tilsvarer L_e avstanden mellom infleksjonspunktene til bøyelinjens knekkform.

3.5 Søyلة med vilkårlig innspenning, notasjon

Det skal nå betraktes en enkeltsøyلة som avbildet i figur 3.4a. Søylen er fastholdt mot siveveis forskyvning i begge ender, men fri til å rotere. I hver ende av søylen er det påført en rotasjonsfjær. Fjærene kan f.eks representere stivhetsbidraget fra en bjelke som møtes i knutepunktet, eller at man selv påfører rotasjonsfjærer for å definere graden av innspenning, se figur 3.4b. Det kan med andre ord sies at figur 3.4b er et eksempel på hvordan en konstruksjonen ser ut i virkeligheten, mens figur 3.4a representerer en idealisering.



Figur 3.4: Fastholdt søyلة med to rotasjonsfjærer, idealisert modell (a). Eksempel på virkelig modell (b).

I dette tilfellet (figur 3.4) representerer fjærstivheten k_{bB} det stivhetsbidraget fra bjelken (BC) til knutepunkt B, der indeksen b står for bjelke. I knutepunkt A er det ikke nødvendigvis en bjelke som gir stivhetsbidrag til knutepunkt A (slik som bjelke BC), men kanskje kun en påført rotasjonsfjær (derfor er indeksen b ikke påtegnet). For da og være helt konsekvent på notasjonen videre i dette kapitlet, bevares den sistnevnte formen som en betegnelse på det generelle tilfellet.

3.6 Eksakt kneklengdefaktor

For en elastisk søyle slik som avbildet i figur 3.4a, med gitt endemotstand (k_A og k_B), kan eksakt kneklengdefaktor, β , bli funnet ved å studere når determinanten til stivhetsmatrisen for systemet blir lik null (stivhetsmatrisen har bidrag fra søylen og fjærene i endene). For denne søylen med aksialkraft (N) konstant stivhet ($\frac{EI}{L}$) gjennom søylen som er fastholdt mot sideveis forskyvning, kan null determinanten uttrykkes ved den transendente ligningen under (3.5). Denne ligningen er kjent fra før, og kan bl.a. finnes omtalt i [8], [9], [10] og [11]. Hvordan man kommer frem til denne ligningen er beskrevet i tillegg B, nærmere bestemt på side 153.

$$\frac{(\frac{\pi}{\beta})^2}{\bar{k}_A \bar{k}_B} + (\frac{1}{\bar{k}_A} + \frac{1}{\bar{k}_B}) (1 - \frac{(\frac{\pi}{\beta})^2}{\tan(\frac{\pi}{\beta})}) + \frac{\tan(\frac{\pi}{2\beta})}{\frac{\pi}{2\beta}} = 1 \quad (3.5)$$

Der, \bar{k}_A og \bar{k}_B er definert ved relasjon 2.25 på side 14.

Den transendente ligningen over (ligning 3.5) er uttrykt ved en motstands stivhets parameter, den er også ofte uttrykt ved en motstands fleksibilitets parameter kalt G som også kan finnes omtalt i noen av referansene nevnt ovenfor, og er gitt ved

$$\frac{G_A G_B}{4} (\frac{\pi}{\beta})^2 + \frac{G_A + G_B}{2} (1 - \frac{\frac{\pi}{\beta}}{\tan(\frac{\pi}{\beta})}) + \frac{\tan(\frac{\pi}{2\beta})}{\frac{\pi}{2\beta}} = 1 \quad (3.6)$$

Stivhetsforholdet i knutepunktene (G_A, G_B) ved ende A og ende B kan bli definert ved

$$G_i = b_0 \frac{(\frac{EI}{L})}{k_i} \quad \text{der } i = A, B \quad (3.7)$$

Denne er hentet fra fra [9], og omtales der som generell form. Dette uttrykket er ikke knyttet til noen begrensning. Denne kan bli både positiv og negativ.

Faktoren b_0 kan bli betraktet som en skaleringsfaktor, eller en bøyestivhets koeffisientreferanse, og som også i dette tilfellet er hentet fra [9]. For et uforskyvelig tilfelle er det vanlig å gi skalering, eller referansefaktoren, verdien

$$b_0 = 2 \quad (3.8)$$

3.7 Endemotstandsbegrensninger

Den endemotstandskombinasjonen som gir uendelig effektiv lengde, og kritisk last lik null (ligning 3.3 på side 27) er av stor interesse da de representerer en ytre grense. Denne grensen kan finnes ved å se på determinanten til 1.ordens stivhetsmatrise til systemet, (søyle pluss fjærer inkludert) og beregne når denne blir null (systemets 1. ordens stivhetsmatrise er vist i relasjon B.5 side 151).

For en søyle som er fastholdt mot sideveis forskyvning når denne grensen når ligning 3.9 blir oppfylt. Denne ligningen er hentet fra [9], og jeg har vist den i figur 3.5.

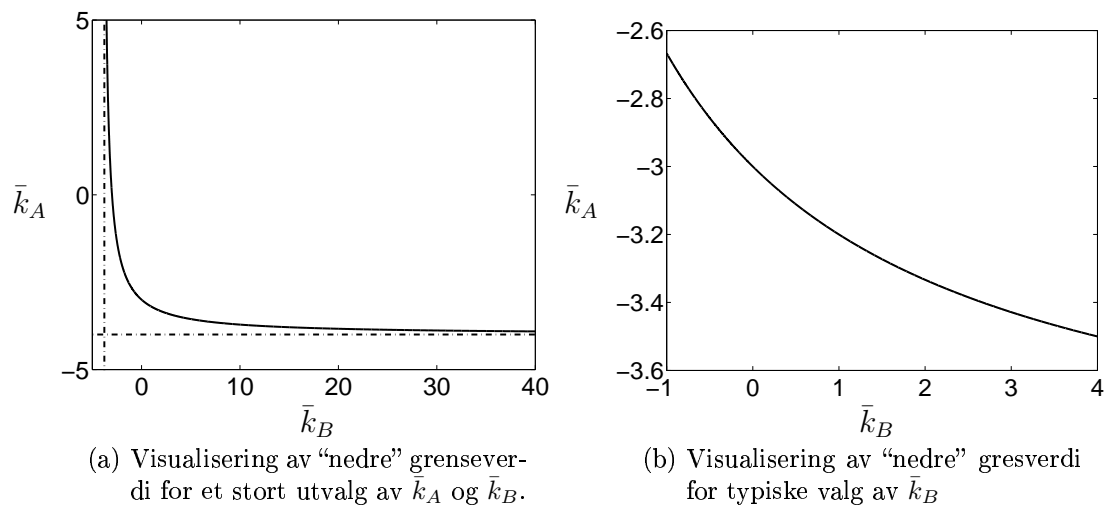
$$\bar{k}_A = -4 \frac{3 + \bar{k}_B}{4 + \bar{k}_B} \quad \text{eller} \quad \left(2 + \frac{\bar{k}_A}{2}\right) \left(2 + \frac{\bar{k}_B}{2}\right) = 1 \quad (3.9)$$

Uttrykt ved G-faktor (med $b_0=2$) blir forholdet, som også er hentet fra [9]

$$\left(2 + \frac{1}{G_A}\right) \left(2 + \frac{1}{G_B}\right) = 1 \quad (3.10)$$

I figur 3.5a fremkommer det 2 asymptoter. Disse forteller hva grenseverdien går mot når \bar{k}_A og \bar{k}_B går mot uendelig. Eksempelvis hvis det velges \bar{k}_B lik uendelig, så kan det minimalt velges \bar{k}_A lik -4. Dvs. at det fåes $k_A = -4EI/L$, som er tilstrekkelig til å kansellere søylens egen 1.ordens rotasjonsstivhet ($4EI/L$).

Grensene ovenfor er brukbare i en generell diskusjon, men hovedsakelig av akademisk interesse. I praktiske tilfeller vil man normalt være et godt stykke fra grenseverdiene.



Figur 3.5: Endemotstandsbegrensning

Kapittel 4

Ramme, 2. ordens elastisk teori

4.1 Generelt

Det ble i kapittel 2 side 7 gjennomgått teori for en enkeltsøyle for bl.a. beregning av maksimalt moment. Temaet ble grundig diskutert, så i dette kapitlet taes kun det essensielle med. Det skal nå betraktes en ramme som går over to plan, se figur 1.2a på side 5, der det brukes symmetri slik at det kan benyttes idealiseringen vist i figur 1.2b.

Sentrale emner i dette kapitlet er bl.a. hvordan 1. ordens momentgradient i nabosøylen påvirker den søylen som betraktes, med hensyn på beregning av maksimalt moment. Det benyttes samme symboler som tidligere, men indeksen kan i noen tilfeller være noe anderledes.

4.2 Maksimalt moment

Det ble tidligere vist at maksimalt moment i form av en momentforstørrelsesfaktor kunne uttrykkes ved 2.16. Denne benyttes også for den to etasjes søylen avbildet i figur 1.2b på side 5 der forkholdet mellom totale momenter i søyle 1 og 2 er definert ved

$$r_{2,1} = -\frac{M_{AB}}{M_{BA}} \quad (4.1)$$

$$r_{2,2} = -\frac{M_{CB}}{M_{BC}} \quad (4.2)$$

hhv.

4.3 Definisjon av 1.ordens momentgradient, $r_{1,1}$ og $r_{1,2}$

Tidligere i kapittel 2.4 på side 11 ble det definert en 1. ordens momentgradient for en enkeltsøyle som $r_1 = -\frac{M_{1A}}{M_{1B}}$, når det nå betraktes en søyle over to plan, med tre frihetsgrader, er det nødvendig å definere to 1. ordens momentgradienter, disse er som følger

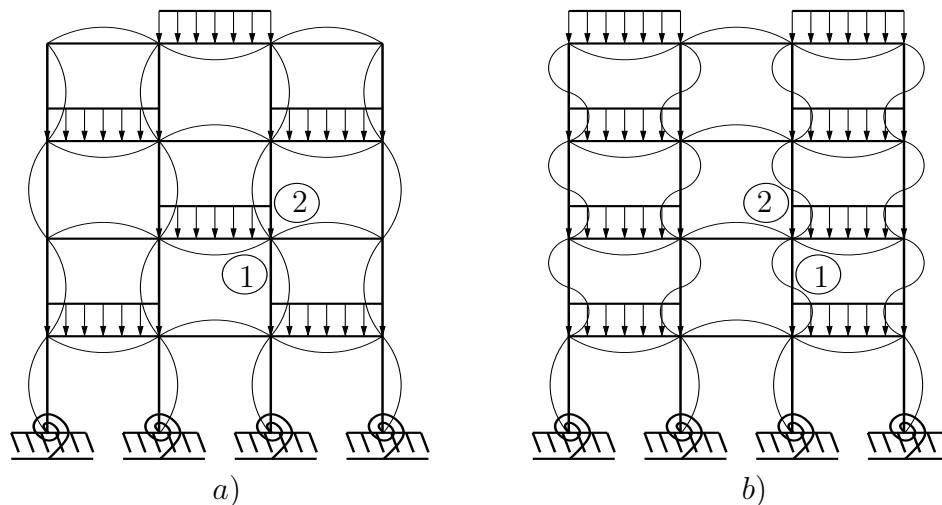
$$r_{1,1} = -\frac{M_{1AB}}{M_{1BA}} \text{ der } \{-1 < r_{1,1} < 1\} \quad (4.3)$$

$$r_{1,2} = -\frac{M_{1CB}}{M_{1BC}} \text{ der } \{-1 < r_{1,2} < 1\} \quad (4.4)$$

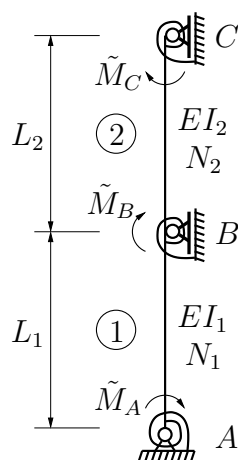
for søyle 1 og 2 hhv.

4.4 Nabosøylens påvirkning

Ved beregning av maksimalt moment i en søyle som er en del av et system kan det stilles spørsmål om nabosøylens 1. ordens momentgradient påvirker søylen som skal undersøkes, og eventuelt hvor mye. Hvis det betraktes to konstruksjoner med forskjellige lastvirkninger, se figur 4.1 under, kommer det klart frem at 1.ordens momentgradient for søyle 1 og 2 i figur 4.1a, er begge lik 1, og i figur 4.1b, er begge lik -1. Det skal nå i videre sammenheng lages en forenklet modell, slik at søyle 1 og 2 blir representert slik som angitt i figur 1.2b på side 5. Taes det i tillegg hensyn til en ytre last, vil systemet som skal undersøkes være slik som



Figur 4.1: Eksempel på to mulige lastvirkninger.



Figur 4.2: System bestående av to søyler, tre fjærer og ytre momenter.

jeg har illustrert det i figur 4.2. Noen forsøk med forskjellige valg av 1.ordens momentgradient skal foretas.

Systemet avbildet i figur 4.2 består av tre ytre påførte momenter (\tilde{M}_A , \tilde{M}_B og \tilde{M}_C) og tre fjærer. Fjærene kan representere bjelker som møtes i de representative knutepunktene. Det er helt nødvendig å ha med tre ytre momenter da disse gjør det mulig å *spesifisere* to 1. ordens momentgradienter (1. ordens momentgradien-

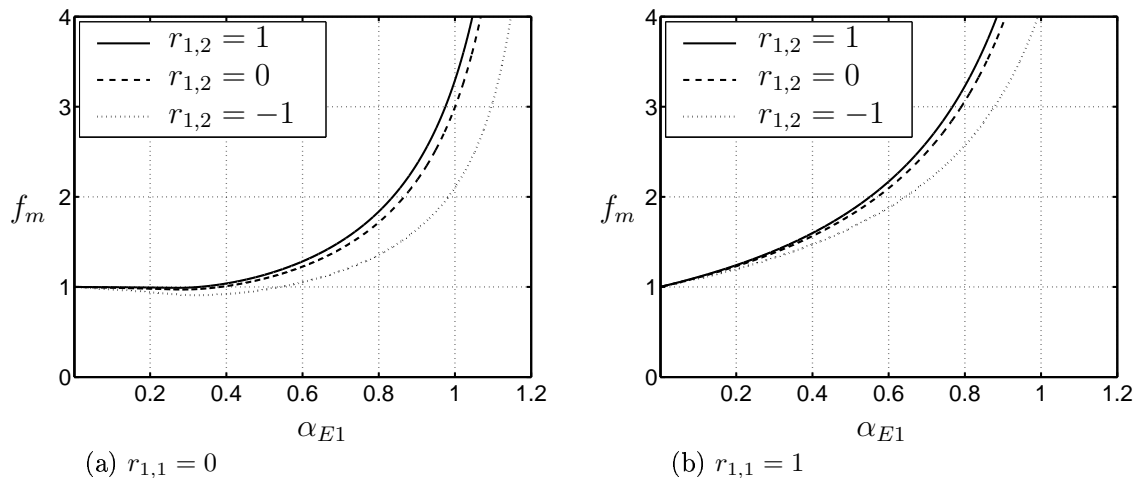
ter er definert ved 4.3 og 4.4). Hadde det derimot blitt valgt å fjerne ett moment, (fritt valgt) kunne det bare defineres en 1. ordens momentgradient og den andre blir uspesifisert (“blir hva den blir”).

For å få plottet noen eksempler velger jeg 1. ordens momentgradienter delvis ut fra figur 4.1 og noen fritt valgte. For å illustrere essensen, har jeg valgt å sette 1. ordens momentgradient i søyle 1, $r_{1,1}$, lik 0, og deretter lik 1. For hvert av tilfellene velges 1. ordens momentgradient i søyle 2, $r_{1,2}$, lik 0, 1 og -1. For å se hvordan resultatene påvirkes av fjærstivhetene, har jeg valgt å sette \bar{k}_i lik 1 i første tilfellet, og deretter lik 2, altså *lik* stivhet på alle tre fjærene. Det vil også fremgå på hver figur hvilke valg som er foretatt, alle plottene er vist m.h.p. søyle 1, og maksimalt moment divideres på største 1. ordens endemoment M_{1BA} , slik at momentforstørrelsesfaktoren, f_m , vises.

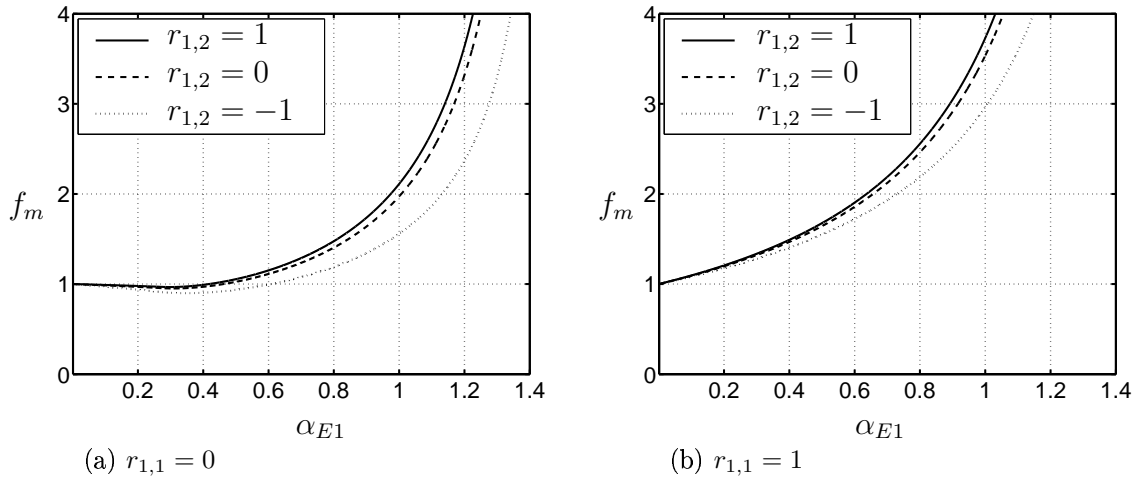
For ikke å variere alle mulige variable, har jeg valgt å sette

$$\frac{(EI/L)_2}{(EI/L)_1} = \frac{(NL)_1}{(NL)_2} = 1 \quad (4.5)$$

Eksempelene jeg har laget er vist i figur 4.3 og 4.4. I uttrykket for f_m er det nå er faktor $\frac{M_{BA}}{M_{1BA}}$, denne er utledet i tillegg C på side 156.



Figur 4.3: Kurver for maksimalt moment, f_m , i søyle 1 når: $\bar{k}_A = \bar{k}_B = \bar{k}_C = 1$ med variasjon av 1. ordens momentgradient i søyle 2.



Figur 4.4: Kurver for maksimalt moment, f_m , i søyle 1 når: $\bar{k}_A = \bar{k}_B = \bar{k}_C = 2$ med variasjon av 1. ordens momentgradient i søyle 2.

4.5 Kort diskusjon

Det kommer umiddelbart frem fra figur 4.3 og 4.4 at nabosøylens 1. ordens momentgradient ($r_{1,2}$) påvirker søyle 1. Når det senere skal sammenlignes eksakte resultater med resultater beregnet etter tilnærmede metoder, hvilken av de tre kurvene skal det da sammenligne med (for hvilken verdi av nabosøylens 1. ordens momentgradient)? Dette er ikke helt innlysende, men hvis man skal være mest sikker, må det sammenlignes med den “strengeste” kurven. Med det menes den kurven som gir høyest momentforstørrelsesfaktor på et tidlig tidspunkt. Fra figur 4.3 og 4.4 kommer det frem at det alltid er kurven som tilsvarende $r_{1,2} = 1$.

Videre fremkommer det at en økning i stivheten på fjærene medfører en slakkere kurve, ikke så uventet, det medfører også at kurvene er mer sammenfallende ved en høyere α_{E1} verdi.

Kapittel 5

Knekning av ramme

5.1 Generelt

Fra [6] er det fortalt litt om forskjellen mellom lokalknekning og systemknekning og et kort sammendrag følger.

Det å bestemme knekklasten “lokalt” for en enkeltstående stav med kjente grensebetingelser (*lokalknekning*) er tidligere omtalt i kapittel 3.6 på side 30. Inngår derimot staven i et rammesystem kan det være vesentlig vanskeligere. I slike tilfeller vil knekklasten (eller kritisk last) for staven være lik aksialkraften i staven idet hele rammesystemet som sådant knekker (*systemknekning*).

Systemknekning initieres i den mest fleksible, eller “svakeste” staven i rammen, eller i et område med en kombinasjon av flere svake staver. Systemknekning, og tilhørende kritisk last, er i mindre grad påvirket av de stivere, eller “sterkere” stavene. De sterke stavene blir på en måte ikke fullt utnyttet. Litt upresist kan en si at systemknekning begrenses av lokal knekning i det svakeste ledd. For å øke kritisk last av systemet totalt, er det derfor, opp til et visst punkt, tilstrekkelig å forsterke (øke stivheten) til den (eller de) svakeste staven(e).

For å bestemme systemets kritiske belastning, kreves det at en utfører en systemknekningsanalyse. Dersom en lastfordeling som gir aksialkrefter, N , er i de forskjellige stavene, og dersom alle laster økes proporsjonalt, vil kritisk aksialkraft i den enkelte stav kunne uttrykkes ved

$$N_{kr} = \gamma_{kr} N \quad (5.1)$$

der γ_{kr} er en og samme lastmultiplikator for alle stavnene.

Videre i dette kapitlet studeres rammen vist i figur 1.2a med idealisering i figur 1.2b på side 5.

5.2 Krav ved systemknekning

Ved antagelse av proporsjonal pålastning på et system som består av to søyler, (se figur 1.2 på side 5) som medfører samme γ_{kr} i søylene, og ved bruk av relasjon 3.4 på side 27, fører dette til følgende forhold mellom knekkleingsdefaktorene β i søylene

$$\beta_2 = \beta_1 \sqrt{Q_{12}} \quad (5.2)$$

der

$$Q_{12} = \frac{\alpha_{E1}}{\alpha_{E2}} = \frac{N_1 L_1^2 E I_2}{N_2 L_2^2 E I_1} = \frac{(NL)_1 (EI/L)_2}{(NL)_2 (EI/L)_1} \quad (5.3)$$

Søylennummeret er angitt ved subindeksen. Q_{12} forteller noe søylefleksibilitetsforholdet. For flere detaljer, se [11].

Når β er kjent for en søyle, kan β for den andre søylen regnes ut ved 5.2.

5.3 Beregning av eksakt knekkleingsdefaktor β_1 og β_2

For beregning av eksakt knekkleingsdefaktor β_1 og β_2 for hhv. søyle 1 og 2 i figur 1.2b, må determinanten til stivhetsmatrisen for systemet studeres. Dette er stort og omfattende, så dette er omtalt i tillegg C.5 på side 162.

Kapittel 6

Beregning av tilnærmet maksimalt moment for en enkeltsøyle

6.1 Generelt

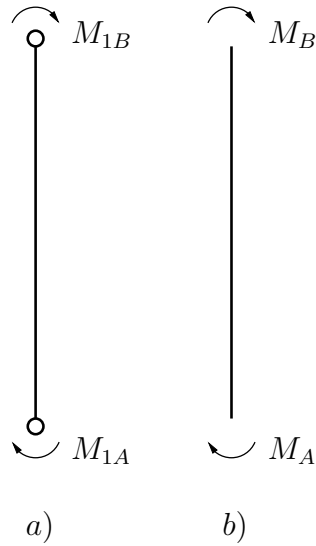
Eksakt elastisk løsning for en leddlagret søyle, se figur 6.1a, eller søyle med kjente totale momenter (inkl. 2. ordens virkning) ved endene, se figur 6.1b, kan maksimalt moment uttrykkes ved relasjonen

$$M_{maks} = f_m M_{1B} \quad (6.1)$$

Når en leddlagret søyle betraktes, er det totale momentet ved enden lik 1. ordens momentet ved enden. Fra 6.1 skrives f_m som.

$$f_m = \frac{\sqrt{1 + (r_{2,i})^2 - 2(r_{2,i}) \cos(kL)}}{\sin(kL)} = C_{m,u} f_{m1} \quad (6.2)$$

der f_{m1} er definert for $C_m = 1$ ($r_{2,i} = 1$) og “i” angir søylen som betraktes definert ved 4.1 og 4.2 på side 34.



Figur 6.1: Leddlagret søyle med 1. ordens endemomenter (a), søyle med kjente totale endemomenter (b).

$$C_{m,u} = \sqrt{\frac{1 + r^2 - 2r \cos(kL)}{2(1 - \cos(kL))}} \quad \text{der indeksen u står for uniformt (konstant)} \quad (6.3)$$

$C_{m,u}$ tar utgangspunkt i en konstant 1. ordens momentgradient slik som vist i figur 2.4 på side 13, derav indeksen “u”.

$$f_{m1} = \frac{\sqrt{2 - 2 \cos(kL)}}{\sin(kL)} = \frac{1}{\cos(\frac{kL}{2})} \quad (6.4)$$

Dvs.

$$f_m = \frac{C_{m,u}}{\cos(\frac{kL}{2})} \quad (6.5)$$

Alternativt kan denne skrives på formen

$$f_m = \frac{C_{m,s}}{1 - \alpha} \quad (6.6)$$

der indeksen “s” står for sinusformet 1. ordens momentgradient og α kalles stabilitetsindeksen uttrykt ved

$$\alpha = \frac{N}{N_{kr}} \quad (6.7)$$

For at f_m fra 6.5 skal bli lik f_m fra 6.6 må

$$\frac{C_{m,u}}{\cos(\frac{kL}{2})} = \frac{C_{m,s}}{1 - \alpha} \quad (6.8)$$

som gir at

$$C_{m,s} = C_{m,u} \frac{1 - \alpha}{\cos(\frac{kL}{2})} \quad (6.9)$$

6.2 Tilnærmede metoder og definisjon av C_m

6.2.1 Generelt

De tre tilnærmede metoder som skal studeres baserer seg på følgende

1. Konvensjonell metode.
2. Metode som baserer seg på forslag av J. Helleland [12].
3. Metode som baserer seg på forslag av M. Villette [4].

6.2.2 Konvensjonell metode

Men utgangspunkt i relasjon 6.1 på side 40 kan momentforstørrelsesfaktoren f_m uttrykkes ved

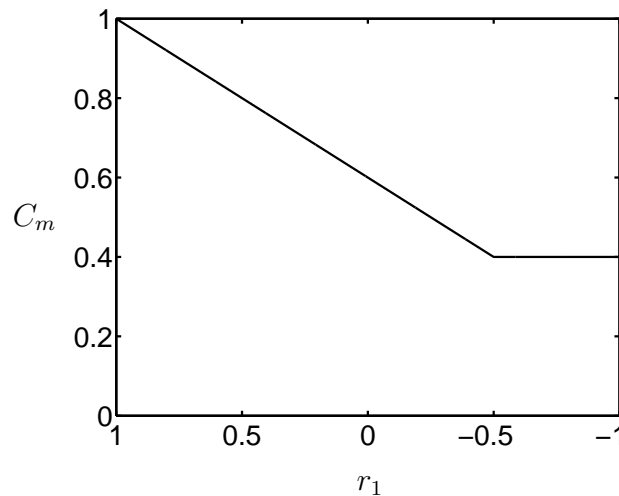
$$f_m = \frac{C_m}{1 - \alpha} \geq 1 \quad (6.10)$$

der

$$C_m = 0.6 + 0.4r_1 \geq 0.4 \quad (6.11)$$

der relasjon 6.10 er en variant av relasjon 6.6. Det som gjør at denne metoden har fått navnet konvensjonell er fordi denne metoden er mye brukt i amerikanske [1] og i en hel rekke andre lands regler. Ovennevnte relasjon kan også bl.a. finnes omtalt i [5].

Jeg har plottet C_m som funksjon av r_1 , og resultatet er vist i figur 6.2.



Figur 6.2: C_m som funksjon av r_1 .

6.2.3 Forslag av J. Helleland

Fra *Hellelands* notater [12], kan en momentforstørrelsesfaktor for en søyle med vilkårlig innspenning uttrykkes ved

$$\begin{aligned} M_{maks} &= f_m M_{1B} \quad \text{der } M_{1B} \text{ er største 1. ordens endemoment} \\ f_m &= C_m f_{m1} \geq 1 \end{aligned} \quad (6.12)$$

der

$$f_{m1} = \frac{1 + 0.9\alpha(1 - \beta)}{\cos(\frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha})} \quad \text{alt.} \quad f'_{m1} = \frac{1 + 0.45(\frac{1}{\beta} - 1)}{\cos(\frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha})} \quad (6.13)$$

der β er enten eksakt knekk lengdefaktor, β_{eks} eller konvensjonell knekk lengde, β_{kon} (basert på konvensjonell stivhetsfordeling). Disse gjelder for uniform (konstant) 1. ordens momentfordeling ($r_1 = 1$).

Hvis en 1. ordens momentgradient er forskjellig fra 1, må en multiplisere med en momentgradientfaktor C_m .

De C_m som er å finne i litteraturen er noen knyttet til en forstørrelsesfaktor av typen $1/(1-\alpha)$ og noen til $1/\cos(\frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha})$. C_m blir da gjerne omtalt som hhv. $C_{m,s}$ og $C_{m,u}$.

Et forslag til C_m som brukes i denne sammenheng, hentet fra *Helleslands* notat [12], er på formen

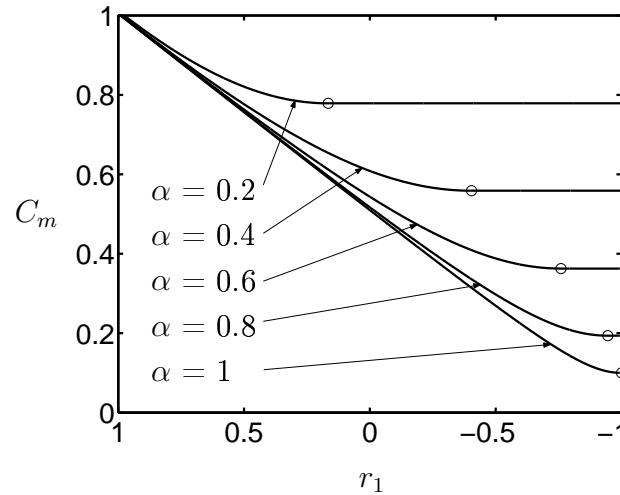
$$C_m = \sqrt{\frac{1.04 + r_1^2 - 2r_1 \cos(\pi\sqrt{\alpha})}{2(1 - \cos(\pi\sqrt{\alpha}))}}, \quad C_m \leq 1, \quad \text{for } r_1 \geq \cos(\pi\sqrt{\alpha}) \quad (6.14)$$

$$C_m = \sqrt{\frac{1.04 - \cos^2(\pi\sqrt{\alpha})}{2(1 - \cos(\pi\sqrt{\alpha}))}} \quad \text{for } r_1 < \cos(\pi\sqrt{\alpha}) \quad (6.15)$$

Disse kan gjerne også kalles $C_{m,u}$.

Jeg har plottet denne C_m , (ligning 6.14 og 6.15) og vist resultatet i figur 6.3.

Det er også ringet rundt det punktet der $r_1 = \cos(\pi\sqrt{\alpha})$. Videre kan det også se ut som C_m kan bli større enn 1 for lave verdier av α , men dette blir forhindret av 6.14.



Figur 6.3: C_m som funksjon av r_1 og α .

6.2.4 Forslag av M. Vilette

Den siste metoden som skal undersøkes er basert på et forslag fra *Vilette* og er omtalt i [4], der C_m er på formen

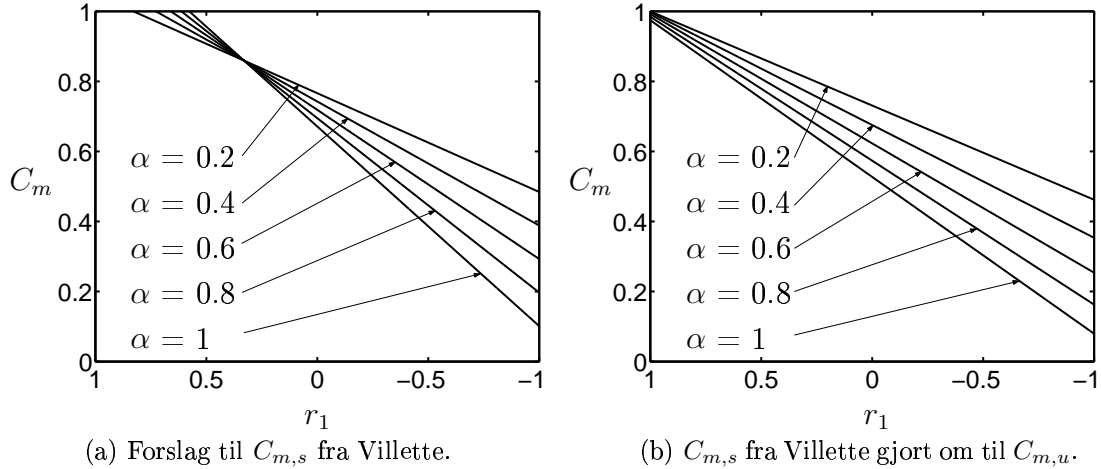
$$C_m = 0.79 + 0.21r_1 + 0.36(r_1 - 0.33)\alpha \quad (6.16)$$

Jeg har plottet relasjon 6.16 for noen valg av α , og vist resultatet i figur 6.4a under. Når denne $C_{m,s}$ omgjøres til en $C_{m,u}$ ved hjelp av relasjon 6.8, kan $C_{m,u}$ plottes, og noen eksempler med forskjellig valg av α har jeg vist i figur 6.4b.

For å beregne maksimalt moment benyttes relasjon 6.1 der f_m er definert ved 6.5 eller 6.6.

6.3 Kort diskusjon og oppsummering

De tre metodene for tilnærmet beregning av maksimalt moment som nå er gjennomgått, er alle uttrykt med en C_m . Kun metoden der konvensjonell C_m benyttes, blir det ikke hensyn til α i uttrykket, og dette betyr at det i mange situasjoner



Figur 6.4: C_m som funksjon av r_1 og α .

fåes en grov tilnærmelse av maksimalt moment.

Ved hjelp av relasjonene

$$\alpha = \alpha_E(\beta_{eks})^2 \quad (6.17)$$

og

$$\alpha = \alpha_E(\beta_{kon})^2 \quad (6.18)$$

kan metodene uttrykkes slik at tilnærmet beregning av maksimalt moment gjøres med bruk av eksakt og konvensjonell knekk lengdefaktor hhv. Konvensjonell knekk lengdefaktor blir beregnet etter konvensjonell stivhetsfordeling. Som nevnt tidligere vil eksakt og konvensjonell knekk lengdefaktor være like for en enkeltsøyle, men forskjellige når det betraktes et system bestående av flere søyler, mer om dette i neste kapittel.

Ovesikt over metodene og faktorene som benyttes

1. Eksakt utregning etter 2. ordens teori:
 - Totale momenter (2. ordens teori)

- For en enkeltsøyle med vilkårlig innspenning trengs det å definere stivheten på fjærene som opptrer i søylens ender pga. bjelker eller fjærer (k_A, k_B for hhv. knutepunkt A og B).
 - 1. ordens momentgradient r_1 for søylen må defineres.
2. Tilnærmet utregning med *Konvensjonell* metode med bruk av eksakt knekk-lengdefaktor β_{eks} . Siden dette er en metode som er mye brukt har den navnet *Konvensjonell* metode.
 - Benytter en faktor C_m , denne blir gjennomgått siden, nærmere bestemt relasjon 6.11 på side 43
 3. Tilnærmet utregning basert på forslag fra Hellesland, *Hellesland* metode med bruk av eksakt knekk-lengdefaktor β_{eks} .
 - En faktor C_m og f_{m1} som er basert på et forslag fra Hellesland må defineres, dette blir gjennomgått siden, nærmere bestemt kapittel 6.2.3 på side 43.
 4. Tilnærmet utregning basert på forslag fra Villette, *Villette* metode med bruk av eksakt knekk-lengdefaktor β_{eks} .
 - En faktor C_m som er basert på et forslag fra Villette, og en gjennomgåelse av denne blir gjort senere, nærmere bestemt kapittel 6.2.4 på side 45.
 5. For de tilnærmede metodene trenger man også å definere:
 - To rotasjonsstivheter (k_A og k_B). Begge må defineres for å kunne beregne eksakt knekk-lengdefaktor β_{eks} .
 - 1. ordens momentgradient r_1 for søylen må defineres.

Kapittel 7

Beregning av tilnærmet maksimalt moment for en ramme

7.1 Generelt

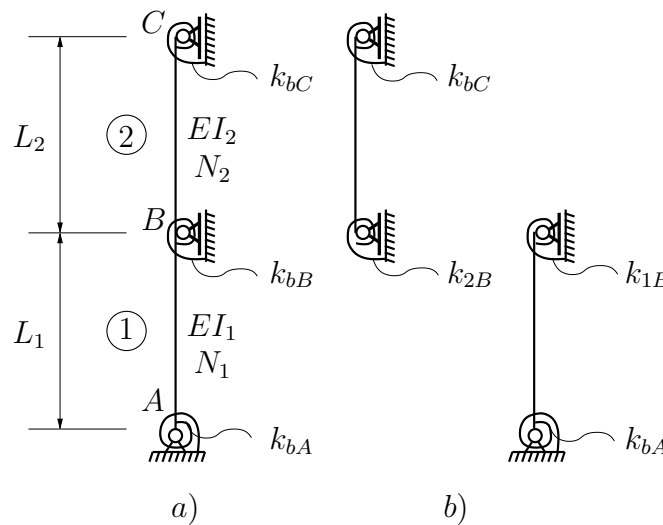
I kapittel 6 ble det gjennomgått hvordan tilnærmet maksimalt moment kunne beregnes for en enkeltsøyle der det ble benyttet eksakt knekk lengdefaktor. Det samme formelverket benyttes også når det skal beregnes tilnærmet maksimalt moment for søyler som er del av et større system, men det må da taes i bruk eksakt systemknekk lengdefaktor for den søylen som skal betraktes, mer om dette senere.

Det skal nå benyttes en annen knekk lengdefaktor istedenfor eksakt systemknekk lengdefaktor. Knekk lengdefaktoren som her benyttes, kalles konvensjonell knekk lengdefaktor og er mye brukt i rutinemessig konstruksjon, og er basert på konvensjonell fordeling av stivhet mellom søyler som møtes i et knutepunkt. Den konvensjonelle knekk lengdefaktoren som benyttes betegnes $\beta_{kon,i}$ der “i” angir søylenumeret. Knekk faktoren $\beta_{kon,i}$ blir beregnet etter at stivhetene i et knutepunkt er fordelt med bruk av relasjon 3.5 side 30. Som forklart over er denne metoden aktuell for systemer der man har flere søyler sammen, og ikke aktuell kun en enkeltsøyle (ingen fordeling), derfor valgte jeg å skille den ut i et eget kapittel.

7.2 Beregning av maksimalt moment med bruk av $\beta_{kon,i}$

Stivhetsfordeling etter konvensjonell fordeling skjer på følgende vis for en søyle over to plan, se figur 7.1 for detaljer (og [10] for nærmere beskrivelse).

$$k_{iB} = k_{bB} \frac{EI_i/L_i}{EI_i/L_i + EI_j/L_j} \quad \text{der } i \neq j \text{ og } i, j = 1, 2 \quad (7.1)$$



Figur 7.1: To etasjes søyle (a), med “isolert” betraktning (b).

Eksempelvis kan maksimalt moment i form av en momentforstørrelsesfaktor, f_m , beregnet etter konvensjonell metode (se side 42), med konvensjonell kneklengdefaktor, skives på formen

$$\frac{M_{maks}}{M_{1Bj}} = \frac{C_m}{1 - \alpha_{Ei}(\beta_{kon,i})^2} \geq 1 \quad (7.2)$$

der C_m er tidligere gitt ved relasjon 6.11, men r_1 har nå en indeks ekstra og er på formen

$$C_m = 0.6 + 0.4r_{1,i} \geq 0.4 \quad \text{der } i = 1, 2 \quad (7.3)$$

I relasjon 7.3 inngår 1 førsteordens momentgradient $r_{1,1}$ eller $r_{1,2}$, avhengig av hvilken søyle som skal betraktes.

Relasjon 7.2 er den samme som relasjon 6.10 men er nå uttrykt med $\beta_{kon,i}$.

For relasjon 7.2 gjelder følgende: Når søyle 1 undersøkes, er $i=1$ og $j=A$, og når søyle 2 betraktes, er $i=2$ og $j=C$.

7.3 Beregning av maksimalt moment med bruk av $\beta_{eks,i}$

Ved beregning av tilnærmet maksimalt moment for en søyle som er del av et større, med bruk av eksakt knekk lengdefaktor, må eksakt systemknekk lengdefaktor for søylen som skal betraktes, benyttes. Hvordan man finner denne er tidligere beskrevet i kapittel 5.3. Når denne er beregnet, kan momenforstørrelsesfaktoren for eksempelvis Villettes metode skrives på formen

$$\frac{M_{maks}}{M_{1Bj}} = \frac{C_m}{1 - \alpha_{Ei}(\beta_{eks,i})^2} \geq 1 \quad (7.4)$$

C_m er tidligere gitt ved relasjon 6.16, men r_1 har nå en indeks ekstra som gir

$$C_m = 0.79 + 0.21r_{1,i} + 0.36(r_{1,i} - 0.33)\alpha_{Ei}(\beta_{eks,i})^2 \text{ der } i = 1, 2 \quad (7.5)$$

For relasjon 7.4 gjelder følgende: Når søyle 1 undersøkes, er $i=1$ og $j=A$, og når søyle 2 betraktes, er $i=2$ og $j=C$.

7.4 Kort diskusjon og oppsummering

Metoden som baserer seg på bruk av konvensjonell knekk lengdefaktor, kan betraktes når et system bestående av flere søyler studeres. Betraktes det kun en enkeltsøyle fåes ingen fordeling av stivhet, og bruk av eksakt og konvensjonell knekk lengdefaktor gir like resultater.

Oversikt over metoder og faktorer som benyttes

1. *Eksakt* utregning etter 2. ordens teori:
 - Totale momenter (2. ordens teori)
 - Rotasjonsstivhet som opptrer i søylens ender pga. bjelker eller fjærer (k_{bA} , k_{bB} og k_{bC} for hhv. knutepunkt A , B og C , indeksen “b” står for bjelke). Alle tre må defineres.
 - To 1. ordens momentgradienter må defineres ($r_{1,1}$ og $r_{1,2}$ for hhv. søyle 1 og 2.). Dette er nødvendig fordi etter at systemet er forenklet, består det av tre frihetsgrader.
 - Forholdene mellom søylene må være kjent (bøvestivhetsforhold, $\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$, og aksiallast-lengdeforhold, $\frac{N_1L_1}{N_2L_2}$).
2. *Tilnærmet* utregning med bruk av *eksakt* knekkklengdefaktor β_{eks} er som tidligere definert, men nå består systemet av to systemknekkklengdefaktorer, $\beta_{eks,1}$ og $\beta_{eks,2}$ for hhv. søyle 1 og 2, så det må definere følgende:
 - Tre rotasjonsstivheter må defineres (k_{bA} , k_{bB} og k_{bC}). Alle tre må defineres for å kunne beregne eksakt knekkklengdefaktor $\beta_{eks,i}$ der indeksen $i = 1, 2$. (“i” angir nummeret på søylensom skal betraktes).
 - Definerer kun en 1. ordens momentgradient, den som tilhører den søylen som skal betraktes.
 - Faktorene C_m er som tidligere bestemt.
3. *Tilnærmet* utregning med bruk av *konvensjonell* knekkklengdefaktor $\beta_{kon, i}$ (“i” angir nummeret på søylen som skal betraktes).
 - To rotasjonsstivheter må defineres, hhv. de som er i hver ende av den søylen som skal betraktes. Den ene rotasjonsstivheten (skal senere komme tilbake til hvilken) er med på å bestemme konvensjonell knekkklengdefaktor $\beta_{kon, i}$. Beregningen skjer etter konvensjonell fordeling av stivhetene til søylene, som møtes i et knutepunkt (dette blir gjennomgått siden, nærmere bestemt kapittel 7.2 på side 49).
 - Definerer kun en 1. ordens momentgradient, den som tilhører den søylen som skal betraktes.
 - Det benyttes faktorene C_m som tidligere bestemt, men det benyttes konvensjonell knekkklengdefaktor $\beta_{kon,i}$ istedenfor $\beta_{eks,i}$.

Kapittel 8

Resultater for enkeltsøyle

8.1 Valg av søyler som skal undersøkes

8.1.1 Generelt

I denne delen av resultatene som omhandler beregninger utført på en enkeltsøyle, skal det studeres tre forskjellige søyletilfeller. I kapittel 3.5 på side 29 ble det vist hvordan en søyle kunne modelleres ved hjelp av en rotasjonsfjær i hver ende. Størrelsen på fjærstivheten bestemmer hvor stor grad av innspenning søylen har (liten stivhet gir lav innspenning og visa versa). De tilfellene som skal undersøkes er illustrert som idealtifeller (se side 29), så verdiene på fjærstivhetene som velges er ikke 100 prosent korrekte, men er gode nok, og ikke langt fra sannheten. Definisjon og illustrasjon av søyletilfellene som skal studeres, blir nå gjennomgått i de neste tre underkapittelene.

8.1.2 Definisjon av søyletilfelle 1

En fritt opplagret søyle (Euler-søyle) slik som vist i figur 1.1a på side 4.

8.1.3 Definisjon av søyletilfelle 2

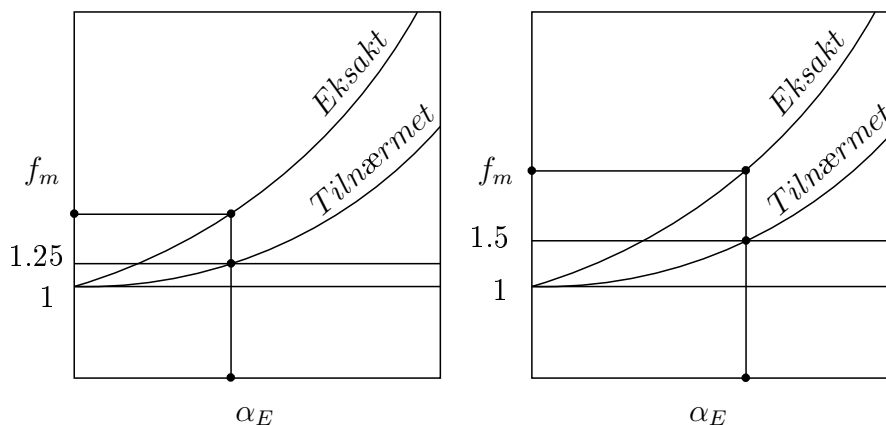
Søyle som er fast innspent ved en ende og fri til å rotere ved andre ende, en illustrasjon er vist i figur 1.1b på side 4 (som også ble betraktet i kapittel 8.4).

8.1.4 Definisjon av søyletilfelle 3

Søyle som er fast innspent ved begge ender, en illustrasjon er vist i figur 1.1c på side 4 (tidligere undersøkt i kapittel 8.4).

8.2 Hvordan resultatene fremlegges

Det er valgt å sammenligne eksakt og tilnærmet maksimalt moment, eller nærmere bestemt momentforstørrelsesfaktoren, f_m , ved en og samme verdi bestemt av den tilnærmede metoden. Av praktiske grunner har jeg valgt å sette denne verdien til $f_m = 1.25$ og $f_m = 1.5$, dvs. når den tilnærmede metoden oppnår en momentforstørrelsesfaktor som tilsvarer $f_m = 1.25$ og 1.5 , blir den sammenlignet med eksakt verdi, figuren under illustrerer dette.



Figur 8.1: Beregningene foretas der den tilnærmede kurven gir $f_m = 1.25$ og 1.5 .

Alle resultatene som fremkommer blir vist i tabeller ved et utvalg av forskjellige 1. ordens momentgradienter, r_1 . For tilfelle 1 er det i tillegg til tabeller også valgt

å ta med noen figurer som illustrerer noen av momentforstørrelsesforløpene, det er valgt å kutte kurvene ved $f_m = 4$, slik at det praktiske området fremkommer. Det er å merke seg at tilfelle 1 er litt spesielt da $\alpha = \alpha_E$ fordi $\beta = 1$, dette medfører også at momentforstørrelsesfaktoren går mot uendelig ved $\alpha = 1$. I de neste tre kapitlene blir de tre tilnærmede metodene behandlet hver for seg, og avsluttes med en diskusjon.

8.3 Resultater for enkeltsøyle basert på konvensjonell metode

8.3.1 Generelt

Dette avsnittet tar for seg momentforstørrelsesfaktoren, f_m , beregnet med C_m definert ved relasjon 6.10 på side 43, og denne benyttes ved beregning av de tre søyletilfellene definert tidligere i kapittel 8.1 på side 52. I tabell 8.1 - 8.6 er det utregnet hva forholdet mellom eksakt og tilnærmet momentforstørrelsesfaktor er i punktet der $f_{m,Konvensjonell}$ har verdien 1.25 og 1.5, for noen forskjellige valg av r_1 .

8.3.2 Presentasjon av resultater, tilfelle 1 - tilfelle 3

Tilfelle 1

Tilfelle 1 tar for seg søyletilfellet definert på side 52, og fra figur 8.2 kommer det frem at den tilnærmede kurven av momentforstørrelsesfaktoren går fra å være på den usikre siden ($r_1 = 0.5$) til å være på den sikre siden ($r_1 = -0.75$). Beste tilnærming er i området der $r_1 = 0$. Momentforstørrelsesfaktorene for verdien $f_{m,Konvensjonell}$ lik 1.25 og 1.5 blir sammenlignet med eksakt utregnet momentforstørrelsesfaktor, og vises i tabell 8.1 og 8.2 på side 55 hhv. En diskusjon av tabellene nevnt over kommer senere, nærmere bestemt i kapittel 8.3.3.

Tilfelle 2

Tilfelle 2 tar for seg søyletilfellet definert på side 53. For dette søyletilfellet er det valgt å vise resultatene kun i tabeller, og i tabell 8.3 på side 57, og i tabell 8.4

på side 57, kommer det frem hva forholdet mellom eksakt og tilnærmet momentforstørrelsesfaktor er for verdien $f_{m,Konvensjonell}$ lik 1.25 og 1.5 hhv. En diskusjon av disse tabellene kommer først senere i kapittel 8.3.3.

Tilfelle 3

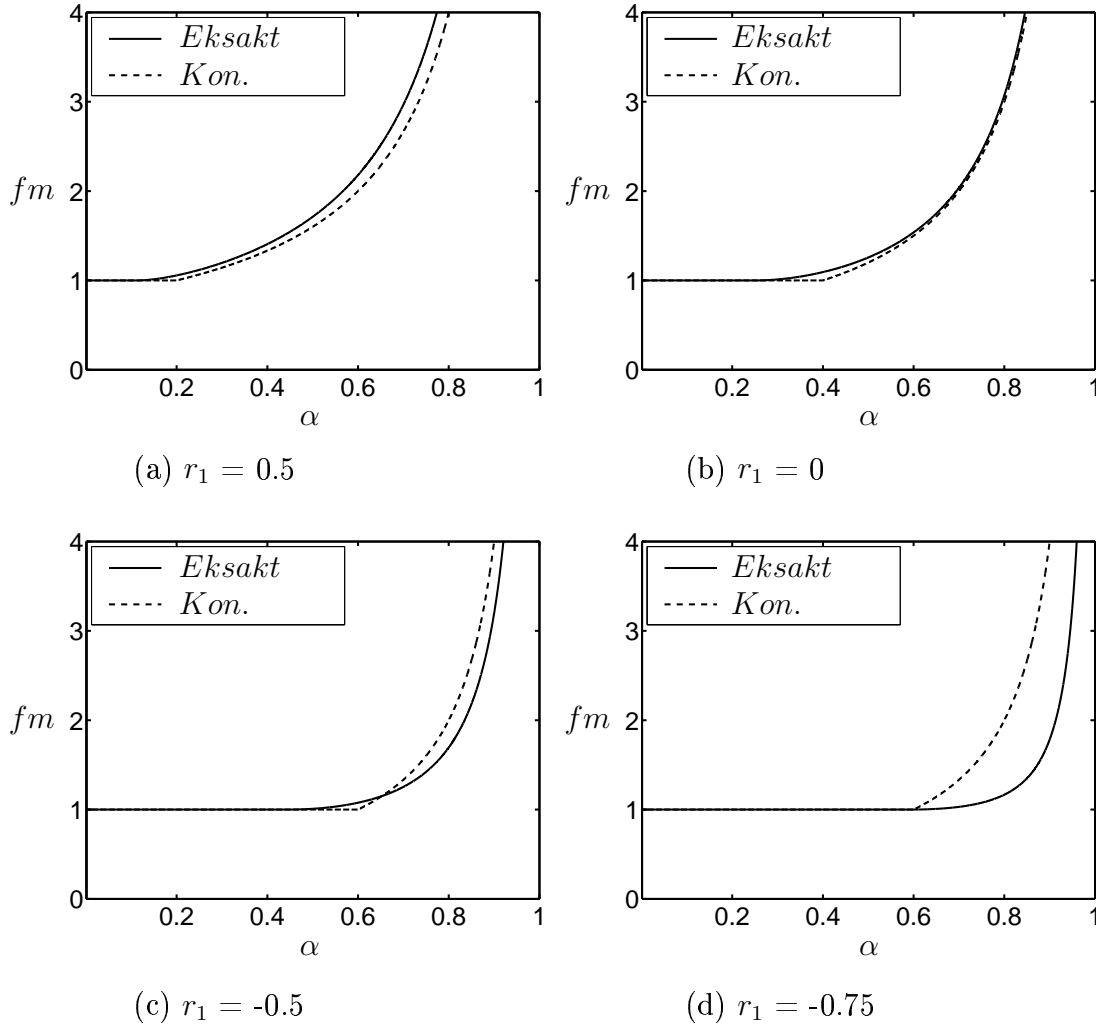
Tilfelle 3 tar for seg søyletilfellet definert på side 53. For dette søyletilfellet er det igjen valgt å vise resultatene kun i tabeller, og i tabell 8.5 og 8.6 på side 57, kommer det frem hva forholdet mellom eksakt og tilnærmet momentforstørrelsesfaktor er for verdien $f_{m,Konvensjonell}$ lik 1.25 og 1.5 hhv. Først etter at tabellene er vist, vil en diskusjon fremkomme, se neste side kapittel 8.3.3.

Tabell 8.1: Tilfelle 1 (med $\bar{k}_A = 0.0001$ og $\bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.25$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Konvensjonell}}{f_{m,eks}}$
1	1	0.200	1.310	0.954
	0.75	0.280	1.309	0.954
	0.5	0.360	1.313	0.952
	0	0.520	1.302	0.960
	-0.5	0.680	1.205	1.037
	-0.75	0.680	1.019	1.227
	-1	0.680	1.000	1.250

Tabell 8.2: Tilfelle 1 (med $\bar{k}_A = 0.0001$ og $\bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Konvensjonell}}{f_{m,eks}}$
1	1	0.333	1.623	0.924
	0.75	0.400	1.610	0.932
	0.5	0.467	1.597	0.939
	0	0.600	1.538	0.975
	-0.5	0.733	1.357	1.106
	-0.75	0.733	1.057	1.419
	-1	0.733	1.000	1.500



Figur 8.2: Momentforstørrelsesfaktor, f_m , eksakt og tilnærmet for tilfelle 1. Tilnærmet kurve er beregnet etter *konvensjonell* metode. For å simulere fri innspenning i endene er det valgt å bruke $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.0001$.

8.3.3 Diskusjon

Tilfelle 1:

Fra tabellene (8.1 og 8.2) fremkommer det at tilnærmelsen er bedre for $f_{m,Konvensjonell} = 1.25$ enn for den lik 1.5, men felles for begge er at resultatene går til den sikre siden for negativ 1. ordens momentgradient.

Tabell 8.3: Tilfelle 2 (med $\bar{k}_A = 10000$ og $\bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.25$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Konvensjonell}}{f_{m,eks}}$
0.699	1	0.409	1.361	0.918
	0.75	0.573	1.421	0.879
	0.5	0.736	1.490	0.839
	0	1.064	1.640	0.762
	-0.5	1.391	1.780	0.702
	-0.75	1.391	1.437	0.870
	-1	1.391	1.162	1.076

Tabell 8.4: Tilfelle 2 (med $\bar{k}_A = 10000$ og $\bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Konvensjonell}}{f_{m,eks}}$
0.699	1	0.682	1.732	0.866
	0.75	0.818	1.793	0.836
	0.5	0.955	1.861	0.806
	0	1.227	2.003	0.749
	-0.5	1.500	2.120	0.708
	-0.75	1.500	1.662	0.903
	-1	1.500	1.272	1.179

Tabell 8.5: Tilfelle 3 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$). Resultatene er målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.25$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Konvensjonell}}{f_{m,eks}}$
0.5	1	0.800	1.424	0.878
	0.75	1.119	1.464	0.854
	0.5	1.439	1.499	0.834
	0	2.079	1.524	0.820
	-0.5	2.719	1.381	0.905
	-0.75	2.719	0.947	1.320
	-1	2.719	0.819	1.526

Tabell 8.6: Tilfelle 3 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$). Resultatene er målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Konvensjonell}}{f_{m,eks}}$
0.5	1	1.333	1.869	0.803
	0.75	1.599	1.903	0.788
	0.5	1.866	1.928	0.778
	0	2.399	1.912	0.784
	-0.5	2.932	1.667	0.900
	-0.75	2.932	1.068	1.404
	-1	2.932	0.846	1.776

Tilfelle 2:

For dette tilfellet svinger resultatene litt opp og ned (se tabell 8.3 og 8.4), og er så å si alltid til den usikre siden. For positiv 1. ordens momentgradient er $f_{m,Konvensjonell}$ best tilnærmet ved lav verdi (1.25), og for negativ 1. ordens momentgradient er tilnærmelsen bedre ved høy verdi (1.5).

Tilfelle 3:

Her vises noe av samme tendens som for tilfelle 2 (se tabell 8.5 og 8.6). Resultatene som er til den usikre siden er for positiv 1. ordens momentgradient, men går mot, og over til den sikre siden etter hvert som 1. ordens momentgradient blir mer negativ.

Totalt:

Fra resultatene (fra tabell 8.1 - 8.6) kan man med trygghet si at beste tilnærming er for tilfelle 1. Selv om mange av resultatene er til den usikre siden er det lite svingninger. Det er også å merke seg at α_E er konstant for negativ 1. ordens momentgradient, årsaken til dette ligger i relasjonen 6.10.

8.4 Resultater for enkeltsøyle basert på forslag fra Hellesland

8.4.1 Generelt

Det taes utgangspunkt i momentforstørrelsesfaktoren, f_m , i relasjon 6.12 på side 44. Videre benyttes f_{m1} definert ved relasjon 6.13, og C_m definert ved 6.14 og 6.15 (Denne metoden er basert på en metode utviklet av Hellesland, og jeg har valgt å kalle denne metoden for *Hellesland*). I tabell 8.7 - 8.12 er det utregnet hva forholdet mellom eksakt og tilnærmet momentforstørrelsesfaktor er for tilfellet der $f_{m,Hellesland}$ er lik 1.25 og 1.5, for noen forskjellige valg av r_1 .

8.4.2 Presentasjon av resultater, tilfelle 1 - tilfelle 3

Tilfelle 1

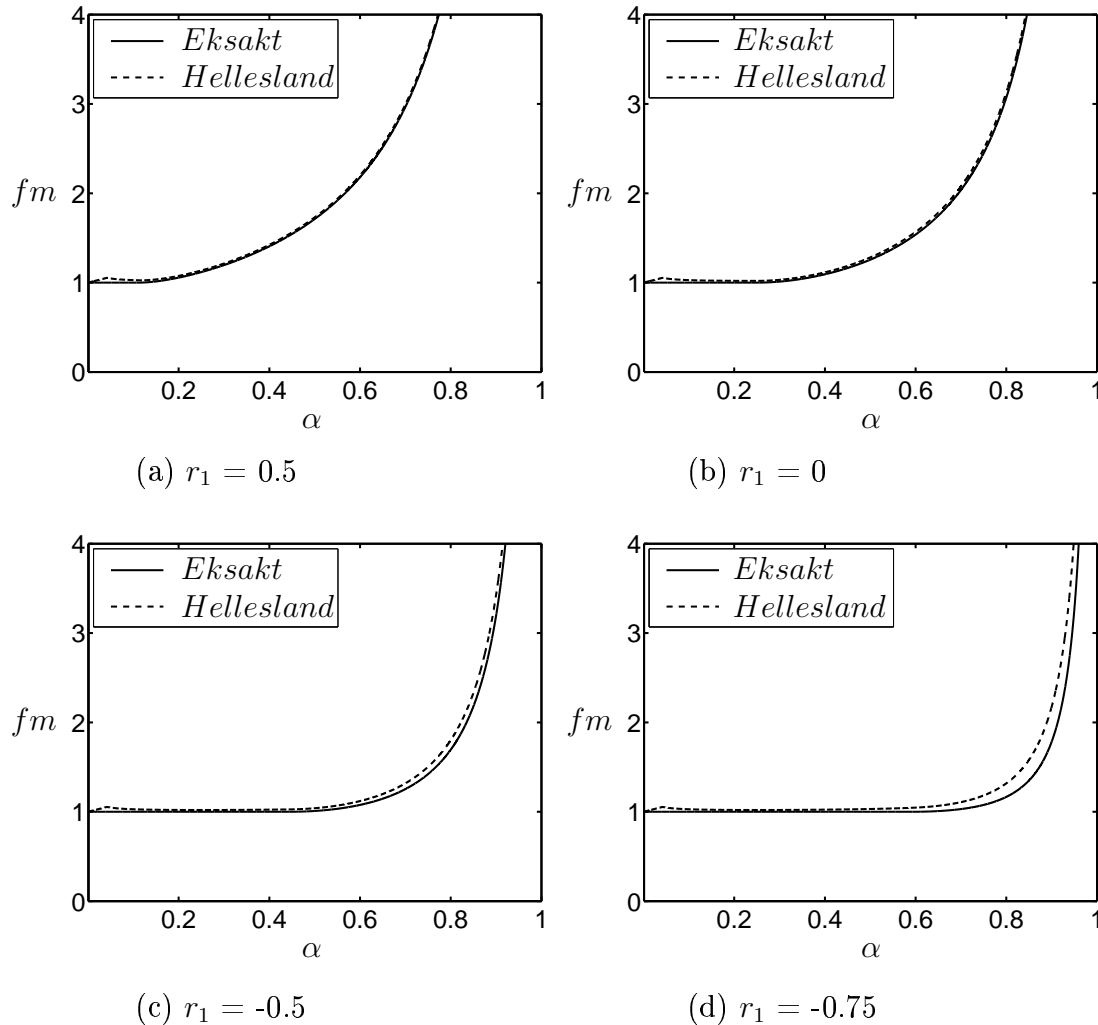
Tilfelle 1 tar for seg søyletilfellet definert på side 52, og fra figur 8.3 kommer det frem at den tilnærmede kurven for momentforstørrelsesfaktoren nesten overlapper eksakt kurve ved positiv 1. ordens momentgradient, til totalt å være på den sikre siden ettersom 1. ordens momentgradient blir negativ. Beste tilnærmelse er i området der $r_1 = 0.5$. Momentforstørrelsesfaktorene for verdien $f_{m,Hellesland}$ lik 1.25 og 1.5 blir sammenlignet med eksakt utregnet momentforstørrelsesfaktor, og vises i tabell 8.7 og 8.8 på side 61, hhv. En nærmere diskusjon av tabellene nevnt over kommer senere, nærmere bestemt i kapittel 8.4.3 under.

Tilfelle 2

Tilfelle 2 tar for seg søyletilfellet definert på side 53. For dette søyletilfellet er det valgt å vise resultatene kun i tabeller, og i tabell 8.9 på side 61, og i tabell 8.10 på side 62, kommer det frem hva forholdet mellom eksakt og tilnærmet momentforstørrelsesfaktor er for verdien $f_{m,Hellesland}$ lik 1.25 og 1.5 hhv. En diskusjon av disse tabellene kommer først senere i kapittel 8.4.3 som starter nedenfor.

Tilfelle 3

Tilfelle 3 tar for seg søyletilfellet definert på side 53. For dette søyletilfellet er det igjen valgt å vise resultatene kun i tabeller, og i tabell 8.11 og 8.12 på side 62, kommer det frem hva forholdet mellom eksakt og tilnærmet momentforstørrelsesfaktor er for verdien $f_{m,Hellesland}$ lik 1.25 og 1.5 hhv. Først etter at tabellene er vist, vil en diskusjon fremkomme, nærmere bestemt i kapittel 8.4.3 under.



Figur 8.3: Momentforstørrelsesfaktor, f_m , eksakt og tilnærmet for tilfelle 1. Tilnærmet kurve er beregnet etter et forslag fra Hellesland, *Hellesland* metode. For å simulere fri innspenning er det valgt å bruke $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.0001$.

Tabell 8.7: Tilfelle 1 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Helleland} = 1.25$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Helleland}}{f_{m,eks}}$
1	1	0.158	1.232	1.015
	0.75	0.241	1.234	1.013
	0.5	0.320	1.233	1.014
	0	0.485	1.226	1.020
	-0.5	0.674	1.192	1.048
	-0.75	0.779	1.121	1.115
	-1	0.869	1.000	1.250

Tabell 8.8: Tilfelle 1 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Helleland} = 1.5$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Helleland}}{f_{m,eks}}$
1	1	0.281	1.487	1.009
	0.75	0.356	1.485	1.010
	0.5	0.429	1.483	1.012
	0	0.581	1.471	1.020
	-0.5	0.749	1.419	1.057
	-0.75	0.838	1.292	1.161
	-1	0.889	1.000	1.500

Tabell 8.9: Tilfelle 2 (med $\bar{k}_A = 10000$ og $\bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Helleland} = 1.25$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Helleland}}{f_{m,eks}}$
0.699	1	0.268	1.217	1.027
	0.75	0.415	1.246	1.003
	0.5	0.552	1.268	0.986
	0	0.835	1.311	0.953
	-0.5	1.159	1.354	0.923
	-0.75	1.321	1.332	0.938
	-1	1.342	1.126	1.110

Tabell 8.10: Tilfelle 2 (med $\bar{k}_A = 10000$ og $\bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Hellesland}}{f_{m,eks}}$
0.699	1	0.492	1.460	1.027
	0.75	0.630	1.496	1.002
	0.5	0.766	1.532	0.979
	0	1.054	1.623	0.924
	-0.5	1.393	1.785	0.840
	-0.75	1.585	1.920	0.781
	-1	1.690	1.663	0.902

Tabell 8.11: Tilfelle 3 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.25$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Hellesland}}{f_{m,eks}}$
0.5	1	0.471	1.224	1.022
	0.75	0.733	1.213	1.031
	0.5	0.973	1.181	1.058
	0	1.450	1.069	1.169
	-0.5	1.891	0.867	1.442
	-0.75	1.909	0.747	1.674
	-1	1.909	0.766	1.632

Tabell 8.12: Tilfelle 3 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Hellesland}}{f_{m,eks}}$
0.5	1	0.879	1.480	1.013
	0.75	1.131	1.473	1.018
	0.5	1.380	1.451	1.033
	0	1.907	1.368	1.096
	-0.5	2.530	1.203	1.246
	-0.75	2.880	1.033	1.452
	-1	3.024	0.857	1.750

8.4.3 Diskusjon

Tilfelle 1:

Alle resultatene er til den sikre siden og er meget nøyaktige (se tabell 8.7 og 8.8). For positiv 1. ordens momentgradient er alle verdier samlet rundt eksakt, men etter hvert som negativiteten øker, går den tilnærmede metoden mer til den sikre siden.

Tilfelle 2:

For dette tilfellet kommer det frem at resultatene har en tendens til å svinge litt opp og ned (se tabell 8.9 og 8.10), og beste tilnærmelse er for $f_{m,Helleland} = 1.25$. For høyere verdi (1.5) har alle resultatene ett utgangspunkt ved høyere verdi av α_E som medfører at resultatene er mer til den usikre siden. Det er også å merke seg at dårligste tilnærmelse er for $-0,75 < r_1 < -0.5$ for begge målingene (1.25 og 1.5).

Tilfelle 3:

Alle resultatene er til den sikre siden (se tabell 8.11 og 8.12), og beste tilnærmelse er for $r_1 = 1$, og etter hvert som 1. ordens momentgradiet avtar og blir negativ går alle resultatene mer til den sikre siden.

Totalt:

Fra resultatene (se tabell 8.7 - 8.12) fremkommer det at forslaget fra Helleland gir tilnærmet momentforstørrelsesfaktor til den sikre siden for tilfelle 1 og 3, og beste tilnærmelser er i området der $r_1 = 1$, deretter går resultatene mer til den sikre siden. For tilfelle 2 er tilnærmelsen noe til den usikre siden, men stort sett bedre enn for tilfelle 2 for metoden konvensjonell undersøkt tidligere (se tabell 8.3 og 8.4).

For tilfelle 2 ble det oppservert for hvilket område dårligste tilnærmelse ved beregning av momentforstørrelsesfaktoren oppsto, dette skal jeg prøve å forbedre i et nytt forslag til beregningsmetode, der jeg modifierer Hellelands metode, dette kommer detaljert frem i kapittel 9.1 på side 69.

8.5 Resultater for enkeltsøyle basert på forslag fra Vilette

8.5.1 Generelt

Forslaget fra Vilette ble i utgangspunktet utviklet for en fritt opplagret søyle. I tillegg til den fritt opplagrede søylen skal det også gjennomgås hvordan maksimalt moment utvikler seg for tilfeller der det er innspenning ved endene. I dette avsnittet taes utgangspunkt i C_m definert ved 6.16 på side 45 og momentforstørrelsesfaktoren f_m definert ved 6.6 på side 42. (Denne metoden er basert på en metode utviklet av Vilette, og jeg valgt å kalle denne metoden for *Vilette*). I tabell 8.13 - 8.18 er der utregnet hva forholdet mellom eksakt og tilnærmet momentforstørrelsesfaktor er for tilfellet der $f_{m,Vilette}$ er lik 1.25 og 1.5, igjen for noen forskjellige valg av r_1 .

8.5.2 Presentasjon av resultater, tilfelle 1 - tilfelle 3

Tilfelle 1

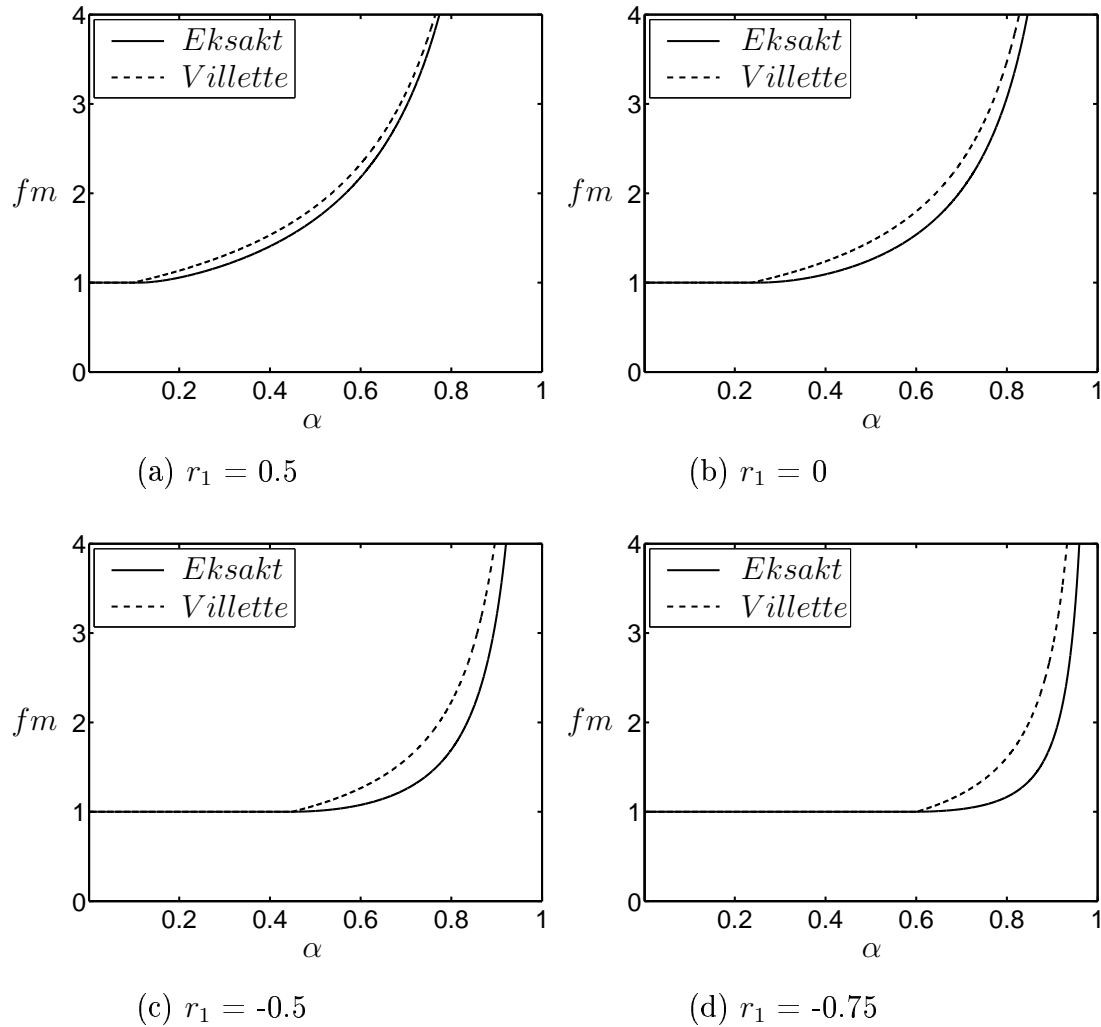
Tilfelle 1 tar for seg søyletilfellet definert på side 52, og fra figur 8.4 på side 65 kommer det frem at alle resultater er til den sikre siden, og beste tilnærmelse er for $r_1 = 0.5$. Det kommer tydelig frem at tilnærmelsen $f_{m,Vilette}$ går fra og overlapper eksakt kurve til totalt være på den sikre siden. Det vises også at graden av sikkerhet øker når r_1 avtar, og beste tilnærmelse fåes for lav verdi av $f_{m,Vilette}$. Momentforstørrelsesfaktorene for verdien $f_{m,Vilette}$ lik 1.25 og 1.5 blir sammenlignet med eksakt utregnet momentforstørrelsesfaktor, og vises i tabell 8.13 og 8.14 på side 66, hhv. En diskusjon av tabellene nevnt over kommer senere, nærmere bestemt i kapittel 8.5.3.

Tilfelle 2

Tilfelle 2 tar for seg søyletilfellet definert på side 53. For dette søyletilfellet er det valgt å vise resultatene kun i tabeller, og i tabell 8.15 på side 66, og i tabell 8.16 på side 67, kommer det frem hva forholdet mellom eksakt og tilnærmet momentforstørrelsesfaktor er for verdien $f_{m,Vilette}$ lik 1.25 og 1.5 hhv. En diskusjon av disse tabellene kommer først senere i kapittel 8.5.3.

Tilfelle 3

Tilfelle 3 tar for seg søyletilfellet definert på side 53. For dette søyletilfellet er det igjen valgt å vise resultatene kun i tabeller, og i tabell 8.17 og 8.18 på side 67, kommer det frem hva forholdet mellom eksakt og tilnærmet momentforstørrelsesfaktor er for verdien $f_{m,Villette}$ lik 1.25 og 1.5 hhv. Først etter at tabellene er vist, vil en diskusjon fremkomme, nærmere bestemt i kapittel 8.5.3.



Figur 8.4: Momentforstørrelsesfaktor, f_m , eksakt og tilnærmet for tilfelle 1. Tilnærmet kurve er beregnet etter forslag fra Villette. For å simulere fri innspenning er det valgt å bruke $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.0001$.

Tabell 8.13: Tilfelle 1 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Villette} = 1.25$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Villette}}{f_{m,eks}}$
1	1	0.167	1.250	1.000
	0.75	0.216	1.189	1.051
	0.5	0.271	1.149	1.088
	0	0.407	1.101	1.135
	-0.5	0.594	1.070	1.168
	-0.75	0.717	1.042	1.199
	-1	0.868	1.000	1.250

Tabell 8.14: Tilfelle 1 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Villette} = 1.5$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Villette}}{f_{m,eks}}$
1	1	0.287	1.501	1.000
	0.75	0.335	1.432	1.047
	0.5	0.388	1.375	1.091
	0	0.514	1.288	1.165
	-0.5	0.679	1.202	1.248
	-0.75	0.781	1.124	1.334
	-1	0.901	1.000	1.500

Tabell 8.15: Tilfelle 2 (med $\bar{k}_A = 10000$ og $\bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Villette} = 1.25$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Villette}}{f_{m,eks}}$
0.699	1	0.343	1.290	0.969
	0.75	0.441	1.272	0.983
	0.5	0.554	1.270	0.984
	0	0.832	1.301	0.957
	-0.5	1.215	1.432	0.873
	-0.75	1.467	1.583	0.790
	-1	1.777	2.050	0.610

Tabell 8.16: Tilfelle 2 (med $\bar{k}_A = 10000$ og $\bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Villette} = 1.5$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Villette}}{f_{m,eks}}$
0.699	1	0.587	1.587	0.945
	0.75	0.684	1.573	0.953
	0.5	0.793	1.572	0.954
	0	1.051	1.618	0.927
	-0.5	1.387	1.772	0.846
	-0.75	1.597	1.963	0.764
	-1	0.843	2.580	0.581

Tabell 8.17: Tilfelle 3 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$). Resultatene er målt ved $f_{m,Villette} = 1.25$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Villette}}{f_{m,eks}}$
0.5	1	0.670	1.340	0.933
	0.75	0.863	1.290	0.969
	0.5	1.083	1.245	1.004
	0	1.626	1.168	1.070
	-0.5	2.375	1.092	1.145
	-0.75	2.867	1.025	1.219
	-1	3.473	0.930	1.344

Tabell 8.18: Tilfelle 3 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$). Resultatene er målt ved $f_{m,Villette} = 1.5$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Villette}}{f_{m,eks}}$
0.5	1	1.148	1.694	0.885
	0.75	1.338	1.642	0.913
	0.5	1.549	1.594	0.941
	0	2.055	1.500	1.000
	-0.5	2.713	1.375	1.091
	-0.75	3.122	1.234	1.216
	-1	3.602	0.955	1.570

8.5.3 Diskusjon

Tilfelle 1

Her kan man med trygghet si at alle resultatene overlapper eksakt kurve, for så totalt være på den sikre siden både for $f_{m,Villette} = 1.25$ og 1.5 (se tabell 8.13 og 8.14). Det er ingen tegn til svingning, og beste tilnærming er for $r_1 = 1$, men etter hvert som 1. ordens momentgradient går fra positiv til negativ, blir graden av sikkerhet økende.

Tilfelle 2

Alle resultatene er til den usikre siden og en tendens til svingning har oppstått (se tabell 8.15 og 8.16). Beste tilnærming er for $r_1 = 0.5$ ved $f_{m,Villette} = 1.25$. Avviket mellom eksakt og tilnærmet øker til den usikre siden etter hver som 1. ordens momentgradient går mot -1 .

Tilfelle 3

Dette tilfellet ligner noe på tilfelle 1, men resultatene starter i det usikre området der $r_1 = 1$, og etter hvert som 1. ordens momentgradient går mot -1 , går resultatene mer og mer over til den sikre siden (se tabell 8.17 og 8.18). Beste tilnærming er for lav $f_{m,Villette}$ (1.25) i områder der $r_1 = 0.5$.

Totalt

Totalt sett vil jeg si at tilfelle 1 er mest gunstig, både fordi alle resultatene er til den sikre siden, og det er ingen tendens til svingninger (se tabell 8.13 - 8.18).

Kapittel 9

Enkeltsøyler - Konklusjon og forslag til forbedring

9.1 Vurdering og konklusjon av tilnærmede metoder

Etter en helhetsvurdering av metodene benyttet, kan jeg med stor grad av sikkerhet si at Helleslands metode er å foretrekke fremfor de andre. Metoden er stabil, lite svingende i forhold til de andre, og ligger stort sett til den sikre siden. Men det er et lite rom for forbedring, og det er temaet i det neste kapitlet. Fra resultatene som til nå er gjennomgått kommer det også frem at Villettes metode ga best resultater for tilfelle 1, kanskje ikke så rart da metoden er utviklet med utgangspunkt i denne modellen. Beste tilnærmelse fåes for lav verdi av f_m , og etter hvert som α_E øker, blir det større avvik mellom eksakt og tilnærmet beregnet momentforstørrelsesfaktor. Generelt for alle metodene for tilfelle 1 og 3 fremkommer det at momentforstørrelsesfaktoren, f_m blir beregnet mer til den sikre siden etter hvert som 1. ordens momentgradient går fra 1 til -1, men altså ikke nødvendigvis bedre tilnærmet (dette skyldes bl.a. faktoren C_m). For tilfelle 2 skjer det motsatte, altså tilnærmelsen går til den usikre siden etter hvert som 1. ordens momentgradient går mot -1. Tilfellene (1,2 og 3) ble spesielt benyttet bl.a. fordi disse er elementærtillfeller og brukt mye som referanser i andre publikasjoner, og ment her som en innledning til det som kommer senere. Det som ingen av tilfellene tar for seg, er situasjoner med negativ innspenning, det er et sentralt tema som blir nøye studert og diskutert for søyler som er del av et større system, mer om dette siden.

9.2 Grunnlag og definisjon av ny “Cm”

Som nevnt tidligere ga tilfelle 1 og 3 gunstige resultater for Helleslands metode (se side 43 for definisjon av metoden), mens for tilfelle 2 var noen av resultatene til den usikre siden. Jeg skal i neste kapittel modifisere gjeldende C_m for Helleslands metode (se C_m på side 44) slik at resultatene blir bedre tilfredsstillende for tilfelle 2. Jeg har gjort en del forsøk med denne nye metoden som fremkommer, og kan si at den nye metoden også tilfredsstiller et stort område av forskjellige innspenninger, men har valgt å ikke ta dette med da oppgaven fort kan bli meget stor.

Fra kapittel 6.2.3 på side 44 ligning 6.12, kommer det frem at

$$f_m = C_m f_{m1} \geq 1, \text{ der } f_{m1} \text{ er gitt ved 6.13 og } C_m \text{ er gitt ved 6.14 og 6.15} \quad (9.1)$$

Med utgangspunkt i denne relasjonen modifiseres det litt slik at

$$f_m = C_{m,mod} f_{m1} \geq 1 \quad (9.2)$$

der f_{m1} er som tidligere, og $C_{m,mod}$ er den nye varianten for C_m , og er som følger

$$C_{m,mod} = \sqrt{\frac{R + r_1^2 - 2r_1 \cos(0.95\pi\sqrt{\alpha + 0.15})}{2(1 - \cos(0.95\pi\sqrt{\alpha + 0.15}))}} \quad (9.3)$$

$$C_{m,mod} \leq 1 \text{ for } r_1 \geq \cos(0.95\pi\sqrt{\alpha + 0.15})$$

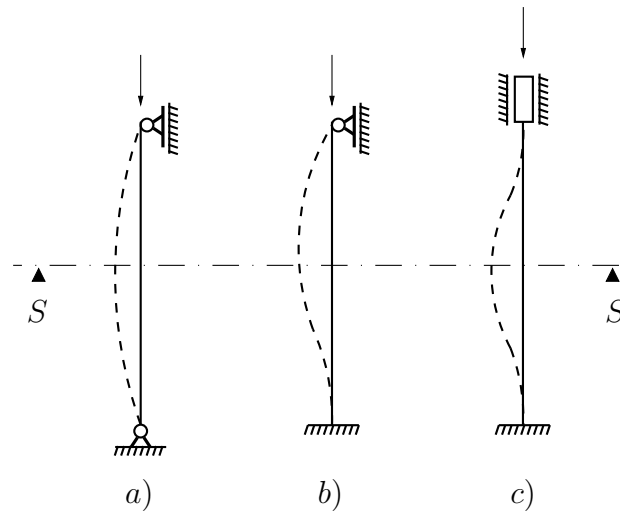
$$C_{m,mod} = \sqrt{\frac{R - \cos^2(0.95\pi\sqrt{\alpha + 0.15})}{2(1 - \cos(0.95\pi\sqrt{\alpha + 0.15}))}} \quad (9.4)$$

$$C_{m,mod} \leq 1 \text{ for } r_1 < \cos(0.95\pi\sqrt{\alpha + 0.15})$$

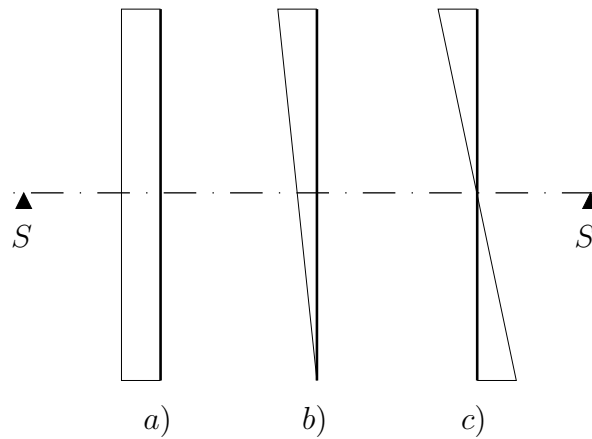
der

$$R = (0.9 - 0.1 \sin(2\pi\beta))(1.12 - 0.13 \sin(2\pi\beta) + 0.1(\cos(\frac{\pi}{2}r_1))^{1.2}) \quad (9.5)$$

Det som er grunnlaget for $C_{m,mod}$ er vist i figur 9.1 og 9.2, og blir forklart under.



Figur 9.1: Søyler med aksilkraft, bøyelinje og symmetriakse (S-S).



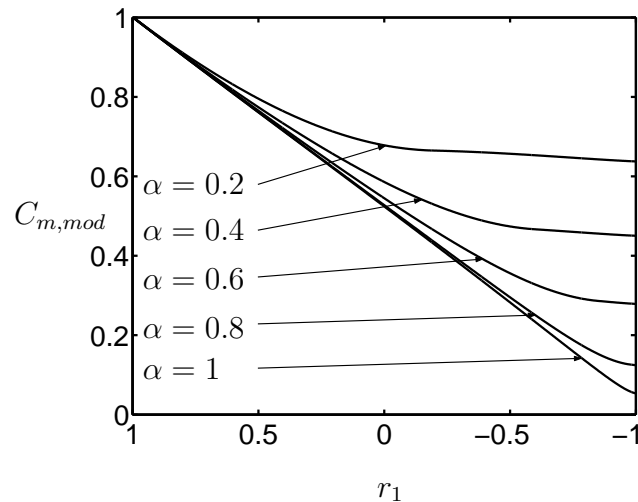
Figur 9.2: Søyler med 1. ordens momentgradient og symmetriakse (S-S).

Fra figur 9.1 er det stipledd inn en senterlinje ved søylens midtpunkt, såkalt symmetriakse. For figur 9.1a og 9.1c vises det at det er full symmetri for bøyelinjen om symmetriaksen, men for figur 9.1b er situasjonen anderledes. Dvs. søyler med lik innspenning i endene blir symmetriske, mens ved forskjellig innspenning vil bøyelinjen avvike fra symmetriaksen. Første ledd i relasjon 9.5 tar hensyn for noe av dette avviket.

I figur 9.2 vises et utvalg av 1. ordens momentgradienter, figur 9.2a og c er i hver sine yttergrenser, mens figur 9.2b ligger midt i mellom. For tilfelle vist i figur 9.2a og c, fremkommer det at det hhv. er full symmetri og antisymmetri om symmetriaksen, mens for tilfellet vist i figur 9.2b er det verken noen av delene. Det som er ønskelig er å korrigere alle tilfeller som ligger mellom full symmetri og antisymmetri, og andre ledd i 9.5 tar hensyn for noe av dette avviket.

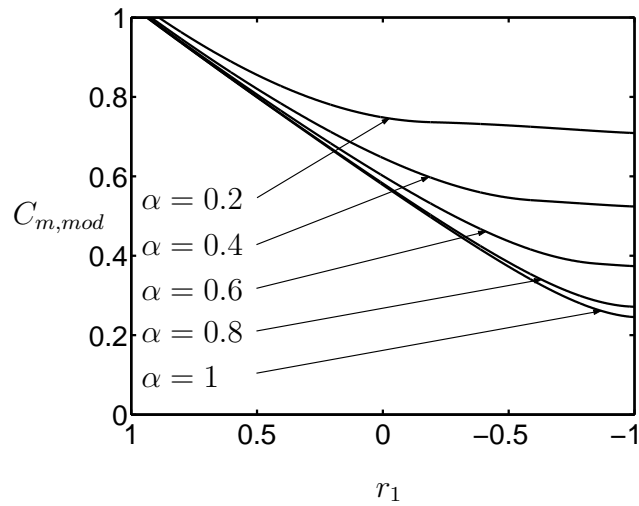
Metoden jeg har benyttet for å komme frem til R definert ved 9.5, består hovedsakelig av mye programmering, og mye forarbeid som “kladd” (ikke vist i dette dokumentet). Dette medførte i en generell formel som ble utgangspunktet, og fra kladd arbeidet fikk jeg en god indikasjon på hva som bør tilfredsstilles mht. betingelser. Det ble tatt hensyn til at jeg ønsket en best mulig og “sikker side” tilnærming av momentforstørrelsesfaktoren, i området $1.25 \leq f_m \leq 1.5$. Fra ovennevnte fremgangsmetode ble det en del “prøv og feil”, som tilslutt ga akseptable resultater.

I figur 9.3-9.5 har jeg vist $C_{m,mod}$ som funksjon av α og r_1 for noen valg av β .

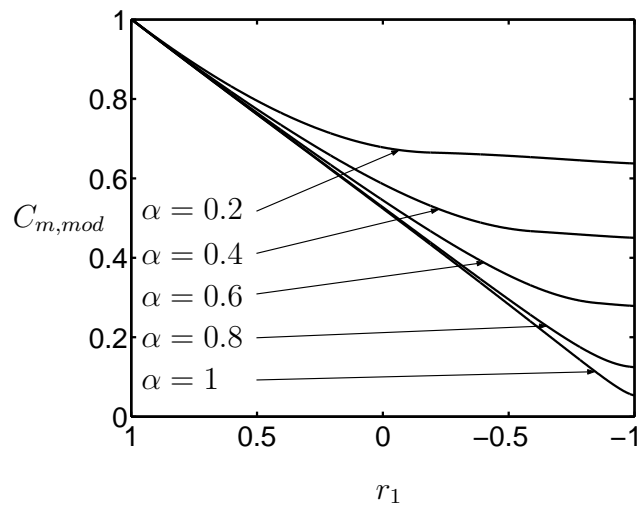


Figur 9.3: $C_{m,mod}$ som funksjon av α , r_1 og β , for dette tilfellet er $\beta = 0.5$.

Siden jeg har utviklet denne metoden ved å modifisere eksisterende metode (Helleslands metode) har jeg ikke valgt å gjøre noen navneendring på metoden. Altså metoden vil fortsatt hete *Hellesland* metode, men det benyttes $C_{m,mod}$ som jeg har utviklet istedenfor. Metoden (med bruk av $C_{m,mod}$) har jeg primært utviklet for at momentforstørrelsesfaktoren, f_m skal gi en best tilnærming for området $f_m = 1.25 - 1.5$. Hvor god en tilnærming er utenfor disse grensene er ikke blitt undersøkt nøye. Ved hjelp av dataprogrammene jeg har laget, som er lagt ved på egen cd-rom (som er limt fast på siste side av oppgaven), kan et hvilket



Figur 9.4: $C_{m,mod}$ som funksjon av α , r_1 og β , for dette tilfellet er $\beta = 0.7$.



Figur 9.5: $C_{m,mod}$ som funksjon av α , r_1 og β , for dette tilfellet er $\beta = 1$.

som helst tilfelle beregnes og studeres nøyere, også for områder utenfor grensene nevnt ovenfor. Programmene kan eventuelt benyttes i videre forskningsarbeid.

9.3 Hvordan resultatene fremlegges

For denne delen av oppgaven beregnes momentforstørrelsesfaktoren, f_m , tilnærmet ved hjelp av Helleslands metode, med bruk av $C_{m,mod}$, og sammenligner nøyaktigheten med eksakt utregning. For ikke å sammenligne nøyaktigheten for alle verdier av f_m er det valgt å sammenligne resultatene i det punktet der $f_m = 1.25$ og 1.5 beregnet etter ovennevnte tilnærmede metode. Det taes utgangspunkt i søyletilfellene 1-3 (definert på side 52), og resultatene fremkommer i figurer og tabeller for tilfelle 1, men kun i tabeller for tilfelle 2 og 3.

9.4 Resultater for enkeltstående basert på Helleslands metode med ny “ C_m ”

9.4.1 Generelt

Det taes utgangspunkt i momentforstørrelsesfaktoren, f_m , i relasjon 6.12 på side 44. Videre benyttes f_{m1} definert ved relasjon 6.13 på side 44, og $C_{m,mod}$ definert ved 9.3 og 9.4 på side 70. I tabell 9.1 - 9.6 er det utregnet hva forholdet mellom eksakt og tilnærmet momentforstørrelsesfaktor er for tilfellet der $f_{m,Hellesland}$ er lik 1.25 og 1.5, for noen forskjellige valg av r_1 .

9.4.2 Presentasjon av resultater, tilfelle 1 - tilfelle 3

Tilfelle 1 med Hellesland og bruk av $C_{m,mod}$

Tilfelle 1 tar for seg søyletilfellet definert på side 52, og fra figur 9.6 på side 76 kommer det frem at den tilnærmede kurven nesten overlapper eksakt kurve ($r_1 = 0.5$) til å variere litt mellom sikker og usikker side for lav verdi av f_m til så å være på den sikre siden. Momentforstørrelsesfaktorene for verdien $f_{m,Hellesland}$ lik 1.25 og 1.5 blir sammenlignet med eksakt utregnet momentforstørrelsesfaktor, og vises i tabell 9.1 under, og tabell 9.2 på side 77 hhv. En diskusjon av tabellene nevnt over kommer senere, nærmere bestemt i kapittel 9.4.3.

Tilfelle 2 med Hellesland og bruk av $C_{m,mod}$

Tilfelle 2 tar for seg søyletilfellet definert på side 53. For dette søyletilfellet er det valgt å vise resultatene kun i tabeller, og i tabell 9.3 og 9.4 på side 77, kommer det frem hva forholdet mellom eksakt og tilnærmet momentforstørrelsesfaktor er for verdien $f_{m,Hellesland}$ lik 1.25 og 1.5 hhv. En diskusjon av disse tabellene kommer først senere i kapittel 9.4.3.

Tilfelle 3 med Hellesland og bruk av $C_{m,mod}$

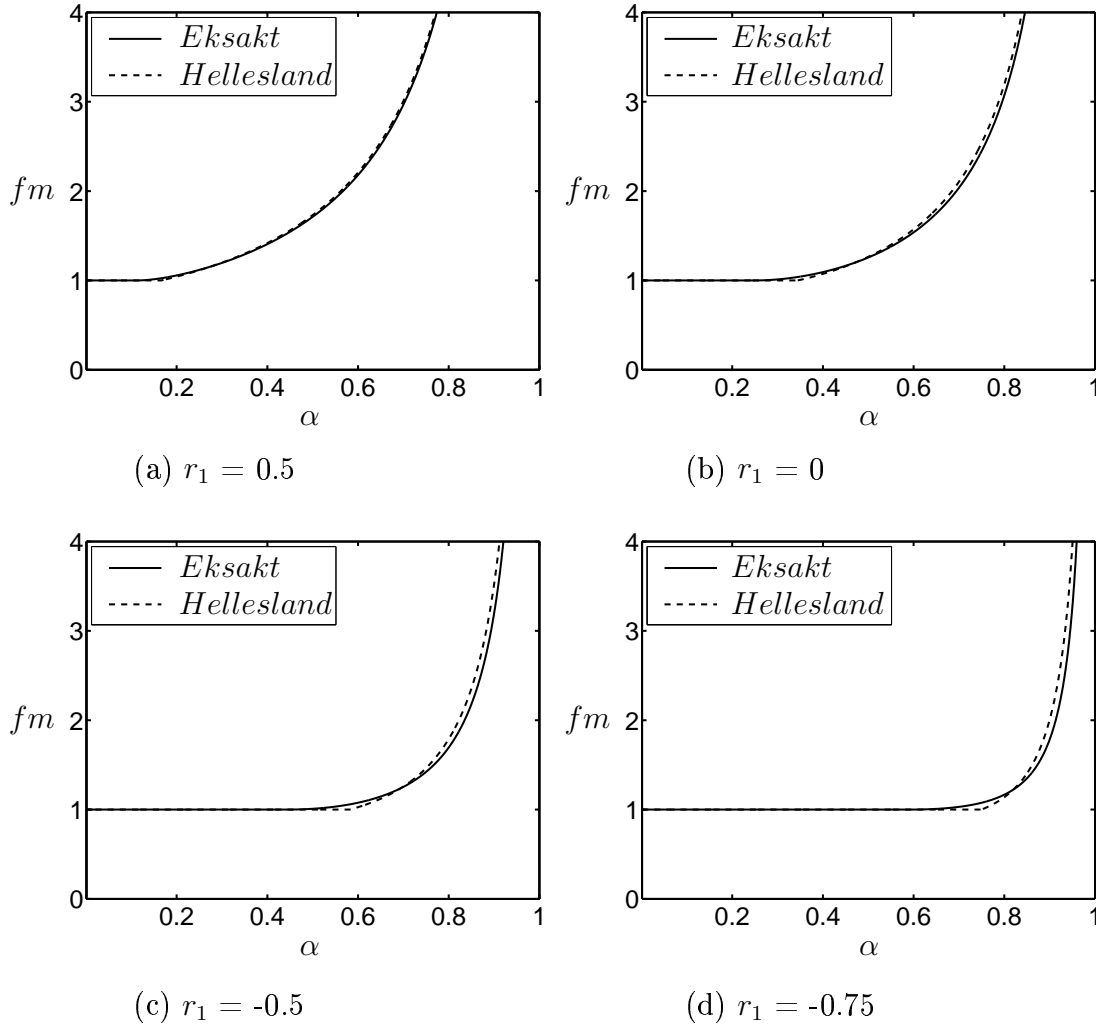
Tilfelle 3 tar for seg søyletilfellet definert på side 53. For dette søyletilfellet er det igjen valgt å vise resultatene kun i tabeller, og i tabell 9.5 og 9.6 på side 78, kommer det frem hva forholdet mellom eksakt og tilnærmet momentforstørrelsesfaktor er for verdien $f_{m,Hellesland}$ lik 1.25 og 1.5 hhv. Først etter at tabellene er vist, vil en diskusjon fremkomme, se kapittel 9.4.3.

Tabell 9.1: Tilfelle 1 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.25$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Hellesland}}{f_{m,eks}}$
1	1	0.167	1.249	1.001
	0.75	0.248	1.246	1.003
	0.5	0.326	1.244	1.005
	0	0.493	1.243	1.006
	-0.5	0.697	1.246	1.003
	-0.75	0.826	1.244	1.005
	-1	0.955	1.000	1.250

9.4.3 Diskusjon og konklusjon**Tilfelle 1:**

Alle resultatene er til den sikre siden og er meget nøyaktige (se tabell 9.1 og 9.2), med unntak for $r_1 = -1$, da dette er et grensetilfelle (fortsatt på den sikre siden). Alle verdier er samlet rundt eksakt, og etter hvert som f_m øker, øker også graden av sikkerhet. Fra tabellene og figur 9.6 kommer det frem at for $f_m < 1.25$ kan et



Figur 9.6: Momentforstørrelsesfaktor, f_m , eksakt og tilnærmet for tilfelle 1. Tilnærmet kurve er beregnet etter forslag fra Helleland [12], med bruk av $C_{m,mod}$. For å simulere fri innspenning er det valgt å bruke $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.0001$.

lite område oppstå der tilnærmelsen er til den usikre siden, men så lenge $f_m \geq 1.25$ er man til den sikre siden.

Sammenligning av tidligere resultater kan det konkluderes med at $C_{m,mod}$ er et bedre valg enn tidligere.

Tabell 9.2: Tilfelle 1 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Hellesland}}{f_{m,eks}}$
1	1	0.286	1.499	1.001
	0.75	0.358	1.491	1.006
	0.5	0.429	1.484	1.011
	0	0.580	1.470	1.021
	-0.5	0.756	1.449	1.035
	-0.75	0.861	1.414	1.061
	-1	0.962	1.000	1.500

Tabell 9.3: Tilfelle 2 (med $\bar{k}_A = 10000$ og $\bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.25$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Hellesland}}{f_{m,eks}}$
0.699	1	0.289	1.236	1.011
	0.75	0.355	1.188	1.052
	0.5	0.487	1.204	1.038
	0	0.755	1.228	1.018
	-0.5	1.042	1.223	1.022
	-0.75	1.167	1.172	1.066
	-1	1.222	1.063	1.176

Tabell 9.4: Tilfelle 2 (med $\bar{k}_A = 10000$ og $\bar{k}_B = 0.0001$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Hellesland}}{f_{m,eks}}$
0.699	1	0.504	1.475	1.017
	0.75	0.581	1.432	1.047
	0.5	0.707	1.450	1.034
	0	0.969	1.484	1.011
	-0.5	1.251	1.489	1.007
	-0.75	1.383	1.424	1.053
	-1	1.447	1.212	1.237

Tabell 9.5: Tilfelle 3 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.25$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Hellesland}}{f_{m,eks}}$
0.5	1	0.514	1.247	1.002
	0.75	0.765	1.231	1.016
	0.5	1.016	1.205	1.037
	0	1.567	1.133	1.103
	-0.5	2.305	1.049	1.192
	-0.75	2.864	1.024	1.221
	-1	3.716	0.980	1.276

Tabell 9.6: Tilfelle 3 (med $\bar{k}_A = \bar{k}_B = 10000$). Resultatene er målt ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$.

β_{eks}	r_1	α_E	$f_{m,eks}$	$\frac{f_{m,Hellesland}}{f_{m,eks}}$
0.5	1	0.902	1.496	1.002
	0.75	1.145	1.483	1.011
	0.5	1.392	1.461	1.027
	0	1.940	1.396	1.075
	-0.5	2.655	1.315	1.141
	-0.75	3.161	1.279	1.173
	-1	3.777	0.993	1.510

Tilfelle 2:

For dette tilfellet kommer det igjen frem at alle resultatene er til den sikre siden (se tabell 9.3 og 9.4), og har meget god tilnærming (med unntak for $r_1 = -1$).

Sammenligning av tidligere resultater kan det konkluderes med at $C_{m,mod}$ er et bedre valg enn tidligere fordi alle resultatene er til den sikre siden (for $f_m \geq 1.25$).

Tilfelle 3:

Her kommer det også frem at alle resultatene er til den sikre siden, og er stort sett godt samlet rundt eksakte verdier (se tabell 9.5 og 9.6).

Også her kan det konkluderes med at $C_{m,mod}$ er et bedre valg enn tidligere fordi alle resultatene er bedre samlet og stort sett bedre tilnærmet.

Totalt:

Fra resultatene (se tabell 9.1 - 9.6) fremkommer det at forslaget til $C_{m,mod}$ i sammenheng med Helleslands metode, gir vesentlige forbedringer. For tilfelle 2 er resultatene forbedret fra å ligge på den usikre siden til å være på den sikre siden, og samlet rundt eksakte verdier. Generelt for de andre tilfellene har også de stort sett blitt forbedret.

Kapittel 10

Resultater for ramme

10.1 Forhold som definerer valg av rammer som skal undersøkes

Det er utallige mulige forhold som kan settes til grunn for beregning av rammer. Det er derfor fornuftig å sette seg ned og tenke nøye igjennom de forskjellige forhold som i teorien og i virkeligheten er fornuftige, for så å kunne vurdere hva som er “vanlige” og “uvanlige” systemer. De forhold og definisjoner som ligger til grunn for beregningene vil nå bli presentert, de er delvis hentet fra [7], og noen valg har jeg valgt. En ramme med idealisering er vist i figur 10.1, og benytter denne i videre sammenheng der jeg definerer

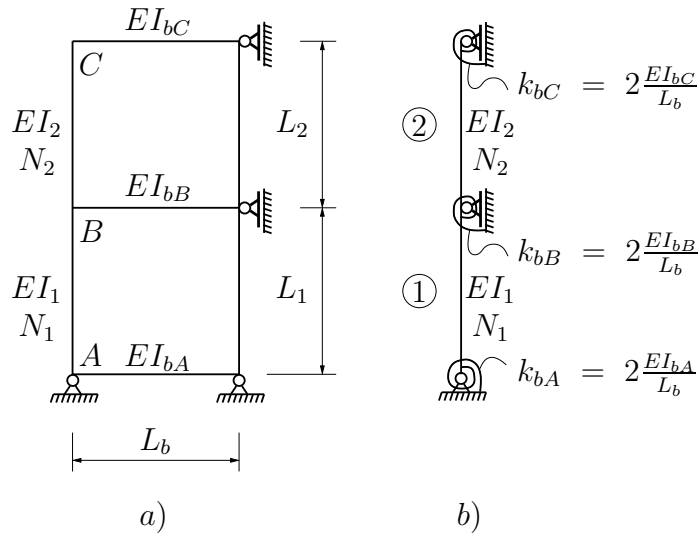
$$k_{bB} = k_{bC} \quad (10.1)$$

Bjelken i midten og i toppen har lik rotasjonsstivhet. Rotasjonsstivheten i bunnen, representert ved k_{bA} , vil bli presentert senere (se 10.4 side 81).

Det benyttes relasjon 10.1, og definerer

$$\frac{EI_{bB}}{L_b} = \frac{EI_{bC}}{L_b} = \frac{EI_b}{L_b} \quad (10.2)$$

Bjelkestivheten for bjelke B og C, er variert slik at forkoldet mellom søyle 1 og bjelkene (B og C) er i området



Figur 10.1: To etasjes ramme (a) med idealisering (b).

$$\frac{EI_1/L_1}{EI_b/L_b} = 0.1, 1 \text{ eller } 1000 \quad (10.3)$$

Verdien på 0.1 representerer en meget stiv bjelke, og gir nesten full fastholdelse i knutepunktene. Verdien på 1000 tilsvarer en ekstremt fleksibel bjelke, i virkeligheten en bjelke som er i nærheten av å være leddlagret i endene. Dette området dekker hele det praktiske spekteret som er av interesse.

Med rotasjonsinnspenningen k_{bA} gjør man det mulig å velge graden av innspenning som ønskes å ha i bunnen av rammen, i denne oppgaven har jeg valgt å bruke

$$\frac{EI_1/L_1}{EI_{bA}/L_b} = 1 \cdot 10^{-4} \quad (10.4)$$

som representerer nesten full innspenning.

Søylestivhetsforholdet har jeg valgt å variere i følgende område

$$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1} = 0.5 \text{ eller } 1 \quad (10.5)$$

Det siste forholdet som må defineres er forholdet mellom aksialkrefter og lengder i søylene, som fremkommer av følgende:

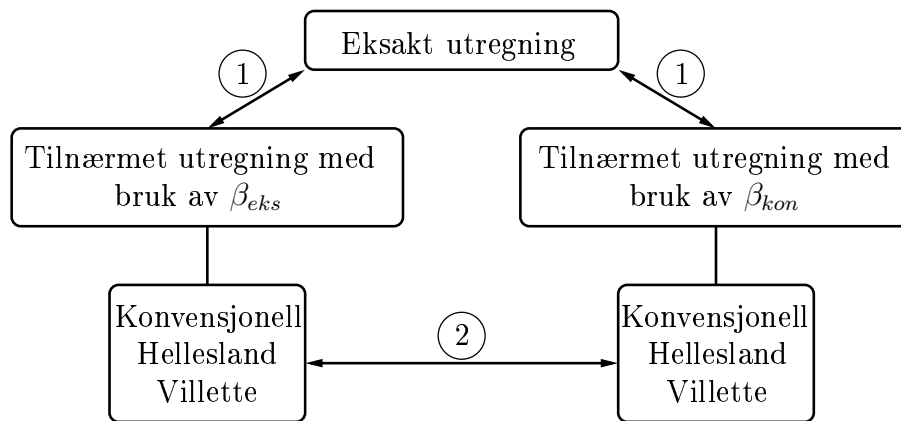
$$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2} = 1 \text{ eller } 2 \quad (10.6)$$

I neste kapittel blir det definert noen modeller som skal benyttes på grunnlag av de rammevalg som tidligere nevnt.

10.2 Definisjon av modeller

10.2.1 Forskjellige måter å sammenligne resultatene

For å få en innføring i hva som ventes fra resultatene har jeg laget en oversikt over to forskjellige måter å sammenligne resultatene på, se figur 10.2 under.



Figur 10.2: Oversikt over metodene, og hvordan de sammenlignes.

Fra figuren over er det inntegnet noen piler og noen tall, disse indikerer hver en metode å sammenligne resultatene på. For å gjøre det mer klart vil først og fremst momentforstørrelsesfaktoren bli sammenlignet for ett valg av β (β_{eks} eller β_{kon}), slik at variasjon av C_m fremkommer, se punktene (1) på figuren. Dvs. at de tre tilnærmede metodene blir sammenlignet samtidig seg imellom ved å bruke

samme knekklendefaktor, for så å vurdere det tilnærmede resultatet mot eksakt utregning. Eksakt utregning vil si at momentforstørrelsesfaktoren utregnes med bruk av totale momenter (1. ordens moment pluss momentet som skyldes aksialkraftens lastvirkning på søylens utbøyningsform, såkalt 2.ordens lastvirkning). For det andre tilfellet holdes C_m "fast" slik at momentforstørrelsesfaktoren med forskjellig bruk av β fremkommer, se punkt (2). Her vil de tilnærmede metodene bli behandlet hver for seg, og "parvis", igjen for så å sammenligne med eksakt utregning. Det er i dette punktet noe av essensen av oppgaven ligger, nemlig å vurdere bruken av konvensjonell knekklendefaktor i de forskjellige tilnærmede metodene. Men det som er av størst interesse er å studere tilfeller der negativ innspenning oppstår. Flere av disse tilfellene som gjennomgås her har dette, men de vil først bli diskutert på et senere tidspunkt, nærmere bestemt i kapittel 11.2 på side 134.

For å undersøke de to tilfellene nevnt over har jeg valgt å studere seks forskjellige modeller, der modell 1-3 tar for seg første tilfellet, punkt (1), og i modell 4-6 studeres det andre tilfellet, punkt (2). Definisjon av modellene fremkommer av de neste to underkapilene.

10.2.2 Definisjon av modell 1 - modell 3

Tidligere i kapittel 4.4 på side 34 kom det frem hvordan nabosøylens 1. ordens momentgradient påvirket den søylen som skulle undersøkes, og resultatet var entydig, dvs. en 1. ordens momentgradient i nabosøylen lik 1, resulterte i en raskere økende momentforstørrelsesfaktor i søylen som betraktes. På grunnlag av dette er det derfor valgt å sette nabosøylens 1. ordens momentgradient og 1. ordens momentgradient til søylen som betraktes lik

$$r_{1,nabo} = 1 \quad (10.7)$$

$$r_{1,betraktet} = -0.75, -0.5, 0, 0.5, \text{ og } 1 \quad (10.8)$$

hhv.

Modellene 1-3 er alle valgt ut fra de rammevalg som tidligere omtalt.

Modell 1 Bjelkene i konstruksjonen (B og C) har nesten ingen stivhet slik at

$$\frac{EI_1/L_1}{EI_b/L_b} = 1000 \quad (10.9)$$

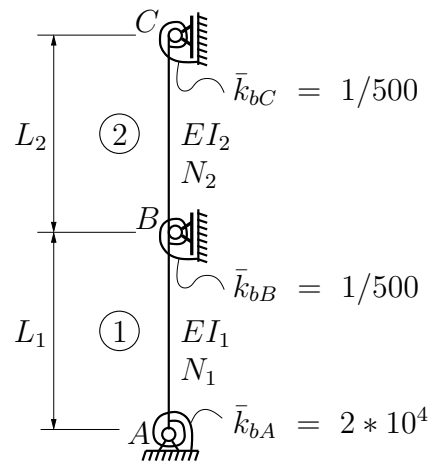
Det antas at søyle 1 blir belastet det dobbelte av søyle 2 (hvis lengdene er like) slik at

$$\frac{N_1/L_1}{N_2/L_2} = 2 \quad (10.10)$$

og stivhetsforholdet mellom søylene er

$$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1} = 1 \quad (10.11)$$

Det idealiserte tilfelle kan da illustreres, og er vist i figur 10.3, der det er brukt relasjon 10.12.



Figur 10.3: Idealisert tilfelle av modell 1.

$$\bar{k}_{bi} = \frac{k_{bi}}{EI_1/L_1} \quad (10.12)$$

Modell 2 Bjelkene i konstruksjonen (B og C) har samme stivhet som søyle 1 slik at

$$\frac{EI_1/L_1}{EI_b/L_b} = 1 \quad (10.13)$$

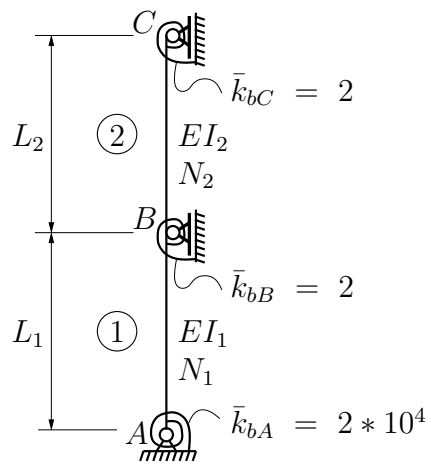
Det antas at søyle 1 blir belastet det samme som søyle 2 (igjen hvis lengdene er like) slik at

$$\frac{N_1/L_1}{N_2/L_2} = 1 \quad (10.14)$$

og forholdet mellom søylene er definert ved

$$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1} = 1 \quad (10.15)$$

Det idealiserte tilfelle kan da illustreres, og er vist i figur 10.4, der det igjen er brukt relasjon 10.12.



Figur 10.4: Idealisert tilfelle av modell 2.

Modell 3 Bjelkene i konstruksjonen (B og C) har større stivhet enn søyle 1 slik at

$$\frac{EI_1/L_1}{EI_b/L_b} = 0.1 \quad (10.16)$$

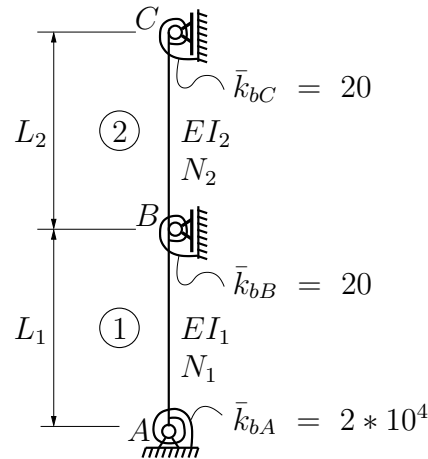
Det antas at søyle 1 blir belastet det samme som søyle 2 (igjen hvis lengdene er like) slik at

$$\frac{N_1/L_1}{N_2/L_2} = 1 \quad (10.17)$$

og forholdet mellom søylene er definert ved

$$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1} = 0.5 \quad (10.18)$$

Idealiserte tilfelle er vist i figur 10.5, der det igjen er brukt relasjon 10.12.



Figur 10.5: Idealisert tilfelle av modell 3.

10.2.3 Definisjon av modell 4 - modell 6

I dette avsnittet skal tre modeller (modell 4,5 og 6) studeres med samme stivhetsforhold mellom søyle 1 og fjærene i B og C som tidligere (modell 1,2 og 3), altså

$$\frac{EI_1/L_1}{EI_b/L_b} = 1000, \text{ eller } 0.1 \quad (10.19)$$

for hhv. modell 4, 5 og 6. Stivhetsforholdet mellom søyle 1 og fjær i A blir som tidligere definert ved ligning 10.4 på side 81. Videre benyttes $\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$ og $\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$ definert ved hhv. 10.5 og 10.6. Med andre ord, hele spekteret til rammevalget studeres. Videre er det valgt å sette nabosøylens 1. ordens momentgradient ($r_{1,nabo}$) lik 1 og variere den andre ($r_{1,betraktet}$) til å være 1,0 og -0.5 for å se hvordan resultatet påvirkes. Forskjellen mellom modell 1 - 3 og modell 4 - 6, er at modellene studeres fra forskjellige synsvinkler slik at flere resultater fremkommer. Modell 1 - 3 er et utdrag av modell 4 - 6, så med andre ord inngår modell 1 - 3 i modell 4 - 6, men det blir studert for flere valg av 1. ordens momentgradient.

10.3 Hvordan resultatene fremlegges

Det er nå to grupper (modell 1-3 og modell 4-6) som hver skal sammenlignes på hver sin måte, og det er derfor naturlig også å legge frem resultatene på forskjellig vis. En oversikt over hvordan og hva som kommer frem fra resultatene er vist under.

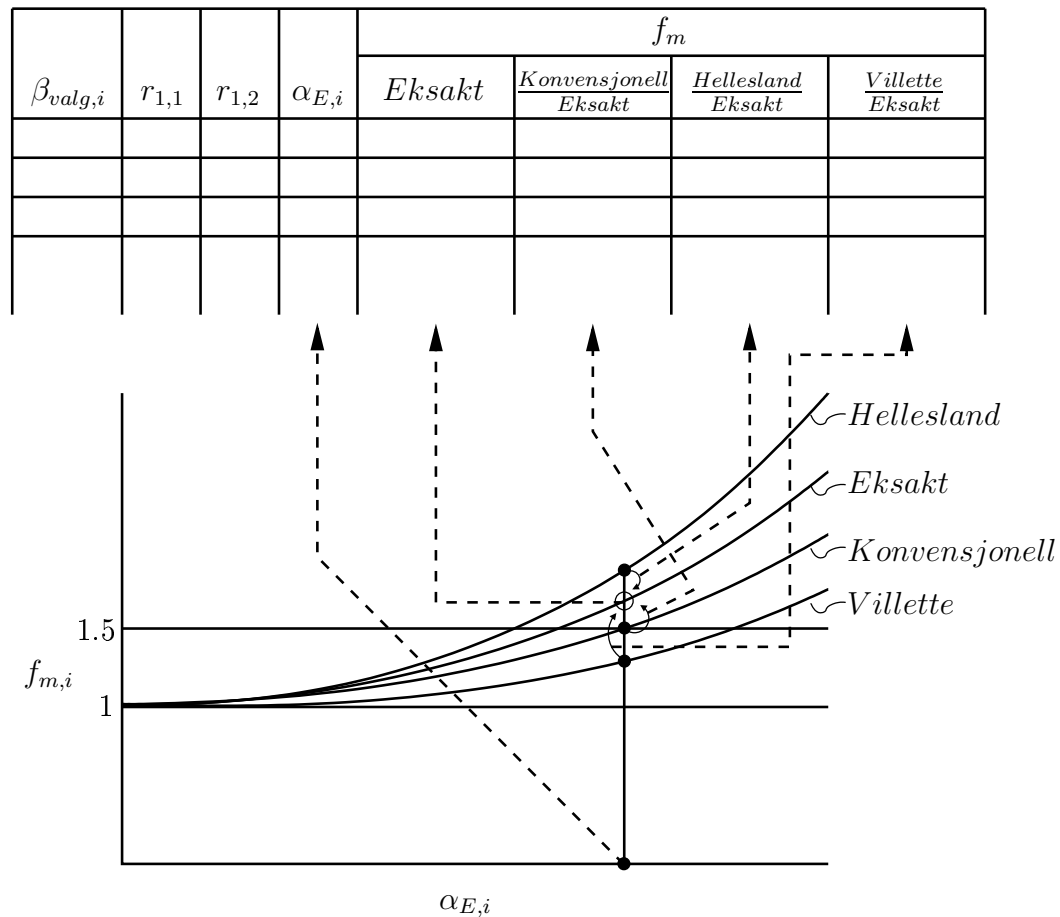
Modell 1 - 3

Poenget med disse modellene er å sammenligne momentforstørrelsesfaktoren, f_m , for de tilnærmede metodene seg imellom med bruk av β_{eks} (eksakt system knekk lengdefaktor for søylen som undersøkes) eller β_{kon} (konvensjonell knekk lengdefaktor), for så å vurdere / sammenligne resultatene med eksakt utregning. Resultatene som fremkommer er alle sammenlignet ved den verdi av α_E som gir $f_m = 1.5$ beregnet etter Konvensjonell metode, enten med bruk av β_{eks} eller β_{kon} . En illustrasjon er vist i figur 10.6. For *første resultat* (vises som øverste linje i tabellene, mer om dette siden) er også hele momentforstørrelsesforløpet opp til $f_m = 4$ vist. Resultatene for denne delen finnes i kapittel 10.4 og 10.5.

Modell 4 - 6

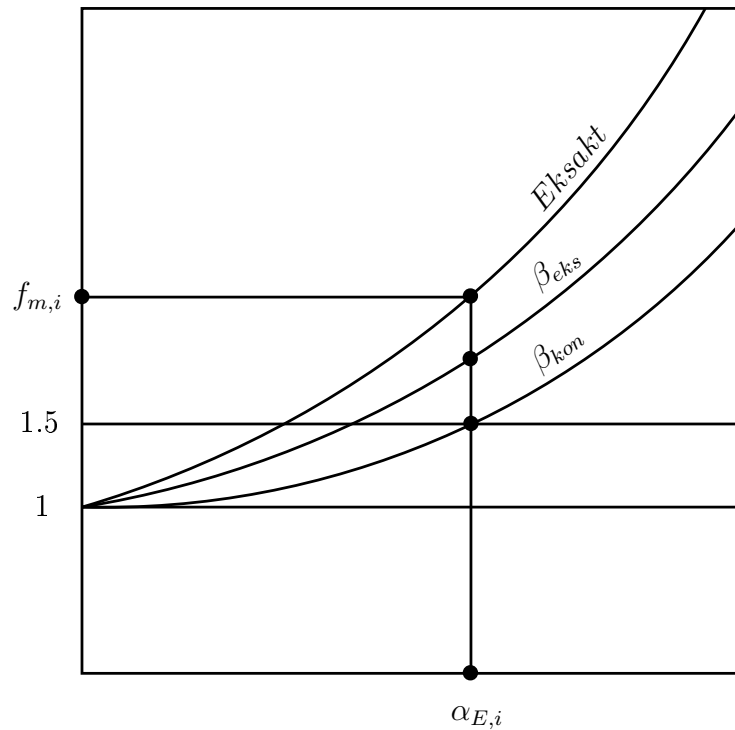
Essensen med disse modellene er å sammenligne metodene parvis slik at det fremkommer hvordan resultatet påvirkes med forskjellig bruk av β . Dvs. hver metode kan beregne momentforstørrelsesfaktoren på to måter, med bruk av β_{eks} (eksakt systemknekk lengdefaktor for søylen som betraktes) og med bruk av β_{kon} (konvensjonell knekk lengdefaktor for søylen som betraktes), disse sammenlignes / vurderes med eksakt beregnet momentforstørrelsesfaktor. Alle resultatene som fremkommer er målt ved den verdi av α_E som gir $f_m = 1.5$ beregnet med β_{kon} i den betraktede tilnærmede metoden, dette er illustrert i figur 10.7 under. Resultatene for denne delen kommer i kapittel 10.6, 10.7 og 10.8, og blir presentert i tabeller, og for noen tilfeller også vist med figurer. På de feltene i tabellene som viser “-” betyr dette at momentforstørrelsesfaktoren beregnet eksakt har gått mot uendelig før den tilnærmede metoden (beregnet med β_{kon}) har oppnådd $f_m = 1.5$.

Til slutt blir det en mer grundig gjennomgang for noen av tilfellene i tabellene der $\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2} = 2$, og 1. ordens momentgradient varierer i søyle 1 ($r_{1,1}$) til å være lik 1 og -0.5 mens $r_{1,2}$ holdes fast til verdien 1. Momentforstørrelsesfaktorene i begge søylene uttrykkes nå med hensyn på $\alpha_{E,1}$, ved å gjøre dette kan det bl.a. konkludere med



Figur 10.6: Forklaring av tabeller som benyttes i modell 1 - 3, det vises at alle verdier sammenlignes ved $f_{m,Konvensjonell} = 1,5$. Indeksen "i" angir søylenummeret, "valg" angir *eks* eller *kon*.

hvem av søylene som er mest kritisk. Det er også av stor interesse hva \bar{k}_{1B} og \bar{k}_{2B} er for hvert tilfelle, og dette fremkommer av tabellene (definisjon av \bar{k}_{1B} og \bar{k}_{2B} finnes i kapittel 7.2 på side 49, der det nå er dividert på EI_1/L_1), det som i den sammenheng er og merke seg er at en av dem kan ha *negativ* verdi, altså negativ rotasjonsinnspenning. NB! En diskusjon angående negativ innspenning vil ikke bli diskutert før alle de grundige tilfellene beskrevet ovenfor er vist for modell 4 - 6, så for å gjøre det helt klart kommer denne diskusjonen basert på dette først i kapittel 11.2 på side 134.



Figur 10.7: Eksempel på hvordan målingene for modell 4 - 6 foretas. Resultatene måles ved den verdi av α_{Ei} som gir $f_{m,i} = 1.5$ beregnet tilnærmet med bruk av $\beta_{kon,i}$. Indeksen “i” angir søylen som betraktes.

10.4 Modell 1 - 3, sammenligning av metodene med bruk av β_{eks}

10.4.1 Generelt

I dette avsnittet sammenlignes momentforstørrelsesfaktoren, f_m , for de forskjellige metodene (benytter kun f_m som betegnelse på momentforstørrelsesfaktoren videre i dette avsnittet), for så å bli sammenlignet med eksakt utregning. I beregningene som foretas benyttes β_{eks} og resultatene som fremkommer (f_m) er alle sammenlignet ved den verdi av α_E som gir $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$. Tabellene som følger viser først eksakt f_m , for så å vise hva forholdene er mellom tilnærmet f_m og eksakt f_m for de forskjellige metodene, med forskjellig valg av 1. ordens momentgradient. For første resultat som fremkommer i tabellene, altså for $r_{1,1} = r_{1,2} = 1$, er også f_m vist i figurer som visualiserer hvordan de forskjellige metodene

arter seg i forhold til hverandre (for dette valg av 1. ordens momentgradienter).

10.4.2 Presentasjon av resultater

Modell 1

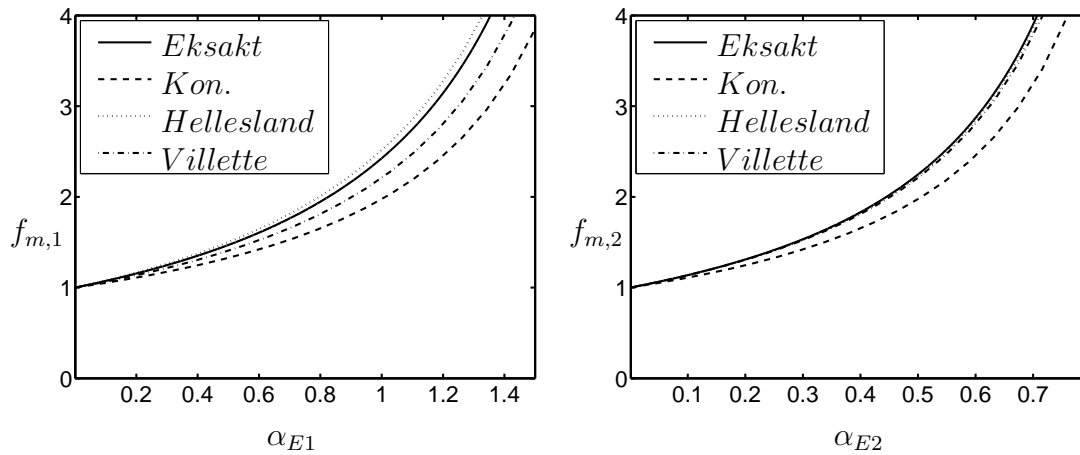
Modell 1 er definert på side 83, og fra figur 10.8 på side 91 vises at Helleslands metode er jevnt over på den sikre siden for søyle 1, mens for søyle 2 overlapper den kurven for eksakt verdi. De andre metodene begynner bra for lav f_m verdi men går til den usikre siden etter hvert som f_m øker. I tabelle 10.1 og 10.2 på side 91 og 91 hhv. kommer det frem hvor nøyaktig de tilnærmede metodene er i forholdet seg til eksakt utregning (i punktet der $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$), og en sammenligning av de forskjellige metodene muliggjøres. En kort diskusjon ang. overnevnte tabeller kommer senere i kapittel 10.4.3 på side 91.

Modell 2

Modell 2 er definert på side 83, og fra figur 10.9 på side 92 vises at Villettes metode ligger best an for søyle 1, og Helleslands metode for søyle 2, husk at sistnevnte gjelder bare for $r_{1,1} = r_{1,2} = 1$. I tabellene 10.3 og 10.4 på side 92 og 92 hhv. kommer det frem hvor nøyaktig de tilnærmede metodene er i forholdet seg til eksakt utregning (i punktet der $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$), og en sammenligning av de forskjellige metodene muliggjøres. En kort diskusjon ang. disse tabellene kommer senere, nærmere bestemt i kapittel 10.4.3 på side 91.

Modell 3

Modell 3 er definert på side 83, og fra figur 10.10 på side 93 vises at beste tilnærmede for søyle 1 er for konvensjonell metode, og Helleslands metode for søyle 2. I tabellene 10.5 og 10.6 på side 93 og 93 hhv. kommer nøyaktig de tilnærmede metodene frem (i punktet der $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$), og forskjellene som ligger i de forskjellige metodene fremkommer her. En liten diskusjon for disse tabellene kommer senere, nærmere bestemt i kapittel 10.4.3 på side 91.

a) Søyle 1, $r_{1,1} = r_{1,2} = 1$, $\beta = 0.703$. b) Søyle 2, $r_{1,1} = r_{1,2} = 1$, $\beta = 0.994$.**Figur 10.8:** f_m for modell 1 (se side 83), eksakt og tilnærmet for søyle 1 og 2.**Tabell 10.1:** f_m for modell 1 (se side 83), søyle 1, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.

$\beta_{eks,1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\alpha_{E,1}$	$f_{m,1}$			
				<i>Eksakt</i>	$\frac{Konvensjonell}{Eksakt}$	$\frac{Hellesland}{Eksakt}$	$\frac{Villette}{Eksakt}$
0.703	1	1	0.675	1.721	0.871	1.027	0.941
	0.5		0.946	1.860	0.807	0.977	0.931
	0		1.126	2.034	0.735	0.892	0.881
	-0.5		1.486	2.280	0.658	0.751	0.766
	-0.75		1.486	1.864	0.805	0.740	0.699

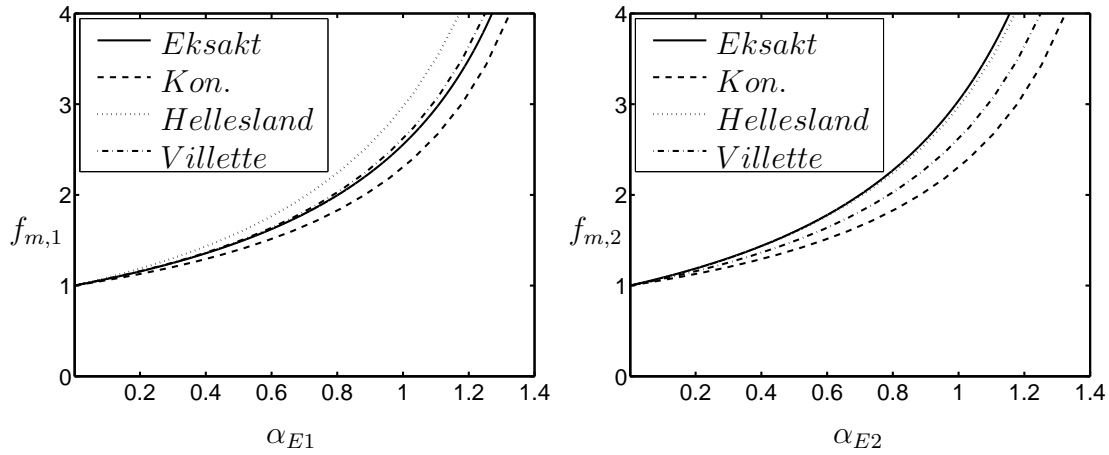
Tabell 10.2: f_m for modell 1 (se side 83), søyle 2, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.

$\beta_{eks,2}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\alpha_{E,2}$	$f_{m,2}$			
				<i>Eksakt</i>	$\frac{Konvensjonell}{Eksakt}$	$\frac{Hellesland}{Eksakt}$	$\frac{Villette}{Eksakt}$
0.994	1	1	0.338	1.634	0.918	0.994	0.992
		0.5	0.472	1.647	0.911	0.983	1.051
		0	0.608	1.689	0.889	0.932	1.064
		-0.5	0.743	1.748	0.858	0.823	1
		-0.75	0.743	1.423	1.054	0.814	0.916

10.4.3 Diskusjon

Modell 1:

Fra tabellene 10.1 og 10.2 kommer det frem at Helleslands metode er mest gunstig for søyle 1 og Villettes metode for søyle 2. For søyle 1 blir alle metodene mer



a) Søyte 1, $r_{1,1} = r_{1,2} = 1$, $\beta = 0.752$. b) Søyte 2, $r_{1,1} = r_{1,2} = 1$, $\beta = 0.752$.

Figur 10.9: f_m for modell 2 (se side 84), eksakt og tilnærmet for søyle 1 og 2.

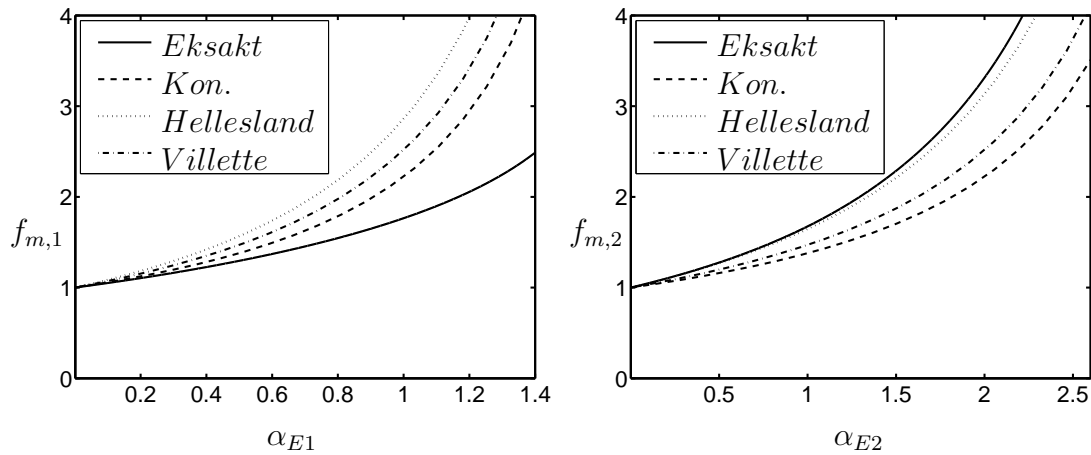
Tabell 10.3: f_m for modell 2 (se side 84), søyle 1, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.

$\beta_{eks,1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\alpha_{E,1}$	$f_{m,1}$			
				<i>Eksakt</i>	$\frac{Konvensjonell}{Eksakt}$	$\frac{Hellesland}{Eksakt}$	$\frac{Villette}{Eksakt}$
0.752	1	1	0.589	1.606	0.934	1.085	1.009
	0.5		0.824	1.689	0.888	1.055	1.025
	0		1.060	1.820	0.824	0.977	0.987
	-0.5		1.296	2.032	0.738	0.820	0.860
	-0.75		1.296	1.727	0.869	0.777	0.754

Tabell 10.4: f_m for modell 2 (se side 84), søyle 2, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.

$\beta_{eks,2}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\alpha_{E,2}$	$f_{m,2}$			
				<i>Eksakt</i>	$\frac{Konvensjonell}{Eksakt}$	$\frac{Hellesland}{Eksakt}$	$\frac{Villette}{Eksakt}$
0.752	1	1	0.589	1.756	0.854	0.993	0.923
		0.5	0.825	1.794	0.836	0.993	0.965
		0	1.060	1.813	0.827	0.980	0.991
		-0.5	1.296	1.752	0.856	0.951	0.997
		-0.75	1.296	1.295	1.159	1.036	1.006

unøyaktige etter hvert som 1. ordens momentgradienten går mot -1 (altså $r_{1,1}$).

a) Søyale 1, $r_{1,1} = r_{1,2} = 1$, $\beta = 0.742$. b) Søyale 2, $r_{1,1} = r_{1,2} = 1$, $\beta = 0.524$.**Figur 10.10:** f_m for modell 3 (se side 85), eksakt og tilnærmet for søyle 1 og 2.**Tabell 10.5:** f_m for modell 3 (se side 85), søyle 1, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.

$\beta_{eks,1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\alpha_{E,1}$	$f_{m,1}$			
				<i>Eksakt</i>	$\frac{Konvensjonell}{Eksakt}$	$\frac{Hellesland}{Eksakt}$	$\frac{Villette}{Eksakt}$
0.742	1	1	0.606	1.735	1.091	1.272	1.178
	0.5		0.848	1.255	1.196	1.426	1.380
	0		1.091	1.133	1.324	1.577	1.586
	-0.5		1.333	1.039	1.444	1.614	1.682
	-0.75		1.333	0.944	1.590	1.430	1.381

Tabell 10.6: f_m for modell 3 (se side 85), søyle 2, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.

$\beta_{eks,2}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\alpha_{E,2}$	$f_{m,2}$			
				<i>Eksakt</i>	$\frac{Konvensjonell}{Eksakt}$	$\frac{Hellesland}{Eksakt}$	$\frac{Villette}{Eksakt}$
0.524	1	1	1.212	1.900	0.789	0.976	0.853
		0.5	1.697	1.990	0.754	0.973	0.870
		0	2.182	2.021	0.742	0.976	0.889
		-0.5	2.666	1.855	0.809	1.014	0.942
		-0.75	2.666	1.232	1.218	1.229	1.057

Modell 2:

Fra tabellene 10.3 og 10.4 kommer det frem at Villettes metode stort sett er mest nøyaktig for begge søylene. For søyle 1 veksler resultatene fra sikker til usikker

side, mens for søyle 2 ligger resultatene mest til den usikre siden.

Modell 3:

Fra tabellene 10.5 og 10.6 kommer det frem at alle resultatene langt over til den sikre siden for søyle 1, og stort sett til den usikre siden for søyle 2. Beste tilnærming for søyle 1 er for konvensjonell metode, og Helleslands metode for søyle 2.

Totalt:

Min helhetsvurdering av metodene tilsier at Helleslands metode er mest gunstig. Den kan være både på usikker og sikker side, men holder seg allikevel ganske stabil i forhold til de andre metodene.

10.5 Modell 1 - 3, sammenligning av metodene med bruk av β_{kon}

10.5.1 Generelt

I dette avsnittet sammenlignes metodene på samme måte som beskrevet i begynnelsen av kapittel 10.4 på side 89, men det benyttes nå β_{kon} istedenfor β_{eks} .

10.5.2 Presentasjon av resultater

Modell 1

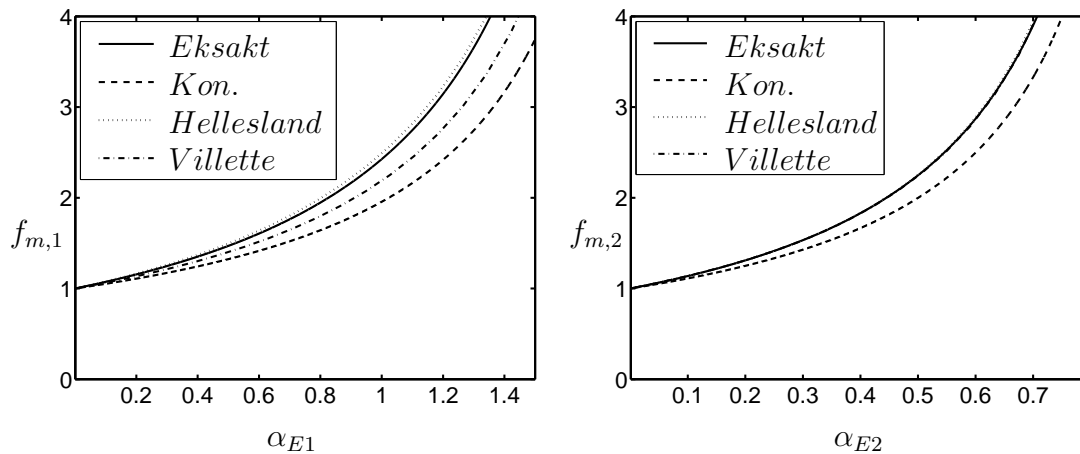
Modell 1 er definert på side 83, og fra figur 10.11 på side 95 vises at Helleslands metode gir verdier nærmest eksakt. I tabelle 10.7 og 10.8 på side 96 og 96 hhv. kommer det frem hvor nøyaktig de tilnærmede metodene er i forholdet seg til eksakt utregning (i punktet der $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$), og en sammenligning av de forskjellige metodene muliggjøres. En kort diskusjon ang. overnevnte tabeller kommer senere i kapittel 10.5.3 på side 96.

Modell 2

Modell 2 er definert på side 83, og fra figur 10.12 på side 96 vises at Helleslands metode ligger nærmest for søyle 1, mens det veksles mellom alle metodene for søyle 2. I tabellene 10.9 og 10.10 på side 97 og 97 hhv. vises det hvor nøyaktig de tilnærmede metodene er i forhold til eksakt utregning (i punktet der $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$), og forskjellene mellom metodene kan sammenlignes. En liten diskusjon ang. disse tabeller kommer senere i kapittel 10.5.3 på side 96.

Modell 3

Modell 3 er definert på side 83, og fra figur 10.13 på side 97 kommer det frem at tilnærmelsen stort sett er til den usikre siden for søyle 1, og for søyle 2 er resultatene til både sikker og usikker side. Helleslands metode gir resultater som er nærmest eksakt, eller tilnærmelser som ligger mer til den sikre siden i forhold til de andre. I tabellene 10.11 og 10.12 på side 98 og 98 hhv. kommer det frem hvor nøyaktig de tilnærmede metodene er (i punktet der $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$) i forhold til eksakt, og forskjellene mellom metodene fremkommer her. Senere kommer en liten diskusjon for ovennevnte tabeller, nærmere bestemt i kapittel 10.5.3 på side 96.



a) Søyle 1, $r_{1,1} = r_{1,2} = 1$, $\beta = 0.699$. b) Søyle 2, $r_{1,1} = r_{1,2} = 1$, $\beta = 1$.

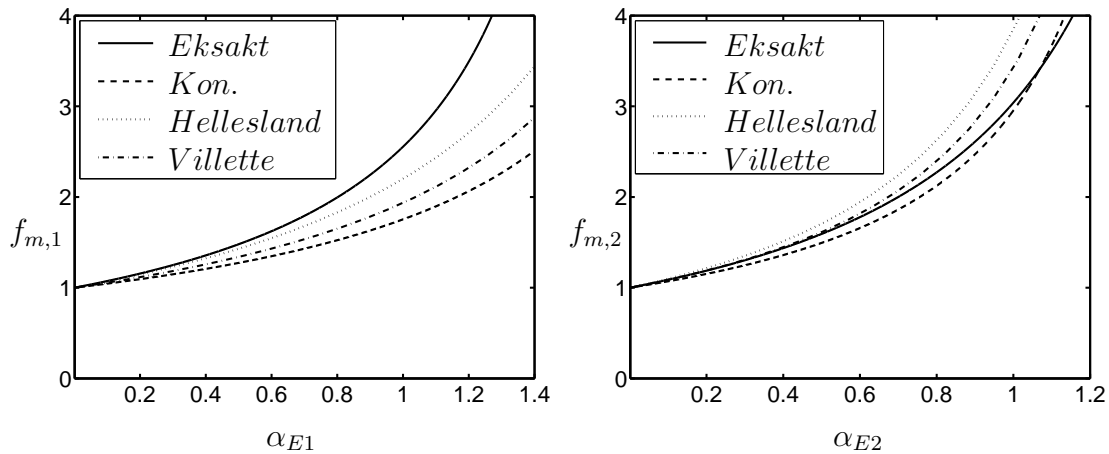
Figur 10.11: f_m for modell 1 (se side 83), eksakt og tilnærmet for søyle 1 og 2.

Tabell 10.7: f_m for modell 1 (se side 83), søyle 1, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.

$\beta_{kon,1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\alpha_{E,1}$	$f_{m,1}$			
				<i>Eksakt</i>	$\frac{Konvensjonell}{Eksakt}$	$\frac{Hellesland}{Eksakt}$	$\frac{Villette}{Eksakt}$
0.699	1	1	0.682	1.732	0.866	1.021	0.935
	0.5		0.955	1.878	0.798	0.968	0.922
	0		1.227	2.073	0.723	0.879	0.867
	-0.5		1.500	2.342	0.640	0.733	0.746
	-0.75		1.500	1.909	0.783	0.723	0.682

Tabell 10.8: f_m for modell 1 (se side 83), søyle 2, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.

$\beta_{kon,2}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\alpha_{E,2}$	$f_{m,2}$			
				<i>Eksakt</i>	$\frac{Konvensjonell}{Eksakt}$	$\frac{Hellesland}{Eksakt}$	$\frac{Villette}{Eksakt}$
1	1	1	0.333	1.623	0.924	1.000	0.999
		0.5	0.467	1.628	0.922	0.992	1.282
		0	0.600	1.656	0.906	0.947	1.728
		-0.5	0.734	1.695	0.885	0.845	2.605
		-0.75	0.734	1.391	1.078	0.829	3.173

a) Søyle 1, $r_{1,1} = r_{1,2} = 1$, $\beta = 0.656$. b) Søyle 2, $r_{1,1} = r_{1,2} = 1$, $\beta = 0.813$.**Figur 10.12:** f_m for modell 2 (se side 84), eksakt og tilnærmet for søyle 1 og 2.

10.5.3 Diskusjon

Modell 1:

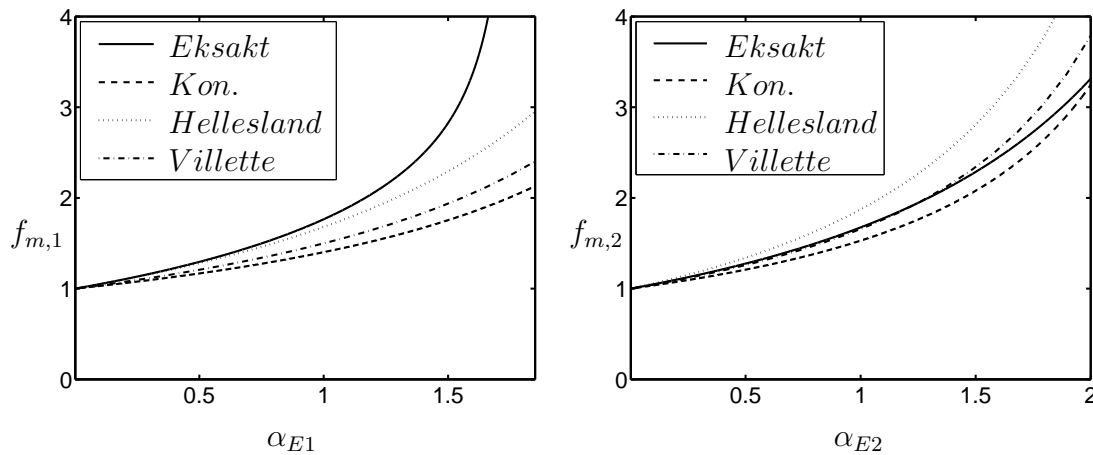
Etter en gjennomgang av tabell 10.7 og 10.8 kommer det frem at Helleslands metode stort sett er mest gunstig for søylene, selv om resultatet går jevnt mer til

Tabell 10.9: f_m for modell 2 (se side 84), søyle 1, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.

$\beta_{kon,1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\alpha_{E,1}$	$f_{m,1}$			
				<i>Eksakt</i>	$\frac{Konvensjonell}{Eksakt}$	$\frac{Hellesland}{Eksakt}$	$\frac{Villette}{Eksakt}$
0.656	1	1	0.776	1.942	0.772	0.922	0.834
	0.5		1.086	2.372	0.632	0.779	0.730
	0		1.396	3.444	0.436	0.540	0.522
	-0.5		1.706	14.814	0.101	0.119	0.118
	-0.75		-	-	-	-	-

Tabell 10.10: f_m for modell 2 (se side 84), søyle 2, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.

$\beta_{kon,2}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\alpha_{E,2}$	$f_{m,2}$			
				<i>Eksakt</i>	$\frac{Konvensjonell}{Eksakt}$	$\frac{Hellesland}{Eksakt}$	$\frac{Villette}{Eksakt}$
0.813	1	1	0.504	1.600	0.938	1.071	1.013
		0.5	0.706	1.543	0.972	1.128	1.352
		0	0.907	1.447	1.036	1.193	1.977
		-0.5	1.109	1.274	1.177	1.262	3.463
		-0.75	1.109	1.059	1.416	1.222	4.165



a) Søyle 1, $r_{1,1} = r_{1,2} = 1$, $\beta = 0.535$. b) Søyle 2, $r_{1,1} = r_{1,2} = 1$, $\beta = 0.588$.

Figur 10.13: f_m for modell 3 (se side 85), eksakt og tilnærmet for søyle 1 og 2.

Tabell 10.11: f_m for modell 3 (se side 85), søyle 1, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.

$\beta_{kon,1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\alpha_{E,1}$	$f_{m,1}$			
				<i>Eksakt</i>	$\frac{Konvensjonell}{Eksakt}$	$\frac{Hellesland}{Eksakt}$	$\frac{Villette}{Eksakt}$
0.535	1	1	1.163	1.993	0.753	0.928	0.813
	0.5		1.628	2.898	0.517	0.666	0.597
	0		-	-	-	-	-
	-0.5		-	-	-	-	-
	-0.75		-	-	-	-	-

Tabell 10.12: f_m for modell 3 (se side 85), søyle 2, målt ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$.

$\beta_{kon,2}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\alpha_{E,2}$	$f_{m,2}$			
				<i>Eksakt</i>	$\frac{Konvensjonell}{Eksakt}$	$\frac{Hellesland}{Eksakt}$	$\frac{Villette}{Eksakt}$
0.588	1	1	0.963	1.640	0.915	1.112	0.988
		0.5	1.349	1.575	0.952	1.202	1.324
		0	1.734	1.432	1.047	1.338	1.998
		-0.5	2.120	1.159	1.294	1.571	3.806
		-0.75	2.120	0.906	1.656	1.618	4.872

den usikre siden etter hvert som $r_{1,1}$ går mot -1.

Modell 2:

Fra tabellene 10.9 og 10.10 er det ikke helt entydig hvilken metode som kommer best ut. Resultatene er kun til den usikre siden for søyle 1, og for det meste til den sikre siden for søyle 2.

Modell 3:

Fra tabellene 10.11 og 10.12 ser vi at mange resultatene faller bort (merket med "-") for søyle 1, da f_m beregnet eksakt har gått mot uendelig før metoden konvensjonell har oppnådd verdien 1.5, dette gir lite rom for diskusjon, men Helleslands metode gir resultater nærmest eksakt for de resultater som foreligger. For søyle

2 veksles det mellom metodene som gir best tilnærmede.

Totalt:

Der er her vanskelig å trekke en helhetsvurdering av metodene, men jeg velger å holde en tommel opp for Hellelands metode. Metoden holder seg ganske stabil med lite svingning i resultatene i forhold til de andre metodene.

10.6 Modell 4, parvis sammenligning

10.6.1 Generelt

I dette avsnittet sammenlignes momentforstørrelsesfaktoren parvis, dvs. at momentforstørrelsesfaktoren beregnet med bruk av β_{eks} sammenlignes med momentforstørrelsesfaktoren beregnet med β_{kon} . Resultatene som fremkommer sammenlignes ved den verdi av α_E som gir $f_m = 1.5$ beregnet med β_{kon} for den tilnærmede metoden som betraktes, for så å bli sammenlignet med eksakt utregning. Modell 4 er kanskje en konstruksjon som kan kalles noe utypisk da fjærene i B og C nesten ikke har noe stivhetsbidrag til søylene (se figur 10.1 på side 81, og tilfeller med negativ innspenning blir også vist).

10.6.2 Presentasjon av resultater

Det er valgt å dele presentasjonen i hovedsakelig to deler, der det først vises noen tabeller med resultater (som nevnt over), som følger videre i dette avsnittet, og i et senere avsnitt, nærmere bestemt 10.6.3 på side 103, blir en grundigere undersøkelse foretatt. For sistnevnte tilfeller er det også spesielt lagt til rette for å undersøke tilfeller med negativ innspenning (positiv innspenning blir også undersøkt), men blir som tidligere nevnt ikke diskutert før alle modellene (4 - 6) er gjennomgått, en diskusjon angående negativ innspenning kommer først i kapittel 11.2 på side 134.

Modell 4 med konvensjonell metode

I tabell 10.13 og 10.14 på side 100 og 101 vises forholdet mellom tilnærmet og eksakt beregnet momentforstørrelsesfaktor for søyle 1 og 2 hhv. For de tilnærmede metodene kommer det frem fra tabellene hvilken knekklendefaktor og andre faktorer som er benyttet for hver beregning. En generell diskusjon av overnevnte tabeller kommer senere, og fra noen av disse blir det plukket ut noen spesielle målinger som diskuteres nøyere, se kapittel 10.6.3.

Tabell 10.13: Momentforstørrelsesfaktor modell 4 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 1/500$, se side 86), søyle 1, sammenligning ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .

$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	\bar{k}_{1B}	α_{E1}	$f_{m,1}$ (Eksakt og Konvensjonell)			
								$Eksakt_1$	$\frac{\beta_{kon,1}}{Eksakt_1}$	$\frac{\beta_{eks,1}}{Eksakt_1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$
1	0.5	1	1	1.124	0.622	-2.830	-	-	-	-	-
		0					-	-	-	-	
		-0.5					-	-	-	-	
	1	1	1	0.879	0.796	-1.898	0.682	2.205	0.680	0.958	0.710
		0					1.227	12.845	0.118	0.892	0.131
		-0.5					-	-	-	-	-
2	0.5	1	1	0.837	0.836	-1.616	0.682	2.001	0.750	0.956	0.784
		0					1.278	4.682	0.320	0.913	0.351
		-0.5					-	-	-	-	-
	1	1	1	0.703	0.995	-0.061	0.682	1.732	0.866	0.870	0.995
		0					1.228	2.074	0.723	0.734	0.985
		-0.5					1.500	2.343	0.640	0.658	0.973

Modell 4 med Helleslands metode

I tabell 10.15 og 10.16 på side 101 og 102 vises på tilsvarende måte som tidligere nevnt forholdet mellom tilnærmet og eksakt beregnet momentforstørrelsesfaktor, for søyle 1 og 2 hhv. Hvilke faktorer som er benyttet kommer frem fra tabellene. En generell diskusjon av overnevnte tabeller omtales senere, og igjen blir det plukket ut noen spesielle målinger som diskuteres nøyere, se kapittel 10.6.3.

Tabell 10.14: Momentforstørrelsesfaktor modell 4 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 1/500$, se side 86), søyle 2, sammenligning ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .

$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{2B}	α_{E2}	$f_{m,2}$ (Eksakt og Konvensjonell)				
								$Eksakt_2$	$\frac{\beta_{kon,2}}{Eksakt_2}$	$\frac{\beta_{eks,2}}{Eksakt_2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	
1	0.5	1	1	0	0.795	1.258	2.832	0.334	1.398	1.073	0.906	1.184
			0					0.600	1.106	1.476	0.984	1.500
			-0.5					0.734	0.868	1.727	1.151	1.500
	1	1	1	0	0.879	1.138	1.900	0.334	1.489	1.007	0.904	1.114
			0					0.600	1.222	1.227	0.915	1.341
			-0.5					0.734	1.056	1.420	0.947	1.500
2	0.5	1	1	0	0.837	1.195	1.618	0.334	1.458	1.029	0.895	1.150
			0					0.600	1.160	1.293	0.893	1.449
			-0.5					0.734	1.010	1.485	0.990	1.500
	1	1	1	0	0.994	1.006	0.063	0.334	1.622	0.924	0.919	1.006
			0					0.600	1.656	0.906	0.889	1.018
			-0.5					0.734	1.695	0.885	0.856	1.034

Tabell 10.15: Momentforstørrelsesfaktor modell 4 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 1/500$, se side 86), søyle 1, sammenligning ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .

$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	\bar{k}_{1B}	α_{E1}	$f_{m,1}$ (Eksakt og Hellesland)				
								$Eksakt_1$	$\frac{\beta_{kon,1}}{Eksakt_1}$	$\frac{\beta_{eks,1}}{Eksakt_1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	
1	0.5	1	0	1	1.124	0.622	-2.830	0.504	2.021	0.742	1.473	0.504
			1					-	-	-	-	-
			-0.5					-	-	-	-	-
	1	1	1	0	0.879	0.796	-1.898	0.504	1.697	0.884	1.103	0.802
			0					1.054	3.737	0.401	0.983	0.408
			-0.5					-	-	-	-	-
2	0.5	1	1	0	0.837	0.836	-1.616	0.504	1.606	0.934	1.100	0.849
			0					1.054	2.605	0.576	1.014	0.568
			-0.5					1.393	18.187	0.082	0.877	0.094
	1	1	1	0	0.703	0.995	-0.061	0.504	1.475	1.017	1.021	0.996
			0					1.054	1.668	0.899	0.907	0.991
			-0.5					1.393	1.945	0.771	0.781	0.987

Modell 4 med Villettes metode

I tabell 10.17 og 10.18 på side 102 og 103 vises også på tilsvarende måte som tidligere nevnt forholdet mellom tilnærmet og eksakt beregnet momentforstør-

Tabell 10.16: Momentforstørrelsesfaktor modell 4 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 1/500$, se side 86), søyle 2, sammenligning ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .

$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{2B}	α_{E2}	$f_{m,2}$ (Eksakt og Hellesland)				
								$Eksakt_2$	$\frac{\beta_{kon,2}}{Eksakt_2}$	$\frac{\beta_{eks,2}}{Eksakt_2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	
1	0.5	1	1	0.795	1.258	2.832	0.287	1.329	1.129	0.991	1.139	
			0					0.581	0.999	1.502	1.153	1.302
			-0.5					0.750	0.872	1.719	1.285	1.338
	1	1	1	0.879	1.138	1.900	0.287	1.400	1.071	0.990	1.082	
			0					0.581	1.189	1.261	1.045	1.207
			-0.5					0.750	1.074	1.397	1.084	1.288
2	0.5	1	1	0.837	1.195	1.618	0.287	1.376	1.090	0.982	1.111	
			0					0.581	1.132	1.325	1.051	1.260
			-0.5					0.750	1.023	1.466	1.107	1.324
	1	1	1	0.994	1.006	0.063	0.287	1.500	1.000	0.996	1.004	
			0					0.581	1.580	0.950	0.938	1.013
			-0.5					0.750	1.789	0.838	0.819	1.024

relsesfaktor, for søyle 1 og 2 hhv. Fra tabellene kommer det frem hvilke faktorer og hvilke verdier disse har for hver enkelt beregning. En generell diskusjon av overnevnte tabeller blir først gjennomgått på et senere tidspunkt, og igjen blir det plukket ut noen spesielle målinger som diskuteres nøyere, se kapittel 10.6.3.

Tabell 10.17: Momentforstørrelsesfaktor modell 4 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 1/500$, se side 86), søyle 1, sammenligning ved $f_{m,Villette} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .

$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	\bar{k}_{1B}	α_{E1}	$f_{m,1}$ (Eksakt og Villette)				
								$Eksakt_1$	$\frac{\beta_{kon,1}}{Eksakt_1}$	$\frac{\beta_{eks,1}}{Eksakt_1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	
1	0.5	1	0	1.124	0.622	-2.830	0.588	3.011	0.498	1.517	0.328	
			1					-	-	-	-	
			-0.5					-	-	-	-	
	1	1	1	0.879	0.796	-1.898	0.588	1.905	0.788	1.066	0.739	
			0					1.052	3.695	0.406	0.997	0.407
			-0.5					-	-	-	-	-
2	0.5	1	1	0.837	0.836	-1.616	0.588	1.772	0.845	1.054	0.803	
			0					1.052	2.589	0.579	1.030	0.563
			-0.5					1.388	15.950	0.094	0.884	0.106
	1	1	1	0.703	0.995	-0.061	0.588	1.587	0.945	0.949	0.995	
			0					1.052	1.663	0.902	0.910	0.991
			-0.5					1.388	1.930	0.777	0.790	0.984

Tabell 10.18: Momentforstørrelsesfaktor modell 4 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 1/500$, se side 86), søyle 2, sammenligning ved $f_{m,Villette} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .

$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{2B}	α_{E2}	$f_{m,2}$ (Eksakt og Villette)			
								Eksakt ₂	$\frac{\beta_{kon,2}}{Eksakt_2}$	$\frac{\beta_{eks,2}}{Eksakt_2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$
1	0.5	1	1	0.795	1.258	2.832	0.287	1.330	1.128	0.959	1.176
			0					0.887	1.692	1.128	1.500
			-0.5					0.942	1.592	1.061	1.500
	1	1	1	0.879	1.138	1.900	0.287	1.401	1.071	0.966	1.108
			0					0.947	1.583	1.055	1.500
			-0.5					0.981	1.529	1.019	1.500
2	0.5	1	1	0.837	1.195	1.618	0.287	1.377	1.089	0.953	1.143
			0					0.933	1.608	1.072	1.500
			-0.5					0.976	1.536	1.024	1.500
	1	1	1	0.994	1.006	0.063	0.287	1.500	0.999	0.994	1.006
			0					1.038	1.445	1.017	1.421
			-0.5					1.047	1.423	0.955	1.500

10.6.3 En grundigere gjennomgang av momentforstørrelsesfaktoren

I dette avsnittet går det grundigere tilverks, noe av poenget er bl.a. å fremheve om alle metodene i modell 4 har en enighet om hvilken søyle som er mest kritisk i rammesystemet som undersøkes, men essensen er å foreta en undersøkelse der negativ rotasjonsinnspenning innkommer. Det er gjort en liten forandring fra tidligere, der det nå valgt å uttrykke momentforstørrelsesfaktoren i begge søylene som funksjon av α_{E1} . Med utgangspunkt i overnevnte tekst har jeg valgt å illustrere momentforstørrelsesfaktoren i fire eksempler, med utgangspunkt fra tabellene (10.13 - 10.18) tidligere i kapittelet. Momentforstørrelsesfaktoren blir vist for de forskjellige metodene, enten med bruk av β_{eks} eller med β_{kon} , og en sammenligning muliggjøres. Med utdrag fra overnevnte tabeller fremkommer eksemplene som skal undersøkes, og en forklaring er vist i tabell 10.19.

Tabell 10.19: Nummerering av eksemplene som skal gjennomgås.

$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	Eksempelnummer
2	0.5	1	1	Eksempel 1
2	0.5	-0.5	1	Eksempel 2
2	1	1	1	Eksempel 3
2	1	-0.5	1	Eksempel 4

10.6.4 Presentasjon av resultater

Eksempel 1

For eksempel 1 benyttes faktorene i tabell 10.20 på side 105, og momentforstørrelsesfaktoren for de forskjellige beregningsmetodene vises i figur 10.14 og 10.15 på side 105 og 106 hhv. En diskusjon ang. figuren kommer senere i kapittel 10.6.5 på side 108.

Eksempel 2

For eksempel 2 benyttes faktorene i tabell 10.21 på side 105, og momentforstørrelsesfaktoren for de forskjellige beregningsmetodene vises i figur 10.16 og 10.17 på side 106 og 107 hhv. En diskusjon ang. figuren kommer senere i kapittel 10.6.5 på side 108.

Eksempel 3

For eksempel 3 benyttes faktorene i tabell 10.22 på side 106, og momentforstørrelsesfaktoren for de forskjellige beregningsmetodene vises i figur 10.18 og 10.19 på side 107 og 108 hhv. En diskusjon ang. figuren kommer senere i kapittel 10.6.5 på side 108.

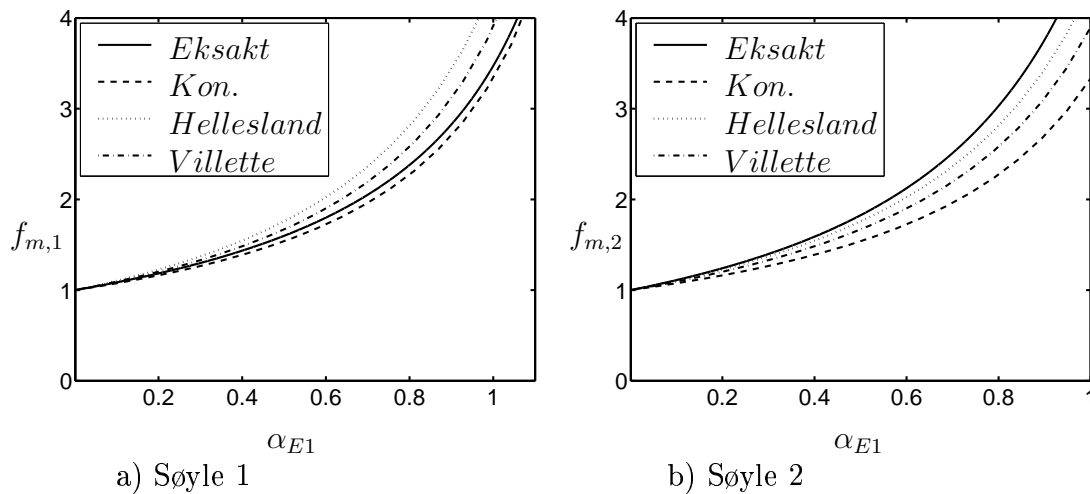
Eksempel 4

For eksempel 4 benyttes faktorene i tabell 10.23 på side 107, og momentforstørrelsesfaktoren for de forskjellige beregningsmetodene vises i figur 10.20 og 10.21

på side 108 og 109 hhv. En diskusjon ang. figuren kommer senere i kapittel 10.6.5 på side 108.

Tabell 10.20: Faktorer som benyttes i eksempel 1.

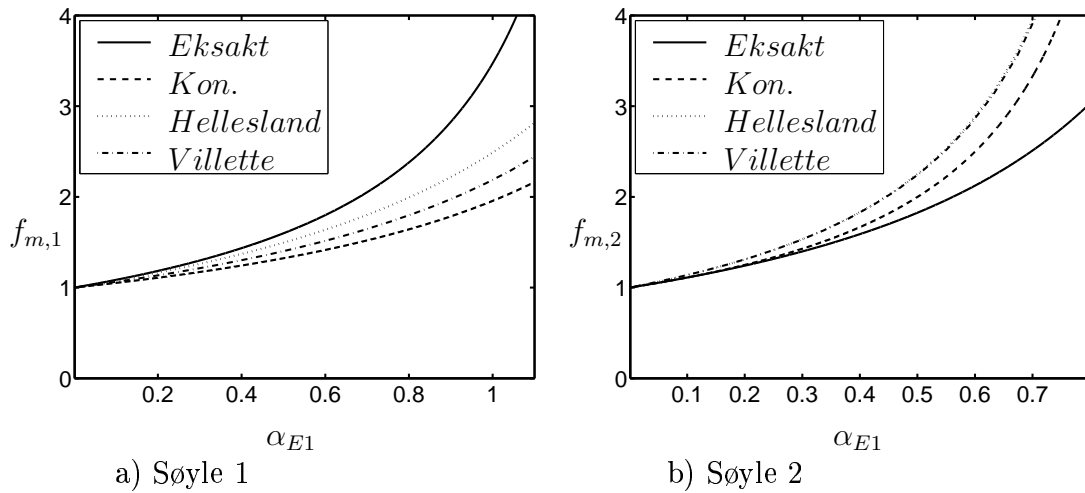
\bar{k}_{bA}	\bar{k}_{bB}	\bar{k}_{bC}	$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$
20000	1/500	1/500	2	0.5	1	1
$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{1B}	\bar{k}_{2B}	
0.837	0.836	0.837	1.195	-1.616	1.618	



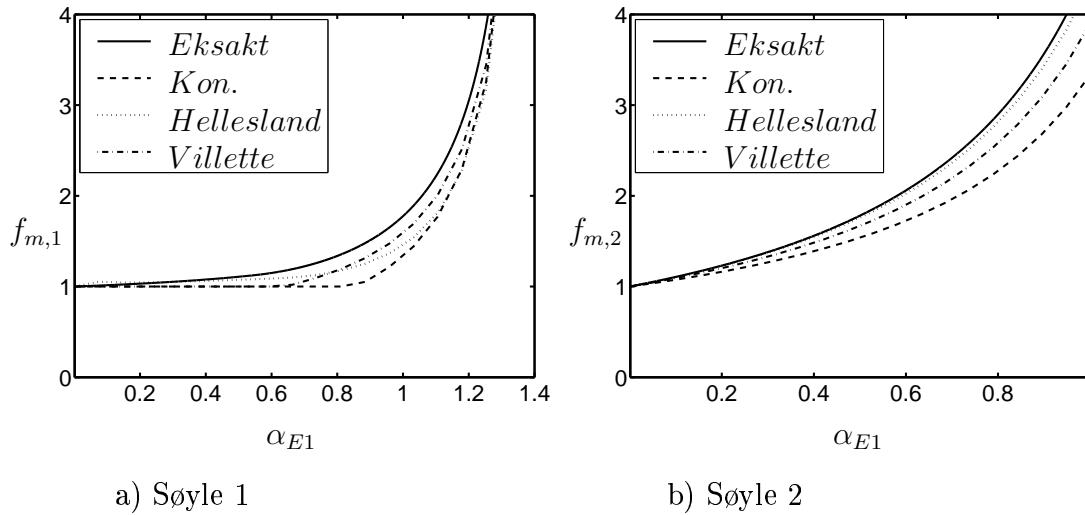
Figur 10.14: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 1, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .

Tabell 10.21: Faktorer som benyttes i eksempel 2.

\bar{k}_{bA}	\bar{k}_{bB}	\bar{k}_{bC}	$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$
20000	1/500	1/500	2	0.5	-0.5	1
$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{1B}	\bar{k}_{2B}	
0.837	0.836	0.837	1.195	-1.616	1.618	



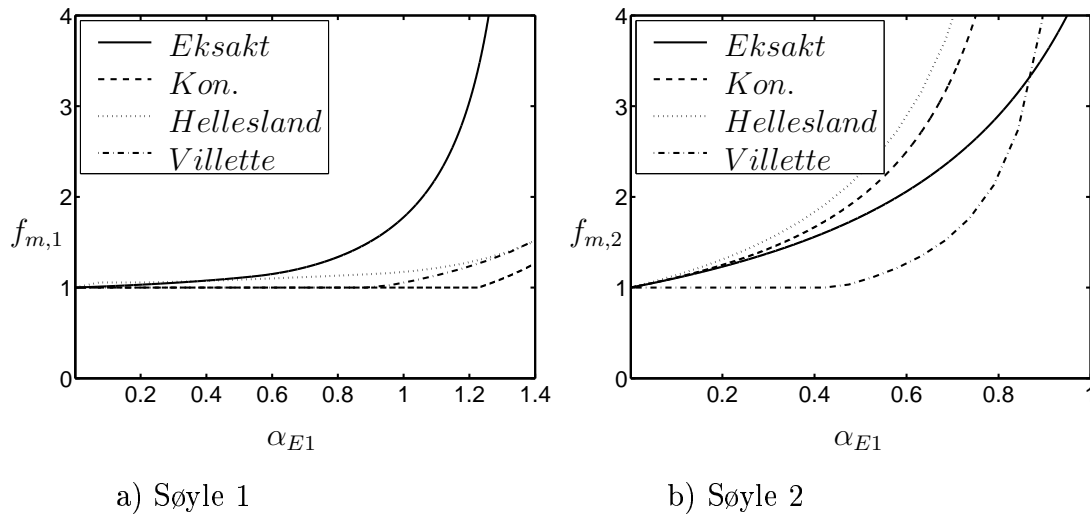
Figur 10.15: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 1, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .



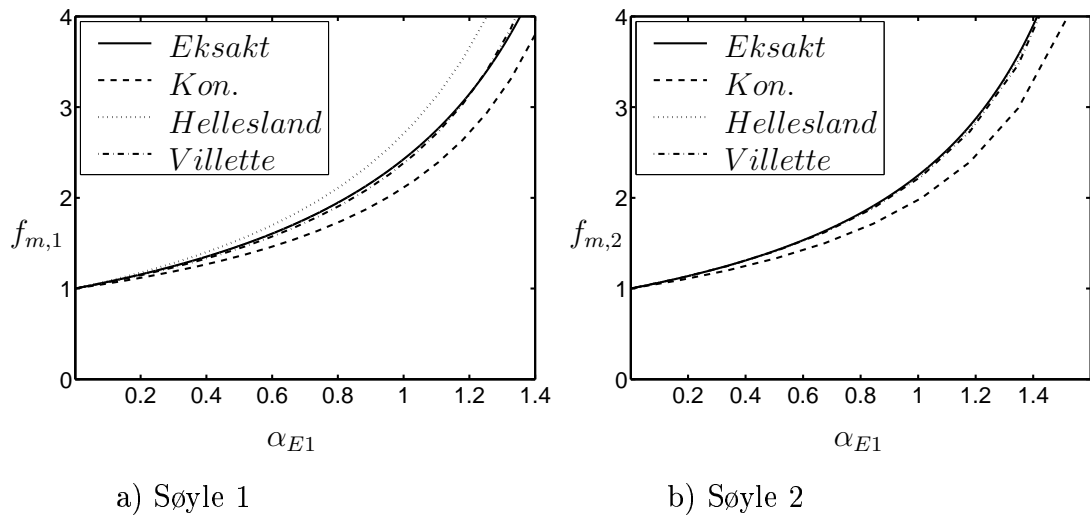
Figur 10.16: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 2, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .

Tabell 10.22: Faktorer som benyttes i eksempel 3.

\bar{k}_{bA}	\bar{k}_{bB}	\bar{k}_{bC}	$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$
20000	1/500	1/500	2	1	1	1
$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{1B}	\bar{k}_{2B}	
0.703	0.995	0.994	1.006	-0.061	0.063	



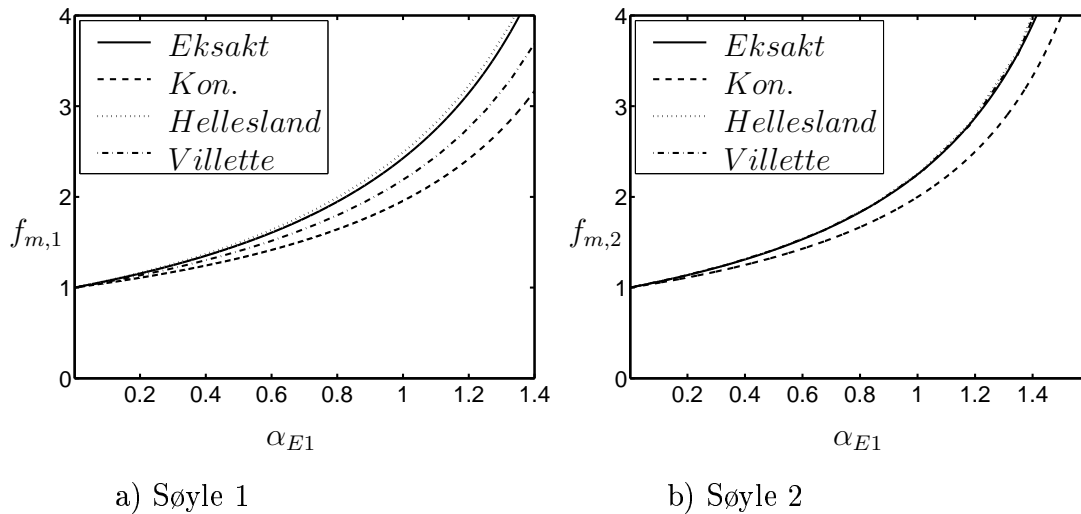
Figur 10.17: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 2, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .



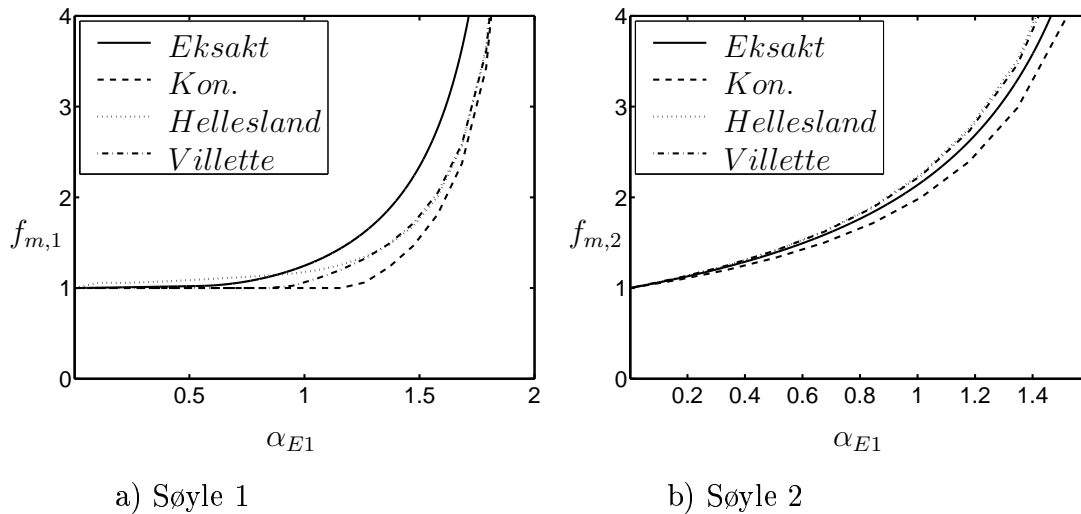
Figur 10.18: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 3, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .

Tabell 10.23: Faktorer som benyttes i eksempel 4.

\bar{k}_{bA}	\bar{k}_{bB}	\bar{k}_{bC}	$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$
20000	1/500	1/500	2	1	-0.5	1
$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{1B}	\bar{k}_{2B}	
0.703	0.995	0.994	1.006	-0.061	0.063	



Figur 10.19: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 3, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .

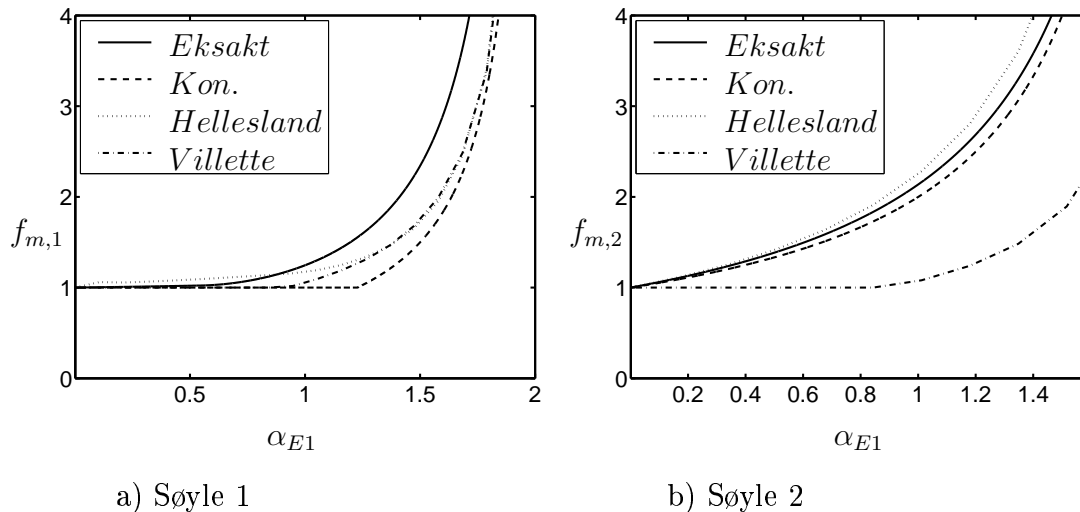


Figur 10.20: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 4, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .

10.6.5 Diskusjon

Konvensjonell metode

For denne metoden kommer det frem fra tabell 10.13 på side 100 at alle resultatene er til den usikre siden for søyle 1, og at resultatene gir bedre tilnærming ved bruk av β_{eks} . Det kommer også frem at β_{eks} alltid er *større* enn β_{kon} . For søyle 2 kommer det frem fra tabell 10.14 at resultatene stort sett er til den usikre siden



a) Søyle 1

b) Søyle 2

Figur 10.21: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 4, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .

ved bruk av β_{eks} , mens for bruk av β_{kon} ligger flesteparten av resultatene til den sikre siden. For denne søylen kommer også frem at β_{eks} alltid er *mindre* enn β_{kon} .

Fra eksempel 1 vises at kurven for eksakt utregning stiger raskest for søyle 2, altså søyle 2 er mest kritisk. Når kurvene sammenlignes for konvensjonell metode for søyle 1 og 2 med bruk av β_{eks} er det uklart hvem av kurvene som stiger raskest, så en entydig løsning om hvilken søyle som er mest kritisk er noe som ikke kan sees direkte fra figuren, men benyttes derimot β_{kon} , kommer det klart frem at søyle 2 er mest kritisk.

For eksempel 2 vises det igjen at søyle 2 er mest kritisk, og den tilnærmede metoden tilsier det samme (kurvene stiger raskest for søyle 2).

I eksempel 3 stiger eksakt kurve raskest for søyle 1, og ved bruk av β_{eks} , er det full enighet, men ved bruk av β_{kon} er kurven raskest stigende for søyle 2, altså mest kritisk, som er noe uheldig.

For eksempel 4 er søyle 2 mest kritisk, og den tilnærmede metoden tilsier det samme.

Helleslands metode

Fra tabell 10.15 og 10.16 på side 101 svinger resultatene mellom sikker og usikker side, og beste resultater er for søyle 2. Det kommer også frem at tilnærmelsen

stort sett er best ved bruk av β_{eks} , og for de tilfellene der $\beta_{kon} > \beta_{eks}$ er resultatene for det meste til den sikre siden ved bruk av β_{kon} .

Fra eksempel 1 kommer det frem at søyle 2 er mest kritisk, og det er vanskelig å si om den tilnærmede metoden med bruk av β_{eks} tilsier det samme, men med bruk av β_{kon} kommer det klart frem at søyle 2 også er mest kritisk.

For eksempel 2 kommer det også frem at søyle 2 er mest kritisk, og den tilnærmede metoden tilsier det samme (kurvene stiger raskest for søyle 2).

I eksempel 3 stiger eksakt kurve raskest for søyle 1, og ved bruk av β_{eks} og β_{kon} er det full enighet.

For eksempel 4 er søyle 2 mest kritisk, og den tilnærmede metoden tilsier det samme.

Villettes metode

Fra tabell 10.17 og 10.18 på side 102 svinger resultatene igjen mellom sikker og usikker side, og beste resultat er også igjen for søyle 2. Det kommer også frem at tilnærmelsen stort sett er best ved bruk av β_{eks} , og for de tilfellene der $\beta_{kon} > \beta_{eks}$ er resultatene for det meste til den sikre siden ved bruk av β_{kon} .

Fra eksempel 1 kommer det frem at søyle 2 er mest kritisk, og det er vanskelig å si om den tilnærmede metoden med bruk av β_{eks} tilsier det samme, men fra figuren ser det ut som søyle 1 er mest kritisk, noe uheldig, men med bruk av β_{kon} vises at søyle 2 også er mest kritisk.

For eksempel 2 kommer det igjen frem at søyle 2 er mest kritisk, og den tilnærmede metoden tilsier det samme (kurvene stiger raskest for søyle 2).

I eksempel 3 stiger eksakt kurve raskest for søyle 1, og ved bruk av β_{eks} og β_{kon} , er det full enighet.

For eksempel 4 er søyle 2 mest kritisk, og den tilnærmede metoden tilsier det samme.

10.7 Modell 5, parvis sammenligning

10.7.1 Generelt

I dette avsnittet sammenlignes resultatene igjen slik som tidligere beskrevet i begynnelsen av kapittel 10.6 på side 99. Hovedforskjellen nå er at konstruksjonen er stivet opp ved hjelp av høyere bøyestivhet i bjelkene B og C (se figur 10.1 på side 81), som resulterer med høyere stivhetsbidrag til søylene. Denne konstruksjonen kan sies å være av en mer typisk art fordi søylene og bjelkene (B og C) har samme bøyestivhet.

10.7.2 Presentasjon av resultater

Det er igjen valgt å dele presentasjonen i to deler, der første del viser noen tabeller med resultater, og i et senere avsnitt, nærmere bestemt 10.7.3 på side 115, blir en grundigere undersøkelse gjennomgått. For sistnevnte tileller er det også igjen (slik som for modell 4) spesielt lagt til rette for å undersøke tilfeller med negativ innspenning (positiv innspenning blir også undersøkt), men blir som tidligere nevnt ikke diskutert før alle modellene (4 - 6) er gjennomgått, en diskusjon angående negativ innspenning kommer som sagt tidligere først i kapittel 11.2 på side 134.

Modell 5 med Konvensjonell metode

I tabell 10.24 og 10.25 på side 112 og 112 vises forholdet mellom tilnærmet og eksakt beregnet momentforstørrelsesfaktor for søyle 1 og 2 hhv. For de tilnærmede metodene kommer det frem fra tabellene hvilken knekklendefaktor og andre faktorer som er benyttet for hver beregning. En generell diskusjon av overnevnte tabeller kommer senere, og fra noen av disse blir det plukket ut noen spesielle målinger som diskuteres nøyere, se kapittel 10.7.3.

Modell 5 med Helleslands metode

I tabell 10.26 og 10.27 på side 113 og 113 vises på tilsvarende måte som tidligere nevnt forholdet mellom tilnærmet og eksakt beregnet momentforstørrelsesfaktor, for søyle 1 og 2 hhv. Hvilke faktorer som er benyttet kommer frem fra tabellene.

Tabell 10.24: Momentforstørrelsesfaktor modell 5 ($\bar{k}_{bA} = 2 \cdot 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 2$, se side 86), søyle 1, sammenligning ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .

$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	\bar{k}_{1B}	α_{E1}	$f_{m,1}$ (Eksakt og Konvensjonell)				
								$Eksakt_1$	$\frac{\beta_{kon,1}}{Eksakt_1}$	$\frac{\beta_{eks,1}}{Eksakt_1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	
1	0.5	1	1	0.915	0.705	-2.099	0.803	2.491	0.602	1.221	0.493	
		0						-	-	-	-	
		-0.5						-	-	-	-	
	1	1	1	0.752	0.871	-0.804	0.776	1.194	0.772	0.918	0.842	
		0						1.396	3.442	0.436	0.830	0.525
		-0.5						1.706	14.840	0.101	0.785	0.129
2	0.5	1	1	0.691	0.933	0.154	0.802	1.834	0.818	0.884	0.925	
		0						1.444	2.456	0.611	0.788	0.775
		-0.5						1.765	3.447	0.435	0.741	0.587
	1	1	1	0.624	1.051	2.091	0.776	1.692	0.887	0.847	1.047	
		0						1.396	1.812	0.828	0.725	1.141
		-0.5						1.706	1.815	0.826	0.656	1.259

Tabell 10.25: Momentforstørrelsesfaktor modell 5 ($\bar{k}_{bA} = 2 \cdot 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 2$, se side 86), søyle 2, sammenligning ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .

$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{2B}	α_{E2}	$f_{m,2}$ (Eksakt og Konvensjonell)				
								$Eksakt_2$	$\frac{\beta_{kon,2}}{Eksakt_2}$	$\frac{\beta_{eks,2}}{Eksakt_2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	
1	0.5	1	1	0.647	1.284	4.099	0.483	1.415	1.060	0.886	1.197	
			0					0.870	1.087	1.380	0.920	1.500
			-0.5					1.063	0.916	1.637	1.091	1.500
	1	1	1	0.752	1.081	2.804	0.504	1.599	0.938	0.875	1.072	
			0					0.907	1.447	1.037	0.852	1.217
			-0.5					1.109	1.274	1.177	0.843	1.397
2	0.5	1	1	0.691	1.202	1.846	0.483	1.476	1.017	0.881	1.154	
			0					0.870	1.251	1.199	0.821	1.461
			-0.5					1.063	1.110	1.352	0.901	1.500
	1	1	1	0.882	0.922	-0.091	0.504	1.781	0.842	0.934	0.912	
			0					0.907	2.303	0.651	0.886	0.735
			-0.5					1.109	3.426	0.438	0.852	0.514

En generell diskusjon av overnevnte tabeller omtales senere, og igjen blir det plukket ut noen spesielle målinger som diskuteres nøyere, se kapittel 10.7.3.

Tabell 10.26: Momentforstørrelsesfaktor modell 5 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 2$, se side 86), søyle 1, sammenligning ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .

$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	\bar{k}_{1B}	α_{E1}	$f_{m,1}$ (Eksakt og Hellesland)				
								$Eksakt_1$	$\frac{\beta_{kon,1}}{Eksakt_1}$	$\frac{\beta_{eks,1}}{Eksakt_1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	
1	0.5	1	1	0.915	0.705	-2.099	0.579	1.741	0.861	1.295	0.665	
		0						-	-	-		
		-0.5						-	-	-		
	1	1	1	0.752	0.871	-0.804	0.562	1.565	0.958	1.081	0.886	
		0						1.179	2.182	0.687	0.986	0.697
		-0.5						1.561	4.445	0.337	0.795	0.425
2	0.5	1	1	0.691	0.933	0.154	0.578	1.512	0.992	1.050	0.994	
		0						1.215	1.789	0.838	0.973	0.862
		-0.5						1.608	2.345	0.640	0.826	0.774
	1	1	1	0.624	1.051	2.091	0.562	1.442	1.040	1.003	1.037	
		0						1.179	1.477	1.016	0.940	1.080
		-0.5						1.560	1.541	0.973	0.884	1.102

Tabell 10.27: Momentforstørrelsesfaktor modell 5 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 2$, se side 86), søyle 2, sammenligning ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .

$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{2B}	α_{E2}	$f_{m,2}$ (Eksakt og Hellesland)				
								$Eksakt_2$	$\frac{\beta_{kon,2}}{Eksakt_2}$	$\frac{\beta_{eks,2}}{Eksakt_2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	
1	0.5	1	0	0.647	1.284	4.099	0.380	1.308	1.147	0.992	1.156	
		0						0.787	1.026	1.462	1.128	1.296
		-0.5						1.031	0.905	1.658	1.289	1.286
	1	1	0	0.752	1.081	2.804	0.393	1.427	1.051	0.997	1.054	
		0						0.815	0.291	1.162	1.030	1.128
		-0.5						1.070	0.213	1.236	1.054	1.173
2	0.5	1	0	0.691	1.202	1.846	0.380	1.349	1.112	0.993	1.119	
		0						0.787	1.161	1.293	1.035	1.249
		-0.5						1.031	1.084	1.384	1.088	1.273
	1	1	0	0.882	0.922	-0.091	0.393	1.535	0.977	1.042	0.938	
		0						0.815	1.842	0.814	0.990	0.883
		-0.5						1.070	2.799	0.536	0.819	0.654

Modell 5 med Villettes metode

I tabell 10.28 og 10.29 på side 114 og 114 vises også på tilsvarende måte som tidligere nevnt forholdet mellom tilnærmet og eksakt beregnet momentforstør-

relsesfaktor, for søyle 1 og 2 hhv. Fra tabellene kommer det frem hvilke faktorer og hvilke verdier disse har for hver enkelt beregning. En generell diskusjon av overnevnte tabeller blir først gjennomgått på et senere tidspunkt, og igjen blir det plukket ut noen spesielle målinger som diskuteres nøyere, se kapittel 10.7.3.

Tabell 10.28: Momentforstørrelsesfaktor modell 5 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 2$, se side 86), søyle 1, sammenligning ved $f_{m,Villette} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .

$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	\bar{k}_{1B}	α_{E1}	$f_{m,1}$ (Eksakt og Villette)			
								<i>Eksakt</i> ₁	$\frac{\beta_{kon,1}}{Eksakt_1}$	$\frac{\beta_{eks,1}}{Eksakt_1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$
1	0.5	1	1	0.915	0.705	-2.099	0.691	2.044	0.734	1.322	0.555
		0					-	-	-	-	
		-0.5					-	-	-	-	
	1	1	1	0.752	0.871	-0.804	0.668	1.735	0.864	1.011	0.855
		0					1.196	2.247	0.667	0.977	0.683
		-0.5					1.579	4.858	0.309	0.807	0.383
2	0.5	1	1	0.691	0.933	0.154	0.691	1.662	0.903	0.970	0.931
		0					1.238	1.839	0.815	0.957	0.852
		-0.5					1.633	2.470	0.607	0.833	0.729
	1	1	1	0.624	1.051	2.091	0.668	1.559	0.962	0.921	1.044
		0					1.196	1.499	1.001	0.917	1.091
		-0.5					1.579	1.570	0.955	0.828	1.153

Tabell 10.29: Momentforstørrelsesfaktor modell 5 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 2$, se side 86), søyle 2, sammenligning ved $f_{m,Villette} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .

$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{2B}	α_{E2}	$f_{m,2}$ (Eksakt og Villette)				
								<i>Eksakt</i> ₂	$\frac{\beta_{kon,2}}{Eksakt_2}$	$\frac{\beta_{eks,2}}{Eksakt_2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	
1	0.5	1	1	0.647	1.284	4.099	0.416	1.344	1.116	0.939	1.189	
			0				0.416	0.879	1.706	1.137	1.500	
			-0.5				0.416	0.909	1.650	1.100	1.500	
	1	1	1	1	0.752	1.081	2.804	0.434	1.487	1.009	0.944	1.068
		0		0.434				0.951	1.578	1.061	1.487	
		-0.5		0.434				0.947	1.584	1.056	1.500	
2	0.5	1	1	0.691	1.202	1.846	0.416	1.391	1.078	0.940	1.147	
			0				0.416	0.993	1.607	1.071	1.500	
			-0.5				0.416	0.951	1.577	1.051	1.500	
	1	1	1	1	0.882	0.922	-0.091	0.434	1.618	0.927	1.009	0.918
		0		0.434				1.074	1.397	1.055	1.324	
		-0.5		0.434				1.038	1.445	0.964	1.500	

10.7.3 En grundigere gjennomgang av momentforstørrelsesfaktoren

I dette avsnittet går det igjen grundigere tilverks, poenget er det samme som tidligere definert i kapittel 10.6.3 på side 103, men nå for modell 5. Videre betraktes de samme eksemplene definert i tabell 10.19 på side 104.

10.7.4 Presentasjon av resultater

Eksempel 1

For eksempel 1 benyttes faktorene i tabell 10.30 på side 116, og momentforstørrelsesfaktoren for de forskjellige beregningsmetodene vises i figur 10.22 og 10.23 på side 116 og 117 hhv. En diskusjon ang. figuren kommer senere i kapittel 10.7.5 på side 119.

Eksempel 2

For eksempel 2 benyttes faktorene i tabell 10.31 på side 116, og momentforstørrelsesfaktoren for de forskjellige beregningsmetodene vises i figur 10.24 og 10.25 på side 117 og 118 hhv. En diskusjon ang. figuren kommer senere i kapittel 10.7.5 på side 119.

Eksempel 3

For eksempel 3 benyttes faktorene i tabell 10.32 på side 117, og momentforstørrelsesfaktoren for de forskjellige beregningsmetodene vises i figur 10.26 og 10.27 på side 118 og 119 hhv. En diskusjon ang. figuren kommer senere i kapittel 10.7.5 på side 119.

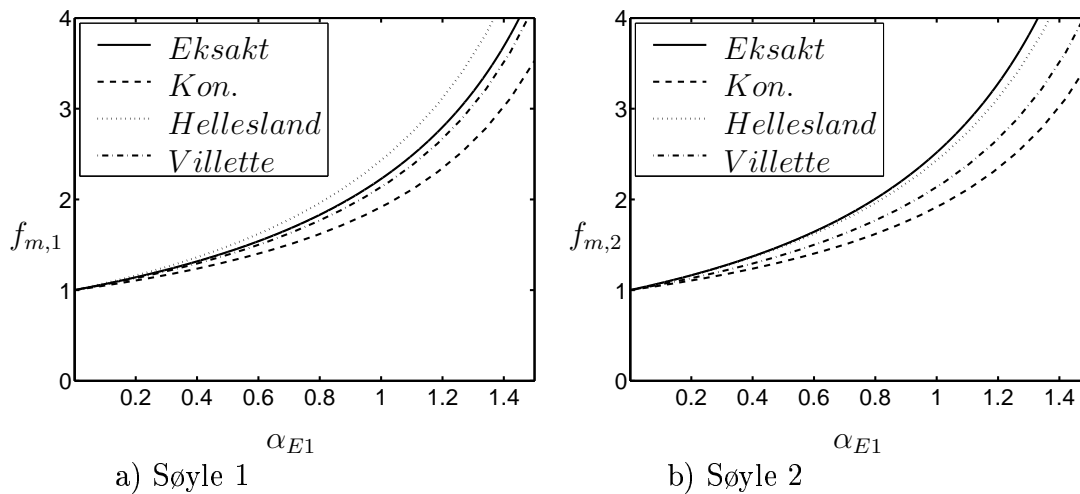
Eksempel 4

For eksempel 4 benyttes faktorene i tabell 10.33 på side 118, og momentforstørrelsesfaktoren for de forskjellige beregningsmetodene vises i figur 10.28 og 10.29

på side 119 og 120 hhv. En diskusjon ang. figuren kommer senere i kapittel 10.7.5 på side 119.

Tabell 10.30: Faktorer som benyttes i eksempel 1.

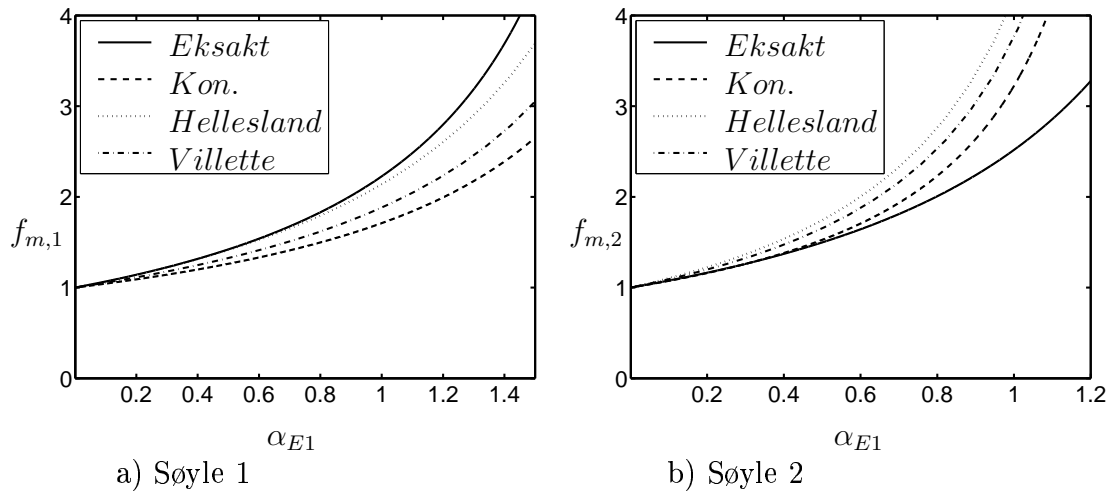
\bar{k}_{bA}	\bar{k}_{bB}	\bar{k}_{bC}	$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$
20000	2	2	2	0.5	1	1
$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{1B}	\bar{k}_{2B}	
0.691	0.933	0.691	1.202	0.541	1.846	



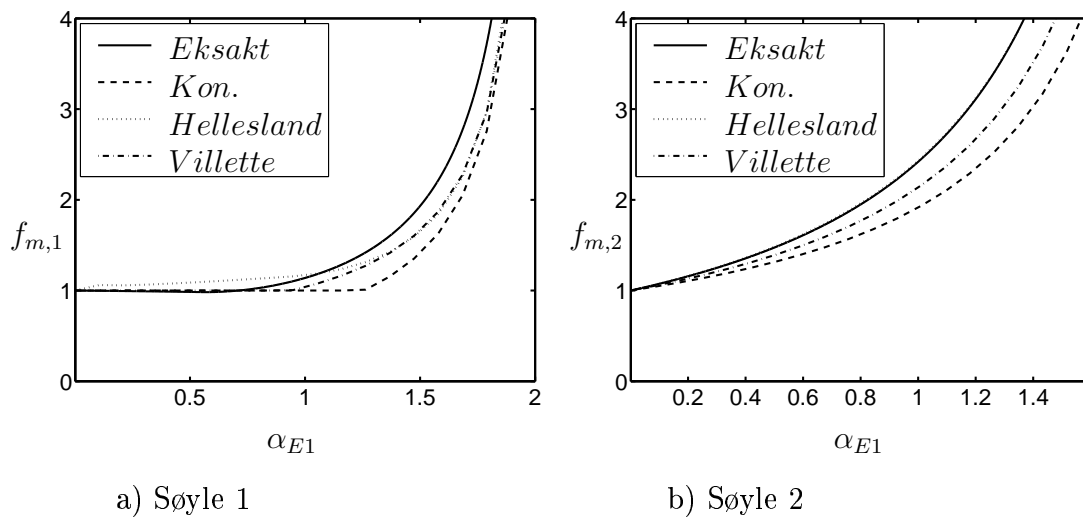
Figur 10.22: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 1, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .

Tabell 10.31: Faktorer som benyttes i eksempel 2.

\bar{k}_{bA}	\bar{k}_{bB}	\bar{k}_{bC}	$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$
20000	2	2	2	0.5	-0.5	1
$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{1B}	\bar{k}_{2B}	
0.691	0.933	0.691	1.202	0.154	1.846	



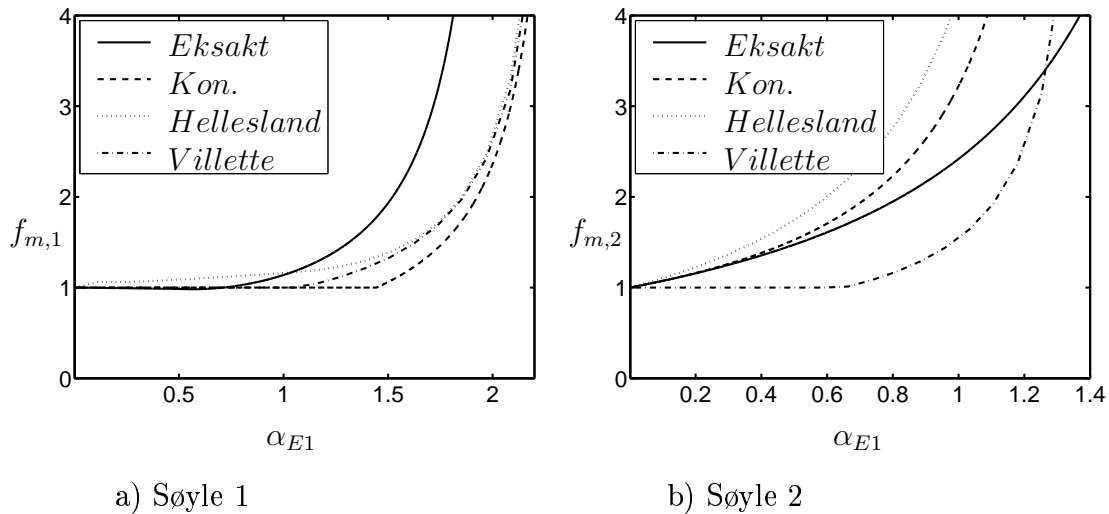
Figur 10.23: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 1, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .



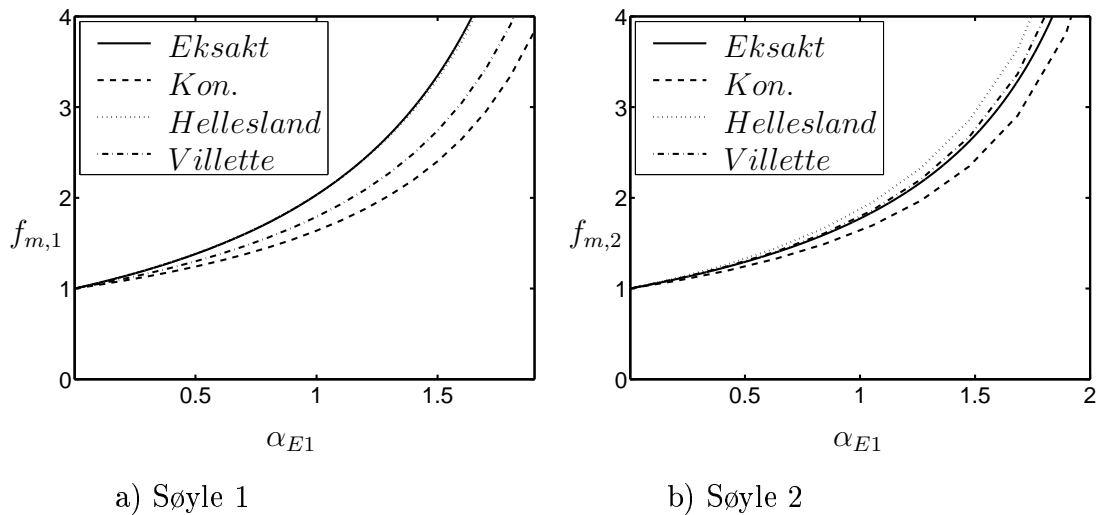
Figur 10.24: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 2, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .

Tabell 10.32: Faktorer som benyttes i eksempel 3.

\bar{k}_{bA}	\bar{k}_{bB}	\bar{k}_{bC}	$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$
20000	2	2	2	1	1	1
$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{1B}	\bar{k}_{2B}	
0.624	1.051	0.882	0.922	2.091	-0.091	



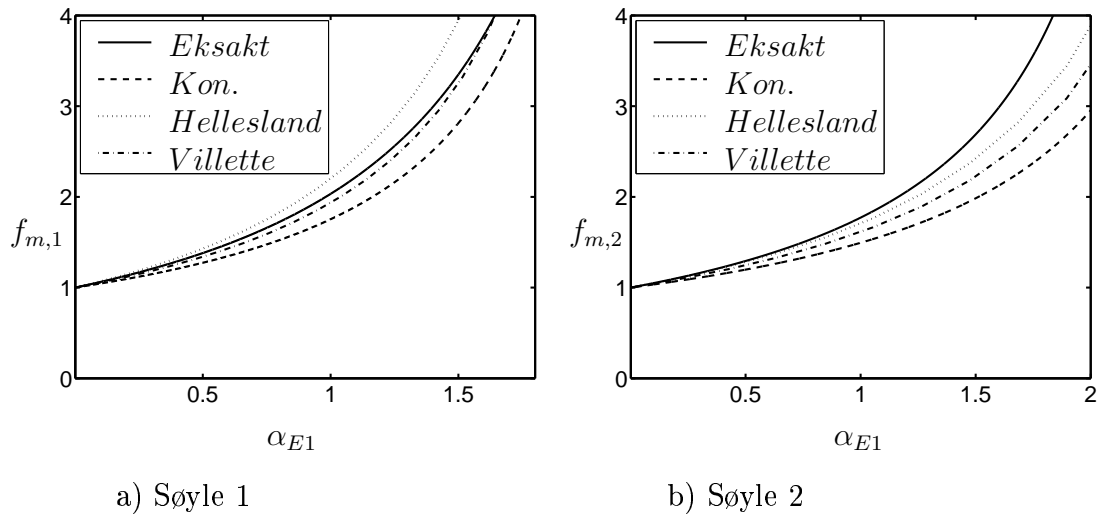
Figur 10.25: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 2, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .



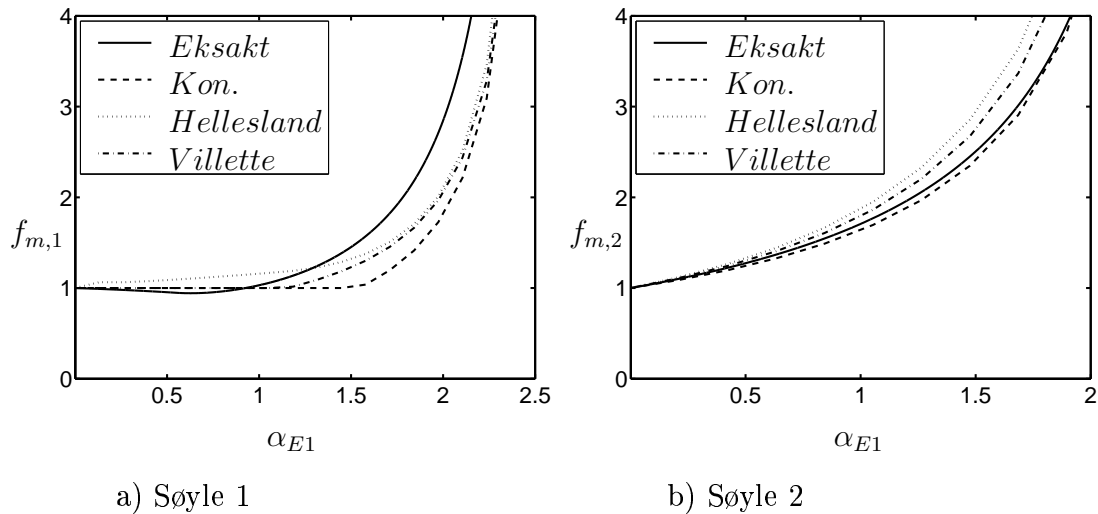
Figur 10.26: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 3, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .

Tabell 10.33: Faktorer som benyttes i eksempel 4.

\bar{k}_{bA}	\bar{k}_{bB}	\bar{k}_{bC}	$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$
20000	2	2	2	1	-0.5	1
$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{1B}	\bar{k}_{2B}	
0.624	1.051	0.882	0.922	2.091	-0.091	



Figur 10.27: Momentforstørrelsesfaktor eksempel 3, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .

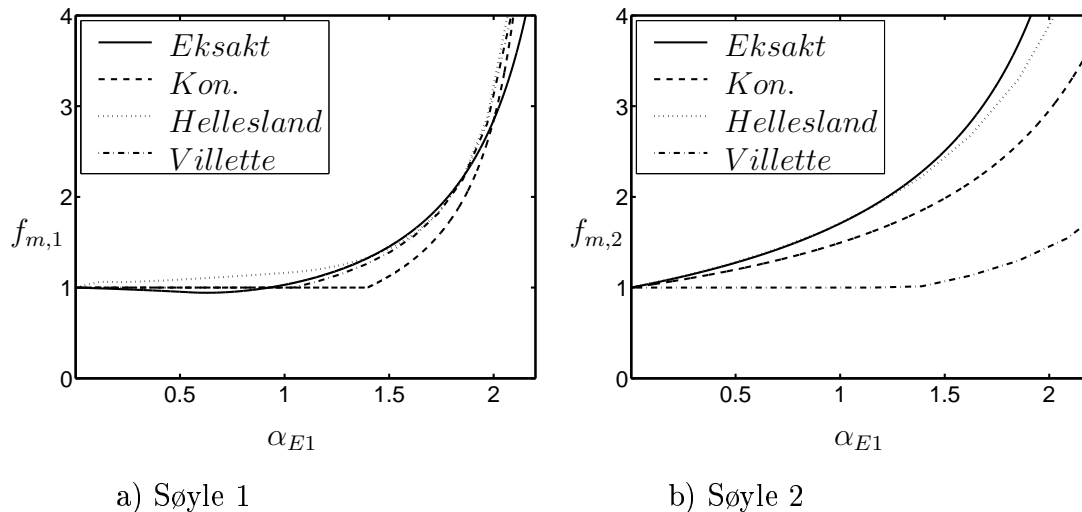


Figur 10.28: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 4, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .

10.7.5 Diskusjon

Konvensjonell metode

For denne metoden kommer det frem fra tabell 10.24 på side 112 at alle resultatene er til den usikre siden for søyle 1, og at resultatene for det meste gir bedre tilnærming ved bruk av β_{eks} for tilfellene der β_{eks} er større enn β_{kon} . For søyle 2 kommer det frem fra tabell 10.25 at resultatene stort sett er til den usikre siden



Figur 10.29: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 4, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .

ved bruk av β_{eks} , mens for bruk av β_{kon} ligger flesteparten av resultatene til den sikre siden når β_{eks} er mindre enn β_{kon} .

Fra eksempel 1 viser kurven for eksakt utregning at denne stiger raskest for søyle 2, altså søyle 2 er mest kritisk. Når kurvene for konvensjonell metode sammenlignes for søyle 1 og 2 med bruk av β_{eks} er det uklart hvem av kurvene som stiger raskest, så en entydig løsning om hvilken søyle som er mest kritisk er noe som ikke kan sees direkte fra figuren, men benyttes derimot β_{kon} , kommer det klart frem at søyle 2 er mest kritisk.

For eksempel 2 vises igjen at søyle 2 er mest kritisk, og den tilnærmede metoden tilsier det samme (kurvene stiger raskest for søyle 2).

I eksempel 3 stiger eksakt kurve raskest for søyle 1, og ved bruk av β_{eks} , er det noe uklart, men ved bruk av β_{kon} er kurven raskest stigende for søyle 1 som tilsier at søyle 1 er mest kritisk.

For eksempel 4 er søyle 2 mest kritisk, og den tilnærmede metoden tilsier det samme.

Helleslands metode

Fra tabell 10.26 og 10.27 på side 113 svinger resultatene mellom sikker og usikker side, og beste resultater er for søyle 2. Det kommer også frem at tilnærmelsen

stort sett er best ved bruk av β_{eks} , og for de tilfellene der $\beta_{kon} > \beta_{eks}$ er resultatene for det meste til den sikre siden ved bruk av β_{kon} .

Fra eksempel 1 kommer det frem at søyle 2 er mest kritisk, og det er vanskelig å si om den tilnærmede metoden med bruk av β_{eks} tilsier det samme, men med bruk av β_{kon} fremkommer det at søyle 2 også er mest kritisk.

For eksempel 2 fremkommer det igjen at søyle 2 er mest kritisk, og den tilnærmede metoden tilsier det samme (kurvene stiger raskest for søyle 2).

I eksempel 3 stiger eksakt kurve raskest for søyle 1, og ved bruk av β_{eks} og β_{kon} er det full enighet.

For eksempel 4 er søyle 2 mest kritisk, og den tilnærmede metoden tilsier det samme.

Villettes metode

Fra tabell 10.28 og 10.29 på side 114 svinger resultatene igjen mellom sikker og usikker side, og beste resultat er også igjen for søyle 2. Det kommer også frem at tilnærmelsen stort sett er best ved bruk av β_{eks} , og for de tilfellene der $\beta_{kon} > \beta_{eks}$ er resultatene for det meste til den sikre siden ved bruk av β_{kon} .

Fra eksempel 1 kommer det frem at søyle 2 er mest kritisk, og det er vanskelig å si om den tilnærmede metoden med bruk av β_{eks} tilsier det samme, men med bruk av β_{kon} vises at søyle 2 også er mest kritisk.

For eksempel 2 kommer det igjen frem at søyle 2 er mest kritisk, og den tilnærmede metoden tilsier det samme (kurvene stiger raskest for søyle 2).

I eksempel 3 stiger eksakt kurve raskest for søyle 1, og ved bruk av β_{eks} og β_{kon} , er det full enighet.

For eksempel 4 er søyle 2 mest kritisk, og den tilnærmede metoden tilsier det samme med bruk av β_{eks} , men med bruk av β_{kon} tilsier metoden at søyle 1 er mest kritisk, noe uheldig.

10.8 Modell 6, parvis sammenligning

10.8.1 Generelt

I dette avsnittet sammenlignes igjen resultatene slik som tidligere beskrevet i begynnelsen av kapittel 10.6 på side 99. Den vesentlige forskjellen nå er at konstruksjonen er enda mer stivet opp ved hjelp av høyere bøyestivhet i bjelkene B og C , som resulterer med høyere stivhetsbidrag til søylene. Denne konstruksjonen kan diskuteres om er en typisk konstruksjon, da bjelkene (B og C) har 10 ganger høyere bøyestivhet enn søylene.

10.8.2 Presentasjon av resultater

Det er igjen valgt å dele presentasjonen i to deler, der første del viser noen tabeller med resultater, og i et senere avsnitt, nærmere bestemt 10.8.3 på side 126, blir en grundigere undersøkelse gjennomgått. For sistnevnte tileller er det også igjen (slik som for modell 4 og 5) spesielt lagt til rette for å undersøke tilfeller med negativ innspenning (positiv innspenning blir også undersøkt), men blir som tidligere nevnt ikke diskutert før alle modellene (4 - 6) er gjennomgått, en diskusjon angående negativ innspenning kommer som sagt tidligere først i kapittel 11.2 på side 134.

Modell 6 med Konvensjonell metode

I tabell 10.34 og 10.35 på side 123 og 123 vises forholdet mellom tilnærmet og eksakt beregnet momentforstørrelsesfaktor for søyle 1 og 2 hhv. For de tilnærmede metodene kommer det frem fra tabellene hvilken knekklendefaktor og andre faktorer som er benyttet for hver beregning. En generell diskusjon av overnevnte tabeller kommer senere, og fra noen av disse blir det plukket ut noen spesielle målinger som diskuteres nøyere, se kapittel 10.8.3.

Modell 6 med Helleslands metode

I tabell 10.36 og 10.37 på side 124 og 124 vises på tilsvarende måte som tidligere nevnt forholdet mellom tilnærmet og eksakt beregnet momentforstørrelsesfaktor, for søyle 1 og 2 hhv. Hvilke faktorer som er benyttet kommer frem fra tabellene.

Tabell 10.34: Momentforstørrelsesfaktor modell 6 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 20$, se side 86), søyle 1, sammenligning ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .

$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	\bar{k}_{1B}	α_{E1}	$f_{m,1}$ (Eksakt og Konvensjonell)				
								$Eksakt_1$	$\frac{\beta_{kon,1}}{Eksakt_1}$	$\frac{\beta_{eks,1}}{Eksakt_1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	
1	0.5	1	1	0.742	0.722	-0.668	1.163	1.993	0.753	1.391	0.541	
		0						-	-	-		
		-0.5						-	-	-		
	1	1	1	0.561	0.973	7.028	1.120	1.853	0.809	0.833	0.972	
		0						2.015	2.110	0.711	0.776	0.916
		-0.5						2.463	2.304	0.651	0.770	0.846
2	0.5	1	1	0.541	0.990	11.445	1.163	1.853	0.809	0.817	0.990	
		0						2.093	2.030	0.739	0.761	0.971
		-0.5						2.558	2.039	0.736	0.777	0.947
	1	1	1	0.524	1.041	20.151	1.120	1.790	0.838	0.807	1.038	
		0						2.016	1.813	0.827	0.742	1.115
		-0.5						2.463	1.637	0.916	0.756	1.212

Tabell 10.35: Momentforstørrelsesfaktor modell 6 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 20$, se side 86), søyle 2, sammenligning ved $f_{m,Konvensjonell} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .

$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{2B}	α_{E2}	$f_{m,2}$ (Eksakt og Konvensjonell)				
								$Eksakt_2$	$\frac{\beta_{kon,2}}{Eksakt_2}$	$\frac{\beta_{eks,2}}{Eksakt_2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	
1	0.5	1	1	0.524	1.122	20.668	0.963	1.640	0.915	0.830	1.103	
		0						1.734	1.432	1.047	0.801	1.307
		-0.5						2.120	1.159	1.294	0.862	1.500
	1	1	1	0.561	1.017	12.927	1.025	1.822	0.823	0.810	1.016	
		0						1.845	1.903	0.788	0.751	1.049
		-0.5						2.255	1.806	0.830	0.761	1.091
2	0.5	1	1	0.541	1.088	8.555	0.963	1.680	0.893	0.829	1.078	
		0						1.734	1.571	0.955	0.775	1.233
		-0.5						2.120	1.378	1.088	0.763	1.427
	1	1	1	0.741	0.769	-0.151	1.025	1.999	0.750	1.145	0.655	
		0						-	-	-	-	-
		-0.5						-	-	-	-	-

En generell diskusjon av overnevnte tabeller omtales senere, og igjen blir det plukket ut noen spesielle målinger som diskuteres nøyere, se kapittel 10.8.3.

Tabell 10.36: Momentforstørrelsesfaktor modell 6 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 20$, se side 86), søyle 1, sammenligning ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .

$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	\bar{k}_{1B}	α_{E1}	$f_{m,1}$ (Eksakt og Hellesland)				
								Eksakt ₁	$\frac{\beta_{kon,1}}{Eksakt_1}$	$\frac{\beta_{eks,1}}{Eksakt_1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	
1	0.5	1	1	0.742	0.722	-0.688	0.799	1.544	0.971	1.413	0.688	
		0						1.687	2.744	0.547	3.918	0.139
		-0.5						-	-	-	-	-
	1	1	1	0.561	0.973	7.028	0.773	1.500	1.000	1.022	0.978	
		0						1.631	1.517	0.989	1.039	0.952
		-0.5						2.164	1.598	0.939	1.005	0.934
2	0.5	1	1	0.541	0.990	11.445	0.799	1.498	1.001	1.009	0.992	
		0						1.687	1.469	1.021	1.038	0.984
		-0.5						2.238	1.458	1.029	1.051	0.979
	1	1	1	0.524	1.041	20.151	0.773	1.470	1.020	0.990	1.030	
		0						1.631	1.377	1.089	1.024	1.064
		-0.5						2.164	1.283	1.169	1.089	1.074

Tabell 10.37: Momentforstørrelsesfaktor modell 6 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 20$, se side 86), søyle 2, sammenligning ved $f_{m,Hellesland} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .

$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{2B}	α_{E2}	$f_{m,2}$ (Eksakt og Hellesland)				
								Eksakt ₂	$\frac{\beta_{kon,2}}{Eksakt_2}$	$\frac{\beta_{eks,2}}{Eksakt_2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	
1	0.5	1	1	0.524	1.122	20.668	0.677	1.400	1.072	0.990	1.082	
			0					1.427	1.181	1.270	1.094	1.161
			-0.5					1.892	0.014	1.479	1.265	1.169
	1	1	1	0.561	1.017	12.927	0.715	1.492	1.005	0.993	1.013	
			0					1.506	1.425	1.053	1.024	1.028
			-0.5					1.999	1.376	1.090	1.053	1.035
2	0.5	1	1	0.541	1.088	8.555	0.677	1.421	1.055	0.994	1.061	
			0					1.427	1.263	1.187	1.055	1.125
			-0.5					1.892	1.158	1.295	1.137	1.139
	1	1	1	0.741	0.769	-0.151	0.715	1.560	0.961	1.264	0.760	
			0					1.508	2.231	0.672	1.960	0.343
			-0.5					-	-	-	-	-

Modell 6 med Villettes metode

I tabell 10.38 og 10.39 på side 125 og 125 vises også på tilsvarende måte som tidligere nevnt forholdet mellom tilnærmet og eksakt beregnet momentforstør-

relsefaktor, for søyle 1 og 2 hhv. Fra tabellene kommer det frem hvilke faktorer og hvilke verdier disse har for hver enkelt beregning. En generell diskusjon av overnevnte tabeller blir først gjennomgått på et senere tidspunkt, og igjen blir det plukket ut noen spesielle målinger som diskuteres nøyere, se kapittel 10.8.3.

Tabell 10.38: Momentforstørrelsesfaktor modell 6 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 20$, se side 86), søyle 1, sammenligning ved $f_{m,Villette} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .

$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	\bar{k}_{1B}	α_{E1}	$f_{m,1}$ (Eksakt og Villette)				
								<i>Eksakt</i> ₁	$\frac{\beta_{kon,1}}{Eksakt_1}$	$\frac{\beta_{eks,1}}{Eksakt_1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	
1	0.5	1	1	0.742	0.722	-0.688	1.001	1.767	0.849	1.428	0.595	
		0						1.793	9.500	0.158	5.067	0.031
		-0.5						-	-	-	-	-
	1	1	1	0.561	0.973	7.028	0.964	1.681	0.892	0.916	0.974	
		0						1.727	1.634	0.918	0.971	0.945
		-0.5						2.279	1.811	0.828	0.918	0.903
2	0.5	1	1	0.541	0.990	11.445	1.001	1.681	0.892	0.900	0.991	
		0						1.793	1.587	0.945	0.963	0.981
		-0.5						2.366	1.645	0.912	0.943	0.967
	1	1	1	0.524	1.041	20.151	0.965	1.635	0.917	0.885	1.036	
		0						1.727	1.468	1.022	0.951	1.075
		-0.5						2.279	1.398	1.073	0.953	1.126

Tabell 10.39: Momentforstørrelsesfaktor modell 6 ($\bar{k}_{bA} = 2 * 10^4$, $\bar{k}_{bB} = \bar{k}_{bC} = 20$, se side 86), søyle 2, sammenligning ved $f_{m,Villette} = 1.5$ beregnet med β_{kon} .

$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{2B}	α_{E2}	$f_{m,2}$ (Eksakt og Villette)				
								<i>Eksakt</i> ₂	$\frac{\beta_{kon,2}}{Eksakt_2}$	$\frac{\beta_{eks,2}}{Eksakt_2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	
1	0.5	1	1	0.524	1.122	20.668	0.830	1.521	0.986	0.899	1.097	
			0					0.830	0.892	1.682	1.121	1.500
			-0.5					0.830	0.778	1.929	1.286	1.500
	1	1	1	1	0.561	1.017	12.927	0.883	1.659	0.904	0.891	1.015
		0		0.883					0.968	1.549	1.082	1.431
		-0.5		0.883					0.816	1.838	1.225	1.500
2	0.5	1	1	0.541	1.088	8.555	0.830	1.552	0.967	0.901	1.073	
			0					0.830	0.924	1.623	1.088	1.492
			-0.5					0.830	0.805	1.864	1.243	1.500
	1	1	1	1	0.741	0.769	-0.151	0.883	1.773	0.846	1.224	0.691
		0		0.883					1.076	1.394	1.322	1.054
		-0.5		0.883					0.903	1.661	1.162	1.430

10.8.3 En grundigere gjennomgang av momentforstørrelsesfaktoren

I dette avsnittet går det igjen grundigere tilverks, poenget er det samme som tidligere definert i kapittel 10.6.3 på side 103, men nå for modell 6. Videre betraktes de samme eksemplene definert i tabell 10.19 (på samme side som overnevnt).

10.8.4 Presentasjon av resultater

Eksempel 1

For eksempel 1 benyttes faktorene i tabell 10.40 på side 127, og momentforstørrelsesfaktoren for de forskjellige beregningsmetodene vises i figur 10.30 og 10.31 på side 127 og 128 hhv. En diskusjon ang. figuren kommer senere i kapittel 10.8.5 på side 130.

Eksempel 2

For eksempel 2 benyttes faktorene i tabell 10.41 på side 127, og momentforstørrelsesfaktoren for de forskjellige beregningsmetodene vises i figur 10.32 og 10.33 på side 128 og 129 hhv. En diskusjon ang. figuren kommer senere i kapittel 10.8.5 på side 130.

Eksempel 3

For eksempel 3 benyttes faktorene i tabell 10.42 på side 128, og momentforstørrelsesfaktoren for de forskjellige beregningsmetodene vises i figur 10.34 og 10.35 på side 129 og 130 hhv. En diskusjon ang. figuren kommer senere i kapittel 10.8.5 på side 130.

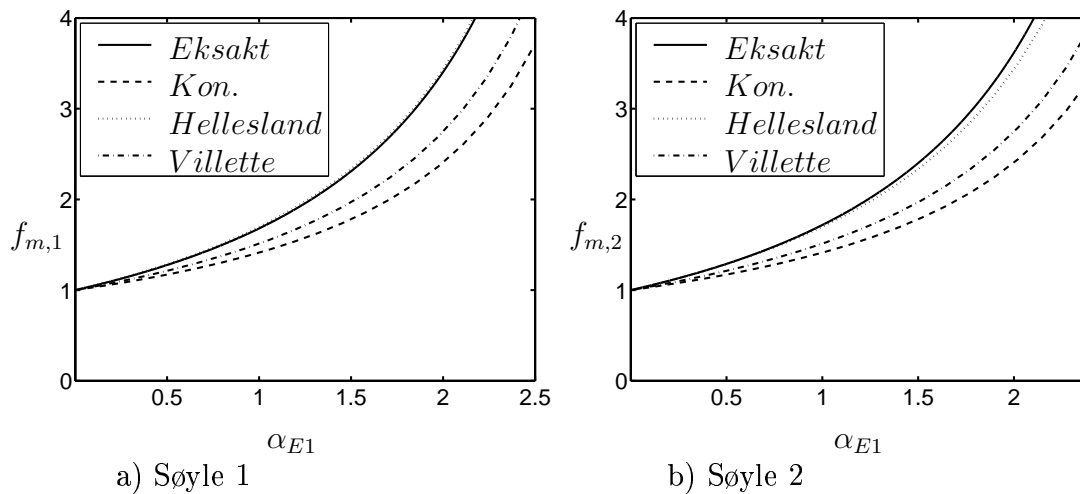
Eksempel 4

For eksempel 4 benyttes faktorene i tabell 10.43 på side 129, og momentforstørrelsesfaktoren for de forskjellige beregningsmetodene vises i figur 10.36 og 10.37

på side 130 og 131 hhv. En diskusjon ang. figuren kommer senere i kapittel 10.8.5 på side 130.

Tabell 10.40: Faktorer som benyttes i eksempel 1.

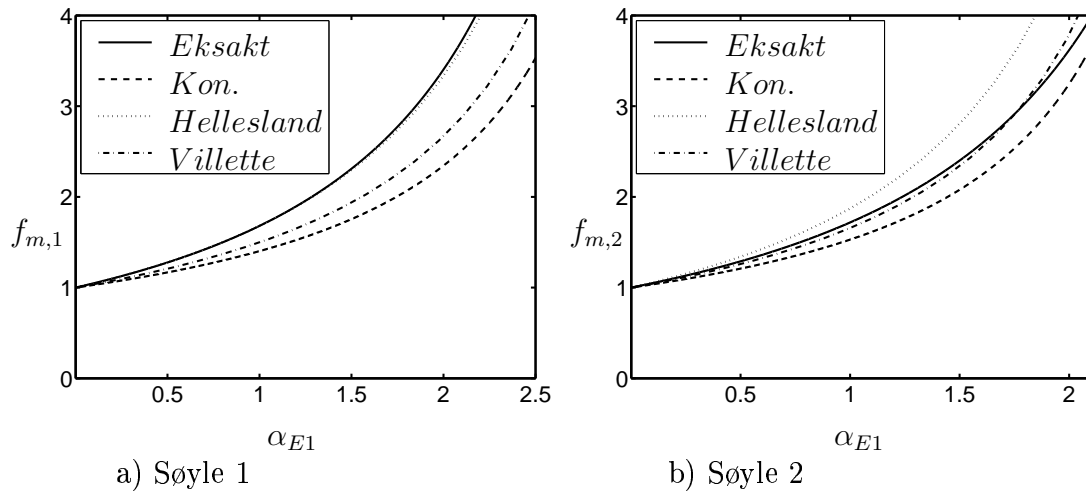
\bar{k}_{bA}	\bar{k}_{bB}	\bar{k}_{bC}	$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$
20000	20	20	2	0.5	1	1
$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{1B}	\bar{k}_{2B}	
0.541	0.990	0.541	1.088	11.445	8.555	



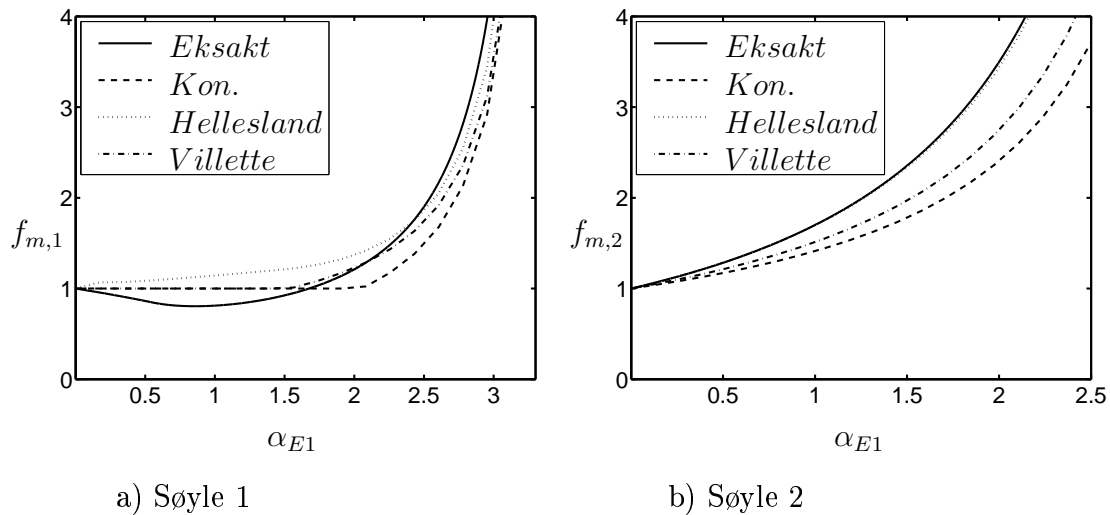
Figur 10.30: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 1, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .

Tabell 10.41: Faktorer som benyttes i eksempel 2.

\bar{k}_{bA}	\bar{k}_{bB}	\bar{k}_{bC}	$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$
20000	20	20	2	0.5	-0.5	1
$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{1B}	\bar{k}_{2B}	
0.541	0.990	0.541	1.088	11.445	8.555	



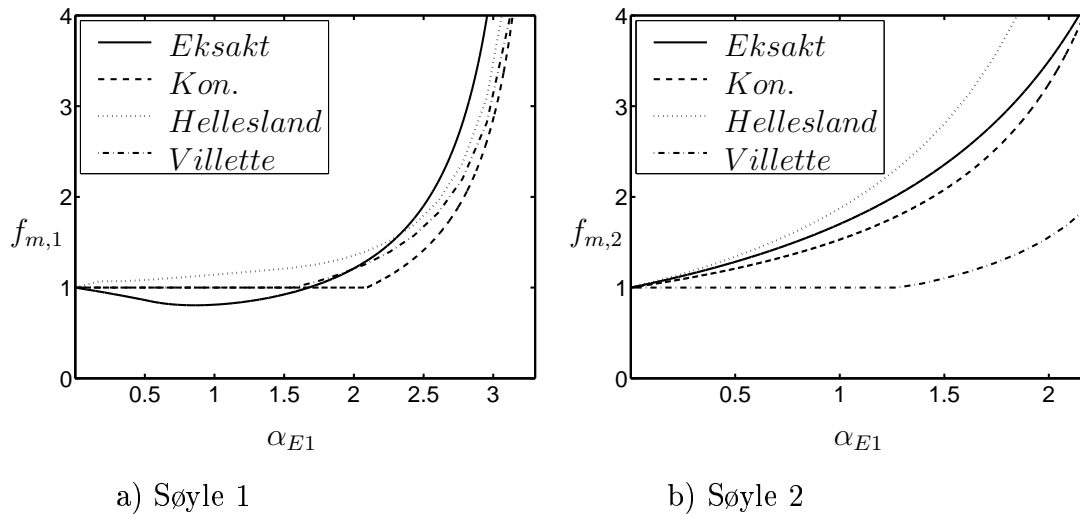
Figur 10.31: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 1, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .



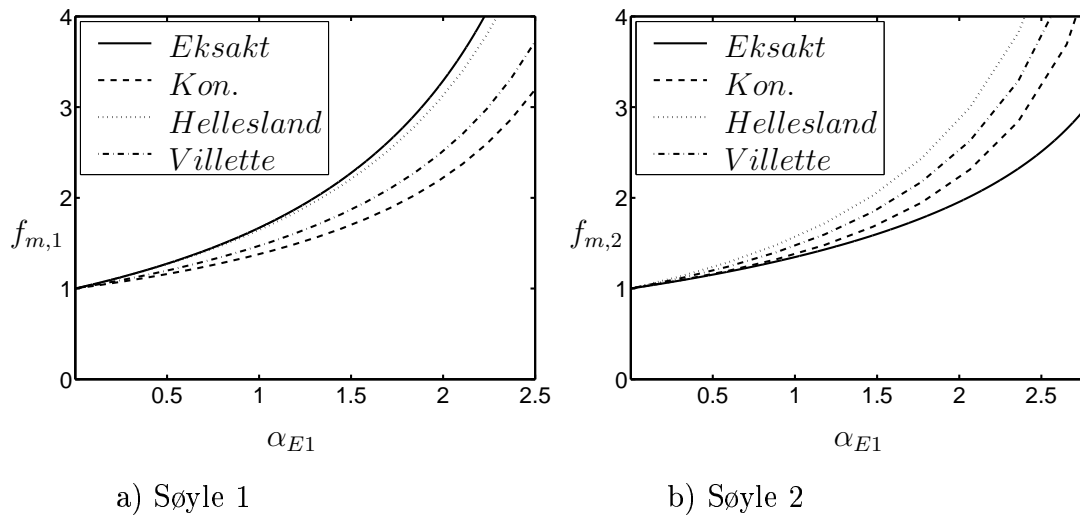
Figur 10.32: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 2, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .

Tabell 10.42: Faktorer som benyttes i eksempel 3.

\bar{k}_{bA}	\bar{k}_{bB}	\bar{k}_{bC}	$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$
20000	20	20	2	1	1	1
$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{1B}	\bar{k}_{2B}	
0.524	1.041	0.741	0.769	20.151	-0.151	



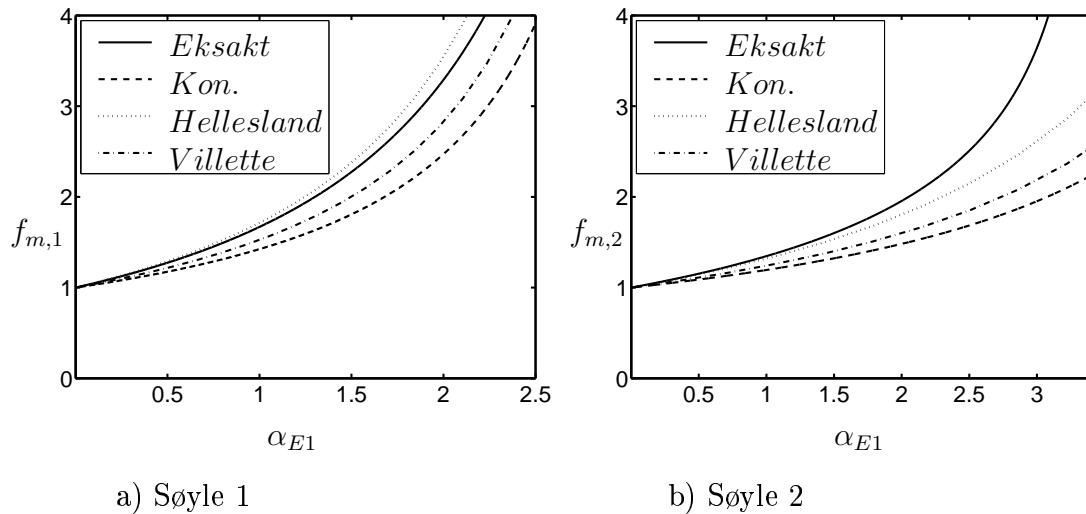
Figur 10.33: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 2, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .



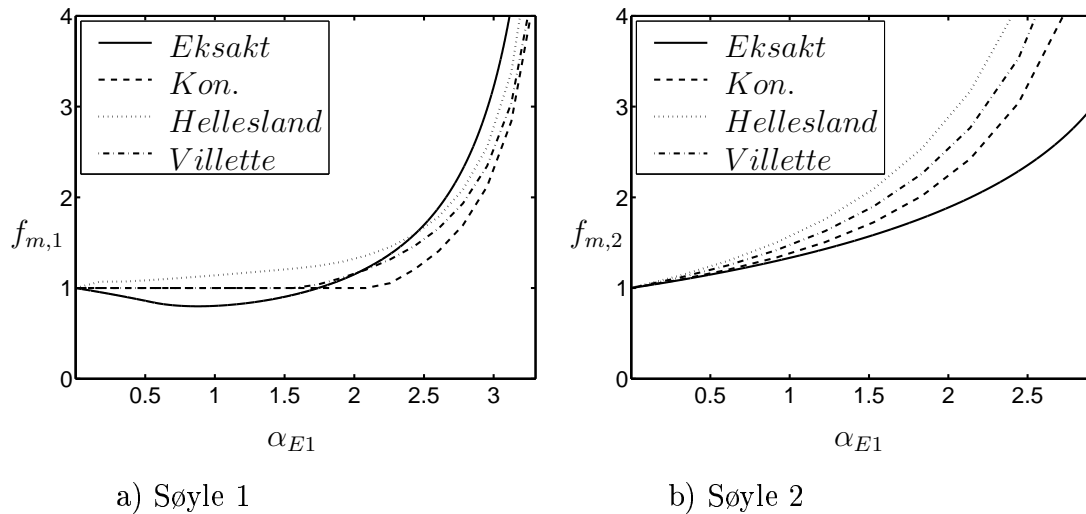
Figur 10.34: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 3, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .

Tabell 10.43: Faktorer som benyttes i eksempel 4.

\bar{k}_{bA}	\bar{k}_{bB}	\bar{k}_{bC}	$\frac{N_1 L_1}{N_2 L_2}$	$\frac{EI_2/L_2}{EI_1/L_1}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$
20000	20	20	2	1	-0.5	1
$\beta_{eks,1}$	$\frac{\beta_{kon,1}}{\beta_{eks,1}}$	$\beta_{eks,2}$	$\frac{\beta_{kon,2}}{\beta_{eks,2}}$	\bar{k}_{1B}	\bar{k}_{2B}	
0.524	1.041	0.741	0.769	20.151	-0.151	



Figur 10.35: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 3, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .

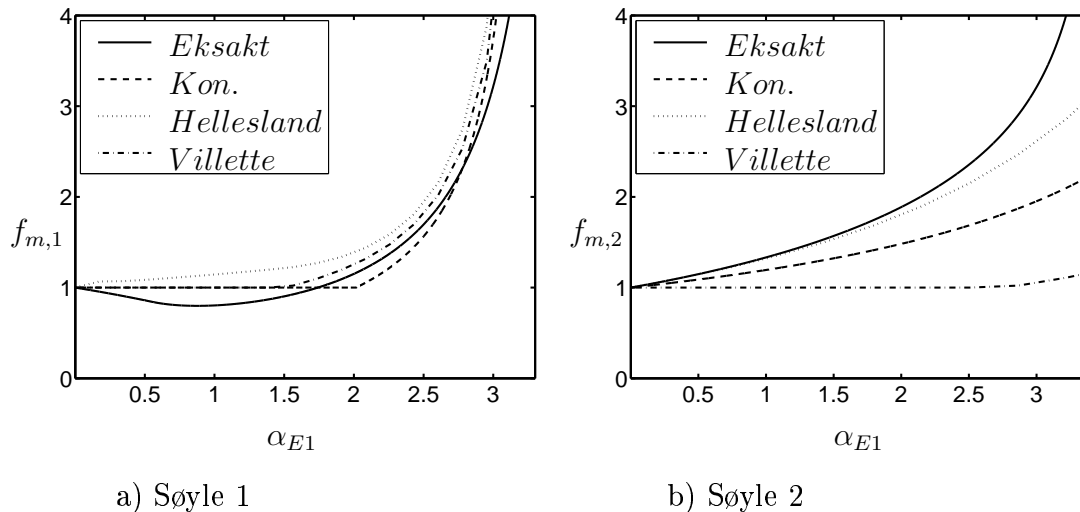


Figur 10.36: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 4, eksakt, og tilnærmet med β_{eks} .

10.8.5 Diskusjon

Konvensjonell metode

For denne metoden kommer det frem fra tabell 10.34 på side 123 at alle resultatene er til den usikre siden for søyle 1, og at resultatene for det meste gir bedre tilnærming ved bruk av β_{eks} for tilfellene der β_{eks} er *større* enn β_{kon} . For søyle 2 kommer det frem fra tabell 10.35 at stort sett alle resultatene er til den usikre



Figur 10.37: Momentforstørrelsesfaktor for eksempel 4, eksakt, og tilnærmet med β_{kon} .

siden ved bruk av β_{eks} , og tilnærmelsen er bedre ved bruk av β_{kon} der β_{eks} er mindre enn β_{kon} .

Fra eksempel 1 vises at kurven for eksakt utregning stiger raskest for søyle 2, altså søyle 2 er mest kritisk. Når kurvene for konvensjonell metode for søyle 1 og 2 sammenlignes med bruk av β_{eks} er det uklart hvem av kurvene som stiger raskest, så en entydig løsning om hvilken søyle som er mest kritisk er noe som ikke kan sees direkte fra figuren, men benyttes derimot β_{kon} , kommer det klart frem at søyle 2 er mest kritisk.

For eksempel 2 vises det igjen at søyle 2 er mest kritisk, og den tilnærmede metoden tilsier det samme (kurvene stiger raskest for søyle 2).

I eksempel 3 stiger eksakt kurve raskest for søyle 1, men den tilnærmede metoden med bruk av β_{eks} ser det ut som det motsatte, noe uheldig, men med bruk av β_{kon} tilsier det samme som eksakt, altså søyle 1 mest kritisk.

For eksempel 4 ser det ut som søyle 1 mest kritisk (ved høy α_{E1}), og den tilnærmede metoden sier det motsatte med bruk av β_{eks} , med er enig med bruk av β_{kon} .

Helleslands metode

Fra tabell 10.36 og 10.37 på side 124 svinger resultatene mellom sikker og usikker side, men er for det meste på sikker side uavhengig av valg av β . Det kommer også frem at alle tilnærmelsene er på den sikre siden ved bruk av β_{kon} der $\beta_{kon} > \beta_{eks}$.

Fra eksempel 1 kommer det frem at søyle 2 er mest kritisk, og det er vanskelig å si om den tilnærmede metoden med bruk av β_{eks} tilsier det samme, men med bruk av β_{kon} kan det konkluderes med at søyle 2 også er mest kritisk.

For eksempel 2 fremkommer det at igjen søyle 2 er mest kritisk, og den tilnærmede metoden tilsier det samme (kurvene stiger raskest for søyle 2).

I eksempel 3 stiger eksakt kurve raskest for søyle 1, og ved bruk av β_{eks} og β_{kon} er det full enighet.

For eksempel 4 er søyle 1 mest kritisk, og den tilnærmede metoden tilsier det motsatte ved bruk av β_{eks} , men ved bruk av β_{kon} er søyle 1 mest kritisk.

Villettes metode

Fra tabell 10.38 og 10.39 på side 125 svinger resultatene igjen mellom sikker og usikker side, og beste resultat er for søyle 2. Det kommer også frem at tilnærmelsen stort sett er best ved bruk av β_{eks} for de tilfellene der $\beta_{kon} < \beta_{eks}$.

Fra eksempel 1 kommer det frem at søyle 2 er mest kritisk, og det er vanskelig å si om den tilnærmede metoden med bruk av β_{eks} tilsier det samme, men med bruk av β_{kon} vises også her at søyle 2 er mest kritisk.

For eksempel 2 fremkommer det igjen at søyle 2 er mest kritisk, og den tilnærmede metoden tilsier det samme (kurvene stiger raskest for søyle 2).

I eksempel 3 stiger eksakt kurve raskest for søyle 1, men tilnærmet metode ved bruk av β_{eks} tilsier det motsatte, men ved bruk av β_{kon} , er det full enighet.

For eksempel 4 er søyle 1 mest kritisk, og den tilnærmede metoden tilsier det motsatte med bruk av β_{eks} , noe uheldig, men med bruk av β_{kon} tilsier metoden at søyle 1 er mest kritisk.

Kapittel 11

Konklusjon og forslag til forbedring, ramme

11.1 Vurdering og konklusjon av tilnærmede metoder, modell 1-3

Poenget med disse modellene var å si noe om hvilken av metodene som var mest gunstig å benytte, enten det ble valgt å bruke β_{eks} eller β_{kon} . Et entydig svar om hvilken metode som er best er noen ganger vanskelig å beslutte, men etter en gjennomgang av alle resultatene, gir en helhetsvurdering at Helleslands metode er å foretrekke fremfor de andre metodene. Dette er uavhengig av hvilken β som benyttes. Denne beslutning er trukket fordi metoden er ganske stabil og det oppstår ikke store svingninger i nøyaktigheten selv om resultatene kan være til den sikre og usikre siden. Fra resultatene som er beregnet kan det sies at resultatene er best tilnærmet for litt “mykere” systemer med 1. ordens momentgradient i nærheten av verdien 1. Det har seg også slik at for noen få tilfeller øker unøyaktigheten og går mot den usikre siden etter hvert som 1. ordens momentgradient går mot -1 for økende verdi av α_E . For litt “stivere” systemer er det en tendens til at resultatet er noe mindre påvirket av 1. ordens momentgradient.

11.2 Vurdering og konklusjon av tilnærmede metoder, modell 4-6

På grunnlag av en nøye studie av tabellene i kapittel 10.6, 10.7 og 10.8 kan jeg konkludere med følgende

- Beste tilnærmelser eller at tilnærmelsen er mer til den sikre siden oppnås med bruk av β_{eks} så lenge $\beta_{eks} > \beta_{kon}$.
- Beste tilnærmelser eller at tilnærmelsen er mer til den sikre siden oppnås med bruk av β_{kon} så lenge $\beta_{kon} > \beta_{eks}$.

Det er også et tema hvordan innspenningen i søylen påvirker resultatene, så igjen fra tabellene og på grunnlag av disse kan jeg konkludere med at

- Tilnærmelsene blir ikke nødvendigvis bedre med bruk av β_{eks} fremfor bruk av β_{kon} når \bar{k}_{1B} og \bar{k}_{2B} er positive, altså *positiv* innspenning.
- Tilnærmelsene blir stort sett bedre med bruk av β_{eks} og β_{kon} når \bar{k}_{1B} og \bar{k}_{2B} er positive.
- Tilnærmelsene blir stort sett alltid (kan nesten si helt sikkert) bedre med bruk av β_{eks} fremfor bruk av β_{kon} når \bar{k}_{1B} eller \bar{k}_{2B} er negativ, altså *negativ* innspenning.
- Tilnærmelsene blir stort sett alltid dårlig tilnærmet med bruk av β_{eks} og β_{kon} når \bar{k}_{1B} eller \bar{k}_{2B} er negativ, altså en stor ulempe med negativ innspenning. Noen unntak der tilnærmelsen kan være god er for tilfeller der 1. ordens momentgradient er lik 1 (altså før C_m får innvirkning).

For å gjøre det klart hva som ligger til grunn for de to siste punktene nevnt over, må et total studie for enkeltsøylen og systemet sammenlignes. I kapittel 8 på side 52 ble det gjennomgått tre tilfeller av en enkeltstående søyle der formålet var å gi en innføring i kanskje ukjente emner, men det er også en annen grunn til at akkurat disse ble valgt, nemlig for å studere *hvordan* momentforstørrelsesfaktoren ble tilnærmet med økende α_E , for variasjon av 1. ordens momentgradient over søylen. I resultatdelen i kap 9.1 på side 69 konkluderte jeg med at beste tilnærmede for disse tilfellene fremkom for 1.ordens momentgradient lik 1, deretter gikk tilnærmelsen stort sett mer til den sikre siden etter

hvert som r_1 gikk mot -1. Disse tilfellene ble spesielt undersøkt fordi det som er felles for dem er at alle har positiv innspenning, men hva ville skjedd dersom disse ble undersøkt for negativ innspenning, er det da så sikkert at det samme ville skjedd? Jeg har undersøkt flere modeller der negativ innspenning oppstår i dette kapitlet, ikke for enkeltsøylene nevnt ovenfor, men for søylene som er en del av et større system. Med utgangspunkt i tabellene for Hellesland (tabell 10.15, 10.16, 10.26, 10.27, 10.36, 10.37) er det en ting som er gjentas, nemlig at alle tilfeller av modellene der negativ innspenning oppstår, er igjen beste tilnærmede for 1. ordens momentgradient lik 1, men alle har til felles å gå kun og mer til den usikre siden etter hvert som 1. ordens momentgradient går mot -1. Der det er positiv innspenning er situasjonen som før. For å gjøre det kort betyr dette at når

- \bar{k}_{1B} og \bar{k}_{2B} er positive, vil de fleste tilnærmelser være til den sikre siden for økende α_E når 1. ordens momentgradient går mot -1. Ikke nødvendigvis best å bruke β_{eks} .
- \bar{k}_{1B} eller \bar{k}_{2B} er negativ, vil alle tilnærmelser gå mer til den usikre siden med økende α_E når 1. ordens momentgradient går fra 1 til -1. Nesten alltid best tilnærmet med bruk av β_{eks} .

Men det må merkes at dette er på grunnlag av modellene som er undersøkt, så om det gjelder for generelle tilfeller gjenstår og undersøke (ikke tatt med i denne oppgaven).

Det som til slutt er å nevne er om de *tilnærmede metodene* kan avgjøre om de velger den kritiske søylen likt med den som blir utpekt fra eksakt utregning. Jeg har avgjort dette ved å undersøke hvilken av kurvene, for søyle 1 eller 2 med samme tilnærmede metode, som har høyest stigning der $f_m = 4$ ved så lav som mulig α_{E1} verdi. Ut i fra dette kan jeg ta den beslutning at den kritiske søylen ikke alltid like lett kan utpekes fra figurene, og det kan i enkelte tilfeller være nødvendig å studere kurvene for høyere verdi enn $f_m = 4$ før en endelig konklusjon kan taes. For kurvene for eksakt utregning kommer det alltid frem hvilken søyle som er mest kritisk.

11.3 Helleslands metode med bruk av C_m og $C_{m,mod}$ for β_{eks} og β_{kon}

11.3.1 Generelt

I kapittel 9.1 ble det definert en ny variant av C_m kalt $C_{m,mod}$, nærmere bestemt ved relasjon 9.3 og 9.4 på side 70. Det er tidligere blitt diskutert hvordan resultatene ble for en enkeltsøyle med bruk av $C_{m,mod}$, og det skal nå undersøkes hvordan denne fungerer for noen av rammemodellene. Det benyttes derfor nå $C_{m,mod}$ i Helleslands metode for modell 1-3 ved bruk av β_{eks} og β_{kon} , og sammenligner momentforstørrelsesfaktoren, f_m , med eksakt utregning. Tilsvarende beregnes også momentforstørrelsesfaktoren med bruk av C_m fra Hellesland (relasjon 6.14 og 6.15 på side 44). Dette gjøres for å studere forskjellen og nøyaktigheten til metodene. I denne sammenheng gjøres en liten vri fra tidligere slik at alle målingene fåretas ved $f_{m,Eksakt} = 1.5$. Videre skal 1. ordens momentgradient i søyle 1, $r_{1,1}$, varieres, mens for søyle 2 holdes $r_{1,2}$ konstant lik 1. Ved å gjøre dette fåes bl.a. en følelse om hvordan og hvor lite resultatet påvirkes for søyle 2. Resultatene vises som tidligere i figurer og tilhørende tabeller som starter i neste underkapittel (11.3.2), og avsluttes med en diskusjon til slutt. Det som ikke kommer frem fra figurene, er at to og to grafer overlapper hverandre for søyle 2, hvilke det her er snakk om fremkommer av tilhørende tabell. Grunnen til dette er kanskje ikke så rart og er forårsaket av 1. ordens momentgradient. På følgende seks sider er eksakt momentforstørrelsesfaktor, f_m , sammenlignet med tilnærmet f_m med bruk av variablene nevnt ovenfor. For ikke å bli forvirret i mye indeksnotasjon m.h.p. indeksene 1 og 2 som forklarer hvilken søyle det til enhver tid er snakk om, har jeg i noen tilfeller utelukket disse, men det fremkommer av bl.a. av figurteksten og tabellteksten hvilken søyle som blir betraktet og dermed underforstått hvilken søyle resultatene gjeldende for.

11.3.2 Presentasjon av resultater

Modell 1

Modell 1 er definert på side 83, og fra figur 11.1 på side 138 vises at momentforstørrelsesfaktoren for søyle 1 med bruk av Helleslands metode. For søyle 2 er momentforstørrelsesfaktoren vist i figur 11.2 på side 139. I tabelle 11.1 og 11.2 på side 137 og 138 hhv. for søyle 1 og 2, kommer det frem hvor nøyaktig de tilnærmede metodene er i forhold til eksakt utregning (i punktet der $f_{m,Eksakt}$

= 1.5). En diskusjon ang. overnevnte figurer og tabeller kommer enere i kapittel 11.3.3 på side 138.

Modell 2

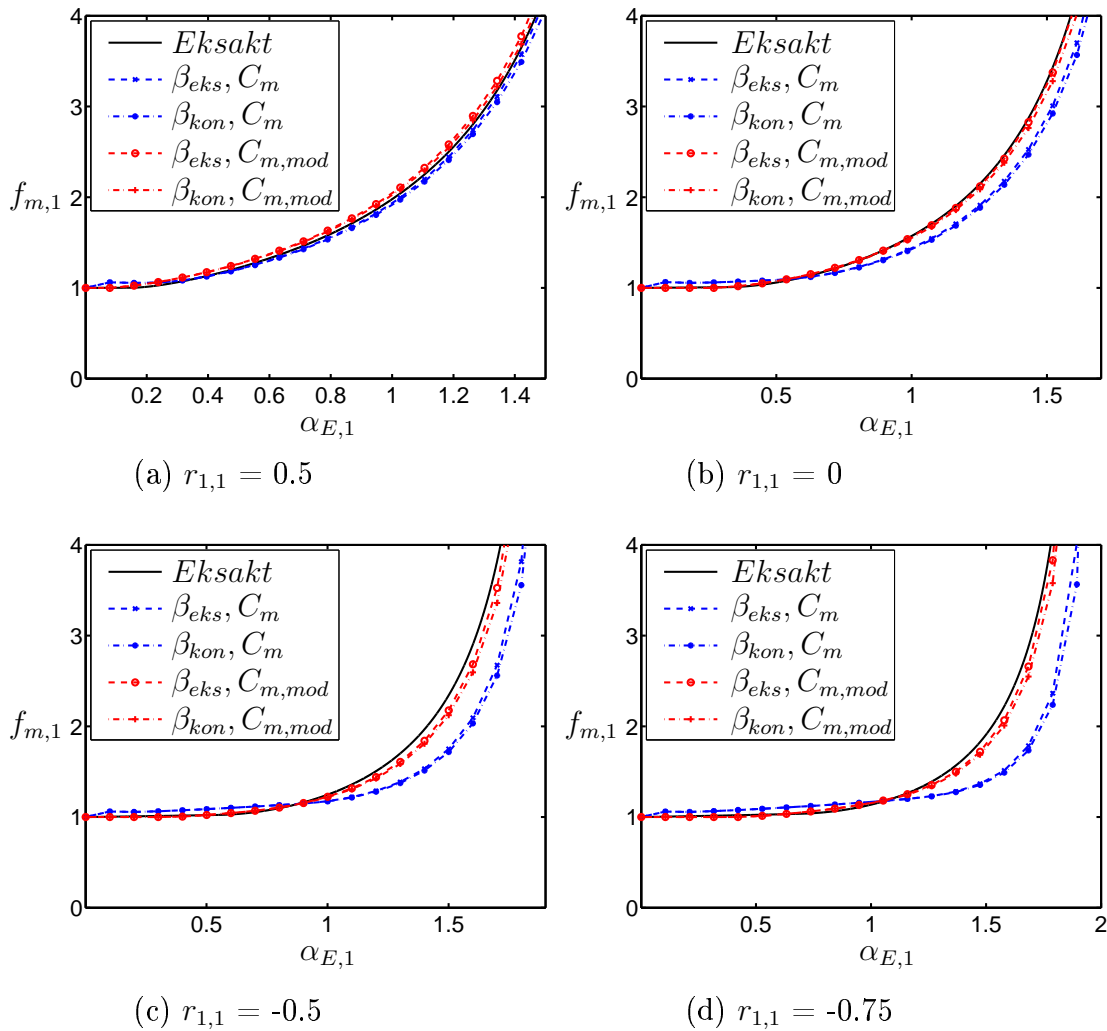
Modell 2 er definert på side 83, og fra figur 11.3 på side 140 vises at momentforstørrelsesfaktoren for søyle 1 med bruk av Helleslands metode. For søyle 2 er momentforstørrelsesfaktoren vist i figur 11.4 på side 141. I tabelle 11.3 og 11.4 på side 139 og 140 hhv. for søyle 1 og 2, kommer det frem hvor nøyaktig de tilnærmede metodene er i forhold til eksakt utregning (i punktet der $f_{m,Eksakt} = 1.5$). En diskusjon ang. overnevnte figurer og tabeller kommer enere i kapittel 11.3.3 på side 138.

Modell 3

Modell 3 er definert på side 83, og fra figur 11.5 på side 142 vises at momentforstørrelsesfaktoren for søyle 1 med bruk av Helleslands metode. For søyle 2 er momentforstørrelsesfaktoren vist i figur 11.6 på side 143. I tabelle 11.5 og 11.6 på side 141 og 141 hhv. for søyle 1 og 2, kommer det frem hvor nøyaktig de tilnærmede metodene er i forhold til eksakt utregning (i punktet der $f_{m,Eksakt} = 1.5$). En diskusjon ang. overnevnte figurer og tabeller kommer enere i kapittel 11.3.3 på side 138.

Tabell 11.1: f_m modell 1 (se side 83), søyle 1, ved $f_{m,Eksakt} = 1.5$.

$\beta_{eks,1}$	$\beta_{kon,1}$	\bar{k}_{1B}	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\alpha_{E,1}$	$f_{m,\beta_{eks}}$		$f_{m,\beta_{kon}}$	
						$\frac{C_m}{Eksakt}$	$\frac{C_{m,mod}}{Eksakt}$	$\frac{C_m}{Eksakt}$	$\frac{C_{m,mod}}{Eksakt}$
0.703	0.699	-0.061	1	1	0.524	1.022	1.022	1.018	1.018
			0.5		0.737	0.978	1.033	0.972	1.027
			0		0.955	0.919	0.996	0.913	0.988
			-0.5		1.197	0.856	0.956	0.851	0.947
			-0.75		1.333	0.840	0.962	0.837	0.951



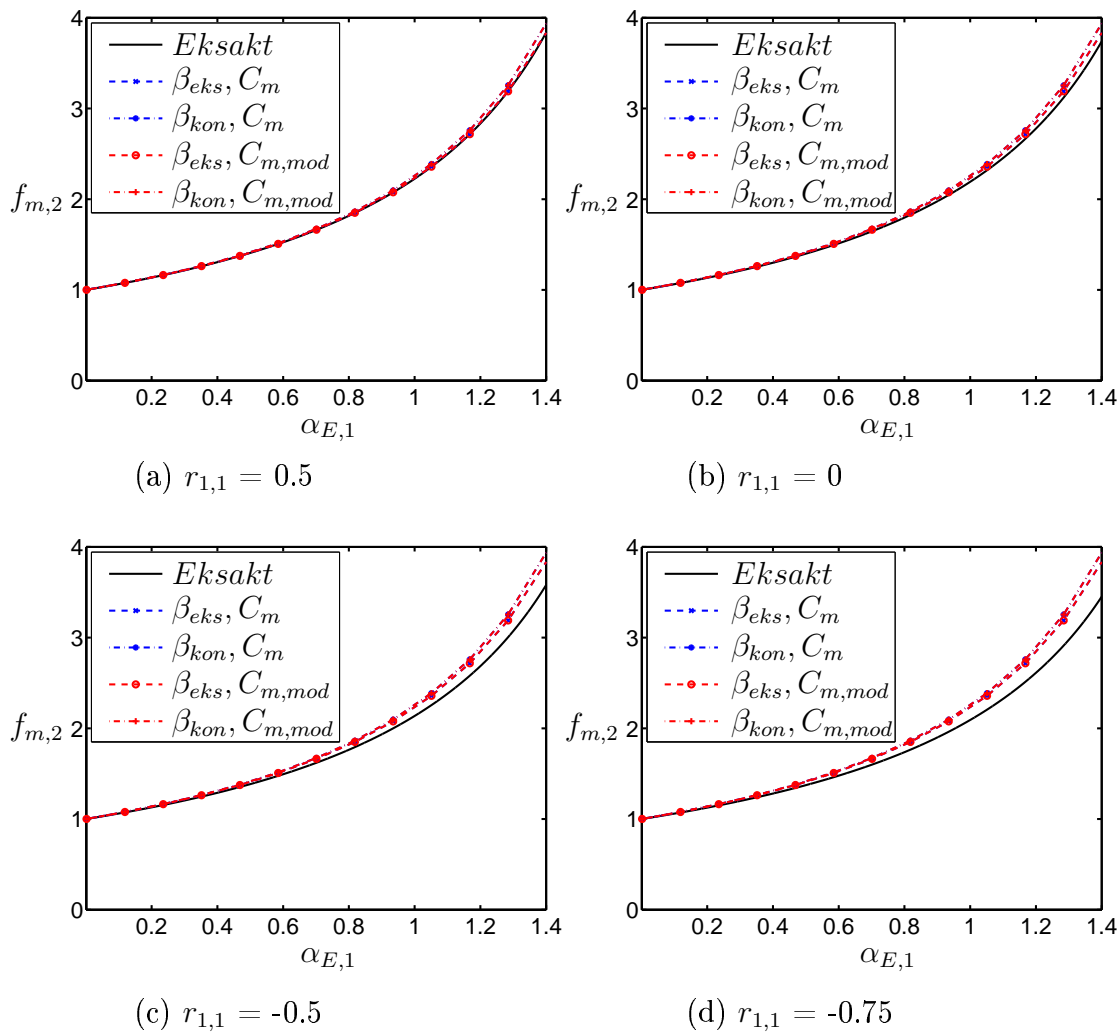
Figur 11.1: f_m modell 1, søyle 1, med C_m , $C_{m,mod}$, β_{eks} , β_{kon} og var. av $r_{1,1}$.

Tabell 11.2: f_m modell 1 (se side 83), søyle 2, ved $f_{m,Eksakt} = 1.5$.

$\beta_{eks,2}$	$\beta_{kon,2}$	\bar{k}_{2B}	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\alpha_{E,1}$	f_m, β_{eks}		f_m, β_{kon}	
						$\frac{C_m}{Eksakt}$	$\frac{C_{m,mod}}{Eksakt}$	$\frac{C_m}{Eksakt}$	$\frac{C_{m,mod}}{Eksakt}$
0.994	1.000	0.063	1	1	0.574	0.996	0.996	1.000	1.000
			0.5		0.580	1.001	1.001	1.005	1.005
			0		0.589	1.009	1.009	1.013	1.013
			-0.5		0.606	1.022	1.022	1.027	1.027
			-0.75		0.619	1.034	1.034	1.039	1.039

11.3.3 Diskusjon

Ved sammenligning av Helleslands tilnærmede metode og eksakt utregning av momentforstørrelsesfaktoren, er det nå to måter å gjøre dette på. Enten må re-

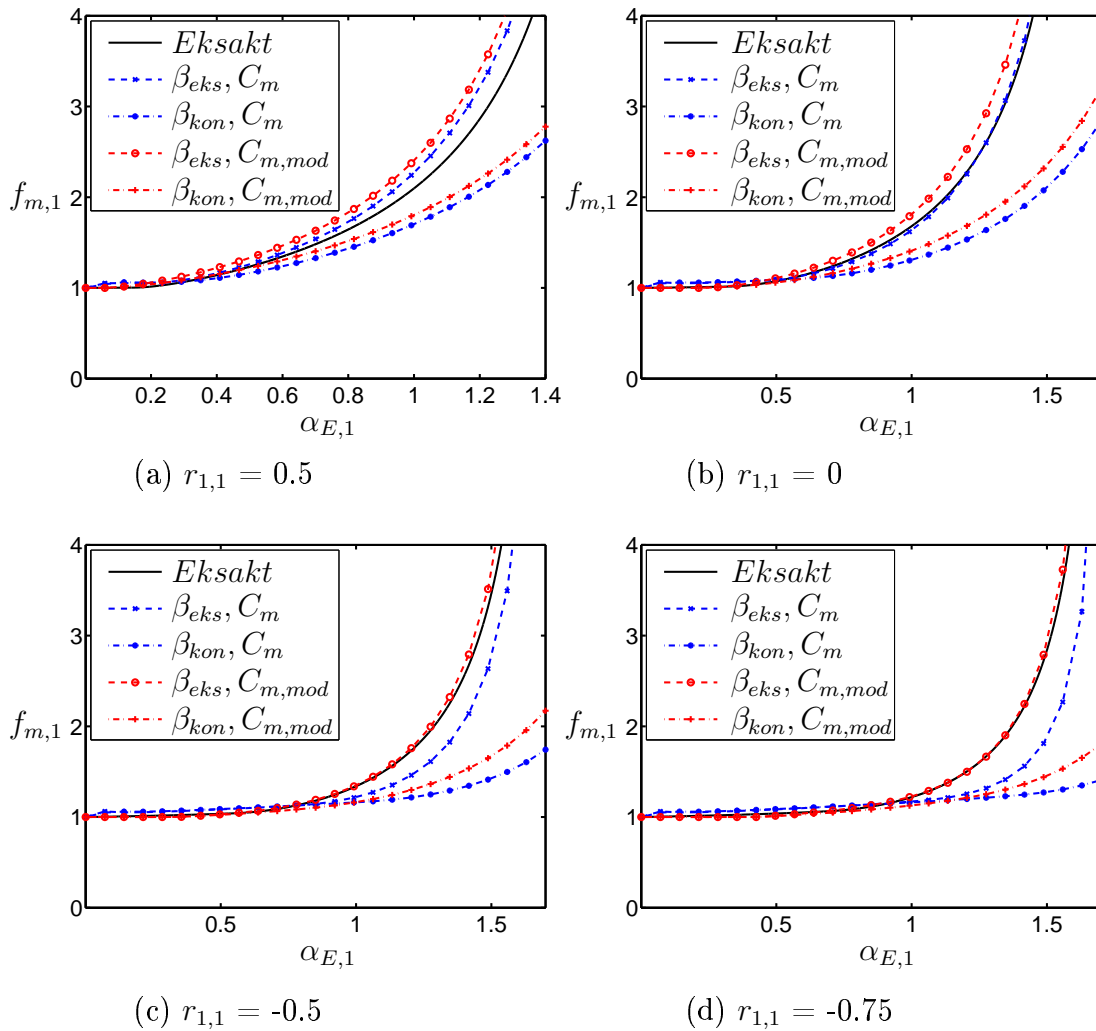


Figur 11.2: f_m modell 1, søyle 2, med C_m , $C_{m,mod}$, β_{eks} , β_{kon} og var. av $r_{1,1}$.

Tabell 11.3: f_m modell 2 (se side 84), søyle 1, ved $f_{m,Eksakt} = 1.5$.

$\beta_{eks,1}$	$\beta_{kon,1}$	\bar{k}_{1B}	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\alpha_{E,1}$	f_m, β_{eks}		f_m, β_{kon}	
						$\frac{C_m}{Eksakt}$	$\frac{C_{m,mod}}{Eksakt}$	$\frac{C_m}{Eksakt}$	$\frac{C_{m,mod}}{Eksakt}$
0.752	0.656	-0.804	1	1	0.505	1.074	1.074	0.964	0.964
			0.5		0.713	1.040	1.102	0.894	0.945
			0		0.905	0.972	1.066	0.823	0.876
			-0.5		1.101	0.874	1.009	0.788	0.814
			-0.75		1.203	0.836	0.998	0.799	0.807

sultatene sammenlignes der det benyttes en og samme β , eller en og samme " C_m ".



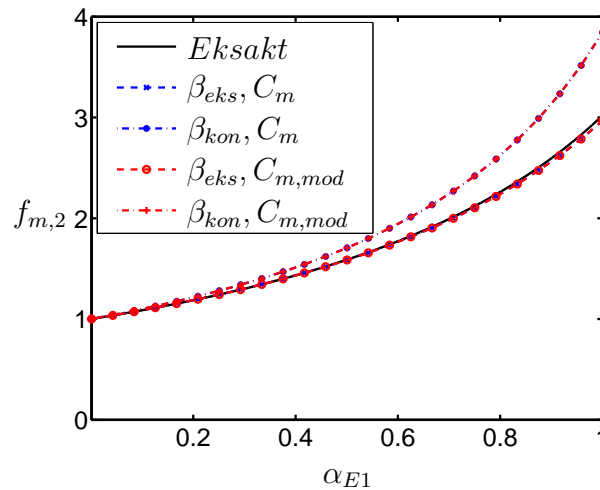
Figur 11.3: f_m modell 2, søyle 1, med C_m , $C_{m,mod}$, β_{eks} , β_{kon} og var. av $r_{1,1}$.

Tabell 11.4: f_m modell 2 (se side 84), søyle 2, ved $f_{m,Eksakt} = 1.5$.

$\beta_{eks,2}$	$\beta_{kon,2}$	\bar{k}_{2B}	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\alpha_{E,1}$	f_m, β_{eks}		f_m, β_{kon}	
						$\frac{C_m}{Eksakt}$	$\frac{C_{m,mod}}{Eksakt}$	$\frac{C_m}{Eksakt}$	$\frac{C_{m,mod}}{Eksakt}$
0.752	0.813	2.804	0.5	1	0.443	0.996	0.996	1.060	1.060

Det er i utgangspunktet første metode som er intresant og fra tabellene og figurene i kapittel 11.3 kommer det frem at

1. Modell 1



Figur 11.4: f_m modell 2, søyle 2, med C_m , $C_{m,mod}$, β_{eks} og β_{kon} , med $r_{1,1} = 0.5$ og $r_{1,2} = 1$.

Tabell 11.5: f_m modell 3 (se side 85), søyle 1, ved $f_{m,Eksakt} = 1.5$.

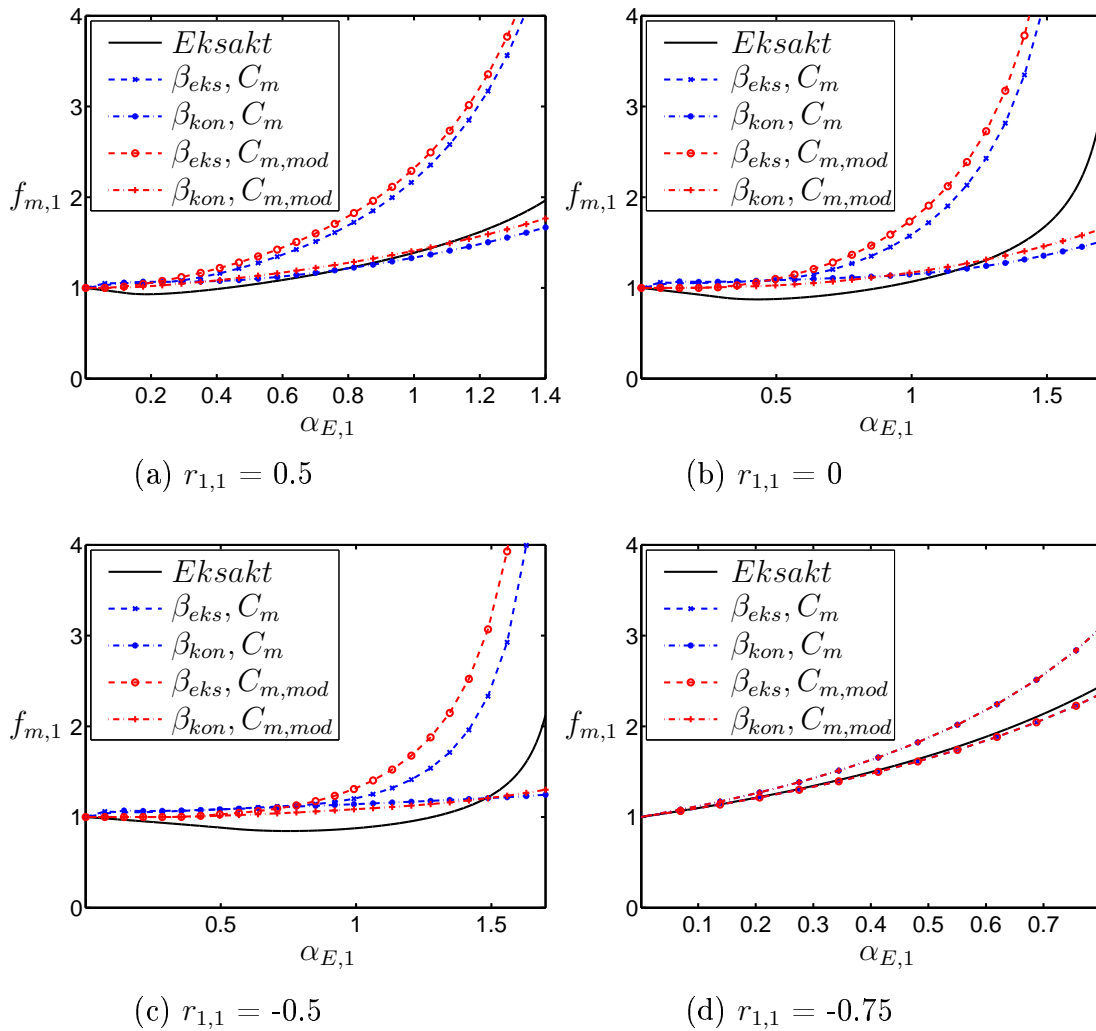
$\beta_{eks,1}$	$\beta_{kon,1}$	\bar{k}_{1b}	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\alpha_{E,1}$	f_m, β_{eks}		f_m, β_{kon}	
						$\frac{C_m}{Eksakt}$	$\frac{C_{m,mod}}{Eksakt}$	$\frac{C_m}{Eksakt}$	$\frac{C_{m,mod}}{Eksakt}$
0.742	0.535	-0.688	1	1	0.752	1.374	1.374	0.975	0.975
			0.5		1.107	1.717	1.818	0.940	0.994
			0		1.409	2.185	2.468	0.873	0.933
			-0.5		1.602	2.336	3.171	0.817	0.836
			-0.75		1.661	2.001	3.441	0.822	0.814

Tabell 11.6: f_m modell 3 (se side 85), søyle 2, ved $f_{m,Eksakt} = 1.5$.

$\beta_{eks,2}$	$\beta_{kon,2}$	\bar{k}_{2B}	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\alpha_{E,1}$	f_m, β_{eks}		f_m, β_{kon}	
						$\frac{C_m}{Eksakt}$	$\frac{C_{m,mod}}{Eksakt}$	$\frac{C_m}{Eksakt}$	$\frac{C_{m,mod}}{Eksakt}$
0.524	0.588	20.668	0.5	1	0.403	0.988	0.988	1.089	1.089

- **Søyle 1 (negativ rotasjonsinnspenning)**

Beste resultater er for det meste med bruk av $C_{m,mod}$ og β_{eks} , på en klar andreplass kan $C_{m,mod}$ og β_{kon} benyttes, det vises en vesentlig forbedring fra metoden der C_m benyttes. Dårligste resultater fåes med en kombinasjon der C_m og β_{kon} benyttes sammen.



Figur 11.5: f_m modell 3, søyle 1, med C_m , $C_{m,mod}$, β_{eks} , β_{kon} og var. av $r_{1,1}$.

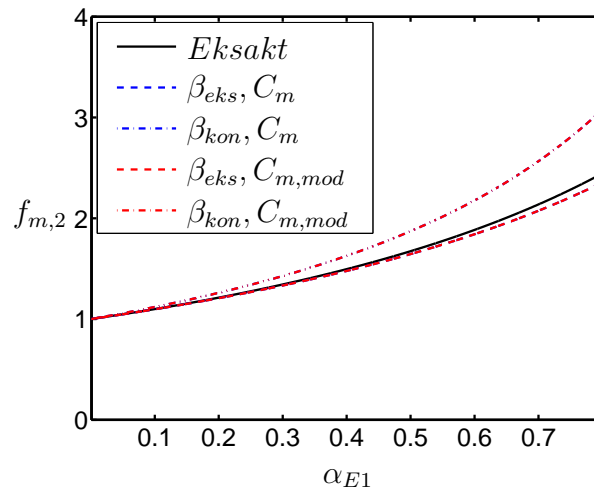
- **Søyle 2 (positiv rotasjonsinnspenning)**

Det vises fra figurene bare to grafer, dette fordi det er to og to som overlapper hverandre, dette blir diskutert senere. Beste tilnærmelser fåes med bruk av β_{eks} . Bruken av β_{kon} gir resultater som er dårligere tilnærmet, men som ligger mer til den sikre siden.

2. Modell 2

- **Søyle 1 (negativ rotasjonsinnspenning)**

Her vises virkningen av negativ innspenning, og bruken av β_{kon} blir til tider helt ubrukelig, enten det benyttes $C_{m,mod}$ eller C_m . Beste tilnærmede fåes med bruk av β_{eks} , og det kan diskuteres hvilken " C_m " som bør benyttes, men den mest pålitelige er $C_{m,mod}$.



Figur 11.6: f_m modell 3, søyle 2, med C_m , $C_{m,mod}$, β_{eks} og β_{kon} , med $r_{1,1} = 0.5$ og $r_{1,2} = 1$.

- **Søyle 2 (positiv rotasjonsinnspenning)**

Fra resultatene som foreligger (ikke mange) overlappes noen grafer igjen, mer om dette siden. Beste tilnærmelse fåes med bruk av β_{eks} , mens bruken av β_{kon} gir resultater mer til den sikre siden.

3. Modell 3

- **Søyle 1 (negativ rotasjonsinnspenning)**

Igjen vises virkningen av negativ innspenning, og bruken av β_{kon} gir resultater som er meget unøyaktige (for høyere verdier av f_m). Det er også vanskelig å trekke en god konklusjon for tilfeller der β_{eks} benyttes, men det vises at beste tilnærmelse fåes med bruk av C_m . Benyttes derimot $C_{m,mod}$ ligger resultatene mer til den sikre siden.

- **Søyle 2 (positiv rotasjonsinnspenning)**

Beste tilnærmelse fåes med bruk av β_{eks} , mens bruken av β_{kon} gir resultater mer til den sikre siden. Det er også slik at noen kurver her også overlappes, dette forklares senere.

Med utgangspunkt i dette kan det virke fordelaktig å bruke $C_{m,mod}$ i noen tilfeller, men å si at metoden generelt sett gir bedre resultater, gjenstår det å undersøke (ikke tatt med i denne oppgaven). Det vises også at alle tilfeller med positiv innspenning gir bruken av β_{kon} resultater kun til den sikre siden, men bruk av β_{eks} gir stort sett best tilnærmelse. Det er da også å merke seg at for disse tilfellene er β_{kon} alltid større enn β_{eks} . For tilfeller med negativ innspenning er resultatene

stort sett alltid best tilnærmet med bruk av β_{eks} , for disse tilfellene er alltid β_{eks} større enn β_{kon} .

Det som fremkommer fra figurene for søyle 2 (alle figurer tilhørende søylenummer 2 i kapittel 11.3), er at den tilnærmede momentforstørrelsesfaktoren “står stille”, dette er forårsaket av at 1. ordens momentgradient for søylen hele tiden er den samme, og av at metoden ikke tar hensyn til forandringen av nabosøylens (i dette tilfellet $r_{1,1}$) 1. ordens momentgradient. Eksakt utregning viser en forandring som funksjon av nabosøylens 1. ordens momentgradient, der raskert stigende kurve er vist for $r_{1,1} = 0.5$. For å være helt presis vises raskest stigende eksakte kurve for søyle 2, ved $r_{1,1} = 0.5$, men det er tidligere (se kapittel 4.4 på side 34) diskutert at for slike tilfeller vil $r_{1,1} = 1$, medføre en enda raskere stigende kurve.

Grunnen til at resultatene i tabellene (for alle tabeller tilhørende søyler med nummer 2 i kapittel 11.3) er parvis like, ligger i definisjonen til “ C_m ” faktorene. Faktoren blir faktisk “ikke” tatt i bruk før 1. ordens momentgradient er forskjellig fra 1, og siden resten av bakgrunnsstoffet som benyttes i begge metodene er det samme, bør også resultatene bli like.

11.4 Konklusjon og forslag til videre arbeid

Resultatene for en enkeltsøyle og et system bestående av søyler og bjelker er nå gjennomgått, og min fullstendige konklusjonen er at Helleslands metode var å foretrekke i de fleste undersøkelsene som ble foretatt. Det kan selvfølgelig diskuteres hva som er et godt resultat, om alle resultatene skal være til den sikre siden, eller om en liten feilmargin er tillatt på den usikre siden. Jeg personlig foretrekker det første. Med litt egeninnsats utviklet jeg en ny C_m basert på Helleslands metode, og resultatet synes jeg var meget bra når jeg betraktet enkeltsøylen, men det må undersøkes nærmere når det gjelder systemer. Dette er et fagfelt med mye interessant forskning som også dessverre krever mye tid.

Når det gjelder bruken av β_{kon} i de tilnærmede metodene for systemer der negativ innspenning oppstår, må jeg si at momentforstørrelsesfaktoren blir i de aller fleste tilfeller meget dårlig tilnærmet, så en “ny” konvensjonell knekkklengdefaktor som tar mer hensyn til dette er noe å forske videre på. Det kommer også frem fra resultatene at en kombinasjon med negativ innspenning og “stivere” systemer medfører enda dårligere resultater (Modell 3 er et eksempel på et “stivere” system). Et forslag til bruken av β_{kon} må være de tilfellene der det i hvert fall ikke er negativ innspenning. Se forøvrig tidligere konklusjoner i dette kapitlet.

Med tanke på videre forskning har jeg som sagt tidligere laget en cd-rom plate med nyttige programmer for beregning av momentforstørrelsesfaktoren, som er fine å bruke i videre forskningsarbeid. Platen er limt fast på siste side av oppgaven.

Tillegg A

Anvendte dataprogrammer

A.1 Latex

Hele dokumentet er skrevet i Latex versjon 3.14159, dette fordi der er meget brukervennlig og desuten er det bl.a. enkelt å referere, systematisere og holde god orden på dokumentet.

A.2 Xfig

Dette programmet er også meget brukervennlig, og er benyttet til å lage de fleste figurene til dokumentet. Den utgaven som er benyttet heter Xfig versjon 3.2.

A.3 Matlab

Før resultatene presenteres vil jeg kort si noe om programmet som er benyttet for utregningene. Jeg har selv programmert i Matlab versjon 6.5.1.199709 Release 13, og alle utregninger er først og fremst beregnet med matriseregning. I noen tilfeller har det vært nødvendig å regne rent symbolsk, noe som Matlab behersker helt fint, alle svar er da helt eksakte. For andre tilfeller er det nødvendig å regne numerisk, og nøyaktigheten til svarene er da helt avhengig av hvor fin inndeling som brukes. Jeg har valgt å bruke en inndeling på 1000 punkter som er en god

nok til å få svar med ca. tre desimalers nøyaktighet. Jeg har også prøvd med inndeling på 10000, og forskjellen til tidligere var så liten at jeg var fornøyd med 1000. Husk det er mye mer tidkrevende å bruke en finere inndeling. Jeg har helt til slutt i tillegg D lagt med forklaring og brukerveiledning til dataprogrammene som er benyttet i denne oppgaven, og selve programmene ligger på cd-rom platen på siste side.

Tillegg B

Matriseregning og forklaringer for enkeltsøyle

B.1 Generelt

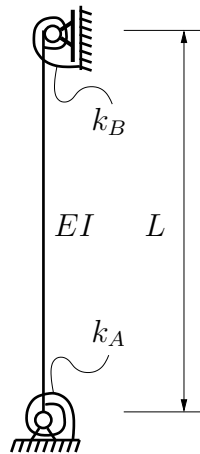
Her vil jeg gjennomgå gangen i lokal og global stivhetsrelasjon for en enkelt søyle. Det beregnes etter 1. og 2. ordens teori for så å komme frem til de ønskede formuleringene som brukes. Det betraktes altså en søyle med de definisjoner som er påtegnet i figur B.1 under.

B.2 Beregning etter 1.ordens teori

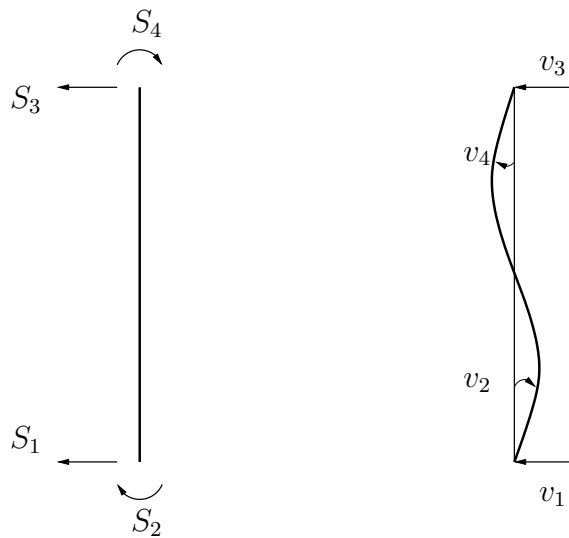
Et element med fire frihetsgrader skal benyttes, der S_i er krefter og v_i er de tilhørende forskyvninger¹, er vist i figur B.2.

Stivhetsmatrisen \mathbf{k} som relaterer forskyvningene \mathbf{v} til de samsvarende krefter kan relativt enkelt etableres ved en direkte betraktning, og resultatet blir som i relasjon B.1 under, for flere detaljer se [2].

¹Med krefter menes krefter og momenter, forskyvninger menes translasjoner og rotasjoner.



Figur B.1: Søyle som skal undersøkes.

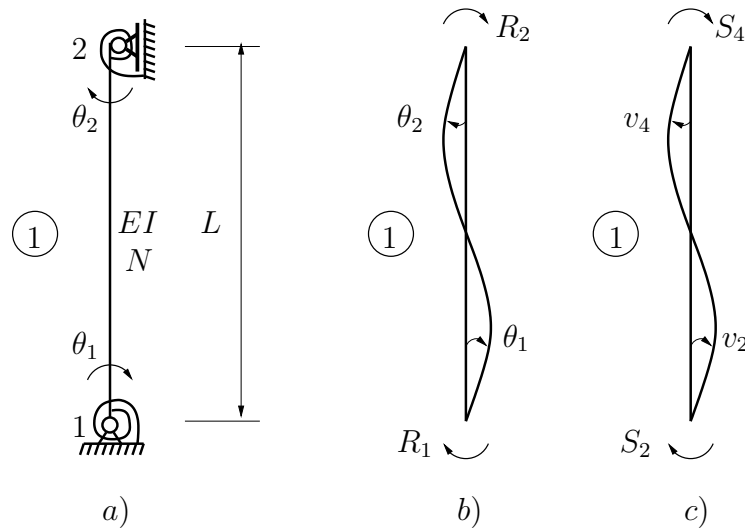


Figur B.2: Element med 4 frihetsgrader

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & -3L & -6 & -3L \\ -3L & 2L^2 & 3L & L^2 \\ -6 & 3L & 6 & 3L \\ -3L & L^2 & 3L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \mathbf{kv} \quad (\text{B.1})$$

Lokal og global relasjon

For søylen som skal undersøkes (figur B.1) er det to frihetsgrader, og en modell der lokale og globale frihetsgrader fremkommer ev vist i figur B.3 under.



Figur B.3: Søyle med 2 globale rotasjonsfrihetsgrader θ_1 og θ_2 (a). Global og lokal modell med frihetsgrader og tilhørende krefter for hhv. figur (b) og (c).

Lokalt:

Benytter nå relasjon B.1 og bygger opp elementstivhetsrelasjon (bestående av to frihetsgrader) B.2.

$$\begin{bmatrix} S_2 \\ S_4 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Kinematiske og mekaniske randbetingelser gir følgende krav B.3:

$$\begin{bmatrix} S_2 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1A} \\ M_{1B} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

som fører til relasjonen B.4

$$\begin{bmatrix} M_{1A} \\ M_{1B} \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Globalt:

Den globale stivhetsmatrisen vil bestå av stivhetsmatrisen for elementet og bidrag fra fjærene som adderes direkte inn på de respektive plassene. Den globale stivhetsrelasjonen blir som følger B.5:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 + \bar{k}_A & 2 \\ 2 & 4 + \bar{k}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{K}\Theta \quad \text{der } \bar{k}_i = \frac{k_i}{L} \quad (\text{B.5})$$

Randbetingelser gir krav som følger

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_A \\ \tilde{M}_B \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

og det fås relasjonen B.7

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_A \\ \tilde{M}_B \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 + \bar{k}_A & 2 \\ 2 & 4 + \bar{k}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

B.3 Beregning etter 2.ordens teori

En stivhetsrelasjon for dette elementet kan relativt enkelt etableres ved en direkte betraktning, når det i tillegg taes med momentvirkningen fra aksiallasten i

form av en stabilitetsfunksjon, vil stivhetsrelasjonen være som relasjon B.8 under. Denne relasjonen er kjent fra før, og kan bl.a. finnes i [3].

Det brukes nå samme fremgangsmåte som for 1.ordens teori, men elementet i figur B.2 har nå følgende stivhetsrelasjon B.8 som nå avhengig av en stabilitetsfunksjon, dvs. at det taes med momentvirkning fra aksiallasten. Denne relasjonen kan finnes i bl.a. [3].

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6\phi_5 & -3L\phi_2 & -6\phi_5 & -3L\phi_2 \\ -3L\phi_2 & 2L^2\phi_3 & 3L\phi_2 & L^2\phi_4 \\ -6\phi_5 & 3L\phi_2 & 6\phi_5 & 3L\phi_2 \\ -3L\phi_2 & L^2\phi_4 & 3L\phi_2 & 2L^2\phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \mathbf{kv} \quad (\text{B.8})$$

der stabilitetsfunksjonene, også kalt ϕ -funksjoner er som følger

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \xi \cot \xi \quad \text{der } \xi = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{N}{EI}} \\ \phi_2 &= \frac{1}{3} \frac{\xi^2}{1 - \phi_1} \\ \phi_3 &= \frac{1}{4} \phi_1 + \frac{3}{4} \phi_2 \\ \phi_4 &= -\frac{1}{2} \phi_1 + \frac{3}{2} \phi_2 \\ \phi_5 &= \phi_1 \phi_2 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Etter noe handregning kommer elementstivhetsrelasjonen frem som

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4\phi_3 & 2\phi_4 \\ 2\phi_4 & 4\phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

og systemets stivhetsrelasjon

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_A \\ \tilde{M}_B \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4\phi_3 + \bar{k}_A & 2\phi_4 \\ 2\phi_4 & 4\phi_3 + \bar{k}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

B.4 Definisjon av noen faktorer som er benyttet.

Faktorene som er benyttet tidligere blir da som følger.

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{M}_A}{\tilde{M}_B} &= -\frac{\bar{k}_A + r_1(6 + 2\bar{k}_A)}{r_1\bar{k}_B + 6 + 2\bar{k}_B} \\
r &= -\frac{(8\phi_3^2 - 2\phi_4^2 + 2\phi_3\bar{k}_B)\frac{\tilde{M}_A}{M_B} + \phi_4\bar{k}_A}{\phi_4\bar{k}_B\frac{\tilde{M}_A}{M_B} + 2\phi_3\bar{k}_A + 8\phi_3^2 - 2\phi_4^2} \\
\frac{M_A}{M_{1B}} &= \frac{v(8\phi_3^2 - 2\phi_4^2 - 2\phi_3\bar{k}_B)\frac{\tilde{M}_A}{M_B} + \phi_4\bar{k}_A}{u\bar{k}_B\frac{\tilde{M}_A}{M_B} + 6 + 2\bar{k}_A} \\
\frac{M_B}{M_{1B}} &= \frac{v\frac{\tilde{M}_A}{M_B}\phi_4\bar{k}_B + 2\phi_3\bar{k}_A + 8\phi_3^2 - 2\phi_4^2}{u\frac{\tilde{M}_A}{M_B}\bar{k}_B + 6 + 2\bar{k}_A} \tag{B.12}
\end{aligned}$$

der u og v er

$$\frac{1}{(4 + \bar{k}_A)(4 + \bar{k}_B) - 4} \tag{B.13}$$

$$\frac{1}{(4\phi_3 + \bar{k}_A)(4\phi_3 + \bar{k}_B) - 4\phi_4^2} \tag{B.14}$$

henholdsvis.

B.5 Beregning av eksakt knekkfaktor β

For å kunne beregne den eksakte knekkklengdefaktoren β for søylen som er avbildet i figur 3.4a side 29, er det nødvendig å sette opp den globale stivhetsmatrisen for systemet for deretter å studere determinanten. Stivhetsmatrisen for dette systemet er definert tidligere i relasjon B.11 og er som følger.

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4\phi_3 + \bar{k}_A & 2\phi_4 \\ 2\phi_4 & 4\phi_3 + \bar{k}_B \end{bmatrix} \tag{B.15}$$

der \bar{k}_i er definert ved relasjon 2.25 side 14.

Setter nå determinanten til relasjon B.15 lik null og får.

$$\begin{aligned} \left(\frac{EI}{L}\right)^2((4\phi_3 + \bar{k}_A)(4\phi_3 + \bar{k}_B) - (2\phi_4)^2) &= 0 \\ (4\phi_3 + \bar{k}_A)(4\phi_3 + \bar{k}_B) - (2\phi_4)^2 &= 0 \\ 12\phi_1\phi_2 + (\phi_1 + 3\phi_2)(\bar{k}_A + \bar{k}_B) + \bar{k}_A\bar{k}_B &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Infører nå følgende forhold, (relasjon B.17-B.18) som også bl.a. er omtalt i [10] og [11] for flere detaljer.

$$\alpha_E = \frac{N}{N_E} \quad \text{der } N_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (\text{B.17})$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{cr}\alpha_E}} \quad \text{der } \gamma_{cr} = 1 \text{ ved knekkning} \quad (\text{B.18})$$

Dermed fremkommer sammenhengen mellom ξ og β på følgende måte

$$\xi = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{N}{EI}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha_E} = \frac{\pi}{2\beta} \quad (\text{B.19})$$

Fortsetter nå videre med utledningen fra B.16, og ser på leddene hver for seg.

$$\begin{aligned} 12\phi_1\phi_2 &= \frac{\frac{\pi^3}{2\beta^3}}{1 - \frac{\pi}{2\beta} \cot(\frac{\pi}{2\beta})} \cot(\frac{\pi}{2\beta}) \\ &= \frac{\frac{\pi^2}{\beta^2}}{\frac{2\beta}{\pi} \tan(\frac{\pi}{2\beta}) - 1} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned}
\phi_1 + 3\phi_2 &= \frac{\pi}{2\beta} \cot\left(\frac{\pi}{2\beta}\right) + \frac{\frac{\pi^2}{4\beta^2}}{1 - \frac{\pi}{2\beta} \cot\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)} \\
&= \frac{1 - \frac{\pi}{2\beta} \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)} + \frac{\pi}{2\beta} \tan\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}{\frac{\frac{2\beta}{\pi} \tan\left(\frac{\pi}{2\beta}\right) - 1}{2\beta \tan\left(\frac{\pi}{2\beta}\right) - \pi + \pi \tan^2\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}} \\
&= \frac{\frac{2\beta}{\pi} \tan\left(\frac{\pi}{2\beta}\right) - 1}{\frac{2\beta \tan\left(\frac{\pi}{2\beta}\right) - \pi + \pi \tan^2\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}{2\beta \tan\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}} \\
&= \frac{\frac{2\beta}{\pi} \tan\left(\frac{\pi}{2\beta}\right) - 1}{1 - \frac{\pi}{\beta} \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}} \\
&= \frac{\frac{2\beta}{\pi} \tan\left(\frac{\pi}{2\beta}\right) - 1}{\frac{2\beta}{\pi} \tan\left(\frac{\pi}{2\beta}\right) - 1} \tag{B.21}
\end{aligned}$$

der det ble brukt

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)} \tag{B.22}$$

Relasjon B.20 og B.21 settes nå inn i relasjon B.16, og etter en enkel handregning fåes

$$\frac{\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^2}{\bar{k}_A \bar{k}_B} + \left(\frac{1}{\bar{k}_A} + \frac{1}{\bar{k}_B}\right) \left(1 - \frac{\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^2}{\tan\left(\frac{\pi}{\beta}\right)}\right) + \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}{\frac{\pi}{2\beta}} = 1 \tag{B.23}$$

Tillegg C

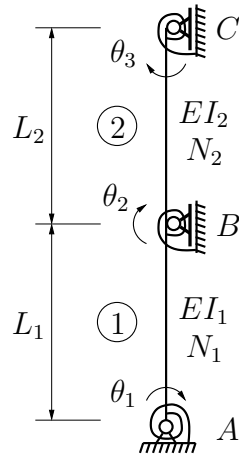
Matriseregning og forklaringer for ramme

C.1 Generelt

Her vil jeg gjennomgå gangen i lokal og global stivhetsrelasjon for rammen definert i avsnitt 1 på side 1, figur 1.2a. Det benyttes idealiseringen i figur 1.2b og det beregnes etter 1. og 2. ordens teori for så å komme frem til de ønskede formuleringene som benyttes. Idealiseringen består av en søyle over to plan, som deles inn i to elementer slik figur C.1 viser. Siden rammen i utgangspunktet er fastholdt mot sideveis forskyvning, vil søylen nå bestå av tre rotasjonsfrihetsgrader (θ_1 , θ_2 og θ_3).

C.2 Beregning etter 1. ordens teori

Det er tidligere benyttet et element med fire frihetsgrader i avsnitt B.2 på side 148 og benytter nå samme element. Selve fremgangsmåten for beregning av lokal og global stivhetsmatrise er også tidligere beskrevet, så kun hovedtrekkene gjennomgås.



Figur C.1: To etasjes søyle med globale frihetsgrader.

Lokal og global relasjon

Lokalt:

Lokal stivhetsrelasjonene for element 1 og element 2 er blir som følger

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{k}_i \mathbf{v}_i + \mathbf{S}_{0i} \quad \text{der } \mathbf{S}_{0i} = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{bmatrix} S_2 \\ S_4 \end{bmatrix}_1 = \frac{EI_1}{L_1} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix}_1 \quad \text{for element 1.} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{bmatrix} S_2 \\ S_4 \end{bmatrix}_2 = \frac{EI_2}{L_2} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix}_2 \quad \text{for element 2.} \quad (\text{C.3})$$

Fra randbetingelsene kommer det frem at følgende krav må tilfredstilles

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S_2 \\ S_4 \end{bmatrix}_1 &= \begin{bmatrix} M_{1AB} \\ M_{1BA} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix}_1 &= \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad \text{for element 1.} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S_2 \\ S_4 \end{bmatrix}_2 &= \begin{bmatrix} M_{1BC} \\ M_{1CB} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix}_2 &= \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad \text{for element 2.} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

som fører til

$$\begin{bmatrix} M_{1AB} \\ M_{1BA} \end{bmatrix} = \frac{EI_1}{L_1} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{bmatrix} M_{1BC} \\ M_{1CB} \end{bmatrix} = \frac{EI_2}{L_2} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

Forklaring av indeksen eks. M_{1BA} er: 1 står for 1. ordens moment, B representerer knutepunktet, mens A forklarer retningen momentet virker.

Før den globale stivhetsrelasjonen for søylen kan bygges opp, er det nødvendig å sette opp stivhetsmatrisen for de tre fjærene som virker i hvert knutepunkt. Etterom fjørene virker i knutepunktene legges stivhetsbidraget på diagonalen i matrisen

$$\begin{bmatrix} k_A & 0 & 0 \\ 0 & k_B & 0 \\ 0 & 0 & k_C \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

Globalt:

Den globale stivhetsmatrisen vil bestå av stivhetsmatrisen for elementene og fjærene. Den globale stivhetsrelasjonen blir som følger C.9:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \frac{EI_1}{L_1} \begin{bmatrix} 4 + \bar{k}_A & 2 & 0 \\ 2 & 8 + \bar{k}_B & 2 \\ 0 & 2 & 4 + \bar{k}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \mathbf{K}\Theta \quad (\text{C.9})$$

der fjærstivhetene er dividert på EI_1/L_1 slik at

$$\bar{k}_i = \frac{k_i}{\frac{EI_1}{L_1}} \quad \text{der } i = A, B, C \quad (\text{C.10})$$

Randbetingelser gir følgende krav C.11

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_A \\ \tilde{M}_B \\ \tilde{M}_C \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

Følgende relasjon fåes

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_A \\ \tilde{M}_B \\ \tilde{M}_C \end{bmatrix} = \frac{EI_1}{L_1} \begin{bmatrix} 4 + \bar{k}_A & 2 & 0 \\ 2 & 8 + \bar{k}_B & 2 \\ 0 & 2 & 4 + \bar{k}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \mathbf{K}\Theta \quad (\text{C.12})$$

C.3 Beregning etter 2. ordens teori

C.3.1 Generelt

For beregning etter 2. ordens teori, benyttes samme fremgangsmåte og elementinndeling som for 1. orden, men elementetrelasjonen blir nå generert ved hjelp av relasjon B.8 side 152. Det kan da vises at lokal og global relasjon blir som følger

C.3.2 Lokal og global relasjon

Lokalt:

$$\begin{bmatrix} S_2 \\ S_4 \end{bmatrix}_1 = \frac{EI_1}{L_1} \begin{bmatrix} 4\phi_3 & 2\phi_4 \\ 2\phi_4 & 4\phi_3 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix}_1 \quad \text{for element 1.} \quad (\text{C.13})$$

$$\begin{bmatrix} S_2 \\ S_4 \end{bmatrix}_2 = \frac{EI_2}{L_2} \begin{bmatrix} 4\phi_3 & 2\phi_4 \\ 2\phi_4 & 4\phi_3 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix}_2 \quad \text{for element 2.} \quad (\text{C.14})$$

Fra randbetingelsene må følgende krav tilfredstilles

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S_2 \\ S_4 \end{bmatrix}_1 &= \begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix}_1 &= \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \text{for element 1.} \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S_2 \\ S_4 \end{bmatrix}_2 &= \begin{bmatrix} M_{BC} \\ M_{CB} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix}_2 &= \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \text{for element 2.} \quad (\text{C.16})$$

som fører til

$$\begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{bmatrix} = \frac{EI_1}{L_1} \begin{bmatrix} 4\phi_3 & 2\phi_4 \\ 2\phi_4 & 4\phi_3 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.17})$$

$$\begin{bmatrix} M_{BC} \\ M_{CB} \end{bmatrix} = \frac{EI_2}{L_2} \begin{bmatrix} 4\phi_3 & 2\phi_4 \\ 2\phi_4 & 4\phi_3 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

For å bygge opp den globale stivhetsrelasjonen for søylen, er det igjen nødvendig å sette opp stivhetsmatrisen for de tre fjærene som virker i hvert knutepunkt. Denne matrisen er uforandret og blir som C.8.

Globalt:

Den globale stivhetsmatrisen vil bestå av stivhetsmatrisen for elementene og fjærene. Den globale stivhetsrelasjonen blir som følger C.19:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \frac{EI_1}{L_1} \begin{bmatrix} 4\phi_{3,1} + \bar{k}_A & 2\phi_{4,1} & 0 \\ 2\phi_{4,1} & 4\phi_{3,1} + 4\phi_{3,2} + \bar{k}_B & 2\phi_{4,2} \\ 0 & 2\phi_{4,2} & 4\phi_{3,2} + \bar{k}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \mathbf{K}\Theta \quad (\text{C.19})$$

der eksempelvis den siste indeksen "1" i $\phi_{3,1}$ angir elementnummeret. Fjærstivhetene er også dividert på EI_1/L_1 slik at \bar{k}_i er som tidligere definert ved C.10. Randbetingelser gir følgende krav C.20

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_A \\ \tilde{M}_B \\ \tilde{M}_C \end{bmatrix} \quad (\text{C.20})$$

Følgende relasjon fåes

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_A \\ \tilde{M}_B \\ \tilde{M}_C \end{bmatrix} = \frac{EI_1}{L_1} \begin{bmatrix} 4\phi_{3,1} + \bar{k}_A & 2\phi_{4,1} & 0 \\ 2\phi_{4,1} & 4\phi_{3,1} + 4\phi_{3,2} + \bar{k}_B & 2\phi_{4,2} \\ 0 & 2\phi_{4,2} & 4\phi_{3,2} + \bar{k}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.21})$$

C.4 Definisjon av faktorer benyttet i ramme

Faktorene som er benyttet i sammenheng med rammen kan utledes fra relasjonene i forrige kapittel på tilsvarende måte som for enkeltsøylen i avsnitt B.4 på side 153.

Faktorer som nå er aktuelle er: $\frac{\tilde{M}_A}{\tilde{M}_B}$, $\frac{\tilde{M}_C}{\tilde{M}_B}$, $r_{2,1}$, $r_{2,2}$, $\frac{M_{AB}}{M_{1BA}}$, $\frac{M_{BA}}{M_{1BA}}$, $\frac{M_{BC}}{M_{1BC}}$ og $\frac{M_{CB}}{M_{1BC}}$. Der er ulelutt å fremstille disse da de er forholdsvis store og lett å miste oversikten, så dette overlates til leseren.

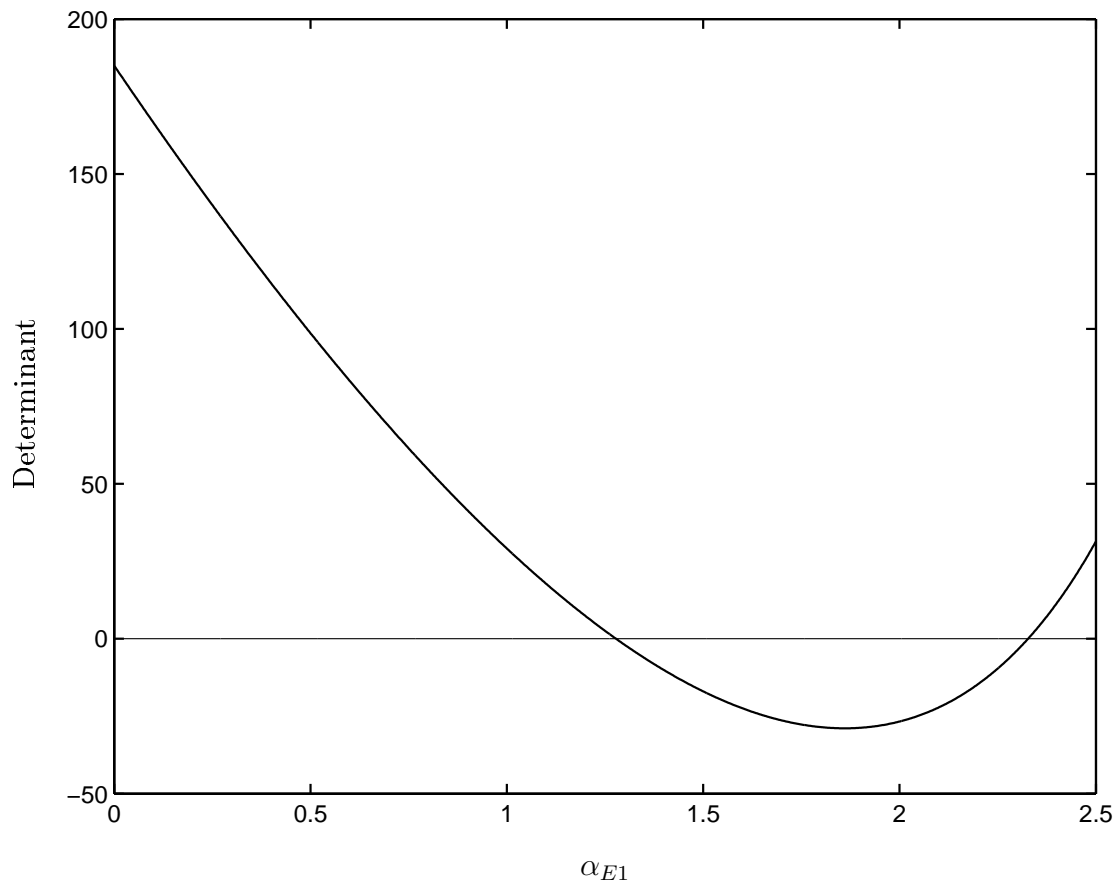
C.5 Beregning av eksakte knekkleengdefaktorer β_1 og β_2

For beregning av eksakt knekkfaktor for systemet angitt i figur 1.2b, studeres determinanten til stivhetsmatrisen for systemet. Denne stivhetsmatrisen er regnet ut før og er angitt ved relasjon C.21. Determinanten for dette systemet settes lik null, og det fåes

$$\begin{aligned}
 Det = & 64(\phi_{3,1})^2\phi_{3,2} + 16(\phi_{3,1})^2\bar{k}_C + 64\phi_{3,1}(\phi_{3,2})^2 + 16\phi_{3,1}\phi_{3,2}\bar{k}_C + \\
 & + 16\phi_{3,1}\bar{k}_B\phi_{3,2} + 4\phi_{3,1}\bar{k}_B\bar{k}_C - 16\phi_{3,1}(\phi_{4,2})^2 + 16\bar{k}_A\phi_{3,1}\phi_{3,2} + \\
 & + 4\bar{k}_A\phi_{3,1}\bar{k}_C + 16\bar{k}_A(\phi_{3,2})^2 + 4\bar{k}_A\phi_{3,2}\bar{k}_C + 4\bar{k}_A\bar{k}_B\phi_{3,2} + \bar{k}_A\bar{k}_B\bar{k}_C - \\
 & - 4\bar{k}_A(\phi_{4,2})^2 - 16(\phi_{4,1})^2\phi_{3,2} - 4(\phi_{4,1})^2\bar{k}_C = 0 \quad (C.22)
 \end{aligned}$$

Løsningen av dette egenverdioproblemet er mange, men her bare interessert i den første løsningen (laveste verdi), som det fremkommer er det ganske omfattende arbeid å finne de forskjellige β_1 og β_2 , så dette gjøres ved hjelp av programmering. Et eksempel er vist i figur C.2.

Det vises her at determinanten treffer null på to steder, men som sagt kun bare interessert i første det skjæringspunkt. Dette skjæringspunktet kan finnes ved enkle metoder, eksempelvis Newton Rasons metode, for flere detaljer se [3].



Figur C.2: Eksempel på hvordan determinanten forandrer seg med økende aksialkraft. $\bar{k}_A = \bar{k}_B = \bar{k}_C = q = p = r_{1,1} = r_{1,2} = 1$

Tillegg D

Brukerstøtte for bruk av CD-ROM med vedlagte dataprogrammer

D.1 Generelt

Jeg har valgt å legge de mest interessante beregningsprogrammene på vedlagte cd-rom plate, både for at leseren kan se hvordan programmene er bygd opp og for de spesielt interesserte som ønsker å benytte programmene i videre forskning. Hvert program har hver sin spesifikke oppgave og en brukerveiledning er gitt i starten av hvert enkelt program. Generelt er det to verktøy programmene krever, det ene er Matlab regneverktøy og det andre er et program for å redigere datakoden, eksempelvis Emacs. For å starte er program skrives navnet på filen inn i Matlab og deretter starter programmet. I den sammenheng blir du spurt om hvilke verdier du ønsker at programmet skal ta hensyn til under beregningen, og resultatene kommer frem i form av tall og figurer.

NB! det som det da ikke er tatt hensyn til er noen randbetingelser som du er nødt til å kontrollere, eventuelt justere slik at resultatet blir riktig, hvordan du gjør dette er nøye beskrevet i begynnelsen til hvert enkelt dataprogram. En oversikt over hvordan CD-ROM platen er organisert er beskrevet i neste avsnitt.

D.2 Hvordan CD-ROM platen er organisert

For å gjøre cd-rom platen enkel å bruke har jeg delt den inn i to mapper, en som tar for seg beregninger på en enkelsøyle (mappen enkeltsøyle), se figur 1.1d på side 4, og en som tar for seg beregninger på en enkeltsøyle i et system (mappen system), se figur 1.2b på side 5. En oversikt og kort forklaring er vist under.

1. Enkeltsøyle

- **Maksmoment _Alle.m**
Beregner maksimalt moment tilnærmet (*Konvensjonell*, *Helleslands* og *Villettes* metode) og eksakt.
- **Maksmoment _John.m**
Beregner maksmoment tilnærmet med bruk av mitt forslag til C_m (basert på *Helleslands* metode) og eksakt.

2. System

- **Maksmoment _Alle _S1.m**
Beregner maksimalt moment tilnærmet (*Konvensjonell*, *Helleslands* og *Villettes* metode) og eksakt for søyle 1.
- **Maksmoment _Alle _S2.m**
Beregner maksimalt moment tilnærmet (*Konvensjonell*, *Helleslands* og *Villettes* metode) og eksakt for søyle 2.
- **Maksmoment _Alle _S2 _ae1.m**
Beregner maksimalt moment tilnærmet (*Konvensjonell*, *Helleslands* og *Villettes* metode) og eksakt for søyle 2 uttrykt ved α_{E1} .
- **Maksmoment _John _S1.m**
Beregner maksmoment tilnærmet med bruk av mitt forslag til C_m (basert på *Helleslands* metode) og eksakt for søyle 1.
- **Maksmoment _John _S2 _ae1.m**
Beregner maksmoment tilnærmet med bruk av mitt forslag til C_m (basert på *Helleslands* metode) og eksakt for søyle 2 uttrykt ved α_{E1} .

Litteraturhenvisninger

- [1] “ACI 318-8: Building Code Requirements for Reinforced Concrete”, American Concrete Institute, Detroit, 1989.
- “ACI 318R-89: Commentary on Building Code Requirements for Reinforced Concrete”, American Concrete Institute, Detroit, 1989.
- [2] Bell, K.:
“Matrise statikk”, Tapir, Trondheim 1994.
- [3] Bergan, P., Syvertsen, T. G.:
“Knekning av søyler og rammer”, Tapir, Trondheim 1989.
- [4] Bureau, A., Galèa, Y., Jaspert, J. - P., Maquoi, R., Muzea, J. - P., Vilette, M.:
“Proposal for a revisjon of Eurocode 3”, TC8 - ECCS Meeting, Timisoara, 1999.
- [5] Hellesland, J.:
“Trykkstaver i rammesystemer”, NIF kurs: “Slanke betongkonstruksjoner - Foreklet og optimal dimensjonering med hensyn til sikkerhet og økonomi”, Norske Sivilingeniørers Forening, Oslo, november 1998.
- [6] Hellesland, J.:
“Trykkstaver i rammesystemer - Knekk lengder”, NIF kurs: “Slanke betongkonstruksjoner - Forenklet og optimal dimensjonering med hensyn til sikkerhet og økonomi”, Norske Sivilingeniørers Forening, Oslo, november 1998.
- [7] Hellesland, J.:
“Effective lengths - An appraisal of various restraint participation factors”, Research Report in Mechanics, No. 92-4 May 1992, Mechanics Division, Dept. of Mathematics, Univ. of Oslo, Oslo, Norway.

- [8] Hellesland, J.:
“Effective lengths - Simplified system instability analysis”, Research Report in Mechanics, No. 92-5 May 1992, Mechanics Division, Dept. of Mathematics, Univ. of Oslo, Oslo, Norway.
- [9] Hellesland, J.:
“Approximate effective length factors for columns with positive and negative end restraints”, Research Report in Mechanics, No. 94-1, Mechanics Division, Dept. of Mathematics, Univ. of Oslo, Oslo, Norway.
- [10] Hellesland, J., and Bjorhovde, R. (1996).:
“Restraint demand factors and effective lengths of braced columns.” *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 122(10), 1216-1224.
- [11] Hellesland, J., and Bjorhovde, R. (1996).:
“Improved frame stability analysis with effective lengths.” *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 122(11) 1275-1283.
- [12] Hellesland, J.:
“Tilnærmede momentforstørrelsesfaktorer for statisk ubestemte søyler – Diverse notater for perioden 1993 - 1998”, upublisert, Avdeling for mekanikk, Universitetet i Oslo, 1998.
- [13] Rottmann, K.:
“Matematisk formelsamling”, Spektrum forlag, 6. opplag. Oslo 2001.
- [14] Timoshenko, S. P.:
“History of Strength of Materials”, McGraw-Hill, New York, 1953.

Register

Enkeltsøyle, 7

G , 30

G_A , 30

G_B , 30

L_e , 27

$M(x)$, 9, 10

M_{maks} , 10

N_E , 14, 27

N_{kr} , 26, 27

α_E , 14

\bar{M}_x , 13, 14

\bar{f}_m , 11

\bar{k}_A , 14, 18, 31

\bar{k}_B , 14, 18, 31

β , 27, 30

b_0 , 30

f_m , 13, 21, 23

k , 9

kL , 14, 22

k_A , 11, 30, 31

k_B , 11, 30, 31

kx , 14

r_1 , 12

a , 8

r , 10

Resultater, 52

\bar{k}_{1B} , 88, 134

\bar{k}_{2B} , 88, 134

\bar{k}_{bA} , 84

\bar{k}_{bB} , 84

\bar{k}_{bC} , 84

System, 33

N_{kr} , 39

Q_{12} , 39

β_1 , 39

β_2 , 39

γ_{kr} , 39

$r_{1,1}$, 34

$r_{1,2}$, 34

$r_{2,1}$, 33

$r_{2,2}$, 33

Tilnærmede metoder, 40

C_m , 43–45, 49, 50

$C_{m,s}$, 42

$C_{m,u}$, 41, 42

M_{maks} , 40, 44

α , 42, 46

β_{kon} , 48

f_m , 40–44

f_{m1} , 41, 44